UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : PRÉPARATION À L'AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES RAPPELS SUR SÉRIES NUMÉRIQUES, SÉRIES ENTIÈRES, SÉRIES DE FONCTIONS

PASCAL THOMAS

Edition de Septembre 2012.

Introduction.

Cette feuille sert de support aux travaux dirigés du cours de D.-C. Cisinski. Comme d'habitude, nous ne ferons qu'une partie des exercices.

Bibliographie.

Les sujets qui sont le thème des exercices ci-dessous sont couverts dans les cours de Premier Cycle que vous avez pu suivre à l'université ou ailleurs ou dans votre livre de cours de premier cycle préféré ; j'ai moi-même un faible pour celui de Lelong-Ferrand et Arnaudiès, mais Lehning ou Chambadal & Ovaert sont d'autres bons exemples. Voici quelques autres suggestions de livres pour bûcher l'analyse élémentaire (voire un peu calculatoire).

J. Combes, *Suites et Séries.*
C'est en plein dans le sujet, et la sélection d'exercices est bonne.

W. Rudin, *Principes de l'Analyse Mathématique,* chapitres 3 & 7.
Référence un peu plus originale, et qui vous rappelle les choses de façon compacte.

M. Spivak, *Calculus,* Part IV.
Spivak ne recule jamais devant la beauté et la difficulté que peuvent recéler des mathématiques pourtant déjà anciennes et considérées comme élémentaires. Vous trouverez dans ce livre, par exemple, une démonstration de la transcendance de e. Un tome supplémentaire donne les solutions des exercices.

Y. Chevallard & R. Rolland, *Théorie des Séries : 1/ Séries numériques, 2/ Séries entières.*
Ce livre n'est malheureusement plus disponible en librairie, mais il figurait à la bibliothèque de l'agreg disponible le jour de l'oral, d'après la liste relevée en 2000 ; il a une présentation distrayante et comporte beaucoup d'exemples, souvent historiquement motivés.

Vous trouverez bien d'autres exemples de calculs de suites ou de séries dans des livres d'analyse plus avancés, particulièrement en analyse numérique, en analyse complexe, en probabilités, en dynamique. . .

Bons livres un peu anciens :
K. Knopp, *Theory and application of infinite series,* sorti à l'origine en 1921. La terminologie a vieilli, mais les exemples peuvent être fort astucieux.
E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions,* qui consacre son chapitre 1 aux séries.

1. Suites

1.1. *Soit* $\{u_n\}$ *une suite à valeurs réelles. On rappelle que*

$$\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{p\geq n} u_p\right),$$

et que la $\liminf_{n\to\infty} u_n$ *est définie de façon analogue (détails laissés au lecteur).*

Montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n} u_k = \sup\{\lambda : \lambda \text{ valeur d'adhérence de } \{u_n\}\}.$$

A quelle condition peut-on remplacer ce "sup" par un "max" ?

1.2. *(Convergence au sens de Cesàro) Soit* $\{s_n\}$ *une suite à valeurs complexes, on pose*

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k.$$

(1) *Si* $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, *montrer que* $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = s$.

(2) *Montrer que la réciproque est fausse : donner un exemple où* $\{\sigma_n\}$ *converge, mais pas* $\{s_n\}$.

(3) *Montrer que*

$$\liminf s_n \leq \liminf \sigma_n \leq \limsup \sigma_n \leq \limsup s_n.$$

(4) *Peut-on avoir* $s_n > 0$, $\limsup_{n\to\infty} s_n = +\infty$, *et* $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0$ *?*

1.3. *(Itération des homographies du plan complexe)*

Une homographie du plan complexe (ou application de Möbius) est l'application définie par

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ pour } z \in \mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\} \quad \text{où } a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0.$$

On étend f *comme une application de la sphère de Riemann* $S = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ *dans elle-même, avec les conventions :*

$$f(-\frac{d}{c}) = \infty \text{ si } c \neq 0; \quad f(\infty) = \frac{a}{c} \text{ si } c \neq 0, f(\infty) = \infty \text{ si } c = 0 \text{ (et donc } a \neq 0).$$

