N. PISKOUNOV

CALCUL

DIFFERENTIEL

et

INTEGRAL

Tome I

9e édition

EDITION MIR • MOSCOU

Traduit du russe par

G. DER-MEGERDITCHIAN (ch. I-X) et E. GLOUKHIAN (ch. XI-XII)

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS À LA CINQUIÈME ÉDITION

La cinquième édition en langue française du présent manuel diffère de la 4-ième édition.

Deux nouveaux chapitres ont été inclus dans cet ouvrage : le chapitre XX « Eléments de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique » et le chapitre XXI « Matrices. Ecriture matricielle des systèmes et résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires » qui contient le matériel indispensable pour la préparation mathématique des étudiants des écoles techniques supérieures. En outre dans ce chapitre on a accordé une grande importance à l'écriture matricielle des systèmes d'équations différentielles linéaires. On a utilisé l'écriture matricielle des solutions approchées successives des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients variables. La nécessité d'inclure ce matériel dans un cours de calcul différentiel et intégral pour les écoles techniques est liée au fait que l'étude des solutions des systèmes d'équations différentielles est, dans de nombreux ouvrages d'électrotechnique, de radiotechnique, d'automatique, conduite à l'appui de l'appareil de la théorie des matrices.

Le chapitre XVI a été complété par les paragraphes 26, 27, 28. On considère ici la méthode des approximations successives des solutions des équations différentielles, on démontre les T h é o r è m e s d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle. On a accentué la rigueur de l'exposé de tout le chapitre consacré aux équations différentielles.

Le paragraphe 31 du chapitre XIII « Eléments de la théorie de la stabilité de Liapounov » a été notablement élargi. Il est maintenant intitulé ainsi : « Eléments de la théorie de la stabilité de Liapounov. Comportement des trajectoires de l'équation différentielle au voisinage d'un point singulier ». Ici parallèlement à la considération de la stabilité des solutions des systèmes d'équations différentielles on étudie le comportement des trajectoires à proximité d'un point singulier du plan de phase. Cela était indispensable, car lors de l'étude des questions correspondantes dans les cours d'électrotechnique, de radiotechnique et d'automatique on doit savoir utiliser couramment ces notions. Certains paragraphes ont été récrits en utilisant la théorie de nombres complexes. On a notablement. élargi le § 2 du chapitre X1, où l'on donne la démonstration de l'existence d'une intégrale définie d'une fonction continue. On a ajouté le § 11 complémentaire du chapitre XI « Intégration d'une fonction complexe de la variable réelle ». On a écrit de nouveaux paragraphes 24 et 25 du chapitre XVI consacrés aux séries de termes complexes et aux séries entières de la variable complexe. Le nouveau paragraphe 12 du chapitre XVII est consacré aux séries de Fourier sous forme complexe. On a élucidé certaines notions largement utilisées dans les applications (spectre, fonction spectrale). On a écrit les nouveaux paragraphes 15 « Série de Fourier suivant un système orthogonal de fonctions » et 16 « Notion d'espace fonctionnel linéaire. Analogie entre le développement d’une fonction en série de Fourier et le développement des vecteurs » du chapitre XVII. Ce matériel est exposé de façon que les étudiants et les ingénieurs puissent comprendre le matériel des autres disciplines basées sur cet appareil mathématique.

On a ajouté au chapitre XIX un nouveau paragraphe 20 « La fonction delta et son image ».

Le chapitre VIII a été complété par le paragraphe 19 « Obtention d’une fonction à partir des données expérimentales par la méthode des moindres carrés ». Le contenu de ce paragraphe forme dans la précédente édition l'Annexe I placé à la fin du premier tome de ce manuel.

L'annexe II de la précédente édition est maintenant répartie suivant les paragraphes 10 « Formule d'interpolation de Newton » et 11 « Dérivation numérique » du chapitre VII.

Quelques compléments ont été apportés aux chapitres V, VII, IX, XII et XIII.

L'auteur

Chapitre I

NOMBRE, VARIABLE, FONCTIONS

§ 1. Nombres réels. Représentation des nombres réels par les points de l'axe numérique.

La notion de nombre est l'une des plus fondamentales des mathématiques. Elaborée dans l'Antiquité, elle a subi au tours des siècles un long processus d'extension et de généralisation.

Les nombres entiers, les nombres fractionnaires positifs et négatifs, avec le nombre zéro sont appelés *nombres rationnels*. Tout nombre rationnel peut être mis sous la forme du quotient P/q de deux nombres entiers p et q. Par exemple :

$$\frac{5}{7};\ 1{,}25 = \frac{5}{4}$$

En particulier, tout nombre entier p peut être considéré comme le quotient des deux nombres entiers p et 1 : 1 . Par exemple $6 = \frac{6}{1};\ 0 = \frac{0}{1}$

Les nombres rationnels peuvent être mis sons la forme de fractions décimales périodiques, limitées ou illimitées.

Les nombres exprimés par les fractions décimales illimités non périodiques sont appelés *nombres irrationnels*; tels sont, par exemple, les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 5 - $\sqrt{2}$, etc.

La collection des nombres rationnels et irrationnels forme l'ensemble des nombres *réels*. Les nombres réels constituent un ensemble ordonné, c'est-à-dire que, pour chaque couple de nombres réels x et y, une et seulement une des relations suivantes

15 $x < y, x = y, x > y$ est satisfaite.

Les nombres réels peuvent être représentés par les points de l'axe numérique. On appelle *axe numérique* une droite infinie sur laquelle on a choisi : 1) un point O appelé origine, 2) un sens positif, que l'on indique par une flèche, et 3) une unité de mesure. Le plus souvent nous disposerons l'axe horizontalement et choisirons la direction de gauche à droite comme sens positif.

Si le nombre x1 est, positif nous le représenteront par point, M_1 situé à droite du l'origine et distant de O du $OM_1 = x_1$; de même si le nombre x2 est négatif, nous le représenterons par le point M_2 situé à gauche de O et distant de O de $OM_2 = - x_2$ (fig. 1).
Le point O représente le nombre zéro. I1 est évident que tout nombre réel est représenté par un seul point de l'axe numérique. A deux nombres réels distincts correspondent deux points différents de l'axe numérique.

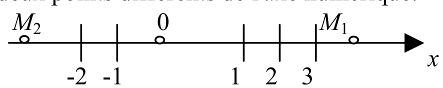


Fig. 1

La proposition suivante est vraie : chaque point de l'axe numérique est l'image d'un seul nombre réel (rationnel ou irrationnel).
Ainsi il existe une correspondance biunivoque entre tous les nombres réels et tous les points de l'axe numérique : à chaque nombre correspond un point unique et inversement à chaque point correspond un seul nombre dont il est l'image. Cela permet dons de nombreux raisonnements d'employer indifféremment la notion de « nombre x » ou celle de « point x ». Dans ce manuel nous aurons fréquemment l'occasion de mettre cette R e m a r q u e à contribution.
Indiquons, sans la démontrer, la propriété suivante relative à l'ensemble des nombres réels : *entre deux nombres réels quelconques, il existe toujours des nombres rationnels et des nombres irrationnels*. Géométriquement cela signifie *: entre deux points quelconques de l'axe numérique, il existe toujours des points rationnels et des points irrationnels.*
En guise de conclusion, citons le T h é o r è m e suivant qui joue, en quelque sorte, le rôle d'un « pont jeté entre la théorie et la pratique ».

T h é o r è m e . *Tout nombre irrationnel α peut être exprimé avec le degré de précision voulu à l'aide de nombres rationnels.*

En effet, soit α un nombre irrationnel positif. Proposons-nous d'évaluer la valeur approchée de α à 1/n près (par exemple, à 1/10) près, a 1/100 près, etc.).

Quel que soit le nombre α, il est inclus entre deux nombres entiers consécutifs N et $N + 1$. Partageons le segment compris entre N et $N + 1$ en n parties égales. Alors α se trouvera inclus entre deux nombres rationnels $N + \frac{m}{n}$ et N+$\frac{m+1}{n}$.

La différence entre ces deux nombres étant égale à $\frac{1}{n}$, chacun d'eux exprimera avec la précision voulue, le premier par défaut, le second par excès.

E x e m p l e . Le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ s'exprime à l'aide des nombres rationnels :

1,4 et 1,5 à 1/10 près,
1,41 et 1,42 à 1/100 près,
1,414 et 1,415 à 1/1000 près, etc.

§ 2. Valeur absolue d'un nombre réel

Introduisons maintenant la notion de valeur absolue d'un nombre réel.

D é f i n i t i o n . On appelle *valeur absolue* (*ou module*) d'un nombre réel x (noté $|x|$) le nombre réel non négatif qui satisfait aux conditions suivantes

$$| x | = x \text{ si } x \geq 0;$$
$$| x | =-x \text{ si } x < 0.$$

E x e m p l e s : $| 2 | = 2$; $| -5 | =5$; $| 0 | = 0$.
Il découle de cette définition que pour tout x on a $x \leq |x|$.
Voyons quelques propriétés de la valeur absolue.
1. *La valeur absolue de la somme algébrique de plusieurs nombres réels nest pas supérieure à la somme des valeurs absolues des termes*

$$| x + y | \leq | x | + | y |.$$

D é m o n s t r a t i o n . Soit $x + y \geq 0$, alors
$$| x + y | = x + y \leq | x | + | y | \text{ (car } x \leq | x | \text{ et } y \leq | y |).$$
Soit $x + y < 0$, alors
$$| x + y | =- (x + y) = (-x) + (-y) | \leq x | + | y | .$$
c.q.f.d.

La démonstration peut être facilement étendue au cas d'un nombre quelconque de termes.
Exemples:
$$| -2 + 3 | < | -2 | + | 3 | = 2 + 3 = 5 \text{ ou } 1< 5,$$
$$| -3 -5 | = | -3 | + | -5 | = 3 + 5 = 8 \text{ ou } 8 = 8.$$

2. *La valeur absolue de la différence nest pas inférieure à la différence des valeurs absolues des termes*
$$| x - y | \geq | x | - | y | , | x | > | y |.$$

D é m o n s t r a t i o n . posons $x - y = z$, alors $x = y + z$ et d'après la propriété précédente

$$|x| = |y + z| \leq |y| + |z| = |y| + |x - y|,$$

d'où

$$|x| - |y| \leq |x - y| \quad \text{c.q.f.d.}$$

3. *La valeur absolue du produit est égale au produit des valeurs absolues des facteurs:*

$$|xyz| = |x|\,|y|\,|z|.$$

4. *La valeur absolue du quotient est égale au rapport des valeurs absolues du dividends et du diviseur*

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Les deux dernières propriétés découlent immédiatement de la définition de la valeur absolue.

§ 3. Grandeurs variables et grandeurs constantes

Quand nous mesurons certaines grandeurs physiques telles que le temps, la longueur, la surface, le volume, la masse, la vitesse, la pression, la température, etc., nous établissons les valeurs numériques de ces grandeurs physiques. Les mathématiques étudient les grandeurs sans tenir compte de leur contenu concret. Dans ce qui suit, quand nous parlerons de grandeur, nous aurons en vue ses valeurs numériques. Durant différents phénomènes certaines grandeurs varient, c'est-à-dire qu'elles soot susceptibles de prendre diverses valeurs numériques ; au contraire, d'autres peuvent conserver une même valeur numérique. Ainsi, si un point matériel se déplace suivant un mouvement uniforme, le temps et la distance varient, tandis que la vitesse reste constants.
On appelle *grandeur variable* ou *variable* une grandeur susceptible de prendre différentes valeurs numériques. Une grandeur dont les valeurs numériques ne changent pas est appelée grandeur constants ou constants. Par la suite, nous désignerons les grandeurs variables par les lettres x, y, z, u, . . ., etc., et les grandeurs constantes par les lettres a, b, c, . . , etc.

R e m a r q u e : En mathématiques on considère souvent les grandeurs constantes comme un cas particulier des grandeurs variables : une constants est une variable dont les diverses valeurs numériques sont toutes égales.

Remarquons, toutefois, qu'au tours de l'étude de divers phénomènes physiques il peut arriver qu'une même grandeur soit constants dans certains cas et variable dans d'autres. Par exemple, la vitesse d'un corps anima d'un movement uniformes est une grandeur constante, mais la vitesse d'un mouvement uniformément accéléré est une grandeur variable. Les grandeurs qui conservent une même valeur quel que soit le phénomène considéré sont appelées *constantes absolues*. Ainsi, le rapport de la longueur dune circonférence à son diamètre est une constants absolue dont la valeur $\pi = 3{,}14159...$
Nous verrons par la suite que la notion de grandeur variable est fondamentale pour le calcul intégral et différentiel. Dans « La dialectique de la nature » Engels écrit: « La grandeur variable de Descartes a marqué un tournant en mathématiques. C'est avec elle que le mouvement et la dialectique sont entrés dans les mathématiques et que se fit sentir tout de suite la nécessité du calcul différentiel et intégral. »

§ 4. Domaine de définition dune variable

Une variable est susceptible de prendre des valeurs numériques différentes. L'ensemble de ces valeurs peut varier suivant le caractère du problème considéré. Par exemple, la température de l'eau chauffée dans les conditions normales peut varier depuis la température ambiante, 15 à 18 °C, jusqu'à celle du point d'ébullition, 100 °C.
Par contre, la variable $x = \cos\alpha$ peut prendre toutes les valeurs comprises entre -1 et +1.
La valeur d'une variable s'exprime géométriquement par un point de l'axe numérique. Ainsi, l'ensemble des valeurs que prend la variable $x = \cos\alpha$ pour toutes les valeurs de a est représenté par l'ensemble des points de l'axe numérique compris entre -1 et +1, les points -1 et +1 étant inclus (fig. 2).

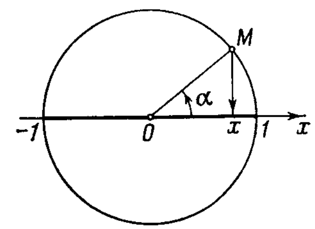


Fig. 2

D é f i n i t i o n . On appelle *domaine de définition* d'une variable l'ensemble des valeurs numériques qu'elle est susceptible de prendre. Citons les domaines de définition de certaines variables que nous rencontrerons fréquemment par la suite.
On appelle *intervalle ouvert* ou intervalle d'extrémités a et b l'ensemble de tous les nombres x compris entre a et b (a < b); les nombres a et b n'appartiennent pas à cet ensemble. On le désigne soit par la notation (a, b), soit par les inégalités $a < x < b$.
On appelle *segment* ou *intervalle fermé* d'extrémités a et b l'ensemble de tous les nombres x compris entre les deux nombres a et b ; les nombres a et b ppartiennent à l'ensemble. On le désigne soit par la notation [a; b], soit par les inégalités

$$a \leq x \leq b.$$

Si l'un des nombres *a* ou *b*, *a* par exemple, appartient et si l'autre n' appartient pas à cet intervalle, on a alors un semi-intervalle o u v e r t en *b* ; on peut le définir par les inégalités

$$a \leq x < b$$

et on le désigne par la notation [a, b). Si le nombre *b* appartient et si *a* n'appartient pas à cet intervalle, on a alors *un semi-intervalle* o u v e r t en *a* (*a*, *b*], que l'on peut définir à l'aide des inégalités

$$a < x \leq b.$$

Si la variable *x* prend toutes les valeurs plus grandes que *a*, on désigne cet intervalle par la notation $(a, +\infty)$, que l'on peut égalment définir à l'aide des inégalités conventionnelles $a < x < +\infty$.

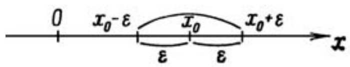


Fig. 3

On considérera également les intervalles et les semi-intervalles infinis, définis par les inégalités conventionnelles suivantes:

$$a \leq x < +\infty\ ;\ -\infty < x < c;\ \ -\infty < x \leq c;\ -\infty < x < +\infty.$$

E x e m p l e . Le domaine de définition de la variable $x = \cos\alpha$, pour toutes les valeurs de α, est le segment [-1, +1] ; on peut l'exprimer à l'aide des inégalités $-1 < x < +1$.

On peut remplacer dans les définitions précédentes le mot « nombre » par le mot « point ». Ainsi, on appelle *segment* l'ensemble de tous les points *x* situés entre les points *a* et *b* (*a* et *b* étant les *extrémités du segment*), les points *a* et *b* sont inclus dans cet ensemble.

On appelle *voisinage* d'un point x_o tout intervalle ouvert (*a*, *b*) contenant ce point, c'est-à-dire un intervalle (*a*, *b*) pour lequel soient vérifiées les inégalités $a < x_o < b$. On choisit souvent le voisinage (*a*, *b*) de sorte que le point x_o se trouve en son milieu. Le point x_o est. alors appelé le centre du voisinage et le nombre $\frac{b-a}{2}$ le *rayon du voisinage*. La figure 3 représente le voisinage $(x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon)$ de centre x_o et de rayon ε.

§ 5. Variable ordonnée. Variable croissante et variable décroissante. Variable bornée

On dit que la variable *x* est *ordonnée* si l'on connaît son domaine de définition et si, pour chaque couple de ses valeurs, on peut indiquer celle qui est antécédente et celle qui est conséquente. Ici la notion d'« antécédence » ou de « conséquence » n'est pas liée au temps. Elle exprime une certaine façon d'ordonner les valeurs de la variable.

Un cas particulier de grandeur variable ordonnée est celui d'une grandeur variable dont les valeurs forment une *suite numérique* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ Dans ce cas, pour $k' < k$ la valeur x_k. est « antécédente » et la valeur x_k « conséquente », indépendamment du fait laquelle de ces deux valeurs est la plus grande.

D é f i n i t i o n 1. Une variable est dite *croissante* si chaque valeur conséquente est plus grande que chaque valeur antécédente. Une variable est dite *décroissante* si chaque valeur conséquente est plus petite que chaque valeur antécédente.

Les variables croissantes et les variables décroissantes sont appelées variables à *variation monotone* ou simplement *variables monotones*.

E x e m p l e . Quand on double le nombre des côtés d'un polygone régulier inscrit dans un cercle, l'aire *s* de ce polygone est une variable croissante. De même, quand on double le nombre des côtés d'un polygone circonscrit à un cercle, faire de ce polygone est une variable décroissante. Remarquons qu'une variable n'est pas nécessairement croissante ou décroissante. Par exemple, la variable $x = \sin\alpha$ n'est pas une variable monotone quand α croît sur le segment $[0, 2\pi]$. Elle croît d'abord de 0 à 1, puis décroît de 1 à -1, croît de nouveau de -1 à 0.

D é f i n i t i o n 2. Une variable *x* est dite *bornée* s'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour toutes les valeurs conséquentes de la variable à partir d une certaine valeur, les inégalités

$$-M \leq x \leq M, \text{ c'est-à-dire } |\, x \,| \leq M,$$

sont satisfaites.

En d'autres termes, une variable est dite bornée s'il existe un segment [-*M*, *M*] tel qu'à partir d'une certaine valeur toutes les valeurs conséquentes de la variable appartiennent à ce segment. Toutefois, il existe des variables bornées dont les valeurs ne remplissent pas le segment [-*M*, *M*]. Par exemple, une variable susceptible de prendre les différentes valeurs rationnelles du segment [-2, 2] est bornée, mais il est évident qu'elle ne prend pas toutes les valeurs de ce segment (précisément, les valeurs irrationnelles).

§ 6. Fonction

L'étude des divers phénomènes de la nature et la résolution de divers problèmes techniques et, par conséquent, mathématiques, nous amènent à considérer la variation d'une grandeur en corrélation avec la variation d'une autre grandeur. Ainsi quand nous étudions un mouvement, nous considérons le chemin parcouru comme une variable qui dépend du temps. Ici le chemin parcouru est une fonction du temps.

Prenons un autre exemple. La surface du cercle en fonction du rayon est donnée par la formule bien connue $Q = \pi R^2$. Si le rayon R prend différentes valeurs, la surface Q prendra également différentes valeurs. Ainsi la variation de l'une de ces variables entraîne la variation de l'autre. Ici la surface du cercle Q est une fonction du rayon R. Donnons la définition de la notion de « fonction ».

D é f i n i t i o n 1. Nous dirons que y est une *fonction* de x et nous écrirons $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, etc., si à chaque valeur de la variable x appartenant à un certain domaine correspond une valeur de la variable y.

La variable x est appelée *variable indépendante*. La dépendance entre les variables x et y s'appelle une *dépendance fonctionnelle*. La lettre f, qui entre dans la notation symbolique de la dépendance fonctionnelle $y = f(x)$, indique qu'il faut appliquer certaines opérations à x pour obtenir la valeur correspondante de y. On écrit parfois $y = y(x)$, $u = u(x)$, au lieu de $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$; dans ce cas, les lettres y et u expriment en même temps la valeur de la fonction et le symbole des opérations appliquées à x.

La notation $y = C$, où C est une constante, exprime une fonction dont la valeur est égale à C quel que soit x.

D é f i n i t i o n 2. L'ensemble des valeurs x pour lesquelles la valeur de la fonction y est donnée par la loi $f(x)$ est appelé *domaine d'existence* de la fonction (ou *domaine de définition* de la fonction).

E x e m p l e 1. La fonction $y = \sin x$ est définie pour toutes les valeurs de x. Donc, son domaine d'existence est l'intervalle infini $-\infty < x < +\infty$

R e m a r q u e 1. S'il existe une dépendance fonctionnelle entre les deux variables x et $y = f(x)$ et si l'on considère x et $y = f(x)$ comme des variables ordonnées, nous dirons alors que pour les deux valeurs $y^* = f(x^*)$ et $y^{**} = f(x^{**})$ de la fonction $f(x)$ correspondant, aux valeurs x^* et x^{**} de la variable x, la valeur conséquente de la fonction est celle qui correspond à la valeur conséquente de la variable indépendante. C'est pourquoi nous sommes tout naturellement conduits à énoncer la définition suivante.

D é f i n i t i o n 3. La fonction $y = f(x)$ est dite croissante si à une plus grande valeur de la variable indépendante correspond une plus grande valeur de la fonction. On définit d'une manière analogue la fonction *décroissante*.

E x e m p l e 2. La fonction $Q = \pi R^2$ est une fonction croissante pour $0 < R < +\infty$, car à une plus grande valeur de R correspond une plus grande valeur de Q.

R e m a r q u e 2. Quand on définit la notion de fonction, on admet parfois qu'à chaque valeur de x prise dans un certain domaine correspond non pas une valeur de y, mais plusieurs ou même une infinité. Dans ce cas, la fonction est dite *multivoque*, tandis que la fonction précédemment définie est dite *univoque*. Par la suite, nous conviendrons d'appeler fonctions uniquement celles qui sont univoques. Si dans certains cas nous avons affaire à des fonctions multivoques, nous le spécifierons chaque fois pour éviter toute confusion.

§ 7. Diverses formes d'expression des fonctions

I. F o n c t i o n s d o n n é e s à d'a i d e d e t a b l e s

Dans ce procédé on dispose dans un certain ordre les valeurs de la variable indépendante $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les valeurs correspondantes de la fonction $y_1, y_2, \ldots, y_n$

x	x_1	x_2									x_n
y	y_1	Y_2									y_n

Telles sont, par exemple, les tables des fonctions trigonométriques, les tables des logarithmes, etc.

On peut obtenir au cours de l'étude expérimentale de certains phénomènes des tables qui expriment la dépendance fonctionnelle existant entre les grandeurs mesurées. Ainsi, par exemple, les relevés de la température de l'air faits dans une station météorologique durant une journée nous donnent la table suivante

Valeur de la température T (*en degrés*) *en fonction du temps* t (*en heures*)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	0	-1	-2	-2	-0.5	1	3	3.5	4

Cette table définit T en fonction de t.

II. Représentation graphique des fonctions

Soit dans le plan un système de coordonnées rectangulaires. Un ensemble de points M (x, y), tel qu'aucun couple de points ne se trouve sur une droite parallèle à l'axe Oy, définit une certaine fonction univoque $y = f(x)$. Les valeurs de la variable indépendante sont les abscisses de ces points, les valeurs de la fonction les ordonnées correspondantes (fig. 4).

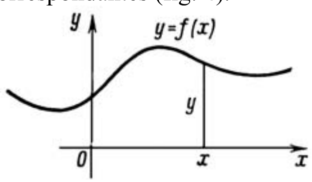


Fig. 4

L'ensemble des points du plan (xOy) dont les abscisses sont les valeurs de la variable indépendante et les ordonnées les valeurs correspondantes de la fonction est appelé *graphique* de cette fonction.

III. Représentation analytique des fonctions

Précisons tout d'abord ce que nous entendons par « expression analytique ». Nous appellerons expression analytique la notation symbolique de l'ensemble des opérations mathématiques connues que l'on doit appliquer dans un certain ordre à des nombres et des lettres exprimant des grandeurs constantes ou variables.

Remarquons que par ensemble des opérations mathématiques connues nous envisageons non seulement les opérations mathématiques apprises au cours des études secondaires (addition, soustraction, extraction de la racine, etc.) mais également toutes les opérations qui seront définies au fur et à mesure de l'exposé du cours.

Donnons des exemples d'expressions analytiques

$$x^4 - 2; \quad \frac{\log x - \sin x}{5x^2 + 1}; \quad 2^x - \sqrt{5+3x}, \quad \text{etc.}$$

Si la dépendance fonctionnelle $y = f(x)$ est telle que f est une expression analytique, nous disons que la fonction y de x est donnée analytiquement. Voici quelques exemples d'expressions analytiques

$$1)\ y = x^4 - 2; \quad 2)\ y = \frac{x+1}{x-1}; \quad 3)\ y = \sqrt{1-x^2}; \quad 4)\ y = \sin x; \quad 5)\ Q = \pi R^2, \quad \text{etc.}$$

Dans ces exemples les fonctions sont exprimées analytiquement par une seule formule. (On appelle formule l'égalité entre deux expressions analytiques.) Dans ces cas on peut parler du domaine naturel de définition d'une fonction.

Le *domaine naturel de définition d'une fonction* donnée par une expression analytique est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'expression du second membre a une valeur bien déterminée. Ainsi, le domaine naturel de définition de la fonction $y = x^4 - 2$ est l'intervalle infini $-\infty < x < +\infty$, puisque cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x. La fonction $y = \frac{x+1}{x-1}$ est définie pour toutes les valeurs de x, excepté la valeur $x = 1$, car pour cette valeur le dénominateur s'annule. Le domaine naturel de définition de la fonction $y = \sqrt{1-x^2}$ est le segment $-1 < x < 1$, etc.

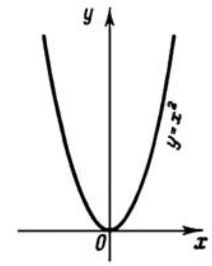


Fig. 5

Remarque. Il importe parfois de considérer non pas tout le domaine naturel de définition d'une fonction, mais une partie de ce domaine. Ainsi, la surface Q du cercle s'exprime en fonction du rayon R par la fonction $Q = \pi R^2$. Le domaine de définition de cette fonction pour ce problème géométrique concret est évidemment l'intervalle infini $0 < R < +\infty$. `routefois, le domaine naturel de définition de cette fonction est l'intervalle infini $-\infty < R < +\infty$.

Une fonction $y = f(x)$ dont on connaît l'expression analytique peut être représentée graphiquement sur le plan des coordonnées xOy. Ainsi, le graphique de la fonction $y = x^2$ est la parabole représentée sur la figure 5.

§ 8. Principales fonctions élémentaires. Fonctions élémentaires

Les *principales fonctions élémentaires* sont des fonctions dont l'expression analytique est l'une des suivantes

I. *La fonction puissance*: $y = x^\alpha$ où α est un nombre réel *).
II. *La fonction exponentielle*: $y = a^x$ où a est un nombre positif différent de 1.
III. *La fonction logarithmique*: $y = \log_a x$ où la base du logarithme est un nombre positif a différent de l'unité.

---

* Pour α irrationnel, cette fonction se calcule en prenant le logarithme et l'exponentielle : $\log y = \alpha \log x$. On suppose que $x > 0$.

IV. Les fonctions trigonométriques: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$.

V. *Les fonctions trigonométriques inverses* $y = \operatorname{arc} \sin x$, $y = \operatorname{arc} \cos x$, $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$, $y = \operatorname{arc} \sec x$, $y = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$.

Déterminons les domaines de définition et traçons les graphiques des principales fonctions élémentaires :

L a f o n c t i o n p u i s s a n c e , $y = x^{\alpha}$.

1. α est un entier positif. La fonction est définie en chaque point de l'intervalle infini $-\infty < x < +\infty$. Les graphiques de cette fonction pour différentes valeurs de a sont représentés sur les figures 6 et 7.

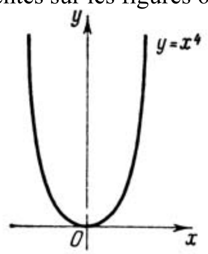


Fig. 6

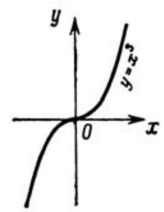


Fig. 7

2. α est un entier négatif. Dans ce cas la fonction est définie pour toutes les valeurs de x, excepté la valeur $x = 0$. Les graphiques de cette fonction pour différentes valeurs de a sont représentés sur les figures 8 et 9. y

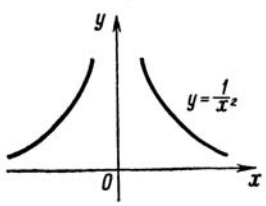


Fig. 8

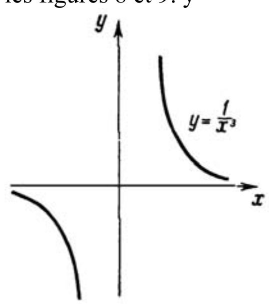


Fig. 9

Les figures 10, 11, 12 représentent les graphiques des fonctions puissance pour α rationnels fractionnaires.

L a f o n c t i o n e x p o n e n t i e l l e , $y = a^x$, $a > 0$ et $a \neq 1$. Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x. Le graphique de cette fonction est représenté sur la figure 13.

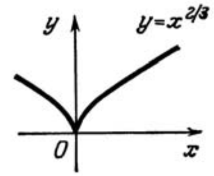


Fig. 10

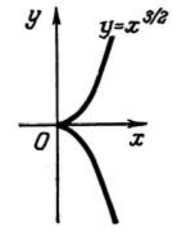


Fig. 11

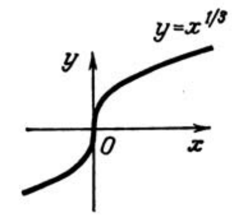


Fig. 12

L a f o n c t i o n l o g a r i t h m i q u e , $y = \log_a x$, $a > 0$ et $a \neq 1$. Cette fonction est définie pour $x > 0$. Le graphique de cette fonction est représenté sur la figure 14.

L e s f o n c t i o n s t r i g o n o m é t r i q u e s (c i r c u l a i r e s) . Dans les formules $y = \sin x$, etc., la variable independante

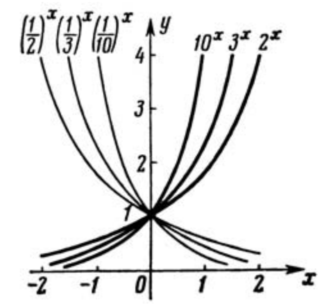


Fig. 13

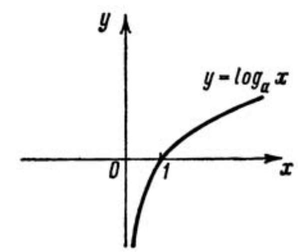


Fig. 14

x est exprimée en radians. Avant de donner la définition d'une fonction périodique remarquons que toutes les fonctions circulaires énumérées sont périodiques.

D é f i n i t i o n 1. La fonction $y = f(x)$ est dite *périodique* s'il existe un nombre constant C tel que la valeur de la fonction ne change pas quand on ajoute (ou l'on retranche) le nombre C à la variable indépendante : $f(x + C) = f(x)$.

Le plus petit de ces nombres est appelé *période* de la fonction. Nous la désignerons par la suite par $2l$.

Il découle immédiatement de cette définition que la fonction $y = \sin x$ est une fonction périodique de période 2π : $\sin x = \sin (x + 2\pi)$. La période de la fonction $y = \cos x$ est aussi égale à 2π. La période des fonctions $y = \text{tg}\, x$ et $y = \text{ctg}\, x$ est égale à π.

Les fonctions $y = \sin x$ et $y = \cos x$ sont définies pour toutes les valeurs de x ; les fonctions $y = \text{tg}\, x$ et $y = \sec x$ sont définies partout, sauf aux points $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; les fonctions $y = \text{ctg}\, x$ et $y = \text{cosec}\, x$ sont définies pour toutes les valeurs de x, sauf aux points $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Les graphiques des fonctions trigonométriques sont représentés sur les figures 15-19. Par la suite nous étudierons en détail les graphiques des fonctions trigonométriques inverses.

Introduisons la notion de fonction de fonction. Si y est une fonction de u et u une fonction de la variable x, y dépend alors de x. Soit

$$y = F(u)$$

et

$$u = \varphi(x) .$$

Nous en déduisons une fonction y de x : $y = F[\varphi(x)]$.

Cette dernière est appelée *fonction de fonction* ou *fonction composée*.

E x e m p l e 1. Soit $y = \sin u$ et $u = x^2$. La fonction $y = \sin (x^2)$ est une fonction composée de x.

R e m a r q u e . Le domaine de définition de la fonction $y = F[\varphi(x)]$ est soit le domaine de définition tout entier de la fonction $u = \varphi(x)$, soit la partie de ce domaine dans laquelle les valeurs de u appartiennent au domaine de définition de la fonction $F(u)$.

E x e m p l e 2. Le domaine de définition de la fonction $y = \sqrt{1 - x^2}$ $(y = \sqrt{u},\ u = 1 - x^2)$ est le segment $[-1, 1]$ puisque quand $|x| > 1$, $u < 0$ et, par conséquent, la fonction $\sqrt{u}$ n'est pas définie (quoique la fonction $u = 1 - x^2$ soit définie pour toutes les valeurs de x). Le graphique de cette fonction est la moitié supérieure de la circonférence de rayon 1, dont le centre est l'origine des coordonnées.

L'opération « fonction de fonction » peut être exécutée non seulement une fois, mais un nombre arbitraire de fois. Par exemple, on obtient la fonction composée $y = \text{Log}\,[\sin (x^2 + 1)]$ en exécutant les opérations suivantes (en définissant les fonctions suivantes)

$$v = x^2 + 1,\ u = \sin v,\ y = \text{Log}\, u.$$

Donnons la définition d'une fonction élémentaire.

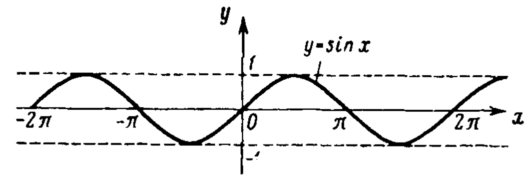


Fig. 15

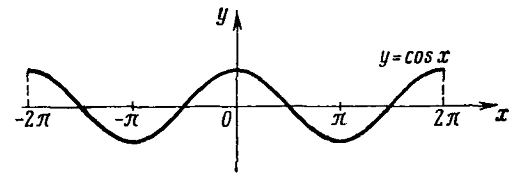


Fig. 16

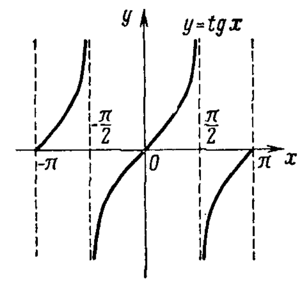


Fig. 17

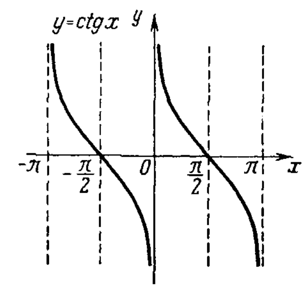


Fig. 18

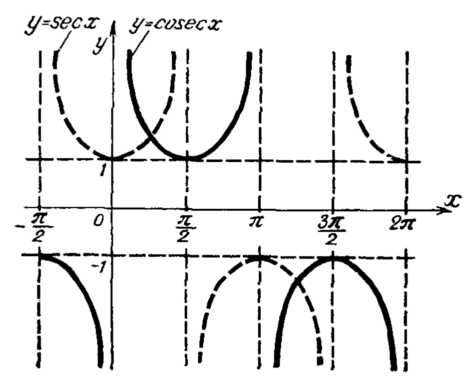
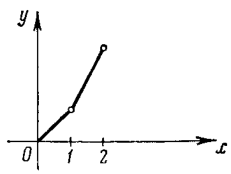


Fig. 19

D é f i n i t i o n 2. On appelle *fonction élémentaire* toute fonction qui peut être donnée à l'aide d'une seule formule du type $y = f(x)$, où la fonction $f(x)$ est le résultat des combinaisons de fonctions élémentaires principales et de constantes réalisées à l'aide des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division et de fonction de fonction ; toutes les opérations doivent être effectuées un nombre fini de fois. I1 découle de cette définition que les fonctions élémentaires font partie des fonctions définies analytiquement.

Exemples de fonctions élémentaires :



$$y = |x| = \sqrt{x^2},\ y = \sqrt{1 + 4\sin^2 x}$$

$$y = \frac{\log x + 4\sqrt[3]{x} + 2tgx}{10^x - x + 10} \quad \text{etc.}$$

Fig. 20

Exemple de fonction non élémentaire

La fonction $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ ($y = f(n)$) n'est pas une fonction élémentaire puisque le nombre des opérations que l'on doit effectuer pour obtenir y croît avec n, c'est-à-dire n'est pas un nombre fini.

R e m a r q u e. La fonction représentée sur la figure 20 est une fonction élémentaire bien qu'elle suit donnée à l'aide de deux formules :

$f(x) = x$, si $0 < x \le 1$; $f(x) = 2x - 1$, si $1 \le x \le 2$.

Cette fonction peut être donnée par une seine formule

$$f(x) = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}|x - 1| = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{(x-1)^2}$$

pour $0 \le x \le 2$.

§ 9. Fonctions algébriques

Les fonctions algébriques comprennent les fonctions élémentaires suivantes:

I. F o n c t i o n r a t i o n n e l l e e n t i è r e o u p o l y n ô m e

$$y = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

où $a_o, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres constants appelés coefficients ; n est un entier positif que l'on appelle degré du polynôme. I1 est évident que cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x, c'est-à-dire qu'elle est définie dans un intervalle infini.

E x e m p l e s : 1. $y = ax + b$ est une *fonction linéaire*. Quand $b = 0$, cette fonction exprime une dépendance entre x et y telle que ces deux variables sont proportionnelles. Quand $a = 0$, $y = b$, la fonction est constante.

2. $y = ax^2 + bx + c$ est une fonction du second degré. Le graphique de cette fonction est une parabole (fig. 21). L'étude détaillée de ces fonctions est l'objet de la géométrie analytique.