On obtient alors une bijection de S *dans* S *(le vérifier). On notera* f^n *l'itérée n-ième de* f *(c'est-à-dire que* $f^{n+1} = f\circ f^n$, $f^0(z) = z$*).*

a) Montrer que, si f *n'est pas l'identité, elle admet un ou deux points fixes dans* S *(discuter selon les valeurs de a, b, c, d.)*

b) Etant donnés deux points distincts arbitraires z_1 *et* z_2, *montrer qu'il existe une homographie* g *telle que* $g(z_1) = 0$, $g(z_2) = \infty$.

c) Montrer que si f *admet deux points fixes distincts notés* z_1, z_2 *et* g *est choisie comme dans la question précédente, alors* $f_1 := g\circ f\circ g^{-1}$ *admet deux points fixes en* 0 *et* ∞. *Quelle est alors la forme de* f_1 *? Pour quelles valeurs de* z *la suite* $\{f_1^n(z)\}$ *sera-t-elle convergente, vers quelle limite ? (discuter selon les valeurs de* $f_1'(0)$*).*

d) Pour une fonction h *qui admet* ∞ *comme point fixe, on pose* $h'(\infty) := h_1'(0)$, *en définissant* $h_1(\zeta) := 1/(h(1/\zeta))$. *Montrer que* $f'(z_1)f'(z_2) = 1$ *et discuter du comportement de* $\{f^n(z_0)\}$ *selon les valeurs de* z_0 *et de* $f'(z_1)$.

e) Mener l'étude similaire aux questions b)-c)-d) dans le cas où f n'admet qu'un seul point fixe.

(Tout ce qui précède est adapté de A. Beardon, Iteration of Rational Functions, p. 3–5).

f) Spécialiser l'étude ci-dessus au cas des homographies réelles (définies sur la droite réelle projective, avec des coefficients réels). Exprimer la discussion en termes d'algèbre linéaire sur $\mathbb{R}^2$.

g) On pose $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. A quelles conditions a-t-on $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$? $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$? Etudier la suite $\{f^n(z)\}$ dans ces deux cas.

2. Séries numériques

2.1. *Le but de l'exemple qui suit est de montrer que l'ordre de sommation est important quand la convergence n'est pas absolue.*

Considérons

$$a_{n,k} := \frac{(-1)^n}{n} \text{ si } n \geq k \geq 1, \quad a_{n,k} := 0 \text{ si } 1 \leq n \leq k-1.$$

Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = S_k \in \mathbb{R}$, et que la la série $\sum S_k$ est convergente.

Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = s_n \in \mathbb{R}$, calculer s_n et montrer que la série $\sum s_n$ est divergente.

2.2. *Soit $\sum a_n$ une série semi-convergente. Montrer que pour tout $l \in [-\infty, +\infty]$, on peut trouver une bijection φ de $\mathbb{N}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\varphi(k)} = l$.*

(Y. Chevallard, *Théorie des Séries : 1/ Séries numériques,* Prop. 7, p. 104.)

2.3. *(Règle de Raabe-Duhamel)*

Soit $a_n > 0$ pour tout n. Montrer que si

$$\liminf_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1,$$

la série $\sum a_n$ converge, et si

$$\limsup_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1,$$

la série $\sum a_n$ diverge. (Indication : comparer $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ avec le rapport des deux termes successifs d'une série de Riemann).

(Cf. par exemple Y. Chevallard, Théorie des Séries : 1/ Séries numériques, p. 79 & 89, et bien d'autres ouvrages).

Application : $a_n = 2^{-2n} C_{2n}^{n}$ (c'est la probabilité que la marche aléatoire discrète symétrique sur $\mathbb{Z}$ revienne au point de départ au temps $2n$; la convergence ou la divergence de la série répond à la question de savoir si cette marche aléatoire est récurrente).

2.4. *(Développement décimal des réels et des rationnels)*

a) Soit $\{a_n\}$ une suite d'entiers $a_n \in \{0, \ldots, 9\}$. Montrer que la série de terme général $a_n/10^n$ converge. De plus, si on pose

$$x := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \in [0, 1],$$

et qu'on suppose que pour tout $n_1 \in \mathbb{N}$*, il existe* $n_2 \geq n_1 \in \mathbb{N}$ *tel que* $a_{n_2} < 9$*, alors*

$$a_n = E\left[10^n x - 10E[10^{n-1}x]\right],$$

où $E[y]$ *désigne la partie entière du réel* y.

b) Réciproquement, si on prend $x \in [0,1[$*, et qu'on pose*

$$a_n := E\left[10^n x - 10E[10^{n-1}x]\right],$$

montrer que la série $\sum_n \frac{a_n}{10^n}$ *converge vers* x.

c) Soit $m \in \mathbb{N}$*,* $m \geq 2$*. On considère une suite d'entiers* $c_n \in \{0,\ldots,9\}$*, périodique de période* m*, i.e.* $c_{n+m} = c_n$ *pour tout* n*. Soit*

$$x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{10^n}.$$

Montrer que la série converge, et que $x \in \mathbb{Q}$ *(donner un procédé pour calculer* x *sous forme de fraction. Indication : commencer par séparer la série en "paquets" de longueur* m*).*

d) Réciproquement, soit p/q *un nombre rationnel (avec* p*,* $q \in \mathbb{N}^*$*). On va montrer que son développement décimal est périodique.*

Montrer qu'il existe toujours deux nombres entiers $A < B \in \{0,\ldots,q\}$ *tels que* q *divise* $10^B p - 10^A p$.

En déduire que $10^B p/q$ *et* $10^A p/q$ *admettent la même partie décimale de leur développement.*

En comparant avec les décimales du développement de p/q*, montrer que celui-ci est de période* $B - A$.

2.5. *On rappelle la définition de l'ensemble ternaire de Cantor. Si* $J = [a,b]$ *est un intervalle fermé borné de* $\mathbb{R}$*, on pose* $J_0 := [a, \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b]$*,* $J_2 := [\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b, b]$*. (Quand on perce un trou d'un tiers de sa longueur au milieu de l'intervalle* J*, on obtient* $J_0 \cup J_2$*). On définit une suite décroissante de compacts de* $\mathbb{R}$ *par* $K_0 := [0,1]$ *et, si* K_n *est une union finie d'intervalles compacts* $\bigcup J_j$*, alors* $K_{n+1} := \bigcup J_{j,0} \cup J_{j,2}$*. Finalement, on pose* $K := \bigcap_n K_n$.

C'est un fait classique, que nous ne démontrerons pas ici, que K *est un ensemble compact, non vide, sans point isolé, et dont chaque composante connexe se réduit à un point.*

Montrer qu'un réel x *appartient à* K *si et seulement si il existe une suite* $\{\alpha_n\}_{n\geq 1} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ *telle que*

$$x = \sum_{1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}.$$

Indication : tout $x \in [0,1[$ *peut sécrire sous la forme ci-dessus si on autorise* $\alpha_n \in \{0,1,2\}$*. Trouver l'ensemble des* x *tels que* $\alpha_1 \neq 1$*. Itérer en considérant* $3x$*...*

(Source : W. Rudin, *Principes de l'Analyse Mathématique,* chapitre 3, exercice 19, p. 72).

2.6. *On rappelle la définition de la série-produit au sens de Cauchy : si* $\{a_n\}$ *et* $\{b_n\}$ *sont deux suites à termes complexes, la série produit a pour terme général*

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Pourquoi cette définition est-elle motivée par la théorie des séries entières ?

a) Montrer le théorème de Mertens : si $\sum a_n$ *est absolument convergente et* $\sum b_n$ *convergente, alors* $\sum c_n$ *est convergente.*

Méthode : posons $A_n := \sum_{k=0}^n a_k$, $B_n := \sum_{k=0}^n b_k$, $\varepsilon_n := \sum_{k=n+1}^\infty b_k$, $C_n := \sum_{k=0}^n c_k$. *Montrer que*

$$C_n = A_n \sum_{k=0}^{\infty} b_k - \sum_{k=0}^{n} a_k \varepsilon_{n-k}. \tag{1}$$

Montrer que le deuxième terme du membre de droite tend vers 0.

b) L'hypothèse de convergence absolue ne peut pas être abandonnée : prendre $a_n = b_n = (-1)^n/\sqrt{n}$.