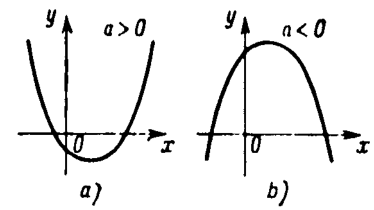


Fig. 21

II. F r a c t i o n s r a t i o n n e l l e s. Cette fonction est définie comme le rapport de deux polynômes

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

Un exemple de fraction rationnelle nous est fourni par la fonction

$$y = \frac{a}{x}$$

qui exprime une dépendance inversement proportionnelle.

Le graphique de cette fonction est donné sur la figure 22. Il est évident que la fraction rationnelle est définie pour toutes les valeurs de x, excepté bien sûr les valeurs pour lesquelles le dénominateur s'annule.

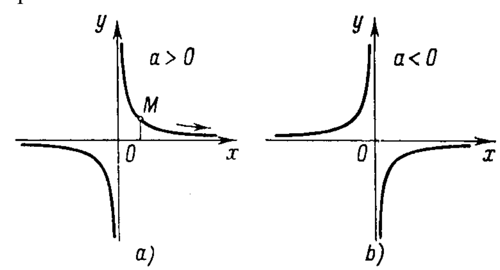


Fig. 22

I I F o n c t i o n i r r a t i o n n e l l e. Onditque la fonction $y = f(x)$ est *irrationnelle* si $f(x)$ est le résultat des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division et d élévation à une puissance rationnelle non entière.

Voici des exemples de fonctions irrationnelles

$$y = \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^2}}; \quad y = \sqrt{x} \text{ , etc.}$$

R e m a r q u e 1. Les trois types de fonctions algébriques que nous venons de citer n'épuisent pas toutes les fonctions algébriques. On appelle *fonction algébrique* toute fonction $y = f(x)$ qui satisfait à une équation du type

$$P_o(x)\, y^n + P_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + P_n(x) = 0, \qquad (1)$$

où $P_o(x)$, $P_1(x)$, . . . $P_n(x)$ sont des polynômes de x.

On peut démontrer que toute fonction appartenant à l'un des trois types cités vérifie une équation du type (1), mais parmi les fonctions vérifiant les équations du type (1), il existe des fonctions qui n'appartiennent à aucun des trois types précédents.

R e m a r q u e 2. On appelle fonctions *transcendantes* les fonctions qui ne sont pas algébriques.
Voici des exemples de fonctions transcendantes $y = \cos x$, $y = 10^x$, etc.

§ 10. Système de coordonnées polaires

On peut déterminer la position d'un point du plan à l'aide d'un *système* dit de *coordonnées polaires*.
Soient dans le plan un point O que l'on nomme pôle et une demi-droite issue de ce point que l'on appelle *axe polaire*. La position d'un point arbitraire M du plan peut être déterminée à l'aide de deux nombres : le nombre ρ qui donne la distance du point M au pôle, et le nombre φ qui est égal à l'angle formé par le segment OM et l'axe polaire. On adopte le sens contraire aux aiguilles d'une montre comme sens positif.

Les nombres ρ et φ sont appelés *coordonnées polaires* du point M (fig. 23).
Le rayon vecteur p sera toujours un nombre non négatif. Si l'angle polaire φ varie entre les limites $0 \le \varphi \le 2\pi$, alors à chaque point du plan, autre que le pôle, correspond un couple bien déterminé de nombres ρ et φ. Pour le pôle on a $\rho = 0$ et φ est arbitraire.

Etablissons les relations qui existent entre les coordonnées polaires et les coordonnées orthogonales. Supposons que l'origine du système de coordonnées orthogonales coïncide avec le pôle et le sens positif de l'axe Ox avec l'axe polaire.

Il découle directement de la figure 24 que: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$
et inversement

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ , tg } \varphi = \frac{y}{x}.$$

R e m a r q u e . Pour déterminer φ, il faut prendre en considération le quadrant où se trouve le point et choisir la valeur appropriée de φ. Dans le système de coordonnées polaires l'équation $\rho = F(\varphi)$ détermine une courbe.

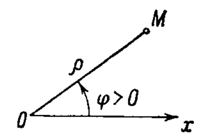


Fig. 23

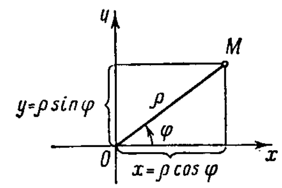


Fig. 24

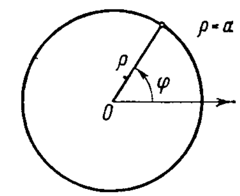


Fig. 25

E x e m p l e 1. L'équation $\rho = a$, où a est une constante, définit dans le système de coordonnées polaires un cercle, dont le centre est au pôle et le rayon est a.

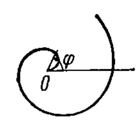


Fig. 26

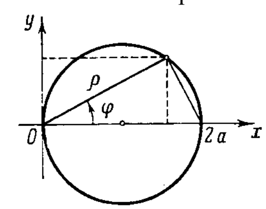


Fig. 27

L'équation de ce cercle (fig. 25) dans un système de coordonnées orthogonales, disposé comme l'indique la figure 24, est :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = a^2$$

Exemple 2.
$\rho = a\,\varphi$, où a = const.
Disposons sous forme de table les valeurs de p pour certaines valeurs de φ :

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	3π	4π
ρ	0	≈0,78a	≈0,78a	≈0,78a	≈0,78a	≈0,78a	≈0,78a	≈0,78a	≈12,56a

La courbe correspondante est représentée sur la figure 26. Cette courbe est appelée *spirale d'Archimède*.

E x e m p l e 3. $\rho = 2a \cos \varphi$.

C'est l'équation d'un cercle de rayon a, dont le centre se trouve au point. $\rho_{o} = a$, $\varphi = 0$ (fig. 27). Ecrivons l'équation de ce cercle dans le système de coordonnées rectangulaires.

En substituant dans cette équation $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos\varphi = x$ ou

$$a\sqrt{x^2+y^2} = 2a\frac{2a}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

Exercices

1. Soit donnée la fonction $f(x) = x^2 + 6x - 4$. Vérifier les égalités $f(1) = 3$ $f(3) = 23$.
2. $f(x) = x^2 + 1$. Calculer les valeurs: a) $f(4)$. Rép. 17. b) $f(\sqrt{2})$. Rép. 3. c) $f(a+1)$. Rép. $a^2 + 2a + 2$. d) $f(a)+1$. Rép. a^2+2 e) $f(a^2)$. Rép. $a^4 + 1$. $[f(a)]^2$. Rép. $a^4 + 2a^2 + 1$. g) $f(2a)$. Rép. $4a^2 + 1$.
3. $\varphi(x) = \dfrac{x-1}{3x+5}$. Former les expressions: $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\dfrac{1}{\varphi(x)}$. Rép. $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1-x}{3+5x}$; $\dfrac{1}{\varphi(x)} = \dfrac{3x+5}{x-1}$
4. $\psi(x) = \sqrt{x^2+4}$. Former les expressions : $\psi(2x)$ et $\psi(0)$. Rép. $\psi(2x) = 2\sqrt{x^2+1}$; $\psi(0)=2$.
5. $f(\theta) = \operatorname{tg}\theta$. Vérifier l'égalité $f(2\theta) = \dfrac{2f(\theta)}{1-[f(\theta)]^2}$.
6. $\varphi(x) = \log\dfrac{1-x}{1+x}$. Vérifier l'égalité $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$
7. $f(x) = \log x$; $\varphi(x) = x^3$. Former les expressions: a) $f[\varphi(2)]$. Rép. 3 1og 2. b) $f[\varphi(a)]$. Rép. 3 log a. c) $\varphi[f(a)]$ Rép. $[\log a]^3$.
8. Indiquer le domaine naturel de définition de la fonction $y = 2x^2 + 1$. Rép. $-\infty < x < +\infty$.
9. Indiquer les domaines naturels de définition des fonctions

   a) $\sqrt{1-x^2}$. Rép. $-1 \le x \le +1$. b) $\sqrt{3+x} + \sqrt[4]{7-x}$. Rép. $-3 \le x \le 7$.

   c) $\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[5]{x-b}$. Rép. $-\infty < x < +\infty$. d) $\dfrac{a+x}{a-x}$ Rép. $x \ne a$.

   e) arc $\sin^2 x$. Rép. $-1 \le x \le 1$. f) $y = \log x$. Rép. $x > 0$.

   g) $y = a^x$ $(a > 0)$. Rep. $-\infty < x < +\infty$.

Construire les graphiques des fonctions suivantes:

10. $y = -3x + 5$.
11. $y = 1\,x^2 + 1$.
12. $y = 3 - 2x^2$.
13. $y = x^2 + 2x - 1$.
14. $y = x$
15. $y = \sin 2x$.
16, $y = \cos 3x$.
17. $y = x^2 - 4x + 6$.
18. $y = \dfrac{1}{1-x^2}$
19. $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
20. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.
21. $y = \operatorname{tg}(1/2)x$.
22. $y = \operatorname{ctg}\dfrac{1}{4}x$.
23. $y = 3^x$.
24. $y = 2^{-x^2}$.
25. $y = \log_2\dfrac{1}{x}$.
26. $y = x^3 + 1$.
27. $y = 4 - x^3$.
28. $y = \dfrac{1}{x^2}$.
29. $y = x^4$.
30. $y = x^5$.
31. $y = x^{\frac{1}{2}}$.
32. $y = x^{-\frac{1}{2}}$.
33. $y = x^{\frac{1}{3}}$.
34. $y = |x|$.
35. $y = \log_2|x|$.
36. . $y = \log_2(1 - x)$.
37. $y = 3\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.
38. $y = 4\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
39. La fonction $f(x)$ est définie sur le segment [-1 ; 1] de la manière suivante :

    $f(x) = 1 + x$ pour $-1 \le x \le 0$;

    $f(x) = 1 - 2x$ pour $0 \le x \le 1$.
40. La fonction $f(x)$ est définie sur le segment [0 ; 2] de la manière suivante :

    $f(x) = x^3$ pour $0 \le x \le 1$;

    $f(x) = x$ pour $1 \le x \le 2$.

Construire les courbes données en coordonnées polaires .

41. $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$ (spirale hyperbolique).
42. $\rho = a^{\varphi}$ (spirale logarithmique).
43. $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (lemniscate).
44. $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ (cardioide).
45. $\rho = a \sin 3\varphi$.

Chapitre II

LIMITE ET CONTINUITÉ DES FONCTIONS

§ 1. Limite d'une grandeur variable. Grandeur variable infiniment grande

Nous allons considérer dans ce paragraphe des variables ordonnées à variation spécifique que l'on définit par l'expression « la variable tend vers une limite ». Dans la suite de ce cours, la notion de limite d'une variable va jouer un rôle fondamental, étant intimement liée aux notions de base de l'analyse mathématique : la dérivée, l'intégrale, etc.

D é f i n i t i o n 1. Le nombre constant a est appelé la *limite* de la grandeur variable x si, pour tout nombre arbitrairement petit $\varepsilon > 0$, on peut indiquer

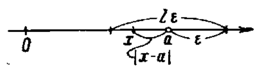


Fig. 28

une valeur de la variable x telle que toutes les valeurs conséquentes de la variable vérifient l'inégalité $|x - a| < \varepsilon$.

Si le nombre a est la limite de la variable x, on dit que x tend vers la limite a et on écrit

$$x \to a \text{ ou } \lim x = a.$$

On peut définir également la notion de limite en partant de considérations géométriques.

Le nombre constant a est la *limite* de la variable x si pour tout voisinage donné, aussi -petit qu'il soit, de centre a et de rayon ε, on peut trouver une valeur de x telle que tous les points correspondant aux valeurs suivantes de la variable appartiennent à ce voisinage (fig. 28). Donnons quelques exemples

E x e m p l e 1. La variable x prend successivement les valeurs

$$x_1=1+1;\ x_2 = 1 + \frac{1}{2}\ ;\ x_3 = 1+\frac{1}{3}\ ;\ \ldots\ ;\ x_n = 1+\frac{1}{n}\ ;\ \ldots$$

Montrons que cette grandeur variable a une limite égale à l'unité. Nous avons

$$|x_n - 1| = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right| = \frac{1}{n}$$

Pour ε arbitraire, toutes les valeurs conséquentes de la variable, à partir de n défini par la relation $1/n < \varepsilon$ ou $n > 1/\varepsilon$, vérifient l'inégalité $|x_n - 1| < \varepsilon$, c.q.f.d. Remarquons que dans le cas présent la variable tend vers sa valeur limite en décroissant.

E x e m p l e 2. La variable x prend successivement les valeurs

$$x_1 = 1 - \frac{1}{n}\ ;\ x_2 = 1 + \frac{1}{2^2}\ ;\ x_3 = 1 - \frac{1}{2^3}\ ;$$

$$x_4 = 1 + \frac{1}{2^4}\ ;\ \ldots\ ;\ x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{2^n}\ ;\ \ldots$$

Cette variable a une limite égale à l'unité. En effet,

$$|x_n - 1| = \left|\left(1+(-1)^n\frac{1}{2^n}\right)-1\right| = \frac{1}{2^n}.$$

Pour ε arbitraire à partir de n satisfaisant à la relation

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

d'où

$$2^n > \frac{1}{\varepsilon}\ ,\quad n\log 2 > \log\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad n > \frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log 2}$$

toutes les valeurs suivantes de x vérifient l'inégalité $|x_n - 1| < \varepsilon$. Remarquon que dans ce cas la valeur de la variable est tantôt plus grande, tantôt plus petite que la valeur limite. La variable tend vers sa limite en « oscillant autour d'elle ».

R e m a r q u e 1. Comme il a été indiqué au § 3 du chapitre I, la grandeur constante c peut être considérée comme une variable dont toutes les valeurs sont égales : $x = c$.

Il est évident que la limite d'une grandeur constante est égale à cette constante, puisque l'inégalité $|x - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ est toujours satisfaite pour ε arbitraire.

R e m a r q u e 2. Il découle de la définition de la limite qu'une grandeur variable ne peut pas avoir deux limites. En effet, si $\lim x = a$ et $\lim x = b$ ($a < b$), x doit satisfaire simultanément aux deux inégalités suivantes

$$|x - a| < \varepsilon \text{ et } |x - b| < \varepsilon$$

pour ε arbitrairement petit ; mais cela est impossible si $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ (fig. 29). ;

R e m a r q u e 3. Il ne faut pas s'imaginer que chaque variable doit nécessairement avoir une limite. Soit x une variable qui prend successivement les valeurs

$$x_1 = \frac{1}{2}\,;\ x_2 = 1 - \frac{1}{4}\ ;\ x_3 = \frac{1}{8}\ ;\ldots;\ x_{2k} = 1 - \frac{1}{2^{2k}}\ ;$$

$$x_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}}$$

(fig. 30). Pour k suffisamment grand, la valeur de x_{2k} et toutes les valeurs conséquentes correspondant aux indices pairs seront aussi voisines que l'on veut de l'unité, mais la valeur x_{2k+1} et toutes les valeurs qui suivent correspondant aux

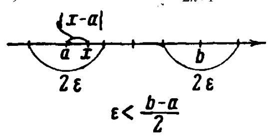


Fig. 29

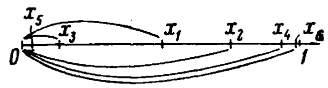


Fig. 30

indices impairs seront aussi voisines que l'on veut de zéro. Donc, la variable x ne tend pas vers une limite.

Il ressort de la définition de la limite que si une variable tend vers une limite a, a est une grandeur constante. Mais l'expression « tend vers » peut s'employer également pour caractériser un autre mode de variation d'une variable, ce qui apparaît de la définition suivante.

D é f i n i t i o n 2. La variable x tend vers l'infini si pour chaque nombre positif donné M on peut indiquer une valeur de x à partir de laquelle toutes les valeurs conséquentes de la variable vérifient l'inégalité $|x| > M$.
Si la variable x tend vers l'infini, on dit que c'est une variable *infiniment grande* et l'on écrit $x\to\infty$.

E x e m p l e 3. La variable x prend les valeurs $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -3$; . . . ; $x_n = (-1)^n n$; . . .
C'est une variable infiniment ande puisque pour $M > 0$ arbitraire toutes les valeurs de la variable à partir de l'une d'entre elles sont toutes plus grandes que M en valeur absolue.
La variable x « tend vers plus l'infini » ou $x\to +\infty$ si pour $M > 0$ arbitraire, à partir d'une certaine valeur, toutes les valeurs conséquentes de la variable vérifient l'inégalité $M < x$.
Un exemple de variable tendant vers plus l'infini est donné par la variable x qui prend les valeurs $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, . . ., $x_n = n$, . . .

La variable x « tend vers moins l'infini » ou $x \to -\infty$ si pour $M > 0$ arbitraire, à partir d'une certaine valeur, toutes les valeurs suivantes de la variable vérifient l'inégalité $x < -M$.
Ainsi, par exemple, la variable qui prend les valeurs $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, . . ., $x_n = -n$, . ., tend vers moins l'infini.

§ 2. Limite d'une fonction

Dans ce paragraphe nous étudierons certains cas particuliers de variation d'une fonction lorsque la variable indépendante x tend vers une limite a ou vers l'infini.

D é f i n i t i o n 1. Soit $y = f(x)$ une fonction définie dans un voisinage du point a ou en certains points de ce voisinage. *La fonction $y = f(x)$ tend vers la limite b ($y \to b$) lorsque x tend vers a ($x \to a$)*, si pour chaque nombre positif ε, aussi petit qu'il soit, on peut indiquer un nombre positif δ tel que pour tous les x différents de a et vérifiant l'inégalité [*])

$$|x - a| < \delta$$

l' inégalité

$$|f(x) - a| < \delta$$

est satisfaite. Si b est la *limite de la fonction $f(x)$* quand $x\to a$. on écrit alors

$$\lim_{x\to a} = b$$

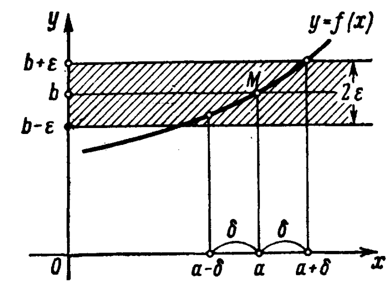


Fig. 31

ou $f(x) \to b$ quand $x \to a$.
Le fait que $f(x) \to b$ quand $x\to a$ se traduit sur le graphique de la fonction $y = f(x)$ de la manière suivante (fig. 31) ; puisque de l'inégalité $|x - a| < \delta$ découle l'inégalité $|f(x) - b| < \varepsilon$, alors les points M du graphique de la fonction $y = f(x)$, correspondant à tous les points x dont la distance jusqu'au point a est inférieure à δ, sont contenus dans une bande de largeur 2ε délimitée par les droites $y = b - \varepsilon$ et $y = b + \varepsilon$.

[*] Dans le cas résent, nous avons en vue les valeurs de x vérifiant l'inégalité $|x - a| < \delta$ et appartenant au domaine de définition de la fonction. Par la suite nous rencontrerons fréquemment des cas analogues. Ainsi, quand nous étudierons le comportement d'une fonction pour $x \to \infty$, il peut arriver que la fonction soit définie pour les valeurs entières et positives de x. Par conséquent, dansce cas $x \to \infty$, en prenant des valeurs positives entières. Par la suite, nous supposerons que cette condition est toujours réalisée.

R e m a r q u e 1. On peut également définir la limite de la fonction $f(x)$, quand $x \to a$, de la manière suivante.

Soit une variable x prenant les valeurs telles que (ordonnée de sorte que) si

$$|x^* - a| > |x^{**} - a|,$$

alors x^{**} est une valeur conséquente et x^* une valeur antécédente. Si

$$|\bar{x}^* - a| = |\bar{x}^{**} - a| \quad \text{et} \quad \bar{x}^* < \bar{x}^{**},$$

alors $\bar{x}^*$ est conséquent et $\bar{x}^{**}$ antécédent.

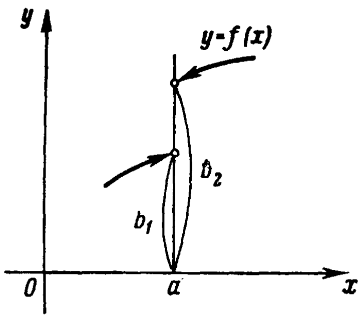


Fig. 32

Autrement dit, de deux points de la droite numérique le point conséquent est celui qui est le plus près de a. Si les points sont à égale distance de a, le point conséquent sera celui qui se trouve à droite de a.

Soit une variable x ordonnée de cette manière et tendant vers la limite $a[x \to a$ ou $\lim x = a]$. Considérons la variable $y = f(x)$.

En outre, admettons une fois pour toutes que de deux valeurs de la fonction la valeur conséquente est celles qui correspond à la valeur conséquente de la variable x. Si une grandeur variable y, définie comme il a été indiqué ci-dessus, tend vers une limite b, quand $x \to a$, nous écrirons alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

et nous dirons que la fonction $y = f(x)$ tend vers la limite b pour $x \to a$.

On démontre facilement que ces deux définitions de la limite sont équivalentes.

R e m a r q u e 2. Si $f(x)$ tend vers la limite b_1 quand x tend vers un nombre a en ne prenant que des valeurs plus petites que a, nous écrirons alors $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b_1$ et nous appellerons b_1 la limite à gauche de la fonction $f(x)$ au point a. Si x prend des valeurs plus grandes que a, nous écrirons alors $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ = b2 et nous appellerons b_2 la limite à droite de la fonction au point a (fig. 32).

On peut démontrer que si les limites à gauche et à droite existent et sont égales, c'est-à-dire $b_1 = b_2 = b$, alors b est la limite de cette fonction au point a dans le sens défini plus haut. Inversement, si une fonction a une limite b au point a, les limites à gauche et à droite de cette fonction au point a existent et sont égales.

E x e m p l e 1. Montrons que $\lim\limits_{x \to a} (3x + 1) = 7$. En effet, soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire donné; pour que l'inégalité

$$|(3x + 1) - 7| < \varepsilon$$

soit satisfaite, il faut que soient satisfaites les inégalités suivantes:

$$|3x - 6| < \varepsilon\,; \quad |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

$$-\frac{\varepsilon}{3} < x - 2 < \frac{\varepsilon}{3}$$

Ainsi pour ε arbitraire et pour toutes les valeurs de la variable x vérifiant l'inégalité $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$ la valeur de la fonction $3x + 1$ diffère de 7 de moins de ε. Cela signifie justement que 7 est la limite de cette fonction pour $x \to$. 2.

R e m a r q u e 3. Pour l'existence de la limite d'une fonction quand $x \to a$, il n'est pas nécessaire que la fonction soit définie au point $x = a$. Quand nous calculons une limite, nous devons considérer les valeurs de la fonction au voisinage du point a, mais différentes de a. Ceci est clairement illustré par l'exemple suivant.

E x e m p l e 2. Montrons que $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$. Ici la fonction $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ n'est pas définie pour $x = 2$.

Nous devons démontrer que pour a arbitraire on peut indiquer un δ tel que soit satisfaite l'inégalité

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon$$

dès que $|x - 2| < \delta$. Mais pour $x \neq 2$, l'inégalité (1) est équivalente à l'inégalité

$$\left| \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} - 4 \right| = |(x + 2) - 4| < \varepsilon$$

ou

$$|x - 2| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Ainsi, l'inégalité (1) sera satisfaite quel que soit s si l'inégalité (2) est satisfaite (ici $\delta = \varepsilon$). Cela signifie que la limite de cette fonction est égale â 4 quand x tend vers 2. Considérons encore certains cas de variation d'une fonction quand x tend vers l'infini.

D é f i n i t i o n 2. *La fonction $f(x)$ tend vers la limite b quand $x \to \infty$* si pour chaque nombre positif ε, aussi petit qu'il soit, on peut indiquer un nombre positif N tel que pour toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalite $|x| > N$, l'inégalité $|f(x) - b| < \varepsilon$ est satisfaite.

Exemple 3. Montrons que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)=1 \quad \text{ou que} \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$$

Il faut démontrer que, quel que soit e, l'inégalité
sera satisfaite dès que $|x| > N$, où N est défini par le choix de ε. L'inégalité (3) est équivalente à l'inégalité suivante : $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$, qui est satisfaite si l'on a

Cela signifie que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$ (fig. 33)

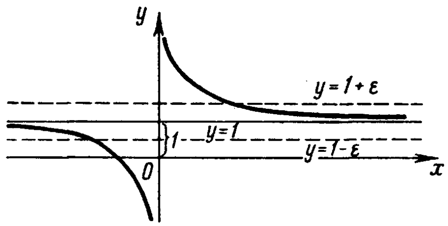


Fig. 33

La signification des symboles $x\to+\infty$ et $x\to-\infty$ rend évidente celle des expressions
« $f(x)$ tend vers b quand $x\to+\infty$ » et
« $f(x)$ tend vers b quand $x\to-\infty$ »,
que l'on note symboliquement par :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \ ; \ \lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$

§3. Fonctions qui tendent vers l'infini. Fonctions bornées.

Nous avons étudié le cas où la fonction $f(x)$ tend vers certaine limites b quand $x\to a$ ou $x\to\infty$.
Considérons maintenat le cas où la fonction $y=f(x)$ tend vers l'infini quand la variable x varie d'une certaine manière.

D é f i n i t i o n 1. La fonction $f(x)$ tend vers l'infini quand $x\to a$, autrement dit $f(x)$ est infiniment grande quand x→a ; si pour chaque nombre positif ML, aussi grand qu'il soit, on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que pour toutes les valeurs de x différentes de a et vérifiant la condition $|x-a| < \delta$, l'inégalité $|f(x)| > M$ est satisfaite. Si $f(x)$ tend vers l'infini quand $x\to a$, on écrit :

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

où $f(x)\to\infty$ quand $x\to a$. Si $f(x)$ tend vers l'infini quand $x\to a$, en ne prenant que des valeurs positives ou que des valeurs négatives, on écrit respectivement $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

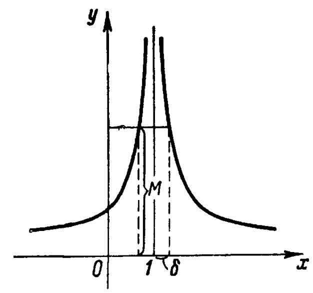


Fig. 34

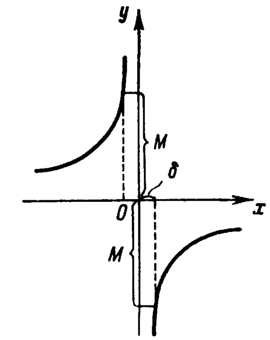


Fig. 35

E x e m p l e 1. Montrons que $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{(1-x)^2}==+\infty$. En effet, quel que soit $M>0$, on a :

$$\frac{1}{(1-x)^2}>M$$

dès que

$$(1-x)^2<\frac{1}{M} \quad \text{ou} \quad |1-x|<\frac{1}{\sqrt{M}}=\delta.$$

La fonction $\frac{1}{(1-x)^2}$ ne prend que des valeurs positives (fig. 34).

E x e m p l e 2. Montrons que $\lim\limits_{x\to0}\left(-\frac{1}{x}\right)=\infty$. En effet, quel que soit $M>0$, on a

$$\left|-\frac{1}{x}\right|>M \quad \text{dès que} \quad |x|=|x-0|<\frac{1}{M}=\delta$$

Ici $\left(-\frac{1}{x}\right)>0$ pour $x<0$ et $\left(-\frac{1}{x}\right)<0$ pour $x>0$ (fig. 35)

Si la fonction $f(x)$ tend vers l'infini quand $x\to\infty$, on écrit $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

et, en particulier, on peut avoir

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty\ ,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

Par exemple,

$$\lim_{x\to\infty} x^2=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$

R e m a r q u e 1. Il peut arriver que la fonction $y = f(x)$ ne tende ni vers une limite finie ni vers l'infini quand $x \to a$ ou $x \to \infty$.

E x e m p l e 3. La fonction $y = \sin x$ est définie dans l'intervalle infini $-\infty < x < +\infty$ mais ne tend pas vers une limite finie ou vers l'infini quand $x \to +\infty$ (fig. 36).

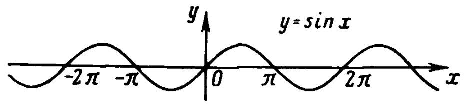


Fig. 36

E x e m p l e 4. La fonction $y = \sin x$ qui est définie pour toutes les valeurs de x, excepté $x = 0$ ne tend vers aucune limite finie ou vers l'infini quand $x \to 0$. Le graphique de cette fonction est représenté sur la figure 37.

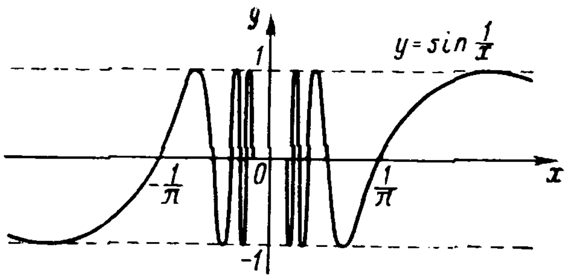


Fig. 37

D é f i n i t i o n 2. La fonction $y = f(x)$ est dite bornée dans le domaine de définition de la variable x s'il existe un nombre positif M tel que pour toutes les valeurs de x appartenant à ce domaine l'inégalité $|f(x)| \le M$ est vérifiée. Si un tel nombre n'existe pas, on dit que la fonction $f(x)$ n'est pas bornée dans ce domaine.

E x e m p l e 5. La fonction $y = \sin x$, définie dans l'intervalle infini $-\infty < x < +\infty$, est bornée, puisque pour toutes les valeurs de x

$$|\sin x| \le 1 = M.$$

D é f i n i t i o n 3. La fonction $f(x)$ est dite bornée quand $x \to a$, s'il existe un voisinage de centre a dans lequel la fonction est bornée.

D é f i n i t i o n 4. La fonction $y = f(x)$ est dite bornée quand $x \to \infty$, s'il existe un nombre $N > 0$ tel que, pour toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalité $|x| > N$, la fonction $f(x)$ est bornée.

Le théorème suivant permet de conclure si la fonction $f(x)$, quand elle tend vers une limite, est bornée ou non.

T h é o r è m e 1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ *et si b est un nombre fini, la fonction* $f(x)$ *est bornée quand* $x \to a$.

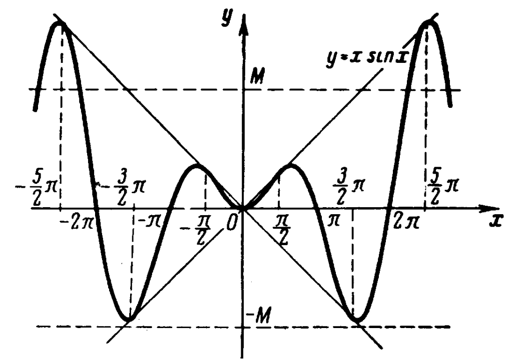


Fig. 38

D é m o n s t r a t i o n . Il vient de l'égalité $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre δ tel que dans le voisinage $a - \delta < x < a + \delta$ l'inégalité

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

ou

$$|f(x)| < |b| + \varepsilon$$

est satisfaite.

Cela exprime justement que la fonction $f(x)$ est bornée quand $x \to a$.

R e m a r q u e 2. Il découle de la définition d'une fonction bornée $f(x)$ que si

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,$$

c'est-à-dire si $f(x)$ est infiniment grande, la fonction n'est pas bornée. La propriété inverse n'est pas vraie : une fonction non bornée peut ne pas être infiniment grande.

Par exemple, la fonction $y = x \sin x$ n'est pas bornée quand $x \to \infty$, puisque pour tout $M > 0$ on peut indiquer des valeurs de x telles que $|x \sin x| > M$. Mais la fonction $y = x \sin x$ n'est pas infiniment grande puisqu'elle s'annule aux points $x = 0, \pi, 2\pi$... Le graphique de la fonction $y = x \sin x$ est donné sur la figure 38.

T h é o r è m e 2. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\neq 0$, *la fonction* $y = \dfrac{1}{f(x)}$ *est bornée quand* $x \to a$.

D é m o n s t r a t i o n . Il découle des conditions du théorème que quel que soit

le nombre $\varepsilon > 0$ dans un certain voisinage du point $x = a$, on a $| f(x) - b | < \varepsilon$ ou $\| f(x) | - | b \| < \varepsilon$ ou $-\varepsilon < | f(x) | - | b | < \varepsilon$ ou $| b | - \varepsilon < | f(x) | < | b | + \varepsilon$.
Il vient de ces inégalités:

$$\frac{1}{|b|-\varepsilon} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{|b|+\varepsilon}$$

En prenant, par exemple, $\varepsilon = \frac{1}{10} | b |$ nous avons

$$\frac{10}{9|b|} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{10}{11|b|}$$

Cela exprime que la fonction $\frac{1}{f(x)}$ est bornée.

§ 4. Infiniment petite et leurs propriétés fondamentales

Dans ce paragraphe nous allons étudier lee fonctions qui tendent vers zéro quand l'argument x varie d'une manière donnée.

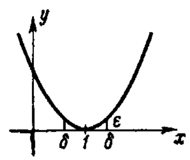


Fig. 39

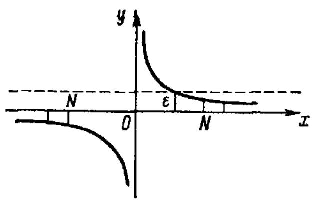


Fig. 40

D é f i n i t i o n . On dit que $\alpha = \alpha(x)$ est un *infiniment petit* quand $x \to a$ ou quand $x \to \infty$ si $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$.

Il découle de la définition de la limite que si, par exemple, on a $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, alors pour tout nombre positif ε arbitrairement petit, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tous les x satisfaisant à l'inégalité $| x - a < \delta$ on a $| \alpha(x) | < \varepsilon$.
E x e m p l e 1. La fonction $\alpha = (x - 1)^2$ est un infiniment petit quand $x \to 1$, car $\lim\limits_{x\to 1} \alpha = \lim\limits_{x\to 1} (x - 1)^2 = 0$ (fig. 39).

E x e m p l e 2. La fonction $\alpha = \frac{1}{x}$ est un infiniment petit, quand $x \to \infty$ (fig. 40) (voir l'exemple 3 § 2).
Démontrons maintenant l'importante proposition suivante.

T h é o r è m e 1. *Si la fonction $y = f(x)$ peut être mise sous la forme de la somme d'un nombre constant b et d'un infiniment petit α:*

$$y = b + \alpha, \quad (1)$$

alors

$$\lim y = b \text{ (quand } x \to a \text{ ou } x \to \infty).$$

Inversement, si $\lim y = b$, on peut écrire $y = b + \alpha$, *où α est un infiniment petit.*
D é m o n s t r a t i o n . Il vient de l'égalité (1) que $| y - b | = | \alpha |$.

Mais quel que soit ε, toutes les valeurs de α à partir d'une certaine valeur vérifient l'inégalité $| \alpha | < \varepsilon$, et, par conséquent, toutes les valeurs de y à partir d'une certaine valeur vérifieront l'inégalité $| y - b | < \varepsilon$. Cela signifie justement que $\lim y = b$. Inversement : si $\lim y = b$, alors quel que soit ε pour toutes les valeurs de y à partir de l'une d'elles on a $| y - b | < \varepsilon$. Posons $y - b = \alpha$, alors pour toutes les valeurs de α à partir de l'une d'elles on a $| \alpha | < \varepsilon$, et α est un infiniment petit.

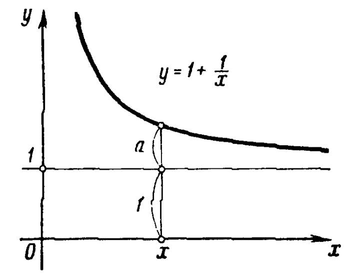


Fig. 41

E x e m p l e 3. Soit la fonction (fig. 41).

$$y = 1 + \frac{1}{x}$$

alors $\lim\limits_{x\to\infty} y = 1$.
Inversement, si $\lim\limits_{x\to\infty} y = 1$, nous pouvons exprimer la variable y sous la forme de la somme de sa valeur limite 1 et d'un infiniment petit $\alpha = \frac{1}{x}$, c'est-à-dire

$$y = 1 + \alpha.$$

T h é o r è m e 2. *Si $\alpha = \alpha(x)$ tend vers zéro pour $x \to a$* (ou pour $x \to \infty$) *et ne s'annule pas, alors $y = \frac{1}{\alpha}$ tend vers l'infini.*

D é m o n s t r a t i o n . Pour tout $M > 0$ arbitrairement grand l'inégalité $\frac{1}{|\alpha|} > M$ est vérifiée dès que l'inégalité $| \alpha | < \frac{1}{M}$ est satisfaite. Cette dernière inégalité est satisfaite pour toutes les valeurs de α à partir de l'une d'elles, puisque $\alpha(x) \to 0$.

T h é o r è m e 3. *La somme algébrique d'un nombre fini d'infiniment petits est un infiniment petit.*

D é m o n s t r a t i o n . Nous envisagerons le cas de deux infiniment petits, car pour un nombre plus grand d'infiniment petits la démonstration reste la même. Soit $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ où $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = 0$. Démontrons que pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit on peut trouver un $\delta > 0$ tel que l'inégalité $|x - a| < \delta$ entraîne l'inégalité $|u| < \varepsilon$. $\alpha(x)$ étant un infiniment petit, on peut trouver un δ_1 tel que dans le voisinage de centre a et de rayon δ_1 on ait

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\beta(x)$ étant un infiniment petit, dans un voisinage de centre a et de rayon δ_2 on aura

$$|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prenons δ égal au plus petit des deux nombres δ_1 et δ_2, alors pour un voisinage de centre a et de rayon δ on a $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$; $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, nous aurons dans ce voisinage

$$|u| = |\alpha(x) + \beta(x)| < |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

c'est-à-dire $|u| < \varepsilon$, c.q.f.d.

On démontre d'une manière analogue le cas

$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = 0, \lim_{x\to\infty} \beta(x) = 0.$$

R e m a r q u e . Par la suite, nous aurons à considérer des sommes d'infiniment petits telles que le nombre de termes augmente parallèlement à la décroissance de chacun d'eux. Dans ce cas le théorème précédent peut être pris en défaut. Considérons, par exemple, la somme de x termes $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x}$ où x ne prend que les valeurs entières positives ($x = 1, 2, \ldots, n, \ldots$). Il est clair que chaque terme est un infiniment petit quand $x > \infty$, mais la somme $u = 1$ n'en est pas un.

T h é o r è m e 4. *Le produit d'un infiniment petit $\alpha = \alpha(x)$ par une fonction bornée $z = z(\alpha)$ est un infiniment petit quand $x \to a$* (ou $x \to \infty$).