(Cf. W. Rudin, *Principes de l'Analyse Mathématique,* ch. 3, Th. 3.50, ou Y. Chevallard, *Théorie des Séries : 1/ Séries numériques,* Prop. 9, p. 70).

2.7. *Avec les notations de l'exercice ci-dessus, on suppose que les trois limites suivantes existent :*

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n, \quad B = \lim_{n\to\infty} B_n, \quad C = \lim_{n\to\infty} C_n.$$

Alors $C = AB$ *(théorème dû à Cesàro).*

Méthode : montrez que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_k = AB$$

en utilisant l'identité (1) *pour exprimer* C_k. *Utilisez la convergence au sens de Cesàro.*

Remarque : quels résultats de cet exercice et du précédent obtient-on plus facilement en appliquant le Théorème d'Abel sur la convergence au bord du disque ?

(Y. Chevallard, *Théorie des Séries : 1/ Séries numériques,* Ch. 4, Prop. 8, p. 105).

3. Produits infinis

On rappelle quelques définitions et résultats. Je suis ici les notations d'Arnaudiès et Fraysse, *Cours de Mathématiques, tome 2 : Analyse,* Chap. IX, p. 490 et suivantes.

Etant donnée une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes, on dit que le *produit infini* $\prod v_n$ converge (vers une limite non nulle) si et seulement la suite $(\prod_{k=1}^n v_k)$ admet une limite non nulle.

Remarque : cette définition pose un problème, qui est que la nature du produit peut changer si on change un nombre fini de termes (il suffit d'ajouter ou d'enlever un terme $v_n = 0$). On prend donc souvent, en particulier quand on considère des produits de fonctions holomorphes, une définition affinée : le produit $\prod_{n\geq 1} v_n$ converge si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\prod_{n>N} v_n$ converge vers une limite non nulle, au sens précédent. La limite sera nulle si et seulement si $\prod_{n=1}^N v_n = 0$.

Si le produit converge, on aura que $\lim_n v_n = 1$, on note donc souvent $v_n = 1 + u_n$. On dit que le produit est *absolument convergent* si la série $\sum |u_n|$ est convergente (ce qui implique la convergence du produit, au sens élargi mentionné ci-dessus). C'est le cas le plus fréquemment considéré. Nous allons voir ci-dessous que la généralisation pose des problèmes...

Si tous les v_n sont réels et positifs, alors le produit $\prod v_n$ converge si et seulement si $\sum \log v_n$ converge.

3.1. *On prend* $a_0 > 0$ *et on pose* $a_{n+1} = \sin a_n$.

a) Montrer que la suite $\{a_n\}$ *est décroissante, en déduire qu'elle converge et quelle est sa limite.*

b) En utilisant le fait que la série $\sum(a_n - a_{n+1})$ *converge (évident ; pourquoi ?), montrer que* $\sum a_n^3$ *converge.*

c) En utilisant le produit infini $\prod \frac{a_{n+1}}{a_n}$, *montrer que la série* $\sum a_n^2$ *diverge.*

(Y. Chevallard, *Théorie des Séries : 1/ Séries numériques,* p. 205.)

3.2. *(Fréquence des nombres premiers)*

a) En utilisant le produit infini

$$\prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}},$$

la décomposition des entiers naturels en facteurs premiers, et le fait que $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *pour* $|x| < 1$, *montrer que la série*

$$\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p}$$

est divergente.

b) Déduire du a) le fait suivant (et faible !) sur la répartition des nombres premiers : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{p_{k+1} - p_k}{(\log p_{k+1})^{1+\varepsilon}} = 0.$$

(Pour une autre démonstration de la question a), cf. Y. Chevallard, *Théorie des Séries : 1/ Séries numériques,* exemple 12, p. 21).