D é m o n s t r a t i o n . Nous donnerons la démonstration pour le cas où $x \to a$. On peut indiquer un nombre $M > 0$ tel que dans un certain voisinage du point x = a l'inégalité $|z| < M$ est satisfaite. Pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut trouver un

voisinage où l'inégalité $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}$ est satisfaite. Pour tous les points du plus petit de ces voisinages on aura

$$|\alpha z| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

Ce qui exprime que αz est un infiniment petit. La démonstration est identique pour le cas où $x \to \infty$. Du théorème démontré il découle :

C o r o l l a i r e 1.Si $\lim \alpha = 0$,$\lim \beta = 0$,alors $\lim \alpha\beta = 0$, car $\beta(x)$ est une fonction bornée. Ce résultat s'étend au cas d'un nombre fini quelconque d'infiniment petits.

C o r o l l a i r e 2.Si $\lim \alpha = 0$ et c=const, alors $\lim c\alpha = 0$.

T h é o r è m e 5. *Le quotient $\frac{\alpha(x)}{z(x)}$ d'un infiniment petit $\alpha(x)$ et d'une fonction dont la limite est différente de zéro est un infiniment petit.*

D é m o n s t r a t i o n . Soit $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim z(x) = b \neq 0$. Il découle du théorème 2 § 3 que $\frac{1}{z(\alpha)}$ est une variable bornée. C'est pourquoi la fraction $\frac{\alpha(x)}{z(x)} = \alpha(x) \frac{1}{z(x)}$ est le produit d'un infiniment petit par une grandeur bornée ; donc c'est un infiniment petit.

§ 5. Théorèmes fondamentaux sur les limites

Dans ce paragraphe ainsi que dans le paragraphe précédent nous aurons à considérer des fonctions qui dépendent d'une même variable indépendante x, et pour lesquelles $x \to a$ ou $x \to \infty$.

Nous donnerons la démonstration pour l'un de ces cas, puisque la démonstration de l'autre cas est semblable. Parfois nous n'écrirons même plus $x \to$ a ou $x \to \infty$ en sous-entendant l'un ou l'autre.

T h é o r è m e 1. *La limite de la somme algébrique de deux, de trois ou d'un nombre fini quelconque de variables est égale à la somme algébrique des limites de ces variables*

$$\lim (u_1 + u_2 + \ldots + u_k) = \lim u_1 + \lim u_2 + \ldots + \lim u_k.$$

D é m o n s t r a t i o n . Nous donnerons la démonstration pour le cas de deux termes, puisqu'elle s'étend de la même manière à un nombre quelconque de termes. Soit $\lim u_1 = a_1$, $\lim u_2 = a_2$. Alors en vertu du théorème 1 § 4 on peut écrire

$$u_1 = a_1 + \alpha_1\ u_2 = a_2 + \alpha_2$$

où α_1 et α_2 sont des infiniment petits. Par conséquent,

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)$$

Comme $(a_1 + a_2)$ est une constante et $(\alpha_1 + \alpha_2)$ un infiniment petit, on peut écrire toujours d'après le théorème 1 § 4 que

$$\lim (u_1 + u_2) = a_1 + a_2 = \lim u_1 + \lim u_2.$$

E x e m p l e 1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 1+0=1$$

T h é o r è m e 2. *La limite du produit de deux, de trois ou d'un nombre fini quelconque de variables est égale au produit des limites de ces variables*

$$\lim (u_1 u_2 \ldots u_k = \lim u_1 \lim u_2 \ \ldots \lim u_k.$$

D é m o n s t r a t i o n . Afin de ne pas alourdir la démonstration nous considérerons le cas de deux facteurs. Soit $\lim u_1 = a_1$, $\lim u_2 = a_2$. Alors,

$$u_1 = a_1 + \alpha_1, \qquad u_2 = a_2 + \alpha_2,$$

$$u_1 u_2 = (a_1 + \alpha_1)(a_2 + \alpha_2) = a_1 a_2 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2$$

Le produit $a_1 a_2$ est une constante. D'après les théorèmes du § 4 l'expression $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2$ est un infiniment petit. Par conséquent, $\lim u_1 u_2 = a_1 a_2 = \lim u_1 \lim u_2$.

C o r o l l a i r e . On peut sortir un facteur constant de dessous le signe de la limite. En effet, si $\lim u_1 = a_1$ et c est une constante on a, par conséquent, $\lim c = c$, d'où $\lim (c u_1) = \lim c \lim u_1 = c \lim u_1$ c.q.f.d.

E x e m p l e 2. $\lim\limits_{x\to2} 5x^3 = 5\lim\limits_{x\to2} x^2 = 5\cdot8 = 40$.

T h é o r è m e 3. *La limite du rapport de deux variables est égale au rapport des limites de ces variables si la limite du dénominateur est dif férente de zéro*

$$\lim\frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}, \text{ si } \lim v \neq 0$$

Démonstration. Soit $\lim u = a$, $\lim v = b \neq 0$. Alors, $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$, où α et β sont des infiniment petits. Ecrivons l'identité

$$\frac{u}{v} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}$$

ou

$$\frac{u}{v} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}$$

La fraction $\frac{a}{b}$ est un nombre constant et la fraction $\frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}$ est d'après les théorèmes 4 et 5 du § 4 un infiniment petit, puisque $\alpha b - \beta a$ est un infiniment petit et que la limite du dénominateur $b(b + \beta)$ est égale à $b^2 \neq 0$. Donc,

$$\lim\frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{\lim u}{\lim v}$$

E x e m p l e 3.

$$\lim_{x\to1}\frac{3x+5}{4x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to1}(3x+5)}{\lim\limits_{x\to1}(4x-2)} = \frac{3\lim\limits_{x\to1}x+5}{4\lim\limits_{x\to1}x-2} = \frac{3\cdot1+5}{4\cdot1-2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Nous avons utilisé ici le théorème relatif à la limite du rapport de deux fonctions, car la limite du dénominateur est différente de zéro quand $x\to 1$. Si la limite du dénominateur est égale à zéro, on ne peut se servir de ce theorème. Il est nécessaire dans ce cas de faire une étude détaillée.

E x e m p l e 4. Trouver la limite $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$. Ici le numérateur et le dénominateur tendent vers zéro quand $x \to 2$, c'est pourquoi le théorème 3 ne peut être appliqué. Effectuons les transformations suivantes

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

On est en droit d'effectuer cette transformation pour tous les x différents de 2. C'est pourquoi on peut écrire en partant de la definition de la limite:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to2}(x+2) = 4$$

E x e m p l e 5. Trouver la limite $\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{x-1}$. Quand $x \to 1$, le dénominateur tend vers zéro, alors que le numérateur tend vers 1. Donc, la limite de la variable inverse est égale à zéro, c'est-à-dire

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to1}x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Donc, nous aurons en vertu du théorème 2 du paragraphe précédent.

$$\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1} = \infty$$

T h é o r è m e 4. *Si les fonctions $u = u(x)$, $z = z(x)$, $v = v(x)$ sont liées entre elles par la double inégalité $u \le z \le v$ et si* $u(x)$ et $v(x)$ *tendent vers une même limite b quand $x \to a$* (ou $x \to\infty$), *alors $z = z(x)$ tend aussi vers la même limite quand $x\to a$ (ou $x\to\infty$).*

D é m o n s t r a t i o n . Pour fixer les idées nous allons considérer la variation de la fonction quand $x \to a$. Il vient des inégalités $u \leq z \leq v$

$$u - b \leq z - b \leq v - b \;;$$

d'après les conditions du théorème

$$\lim_{x \to a} u = b\,, \quad \lim_{x \to a} v = b$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut indiquer un voisinage de centre a où l'inégalité $| u - b | < \varepsilon$ est satisfaite; de même, on peut indiquer un voisinage de centre a où l'inégalité $| v - b | < \varepsilon$ est aussi satisfaite. Dans le plus petit de ces voisinages les inégalités

$$-\varepsilon < u - b < \varepsilon \text{ et } -\varepsilon < v - b < \varepsilon$$

seront satisfaites et, par conséquent, les inégalités

$$-\varepsilon < z - b < \varepsilon$$

seront satisfaites, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to a} z = b\,.$$

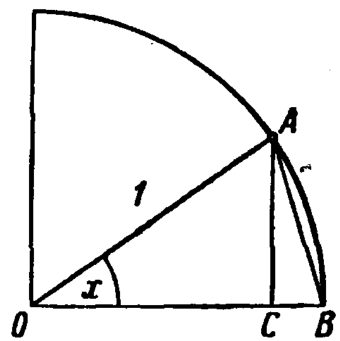


Fig. 42

T h é o r è m e 5. *Si la fonction y ne prend pas des valeurs négatives* $y \geq 0$ quand $x \to a$ (ou $x \to \infty$) *et si elle tend vers une limite b, alors ce nombre b n'est pas négatif* : $b \geq 0$.

D é m o n s t r a t i o n . Supposons que b soit négatif, $b < 0$, alors $| y - b | \geq | b |$, c'est-à-dire que la valeur absolue de la différence $| y - b |$ est plus grande que le nombre positif $| b |$ et, par conséquent, ne peut tendre vers zéro quand $x \to a$. Mais alors, quand $x \to a$, y ne peut tendre vers b, ce qui est contraire à l'hypohèse. Donc, la supposition que $b < 0$ nous conduit à une contradiction. Par conséquent, $b \geq 0$.

On démontre d'une manière analogue que si $y \leq 0$, lira $y \leq 0$.

T h é o r è m e 6. *Si les fonctions* $u = u(x)$ et $v = v(x)$ *satisfont à l'inégalité* $v \geq u$ *et si les limites de ces fonctions existent quand* $x \to a$ (*ou* $x \to \infty$), *alors* $\lim v \geq \lim u$.

D é m o n s t r a t i o n . D'après l'hypothèse $v - u \geq 0$ et en vertu du théorème 5 $\lim (v - u) > 0$ ou $\lim v - \lim u \geq 0$, c'est-à-dire $\lim v \geq \lim u$.

E x e m p l e 6. Montrons que $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

On voit d'après la figure 42 que si $OA = 1$, $x > 0$, alors $AC = \sin x$ $\hat{A}B = x$. $\sin x < x$. Il est évident que si $x < 0$, $| \sin x | < | x |$. Il vient de ces inégalités an vertu des théorèmes 5 et 6 que lira $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

E x e m p l e 7. Montrons que $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{x}{2} = 0$.

En effet, $\left| \sin \dfrac{x}{2} \right| < | \sin x |$; donc, $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{x}{2} = 0$.

E x e m p l e 8. Montrons que $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 0$. Remarquons que

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

donc, $$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 1 - 2 \lim_{x \to 0} \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 0 = 1\,.$$

Lors de l'étude des questions relatives à la limite de certaines variables, on est amené à résoudre les deux problèmes suivants :

1) démontrer que la limite existe et déterminer les bornes entre lesquelles est comprise cette limite ;
2) calculer cette limite avec le degré de précision voulu.

La réponse à la première question est bien souvent donnée par le théorème suivant.

T h é o r è m e 7. *Si la variable v est croissante, c'est-à-dire si toutes ses valeurs conséquentes sont plus grandes que ses valeurs antécédentes, et si elle est bornée, c'est-à-dire* $v < M$, *alors cette variable a une limite* $\lim v = a$, *où* $a \leq M$.

On peut énoncer un théorème analogue pour les variables décroissantes bornées.

Nous ne donnons pas ici la démonstration de ce théorème, car elle exige l'application de la théorie des nombres réels que nous n'avons pas développée dans ce livre.

Dans les deux paragraphes suivants, nous calculerons les limites de deux fonctions ayant une très large application en analyse mathématique.

§ 6. Limite de la fonction $\dfrac{\sin x}{x}$ quand $x \to$. 0

Cette fonction n'est pas définie pour $x = 0$, puisque le numérateur et le dénominateur de la fraction s'annulent en ce point. Calculons la limite de cette fonction lorsque $x \to 0$. Considérons la circonférence de rayon 1 (fig. 43).

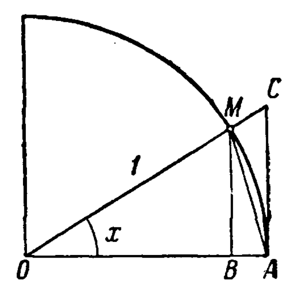


Fig. 43

Désignons par x l'angle au centre MOB ; nous avons $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Il vient immédiatement de la figure 43

surface du triangle MOA<
<surface du secteur MOA<
<surface du triangle COA. (1)

Surface du triangle $MOA = \frac{1}{2}\ OA\ \ MB = \frac{1}{2}\ .1\ \sin x = \frac{1}{2}\ \sin$ x.

Surface du secteur $MOA = \frac{1}{2}\ OA\ \ AM = \frac{1}{2}\ \ 1\ \ x = \frac{1}{2}$ x.

Surface du triangle $COA = \frac{1}{2}\ OA\ \ AC = \frac{1}{2}\ \ 1\ \ \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\ \ \operatorname{tg} x$

En simplifiant par $\frac{1}{2}$, l'inégalité (1) devient

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Divisons tous les termes par $\sin x$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

ou

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Nous avons obtenu cette inégalité en supposant $x > 0$. Remarquons que $\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{\sin x}{x}$ et cos $(-x)$ = cos x. Donc, l'inégalité eat encore vérifiée pour x <0. Mais $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

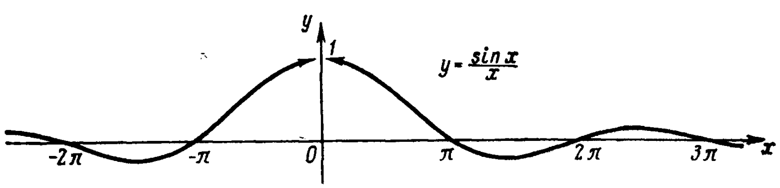


Fig. 44

Par conséquent, la variable $\frac{\sin x}{x}$ est comprise entre deux variables tendant vers une même limite égale à 1. Ainsi, en vertu du théorème 4 du paragraphe précédent

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Le graphique de la fonction $y = \frac{\sin x}{x}$ est tracé sur la figure 44.

E x e m p l e s .

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim\limits_{x\to 0} k \frac{\sin kx}{kx} = k \lim\limits_{\substack{x\to 0\\(kx\to 0)}} \frac{\sin(kx)}{(kx)} = k \cdot 1 = k \quad (k = \text{const})$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0$.

4)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{\frac{\sin \beta x}{\beta x}} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \beta x}{\beta x}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\alpha = \text{const},\ \beta = \text{const})$$

§ 7. Le nombre e

Considérons la grandeur variable

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

où n est une variable croissante prenant successivement les valeurs 1, 2, 3, . . .

T h é o r è m e 1. *La variable* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *a une limite comprise entre* 2 *et* 3 *quand* $n \to \infty$.

D é m o n s t r a t i o n . D'après la formule du binôme de Newton nous pouvons écrire

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \times \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \left(\frac{1}{n}\right)^n \qquad (1)$$

En effectuant certaines transformations algébriques évidentes, nous trouvons

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\quad(2)$$

On voit de cette dernière égalité que la grandeur variable $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est une variable croissante quand n croît. En effet, quand on passe de la valeur n à la valeur $n+1$, chaque terme de cette somme augmente

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right),\text{ etc.,}$$

et de plus un nouveau terme apparaît. (Tous les termes du développement sont positifs.)

Montrons que la grandeur variable $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est bornée. En remarquant que $\left(1-\frac{1}{n}\right)<1$; $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1$, etc., on obtient de l'expression (2) l'inégalité

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$$

D'autre part,

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2}\ ;\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3}\ ;\ldots;\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}<\frac{1}{2^{n-1}}\,.$$

Nous pouvons écrire l'inégalité

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}$$

Les termes que nous avons soulignés constituent une progression géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$, dont le premier terme est $a=1$, par suite

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right]=$$

$$1+\frac{a-aq^n}{1-q}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)n}{1-\frac{1}{2}}=1+\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]<3$$

Par conséquent, pour tous les n nous avons

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

Il vient de l'inégalité (2)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq 2.$$

Ainsi nous en déduisons la double inégalité

$$2\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.\ (3)$$

Nous avons prouvé que la variable $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est bornée.

En récapitulant, nous voyons que la variable $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est croissante et bornée; d'après le théorème 7 du § 5 elle a une limite On désigne cette limite par la lettre *e*.

D é f i n i t i o n . On appelle le *nombre e* la limite de la variable $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quand $n\to\infty$; $\quad e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Il découle de l'inégalité (3) en vertu du théorème 6 § 5 que le nombre e vérifie la double inégalité $2\leq e\leq 3$. Le théorème est démontré.

Le nombre e est un nombre irrationnel. Nous indiquerons par la suite une méthode permettant de le calculer avec la précision voulue. La valeur approchée de ce nombre à $\left(\frac{1}{10}\right)^{10}$)près est $e=2{,}7182818284\ldots$

T h é o r è m e 2. *La f onction* $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ *tend vers la limite e quand x tend vers linfini, c'est-à-dire x*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,.$$

D é m o n s t r a t i o n. Nous avons prouvé que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ quand n tend vers l'infini en prenant des valeurs positives entières. Supposons maintenant que $x \to\infty$ en prenant des valeurs fractionnaires ou négatives.

1) Soit $x \to+\infty$. Chaque valeur de x est comprise entre deux nombres positifs entiers

$$n \le x < n + 1.$$

Dans ce cas nous aurons les inégalités suivantes

$$\frac{1}{n} \ge \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1},$$

$$1+\frac{1}{n} \ge 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Si $x \to -\infty$, il est évident que $n \to\infty$. Calculons la limite des variables entre lesquelles est comprise l'expression $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e,$$

donc (d'après le théorème 4 § 5)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

2) Soit $x \to\infty$. Introduisons une nouvelle variable $t = -(x + 1)$ ou $x = -(t + 1)$ .Quand $t \to+\infty$, on a $x \to-\infty$.

On peut écrire

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} =$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Le théorème est démontré. Le graphique de la fonction $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ est tracé sur la figure 45.

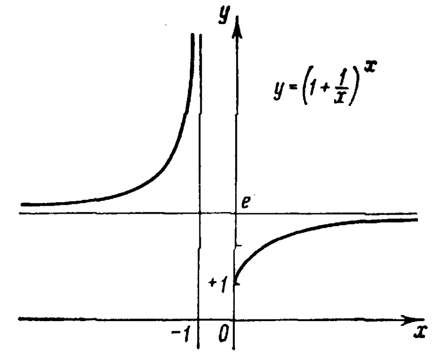


Fig. 45

Si l'on pose $\frac{1}{x} = \alpha$ dans l'égalité (4), on a $\alpha \to 0$ (mais $\alpha \ne 0$) x quand $x \to\infty$ et l'on a

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

E x e m p l e s .

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 = e\cdot 1 = e$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\cdot e\cdot e = e^3$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^n = \lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y} = e^2.$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+4} =$

$\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^y \lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^4 = e^4\cdot 1 = e^4.$

R e m a r q u e . La fonction exponentielle de base e,

$$y = e^x,$$

joue un rôle particulièrement important dans la suite du cours de mathématiques. Cette fonction est dune grande importance lors de l'étude de divers phénomènes en mécanique (théorie des oscillations), en électrotechnique et en radiotechnique, en radiochimie, etc. Les graphiques de la fonction exponentielle $y = e^x$ et de la fonction exponentielle $y = e^{-x}$ sont représentés sur la fig. 46.

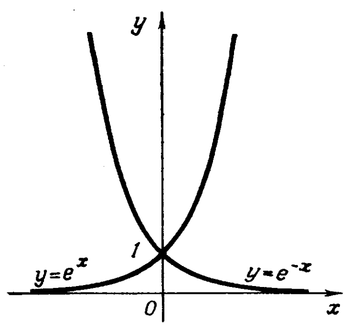


Fig. 46

§ 8. Logarithmes népériens

Nous avons défini au § 8 du chapitre 1 la fonction logarithmique $y= \log_a x$. Le nombre a est appelé base du logarithme. Si $a = 10$, y est appelé le logarithme décimal du nombre x que l' on désigne par la notation $y = \log x$. On connaît les tables des logarithmes décimaux depuis le cours de l'enseignement secondaire ; ces tables sont appelées tables de Briggs, du nom du savant anglais Briggs (1556-1630).

On appelle *logarithmes naturels* ou *logarithmes népériens* les logarithmes dont la base est le nombre e = 2,71828. . ., du nom de l'un des premiers inventeurs des tables de logarithmes, le mathématicien Neper (1550-1617). Donc, si $e^y = x$, y est dit le logarithme naturel du nombre x. On écrit alors $y = \text{Log}\, x$ au lieu de $y = \log_e x$. Les graphiques des fonctions $y = \text{Log}\, x$ et $y = \log x$ sont donnés sur la figure 47.

Etablissons maintenant la relation qui existe entre les logarithmes décimaux et naturels d'un même nombre x. Soit $y = \log x$ ou $x = 10^y$. Prenons le logarithme de base e des deux membres de cette dernière égalité.

Nous trouvons $\text{Log}\, x = y\, \text{Log}\, 10$, d'où $y = \dfrac{1}{\text{Log}\, 10}\, \text{Log}\, x$. En remplaçant y par sa valeur on a $\log x = \dfrac{1}{\text{Log}\, 10}\, \text{Log}\, x$,

Ainsi, si l'on connaît le logarithme naturel du nombre x, on obtient son logarithme décimal en multipliant le logarithme naturel

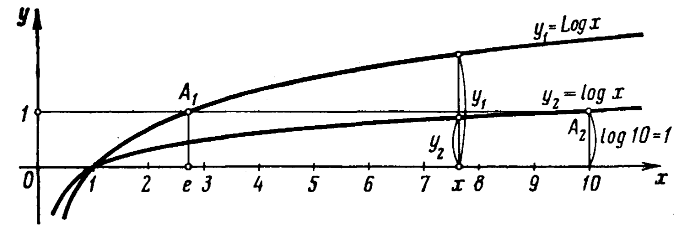


Fig. 47

de x par le facteur $M = \dfrac{1}{\text{Log}\, 10} \approx 0{,}434294$ qui est indépendant du nombre x. Le nombre M est appelé module de transition des logarithmes naturels aux logarithmes décimaux $\log x = M\, \text{Log}\, x$.

En posant dans cette égalité $x = e$ on trouve la valeur du nombre M exprimée à l'aide des logarithmes décimaux

$$\log e = M\ (\text{Log}\, e = 1).$$

Les logarithmes naturels s' expriment à l'aide des logarithmes décimaux par la formule

$$\text{Log}\, x = \frac{1}{M} \log x$$

où

$$\frac{1}{M} \approx 2{,}302585.$$

R e m a r q u e . Pour calculer les logarithmes naturels des nombres il existe des tables spéciales (par exemple, cf. I. Bronstein et K. Séméndiaiev, Aide-mémoire de mathématiques, Phyzmathguiz, 1967) .

§ 9. Continuité des fonctions

Soit $y = f(x)$ une fonction définie pour la valeur x_0 et dans un certain voisinage de centre x_0. Soit $y_0 = f(x_0)$.

Si on donne à la variable x un accroissement Δx positif ou négatif (cela n'a d'ailleurs aucune importance), elle devient $x_0 + \Delta x$, et la fonction y subit également un accroissement Δy. La nouvelle valeur de la fonction est $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ (fig. 48). L'accroissement de la fonction est donné par la formule

$$\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o).$$

D é f i n i t i o n 1. La fonction $y = f(x)$ est dite *continue pour la valeur* $x = x_o$ (ou au point x_o) si elle est définie dans un certain voisinage du point x_o (et également au point x_o) et si

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (1)$$

ou, ce qui revient au même,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right] = 0 . \ (2)$$

La condition de continuité (2) peut aussi s'écrire

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

ou

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ \ (3)$$

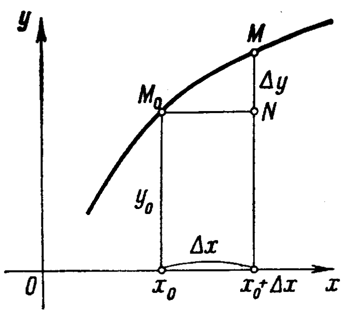


Fig. 48

mais

$$x_o = \lim_{x \to x_0} x$$

Par conséquent, l'égalité (9) peut s'écrire

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\,(\lim_{x \to x_0} x)\ ), (4)$$

autrement dit, pour trouver la limite d'une fonction continue quand $x \to x_o$, il suffit de remplacer dans l'expression de la fonction l'argument x par sa valeur x_o.

Géométriquement la continuité d'une fonction en un point donné signifie que la différence des ordonnées du graphique de la fonction $y = f(x)$ aux points $x_o + \Delta x$ et x_o est arbitrairement petite en valeur absolue dès que $|\,\Delta x\,|$ est suffisamment petit.

E x e m p l e 1. Prouvons que la fonction $y = x^2$ est continue en tout point x_o. En effet,

$$y_0 = x_0^2, \quad y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2$$

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0\Delta x + \Delta x^2) = 2x_0 \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$$

indépendamment de la manière dont Δx tend vers zéro (v. fig. 49, *a*, *b*).

E x e m p l e 2. Montrons que la fonction $y = \sin x$ est continue en tout point x_o. En effet,

$$y_o = \sin x_o, \quad y_o + \Delta y = \sin(x_o + \Delta x),$$

$$\Delta y = \sin(x_o + \Delta x) - \sin x_o = 2 \sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Nous avons démontré que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2} = 0$ (exemple 7 § 5). La fonction $\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$ est bornée. Donc,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 .$$

De façon analogue on pourrait, en considérant séparément chaque fonction élémentaire, démontrer que chaque fonction élémentaire principale est continue en chaque point, où elle est définie.

Démontrons enfin le théorème suivant.

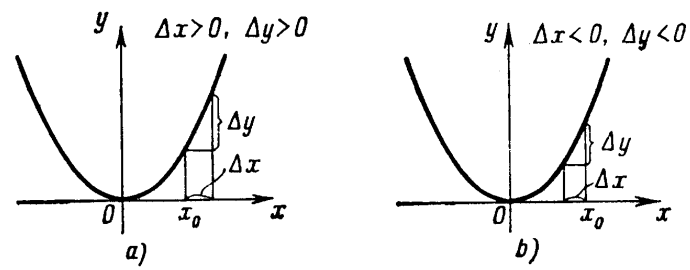


Fig. 49

T h é o r è m e 1. *Si les fonctions* $f_1(x)$ et $f_2(x)$ *sont continues au point* x_o, *la somme* $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ *est aussi une fonction continue au point* x_o.

D é m o n s t r a t i o n . Comme $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont continues, nous pouvons écrire en vertu de l'égalité (3)

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = f_1(x_0)\,, \quad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_2(x_0)$$

En vertu du théorème 1 sur les limites nous avons

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = \lim_{x \to x_0}\left[f_1(x) + f_2(x)\right] = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lim_{x \to x_0} f_2(x) =$$

$$= f_1(x_0) + f_2(x_0) = \psi(x_0)$$

Ainsi la somme $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ est une fonction continue. Le théorème est démontré.

Notons la conséquence immédiate que le théorème. est valable pour tout nombre fini de termes.

En nous basant sur les propriétés des limites nous pouvons démontrer également les théorèmes suivants

a) *Le produit de deux fonctions continues est une fonction continue.*

b) *Le quotient de deux f onctions continues est une fonction continue si au point considéré le dénominateur ne s'annule pas.*

c) *Si* $u = \varphi(x)$ *est continue pour* $x = x_o$, et $f(u)$ *est continue au point* $u_o = \varphi(x_o)$, *alors la fonction composée* $f[\varphi(x)]$ *est continue au point* x_o.
Ces théorèmes nous permettent de démontrer le théorème suivant.

Théorème 2. *Toute fonction élémentaire est continue en chaque point où elle est définie* *).

Exemple 3. La fonction $y = x^2$ est continue en tout point x_o et par suite

$$\lim_{x\to x_0} x^2 = x_0^2, \quad \lim_{x\to 3} x^2 = 3^2 = 9$$

Exemple 4. La fonction $y = \sin x$ est continue en tout point et par suite

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin x = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exemple 5. La fonction $y = e^x$ est continue en tout point et par suite

$$\lim_{x\to a} e^x = e^a$$

Exemple 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{Log}\,(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\mathrm{Log}\,(1+x) = \lim\limits_{x\to 0}\mathrm{Log}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$

or $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{Log}\,(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$; la fonction Log z est continue pour $z > 0$ et, par conséquent, pour $z = e$, on a

$$\lim_{x\to x_0}\mathrm{Log}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \mathrm{Log}\left[\lim_{x\to x_0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \mathrm{Log}\, e = 1\,.$$

Définition 2. Une fonction $y = f(x)$ continue en tout point de l'intervalle (a, b), où $a < b$, est dite *continue dans cet intervalle*.
Si la fonction est définie pour $x = a$ et si $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$, on dit que la fonction $f(x)$ est *continue à droite* au point $x = a$. Si $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b)$, on dit qu'elle est *continue à gauche* au point $x = b$.

Si la fonction $f(x)$ est continue en chaque point de l'intervalle (a, b) ainsi qu'aux extrémités de cet intervalle, on dit que la fonction $f(x)$ est *continue dans l'intervalle fermé* ou *sur le segment* $[a, b]$.
Exemple 7. La fonction $y = x^2$ est continue dans tout intervalle fermé $[a, b]$, ce qui découle directement de l'exemple 1.

* Cette question est traitée en détail dans l'ouvrage de G. Fikhtengoltz « Fondements de l'analyse mathématique » t. I, Phyzmathguiz, 1968.

Si l'une des conditions qu'exige la continuité n'est pas remplie, c'est-à-dire que la fonction $f(x)$ n'est pas définie au point $x = x_o$ soit que la limite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas en ce point, soit encore que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_o)$ quand x tend arbitrairement vers x_o quoique les expressions à gauche et à droite de l'inégalité existent, la fonction $y = f(x)$ est dite *discontinue* au point $x = x_o$. Dans ce cas le point $x = x_o$ est *dit point de discontinuité* de la fonction.

Exemple 8. La fonction $y = \dfrac{1}{x}$ est discontinue au point $x = 0$. En effet, pour $x = 0$, la fonction n'est pas définie :

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x} = +\infty\ ; \quad \lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x} = -\infty$$

On voit aisément que cette fonction est continue pour toute valeur de $x \neq 0$.

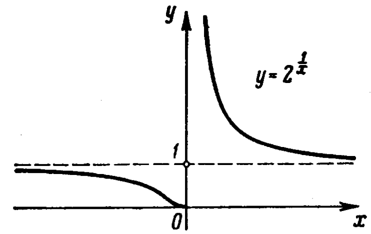


Fig. 50

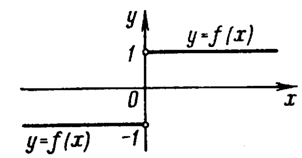


Fig. 51

Exemple 9. La fonction $y = 2^{\frac{1}{x}}$ est discontinue au point $x = 0$. En effet, $\lim\limits_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$. Pour $x = 0$ la fonction n'est pas définie (fig. 50).

Exemple 10. Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$. Pour $x < 0$, $\dfrac{x}{|x|} = -1$; pour $x > 0$, $\dfrac{x}{|x|} = 1$. Donc,

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0}\frac{x}{|x|} = -1\ ; \qquad \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0}\frac{x}{|x|} = 1;$$

pour $x = 0$ la fonction n'est pas définie. Ainsi, nous avons prouvé que la fonction $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ est discontinue au point $x = 0$ (fig. 51).

E x e m p l e 11. La fonction $y = \sin \dfrac{1}{x}$, étudiée dans l'exemple 4 § 3, est discontinue pour $x = 0$.

D é f i n i t i o n 3. Si la fonction $f(x)$ est telle que les limites $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$ et $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ existent et sont finies mais que $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ ou que la valeur de la fonction $f(x)$ n'est pas déterminée au point $x = x_0$, le point $x = x_0$ est appelé point de discontinuité de première espèce. (Par exemple, le point $x = 0$ est un point de discontinuité de première espèce pour la fonction de l'exemple 10.)

§ 10. Propriétés des fonctions continues

Dans ce paragraphe nous exposerons certaines propriétés des fonctions continues sur un segment. Ces propriétés seront énoncées sous forme de théorèmes sans démonstration.

T h é o r è m e 1. *Si la fonction $y = f(x)$ est continue sur un segment $[a, b]$ ($a \le x \le b$), alors il existe au moins un point $x = x_1$ tel que la valeur de la fonction en ce point satisfait à l'inégalité*

$$f(x_1) \ge f(x),$$

où x est un autre point quelconque de ce segment ; de même, il existe au moins un point x_2 tel que la valeur de la fonction en ce point satisfait à l'inégalité

$$f(x_2) \le f(x),$$

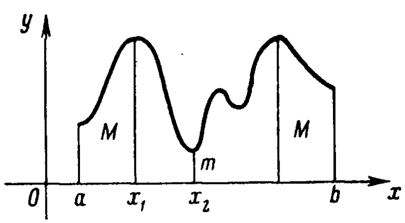


Fig. 52

Nous appellerons $f(x_1)$ la plus grande valeur de la fonction $y = f(x)$ sur le segment $[a, b]$ et $f(x_2)$ la plus petite valeur de la fonction $f(x)$ sur ce segment. On peut alors énoncer ce théorème comme suit :

Toute fonction continue sur le segment $a \le x \le b$ atteint au moins une fois sur ce segment sa plus grande valeur M et sa plus petite valeur m.

La signification de ce théorème est clairement illustrée par la figure 52.

R e m a r q u e . Le théorème énoncé n'est plus vrai si la fonction est donnée dans un intervalle ouvert. Ainsi, par exemple, pour la fonction $y = x$, donnée dans l'intervalle $0 < x < 1$, il n existe pas de plus grande ou de plus petite valeur. En effet, il n'existe pas de plus grande et de plus petite valeur pour la variable x dans cet intervalle. (Il n'existe pas de point le plus à gauche, car quel que soit le point x^* choisi on peut toujours indiquer un point plus à gauche, par exemple le point $\dfrac{x^*}{2}$. De même, il n'existe pas de point le plus à droite, et c'est pourquoi il ne peut exister ni de plus grande ni de plus petite valeur pour la fonction $y = x$.)

T h é o r è m e 2. *Si la fonction $y = f(x)$ est continue sur le segment $[a, b]$ et si ses valeurs aux extrémités de ce segment sont de signes contraires, il existe alors au moins un point $x = c$ entre les points a et b tel que la fonction s'annule en ce point:*

$$f(c) = 0, \quad a < c < b.$$

L'interprétation géométrique de ce théorème est très simple. Le graphique de la fonction continue $y = f(x)$, joignant les points $M_0\ [a, f(a)]$ et $M_2\ [b, f(b)]$ où $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (ou $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$), coupe l'axe Ox au moins en un point (fig. 53).

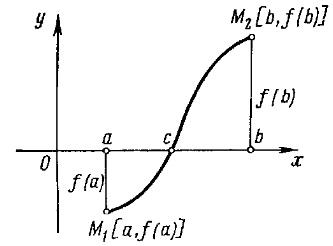


Fig. 53

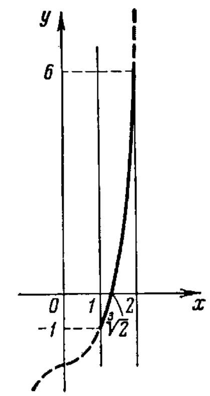


Fig. 54

E x e m p l e . Soit la fonction $y = x^3 - 2$, $y_{x=1} = -1$, $y_{x=2} = 6$.

Cette fonction est continue sur le segment $[1, 2]$. Donc, il existe au moins un point de ce segment où la fonction $y = x^3 - 2$ s'annule. En effet, $y_{x=\sqrt[3]{2}} = 0$ (fig. 54).

T h é o r è m e 3. *Soit $y = f(x)$ une fonction définie et continue sur le segment $[a, b]$. Si les valeurs de cette fonction aux extrémités de ce segment ne sont pas égales $f(a) = A$, $f(b) = B$, alors quel que soit le nombre μ compris entre les nombres A et B, on peut trouver un point $x = c$ compris entre a et b tel que $f(c) = \mu$.*

Le sens de ce théorème est clairement illustré par la figure 55. Dans ce cas, toute droite $y = \mu$ coupe le graphique de la fonction $y = f(x)$.

R e m a r q u e . Notons que le théorème 2 n'est qu'un cas particulier de ce théorème, car si A et B sont de signes différents on peut prendre $\mu = 0$, puisque 0 est compris entre A et B.

C o r o l l a i r e d u t h é o r è m e 3. *Si la fonction* $y = f(x)$ *est continue dans un intervalle et si elle atteint sa plus grande et sa plus petite valeur, alors elle prend au moins une fois toute valeur intermédiaire comprise entre la plus petite et la plus grande valeur.*

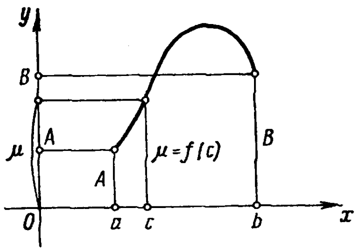


Fig. 55

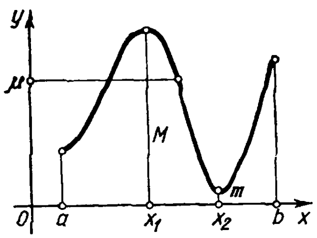


Fig. 56

En effet, soit $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$. Considérons le segment $[x_1, x_2]$. D'après le théorème 3, la fonction $y = f(x)$ prend dans cet intervalle toute valeur N, comprise entre M et m. Mais le segment $[x_1, x_2]$ se trouve à l'intérieur de l'intervalle considéré où est définie la fonction $f(x)$ (fig. 56).

§ 11. Comparaison des infiniment petits

Soient

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

plusieurs infiniment petits dépendant d'une même variable x et tendant vers zéro lorsque x tend vers une limite a ou vers l'infini. On caractérisera la loi d'après laquelle ces variables tendent vers zéro par le comportement de leurs rapports *).

Par la suite nous nous servirons des définitions suivantes:

D é f i n i t i o n 1. Si le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ a une limite finie et différente de zéro, c'est-à-dire si $\lim \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$, et, par conséquent, $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{A} \neq 0$, alors les infiniment petits α et β sont dits *infiniment petits du mëme ordre*.

E x e m p l e 1. Soit $\alpha = x$, $\beta = \sin 2x$, où $x \to 0$. Les infiniment petits α et β sont du même ordre, car

* Nous supposerons que l'infiniment petit figurant au dénominateur ne s'annule pas dans le voisinage du point a.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$$

E x e m p l e 2. Les infiniment petits x, $\sin 3x$, $\operatorname{tg} 2x$, $7 \operatorname{Log}(1 + x)$ sont tous du même ordre pour $x \to 0$. La démonstration est identique à celle que nous avons donnée pour l'exemple 1.

D é f i n i t i o n 2. Si le rapport de deux infiniment petits $\frac{\alpha}{\beta}$ tend vers zéro, c'est-à-dire si $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$ (et, par conséquent, $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$), alors l'infiniment petit β est dit infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à α et l'infiniment petit α est dit *infiniment petit d'ordre inférieur par rapport à* β.

E x e m p l e 3. Soit $\alpha = x$, $\beta = x^n$, $n > 1$ pour $x \to 0$. L'infiniment petit β est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à α, car $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^n}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^{n-1} = 0$.

Inversement, l'infiniment petit α est un infiniment petit d'ordre inférieur par rapport à β.

D é f i n i t i o n 3. L'infiniment petit β est dit *infiniment petit d'ordre k par rapport à l'infiniment petit* α si β et α^k sont du même ordre, c'est-à-dire si $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\beta}{\alpha^k} = A \neq 0$.

E x e m p l e 4. Si $\alpha = x$, $\beta = x^3$, alors β est un infiniment petit du troisième ordre par rapport à a quand $x \to 0$, car

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta}{\alpha^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{(x)^3} = 1 .$$

D é f i n i t i o n 4. Si le rapport de deux infiniment petits $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers l'unité, c'est-à-dire si $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, les *infiniment petits* β et α sont dits équivalents et l'on écrit $\alpha \approx \beta$.

E x e m p l e 5. Soit $\alpha = x$ et $\beta = \sin x$, avec $x \to 0$. Les infiniment petits α et β sont équivalents, car

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

E x e m p l e 6. Soit $\alpha = x$, $\beta = \operatorname{Log}(1 + x)$ pour $x \to 0$. Les infiniment petits α et β sont équivalents, car

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x} = 1$$

(voir exemple 6 § 9)

T h é o r è m e 1. *Si α et β sont des inf iniment petits équivalents, la différence α - β est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à chacun d'entre eux.*

D é m o n s t r a t i o n . En effet,

$$\lim \frac{\alpha-\beta}{\alpha} = \lim\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right) = 1-\lim\frac{\beta}{\alpha} = 1-1=0\,.$$

T h é o r è m e 2. *Si la différence de deux infiniment petits α - β est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à α et à β, alors α et β sont équivalents.*

D é m o n s t r a t i o n .

Soit $\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=0$,alors $\lim\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0$ ou 1 - lim $\frac{\beta}{\alpha}$ = 0, ou encore 1 = lim $\frac{\beta}{\alpha}$, c'est-à-dire α ≈ β.

Si $\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=0$, alors $\lim\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0$, lim $\frac{\beta}{\alpha}$ = 1, c'est-à-dire α ≈ β.

E x e m p l e 7. Soit α = x, β = $x + x^3$, où $x \to 0$. Les infiniment petits α et β sont équivalents, car leur différence β - α = x^3 est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à α et à β. En effet,

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to0}x^2=0\,,$$

$$\lim\frac{\beta-\alpha}{\beta}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x+x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1+x^2}=0\,.$$

2 E x e m p l e 8. Pour $x \to\infty$ les infiniment petits $\alpha=\frac{x+1}{x^2}$ et $\beta=\frac{1}{x}$ sont équivalents, car leur différence $\alpha-\beta=\frac{x+1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$ est infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à α et à β. La limite du rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est égale à 1

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1\,.$$

R e m a r q u e . Si le rapport de deux infiniment petits $\frac{\beta}{\alpha}$ n'a pas de limite et ne tend pas vers l'infini, β et α ne sont pas comparables au sens indiqué.

E x e m p l e 9. Soit α=x, β = x sin $\frac{1}{x}$, où $x\to$ 0. Les infiniment petits α et β ne sont pas comparables, car le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$=sin $\frac{1}{x}$ ne tend ni vers une limite finie ni vers l'infini lorsque $x \to 0$ (voir exemple 4 § 3).

Exercices

Calculer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+2x+5}{x^2+1}$. Rép. 4.
2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}$ [2 sin x – cos x + ctg x] Rép.2.
3. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{2+x}}$. Rép. 0.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)$. Rép. 2.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+1}{3x^3+1}$. Rép $\frac{4}{3}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}$. Rép. 1.
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$. Rép. $\frac{1}{2}$.
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$. Rép. $\frac{1}{3}$

Note. Ecrivons la formule $(k + 1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ pour k = 0, 1, 2, ..., n.

$$1^3 = 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3 . 1^2 + 3 . 1 + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3 . 2^2 + 3\ 2 + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1.$$

En additionnant membre à membre ces identités on :

$$(n + 1)^3 = 3\,(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + \ldots + n) + (n + 1),$$

$$(n + 1)^3 = 3\,(1^2 + 2^2 +\ldots+ n^2) + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + (n + 1).$$

d'où

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = 3\frac{n(n+1)}{2} + (n + 1).$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x+5}$. Rép. ∞.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$. Rép. 0.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$. Rép $\dfrac{1}{2}$

12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$. Rép. 4.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$. Rép. 3.

14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$. Rép. $\dfrac{1}{8}$

15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$. Rép. 1.

16. $\lim\limits_{y\to -2}\dfrac{y^3+3y^2+2y}{y^2-y-6}$. Rep $-\dfrac{2}{5}$

17. $\lim\limits_{u\to -2}\dfrac{u^3+4u^2+4u}{(u-2)(u-3)}$. Rép. 0.

18. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$. Rép. $3x^2$.

19. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right]$. Rép. -1.

20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$. Rép. n (n est un entier positif).

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. Rép $\dfrac{1}{2}$.

22. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$. Rép. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+p^2}-q}$. Rép. $\dfrac{q}{p}$

24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. Rep. $\dfrac{2}{3}$

25. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$. Rép. $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{ma}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$. Rép. $\dfrac{1}{2}$.

27. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$. Rép. 1.

28. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$. Rép. 1 quand $x\to+\infty$, -1 quand $x\to-\infty$.

29. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$. Rép. 0.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$. Rép. $\dfrac{1}{2}$ quand $x\to+\infty$, $-\infty$ quand $x\to-\infty$.

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$ .Rép. 1.

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$. Rép. 4.

33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{3}}{x^2}$. Rép. $\dfrac{1}{9}$.

34. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$. Rép. $\sqrt{2}$

35. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{cotg} x$. Rép. 1.

36. $\lim\limits_{v\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos v}{\sin\left(v-\dfrac{\pi}{3}\right)}$. Rép. $\sqrt{3}$

37. $\lim\limits_{z\to 1}(1-z)\operatorname{tg}\dfrac{\pi z}{2}$. Rép. $\dfrac{2}{\pi}$.

38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$. Rép. $\dfrac{2}{3}$

39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$. Rép. $2\cos a$.

40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$. Rép. $\dfrac{1}{2}$

41. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$. Rép. e^2.

42. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$. Rép. $\dfrac{1}{e}$

43. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$. Rép. $\dfrac{1}{e}$

44. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$. Rép. e

45. $\lim\limits_{n\to\infty}\{n\ [\operatorname{Log}(n+1)-\operatorname{Log} n]\}$. Rép. 1.

46. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$. Rép. e^3.

47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{Log}(1+\alpha x)}{x}$. Rép. α.

48. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. Rép. e

49. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. Rép. e^3

50. $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{m}\right)^m$. Rép. 1.

51. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{Log}(1+e^\alpha)}{\alpha}$. Rép. pour $\alpha\to+\infty$, 0 pour $\alpha\to-\infty$

52. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$. Rép. $\dfrac{\alpha}{\beta}$

53. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x-1}{x}(a>1)$. Rép. $+\infty$ pour $x\to+\infty$ pour $x\to-\infty$.

54. $\lim\limits_{x\to\infty} n\left[a^{\frac{1}{n}}-1\right]$. Rép. $\operatorname{Log} a$.

55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$. Rép. $\alpha - \beta$.

56. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$. Rép . 1

Trouver les points de discontinuité des fonctions:

57. $y=\dfrac{x-1}{x(x+1)(x^2-4)}$. Rép. Points de discontinuité pour $x = -2 ; -1 ;. 0 ; 2$.

58. $=\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$ Rép. Points de discontinuité pour $x = 0$ et $x = \pm\dfrac{2}{\pi}$; $\pm\dfrac{2}{3\pi}$; . . . ; $\pm\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$;. . .

59. Trouver les points de discontinuité de la fonction $y = 1 + 2^{\frac{1}{x}}$ et tracer le graphique de cette fonction. Rép. Points de discontinuité pour $x = 0$ ($y \to +\infty$ pour $x \to 0+0$, $y \to 1$ pour $x \to 0-0$).

60. Parmi les infiniment petits suivants (quand $x \to 0$) x^2, $\sqrt{x(x+1)}$, $\sin 3x$, $2x \cos x \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$, xe^{2x} trouver les infiniment petits du même ordre que x ainsi que les infiniment petits d'ordre supérieur et d'ordre inférieur à x. Rép. Les infiniment petits du même ordre sont $\sin 3x$ et xe^{2x}; les infiniment petits d'ordre supérieur sont x^2 et $2x \cos x \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$, l'infiniment petit d'ordre inférieuïr est $\sqrt{x(x+1)}$.

61. Parmi les infiniment petits suivants (quand $x \to 0$) trouver ceux qui sont du même ordre que x : $2 \sin x$, $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$, $x - 3x^2$, $\sqrt{2x^2 + x^3}$, $\operatorname{Log}(1 + x)$, $x^3 + 3x^4$. Rep. $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$, $x - 3x^2$, $\operatorname{Log}(1 + x)$.

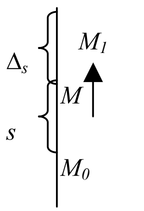
62. Vérifier que les infiniment petits $1 - x$ et $1 - \sqrt[3]{x}$ sont du même ordre quand $x \to 1$. Sont-ils équivalents ? Rép. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1 - x}{1 - \sqrt[3]{x}} = 3$, donc ces infiniment petits sont du même ordre mais ne sont pas équivalents.

Chapitre III

DÉRIVÉE ET DIFFÉRENTIELLE

§ 1. Vitesse d'un mouvement

Considérons le mouvement rectiligne d'un corps solide, par exemple, celui d'une pierre lancée verticalement vers le haut ou celui du piston dans le cylindre du moteur. Faisant abstraction de la forme et des dimensions de ce corps, nous le représenterons par un point matériel mobile M.



La distance s parcourue par ce point matériel calculée à partir d'une certaine position initiale M_o dépend du temps t, c'est-à-dire est une fonction du temps :

$$s = f(t). \qquad (1)$$

Supposons qu'à l'instant t * le point mobile M se trouvait à la distances de la position initiale M_o, et qu'à l'instant t + Δt le point se trouve à la position M_1, à la distance s + Δs de la position initiale (fig. 57).

Ainsi, pendant l'intervalle de temps Δt la distance sa varié de Δs. Dans ce cas, on dit que la grandeur s a reçu un accroissement Δs, pendant l'intervalle de temps Δt.

Considérons le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$; il nous donne la vitesse moyenne du mouvement du point pendant l'intervalle de temps Δt :

$$v_{moy} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (2)$$

La vitesse moyenne n'est pas toujours en mesure de caractériser exactement la vitesse du mouvement dun point M à l'instant t. Si, par exemple, le mouvement est tel que la vitesse du mobile, très grande tout d'abord, devient très petite ensuite,il est évident que la vitesse moyenne ne peut exprimer de telles particularités du mouvement et nous donner une idée juste de la véritable vitesse du mouvement à l'instant t. Pour exprimer, d'une manière plus précise, la véritable vitesse à l'aide de la vitesse moyenne, il faudrait choisir un intervalle de temps Δt plus petit. La limite vers laquelle tend la vitesse moyenne, quand $\Delta t \to 0$, caractérise au mieux la vitesse du mouvement du mobile à l'instant t. Cette limite est appelée la vitesse instantanée du mouvement:

---

* Ici et par la suite, nous désignerons la variable et les valeurs concrètes qu'elle est susceptible de prendre par une même lettre.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (3)$$

Ainsi, on appelle *vitesse instantanée du mouvement* la limite du rapport de l'accroissement du chemin parcouru Δs à l'accroissement du temps Δt, quand l'accroissement du temps tend vers zéro.

Ecrivons l'égalité (3) sous une forme plus explicite. Comme

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t),$$

nous avons:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \qquad (3')$$

Cette formule donne la vitesse d'un mouvement non uniforme. Nous voyons donc que la notion de vitesse d'un mouvement non uniforme est intimement liée à la notion de limite. Seule la notioi. de limite permet de définir la vitesse d'un mouvement non uniforme.

On voit, de la formule (3'), que v ne dépend pas de l'accroissement du temps Δt, mais dépend de t et de la fonction $f(t)$.

Exemple. Trouver la vitesse d'un mouvement uniformément accéléré à un instant quelconque t et à l'instant $t = 2$ s, si la loi du mouvement est :

$$s = \frac{1}{2} gt^2$$

Solution. A l'instant t nous avons $s = \frac{1}{2} gt^2$, à l'instant $t + \Delta t$ nous aurons :

$$s + \Delta s = \frac{1}{2} g(t + \Delta t)^2 = \frac{1}{2} g(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)$$

Calculons Δs :

$$\Delta s = \frac{1}{2} g(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - \frac{1}{2} gt^2 = gt\Delta t + \frac{1}{2} g\Delta t^2$$

Formons le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{gt\Delta t + \frac{1}{2} g\Delta t^2}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2} g\Delta t$$

nous avons par définition:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (gt + \frac{1}{2} g\Delta t) = gt$$

Ainsi, la vitesse à un instant quelconque t est égale à $v = gt$. Quand $t = 2$, nous avons $(v)_{t=2}$ = g •2 = 9,8 •2 = 19,6 m/s.

§ 2. Définition de la dérivée

Soit

$$y = f(x) \qquad (1)$$

une fonction définie dans un certain intervalle. Pour chaque valeur de la variable x de cet intervalle la fonction $y = f(x)$ admet une valeur bien définie.

Supposons que l'on donne à la variable x un accroissement Δx (positif ou négatif, cela n'a d'ailleurs aucune importance). La fonction y reçoit alors un accroissement Δy. Ainsi, pour les valeurs x et $x + \Delta x$ de la variable nous avons respectivement $y = f(x)$ et $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Calculons l'accroissement Δy de la fonction y :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \qquad (2)$$

Formons le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable indépendante

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (3)$$

Calculons la limite de ce rapport quand Δx tend vers zéro. Si cette limite existe, elle est appelée la d é r i v é e de la fonction $f(x)$ et on la désigne par la notation $f'(x)$. Ainsi, par définition,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ou

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (4)$$

Donc, on appelle dérivée de la fonction $y = f(x)$ par rapport à x la limite vers laquelle tend le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable indépendante quand ce dernier tend vers zéro.

Remarquons qu'en général pour chaque valeur de x la dérivée $f'(x)$ a une valeur déterminée, c'est-à-dire que la dérivée est également une fonction de x.

On emploie également les notations suivantes pour désigner la dérivée

$$y',\ y'_x,\ \frac{dy}{dx}.$$

On désigne la valeur concrète de la dérivée pour $x = a$ par la notation $f'(a)$ ou $y'|_{x=a}$.

L'opération que nécessite la recherche de la dérivée dune fonction $f(x)$ est appelée la dérivation de cette fonction.

E x e m p l e 1. Soit la fonction $y = x^2$. Calculer sa dérivée y'

1) en un point quelconque x,

2) au point $x = 3$.

S o l u t i o n . 1) Quand la valeur de la variable indépendante est égale à x, nous avons $y = x^2$. Quand la valeur de la variable indépendante est égale à $x + \Delta x$, nous avons $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$. Calculons l'accroissement de la fonction :

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Formons le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

En passant à la limite on trouve la dérivée de la fonction

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Ainsi, la dérivée de la fonction $y = x^2$ en un point arbitraire x est égale à $y' = 2x$.

2) Pour $x = 3$ nous avons:

$$y'|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6.$$

E x e m p l e 2. $\frac{1}{x}$; calculer y'.

S o l u t i o n . En suivant la v oie indiquée dans l'exemple précédent nous avons:

$$y = \frac{1}{x}; \qquad y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x};$$

$$\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\frac{1}{x(x+\Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}.$$

R e m a r q u e . Nous avons établi au paragraphe précédent que si le lien fonctionnel entre le chemin s parcouru par un point matériel mobile et le temps t est donné par la formule $s = f(t)$, la vitesse v à un instant arbitraire t s'exprime par la formule

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Donc

$$v = s'_t = f'(t),$$

c'est-à-dire que la vitesse est égale à la dérivée * par rapport au temps t du chemin parcouru.

§ 3. Interprétation géométrique de la dérivée

Nous avons été amenés à la notion de dérivée en étudiant la vitesse d'un corps mobile (d'un point), c'est-à-dire en partant de considérations mécaniques. Nous allons à présent donner une interprétation géométrique de la dérivée, non moins importante.

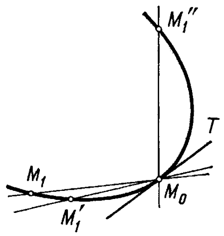


Fig. 58

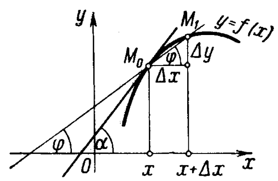


Fig. 59

Pour cela il nous faut avant tout définir la tangente à une courbe en un point donné. Etant donnée une courbe, soit M_o un point fixe de cette courbe. Prenons sur cette courbe un autre point M_1, et menons la sécante M_oM_1, (fig. 58). Quand le point M_1 s'approche indéfiniment du point M_o en restant sur la courbe, la sécante M_oM_1 occupe différentes positions $M_oM'_1$, $M_oM''_1$, etc.

Si, quand le point M_1 en restant sur la courbe s'approche indéfiniment du point M_o de n'importe quel côté, la sécante tend à occuper une position limite définie par la droite M_oT, cette droite est appelée la *tangente* à la courbe au point M_o. (Nous allons préciser plus loin ce que nous entendons par l'expression « tend à occuper ».)

Considérons la fonction $f(x)$ et la courbe qui lui correspond dans un système de coordonnées cartésiennes (fig. 59)

$$y = f(x) .$$

Pour une valeur x donnée, la fonction a pour valeur $y = f(x)$. Aux valeurs x et y correspond un point $M_o(\boldsymbol{x}, y)$ sur la courbe. Donnons à la variable x un accroissement Δx. A la nouvelle valeur $x + \Delta x$ de la variable indépendante

* Quand nous disons « dérivée par rapport à x » ou « dérivée par rapport au temps t », etc., nous sous-entendons que pendant le calcul de la dérivee la variable indépendante est respectivement x ou t, etc.

correspond une nouvelle valeur de la fonction : $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Le point correspondant de la courbe sera $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Menons la sécante M_oM_1 et désignons par φ l'angle formé par cette sécante avec l'axe des x positifs. Formons le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta y}$. On a d'après la figure 59:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi \qquad (1)$$

Si maintenant Δx tend vers zéro, le point M_1 se déplace le long de la courbe en se rapprochant indéfiniment de M_0. La sécante M_0M_1 pivote autour du point M_0 et l'angle φ varie avec Δx. Si pour $\Delta x \to 0$ l'angle φ tend vers une limite α, la droite passant par le point M_0 et formant un angle α avec l'axe des x positifs sera la tangente cherchée. On calcule facilement le coefficient angulaire de cette tangente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

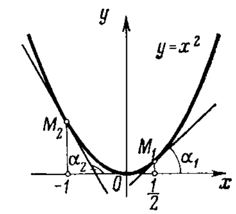


Fig. 60

Par conséquent,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha, \qquad (2)$$

c'est-à-dire que *la valeur de la dérivée f' (x) pour la valeur donnée de la variable x est égale à la tangente de l'angle formé par l'axe des x positifs et la tangente à la courbe représentative de la fonction y = f (x) au point correspondant M_0 (x, y).*

E x e m p l e . Trouver la tangente de l'angle formé par la tangente à la courbe $y = x^2$ aux points $M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $M_2(-1, 1)$ (fig. 60).

S o l u t i o n . Nous avons d'après l'exemple 1 du § 2 $y' = 2x$. Par conséquent,

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = y'|_{x=½} = 1 \ ; \ \operatorname{tg} \alpha_2 y'|_{x=-1} = -2$$

§ 4. Fonctions dérivables

D é f i n i t i o n. Si la fonction

$$y = f(x) \qquad (1)$$

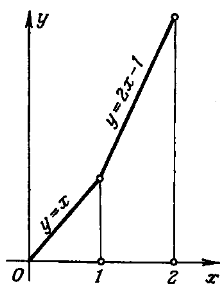
a une dérivée au point $x = x_o$, c'est-à-dire si la limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2)$$

existe, on dira que la fonction est *dérivable* pour la valeur $x = x_o$ ou, ce qui revient au même, qu'elle a une dérivée en ce point.

Si la fonction a une dérivée en chaque point d'un segment [a, b] ou d'un intervalle (a, b), on dit qu'elle est *dérivable sur ce segment* [a, b] ou respectivement *dans cet intervalle* (a, b).

Théorème. *Si la fonction $y = f(x)$ est derivable au point $x = x_o$, elle est continue en ce point.*



En effet, si

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

alors,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \gamma,$$

où γ est une grandeur qui tend vers zero quand $\Delta x \to 0$. Or,

$$\Delta y = f'(x_o)\,\Delta x + \gamma\,\Delta x;$$

d'où il découle que $\Delta y \to 0$ quand $\Delta x \to 0$, ce qui exprime Fig. 61 que la fonction $f(x)$ est continue au point x_o (voir § 9, ch. II)

Ainsi, aux points de discontinuité une fonction ne peut avoir de dérivée. La proposition inverse n'est pas vraie, c'est-àdire que si une fonction *$y = f(x)$* est continue au point $x = x_o$, il n'en découle pas qu'elle est derivable en ce point : la fonction $f(x)$ peut ne pas avoir de dérivée au point x_o. Pour s'en convaincre, considérons quelques exemples.

Exemple 1. La fonction $f(x)$ est définie sur le segment [0, 2] de la manière suivante (voir fig. 61)

$$f(x) = x \qquad \text{pour } 0 \le x \le 1,$$
$$f(x) = 2x - 1 \qquad \text{pour } 1 < x \le 2.$$

Cette fonction n'a pas de dérivée au point $x = 1$, quoiqu'elle soit continue en ce point.

En effet, pour $\Delta x > 0$ nous avons :

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[2(1+\Delta x)-1]-[2\cdot 1-1]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2,$$

pour $\Delta x < 0$ nous avons:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[1+\Delta x-1]-1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

Donc, la limite considérée dépend du signe de Δx et, par conséquent, la fonction n'a pas de dérivée au point $x = 1$ *. Géométriquement cela veut dire qu'au point $x = 1$ cette « courbe » n'a pas de tangente définie.
La continuité de cette fonction au point $x = 1$ découle de ce que

$$\Delta y = \Delta x \qquad \text{pour } \Delta x < 0,$$
$$\Delta y = 2\,\Delta x \qquad \text{pour } \Delta x > 0,$$

et, par conséquent, indépendamment du signe de Δx, $\Delta y \to 0$ quand $\Delta x \to 0$.

Exemple 2. La fonction $y = \sqrt[3]{x}$, dont le graphique est donné sur la figure 62, est définie et continue pour toutes les valeurs de la variable x. Nous allons voir si cette fonction a une dérivée pour $x = 0$. Pour cela, calculons la valeur de cette fonction aux points $x = 0$ et $x = 0 + \Delta x$; pour $x = 0$ nous avons $y = 0$, pour $x = 0 + \Delta x$ nous avons $y + \Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}$. D'où

$$\Delta y = \sqrt[3]{x}\ .$$

Cherchons la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable indépendante

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty$$

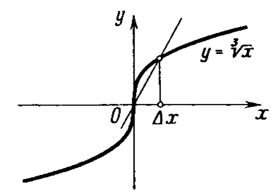


Fig. 62

Ainsi, le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable indépendante pour $x = 0$ tend vers l'infini quand $\Delta x \to 0$ (et, par conséquent, la limite n'existe pas). Donc, la fonction considérée n'est pas dérivable au point $x = 0$. La tangente à cette courbe forme en ce point un angle égal à $\frac{\pi}{3}$ avec l'axe Ox, c'est-à-dire qu'elle coïncide avec l'axe Oy.

§ 5. Dérivée de la fonction y = x^n pour n entier et positif

Pour calculer la dérivée d'une fonction donnée $y = f(x)$, on doit en vertu de la définition de la dérivée effectuer les operations suivantes:
1) donner un accroissement Δx à la variable x, calculer la valeur correspondante de la fonction :

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x);$$

2) calculer l'accroissement correspondant de la fonction :

---

* D'après la définition de la dérivée, le rapport Δx doit tendre vers unelimite déterminée quand $\Delta x \to 0$ indépendamment de la manièro dont Δx tend vers zéro.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

3) former le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

4) chercher la limite de ce rapport quand $\Delta x \to 0$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Nous adoptons ici et dans les paragraphes qui suivent ce procédé général de calcul de la dérivée de certaines fonctions élémentaires.

T h é o r è m e . *La dérivée de la fonction $y = x^n$, où n est un nombre entier positif, est égale à nx^{n-1}, c'est-à-dire*

si $y = x^n$, alors $y' = nx^{n-1}$. (1)

D é m o n s t r a t i o n . Soit la fonction

$$y = x^n.$$

1) Si x subit un accroissement Δx, alors

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n.$$

2) En utilisant la formule du binôme de Newton nous avons

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n$$

ou

$$\Delta y = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

3) Calculons le rapport :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}.$$

4) Trouvons la limite de ce rapport

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}\right] = nx^{n-1},$$

donc, $y' = nx^{n-1}$, ce qu'il fallait démontrer.

E x e m p l e 1 . $y = x^5$, $y' = 5x^{5-1} = 5x^4$.

E x e m p l e 2 . $y = x$, $y' = 1x^{1-1}$, $y' = 1$. Ce résultat possède une très simple interprétation géométrique : la tangente à la droite $y = x$ coïncide pour toutes les valeurs de x avec la droite elle-même et, par conséquent, forme avec l'axe des x positifs un angle de 45° dont la tangente est égale à 1.

Remarquons que la formule (I) est valable également dans le cas où n est un nombre fractionnaire ou négatif. (Cela sera démontré au § 12.)

E x e m p l e 3 . $y = \sqrt{x}$.

Mettons cette fonction sous la forme :

$$y = x^{\frac{1}{2}},$$

alors, d'après la formule (I) (en tenant compte de la remarque précédente), on a

$$y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \qquad \text{ou} \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Exemple 4. $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

Mettons y sous la forme :

$$y = x^{-\frac{3}{2}}$$

Alors

$$y' = -\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$$

§ 6. Dérivées des fonctions y = sin x; y = cos x

T h é o r è m e 1. *La dérivée de* sin x *est* cos x, c'est-à-dire

si $y = \sin x$, alors $y' = \cos x$. (II)

D é m o n s t r a t i o n . Donnons à la variable x un accroissement Δx, alors

1) $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$;

2)

$$\Delta x = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2} \times \cos\frac{x+\Delta x + x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right);$$

3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\ ;$$

4) $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\ ,$$

mais comme

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1,$$

on a

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x\ .$$

La relation précédente est légitimée par le fait que cos x est une fonction continue.

T h é o r è m e 2. *La dérivée de cos x est* -sin x, c'est-à-dire

$$\text{si } y=\cos x,\ \text{alors } y'=-\sin x.\quad \text{(III)}$$

D é m o n s t r a t i o n . Donnons à la variable x un accroissement Δx, alors

$$y+\Delta y=\cos\,(x+\Delta x)\ ;$$

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\times\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}=-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\ ;$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Prenant en considération que sin x est une fonction continue, nous obtenons en définitive

$$y'=-\sin x.$$

§ 7. Dérivées d'une constante, du produit d'une constante par une fonction, d'une somme, d'un produit et du rapport de deux fonctions

T h é o r è m e 1. *La dérivée d'une constante est égale à zéro,* c'est-à-dire

$$\text{si } y=C \text{ où } C=\text{const},\ \textit{alors } y'=0.\quad \text{(IV)}$$

D é m o n s t r a t i o n . $y = C$ est une fonction de x telle que pour tous les x la valeur de y est éga le à C. Donc, quel, que soit x

$$y=f\,(x)=C.$$

Donnons à la variable x un accroissement Δx ($\Delta x \neq 0$). Puisque la fonction y conserve la valeur C, quelle que soit la valeur de la variable indépendante, on a :

$$y+\Delta y=f\,(x+\Delta x)=C.$$

Par conséquent, l'accroissement de la fonction est égal à

$$\Delta y=f\,(x+\Delta x\,)-f\,(x)=0$$

et le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable indépendante est

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=0\ .$$

Donc,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0\ ,$$

c'est-à-dire

$$y' = 0 .$$

Ce résultat admet une interprétation géométrique simple. Le graphique de la fonction $y = C$ est une droite parallèle à l'axe Ox. La tangente à ce graphique coïncide évidemment en tous points avec cette droite et, par conséquent, forme avec l'axe Ox un angle dont la tangente y' est égale à zéro.

Théorème 2. *On peut sortir un facteur constant de dessous le signe de dérivation*, c'est-à-dire

si $y = Cu(x)$ (C = const), *alors* $y' = Cu'(x)$. (V)

Démonstration. En répétant le raisonnement de la démonstration du théorème précédent on a

$$y = Cu(x) ;$$

$$y + \Delta y = Cu(x + \Delta x) ;$$

$$\Delta y = Cu(x+\Delta x) - Cu(x) = C[u(x + \Delta x) - u(x)],$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

c'est-à-dire

$$y' = Cu'(x).$$

Exemple 1. $y = 3\frac{1}{\sqrt{x}}$,

$$y' = 3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = 3(x^{-\frac{1}{2}})' = 3\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$$

c'est-à-dire

$$y' = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}.$$

Théorème 3. *La dérivée de la somme d'un nombre fini de fonctions dérivables est égale à la somme des dérivées de ces fonctions* *. Par exemple, pour le cas de trois fonctions nous avons :

$$y = u(x) + v(x) + w(x),\ \ y' = u'(x) + v'(x) + w'(x). \quad \text{(VI)}$$

Démonstration. Pour la valeur x de la variable indépendante

$$y = u + v + w.$$

* L'expression $y = u(x) - v(x)$ est équivalente à $y = u(x) + (-1)\,v(x)$ et $y' = [u(x) + (-1)\,v(x)]' = u'(x) + [-v(x)]' = u'(x) - v'(x)$.

(Nous omettons la variable x dans la notation des fonctions pour simplifier l'écriture.)

Pour la valeur $x + \Delta x$ de la variable indépendante nous avons

$$y + \Delta x = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + (w + \Delta w),$$

où Δy, Δu, Δv, Δw sont respectivement les accroissements des fonctions y, u, v, w, pour un accroissement correspondant Δx de la variable x. Par conséquent,

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}$$

ou

$$y' = u'(x) + v'(x) + w'(x).$$

Théorème 4. *La dérivée du produit de deux fonctions dérivables est égale au produit de la dérivée de la première fonction par la seconde plus le produit de la première fonction par la dérivée de la seconde*, autrement dit

si $y = uv$, *alors* $y' = u'v + uv'$. (VII)

Démonstration. En suivant le raisonnement utilisé pour la démonstration du théorème précédent, on a

$$y = uv,$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}v + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}v + \lim_{\Delta x\to 0}u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x} =$$

$$\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)v + u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

(puisque u et v ne dépendent pas de Δx).

Considérons le dernier terme du second membre $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$
$u\,(x)$ étant une fonction dérivable, elle est aussi continue. Donc,
$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u = 0$. En outre,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v' \neq \infty .$$

Ainsi le terme considéré est égal à zéro et nous avons en définitive :

$$y' = u'v + uv' .$$

Ce théorème permet d'obtenir sans difficulté la règle de dérivation du produit d'un nombre quelconque de fonctions. Ainsi, si nous considérons le produit de trois fonctions $y = uvw$, en le mettant sous forme du produit de u et de (vw), nous avons : $y' = u'(vw) + u\,(vw)' = u'vw + u\,(v'w + vw') = u'vw + uv'w + uvw'$. Ce procédé permet d'obtenir une formule analogue pour la dérivée du produit d'un nombre quelconque (fini) de fonctions. Si $y = u_1u_2\ldots u_n$, alors

$$y' = u_1'u_2\ldots u_{n-1}u_n + u_1u_2'\ldots u_{n-1}u_n + \ldots + u_1u_2\ldots u_{n-1}u_n'$$

E x e m p l e 3. Si $y = x^2 \sin x$, alors

$$y' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

E x e m p l e 4. Si $y = \sqrt{x}\sin x \cos x$, alors

$$y' = (\sqrt{x})' \sin x \cos x + \sqrt{x}(\sin x)' \cos x + \sqrt{x}\sin x(\cos x)' =$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x\cos x + \sqrt{x}\cos x\cos x + \sqrt{x}\sin x(-\sin x) =$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x\cos x + \sqrt{x}(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{\sin 2x}{4\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos 2x .$$

T h é o r è m e 5. *La dérivée d'une fraction (c'est-à-dire du rapport de deux fonctions) est une fraction dont le dénominateur est égal au carré du dénominateur de la fraction considérée et le numérateur est égal à la différence du produit du dénominateur par la dérivée du numérateur et du produit du numérateur par la dérivée du dénominateur,*
c'est-à-dire

$$\text{si } y = \frac{u}{v}, \quad \text{alors } y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \qquad \text{(VIII)}$$

D é m o n s t r a t i o n . Si Δy, Δu et Δv sont respectivement les accroissements des fonctions y, u et v pour l'accroissement correspondant Δx de la variable x, nous avons

$$y + \Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}, \qquad \Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{v\Delta u - u\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)} = \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)},$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)} = \frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v+\Delta v)}$$

D'où, en remarquant que $\Delta v \to 0$ quand $\Delta x \to 0$ *, nous avons :

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Exemple 5. Si $y = \frac{x^3}{\cos x}$, alors

$$y' = \frac{(x^3)'\cos x - x^3(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{3x^2\cos x - x^3\sin x}{\cos^2 x}$$

R e m a r q u e . Si la fonction considérée est de la forme

$$y = \frac{u(x)}{C},$$

où le dénominateur est une constante, au lieu d'utiliser la formule (VIII), pour calculer sa dérivée, il est préférable de se servir de la formule (V)

$$y' = \left(\frac{1}{C}u\right)' = \frac{1}{C}u' = \frac{\dot{u}}{C}.$$

Bien sûr, ce résultat peut être également obtenu à l'aide de la formule (VIII).

Exemple 6.Si $y = \frac{\cos x}{7}$, alors

$$y' = \frac{(\cos x)'}{7} = -\frac{\sin x}{7}.$$

* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$ puisque $v\,(x)$ est une fonction dérivable et, par conséquent, continue.

§ 8. Dérivée d'une fonction logarithmique

T h é o r è m e . *La dérivée de la fonction* $\log_a x$ *est égale à* $1/x \log_a e$ c'est-à-dire

$$\text{si } y = \log_a x, \text{ alors } y' = 1/x \log_a e. \quad \text{(IX)}$$

D é m o n s t r a t i o n . Si Δy est l'accroissement de la fonction $y = \log_a x$ pour un accroissement correspondant Δx de la variable x, alors :

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x) \ ;$$

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \ ;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Multiplions et divisons par x l'expression figurant dans le second membre de la dernière égalité :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Désignons la quantité $\Delta x/x$ par α. I1 est évident que $\alpha \to 0$ quand Δx tend vers zéro pour un x donné. Par conséquent,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Or, nous savons que (voir § 7, chap. 11)

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Si l'expression figurant sous le signe du logarithme tend vers le nombre e, le logarithme de cette expression tend vers log,, a (en vertu de la continuité de la fonction logarithmique). D'où nous avons en définitive :

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

En remarquant que $\log_a e = \dfrac{1}{\log a}$ nous pouvons mettre la formule obtenue sous la forme $y' = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\log a}$.

Notons un cas particulier important de cette formule : si $a = e$, alors Log a = Log e = 1, c'est-à-dire

$$\text{si } y = \operatorname{Log} x, \text{ alors } y' = \frac{1}{x}. \qquad \text{(X)}$$

§ 9. Dérivée d'une fonction composée

Soit $y = f(x)$ une fonction composée, c'est-à-dire pouvant être mise sous la forme $y = F(u)$, $u = \varphi(x)$

ou encore $y = F[\varphi(x)]$ (voir chap. I, § 8). Dans l'expression $y = F(u)$, u est appelée *variable intermédiaire*.
Etablissons la règle de dérivation d'une fonction composée.

T h é o r è m e . *Si la fonction* $u = \varphi(x)$ *a une dérivée* $u'_x = \varphi'(x)$ *au point x et la fonction* $y = F(u)$ *a une dérivée* $y'_u = F'(u)$ *pour la valeur correspondante de u, alors au point considéré x la f onciion composée* $y = F[\varphi(x)]$ *a également une dérivée égale à* $y'_x = F'_u(u)\varphi'(x)$.
où u doit être remplacée par l'expression $u = \varphi(x)$. *Plus simplement* $y'_x = y'_u u'_x$,
c'est-à-dire que la dérivée d'une fonction composée est égale au produit de la dérivée de cette fonction par rapport à la variable intermédiaire u par la dérivée par rapport à x de la variable intermédiaire.

D é m o n s t r a t i o n . Pour une valeur donnée de x nous aurons:

$$y = F(u), \ u = \varphi(x)$$

Pour la nouvelle valeur $x + \Delta x$ de la variable x, on a

$$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x), \quad y + \Delta y = F(u + \Delta u).$$

Ainsi à l'accroissement Δx correspond un accroissement Δu auquel correspond à son tour un accroissement Δy ; en outre, quand $\Delta x \to 0$ nous aurons $\Delta u \to 0$ et $\Delta y \to 0$. Par hypothèse,

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u.$$

De cette relation et d'après la définition de la limite nous avons (pour $\Delta u \neq 0$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u + \alpha \qquad (1)$$

où $\alpha \to 0$, quand $\Delta u \to 0$. Ecrivons l'égalité (1) sous la forme

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \Delta u \qquad (2)$$

L'égalité (2) est également vérifiée pour $\Delta u = 0$ quel que soit α, puisque dans ce cas elle se transforme en l'identité $0 = 0$. Pour $\Delta u = 0$ nous poserons $\alpha = 0$. Divisons tous les termes de l'égalité (2) par Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad (3)$$

Par hypothèse,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0 .$$

En passant à la limite dans l'égalité (3) quand $\Delta x \to 0$ nous avons

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x, \qquad \text{c.q.f.d.} \quad (4)$$

E x e m p l e 1. Soit la fonction $y = \sin (x^2)$. Calculons y'_x. Mettons cette fonction sous forme de fonction composée de la manière suivante

$$y = \sin u,\ u = x^2.$$

Nous trouvons

$$y'_u = \cos u,\ u'_x = 2x.$$

Par conséquent, d'après la formule (4) $y'_x = y'_u \ u'_x = \cos u \cdot 2x$. En remplaçant α par son expression en x, nous avons en définitive

$$y'_x = 2x \cos(x^2) .$$

E x e m p l e 2. Soit la fonction $y = (\text{Log}\, x)^3$. Calculons y'_x.
Nous pouvons mettre cette fonction sous la forme

$$y = u^3, \quad u = \text{Log}\, x.$$

Nous trouvons

$$y'_u = 3u^2, \qquad u'_x = 1/x.$$

Par conséquent,

$$y'_x = 3u^2 \frac{1}{x} = 3(\log x)^2 \frac{1}{x} .$$

Si la fonction $y = f(x)$ peut être mise sous la forme

$$y = F(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x),$$

le calcul de la dérivée y'_x peut être effectué en appliquant successivement le théorème précédent.