4. Séries entières

4.1. *Étudier le rayon de convergence de* $\sum a_n z^n$, *avec* $a_n = C_{2n}^n$, *et le comportement sur le cercle de convergence (indication : Raabe-Duhamel).*

4.2. *Soit* $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$. *Au voisinage de 0,* $f(z) = \sum_k a_k z^k$.

a) Montrer que $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$, $a_0 = a_1 = 1$ *(nombres de Fibonacci).*

b) Calculer les a_k *en décomposant* f *en éléments simples.*

(E. Amar & E. Matheron, Analyse Complexe, ex. 3.40.)

4.3 (Un exemple de séries lacunaires). *a) Soit* $\{n_k\}$ *une suite d'entiers telle que* $n_{k+1} > 2kn_k$. *On pose*

$$h(z) := \sum_k 5^k z^{n_k}.$$

Montrer que le rayon de convergence de cette série est 1, *qu'il existe une constante* $c > 0$ *telle que* $|h(z)| > c5^m$ *pour tout* z *tel que* $|z| = 1-(1/n_m)$, *et que par conséquent,* $\lim_{r\to 1} h(e^{i\theta})$ *n'existe pour aucune valeur de* θ.

Indication : pour cette valeur de $|z|$, *le* m*-ième terme de la somme dominera tous les autres.*

b) Montrer qu'il existe une fonction f *développable en série entière au voisinage de* 0 *telle que* $f(z^2) = f(z) - z$ *et* $f(0) = 0$. *Quel est le rayon de convergence de la série ? Montrer que pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\limsup_{r\to 1} |f(re^{2\pi ik/2^n})| = +\infty.$$

5. Séries de fonctions

5.1. *Soit* $\{r_n\}$ *une énumération des rationnels (i.e.* $\mathbb{Q} = \{r_0, r_1, r_2, \ldots\}$*). On pose*

$$\varphi(x) := \sum_{n : r_n < x} 2^{-n}.$$

Trouver une suite de fonctions qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ *vers* φ*. Etudier la continuité de* φ *en chaque point* $x \in \mathbb{R}$*.*

5.2. *On veut donner un exemple de fonction continue nulle part dérivable.*

a) Montrer que la fonction f *définie ci-dessous est continue sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n!x)}{n!}.$$

Etant donné $x_0 \in \mathbb{R}$*, on pose* $u = x - x_0$ *et*

$$g(u) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n!x_0 + n!u) - \cos(n!x_0)}{n!u}.$$

On va montrer que l'oscillation de g *sur l'intervalle* $[2\pi/k!, 4\pi/k!]$ *ne tend pas vers* 0 *quand* $k \to +\infty$*. Fixons donc* $k \geq 1$*.*

b) Montrer que pour tout $n < k$ *l'oscillation de* $\dfrac{\cos(n!x_0 + n!u) - \cos(n!x_0)}{n!u}$ *est* $\leq 4\pi n!/k!$ *sur l'intervalle* $[2\pi/k!, 4\pi/k!]$*.*

c) Montrer que pour $n > k$ *l'oscillation de* $\dfrac{\cos(n!x_0 + n!u) - \cos(n!x_0)}{n!u}$ *est* $\leq k!/(\pi n!)$ *sur l'intervalle* $[2\pi/k!, 4\pi/k!]$*.*

d) Montrer que l'oscillation de $\dfrac{\cos(k!x_0 + k!u) - \cos(k!x_0)}{k!u}$ *est* $\geq 1/(8\pi)$ *sur l'intervalle* $[2\pi/k!, 4\pi/k!]$*.*

e) En utilisant

$$\sum_{1 \leq n < k} \frac{n!}{k!} < \frac{2}{k} \quad \textit{et} \quad \sum_{n > k} \frac{k!}{n!} < \frac{1}{k},$$

en déduire que l'oscillation de g *sur l'intervalle* $[2\pi/k!, 4\pi/k!]$ *ne tend pas vers* 0 *quand* $k \to +\infty$*.*

f) En déduire que la fonction f *n'est pas dérivable en* x_0*.*