En vertu de la règle que nous venons de démontrer nous avons :

$$y'_x = y'_u\, u'_x$$

En appliquant ce théorème pour calculer u'_x nous avons:

$$u'_x = u'_v\, v'_x$$

En substituant l'expression de ux dans l'égalité précédente nous avons:

$$y'_x = y'_u\, u'_v\, v'_x$$

ou

$$y'_x = F'_u(u)\, \varphi'_v(v)\, \psi'_x(x)$$

E x e m p l e 3. Soit la fonction $y = \sin [(\text{Log}\, x)^3]$. Calculons y'_x. Mettons cette fonction sous la forme suivante:

$$y = \sin u,\ u = v^3,\ v = \text{Log}\, x.$$

Nous trouvons

$$y'_u = \cos \underline{u},\ u'_v = 3v^2,\ v'_x = 1/x .$$

Par conséquent, nous avoûs en vertu de la formule (5)

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = 3(\cos x) v^2 \frac{1}{x}$$

ou en définitive

$$y'_x = \cos\left[(\log x)^3\right] \cdot 3(\log x)^2 \frac{1}{x} .$$

Remarquons que la fonction considérée n'est définie que pour $x > 0$.

§ 10. Dérivées des fonctions y = tg x, y = ctg x, y = Log |x|

T h $ o r è m e 1. *La dérivée de la fonction tg x est égale à'* $\dfrac{1}{\cos^2 x}$

c'est-à-dire

$$\text{si } y = \operatorname{tg} x, \text{ alors } y' = \frac{1}{\cos^2 x}. \text{ (XI)}$$

Démonstration. Comme

$$y = \frac{\sin x}{\cos x},$$

nous avons en vertu de la règle de dérivation des fractions [voir formule (VIII), § 7, chap. III]:

$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

T h é o r è m e 2. *La dérivée de la fonction ctg x est égale à* $-\frac{1}{\sin^2 x}$, c'est-à-dire

$$\text{si } y = \operatorname{ctg} x, \text{ alors } y' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad \text{(XII)}$$

Démonstration. Comme

$$y = \frac{\cos x}{\sin x}$$

alors

$$y' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$\frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

E x e m p l e 1. Si $y = tg\sqrt{x}$, alors

$$y' = \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}.$$

E x e m p l e 2. Si y = Log ctg x, alors

$$y' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} (\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{1}{\cos x \sin x} = -\frac{2}{\sin 2x}.$$

T h é o r è m e 3. *La dérivée de la fonction y =*Log |*x*| (fig. 63) *est égale à* $y' = \frac{1}{x}$, c'est-à-dire

$$\text{si } y = \text{Log } |x|, \text{ alors } y' = \frac{1}{x}. \qquad \text{(XIII)}$$

Démonstration.a) Si $x > 0$,alors $|x| = x$,Log $|x|$ = Log x et, par conséquent,

$$y = \frac{1}{x}.$$

b) Soit $x < 0$, alors $|x| = -x$. Mais
Log $|x|$ = Log $(-x)$.
(Remarquons que si $x < 0$, alors $-x > 0$.)

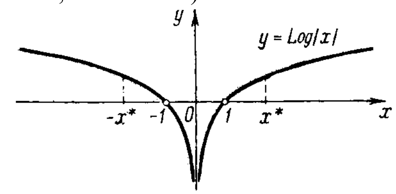


Fig. 63

Mettons la fonction y = Log $(-x)$ sous la forme d'une fonction composée en posant y = Log u; $u = -x$.

Alors

$$y'_x = y'_u u'_x = \frac{1}{u}(*1) = \frac{1}{-(x)}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Donc, pour les valeurs négatives de x nous retrouvons encore la formule

$$y'_x = \frac{1}{x}$$

Ainsi, la formule (XIII) est démontrée pour toutes les valeurs de $x \neq 0$. (Pour x = 0 la fonction Log $|x|$ n'est pas définie.)

§ 11. Fonction implicite et sa dérivé

Supposons que les valeurs des variables x et y soient liées entre elles par une équation que nous désignerons symboliquement par

$$F(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Si la fonction $y = f(x)$ définie dans un intervalle (a, b) est telle qu'en remplacant dans l'équation (1) y par $f(x)$ cette équation se transforme en une identité en x, alors la fonction $f(x)$ est appelée fonction implicite définie par l'équation (1).

Ainsi, par exemple, l'équation

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \qquad (2)$$

définit implicitement les fonctions élémentaires suivantes (fig. 64 et 65)

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad (3)$$

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (4)$$

En effet, après avoir remplacé y par ces expressions, l'équation (2) se transforme en une identité

$$x^2 + (a^2 - x^2) - a^2 = 0.$$

Les expressions (3) et (4) ont été obtenues en résolvant l'équation (2) par rapport à y. Mais il n'est pas toujours possible de trouver la forme

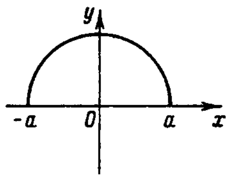


Fig. 64

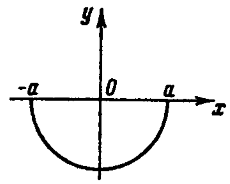


Fig. 65

explicite d'une fonction implicite, c'est-à-dire qu'il n'est pas toujours possible de l'exprimer sous la forme $y = f(x)$ *), où $f(x)$ est une fonction élémentaire.

Ainsi, les fonctions définies par l'équation

$$y^2 - y - x^2 = 0 \quad \text{ou} \quad y - x = \frac{1}{4}\sin y = 0$$

ne s'expriment pas à l'aide des fonctions élémentaires, c'est-à-dire qu'on ne peut les résoudre en y au moyen des fonctions élémentaires.

R e m a r q u e 1. Remarquons que les termes « fonction implicite » et « fonction explicite » caractérisent le mode d'expression de la fonction donnée et non pas la nature de celle-ci.

Toute fonction explicite $y = f(x)$ peut être mise sous la forme d'une fonction implicite $y - f(x) = 0$.

Indiquons à présent la règle qui permet de trouver la dérivée d'une fonction implicite sans l'avoir préalablement mise sous la forme explicite, c'est-à-dire $y = f(x)$.

Supposons que la fonction soit donnée par l'équation

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Si y est la fonction de x définie par cette équation, alors cette dernière se transforme en identité.

En dérivant les deux membres de cette identité par rapport à x, et en supposant que y est fonction de x, nous avons (d'après la règle de dérivation des fonctions composées)

$$2x + 2yy' = 0, .$$

* Si une fonction est définie par une équation de la forme $y = f(x)$, on dit qu'elle est donnée sous forme explicite, ou que c'est une fonction explicite.

d'où ,

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Remarquons que si nous avions dérivé la fonction explicite correspondante

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

nous aurions eu

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y},$$

c'est-à-dire le même résultat.

Considérons encore un exemple de fonction implicite $y^6 - y - x^2 = 0$.

Dérivons par rapport à x :

$$6y^5y' - y' - 2x = 0,$$

d'où

$$y' = \frac{2x}{6y^2 - 1}$$

R e m a r q u e 2. Les exemples considérés montrent que pôur calculer la valeur de la dérivée d'une fonction implicite pour une valeur donnée de la variable x, il faut connaître également y pour cette valeur de x.

§ 12. Dérivée d'une fonction puissance quand l'exposant est un nombre réel quelconque, dérivée de la fonction exponentielle et de la fonction composée exponentielle

T h é o r è m e 1. La dérivée de la fonction x^n, où n est un nombre réel arbitraire, est nx^{n-1}, c'est-à-dire

$$\text{si } y = x^n, \text{ alors } y' = nx^{n-1}. \quad (\text{I}')$$

D é m o n s t r a t i o n . Soit $x > 0$. En prenant le logarithme de la fonction donnée, nous avons

$$\text{Log } y = n \text{ Log } x.$$

Dérivons les deux membres de l'égalité obtenue par rapport à x, en supposant que y est fonction de x

$$\frac{y'}{y} = n\frac{1}{x}; \quad y' = yn\frac{1}{x}.$$

En remplaçant y par sa valeur $y = x^n$, nous avons en définitive

$$y' = nx^{n-1}.$$

On démontre aisément que cette formule est aussi vraie pour $x < 0$ si x^n a un sens *).

Théorème 2. La dérivée de la fonction a^x, où $a > 0$, est a^x Log a, c'est-à-dire

$$\text{si } y = a^x, \text{ alors } y' = a^x \text{ Log } a. \quad \text{(XIV)}$$

Démonstration. En prenant le logarithme de l'égalité $y = a^x$, nous avons

$$\text{Log } y = x \text{ Log } a.$$

Dérivons l'égalité obtenue en supposant que y est fonction de x

$$\frac{1}{y} y' = \log y; \quad y' = y \log a$$

ou

$$y' = a^x \text{ Log } a.$$

Si la base du logarithme $a = e$, alors Log $e = 1$ et nous avons la formule.

$$y = e^x, \quad y' = e^x. \quad \text{(XIV')}$$

Exemple 1. Soit la fonction $y = e^{x^2}$.

Mettons-la sous la forme d'une fonction composée en introduisant la variable intermédiaire u

$$y = e^u, \; u = x^2;$$

alors , $\quad y'_u = e^u, \quad u = x^2$;

Et, par conséquent,

$$y'_x = e^n 2x = e^{x^2} 2x$$

On appelle *fonction composée exponentielle* toute fonction exponentielle dont la base et l'exposant sont des fonctions de x, par exemple, $(\sin x)^{x^2}, x^{tgx}, x^x, (\log x)^x$, etc., et en général toute fonction de la forme

$$y = [u(x)]^{v(x)} \equiv u^v$$

est une fonction composée exponentielle.

Théorème 3.

$$\text{Si } y = u^v, \text{ alors } y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \text{ Log } u \qquad \text{(XV)}$$

Démonstration. Prenons le logarithme de la fonction y

* Précédemment (§ 5, chap. III) nous avons démontré cette formule dans le cas de n entier positif. Elle est maintenant démontrée dans le cas général (pour tout nombre n constant).

$$\text{Log } y = v \text{ Log } u.$$

En dérivant cette égalité par rapport à x, nous avons

$$\frac{1}{y} y' = v \frac{1}{u} u' + v' \log u,$$

d' où

$$y' = y\left(v \frac{u'}{u} + v' \log u\right).$$

En remplaçant y par l'expression u^v nous avons

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \text{ Log } u.$$

Ainsi, la dérivée d'une fonction composée exponentielle comprend deux termes : on obtient le premier en supposant au cours de la dérivation que u est une fonction de x et v une constante (c'est-à-dire en considérant u^v comme une fonction puissance) ; on obtient le second terme en supposant que v est une fonction de x et u une constante (c'est-à-dire en considérant u^v comme une fonction exponentielle).

Exemple 2. Si $y = x^x$, alors $y' = xx^{x-1}(x') + x^x (x') \log x$

ou $y' = x^x + x^x \log x = x^x (1 + \log x)$.

Exemple 3. Si $y = (\sin x)^{x^2}$, alors

$$y' = x^2(\sin x)^{x^2-1} (\sin x)' + (\sin x)^{x^2} (x^2)' \log \sin x =$$
$$x^2(\sin x)^{x^2-1} \cos x + (\sin x)^{x^2} 2x \log \sin x .$$

Le procédé appliqué dans ce paragraphe pour calculer la dérivée consiste en ce que nous cherchons tout d'abord la dérivée du logarithme de la fonction donnée; ce procédé est fréquemment employé pour trouver la dérivée de certaines fonctions, car, bien souvent, il simplifie les calculs.

Exemple 4. Soit à calculer la dérivée de la fonction

$$y = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$$

Solution. En prenant le logarithme de cette expression nous avons

$$\log y = 2\log(x+1) + \frac{1}{2}\log(x-1) - 3\log(x+4) - x$$

En dérivant les deux membres de cette égalité, nous trouvons

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1 .$$

Multipliant par y et remplaçant y par l'expression $\dfrac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}$ nous avons :

$$y' = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}\left[\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{x+4}-1\right].$$

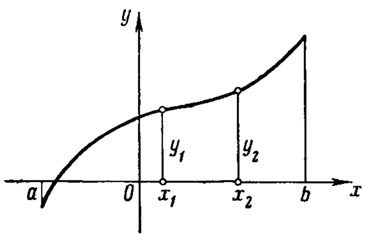
R e m a r q u e . L'expression $\dfrac{y'}{y} = (\log y)'$, la dérivée du logarithme népérien de la fonction donnée $y = y\,(x)$, est appelée dérivée logarithmique.

§ 13. Fonction inverse (ou réciproque) et sa dérivée

Soit

$$y = f(x) \quad (1)$$

une fonction croissante (fig. 66) ou décroissante définie dans l'intervalle (a, b) $(a < b)$ (voir § 6, chap. I). Soit $f\,(a) = c$, $f\,(b) = d$. Pour fixer les idées, considérons une fonction croissante.



Prenons deux valeurs différentes x_1 et x_2 de l'intervalle (a, b). En vertu de la définition des fonctions croissantes, il vient que si $x_1 < x_2$ et $y_1 = f\,(x_1)$, $y_2 = f\,(x_2)$ alors $y_1 < y_2$. Donc à deux valeurs différentes x_1 et x_2 correspondent deux valeurs différentes y_1 et y_2 de la fonction. Inversement, si $y_1 < y_2$ et $y_1 = f\,(x_1)$, $y_2 = f\,(x_2)$, il découle de la définition des fonctions croissantes que $x_1 < x_2$. Ainsi,

Fig. 66.

on établit une correspondance biunivoque entre les valeurs de x et les valeurs correspondantes de y. En considérant ces valeurs de y comme les valeurs de la variable indépendante et les valeurs de x comme les valeurs de la fonction, nous obtenons x en fonction de y :

$$x = \varphi\,(y)\text{-} \quad (2)$$

Cette fonction est appelée fonction inverse de la fonction $y = f\,(x)$. Il est évident que la fonction $y = f\,(x)$ est la fonction inverse de la fonction $x = \varphi\,(y)$. On démontre par un raisonnement analogue que la fonction décroissante admet aussi une fonction inverse.

R e m a r q u e 1. Nous nous bornerons à citer, sans la démontrer, la proposition suivante : si la fonction croissante (ou décroissante) $y = f\,(x)$ est continue sur le

segment $[a, b]$ et $f\,(a) = c$, $f\,(b) = d$. alors la fonction inverse est définie et continue sur le segment $[c, d]$.

E x e m p l e 1. Soit la fonction $y = x^3$. Cette fonction est croissante dans l'intervalle infini $-\infty < x < +\infty$, elle a une fonction inverse $x = \sqrt[3]{y}$ (fig. 67).

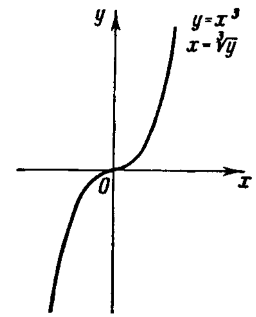


Fig. 67

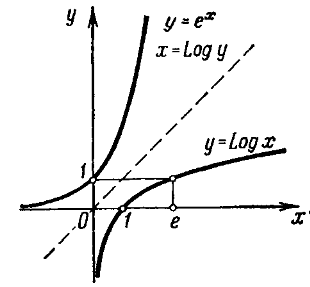
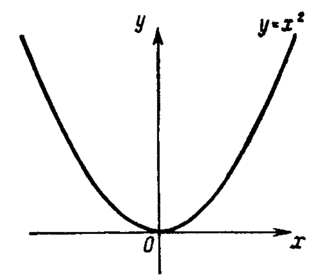


Fig. 68

Notons que l'on trouve la fonction inverse $x = \varphi\,(y)$ en résolvant l'équation $y = f\,(x)$ par rapport à x.

E x e m p l e 2. Soit la fonction $y = e^x$. Cette fonction est croissante dans l'intervalle infini $-\infty < x < +\infty$. Elle admet pour fonction inverse $x = \mathrm{Log}\,y$. Le domaine de définition de la fonction inverse est l'intervalle $0 < y < \infty$ (fig. 68).

R e m a r q u e 2. Si la fonction $y = (x)$ n'est ni croissante ni décroissante dans un intervalle, elle peut avoir plusieurs fonctions inverses *).



E x e m p l e 3. La fonction $y = {}^2$ est définie dans l'intervalle infini $-\infty < x < +\infty$. Elle n'est ni croissante ni décroissante et n'admet pas de fonction inverse.

Mais, si nous considérons l'intervalle $0 \le x < +\infty$, nous voyons que cette fonction est croissante dans cet intervalle et que sa fonction inverse est $y = \sqrt{x}$. Dans l'intervalle $-\infty < x < 0$ la fonction est décroissante et admet pour fonction inverse la fonction $x = -\sqrt{y}$ (fig. 69).

R e m a r q u e 3. Si les fonctions $y = f\,(x)$ et $x = \varphi\,(y)$ sont réciproquement inverses, leur graphique est une même courbe. Mais, si nous désignons de

* Soulignons, une fois de plus, qu'en disant que y est une fonction de z, on sous-entend une dépendance univoque entre y et x.

nouveau la variable indépendante de la fonction inverse par x et la fonction par y et si nous traçons le graphique de ces deux fonctions relativement à un même système de coordonnées, nous obtiendrons deux graphiques différents. On voit aisément que ces graphiques sont symétriques par rapport à la bissectrice du premier quadrant.

E x e m p l e 4. Sur la figure 68 nous avons tracé les graphiques de la $y = e^x$ (ou celui de $x = \text{Log } y$) et de sa fonction inverse $y = \text{Log } x$ étudiées dans l'exemple.

Nous allons démontrer maintenant un théorème permettant de trouver la dérivée de la fonction $y = f(x)$ si l'on connaît la dérivée de sa fonction inverse.

T h é o r è m e . Si la fonction

$$y = f(x) \qquad (1)$$

admet une fonction inverse

$$x = \varphi(y) \qquad (2)$$

dont la dérivée $\varphi'(y)$ en un point donné y est dif férente de zéro, alors la fonction $y = f(x)$ possède au point x correspondant une dérivée $f'(x)$ égale à $\frac{1}{\varphi'(y)}$; c'est-à-dire que nous avons la formule

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \qquad \text{(XVI)}$$

Ainsi la dérivée de l'une des deux fonctions réciproquement inverses est égale à l'inverse de la dérivée de l'autre fonction au point considéré *).

D é m o n s t r a t i o n . Dérivons les deux membres de l'égalité (2) par rapport à x, en supposant que y est une fonction de x **)

$$1 = \varphi'(y) y'_x$$

d'où

$$y'_x = \frac{1}{\varphi'(y)} .$$

* Quand nous écrivons $f'(x)$ ou y'_x, nous supposons que pendant le calcul de la dérivée la variable indépendante est x; de même, quand nous écrivons $\varphi'(y)$ ou x'_y, nous supposons que pendant le calcul de la dérivée la variable indépendante est y. Notons qu'après avoir dérivé par rapport a y nous devons remplacer y par son expression $f(x)$ dans le second membre de la formule (XVI).

** En fait, nous cherchons ici la dérivée de la fonction de x donnée implicitement par l'équation $x - \varphi(y) = 0$.

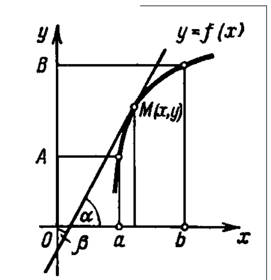
En remarquant que $y'_x = f'(x)$, nous obtenons la formule (XVI) que nous pouvons mettre sous la forme :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} .$$

Le résultat obtenu possède une illustration géométrique très simple. Considérons le graphique de la fonction $y = f(x)$ (fig. 70).

Cette courbe sera aussi le graphique de la fonction $x = \varphi(y)$, où x est la variable dépendante et y la variable indépendante. Considérons un point quelconque $M(x, y)$ sur cette courbe. Menons la tangente à la courbe en ce point. Désignons respectivement par α et β, les angles formés par cette tangente avec les axes positifs Ox et Oy. D'après les résultats du § 3 relatifs à la signification géométrique de la dérivée nous déduisons :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \text{tg}\,\alpha \\ \varphi'(y) &= \text{tg}\,\beta \end{aligned} \qquad (3)$$



Il vient immédiatement de la figure 70 que si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, alors

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, on voit facilement que $\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$. Par conséquent, nous aurons toujours

$$\text{tg}\,\beta = \text{ctg}\,\alpha,$$

d' où

$$\text{tg}\,\alpha \;\text{tg}\,\beta = \text{tg}\,\alpha \;\text{ctg}\,\alpha = 1$$

ou

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\beta} .$$

En remplaçant tg α et tg β par leurs valeurs déduites de la formule (3) nous obtenons

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} .$$

§ 14. Fonctions trigonométriques inverses et leurs dérivées

1) La fonction $y = \text{arc sin}\, x$.
Considérons la fonction

$$x = \sin y \qquad (1)$$

et traçons son graphique en prenant pour axe Oy la verticale ascendante (fig. 71).
Cette fonction est définie dans l'intervalle infini $- \propto < y < < + \propto$. Sur le segment $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ la fonction $x = \sin y$ est croissante et ses valeurs remplissent le segment $-1 \le x \le 1$. C'est pourquoi la fonction $x = \sin y$ a une fonction inverse que l'on désigne par $y = \text{arc sin}\, x$ *).

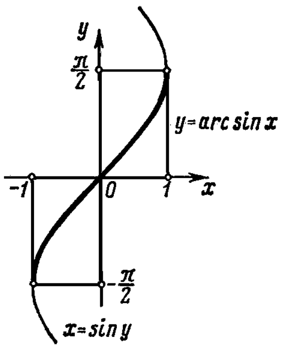


Fig. 71

Cette fonction est définie sur le segment $-1 \le x \le 1$ et ses valeurs remplissent $y = \text{arc sin}\, x$ le segment $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. Le graphique de la fonction $y = \text{arc sin}\, x$ est représenté sur la figure 71 par un trait gras.

T h é o r è m e 1. La dérivée de la fonction arc sin x est $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, c'est-à-dire si

$$y = \text{arc sin}\, x, \text{ alors } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad \text{(XVII)}$$

D é m o n s t r a t i o n . En vertu de l'égalité (1) nous avons :

$$x'_y = \cos y$$

D'après la règle de dérivation d'une fonction inverse

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y},$$

mais

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2},$$

* Remarquons que l'égalité $y = \text{Arc sin}\, x$ bien connue en trigonométrie n'est qu'une autre forme d'écriture de l'égalité (1). Ici (pour x donné) y désigne l'ensemble des valeurs des angles dont le sinus est égal à x.

donc

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nous prenons le signe + devant la racine, parce que la fonction $y = \text{arc sin}\, x$ prend ses valeurs sur le segment $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ et que, par conséquent, $\cos y \ge 0$.

Exemple 1. $y = \text{arc sin}\, e^x$,

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}(e^x)' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

Exemple 2.

$$y = \left(\text{arc sin}\,\frac{1}{x}\right)^2,$$

$$y' = 2\arcsin\frac{1}{x}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$-2\arcsin\frac{1}{x}\,\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

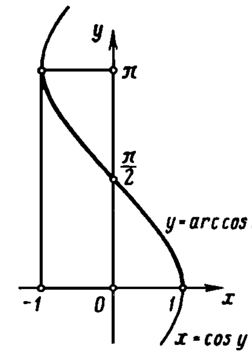


Fig. 72

2) La fonction $y = \text{arc cos}\, x$.
Considérons comme précédemment la fonction

$$x = \cos y \quad (2)$$

et traçons son graphique en orientant l'axe Oy suivant la verticale ascendante (fig. 72). Cette fonction est définie dans l'intervalle infini $- \propto < y < + \propto$. La fonction $x = \cos y$ est décroissante sur le segment $0 \le y \le \pi$ et elle a une fonction inverse que l'on désigne par la notation $y = \text{arc cos}\, x$. Cette fonction est définie sur le segment $-1 \le x \le 1$. Les valeurs de cette fonction remplissent l'intervalle $\pi \ge y \ge 0$. Le graphique de la fonction $y = \text{arc cos}\, x$ est représenté sur la figure 72 en trait gras.

T h é o r è m e 2. La dérivée de la fonction arc cos x est $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ c'est-à-dire

$$\text{si } y = \text{arc cos}\, x, \text{ alors } y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{(XVIII).}$$

D é m o n s t r a t i o n . On trouve d'après l'égalité (2)

$$x'_y = -\sin y$$

Par conséquent,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} \ ,$$

Mais $\cos y = x$, d'où

$$y'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Dans l'égalité $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ nous prenons le signe plus devant la racine, parce que la fonction $y = \arccos x$ est définie sur le segment $0 \le y \le \pi$ et que par conséquent $\sin y \ge 0$.

Exemple 3. $y = \arccos(\operatorname{tg} x)$,

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}(\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}\frac{1}{\cos^2 x} .$$

3) La fonction $y = \operatorname{arc\,tg} x$. Considérons la fonction

$$x = \operatorname{tg} y \ (3)$$

et traçons son graphique (fig. 73). Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de y, excepté les valeurs $y = (2k+1)\frac{\pi}{2} \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

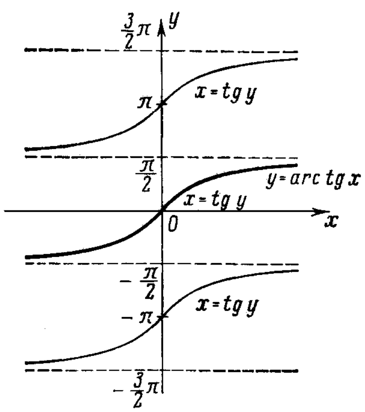


Fig. 73

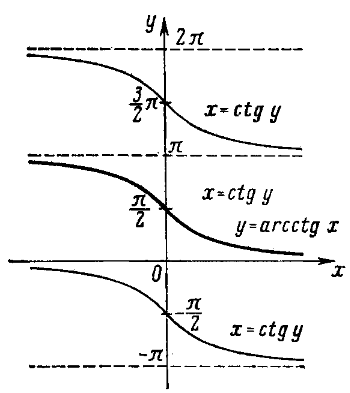


Fig. 74

La fonction $x = \operatorname{tg} y$ est croissante dans l'intervalle $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ et elle admet dans cet intervalle une fonction inverse que l'on désigne par $y = \operatorname{arc\,tg} x$.

Cette fonction est définie dans l'intervalle $-\infty < x < +\infty$. Les valeurs de la fonction remplissent l'intervalle $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Le graphique de la fonction $y = \operatorname{arc\,tg} x$ est représenté sur la figure 73 en trait gras.

T h é o r è m e 3. La dérivée de la fonction $\operatorname{arc\,tg} x$ est $\frac{1}{1+x^2}$,

c'est-à-dire

si $y = \operatorname{arc\,tg} x$, alors $y' = \frac{1}{1+x^2}$. (XIX)

D é m o n s t r a t i o n . On trouve d'après l'égalité (3)

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}$$

Par conséquent,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y$$

mais

$$\cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}$$

puisque $\operatorname{tg} y = x$, nous obtenons en définitive

$$y' = \frac{1}{1+x^2} .$$

Exemple 4. $y = (\operatorname{arc\,tg} x)^4$,

$$y' = 4\,(\operatorname{arc\,tg} x)^3\,(\operatorname{arc\,tg} x)' = 4\,(\operatorname{arc\,tg} x)^3\,\frac{1}{1+x^2} .$$

4) La fonction $y = \operatorname{arc\,ctg} x$.
Considérons la fonction

$$x = \operatorname{ctg} y. \ (4)$$

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de y, excepté les valeurs $y = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Le graphique de cette fonction est représenté sur la figure 74. Dans l'intervalle $0 < y < \pi$ la fonction $x = \operatorname{ctg} y$ est décroissante et elle a une fonction inverse que nous désignons par la notation

$$y = \operatorname{arc\,ctg} x.$$

Cette fonction est donc définie dans l'intervalle infini $-\infty < x < +\infty$ et ses valeurs remplissent l'intervalle $\pi > y > 0$.

T h é o r è m e 4. La dérivée de la fonction arc ctg x est $-\frac{1}{1+x^2}$,

c'est-à-dire

$$\text{si } y = \text{arc ctg } x, \text{ alors } y' = -\frac{1}{1+x^2}. \quad \text{(XX)}$$

D é m o n s t r a t i o n . On déduit de l'égalité (4):

$$y'_x = -\frac{1}{\sin^2 y}$$

Par conséquent,

$$y'_x = -\sin^2 y = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}$$

Mais

$$\operatorname{ctg} y = x.$$

Donc,

$$y'_x = -\frac{1}{1+x^2}$$

§ 15. Tableau des principales formules de dérivation.

Réunissons en un tableau unique les principales formules et règles de dérivation que nous avons démontrées dans les paragraphes précédents:

$$y = \text{const}, \; y' = 0.$$

Fonction puissance :

$$y = x^\alpha, \quad y' = \alpha x^\alpha ,$$

en particulier,

$$y = \sqrt{x}, \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \;;$$

$$y = \frac{1}{x}, \quad y' = -\frac{1}{x^2} \;;$$

Fonctions trigonométriques :

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x,$$

$$y = \cos x, \quad y' = -\sin x,$$

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Fonctions trigonométriques inverses

$$y = \text{arc sin } x, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$y = \text{arc cos } x, \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \text{arc tg } x, \quad y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \text{arc ctg } x, \quad y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Fonction exponentielle :

$$y = a^x, \quad y' = a^x \operatorname{Log}_a e;$$

en particulier,

$$y = e^x, \quad y' = e^x.$$

Fonction logarithmique

$$y = \log_a x, \quad y' = 1/x \log_a;$$

en particulier,

$$y = \operatorname{Log} x, \quad y' = 1/x .$$

Principales règles de dérivation

$y = Cu(x)$, $\quad y' = Cu'(x)$ (C = const)

$y = u + v - w$, $\quad y' = u' + v' - w'$,

$y = uv$, $\quad y' = u'v + uv'$,

$y = \frac{u}{v}$, $\quad y' = \frac{u'v + uv'}{v^2}$,

$y = f(u)$, $\quad y'_x = f'_u(u)\, \varphi'_x(x)$,

$u = \varphi(x)$,

$y = u^v$, $\quad y' = vu^{v-1} u' + u^v v' \operatorname{Log} u$.

Si $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$, où f et φ sont deux fonctions réciproquement inverses, alors

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}, \quad \text{où } y = f(x).$$

§ 16. Fonctions données sous forme paramétrique

Soient données deux équations

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \Psi(t), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

où t varie sur le segment [T_1, T_2]. A chaque valeur de t correspondent deux valeurs x et y (nous supposons que les fonctions φ et ψ sont univoques). Si l'on considère les valeurs de x et de y comme les coordonnées d'un point du plan Oxy, à chaque valeur de t correspondra un point bien déterminé de ce plan. Quand t varie de T_1 à T_2, ce point décrit dans le plan une courbe. Les équations (1) sont dites *équations paramétriques* de cette courbe, t est appelé *paramètre* et le procédé qui permet de donner la courbe par les équations (1) est dit *paramétrique*.
Supposons ensuite que la fonction $x = \varphi\ (t)$ admet une fonction inverse $t = \Phi\ (x)$. Il est alors évident que y est une fonction de x

$$y = \psi\ [\Phi\ (x)]. \qquad (2)$$

Ainsi, les équations (1) définissent y en fonction de x et l'on dit que la fonction y de x est donnée sous forme paramétrique.
La relation $y = f\ (x)$, exprimant la dépendance directe de y en fonction de x, s'obtient en éliminant le paramètre t dans les équations (1).
Les courbes données par des équations paramétriques sont fréquemment employées en mécanique. Par exemple, si un point matériel se déplace dans le plan Oxy et si l'on connaît les lois du mouvement des projections de ce point sur les axes de coordonnées,

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \Psi(t), \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

où le paramètre t est le temps, les équations (1') sont alors les équations paramétriques de la trajectoire du point mobile. En éliminant de ces équations le paramètre t, on en déduit l'équation de la trajectoire sous la forme $y = f\ (x)$ ou $F\ (x, y) = 0$. Considérons le problème suivant.
Problème. Trouver la trajectoire et le point d'impact d'un corps pesant lancé d'un avion se déplaçant à la vitesse horizontale v_o à l'altitude y_o (on peut négliger la résistance de l'air).
Solution . Choisissons le système de coordonnées indiqué sur la figure 75 en supposant que le corps est largué de l'avion à l'instant même où il coupe l'axe Oy. Il est évident que le déplacement horizontal du corps sera un mouvement uniforme à vitesse constante v_o

$$x = v_o t.$$

Le déplacement vertical d'un corps tombant sous l'effet de la pesanteur s'exprime par la formule

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Par conséquent, la distance du corps à la terre à tout instant sera exprimée par la formule :

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

Les deux équations

$$x = v_o t,$$

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}$$

seront les équations paramétriques de la trajectoire. Pour éliminer le paramètre t, nous tirons la valeur de t de la première équation, et nous substituons la valeur $t = \frac{x}{v_0}$ dans la seconde équation. Alors l'équation de la trajectoire prend la forme:

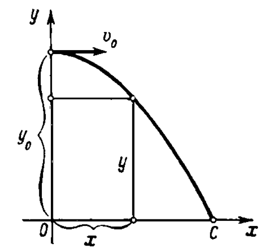


Fig. 75

$$0 = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

C'est l'équation d'une parabole dont le sommet est le point $M\ (0, y_o)$ et l'axe de symétrie coïncide avec l'axe Oy. Calculons la grandeur du segment OC. Désignons par X l'abscisse du point C; remarquons que l'ordonnée de ce point est $y = 0$. En substituant ces valeurs dans la formule précédente nous avons:

$$0 = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} X^2$$

d'où

$$X = v_0 \sqrt{\frac{2y_0}{g}}.$$

§ 17. Equations paramétriques de certaines courbes

Cercle. Soit un cercle de rayon r dont le centre se trouve à l'origine des coordonnées (fig. 76).
Désignons par t l'angle formé par le rayon aboutissant à un point arbitraire $M\ (x, y)$ de la circonférence et l'axe Ox. On peut alors exprimer les coordonnées d'un point arbitraire de la circonférence à l'aide du paramètre t de la manière suivante:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos t,\\ y &= r\sin t,\end{aligned}\right\} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Ce sont justement les équations paramétriques du cercle. Si nous éliminons de ces équations le paramètre t, nous obtiendrons une équation du cercle dans laquelle entrent seulement les variables x et y. En additionnant ces équations paramétriques après les avoir préalablement élevées au carré, nous trouvons

$$x^2 + y^2 = r^2\,(\cos^2 t + \sin^2 t)$$

ou

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

E l l i p s e . Soit donnée l'équation de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Posons

$$x = a\cos t. \qquad (2')$$

En substituant cette expression dans l'équation (1) nous trouvons

$$y = b\sin t. \qquad (2'')$$

Les équations

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t,\\ y &= b\sin t,\end{aligned}\right\} \qquad 0 \le t \le 2\pi \qquad (2)$$

sont les équations paramétriques de l'ellipse.

Elucidons le sens géométrique du paramètre t. Menons de l'origine prise comme centre deux cercles de rayons a et b (fig. 77). Soit M (x, y) un point de l'ellipse et

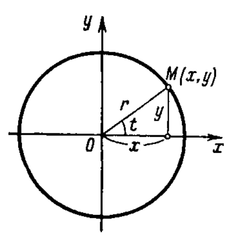


Fig. 76

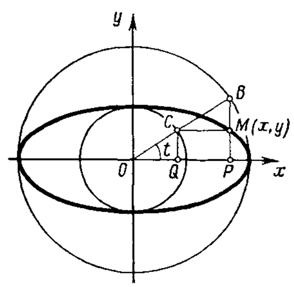


Fig. 77

soit B un point du grand cercle ayant la même abscisse que M. Désignons par t l'angle formé par le rayon OB et l'axe Ox. Il vient immédiatement de la figure 77

$x = OP = a\cos t$ [c'est l'équation (2')], $CQ = b\sin t$. Nous concluons de l'égalité (2'') que $CQ = y$, c'est-à-dire que la droite CM est parallèle à l'axe Ox.

Par conséquent, dans les équations (2) t est l'angle formé par le rayon OB et l'axe des abscisses. On apple parfois l'angle t *angle d'excentricité*.

C y c l o ï d e . On appelle cycloïde la courbe engendrée par un point situé sur une circonférence qui roule sans glisser sur une droite (fig. 78). Supposons que le point mobile M de la circonférence se trouve au début du mouvement à l'origine des coordonnées. Déterminons les coordonnées du point M après que la circonférence a pivoté d'un angle t. Désignons par a le rayon de cette circonférence. On voit de la figure 78 que $x = OP = OB - PB$, mais comme la circonférence roule sans glisser $OB = MB = at$, $PB = MK = a\sin t$.

Par conséquent,

$$x = at - a\sin t = a\,(t - \sin t).$$

Or, $y = MP = KB = CB - CK = a - a\cos t = a\,(1 - \cos t)$.

Les équations

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t),\\ y &= a(t - \cos t),\end{aligned}\right\} \quad 0 \le t \le 2\pi \qquad (3)$$

sont les équations paramétriques de la cycloïde. Quand t varie de 0 à 2π, le point M décrit un arc de la cycloïde.

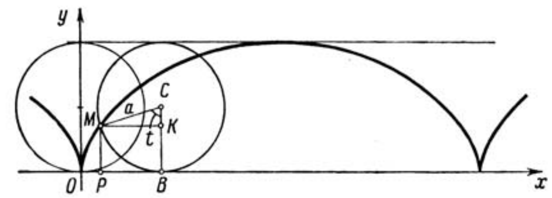


Fig. 78

Eliminons le paramètre t de ces équations afin de déterminer la dépendance directe existant entre y et x. La fonction $y = a\,(1 - \cos t)$ admet sur le segment $0 \le t \le \pi$ une fonction inverse

$$t = \arccos\frac{a-y}{a}.$$

En substituant cette expression de t dans la première des équations (3) nous trouvons:

$$x = \arccos\frac{a-y}{a} - a\sin\left(\arccos\frac{a-y}{a}\right)$$

ou

$$x = a\arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} \quad \text{pour } 0 \le x \le \pi\alpha$$

On voit directement de la figure 78 que pour $\pi\alpha \le x \le 2\pi\alpha$

$$x = 2\pi a - \left(\arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}\right).$$

Remarquons que la fonction $x = a\ (t - \sin t)$ admet une fonction inverse qui ne s'exprime pas à l'aide de fonctions élémentaires.

R e m a r q u e 1. L'exemple de la cycloïde montre qu'il est parfois plus aisé d'étudier les fonctions et les courbes données sous forme paramétrique que sous la forme de la dépendance directe : y de x ou x de y.

A s t r o ï d e . On appelle astroïde la courbe dont les équations paramétriques sont les suivantes

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t, \\ y &= a\sin^3 t \end{aligned}\right\} \quad 0 \le t \le 2\pi \qquad (4)$$

En élevant les deux membres de ces équations à la puissance 2/3 et en les additionnant membre à membre nous en déduisons la dépendance directe entre y et x :

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(\cos^2 t + \sin^2 t).$$

ou

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \qquad (5)$$

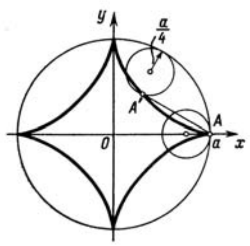


Fig. 79

Nous verrons par la suite (voir § 12, chap. V) que cette courbe a bien la forme représentée sur la figure 79. Cette courbe peut être définie comme la trajectoire décrite par un point d'une circonférence de rayon $a/4$ roulant sans glisser sur une autre circonférence de rayon a (le petit cercle reste constamment à l'intérieur du grand) (voir fig. 79).

R e m a r q u e 2. Notons que les équations (4) et (5) ne définissent pas qu'une seule fonction $y = f\ (x)$. Elles définissent deux fonctions continues sur le segment $-a \le x \le +a$. L'une d'elles ne prend que des valeurs non négatives et l'autre que des valeurs non positives.

§ 18. Dérivée d'une fonction donnée sous forme paramétrique

Soit une fonction y de x donnée par les équations paramétriques

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \Psi(t), \end{aligned}\right\} \qquad t_0 \le t \le T$$

Supposons que ces fonctions sont dérivables et que la fonction $x = \varphi$ (t) admet une fonction inverse $t = \Phi\ (x)$ également dérivable. Dans ce cas la fonction $y = f\ (x)$ définie par les équations paramétriques peut être considérée comme une fonction composée :

$$y = \Psi\ (t), \qquad t = \Phi\ (t),$$

où t est une variable intermédiaire.

D'après la règle de dérivation des fonctions composées on a

$$y'_x = y'_t t'_x = \Psi'_t(t)\Phi'_x(x).$$

Il résulte du théorème relatif à la dérivation des fonctions inverses que:

$$\Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

En reportant cette expression dans la formule (2) il vient

$$y'_x = \frac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \text{ou}, \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad \text{(XXI)}$$

Cette formule permet de calculer la dérivée y'_x de la fonction paramétrique, sans connaître explicitement la dépendance entre y et x.

E x e m p l e 1. La fonction y de x est donnée par les équations paramétriques

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= b\sin t, \end{aligned}\right\} \qquad (0 \le t \le \pi)$$

Calculer la dérivée $\frac{dy}{dx}$: 1) pour t quelconque ; 2) pour $t = \frac{\pi}{4}$.

Solution.

$$1)\ y'_x = \frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t\ ; \qquad 2)\ (y'_x)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1$$

E x e m p l e 2. Trouver le coefficient angulaire de la tangente à la cycloide $\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(t - \cos t), \end{aligned}\right\}$ en un point quelconque $(0 \le t \le 2\pi)$.

Solution. Le coefficient angulaire de la tangente est égal en chaque point à la valeur de la dérivée y'_x en ce point, c'est-à-dire $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

Mais

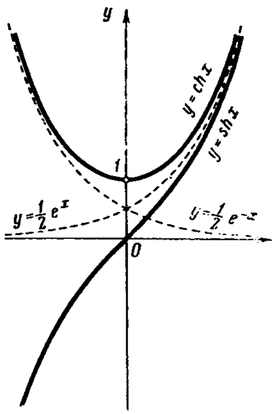
$$x'_t = a\ (1-\cos t), \quad y'_t = a\sin t.$$

Par conséquent, $y'_x = \dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \dfrac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\dfrac{t}{2} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t}{2}\right).$

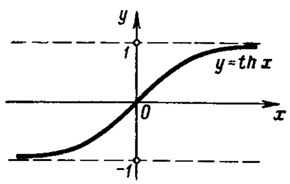
Ainsi, le coefficient angulaire de la tangente à la cycloide est égal en chaque point à $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$, où t est la valeur du paramètre correspondant à ce point.

Mais cela signifie que l'angle a formé par la tangente et l'axe des x est égal à $\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}$ (pour les valeurs de t comprises entre -π. et π) *).

§ 19. Fonctions hyperboliques



Dans de nombreuses applications de l'analyse mathématique on rencontre fréquemment les combinaisons des fonctions exponentielles telles que ½ (e^x - e^{-x}) et ½ (e^x + e^{-x}). On considère ces combinaisons comme de nouvelles fonctions que l'on note comme suit:



$$\left.\begin{aligned} \text{sh}\, x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \text{ch}\, x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

La première de ces fonctions est *hyperbolique*, la seconde *cosinus hyperbolique*.

Ces deux fonctions permettent d'en définir deux autres $\text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x}$ et

$\text{cth}\, x = \frac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x}$

---

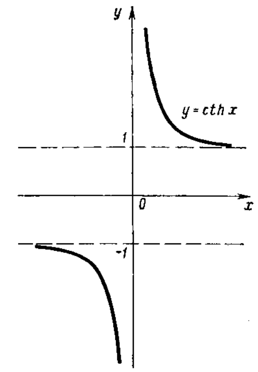
* En effet, le coefficient angulaire est ëgal à la tangente de l'angle α formé par la tangente à la courbe et l'axe Ox. C'est pourquoi

$$\text{tg}\alpha = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)$$

et $\alpha = \frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}$ pour les valeurs de t telles que $\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}$ est compris entre 0 et π.

$$\left.\begin{aligned} th\, x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \textit{tangente hyperbolique} \\ ch\, x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad \textit{cotangnte hyperbolique} \end{aligned}\right\}$$

(1)



Il est évident que les fonctions sh x, ch x, th x sont définies pour toutes les valeurs de x. Toutefois la fonction cth x est définie partout à l'exclusion du point $x = 0$.

Les graphiques des fonctions hyperboliques sont représentés sur les figures 80, 81, 82.

Il résulte de la définition des fonctions hyperboliques sh x et ch x [formules (1)] que nous venons de donner des identités analogues à celles que vérifient les fonctions trigonométriques :

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1, \quad (2)$$

$$\text{ch}\,(a + b) = \text{ch}\, a\, \text{ch}\, b + \text{sh}\, a\, \text{sh}\, b, \quad (3)$$

$$\text{sh}\,(a + b) = \text{sh}\, a\, \text{ch}\, b + \text{ch}\, a\, \text{sh}\, b. \quad (3')$$

En effet,

$$ch^2x - sh^2x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1$$

Remarquons que

$$ch(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2}$$

nous trouvons

$$\text{ch}a\,\text{ch}b + \text{sh}a\,\text{sh}b = \frac{e^a + e^{-a}}{2}\frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2}\frac{e^b - e^{-b}}{2} =$$

$$\frac{e^{a+b} + e^{-a+b} + e^{a-b} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{-a-b} - e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \text{ch}(a+b)$$

On démontre d’une manière analogue l'identité (3').

L'expression « fonctions hyperboliques » est due au fait que les fonctions sh t et ch t tiennent dans les équations paramétriques de l'hyperbole

$$x^2 - y^2 = 1$$

le même rôle que les fonctions sin t et cos t dans les équations paramétriques du cercle $x^2 + y^2 = 1$

En effet, en éliminant le paramètre t entre les équations

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

on trouve :

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

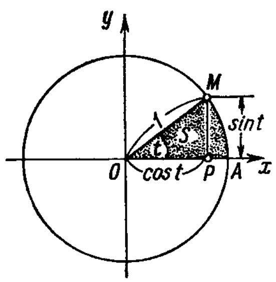
ou

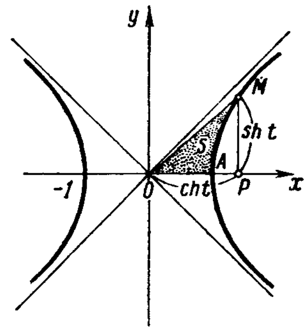
$$x^2 + y^2 = 1 \text{ (l'équation du cercle).}$$

De même, les équations

$$x = \text{ch } t, \ \ y = \text{sh } t$$

sont les équations paramétriques de l'hyperbole.





En effet, en élevant au carré les deux membres de ces équations et en retranchant la deuxième de la première, on trouve:

$$x^2 - y^2 = \text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t.$$

Puisque l'expression figurant au second membre est égale à l'unité en vertu de la formule (2), on a en définitive:

$$x^2 - y^2 = 1$$

c'est-à-dire l'équation de l'hyperbole.

Considérons le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$(fig. 83). Dans les équations $x = \cos t$, $y = \sin t$ la valeur numérique du paramètre t est égale à l'angle au centre AOM ou au double de la surface S du secteur AOM, puisque $t = 2S$

Indiquons sans le démontré, que le paramètre t, qui entre dans les équations paramétriques de l'hyperbole

$$x = \text{ch } t, \ \ y = \text{sh } t,$$

est aussi numériquement égal au double de la surface du « secteur hyperbolique » AOM (fig. 84).

Les dérivées des foncyions hyperboliques sont données par les formules :

$$\left.\begin{array}{ll} (\text{sh } x)' = \text{ch } x, & (\text{th } x)' = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}, \\ (\text{ch } x)' = \text{sh } x, & (\text{cth } x)' = -\dfrac{1}{\text{sh}^2 x} \end{array}\right\} \qquad \text{(XXII)}$$

qui découlent directement de la définition des fonctions hyperboliques ; par exemple, pour la fonction $\text{sh } x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ nous avons :

$$(\text{sh } x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch } x$$

§20. Différentielle

Soit $y = f(x)$ une fonction dérivable sur le segment $[a, b]$. On a défini la dérivée de cette fonction au point x du segment $[a,b]$ par la relation :

Le rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ pour $\Delta x \to 0$ tend vers un nombre déterminé $f'(x)$, et, par conséquent, diffère de la dérivée $f'(x)$ d'une quantité infiniment petite :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

où $\alpha \to 0$ quand $\Delta x \to 0$. Multiplions tous les termes de cette égalité par Δx ; nous avons

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x$$

Puisqu'en général $f'(x) \neq 0$, le produit $f'(x)\,\Delta x$ est, pour x constant et Δx variable, une quantité infiniment petite du même ordre que Δx quand $\Delta x \to 0$. Par contre, le produit $\alpha\,\Delta x$ est toujours une quantité infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à Δx, puisque

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$$

Ainsi, l'accroissement Δy de la fonction y se compose de deux termes ; le premier [pour $f'(x) \neq 0$] est appelé la partie principale de l'accroissement, c'est une fonction linéaire de Δx. On appelle différentielle le produit $f'(x)\,\Delta x$ et on le désigne par la notation dy ou $df(x)$.

Ainsi si la fonction $y = f(x)$ admet une dérivée $f'(x)$ au point x, on appelle différentielle de cette fonction et l'on note dy le produit de la dérivée $f'(x)$ en ce point par l'accroissement de la variable indépendante Δx :

$$dy = f(x)\,\Delta x. \quad (2)$$

Calculons la différentielle de la fonction $y = x$. Dans ce cas

$$y' = (x)' = 1,$$

et, par conséquent, $dy = dx = \Delta x$ ou $dx = \Delta x$. Ainsi, la différentielle dx de la variable indépendante x s'identifie avec son accroissement Δx. L'égalité $dx = \Delta x$ aurait pu être prise pour définition de la différentielle de la variable indépendante, et l'exemple précédent montre bien que cette définition ne contredit pas la définition générale de la différentielle d'une fonction. Pour tous les cas la formule (2) peut être mise sous la forme :

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Mais il vient de cette relation que :

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Par conséquent, la dérivée $f'(x)$ peut être considérée comme le rapport des différentielles de la fonction et de la variable indépendante.

Revenons à l'expression (1) qui d'après (2) peut être récrite comme suit

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x.$$

Ainsi, l'accroissement de la fonction diffère de la différentielle de cette fonction par une quantité infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à Δx. Si $f'(x) \neq 0$, alors $\alpha\Delta x$ est aussi un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à dy et

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{f'(x)\Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1$$

C'est pourquoi, on use fréquemment dans certains calculs numériques de l'égalité approchée

$$\Delta y \approx dy \quad (4)$$

ou sous forme explicite

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x, \qquad (5)$$

ce qui simplifie les calculs.

Exemple 1. Trouver la différentielle dy et l'accroissement Δy de la fonction $y = x^2$

1) pour des valeurs arbitraires de x et de Δx;
2) pour $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$.

Solution. 1) $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + \Delta x^2$,
$dy = (x^2)'\,\Delta x = 2x\,\Delta x$.
2) Si $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$, alors

$\Delta y = 2\cdot 20\cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 4{,}01$,
$dy = 2\cdot 20\cdot 0{,}1 = 4{,}00$.

L'erreur commise en remplaçant Δy par dy est égale à 0,01. Dans de nombreux cas on peut l'estimer insignifiante par rapport à $\Delta y = 4{,}01$ et la négliger.

Le problème considéré est illustré par la figure 85.

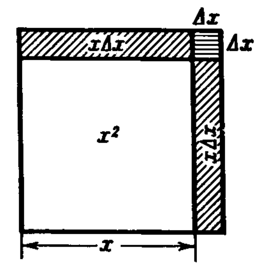


Fig. 85

Pour les calculs numériques on utilise également l'égalité approchée qui découle de (5)

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x. \qquad (6)$$

Exemple 2. Soit $f(x) = \sin x$, alors $f'(x) = \cos x$. Dans ce cas l'égalité approchée (6) devient:

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x\,\Delta x. \qquad (7)$$

Calculons la valeur approchée de sin46°. Posons $x = 45° = \pi/4$, $\Delta x = 1° = \pi/180$,

$$46° = 45° + 1° = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}.$$

En reportant dans (7) nous avons:

$$\sin 46° = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{4}$$

ou

$$\sin 46° \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\pi}{180} = 0{,}7071 + 07071\cdot 0{,}0175 = 0{,}7194.$$

Exemple 3. Si l'on pose $x = 0$, $\Delta x = \alpha$ dans la formule (7), on a l'égalité approchée

$$\sin\alpha \approx \alpha.$$

Exemple 4. Si $f(x) = \operatorname{tg} x$, nous avons en vertu de la formule (6) l'égalité approchée:

$$\operatorname{tg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x}\Delta x,$$

pour $x = 0$, $\Delta x = \alpha$ nous avons:

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha.$$

Exemple 5. Si $f(x) = \sqrt{x}$, il vient de la formule (6) :

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x.$$

Posant $x = 1$, $\Delta x = \alpha$ on a l'égalité approchée:

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha .$$

Le problème de calcul de la différentielle est équivalent à celui de la dérivée, puisque en multipliant cette dernière par la différentielle de la variable indépendante, on obtient la différentielle de la fonction. C'est pourquoi la majorité des théorèmes et formules relatifs à la dérivée sont valables pour la différentielle. Par exemple :

La différentielle de la somme de deux fonctions dif férentiables u et v estégale à la somme des différentielles de ces fonctions:

$$d(u + v) - du + dv.$$

la différentielle du produit de deux fonctions différentiables u et v est donnée par la formule

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Démontrons, par exemple, la dernière formule. Si $y = uv$, alors

$$dy = y'dx = (uv' + vu')dx = uv'dx + vu'dx,$$

mais

$$v'\,dx = dv,\ u'\,dx = du,$$

d'où

$$dy = u\,dv +- v\,du.$$

D'une manière analogue on pourrait démontrer également d'autres formules, par exemple, celle de la différentielle du rapport de deux fonctions

si $y = \frac{u}{v}$, alors $dy = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Voici quelques exemples de calcul de la différentielle.

exemple 6. $y = \mathrm{tg}^2 x$, $dy = 2\,\mathrm{tg}\,x \frac{1}{\cos^2 x} dx$

Exemple 7. $y = \sqrt{1+\log x}$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{1+\log x}} \cdot \frac{1}{x} dx$

Déterminons la différentielle d'une fonction composée. Soit

$$y = f(u),\ u = \varphi(x) \text{ ou } y = f[\varphi(x)]$$

En vertu de la règle de dérivation des fonctions composées

$$\frac{dy}{dx} = f_u^{'}(u)\varphi'(x)$$

Par conséquent,

$$dy = f_u^{'}(u)\varphi'(x)dx$$

Mais $\varphi'(x)dx = du$, d'où

$$dy = f'(u)\,du.$$

Ainsi, *la différentielle d'une fonction composée s'exprime de la même manière que si la variable intermédiaire a était une variable indépendante*. En d'autres termes, *la différentielle d'une fonction f (x) ne dépend pas du fait que x est une variable indépendante ou une fonction d' une autre variable*. Cette propriété importante de la différentielle qui consiste dans *l'invariance de la différentielle* sera largement utilisée par la suite.

E x e m p l e 8. Soit la fonction $y = \sin\sqrt{x}$. Calculer *dy*.

S o l u t i o n . Mettons cette fonction sous la forme d'une fonction composée

$$y = \sin u,\ u = \sqrt{x}$$

nous trouvons :

$$dy = \cos u \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

mais $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = du$, on peut donc écrire

$dy = \cos u\,du$ et $dy = \cos\left(\sqrt{x}\right) d\left(\sqrt{x}\right).$

§ 21. Interprétation géométrique de la différentielle

Considérons la fonction $y = f(x)$ et la courbe correspondante (fig. 86).
Prenons sur la courbe $y = f(x)$ un point arbitraire $M(x, y)$ et menons la tangente à la courbe en ce point. Désignons par α l' angle *)

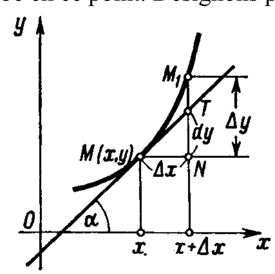


Fig. 86

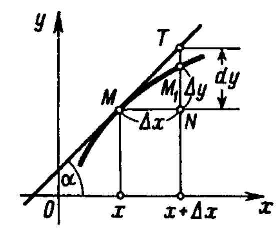


Fig. 87

que cette tangente forme avec l'axe des x positifs. Donnons à la variable indépendante x un accroissement Δx ; alors, la fonction subit un accroissement $\Delta y = NM_1$. Aux valeurs $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ correspond sur la courbe $y = f(x)$ le point $M_1\,(x + \Delta x, y + \Delta y)$. On déduit du triangle MNT que

---

* En supposant que la fonction $f(x)$ a une dérivée finie au point x, on a $\alpha \neq \pi/2$

$$NT = MN \operatorname{tg} \alpha ;$$

puisque

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x), \qquad MN = \Delta x,$$

alors

$$NT = f'(x)\, \Delta x;$$

mais en vertu de la définition de la différentielle $f'(x)\, \Delta x = dy$. Ainsi,

$$NT = dy.$$

Cette dernière égalité exprime que la *différentielle de la fonction f (x) correspondant aux valeurs x et Δx est égale à l'accroissement de l'ordonnée de la tangente à la courbe y = f (x) au point x donné.*

I1 vient directement de la figure 86 que

$$M_1T = \Delta y - dy.$$

D'après ce qui a été démontré antérieurement nous avons:

$$\frac{M_1T}{NT} \to 0 \ \text{ quand } \Delta x \to 0.$$

I1 ne faut pas penser que l'accroissement Δy est toujours plus grand que dy. Ainsi, sur la figure 87

$$\Delta y = M_1N, \quad dy = NT, \quad \text{mais } \Delta y < dy.$$

§ 22. Dérivées de différents ordres

Soit $y = f(x)$ une fonction dérivable sur le segment $[a, b]$. Les valeurs de la dérivée $f'(x)$ dépendent généralement de x, en d'autres termes la dérivée $f'(x)$ est aussi une fonction de x. En dérivant cette fonction nous obtenons la dérivée seconde de la fonction $f(x)$.

La dérivée de la dérivée première est appelée dérivée du second ordre (dérivée seconde) ou dérivée d'ordre deux de la fonction initiale; on la désigne par le symbole y'' ou $f''(x)$

Ainsi, si $y = x^5$, alors $y' = 5x^4$; $y''= (5x^4)' = 20x^3$.

La dérivée de la dérivée seconde est appelée dérivée du troisième ordre (dérivée troisième) ou dérivée d'ordre trois; on la désigne par le symbole y''' ou $f'''(x)$.

Plus généralement, on appelle *dérivée du nième ordre (dérivée nième) ou dérivée d'ordre n* de la fonction $f(x)$ la dérivée (du premier ordre) de la dérivée d'ordre $(n - 1)$; on la désigne par le symbole $y^{(n)}$ ou $f^{(n)}(x)$

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x).$$

(L'ordre de la dérivée est mis entre parenthèses pour éviter toute confusion possible avec l'exposant indiquant la puissance à laquelle cette fonction est élevée.)

On désigne également les dérivées d'ordre quatre, cinq, etc., à l'aide des chiffres romains : y^{IV}, y^{V} y^{VI} . . . Dans ce cas, il est inutile d'employer les parenthèses.

Par exemple, si $y = x^5$, alors $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$, $y^{IV} = y^{(4)} = 120x$, $y^{V} = y^{(5)}$
$= 120$, $y^{(6)} = y^{(7)} = \ldots = 0$.

E x e m p l e 1. Soit donnée la fonction $y = e^{kx}$ (k = const). Trouver l'expression générale de la dérivée d'ordre n.

S o l u t i o n . $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$, . . ., $y(n) = k^n e^{kx}$.

E x e m p l e 2. $y = \sin x$. Trouver $y^{(n)}$.

So1ution.

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \quad y^{IV} = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

On obtient d'une manière analogue les formules donnant la dérivée $n^{ième}$ de certaines fonctions élémentaires. Le lecteur calculera facilement la dérivée $n^{ième}$ des fonctions $y = x^k$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{Log} x$.

Les règles indiquées dans les théorèmes 2 et 3 du § 7 peuvent être aisément étendues au cas général des dérivées d'ordre n.

En particulier, nous trouvons les formules :

$$(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}, \ \ (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$$

Nous allons établir la formule (dite formule de Leibniz) qui permet de calculer la dérivée $n^{ième}$ du produit de deux fonctions $u(x)\, v(x)$. Pour obtenir cette formule calculons successivement les dérivées premières afin d'établir la loi générale qui donne la dérivée d'un ordre quelconque n *:*

$y = uv,$
$y' = u'v + uv'$
$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'',$
$y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv'''$
$\quad = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',$
$y^{IV} = u^{IV}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{IV}.$

Nous voyons que la loi de formation des dérivées est valable pour les dérivées d'ordre quelconque et s'énonce ainsi : il faut développer l'expression $(u + v)^n$ par la formule du binôme de Newton et remplacer dans le développement les exposants de a et de v par les ordres correspondants des dérivées; en outre, les exposants zéro ($u^\circ = v^\circ = 1$) qui entrent dans la composition des termes extrêmes du développement doivent être respectivement remplacés par les fonctions u ou v (c'est-à-dire par les « dérivées d'ordre zéro »)

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}.$$

C'est précisément la formule connue sous le nom de *formule de Leibniz*. La démonstration rigoureuse de cette formule est basée sur la méthode d'induction (c'est-à-dire, en supposant que la formule est vraie pour l'ordre n, on démontre qu'elle l'est encore pour l'ordre $n + 1$).

E x e m p l e 3. $y = e^{ax}x^2$. Calculer la dérivée $y^{(n)}$.
Solution.

$$u = e^{ax}, \quad v = x^2,$$
$$u' = ae^{ax}, \; v' = 2x,$$
$$u'' = a^2e^{ax}, \; v'' = 2,$$

....

$$u^{(n)} = a^n e^{ax}, \qquad v''' = v^{IV} = \ldots = 0$$
$$y^{(n)} = a^n e^{ax} x^2 + na^{n-1}e^{ax}\cdot 2x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}e^{ax}\cdot 2 \;;$$

ou

$$y^{(n)} = e^{ax}\left[a^n x^2 + 2na^{n-1}x + n(n-1)a^{n-2}\right].$$

§ 23. Différentielles de différents ordres

Soit $y = f(x)$ une fonction de la variable indépendante x. La différentielle de cette fonction

$$dy = f'(x)\,dx$$

est une fonction de x, mais seul le facteur $f'(x)$ dépend de x ; le second facteur dx est l'accroissement de la variable indépendante x et ne dépend pas de la valeur de x. Puisque dy est fonction de x, nous sommes en droit de considérer la différentielle de cette fonction.
On appelle *différentielle seconde* ou *différentielle d'ordre deux* d'une fonction la différentielle de la différentielle de cette fonction, on la note d^2y

$$d(dy) = d^2y.$$

Déterminons l'expression de la différentielle seconde. En vertu de la définition de la différentielle nous avons

$$d^2y = [f'(x)\,dx]'\,dx.$$

Puisque dx ne dépend pas de x, nous pouvons sortir dx de dessous le signe de la dérivation et nous avons :

$$d^2y = f''(x)\,(dx)^2.$$

Il est d'usage d'omettre les parenthèses quand on note le degré de la différentielle. Ainsi. on écrit dx^2 au lieu de $(dx)^2$ en ayant en vue le carré de dx ; au lieu de $(dx)^3$ on écrit dx^3, etc.

De même, on appelle *différentielle troisième* ou *différentielle d'ordre trois* la différentielle de la différentielle seconde

$$d^3y = d(d^2y) = [f''(x)\,dx^2]'\,dx = f'''(x)\,dx^3,$$

Plus généralement, on appelle d*ifférentielle* $n^{ième}$ ou *différentielle d'ordre n* la différentielle première de la différentielle d'ordre $(n - 1)$

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = [f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1}]'\,dx =,$$
$$d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n \qquad (1)$$

Les différentielles de différents ordres permettent d'exprimer les dérivées d'ordre quelconque sous forme du rapport des différentielles des ordres correspondants:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}; \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}. \qquad (2)$$

R e m a r q u e . Il faut noter, toutefois, que les formules (1) et (2) (pour $n > 1$) ne sont valables que dans le cas où x est une variable indépendante. En effet soit donnée une fonction composée

$$y = F(u),\; u = \varphi(x). \qquad (3)$$

Nous avons vu que la différentielle du premier ordre possède une forme invariante, indépendamment de ce que a est une variable indépendante ou une fonction de x

$$dy = F'_u(u)\,du \quad (4)$$

La seconde différentielle et les différentielles suivantes ne possèdent pas cette propriété.
En effet nous obtenons en vertu de (3) et (4)

$$d^2y = d\,(F'_u\,(u)\,du).$$

Mais ici $du = \varphi'(x)\,dx$ dépend de x, de sorte que nous obtenons

$$d^2y = d\,(F'_u\,(u))\,du + F'_u\,(u)\,d\,(du),$$

ou

$$d^2y = F''_{uu}\,(u)\,(du)^2 + F'_u\,(u)\,d^2u, \text{ où } d^2u = \varphi''(x)\,(dx)^2. \qquad (5)$$

On trouve d'une manière analogue d^3y, etc.

E x e m p l e 1. Trouver dy et d^2y pour la fonction composée y=sin u, $u=\sqrt{x}$.
Solution.

$$dy = \cos u\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \cos u\,du\,.$$

Nous obtenons ensuite en vertu de la formule (5)

$$d^2y = -\sin u(du)^2 + \cos u d^2u = -\sin u(du)^2 + \cos u\cdot u''(dx)^2 =$$
$$-\sin u\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2(dx)^2 + \cos u\left(\frac{1}{4x^{3/2}}\right)(dx)^2$$

§ 24. Dérivées de différents ordres des fonctions implicites et des fonctions données sous forme paramétrique

1. Montrons sur un exemple concret comment il faut calculer les dérivées de différents ordres des fonctions implicites.
Supposons que la fonction implicite y de x est donnée par l'égalité .

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad (1)$$

Dérivons par rapport à x les deux membres de cette égalité, en considérant y comme fonction de x

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0\ ;$$

d'où nous trouvons:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}\,. \qquad (2)$$

vérivons de nouveau cette dernière égalité par rapport à x (ayant en vue que y est fonction de x)

$$\frac{d^2y}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}\,.$$

Remplaçons ici la dérivée $\frac{dy}{dx}$ par son expression tirée de l'égalité (2), nous avons

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y+x\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}}{y^2}\,,$$

ou, après simplification

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4y^3}\,.$$

I1 vient de l'équation (1) que

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

et la dérivée seconde pent se mettre sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}\,.$$

En dérivant cette dernière expression par rapport à x nous trouvons $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc.

2. Calculons à présent les dérivées d'ordre supérieur d'une fonction donnée sous forme paramétrique.
Supposons que la fonction y de x soit donnée par les équations paramétriques suivantes

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t),\\ y&=\Psi(t),\end{aligned}\right\},\qquad t_0\le t\le T,\ \ (3)$$

où la fonction $x=\varphi\,(t)$ admet sur le segment $[t_o,\,T]$ une fonction inverse $t=\Phi\,(x)$.

Au § 18 nous avons démontré que, dans ce cas, la dérivée $\frac{dy}{dx}$ est donnée par la formule :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \qquad (4)$$

Pour calculer la dérivée d'ordre deux $\frac{d^2y}{dx^2}$ dérivons (4) par rapport à x ayant en vue que t est une fonction de x :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx},$$

mais

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{dy^2}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

En substituant ces dernières expressions dans la formule (5) nous avons:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{dx^2}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

On peut donner à cette dernière formule une forme plus compacte

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

D'une manière analogue on peut trouver les dérivées

$$\frac{d^3y}{dx^3}, \ \frac{d^4y}{dx^4}, \quad \text{etc.}$$

E x e m p l e . Soit la fonction y de x exprimée par les équations paramétriques suivantes

$$x = a\cos t, \ y = b\sin t.$$

Calculer les dérivées $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Solution.

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -a\cos t;$$

$$\frac{dy}{dt} = b\cos t; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -b\sin t;$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-a\sin t)(-b\sin t) - (b\cos t)(-a\cos t)}{(-a\sin t)^3} = \frac{b}{a^2}\frac{1}{\sin^3 t}.$$

§ 25. Interprétation mécanique de la dérivée seconde

La distance s, parcourue par un mobile animé d'un mouvement de translation, s'exprime en fonction du temps t par la formule :

$$s = f(t). \qquad (1)$$

Comme nous l'avons déjà vu (voir § 1, ch. lll), la vitesse v d'un mobile à un instant donné est égale à la derivée par rapport au temps de la distance parcourue

$$v = \frac{ds}{dt}. \qquad (2)$$

Supposons qu'à l'instant t la vitesse du mobile est égale à v. Si le mouvement n'est pas uniforme, pendant l'intervalle de temps Δt, compté à partir de l'instant t, la vitesse variera et subira un accroissement Δv.

On appelle *accélération moyenne*, dans l'intervalle de temps Δt, le rapport de l'accroissement de la vitesse Δv à l'accroissement du temps Δt

$$a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

On appelle accélération à l' instant donné la limite du rapport de l'accroissement de la vitesse à l'accroissement du temps quand ce dernier tend vers zéro

$$a = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

en d’autres termes, l'accélération (à l'instant donné) est égale à la dérivée de la vitesse par rapport au temps :

$$a = \frac{dv}{dt},$$

mais puisque $v = \dfrac{ds}{dt}$, alors

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2},$$

c'est-à-dire que l'accélération du mouvement rectiligne est égale à la dérivée seconde de la distance par rapport au temps. Nous trouvons de l'égalité (1)

$$a = f''(t).$$

Exemple. Trouver la vitesse v et l'accélération a d'un corps en chute libre si le chemin parcouru s s'exprime en fonction du temps t par la formule

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0 \qquad (3)$$

où $g = 9{,}8$ m/s² est l'accélération de l'attraction terrestre et $s_o = s_{t=o}$ la valeur de s à l' instant $t = 0$.

Solution. En dérivant (3) nous trouvons

$$v = \frac{ds}{dt} = gt + v_0 \ ; \qquad (4)$$

il vient de cette formule que $v_o = (v)_{t=o}$.
En dérivant de nouveau nous trouvons:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = g\,.$$

Inversement, remarquons que si l'accélération d'un mouvement est constante et égale à g, alors la vitesse est donnée par la formule (4), le chemin parcouru par la formule (3) à condition que $(v)_{t=o} = v_o$ et $(s)_{t=o} = s_o$.

§ 26. Equations de la tangente et de la normale. Longueurs de la sous-tangente et de la sous-normale

Considérons la courbe d'équation $y = f(x)$ Choisissons sur cette courbe un point $M(x_1, y_1)$ (fig. 88) et écrivons l'équation de la tangente à cette courbe au point M, en supposant que cette tangente ne soit pas parallèle à l'axe des ordonnées. L'équation de la droite passant par le point M et de coefficient angulaire k est de la forme

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Pour la tangente (voir § 3),

$$k = f'(x_1),$$

donc l'équation de la tangente est

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).$$

Très souvent on est amené à considérer, outre la tangente, la normale à la courbe en un point donné.

Définition : On appelle *normale* à une courbe en un point donné la droite passant par ce point et perpendiculaire à la tangente en ce point.
Il découle immédiatement de cette définition que le coefficient angulaire k_n de la normale est lié au coefficient angulaire k_t de la tangente par la relation

$$k_n = -\frac{1}{k_t},$$

c est-à-dire

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_1)}.$$

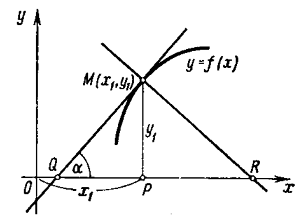


Fig. 88

Par conséquent, l'équation de la normale à la courbe $y = f(x)$ au point $M(x_1, y_1)$ est de la forme

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1).$$

Exemple 1. Ecrire l'équation de la tangente et de la normale à la courbe $y = x^3$ au point $M(1; 1)$.

Solution. Comme $y' = 3x^2$, le coefficient angulaire de la tangente est égal à $(y')_{x=1} = 3$.
Par conséquent, l'équation de la tangente est $y - 1 = 3(x - 1)$ ou $y = 3x - 2$.
L'équation de la normale est:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

ou

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

(voir fig. 89).
La longueur T du segment QM (fig. 88) de la tangente, compris entre le point de tangence et l'axe Ox, est appelée *longueur de la tangente*.
La projection du segment QM sur l'axe Ox, c'est-à-dire le segment QP, est appelée la *sous-tangente*. On désigne par ST la longueur de la sous-tangente. La longueur N du segment MR est appelée la *longueur de la normale* et la projection RP de ce segment sur l'axe Ox la *sous-normale*. On désigne la longueur de la sous-normale par S_N.

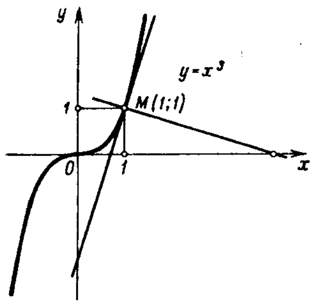


Fig. 89

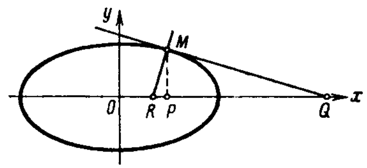


Fig. 90

Trouvons les expressions de T, S_T, N, S_N pour une courbe $y = f(x)$ en un point donné $M(x_1, y_1)$. Il vient de la figure 88 que

$$QP = |y_1 \text{ctg } \alpha| = \left|\frac{y_1}{\text{tg}\alpha}\right| = \left|\frac{y_1}{y_1'}\right|.$$

d' où

$$S_T = \left|\frac{y_1}{y_1'}\right|, \quad T = \sqrt{y_1^2 + \frac{y_1^2}{y_1'^2}} = \left|\frac{y_1}{y_1'}\sqrt{y_1'^2 + 1}\right|$$

On trouve également :

$$PR = |y_1 \text{tg } \alpha| = |y_1 \cdot y_1'|,$$

d'où

$$S_N = |y_1 y_1'|, \quad N = \sqrt{y_1^2 + (y_1 y_1'^2)} = \left|y_1\sqrt{1 + y_1'^2}\right|.$$

Ces formules ont été établies en supposant $y_1 > 0$, $y'_1 > 0$; cependant elles sont aussi valables dans le cas général.

E x e m p l e 2. Trouver l'équation de la tangente et de la normale, la longueur de la tangente et de la sous-tangente, la longueur de la normale et de la sous-normale à l'ellipse

$$x = a \cos t, \ y = b \sin t \ (1)$$

au point $M(x_1, y_1)$ pour lequel $t = \pi/4$ (fig. 90).

S o l u t i o n . Il vient de l'équation (1) que

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t; \ \frac{dy}{dt} = b \cos t; \ \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \text{ctg } t; \ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}$$

calculons les coordonnées du point de tangence M

$$x_1 = (x)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y_1 = (y)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

L'équation de la tangente est

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

ou

$$bx + ay - ab\sqrt{2} = 0.$$

L'équation de la normale est

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right),$$

ou

$$(ax - by)\sqrt{2} - a^2 + b^2 = 0.$$

Les longueurs de la sous-tangente et de la sous-normale sont respectivement:

$$S_T = \left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\right| = a\sqrt{2} \ ; \quad S_N = \left|\frac{b}{\sqrt{2}}\left(-\frac{b}{a}\right)\right| = \frac{b^2}{a\sqrt{2}}.$$

Les longueurs de la tangente et de la normale sont

$$T = \left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + 1}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2} \ ;$$

$$N = \left|\frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + 1}\right| = \frac{b}{a\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

§ 27. Interprétation géométrique de la dérivée du rayon vecteur par rapport à l'angle polaire

Soit

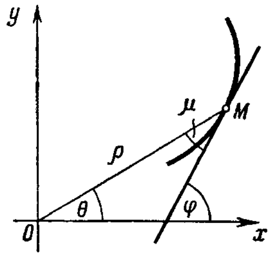
$$\rho = f(\theta) \qquad (1)$$

l'équation d'une courbe en coordonnées polaires. On a entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes les relations $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. En remplaçant dans ces dernières formules ρ par son expression en fonction de θ tirée de l'équation (1) nous avons:

$$\left.\begin{aligned} x &= f(\theta)\cos(\theta) \\ y &= f(\theta)\sin(\theta) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Les équations (2) sont les équations paramétriques de la courbe considérée; le paramètre est ici l'angle polaire θ (fig. 91).

Désignons par φ l'angle formé par la tangente à la courbe au point M (ρ,θ) et le sens positif de l'axe des x; nous avons:



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

ou

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta + \rho\cos\theta}{\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta}. \quad (3)$$

Fig. 91

Désignons par μ l'angle formé par le rayon vecteur et la tangente. Il est évident que μ = φ - θ,

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\theta}.$$

Remplaçons dans cette dernière formule tgφ par l'expression (3) et après transformation nous avons :

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{(\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)\cos\theta - (\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)\sin\theta}{(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)\cos\theta + (\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)\cos\theta} = \frac{\rho}{\rho'}$$

ou

$$\rho'_\theta = \rho\operatorname{ctg}\mu$$

Ainsi, la dérivée du rayon vecteur par rapport à l'angle polaire est égale à la longueur du rayon vecteur multipliée par la cotangente de l'angle formé par le rayon vecteur et la tangente à la courbe au point considéré.

E x e m p l e . Montrer que la tangente à la spirale logarithmique $\rho = e^{a\theta}$ coupe le rayon vecteur sous un angle constant.

S o l u t i o n . Il vient de l'équation de la spirale $\rho' = a\, e^{a\theta}$. En vertu de la formule (4) nous avons:

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\rho'}{\rho} = a, \text{ c'est-à-dire } \mu = \operatorname{arc\,ctg} a = \text{const.}$$

Exercices

Trouver la dérivée des fonctions en se servant de la définition de la dérivée :

1. $y = x^3$. Rép. $3x^2$.

2. $y = \frac{1}{x}$. Rép. $-\frac{1}{x^2}$

3. $y = \sqrt{x}$ Rép.

4. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ Rép. $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

5. $y = \sin^2 x$. Rép. $2\sin x\cos x$.

6. $y = 2x^2 - x$. Rép. $4x - 1$.

Trouver les tangentes des angles formés par les tangentes aux courbes et l'axe des x positifs:

7. $y = x^3$. a) Pour $x = 1$. Rép. 3. b) Pour $x = -1$. Rép. 3; construire le graphique.

8. $\frac{1}{x}$ a) Pour $x = \frac{1}{2}$. Rép. -4. b) Pour $x = 1$. Rép. -1 ; faire le dessin.

9. $y = \sqrt{x}$ pour z=2. Rép. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

10. $y = x^4 + 3x^2 - 6$. Rép. $y' = 4x^3 + 6x$.

11. $y = 6x^3 - x^2$. Rép. $y' = 18x^2 - 2x$.

12. $y = \frac{x^5}{a+b} - \frac{x^2}{a-b} - x$ Rép. $y' = \frac{5x^4}{a+b} - \frac{2x}{a-b} - 1$

13. $y = \frac{x^3 - x^2 + 1}{5}$. Rép. $y' = \frac{3x^2 - 2x}{5}$.

14. $y = 2ax^3 - \frac{x^2}{b} + c$. Rép. $y' = 6ax^2 - \frac{2x}{b}$.

15. $y = 6x^{7/2} + 4x^{5/2} + 2x$. Rép. $y' = 21x^{5/2} + 10x^{3/2} + 2$.

16. $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$. Rép. $y' = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2}$.

17. $y = \frac{(x+1)^3}{x^{3/2}}$. Rép. $y' = \frac{3(x+1)^2(x+1)}{2x^{5/2}}$.

18. $y = \frac{x}{m} + \frac{m}{x} + \frac{x^2}{n^2} + \frac{n^2}{x^2}$. Rép. $y' = \frac{1}{m} - \frac{m}{x^2} + \frac{2x}{n^2} - \frac{2n^2}{x^3}$.

19. $= \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 5$. Rép. $y' = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

20. $y = \frac{ax^2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{b}{x\sqrt{x}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$. Rép. $y' = \frac{5}{3}ax^{2/3} - \frac{3}{2}bx^{-5/2} + \frac{1}{6}x^{-7/6}$.

21. $y = (1+4x^2)(1+2x^2)$. Rép. $y' = 4x(1+3x+10x^3)$.

22. $y = x(2x-1)(3x+2)$. Rép. $y' = 2(9x^2+x-1)$.

23. $y = (2x-1)(x^2-6x+3)$. Rép. $y' = 6x^2-26x+12$.

24. $y = \frac{2x^4}{b^2-x^2}$. Rép. $y' = \frac{4x^3(2b^2-x^2)}{(b^2-x^2)^2}$.

25. $y = \frac{a-x}{a+x}$. Rép. $y' = -\frac{2a}{(a+x)^2}$.

26. $f(t) = \frac{t^3}{1+t^2}$. Rép. $f'(t) = \frac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}$.

27. $f(s) = \frac{(s+4)^2}{s+3}$. Rép. $f'(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}$.

28. $y = \frac{x^3+2}{x^2-x-2}$. Rép. $y' = \frac{x^4-2x^3-6x^2-4x+2}{(x^2-x-2)^2}$

29. $y = \frac{x^p}{x^m-a^m}$ Rép. $y' = \frac{x^{p-1}\left[(p-m)x^m - pa^m\right]}{(x^m-a^m)^2}$

30. $y = (2x^2-3)^2$. Rép. $y' = 8x(2x^2-3)$.

31. $y = (x^2+a^2)^5$. Rép. $y' = 10x(x^2+a^2)^4$.

32. $y = \sqrt{x^2+a^2}$. Rép. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

33. $y = (a+x)\sqrt{a-x}$. Rép. $y' = \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$.

34. $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Rép. $y' = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

35. $y = \frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$. Rép. $y' = \frac{1+4x^2}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

36. $y = \sqrt[3]{x^2+x+1}$. Rép. $y' = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$.

37. $y = (1+\sqrt[3]{x})^3$. Rép. $y' = \left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

38. $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. Rép.

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \times \left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$

39. $y = \sin^2 x$. Rép. $y' = \sin 2x$

40. $y = 2\sin x + \cos 3x$. Rép. $y' = 2\cos x - 3\sin 3x$

41. $y = \operatorname{tg}(ax+b)$. Rép. $y' = \frac{a}{\cos^2(ax+b)}$

42. $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$. Rép. $y' = \frac{1}{1+\cos x}$

43. $y = \sin 2x \cdot \cos 3x$. Rép. $y' = 2\cos 2x\cos 3x = 3\sin 2x \sin' 3x$

44. $y = \operatorname{ctg}^2 5x$. Rép. $y' = -10\operatorname{ctg} 5x \operatorname{cosec}^2 5x$

45. $y = t\sin t + \cos t$. Rép. $y' = t\cos t$

46. $y = \sin^3 t\cos t$. Rép. $y' = \sin^2 t(3\cos^2 t - \sin^2 t)$

47. $y = a\sqrt{\cos 2x}$. Rép. $y' = -\frac{a\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

48. $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$. Rép. $r'_\varphi = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$

49. $y = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{x}$. Rép. $y' = -\frac{2x\cos x + \sin^2 x\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)}{x^2\sin^2 x}$

50. $y = a\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)^2$. Rép. $y' = 2a\sin^3\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

51. $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x$. Rép. $y' = \operatorname{tg} x \sec^2 x$

52. $y = \log\cos x$. Rép. $y' = -\operatorname{tg} x$

53. $y = \log\operatorname{tg} x$. Rép. $y' = \frac{2}{\sin 2x}$

54. $y = \log\sin^2 x$. Rép. $y' = 2\operatorname{ctg} x$

55. $y = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}$. Rép. $y' = \sin x + \cos x$

56. $y = \log\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$. Rép. $y' = \frac{1}{\cos x}$

57. $y=\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. Rép. $y'=\frac{1}{\cos x}$

58. $y=\sin(x+a)\cos(x+a)$. Rép. $y'=\cos 2(x+a)$

59. $f(x)=\sin(\log x)$. Rép. $f'(x)=\frac{\cos(\log x)}{x}$

60. $f(x)=\operatorname{tg}(\log x)$. Rép. $f'(x)=\frac{\sec^2(\log x)}{x}$

61. $f(x)=\sin(\cos x)$. Rép. $f'(x)=-\sin x\cos(\cos x)$

62. $r=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\varphi-\operatorname{tg}\varphi$. Rép. $\frac{dr}{d\varphi}=\operatorname{tg}^4\varphi$

63. $f(x)=(x\operatorname{ctg} x)^2$. Rép. $f'(x)=2x\operatorname{ctg} x(\operatorname{ctg} x-x\operatorname{cosec}^2 x)$

64. $y=\log(ax+b)$. Rép. $y'=\frac{a}{ax+b}$

65. $y=\log_a(x^2+1)$. Rép. $y'=\frac{2x}{(x^2+1)\log a}$

66. $y=\log\frac{1+x}{1-x}$. Rép. $y'=\frac{2}{1-x^2}$

67. $y=\log_3(x^2-\sin x)$. Rép. $y'=\frac{2x-\cos x}{(x^2-\sin x)\log 3}$

68. $y=\log\frac{1+x^2}{1-x^2}$. Rép. $y'=\frac{4x}{1-x^4}$

69. $y=\log(x^2+x)$. Rép. $y'=\frac{2x+1}{x^2+x}$

70. $y=\log(x^3-2x+5)$. Rép. $y'=\frac{3x^2-2}{x^3-2x+5}$

71. $y=x\log x$. Rép. $y'=\log x+1$

72. $y=\log^3 x$. Rép. $y'=\frac{3\log x}{x}$

73. $y=\log(x+\sqrt{1+x^2})$. Rép. $y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

74. $y=\log(\log x)$. Rép. $y'=\frac{1}{x\log x}$

75. $f(x)=\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Rép. $f'(x)=\frac{1}{1-x^2}$

76. $f(x)=\log\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$. Rép. $f'(x)=-\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$

77. $y=\sqrt{a^2+x^2}-a\log\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. Rép. $y'=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$

78. $y=\log(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$. Rép. $y'=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$

79. $y=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\log \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Rép. $y'=\frac{1}{\sin^3 x}$

80. $y=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}$. Rép. $y'=\frac{1+\sin^2 x}{2\cos^3 x}$

81. $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\log\cos x$. Rép. $y'=\operatorname{tg}^3 x$

82. $y=e^{ax}$. Rép. $y'=ae^{ax}$

83. $y=e^{4x+5}$. Rép. $y'=4e^{4x+5}$

84. $y=a^{x^2}$. Rép. $y'=2xa^{x^2}\log a$

85. $y=7^{x^2+2x}$. Rép. $y'=2(x+1)7^{x^2+2x}\log 7$

86. $y=c^{a^2-x^2}$. Rép. $y'=-2xc^{a^2-x^2}\log c$

87. $y=ae^{\sqrt{x}}$. Rép. $y'=\frac{a}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

88. $r=a^{\theta}$. Rép. $r'=a^{\theta}\log a$

89. $r=a^{\log\theta}$. Rép. $\frac{dr}{d\theta}=\frac{a^{\log\theta}\log a}{\theta}$

90. $y=e^x(1-x^2)$. Rép. $y'=e^x(1-2x-x^2)$

91. $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$. Rép. $y'=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

92. $y=\log\frac{e^x}{1+e^x}$. Rép. $y'=\frac{1}{1+e^x}$

93. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$. Rép. $y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$

94. $y=e^{\sin x}$. Rép. $y'=e^{\sin x}\cos x$

95. $y=a^{\operatorname{tg} nx}$. Rép. $y'=na^{\operatorname{tg} nx}\sec^2 nx\log a$

96. $y=e^{\cos x}\sin x$. Rép. $y'=e^{\cos x}(\cos x-\sin^2 x)$

97. $y=e^x\log\sin x$. Rép. $y'=e^x(\operatorname{ctg} x+\log\sin x)$

98. $y = x^n s^{\sin x}$. Rép. $y' = x^{n-1} e^{\sin x}(n + x\cos x)$

99. $y = x^x$. Rép. $y' = x^x(\log x + 1)$

100. $y = x^{\frac{1}{x}}$. Rép. $y' = x^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1-\log x}{x^2}\right)$

101. $y = x^{\log x}$. Rép. $y' = x^{\log x - 1}\log x^2$

102. $y = e^{x^x}$. Rép. $y' = e^{x^x}(1+\log x)x^x$

103. $y = \left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}$. Rép. $y' = n\left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}\left(1+\log\dfrac{x}{n}\right)$

104. $y = x^{\sin}$. Rép. $y' = x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x} + \log x\cos x\right)$

105. $y = (\sin x)^x$. Rép. $y' = (\sin x)^x(\log\sin x + x\operatorname{ctg} x)$

106. $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. Rép. $y' = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}(1 + \sec^2 x\log\sin x)$

107. $y = \operatorname{tg}\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$. Rép. $y' = -\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{1-e^x}{1+e^x}}$

108. . $y = \sin\sqrt{1-2^x}$ Rép. $y' = -\dfrac{\cos\sqrt{1-2^x}}{2\sqrt{1-2^x}}2^x\log 2$

109. $y = 10^{x\operatorname{tg} x}$. Rép. $y' = 10^{x\operatorname{tg} x}\log 10\left(\operatorname{tg} x + \dfrac{x}{\cos^2 x}\right)$

Calculer la dérivée des fonctions après les avoir logarithmées:

110. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$. Rép. $y' = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{2}{x-1}\right)$

111.
$y = \dfrac{(x+1)^3\sqrt[3]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$ .Rép. $y' = \dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}\times\left(\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{3}{4(x-2)} - \dfrac{2}{5(x-3)}\right)$

112. $y = \dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+2)^4}$. Rép. $y' = -\dfrac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$

113. $y = \dfrac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3}\sqrt[3]{(x-3)^7}}$. Rép. $y' = \dfrac{-161x^2+480x-271}{60\sqrt[5]{(x-1)^3}\sqrt[4]{(x-2)^7}\sqrt[3]{(x-3)^{10}}}$

114. $y = \dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. Rép. $y' = \dfrac{1+3x^2-2x^4}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

115. $y = x^5(a+3x)^3(a-2x)^2$. Rép.
$y' = 5x^4(a+3x)^2(a-2x)(a^2+2ax-12x^2)$

116. $y = \arcsin\dfrac{x}{a}$. Rép. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

117. $y = (\arcsin x)^2$. Rép. $y' = \dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

118. $y = \operatorname{arctg}(x^2+1)$. Rép. $y' = \dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2}$

119. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$. Rép. $y' = \dfrac{2}{1+x^2}$

120. $y = \arccos(x^2)$. Rép. $y' = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

121. $y = \dfrac{\arccos x}{x}$. Rép. $y' = \dfrac{-(x+\sqrt{1-x^2}\arccos x)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

122. $y = \arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$. Rép. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

123. $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\dfrac{x}{a}$. Rép. $y' = 2\sqrt{a^2-x^2}$

124. $y = \sqrt{a^2-x^2} + a\arcsin\dfrac{x}{a}$. Rép. $y' = \sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$

125. $u = \operatorname{arctg}\dfrac{v+a}{1-av}$. Rép. $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{1}{1+v^2}$

126. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$. Rép. $y' = \dfrac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$

127. $y = x\arcsin x$. Rép. $y' = \arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

128. $f(x) = \arccos(\log x)$. Rép. $f'(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}}$

129. $f(x) = \arcsin\sqrt{\sin x}$. Rép. $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \sin^2 x}}$

130. $y = arctg\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\,(0 \le x \le \pi)$. Rép. $y' = \dfrac{1}{2}$.

131. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$. Rép. $y' = \dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}$.

132. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Rép. $y' = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$.

133. $y = x^{\arcsin x}$. Rép. $y' = x^{\arcsin x}\left(\dfrac{\arcsin x}{x} + \dfrac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

134. $y = \arcsin(\sin x)$. Rép. $y' = \dfrac{\cos x}{|\cos x|} = \begin{cases} +1 \text{ dans le } 1^{\text{er}} \text{ et le } 4^{\text{e}} \text{ quadrant} \\ -1 \text{ dans le } 2^{\text{em}} \text{ et le } 3^{\text{e}} \text{ quadrant} \end{cases}$.

135. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{4\sin x}{3+5\cos x}$. Rép. $y' = \dfrac{4}{5+3\cos x}$.

136. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{x} + \log\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$. Rép. $y' = \dfrac{2a^3}{x^4 - a^4}$.

137. $y = \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$. Rép. $y' = \dfrac{x^2}{1+x^4}$.

138. $y = \dfrac{3x^2-1}{3x^3} + \log\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$. Rép. $y' = \dfrac{x^5+1}{x^6+x^4}$.

139. $y = \dfrac{1}{3}\log\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$. Rép. $y' = \dfrac{1}{x^3+1}$.

140. $y = \log\dfrac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + 2\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. Rép. $y' = \dfrac{4\sqrt{2}}{1+x^4}$.

141. $y = \arccos\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$. Rép. $y' = -\dfrac{2n|x|^n}{x(x^{2n}+1)}$.

Dérivation des fonctions implicites calculer $\dfrac{dy}{dx}$, si

142. $y^2 = 4px$. Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2p}{y}$. 143. $x^2 + y^2 = a^2$. Rép. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

144. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Rép. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$.

145. $y^3 - 3y + 2ax = 0$. Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2a}{3(1-y^2)}$.

146. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$. Rép. $\dfrac{dy}{dx} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$. 147. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Rép. $\dfrac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$.

148. $y^2 - 2xy + b^2 = 0$. Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y-x}$.

149. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

150. $y = \cos(x+y)$. Rép. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$.

151. $\cos(xy) = x$. Rép. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$

Trouver $\dfrac{dy}{dx}$ pour les fonctions données sous forme paramétrique

152. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Rép. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t$.

153. $x = a\ (t - \sin t)$; $y = a\ (1 - \cos t)$. Rep. $\dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$.

154. $x = a\cos^3 t$; $y = b\sin^3 t$. Rép. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} t$.

155. $x = \dfrac{3at}{1+t^2}$; $y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}$. Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

156. $u = 2\log\operatorname{ctg} s$, $v = \operatorname{tg} s + \operatorname{ctg} s$. Montrer que $\dfrac{du}{dv} = \operatorname{tg} 2s$.

Trouver les tangentes des angles de pente des tangentes aux courbes:

157. $x = \cos t$, $y = \sin t$ au point $x = -\dfrac{1}{2}, y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Faire le dessin.

Rép. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

158. $x = 2\cos t$, $y = \sin t$ au point $x = 1$, $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Faire le dessin.

Rép. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

159. $x = a\ (t - \sin t)$, $y = a\ (1 - \cos t)$ pour $t = \pi/2$. Faire le dessin. Rép. 1.
160. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ pour $t = \pi/4$. Faire le dessin. Rép. -1.
161. Un corps lancé dans le vide sous un angle α avec l'horizon décrit sous l'effet de la pesanteur une trajectoire (parabole) dont les équations paramétriques sont :
$x = (v_o \cos \alpha)\ t$, $y = (v_o \sin \alpha)\ t - \dfrac{gt^2}{2}$ (g=9,8 m/s²). Pour α=60°, v_o=50 m/s, déterminer la direction du mouvement aux instants 1) t =2 s ; 2) t = 7 s. Faire le dessin.
Rép. 1) tg φ_1=0,948, φ_1=43°30';
2) tg φ_1=-1,012, φ_1=-j-134°7'.
Calculer les différentielles des fonctions suivantes
162. $y = (a^2 - x^2)^5$. Rép. $dy = -10x(a^2 - x^2)^4\,dx$
163. $y = \sqrt{1+x^2}$. Rép. $dy = \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$
164. $y = \dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}\, x$. Rép. $dy = \sec^4 x dx$
165. $y = \dfrac{x \log x}{1-x} + \log(1-x)$. Rép. $dy = \dfrac{\log x dx}{(1-x)^2}$
Calculer les accroissements et les différentielles des fonctions
166. $y = 2x^2 - x$ pour $x = 1$, $\Delta x = 0{,}01$. Rép. $\Delta y = 0{,}0302$, $dy = 0{,}03$.
167. Soit $y = x^3 + 2x$. Calculer Δy et dy pour $x = -1$, $\Delta x = 0{,}02$.
Rép. $\Delta y = 0{,}098808$, $dy = 0{,}1$.
168. Soit $y = \sin x$. Calculer dy pour $x = \pi/3$, $\Delta x = \pi/18$. Rép. $dy = \pi/36 = 0{,}0873$.
169. Connaissant sin 60°= $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ =0,866025 ; cos 60°= $\dfrac{1}{2}$, calculer la valeur approchée de sin 60°3' et sin 60°18'. Comparer les résultats obtenus avec les données des tables. Rép. sin 60°3' ≈ 0,866461 ; sin 60°18' ≈ 0,868643.
170. Trouver la valeur approchee de tg 45°4'30". Rép. 1,00262.
171. Connaissant $\log_{10} 200 = 2{,}30103$, calculer la valeur approchée de $\log_{10}$ 200,2. Rep. 2,30146.
Dérivées de différents ordres
172. $y = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$. Calculer y''. Rép. $18x - 4$.
173. $y = \sqrt[5]{x^3}$. Calculer y''' . Rép. $\dfrac{42}{125} x^{-\frac{12}{5}}$
174. $y = x^6$. Calculer $y^{(6)}$. Rép. 6 !.

175. $y = \dfrac{C}{x^n}$. Calculer y''. Rép. $\dfrac{n(n+1)C}{x^{n+2}}$
176. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Calculer y''. Rép. $-\dfrac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$
177. $y = 2\sqrt{x}$. Calculer $y^{(4)}$. Rép. $-\dfrac{15}{8\sqrt{x^7}}$
178. $y = ax^2 + bx + c$. Calculer y''' . Rép. 0.
179. $f(x) = \mathrm{Log}\,(x + 1)$. Calculer f^{IV} (x). Rép. $-\dfrac{6}{(x+1)^4}$
180. $y = \mathrm{tg}\, x$. Calculer y''' . Rép. $6 \sec^4 x - 4 \sec^2 x$.
181. $y = \mathrm{Log} \sin x$. Calculer y''' . Rép. $2 \,\mathrm{ctg}\, x \,\mathrm{cosec}^2 x$.
182. $f(x) = \sqrt{\sec 2x}$. Calculer $f''(x)$. Rép. $f''(x) = 3\,[f(x)]^5 - f(x)$.
183. $y = \dfrac{x^3}{1-x}$. Calculer $f^{\mathrm{IV}}(x)$. Rép. $\dfrac{4!}{(1-x)^5}$.
184. $p = (q^2 + a^2)\mathrm{arctg}\dfrac{q}{a}$. Calculer $\dfrac{d^3 p}{dq^3}$. Rép. $\dfrac{4a^3}{(a^2+q^2)^2}$
185. $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$. Calculer $\dfrac{d^2 p}{dq^2}$. Rép. $\dfrac{y}{a^2}$.
186. $y = \cos ax$. Calculer $y^{(n)}$. Rép. $a^n \cos\left(ax + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.
187. $y = a^x$. Calculer $y^{(n)}$. Rép. $(\mathrm{Log}\, a)^n a^x$.
188. $y = \mathrm{Log}\,(1 + x)$. Calculer $y^{(n)}$. Rép. $(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$
189. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$. Calculer $y^{(n)}$. Rép. $2(-1)^n \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$
190. $y = e^x x$. Calculer $y^{(n)}$. Rép. $e^x (x + n)$.
191. $y = x^{n-1} \mathrm{Log}\, x$. Calculer $y^{(n)}$. Rép. $\dfrac{(n-1)!}{x}$
192. $y = \sin^2 x$. Calculer $y^{(n)}$. Rép. $-2^{n-1}\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}n\right)$.
193. $y = x \sin x$. Calculer $y^{(n)}$. Rép. $x \sin x\left(x + \dfrac{\pi}{2}n\right) - n\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}n\right)$
194. Si $y = e^x \sin x$, démontrer que $y'' - 2y' + 2y = 0$,.

195. $y^2 = 4\,ax$. Calculer $\frac{d^2y}{dx^2}$. Rép. $-\frac{4a^2}{y^3}$.

196. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Calculer $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{d^3y}{dx^3}$. Rép. $-\frac{b^4}{a^2y^3}$; $-\frac{3b^6x}{a^4y^5}$

197. $x^2 + y^2 = r^2$. Calculer $\frac{d^2y}{dx^2}$. Rép. $-\frac{r^2}{y^3}$

198. $y^2 - 2xy = 0$. Calculer $\frac{d^3y}{dx^3}$. Rép. 0.

199. $\rho = \operatorname{tg}(\varphi + \rho)$. Calculer $\frac{d^3\rho}{d\varphi^3}$. Rép. $-\frac{2(5+8\rho^2+3\rho^4)}{\rho^8}$.

200. $\sec\varphi \cos\rho = C$. Calculer $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}$. Rep. $\frac{\operatorname{tg}^2\rho - \operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}^3\rho}$.

201. $e^x + x = e^y + y$. Calculer $\frac{d^2y}{dx^2}$. Rép. $\frac{(1-e^{x+y})(e^x-e^y)}{(e^y+1)^3}$.

202. $y^3 + x^3 - 3axy = 0$. Calculer $\frac{d^2y}{dx^2}$. Rép. $-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$.

203. $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$. Calculer $\frac{d^2y}{dx^2}$. Rep. $-\frac{1}{4a\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}$

204. $x = a\cos 2t$, $y = b\sin^2 t$. Montrer que $\frac{d^2y}{dx^2}$ =0.

205. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$. Calculer $\frac{d^3y}{dx^3}$. Rép. $-\frac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$

206. Montrer que $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(\operatorname{sh} x) = \operatorname{sh} x$; $\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x$.

Equations de la tangente et de la normale. Longueurs de la sous-tangente et de la ous-normale

207. Former l'équation de la tangente et de la normale à la courbe $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ au point $M\,(3, 2)$. Rép. La tangente $8x - y - 22 = 0$; la normale $x + 8y - 49 = 0$.

208. Trouver l'équation de la tangente et de la normale, la longueur de la sous-tangente et de la sous-normale au cercle $x^2 + y^2 = r^2$ au point $M\,(x_1, y_1)$.

Rép. La tangente $xx_1 + yy_1 = r^2$; la normale $x_1y - y_1x = 0$; $S_T = \left|\frac{y_1^2}{x_1}\right|$. $S_N = |x_1|$

209. Montrer que le sommet de la parabole $y^2 = 4px$ coupe la sous-tangente en son milieu et que la longueur de la sous-normale est constante et égale à $2p$. Faire le dessin.

210. Trouver l'équation de la tangente au point $M\,(x_1, y_1)$: a) à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Rép. $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$; b) à l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Rép. $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$

211. Trouver l'équation de la tangente et de la normale à la courbe $y = \frac{8a^3}{4a^2+x^2}$ au point où $x = 2a$. Rép. La tangente $x + 2y = 4a$; la normale $y = 2x - 3a$.

212. Montrer que la normale à la courbe $3y = 6x - 5x^3$, menée au point $M\,(1, 1/3)$, passe par l'origine des coordonnées.

213. Montrer que la tangente à la courbe $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ menée au point

$M\,(a, b)$ est $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$.

214. Trouver l'équation de la tangente à la parabole $y^2 = 20x$ qui forme un angle de 45° avec l'axe Ox. Rép. $y = x + 5$ [au point (5, 10)].

215. Trouver les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 52$ qui sont parallèles à la droite $2x + 3y = 6$. Rép. $2x + 3y \pm 26 = 0$.

216. Trouver les équations des tangentes à l'hyperbole $4x^2 - 9y^2 = 36$, qui sont perpendiculaires à la droite $2y + 5x = 10$. Rép. Il n y en a pas.

217. Montrer que les portions de la tangente à l'hyperbole $xy = m$ comprises entre les axes de coordonnées ont pour milieu le point de tangence.

218. Montrer que les portions de la tangente à l'astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ comprises entre les axes de coordonnées ont une longueur constante.

219. Sous quel angle se coupent les courbes $y = a^x$ et $y = b^x$? Rép.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\log a - \log b}{1 + \log a \cdot \log b}$

220. Trouver la longueur de la sous-tangente, de la sous-normale, de la tangete et de la normale à la cycloide $x = a\,(\theta - \sin\theta)$, $y = a\,(1 - \cos\theta)$ au point pour lequel $\theta = \pi/2$. Rép. $S_T = a$; $S_N = a$; $T = a\sqrt{2}$; $N = a\sqrt{2}$.

221. Calculer S_T, S_N, T et N pour l'astroïde $x = 4a\cos^3 t$, $y = 4a\sin^3 t$.

Rép. $S_T = |\,4a\sin^2 t\cos t\,|$; $S_N = \left|4a\frac{\sin^4 t}{\cos t}\right|$; $T = 4a\sin^2 t$; $N = |4a\sin^2 t\operatorname{tg} t\,|$.

Problèmes divers

Calculer les dérivées des fonctions

222. $y=\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}-\dfrac{1}{2}\log\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$ Rép. $y'=\dfrac{1}{\cos^3 x}$

223. $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$. Rép. $y'=-\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

224. $y=\arcsin(\sin x)$. Rép, $y'=\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$

225. $y=\dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)(a>0,b>0)$ Rep $y'=\dfrac{1}{a+b\cos x}$

226. $y=|x|$ Rép. $y'=\dfrac{x}{|x|}$ 227. $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$ Rép. $y'=-\dfrac{x}{|x|}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

228. Il ressort des formules $v=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ et $s = 4\pi r^2$ pour le volume et la surface de la sphère que $\dfrac{dv}{dr}=s$. Expliciter la signification géométrique de ce résultat. Trouver une relation analogue entre la surface du cercle et la longueur de la circonférence.

229. Dans le triangle ABC le côté a s'exprime en fonction des deux autres côtés b, c et de l'angle A qu'ils forment par la formule $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$. Quand les côtés b et c sont constants, le côté a est fonction de l'angle A. Montrer que , où h_a, désigne la hauteur du triangle correspondant à la base a. Expliquer ce résultat à l'aide de considérations géométriques.

230. Utilisant la notion de différentielle expliquer la provenance des formules approchées $\sqrt{a^2+b^2}\approx a+\dfrac{b}{2a}\sqrt[3]{a^3+b}\approx a+\dfrac{b}{3a^2}$ où |b| est un nombre petit par rapport à a.

231. La période du pendule est égale à $T=\pi\sqrt{l/g}$. Quelle influence sur l'erreur de calcul de la période T exercera une erreur de 1% lors de la mesure : 1) de la longueur du pendule l ; 2) de l'accélération de la pesanteur g? Rép. 1) ≈1/2% ; 2) ≈1/2%.

232. La tractrice a la propriété qu'en chacun de ses points le segment de tangentse T conserve une valeur constante. Démontrer cela en utilisant 1) l'équation de la tractrice sous la forme

$x=\sqrt{a^2-y^2}+\dfrac{a}{2}\log\dfrac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{a+\sqrt{a^2-y^2}}\ (a>0)$; 2) les équations paramétriques de la courbe

$x = a$ (Log tg $t/2$ + cos t), $y = a \sin t$.

233. Démontrer que la fonction $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ vérifie l'équation $y'' + 3y' + 2y = 0$ (C_1 et C_2 désignent ici des constantes).

234. Démontrer les égalités $y'' = 2z$ et $z'' = -2y$, si $y = e^x \sin x$, $z = e^x \cos x$.

235. Montrer que la fonction $y = \sin(m \arcsin x)$ vérifie l'équation $(1 - x^2) \times y'' - xy' + m^2y = 0$.

236. Démontrer que si $(a+bx)e^{\frac{y}{x}}=x$, alors $x^3=\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(x\dfrac{dy}{dx}-y\right)^2$.

CHAPITRE IV

Théorème relatif aux fonctions dérivable

§ 1. *Théorème relatif aux racines de la dérivée (théorème de Rolle)*

T h é o r è m e d e R o l l e . *Si la fonction f (x) est continue sur le segment [a, b], dérivable en tout point intérieur du segment et s'annule aux extrémités de ce segment [f (a) = f (b) = 0], alors il existe au moins un point intermédiaire x = c, a < c < b, où la dérivée f' (x) s'annule, c'est-à-dire f' (c) = 0* *.

D é m o n s t r a t i o n . La fonction $f(x)$ étant continue sur le segment $[a, b]$, elle atteint au moins une fois sur ce segment sa borne supérieure M et sa borne inférieure m.
Si $M = m$, la fonction $f(x)$ est constante, c'est-à-dire que pour toutes les valeurs de x la fonction a une valeur constante $f(x) = 0$. Mais alors, en tout point du segment, nous aurons $f'(x) = 0$ et le théorème est démontré.
Supposons que $M \neq m$. Dans ce cas l'un au moins de ces nombres est différent de zéro.

Supposons pour fixer les idées que $M > 0$ et que la fonction atteint sa borne supérieure M au point $x = c$, c'est-à-dire que $f(c) = M$. Remarquons, à ce propos, que c est distinct de a et de b, car en vertu de l'hypothèse $f(a) = 0 = f(b)$; $f(c)$ étant la borne supérieure de la fonction $f(x)$, $f(c + \Delta x) - f(c) < 0$ aussi bien pour Δx positif que pour Δx négatif.

Il en résulte que: $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \le 0$ pour $\Delta x > 0$, (1')

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \ge 0 \text{ pour } \Delta x < 0. \quad (1'')$$

Etant donné que les conditions du théorème impliquent l'existence de la dérivée au point $x = c$, nous avons en passant à la limite pour $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c) \le 0 \text{ pour } \Delta x > 0,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c) \ge 0 \text{ pour } \Delta x < 0.$$

* Le nombre c est appelé racine de la fonction $\varphi(x)$ si $\varphi(c) = 0$.

Mais les inégalités $f'(c) < 0$ et $f'(c) > 0$ ne sont compatibles que dans le cas où $f(c) = 0$. Par conséquent, nous avons prouvé l'existence d'un point c intérieur au segment $[a, b]$ tel qu'en ce point $f'(x)$ s'annule.

Le théorème de Rolle admet une interprétation géométrique simple : si une courbe continue ayant une tangente en chaque point coupe l'axe Ox aux points d'abscisses a et b, il existe sur cette courbe au moins un point d'abscisse c, $a < c < b$, tel que la tangente en ce point est parallèle à l'axe Ox.

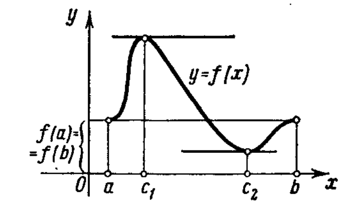


Fig. 92

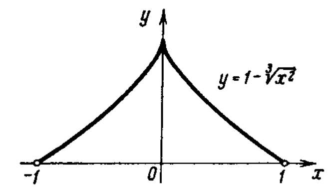


Fig. 93

R e m a r q u e 1. Le théorème reste valable pour une fonction dérivable qui ne s'annule pas aux ex.trémités. du segment $[a, b]$, mais prend en ces points des valeurs égales $f(a) = f(b)$ (fig. 92). Dans ce cas la démonstration est identique à la précédente.

R e m a r q u e 2. Si $f(x)$ est une fonction telle que sa dérivée n'existe pas en certains points de l'intervalle ouvert (a, b), alors le théorème peut cesser d'être vrai (c'est-à-dire que dans ce cas il peut ne pas exister sur l'intervalle fermé $[a, b]$ un point intermédiaire c où la dérivée $f'(x)$ s'annule).
Par exemple, la fonction

$$y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

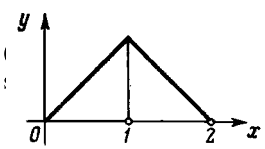


Fig. 94

r le segment [-1, 1] et s' annule aux extrémités du ivée ne s'annule pas à l'intérieur de ce segment.

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Cela provient du fait qu'à l'intérieur de ce segment il existe un point $x = 0$ où la dérivée n'existe pas (elle devient infinie).

Le graphique représenté sur la figure 94 donne également un exemple de fonction dont la dérivée ne s'annule en aucun point du segment [0, 2].

Les hypothèses de validité du théorème de Rolle ne sont pas non plus remplies pour cette fonction, car au point $x = 1$ la dérivée n'existe pas.

§ 2. Théorème des accroissements finis (théorème de Lagrange)

Théorème de Lagrange. *Si la fonction $f(x)$ est continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable en tout point intérieur de ce segment, il existe alors au moins un point c, $a < c < b$, tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (1)$$

Démonstration. Désignons par Q le nombre $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, c'est-à-dire posons

$$Q = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (2)$$

Considérons la fonction auxiliaire $F(x)$ définie par l'égalité :

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q. \quad (3)$$

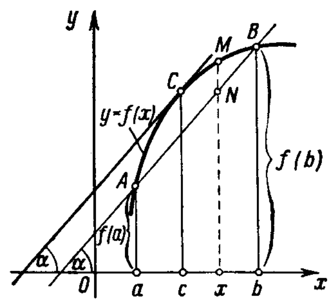


Fig. 95

Dégageons la nature géométrique de la fonction $F(x)$. Pour cela, formons, tout d'abord, l'équation de la corde AB (fig. 95) en ayant en vue que son coefficient angulaire est égal à $Q = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et que cette corde passe par le point $(a; f(a))$

$$y - f(a) = Q(x - a),$$

d'où

$$y = f(a) + Q(x - a),$$

Mais $F(x) = f(x) - [f(a) + Q(x - a)]$. Par conséquent, pour chaque valeur de x, $F(x)$ est égale à la différence des ordonnées de la courbe $y = f(x)$ et de la corde $y = f(a) + Q(x - a)$ pour les points de même abscisse x. On voit aisément que $F(x)$ est continue sur le segment $[a, b]$, dérivable dans ,(a, b) et s'annule aux extrémités de cet intervalle, c'est-à-dire $F(a) = 0$ et $F(b) = 0$. Par conséquent, les conditions de validité du théorème de Rolle sont remplies pour cette fonction. En vertu de ce théorème, il existe un point $x = c$ à l'intérieur de ce segment tel que

$$F'(c) = 0.$$

Mais

$$F'(x) = f'(x) - Q.$$

Donc,

$$F'(c) = f'(c) - Q = 0,$$

d'où

$$Q = f'(c)$$

En substituant cette valeur de Q dans l'égalité (2) nous avons:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad (1')$$

d'où l'on déduit immédiatement la formule (1). Ainsi, le théorème est démontré.

Pour dégager la signification géométrique du théorème de Lagrange reportons-nous à la figure 95. D'après cette figure, on voit que la grandeur $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est la tangente de l'angle α que forme la corde passant par les points A et B d'abscisses a et b du graphique et l'axe positif des x.

D'autre part, $f'(c)$ est égal à la tangente de l'angle que forme la tangente à la courbe au point d'abscisse c et l'axe positif des x. Ainsi, l'égalité (1') (ou l'égalité équivalente (1)) peut être interprétée géométriquement de la manière suivante : si la courbe admet une tangente en tout point de l'arc AB, il existe alors un point C entre A et B tel que la tangente en ce point est parallèle à la corde AB.

D'autre part, puisque c vérifie la condition $a < c < b$, alors $c - a < b - a$ ou

$$c - a = \theta(b - a),$$

où θ est un nombre positif compris entre 0 et 1, c'est-à-dire $0 < \theta < 1$. Mais alors,

$$c = a + \theta(b - a)$$

et l'on peut mettre la formule (1) sous la forme:

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'[a + \theta(b - a)], \; 0 < \theta < 1. \quad (1'')$$

§ 3. Théorème de Cauchy (rapport des accroissements de deux fonctions)

Théorème de Cauchy. Soient *$f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions continues sur le sègment $[a, b]$, dériuables dans (a, b) et soit $\varphi(x)$ telle que $\varphi'(x)$ ne s'annule en aucun point de (a, b) ; il existe alors un point $x = c$ à l'iritérieur de $[a, b]$, $a < c < b$, tel que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \quad (1)$$

D é m o n s t r a t i o n . Définissons Q par l'égalité

$$Q = \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\,. \quad (2)$$

Remarquons que $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, car dans le cas contraire $\varphi(b)$ serait égale à $\varphi(a)$, ce qui entrainerait, en vertu du théorème de Rolle, que $\varphi'(x) = 0$ en un point intérieur du segment, ce qui contredit les conditions du théorème.
Formons la fonction auxiliaire
$F(x) = f(x) - f(a) - Q[\varphi(x) - \varphi(a)]$.
Il est évident que $F(a) = 0$ et $F(b) = 0$ (cela découle de la définition de la fonction $F(x)$ et du nombre Q). Notons que pour la fonction $F(x)$ les hypothèses de validité du théorème de Rolle sont remplies. Nous pouvons donc conclure qu'il existe un nombre c entre a et b ($a < c < b$) tel que $F'(c) = 0$. Mais $F'(x) = f'(x) - Q\varphi'(x)$, par conséquent, d' où

$$F'(c) = f'(c) - Q\varphi'(c) = 0,$$

d'où

$$Q = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

En substituant cette valeur de Q dans l'égalité (2), nous avons l'égalité (1).
R e m a r q u e . Le théorème de Cauchy ne peut être démontré, comme on pourrait être tenté de le croire, en appliquant le théorème de Lagrange au numérateur et au dénominateur de la fraction

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$$

En effet, en procédant de cette manière, nous obtiendrons (après avoir simplifié la fraction par b - a) la formule

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c_1)}{\varphi'(c_2)}$$

où $a < c_1 < b$, $a < c_2 < b$. Mais comme, en général, $c_1 \neq c_2$, ce résultat ne permet pas d'obtenir le théorème de Cauchy.

§ 4. Limite du rapport de deux infiniment petits (vraie valeur des indéterminations de la forme $\frac{0}{0}$)

Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions définies sur le segment $[a, b]$ satisfaisant aux conditions du théorème de Cauchy et s'annulant au point $x = a$ de ce segment, c'est-à-dire $f(a) = 0$ et $\varphi(a) = 0$.

Le rapport $\frac{f(c)}{\varphi(c)}$ n'est pas défini au point $x = a$, mais en tout autre x point $x \neq a$, c'est une quantité bien déterminée. C'est pourquoi nous pouvons nous proposer de trouver la limite de ce rapport quand $x \to a$. Le calcul de limites semblables s'appelle « calcul de la vraie valeur des indéterminations de la forme $\frac{0}{0}$ » ;

on dit aussi : « lever l'indétermination de la forme $\frac{0}{0}$ » .

Nous avons déjà eu affaire à un problème de ce genre, lors de l'étude de la limite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ et du calcul des dérivées de certaines fonctions élémentaires. L'expression $\frac{\sin x}{x}$ n'a pas de sens pour $x = 0$, en d'autres termes, la fonction $F(x) = \frac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en ce point, mais nous avons vu que la limite de l'expression $\frac{\sin x}{x}$ pour $x \to 0$ existe et est égale à 1.

T h é o r è m e (r è g l e d e L ' H o s p i t a l). Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ *deux fonctions satisfaisant aux conditions du théorème de Cauchy sur un certain segment* $[a, b]$ *et s'annulant au point* $x = a$, *c'est-à-dire* $f(a) = \varphi(a) = 0$. *Si, en outre, la limite du rapport* $\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ *existe quand* $x \to a$, alors $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *existe et* $x \to a$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

D é m o n s t r a t i o n . Choisissons un point $x \neq a$ arbitraire sur le segment $[a, b]$. En appliquant la formule de Cauchy, nous avons:

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

où ξ est un point compris e n t r e a et x. Mais par hypothèse $f(a) = \varphi(a) = 0$, par conséquent,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \qquad (1)$$

Si $x \to a$, ξ tend également vers a, puisque ξ est compris entre x et a. En outre, si $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$, $\lim\limits_{\xi\to a}\dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$, existe et est égale à A. Par conséquent, il est évident que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$$

et en définitive

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

R e m a r q u e 1. Le théorème est valable également dans le cas où $f(x)$ et $\varphi(x)$ ne sont pas définies au point $x = a$, mais

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim_{x\to a}\varphi(x) = 0$$

Ce cas se ramène sans difficulté au précédent si l'on définit les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ au point $x = a$ de sorte qu'elles soient continues en ce point. Pour cela, il suffit de poser

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0;\quad \varphi(\mathrm{a}) = \lim_{x\to a}\varphi(x) = 0$$

puisque évidemment la limite du rapport $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, quand $x \to a$, ne dépend pas de la valeur de $f(x)$ et de $\varphi(x)$ au point $x = a$.

R e m a r q u e 2. Si $f'(a) = \varphi'(a) = 0$ et si les dérivées $f'(x)$ et $\varphi'(x)$ satisfont aux conditions requises pour la validité du théorème, nous pouvons appliquer de nouveau la règle de L'Hospital au rapport $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$; nous en déduisons, par conséquent, la formule

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}, \text{etc.}$$

R e m a r q u e 3. Si $\varphi'(a) = 0$, mais $f'(x) \neq 0$, le théorème peut être appliqué au rapport inverse $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$, qui tend vers zéro pour $x \to a$. Par conséquent, le rapport $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ tend vers l'infini.

E x e m p l e 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(3x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{5cox5x}{3} = \frac{5}{3}.$$

E x e m p l e 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

E x e m p l e 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Nous avons dû appliquer ici trois fois de suite la règle de L'Hospital, puisque le rapport des dérivées premières, secondes et troisièmes conduit à l'indétermination $\dfrac{0}{0}$ pour $x = 0$.

R e m a r q u e 4. La règle de L'Hospital peut également être appliquée dans le cas où

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,\quad \text{et}\quad \lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0\ .$$

En effet posons $x = \dfrac{1}{z}$; nous voyons que $z \to 0$ quand $x \to \infty$ et, par conséquent,

$\lim\limits_{x\to\infty} f\left(\dfrac{1}{z}\right) = 0$, et $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi\left(\dfrac{1}{z}\right) = 0$ Appliquons la règle de L'Hospital au rapport $\dfrac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}$, nous trouvons:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

ce qu'il fallait démontrer.

E x e m p l e 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{k\cos\frac{k}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} k\cos\frac{k}{x} = k.$$

§ 5. Limite du rapport de deux infiniment grands (vraie valeur des indéterminations de la forme $\frac{\infty}{\infty}$)

Considérons à présent le problème de la limite du rapport de deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ tendant vers l'infini quand $x \to a$ (ou quand $x \to \infty$).

Théorème : *Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctibns continues et dérivables en tout point x a au voisinage du point a ; la dérivée $\varphi'(x)$ ne s'annule en aucun point de ce voisinage et, en outre,*

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$ *Si la limite*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \qquad (1)$$

existe, alors la limite $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *existe également et*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A\,. \qquad (2)$$

Démonstration. Choisissons deux points arbitraires α et x dans le voisinage du point a de sorte que $\alpha < x < a$ (ou $a < x < \alpha$). En vertu du théorème de Cauchy nous avons

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{\varphi(x)-\varphi(\alpha)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \qquad (3)$$

où $\alpha < c < x$. Transformons le premier membre de l'égalité (3)

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{\varphi(x)-\varphi(\alpha)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1-\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}} \qquad (4)$$

Nous déduisons des relations (3) et (4)

$$\frac{f(c)}{\varphi'(c)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1-\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}$$

D'où nous tirons:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \frac{1-\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}} \qquad (5)$$

Il vient de la condition (1) que, pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut choisir α suffisamment voisin de a pour que l'inégalité

$$\left|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - A\right| < \varepsilon$$

ou

$$A-\varepsilon < \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} < A+\varepsilon \qquad (6)$$

soit satisfaite pour tous les $x = c$, où $\alpha < c < a$. Considérons ensuite la fraction

$$\frac{1-\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}}$$

Fixons α de sorte que l'inégalité (6) soit satisfaite et faisons tendre x vers a. Puisque $f(x)\to\infty$ et $\varphi(x)\to\infty$ pour $x \to a$, alors :

$$\lim_{x\to a} \frac{1-\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}} = 1$$

et, par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$ préalablement choisi, nous aurons pour tous les x suffisamment voisins de a

$$\left| 1 - \frac{1-\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}} \right| < \varepsilon$$

ou

$$1-\varepsilon < \frac{1-\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}} < 1+\varepsilon \qquad (7)$$

Multiplions les termes correspondants des inégalités (6) et (7), nous avons:

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon) < \frac{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} < (A+\varepsilon)(1+\varepsilon),$$

et en vertu de l'égalité (5)

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon) < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < (A+\varepsilon)(1+\varepsilon).$$

ε étant arbitrairement petit quand x est suffisamment voisin de a, nous déduisons de ces dernières inégalités que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = A$$

ou en vertu de (1)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A,$$

c. q. f. d.

R e m a r q u e 1. Si dans les conditions (1) on pose $A=\infty$, c'est-à-dire si

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \infty$$

l'égalité (2) reste valable dans ce cas également. En effet, il vient de la relation précédente :

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = 0$$

Alors, d'après le théorème que nous venons de démontrer,

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = 0,$$

d' où

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$$

R e m a r q u e 2. Le théorème peut être aisément étendu au cas où $x\to\infty$. Si les limites $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ existe, alors

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \qquad (8)$$

On démontre cette propositicyil en effectuant le changement de variables = $\dfrac{1}{z}$, de même que dans le cas de l'indétermination de la forme $\dfrac{0}{0}$ (voir § 4, remarque 4).

E x e m p l e 1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1} = \infty$$

R e m a r q u e 3. Attirons une fois de plus l'attention sur le fait que les formules (2) et (8) ne sont valables que si la limite (finie ou infinie) du second membre existe. Il peut arriver que la limite du premier membre existe, tandis que la limite du second membre n existe pas. Voici un exemple. Soit à calculer la limite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$$

Cette limite existe et est égale à 1. En effet,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

Mais le rapport des dérivées

$$\frac{(x+\sin x)'}{(x')} = \frac{1+\cos x}{1} = 1+\cos x$$

ne tend vers aucune limite quand $x\to\infty$, car il oscille entre 0 et 2.

E x e m p l e 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{cx^2-d} = \lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{2cx} = \frac{a}{c}$$

E x e m p l e 3.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{3}{\cos^2 3x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\frac{2\cdot 3\cos 3x\sin 3x}{2\cos x\sin x} =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin 3x}{\sin x}\cdot\frac{(-1)}{(1)} = 3\frac{(-1)}{(1)}\cdot\frac{(-1)}{(1)} = 3$$

E x e m p l e 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

En général, pour tout entier $n > 0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=...=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)...1}{e^x}=0$$

Les autres cas d'indétermination que l'on note symboliquement :

a) $0\cdot\infty$; b) 0^0; c) ∞^0; d) 1^∞; e) $\infty - \infty$

se ramènent aux cas précédents que nous venons d'étudier. Explicitons ces notations symboliques.

a) Etant donné que $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, on demande de calculer la limite

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right].$$

C'est une indétermination de la forme $0\cdot\infty$. Mettons cette expression sous la forme :

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$

ou

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

quand $x\to a$ nous avons une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemple 5.

$$\lim_{x\to 0}x^n\cdot\log x=\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\frac{1}{x^n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{n}{x^{n-1}}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{n}=0$$

b) Etant donné que

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\ \lim_{x\to a}\varphi(x)=0$$

on demande de calculer la limite

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$$

ou, en d'autres termes, de lever l'indétermination de la forme 0_0.

Posons .

$$y=\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$$

Prenons le logarithme des deux membres de cette expression

$$\operatorname{Log} y=\varphi(x)\,[\operatorname{Log} f(x)].$$

Quand $x\to a$ nous avons (à droite) une indétermination de la forme $0\cdot\infty$. Connaissant $\lim_{x\to a}\log y$, on détermine aisément $\lim_{x\to a} y$. En effet, en vertu de la continuité de la fonction logarithmique, $\lim_{x\to a}\log y$ = log $\lim_{x\to a} y$ et si log $\lim_{x\to a} y$ =b, alors il est évident que $\lim_{x\to a} y=e^b$. Si en particulier $b = +\infty$ ou $-\infty$, nous aurons respectivement $\lim y = +\infty$ ou 0.

E x e m p l e 6. Soit à calculer $\lim_{x\to 0}x^x$. Posons $y = x^x$, nous trouvons Log lim y =lim Log y = lim Log (x^x) = lim $(x \operatorname{Log} x)$;

$$\lim_{x\to 0}(x\log x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}x=0$$

par conséquent, Log lim $y = 0$, d'où lim $y = e^0 = 1$, c'est-à-dire

$$\lim_{x\to 0}x^x=1.$$

On trouve d'une manière analogue les limites dans les autres cas d'indétermination.

§ 6. Formule de Taylor

Supposons que les dérivées de la fonction $y = f(x)$ existent jusqu'au $(n + 1)^{\text{ième}}$ ordre inclus dans un certain voisinage du point $x = a$. Cherchons un polynôme $y = P_n(x)$ de degré non supérieur à n, dont la valeur au point $x = a$ est égale à la valeur de la fonction $f(x)$ en ce point, et dont les valeurs au point $x = a$ des dérivées successives jusqu'à l'ordre n inclus sont respectivement égales aux valeurs en ce point des dérivées correspondantes de la fonclion $f(x)$

$$P_n(a)=f(a),\ P'_n(a)=f'(a),\ P''_n(a)=f''(a),...,\ P^{(n)}n(a)=f^{(n)}(a). \qquad (1)$$

On peut s'attendre naturellement à ce que ce polynôme soit dans un certain sens « proche » de la fonction $f(x)$.

Cherchons-le sous forme d'un polynôme suivant les puissances entières de $(x - a)$ et dont les coefficients sont indéterminés

$$P_n(x) = C_o + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + ... + C_n(x-a)^n. \qquad (2)$$

Nous déterminons les coefficients C_1, C_2, . . . C_n de sorte que soit satisfaite la relation (1).
Calculons tout d'abord les dérivées de $P_n(x)$

$$\left.\begin{aligned}
&P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \ldots + nC_n(x-a)^{n-1}\\
&P_n''(x) = 2\cdot 1\cdot C_2 + 3\cdot 2C_3(x-a) + \ldots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_n^{(n)} = n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot C_n
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

En remplaçant x par a dans les égalités (2) et (3) et (en vertu de l'égalité (1)) $P_n(a)$ par $f(a)$, $P'_n(a)$ par $f'(a)$, etc., nous avons :

$$f(a) = C_0$$
$$f'(a) = C_1$$
$$f''(a) = 2\cdot 1\cdot C_2$$
$$\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot C_n$$

d'où nous trouvons

$$\left.\begin{aligned}
&C_0 = f(a), C_1 = f'(a), C_2 = \frac{1}{1\cdot 2}f''(a),\\
&C_3 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a), \ldots C_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}f^{(n)}(a)
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

En substituant les valeurs des coefficients C_1, C_2, . . ., C_n dans la formule (2), nous trouvons le polynôme recherché

$$P_n(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a) +$$
$$\frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}f^{(n)}(a)$$

Désignons par $R_n(x)$ la différence entre la fonction $f(x)$ et le polynôme ainsi construit $P_n(x)$ (fig. 96)

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

d'où

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

ou plus explicitement

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(x)$$

On appelle $R_n(x)$ le reste. Pour toutes les valeurs de x telles que le reste est petit, le polynôme $P_n(x)$ donne une approximation assez bonne de la fonction $f(x)$.

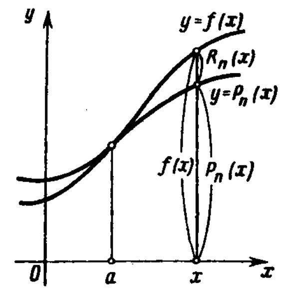


Fig. 96

Ainsi, la formule (6) permet de remplacer la fonction $y = f(x)$ par le polynôme $y = P_n(x)$ avec un degré de précision égal au reste $R_n(x)$.

Le problème qui se pose maintenant est d'évaluer le reste $P_n(x)$ pour diverses valeurs de x.
Ecrivons le reste sous la forme

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x), \qquad (7)$$

où $Q(x)$ est une fonction à déterminer. Mettons la formule (6) sous la forme :

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x).$$

Pour x et a figés, la fonction $Q(x)$ a une valeur bien déterminée ; désignons-la par Q. Considérons ensuite une fonction augiliaire de t (t est compris entre a et x):

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1}f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!}f''(t) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^2}{(n+1)!}Q,$$

où Q est défini par la relation (6') ; nous supposons que a et x sont des nombres bien déterminés.

Calculons le dérivée $F'(t)$:

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{x-t}{1} f''(t) + \frac{2(x-t)}{2!} f''(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) + ...$$
$$... - \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) + \frac{n(x-t)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!} Q$$

Ou après avoir simplifié :

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} Q. \qquad (8)$$

Ainsi, la dérivée de la fonction $F(t)$ existe pour tous les points t voisins du point d'abscisse a ($a \le t \le x$ pour $a < x$ et $a \ge t \ge x$ pour $a > x$).
Notons également que [en vertu de la formule (6')]

$$F(x) = 0, \quad F(a) = 0.$$

Donc, les conditions de validité du théorème de Rolle sont remplies pour la fonction $F(t)$ et, par conséquent, il existe une valeur $t = \xi$ comprise entre a et x, pour laquelle $F'(\xi) = 0$. Nous en déduisons, en vertu de la relation (8):

$$-\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) + \frac{(x-\xi)^n}{n!} Q = 0.$$

d' où

$$Q = f^{n+1)}(\xi).$$

En substituant cette expression dans la formule (7) nous avons :

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

C'est la *formule de Lagrange* pour le reste. Puisque ξ est compris entre x et a, nous pouvons le mettre sous la forme *)

$$\xi = a + \theta(x-a)$$

où θ est un nombre compris entre 0 et 1, c'est-à-dire $0 < \theta < 1$; la formule qui donne le reste devient

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left[a + \theta(x-a)\right]$$

* Voir la fin du § 2 du présent chapitre.

La formule

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + ...$$
$$... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left[a + \theta(x-a)\right] \qquad (9)$$

s'appelle *formule de Taylor* de la fonction $f(x)$.
Si dans la fotmule de Taylor on fait $a = 0$, on trouve

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ...$$
$$... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x). \qquad (10)$$

où θ est compris entre 0 et 1. Ce cas particulier de la formule de Taylor est connu sous le nom de *formule de Maclaurin*.

§ 7. Développement des fonetions e^x, sin x, cos x par la formule de Taylor

1. Développement de la fonction $f(x)=e^x$. En calculant les dérivées successives de $f(x)$, nous avons:

$$f(x) = e^x, \ f(0) = 1.$$

$$f'(x) = e^x, \ f(0) = 1,$$
$$......................$$
$$f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}.(0) = 1.$$

En substituant les expressions trouvées dans la formule (10) § 6 nous avons:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$
$$0 < \theta < 1.$$

Si $|x| < 1$, alors, en prenant $n = 8$, on a pour le reste l'estimation suivante

$$R_8 < \frac{1}{9!} 3 < 10^{-5}$$

La formule obtenue en posant $x = 1$ permet de calculer la valeur approchée du nombre e :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!}$$

Si l'on effectue les calculs en prenant 6 chiffres *) après la virgule, puis, arrondissant le résultat, en conservant 5 chiffres, on trouve e = 2,71828. Les quatre premiers chiffres après la virgule sont exacts puisque l'erreur n'excède pas le nombre $\frac{3}{9!}$ ou 0,00001.

Remarquons que quel que soit x, le reste

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \text{ quand } n \to \infty$$

.En effet, puisque $\theta < 1$, la quantité $e^{\theta x}$ est bornée, pour x fixé (elle est plus petite que e^x si $x > 0$ et plus petite que 1 si $x < 0$).
Démontrons que pour tout x fixé

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

En effet,

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1}\right|$$

Si x est un nombre fixé, il existe alors un entier positif N tel que

$$|x| < N.$$

Posons $\frac{|x|}{N} = q$; alors, compte tenu de ce que $0 < q < 1$, nous pouvons écrire pour $n = N + 1, N + 2, N + 3$, etc.

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1}\right| = \left|\frac{x}{1}\right| \cdot \left|\frac{x}{2}\right| \cdot \left|\frac{x}{3}\right| \cdot \ldots \left|\frac{x}{N-1}\right| \cdot \left|\frac{x}{N}\right| \cdot \ldots$$

$$\left|\frac{x}{n}\right| \cdot \left|\frac{x}{n+1}\right| \cdot < \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{N-1} \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q = \frac{x^{N-1}}{(N+1)!} q^{n-N+2}$$

car $\left|\frac{x}{N}\right| = q$; $\left|\frac{x}{N+1}\right| < q$;....; $\left|\frac{x}{n+1}\right| < q$

* Autrement l'erreur sommaire d'arrondi peut de beaucoup dépasser dans les calculs R_8 (ainsi, pour un nombre de termes à additionner égal à 10 l'erreur peut atteindre $5 \cdot 10^{-5}$).

Mais $\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$ est une constante et, par conséquent, ne dépend pas de n; d'autre part, q^{n-N+2} tend vers zéro pour $n \to \infty$. Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \qquad (1)$$

Par conséquent, R_n (x) = $e^{\theta x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ tend également vers zéro pour $n \to \infty$. Il ressort de ce qui précède que quel que soit x, nous pouvons calculer e^x avec la précision voulue à condition de prendre un nombre suffisamment grand de termes.

2. Développement de la fonction $f(x)$= sin x. Calculons les dérivées successives de $f(x) = \sin x$: $f(0) = 0$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \qquad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) \qquad f'''(0) = -1,$$

$$f^{IV}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right) \qquad f^{IV}(0) = 0,$$

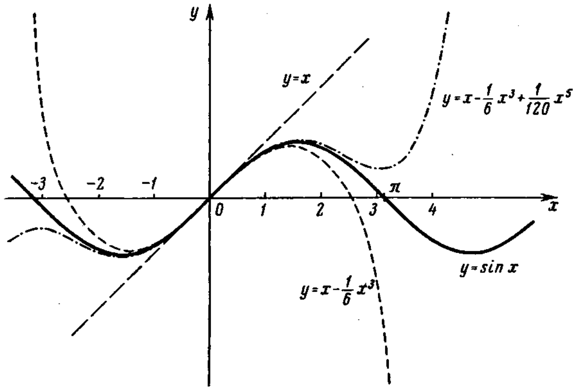
....

$$f^{n}(x) = \sin\left[x + n\frac{\pi}{2}\right] \qquad f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2}$$

$$f^{n+1}(x) = \sin\left[x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right] \qquad f^{(n+1)}(\xi) = \sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

En substituant les expressions trouvées dans la formule (10) § 6, nous en déduisons le développement de la fonction $f(x)$ = sin x, d'après la formule de Taylor :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^n}{n!} \sin n\frac{\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$



Comme $\left|\sin\left[\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right]\right| \le 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ pour toutes valeurs de x.

Appliquons la formule ainsi trouvée au calcul de la valeur approchée de sin 20°. Posons n = 3, c'est-à-dire que nous ne considérerons que les deux premiers termes du dévellopement :

$$\sin 20° = \sin\frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 = 0342.$$

Evaluons l'erreur commise qui est égale au reste :

$$|R_3| = \left|\left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \frac{1}{4!}\sin(\xi+2\pi)\right| \le \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \frac{1}{4!} = 0{,}0006 < 0{,}001 .$$

L'erreur commise est donc inférieure à 0,001, c'est-à-dire que sin 20° = 0,342 à 0,001 près.

Les graphiques de la fonction $f(x)$ = sin x et des trois premières approximations

$$S_1(x)=x; S_2(x)=x-\frac{x^3}{3!}; S_3(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!} .$$

sont donnés sur la figure 97.

3. D é v e l o p p e m e n t d e l a f o n c t i o n $f(x)$= cos x.

En calculant les dérivées successives de la fonction $f(x)$ = cos x au point x = 0 et en les substituant dans la formule de Maclaurin nous trouvons le développement :

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{x^n}{n!}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left[\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$|\xi| < |x|$$

Dans ce cas également $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ pour toutes les valeurs de x.

Exercices

Vérifier le théorème de Rolle pour les fonctions

1. $y = x^2 - 3x + 2$ sur le segment [1, 2].
2. $y = x^3 + 5x^2 - 6x$ sur le segment [0, 1].
3. $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ sur le segment [1, 3].
4. $y = \sin^2 x$ sur le segment [0, π].
5. La fonction $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ a pour racines 1 et -1. Trouver la racine de la dérivée $f'(x)$, dont il est question dans le théorème de Rolle.
6. Vérifier qu'entre les racines de la fonction $y=\sqrt[3]{x^2-5x+6}$ se trouve une racine de sa dérivée.
7. Vérifier le théorème de Rolle pour la fonction $y = \cos^2 x$ sur le segment $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$
8. La fonction $y=1-\sqrt[5]{x^4}$ s'annule aux extrémités du segment [-1, 1].Vérifier que la dérivée de cette fonction ne s'annule en aucun point de l'intervalle (-1, 1). Expliquer pourquoi on ne peut appliquer ici le théorème de Rolle.
9. Composer la formule de Lagrange pour la fonction y = sin x sur le segment $[x_1, x_2]$. Rép. $\sin x_2 - \sin x_1 = (x_2 - x_1)\cos c$, $x_1 < c < x_2$.
10. Vérifier la formule de Lagrange pour la fonction $y = 2x - x^2$ sur le segment [0,1].
11. En quel point la tangente à la courbe $y = x^n$ est parallèle à la corde soustendant les points M_1 (0, 0) et M_2 (a, a^n)? Rép. Au point d'abscisse $c=\frac{a}{\sqrt[n-1]{n}}$.
12. En quel point la tangente à la courbe y = Log x est parallèle à la corde sous-tendant les points M_1 (1, 0) et M_2 (e, 1)? Rép. Au point d'abscisse $c = e - 1$

Utiliser la formule de Lagrange pour démontrer les inégalités :

13. $e^x \ge 1 + x$.
14. Log $(1 + x) < x$ $(x > 0)$.
15. $b^n - a^n < nb^n - 1(b - a)$ pour $b > a$.
16. arc tg $x < x$.

17. Ecrire la formule de Cauchy pour les fonctions $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = x^3$ sur le segment [1, 2] et trouver c. Rép. c= $\frac{14}{9}$.

Calculer les limites suivantes

18. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$. Rép. $\frac{1}{n}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ Rép. 2.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$ Rép. 2.

21: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$. Rép. -2.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$. Rép. La limite n'existe pas ($\sqrt{2}$ pour $x\to +0$, - $\sqrt{2}$ pour $x\to -0$).

23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\log\sin x}{(\pi-2x)^2}$. Rép. $-\frac{1}{8}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$. Rép. Log $\frac{b}{a}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$. Rép. $-\frac{1}{6}$

26. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$. Rép. cos a.

27. $\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y+\sin y-1}{\log(1+y)}$. Rép. 2.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x}{3x^2-x^5}$. Rép. $\frac{1}{3}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{2x+5}$. Rép. $\frac{3}{2}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^n}$ (où $n > 0$) . Rép. 0.

31. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arc\,ctg} x}$. Rép. 1.

32. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\log\left(\frac{x-1}{x}\right)}$. Rép. -1.

33. $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{ax}}$. Rép. 0 pour $a > 0$; ∞ pour $a \le 0$.

34. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$. Ré . 1.

35. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log\sin 3x}{\log\sin x}$. Rép. 1.

36. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log\operatorname{tg} 7x}{\log\operatorname{tg} 2x}$. Rép. 1.

37. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\log(x-1)-x}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2x}}$. Rép, 0.

38. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$. Rép. $\frac{\pi}{2}$.

39. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right]$. Rép. $-\frac{1}{2}$.

40. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{\log x}-\frac{x}{\log x}\right]$. Rép. -1.

41. $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}(\sec\varphi-\operatorname{tg}\varphi)$. Rép. 0.

42. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right]$. Rép. $\frac{1}{2}$

43. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 2x$. Rép. $\frac{1}{2}$

44. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$. Rép. ∞

45. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. Rép. $\frac{1}{e}$

46. $\lim\limits_{t\to\infty}\sqrt[t]{t^2}$. Rép. 1.

47. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. Rép. 1.

48. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$. Rép. e^a.

49. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\log x}}$. Rép. $\frac{1}{e}$.

50. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$. Rép. 1.

51. $\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi^2}}$. Rép $\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$

52. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$. Rép. $\frac{1}{e}$

53. Décomposer le polynôme $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ suivant les puissance de $x - 2$. Rép. $-7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4$.

54. Décomposer suivant les puissances de $x + 1$ le polynôme $x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$. Rép. $(x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5$

55. Ecrire la formule de Taylor pour la fonction $y=\sqrt{x}$. pour $a = 1$, $n = 3$:

Rép.

$$\sqrt{x}=1+\frac{x-1}{1}\cdot\frac{1}{2}-\frac{(x-1)^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{(x-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{3}{8}-\frac{(x-1)^4}{4!}\times\frac{15}{16}\cdot[1+\theta(x-1)]^{-\frac{7}{2}},\quad 0<\theta<1$$

56. Ecrire la formule de Maclaurin pour la fonction $y=\sqrt{1+x}$ pour $n = 2$.

Rép. $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{x^3}{16(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}}$, $0<\theta<1$

57. Utiliser les résultats de l'exemple précédent pour évaluer l'erreur de l'égalité approchée

$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$ pour $x = 0{,}2$. Rép. Inférieure à $\frac{1}{2\cdot 10^3}$.

Elucider la provenance des égalités approchées pour les faibles valeurs de x et évaluer l'erreur de ces égalités:

58. $\log\cos x \approx -\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}$

59. $\operatorname{tg} x \approx x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}$

60. $\arcsin x \approx x+\dfrac{x^3}{6}$.

61. $\operatorname{arc\,tg} x \approx x-\dfrac{x^3}{3}$.

62. $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\approx 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$.

63. $\log(x+\sqrt{1-x^2})\approx x-x^2+\dfrac{5x^3}{6}$

Utiliser la formule de Taylor pour calculer la limite des expressions

64. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}}$. Rép. 1.

65. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log^2(1+x)-\sin^2 x}{1-e^{-x^2}}$. Rép. 0.

66. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\operatorname{tg} x-\sin x)-x^3}{x^5}$. Rép $\dfrac{1}{4}$

67. $\lim\limits_{x\to 0}\left[x-x^2\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$. Rép. 0.

68. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)$. Rép. $\dfrac{1}{3}$

69. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$ Rép. $\dfrac{2}{3}$.

Chapitre V

ETUDE DE LA VARIATION DES FONCTIONS

§ 1. Position du problème

L'étude des rapports quantitatifs entre les divers phénomènes de la nature nous pousse à rechercher et à étudier le lien fonctionnel existant entre les variables qui caractérisent un phénomène donné. Si ce lien fonctionnel peut être exprimé sous une forme analytique, c'est-à-dire à l'aide d'une ou de plusieurs formules, il nous est alors possible d'entreprendre l'étude de cette dépendance fonctionnelle par les méthodes de l'analyse mathématique. Par exemple, lors de l'étude de la trajectoire d'un projectile lancé dans le vide, nous trouvons la formule

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

g qui exprime la relation fonctionnelle existant entre la portée R, l'angle de tir α et la vitesse initiale v_o (g est l'accélération de la pesanteur).

Grâce à cette formule, il nous est possible de déterminer pour quelles valeurs de α la portée R sera maximum ou minimum, dans quelles conditions l'augmentation de α entraînera celle de la portée, etc.
Citons un autre exemple. L'étude des vibrations d'un corps reposant sur des ressorts (train, automobile) nous fournit une formule exprimant la dépendance fonctionnelle entre l'écart y de ce corps de la position d'équilibre et le temps t:

$$y = e^{-kt} (A \cos \omega t + B \sin \omega t).$$

Les grandeurs k, A, B, ω entrant dans cette formule ont une valeur bien déterminée pour un système vibratoire donné (elles dépendent de l'élasticité des ressorts, du poids du corps, etc., mais ne varient pas avec le temps t) et, par conséquent, peuvent être considérées comme constantes.

La formule obtenue permet de conclure pour quelles valeurs de t l'écart y augmente avec t, comment varie la valeur de l'écart maximum avec le temps, à quelles valeurs de t correspondent ces écarts maximums, pour quelles valeurs de t on obtient les vitesses maximums de déplacement du corps, etc.

Toutes les questions de ce genre se rapportent a un même problème, plus général, que 1'on nomme « 1'étude de la variation des fonctions ».
I1 est évidemment malaise de répondre a toutes ces questions en calculant la valeur numérique des fonctions en certains points. (comme nous 1'avons fait au ch. II). L'objet du pressent chapitre est de donner les principes généraux de 1'etude de la variation des fonctions.

§ 2. Croissance et décroissance des fonctions

Nous avons défini au § 6 du chapitre I les fonctions croissante et décroissante. Nous utiliserons maintenant la notion de dérivée pour 1'etude de la croissance et de la décroissance des fonctions.
T h e o r è m e . 1*) Si la fonction f* (x) *dérivable sur le segment* [a, b*] est croissants sur ce segment, alors sa dérivée n'est pas négative sur ce segment, c'est-à-dire* $f(x) > 0$.
2) *Si la fonction* $f(x)$ *est continue sur le segment* [a, b], *dérivable dans l'intervalle* (a, b) *et si de plus* $f(x) > 0$ *pour* $a < x < b$, *alors:,* $f(x)$ *est une fonction croissante sur le segment* [a, b].

D é m o n s t r a t i o n . Démontrons tout d'abord la première partie du théorème. Soit $f(x)$ une fonction croissante sur le segment [a, b]. Donnons a la variable indépendante x un accroissement Δx et considérons le rapport

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

$f(x)$ étant une fonction croissante, on a $f(x + \Delta x) > f(x)$ pour $\Delta x > 0$ $f(x + \Delta x) < f(x)$ pour $\Delta x < 0$
Dans les deux cas

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0 \qquad (2)$$

et, par conséquent,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$

c'est-à-dire $f'(x) > 0$, ce qu'il fallait démontrer. (Si nous avions $f'(x) < 0$, le rapport (1) serait négatif pour les valeurs suffisamment petites de Δx, ce qui aurait contredit la relation (2).)
Démontrons maintenant la seconde partie du théorème. Soit $f'(x) > 0$ pour tous les x appartenant a 1'intervalle (a, b).
Considérons deux valeurs arbitraires x_1, et x_2 ($x_1 < x_2$) de la variable indépendante prises sur le segment [a, b].

En vertu du théorème de Lagrange sur les accroissements finis, nous avons:

$$f(x_2) - f(x_1) = f(\xi)(x_2 - x_1),\ x_1 < \xi < x_2$$

Par hypothèse $f(\xi) > 0$, par conséquent, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ce qui exprime bien que $f(x)$ est une fonction croissants..

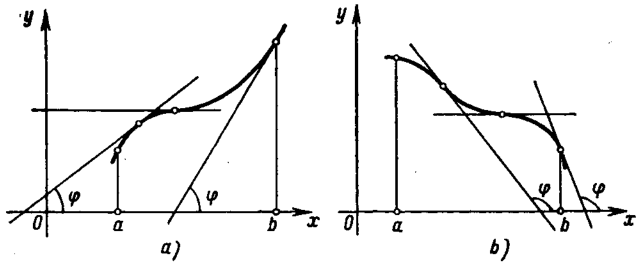


Fig. 98

On peut énoncer un théorème analogue pour les fonctions d4croissantes (dérivables)

Si $f(x)$ est une fonction décroissante sur $[a, b]$, *alors* $f'(x) \leq 0$ *sur ce segment.* Si $f(x) < 0$ *dans l'intervalle* (a, b), *alors* $f(x)$ *est décroissante sur le segment* [a, b]. [Bien entendu, nous supposons ici également que la fonction $f(x)$ est continue en tout point du segment $[a, b]$ et dérivable en tout point de 1'intervalle (a, b).]

R e m a r q u e . Le théorème que nous venons de démontrer s'interprète géométriquement comme suit: si la fonction $f(x)$ est croissants sur le segment $[a, b]$, la tangente de la courbe $y = f(x)$ forme, en chaque point de ce segment, un angle aigu φ avec l'axe *Ox* (en certains points elle peut être parallèles a cet axe). La tangente de cet angle n'est donc pas négative : $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi \geq 0$ (fig. 98,*a*). Si la fonction $f(x)$ est décroissante sur le segment $[a, b]$, 1'angle formé par la tangente et l'axe *Ox* est obtus (ou exceptionnellement, en certains points, la tangente est parallèle a 1'axe *Ox*).

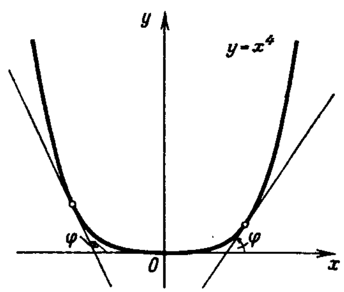


Fig. 99

La tangente de cet angle n'est donc pas positive (fig. 98, b). La seconde partie du théorème s'interprète de 1a même façon. Ainsi, ce théorème permet de conclure si la fonction est croissante ou décroissante d'après le signe de la dérivée.

E x e m p 1 e. Déterminer le domaine de croissance et de décroissance de la fonction : $y = x^4$.

S o l u t i o n . La dérivée de cette fonction est :

$$y' = 4x^3;$$

pour $x > 0$ on a $y' > 0$ et par suite la fonction est croissante ; pour $x < 0$, on a $y' < 0$ et la fonction est décroissante (fig. 99).

§ 3. Maximum et minimum des fonctions

Définition du maximum. On dit que la fonction $f(x)$ admet un *maximum* au point x_1 si la valeur de la fonction $f(x)$ est en ce point plus grande qu'en tout autre point d'un certain intervalle contenant le point x_1. En d'autres termes, la fonction $f(x)$ admet un

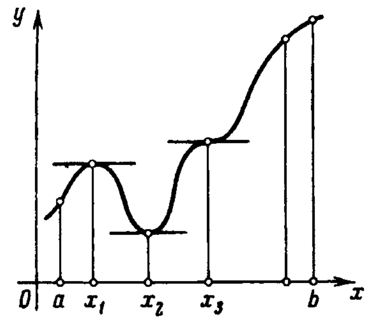


Fig. 100

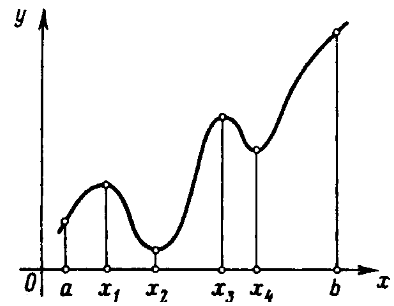


Fig. 101

maximum au point $x = x_1$ si $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ pour tous les Δx (positifs ou négatifs) suffisamment petits en valeur absolue [*]).

Par exemple, la fonction $y = f(x)$, dont le graphique est représenté sur la figure 100, admet un maximum pour $x = x_1$.

D é f i n i t i o n   d u   m i n i m u m . On dit que la fonction $f(x)$ admet un minimum pour $x = x_2$ si

$$f(x_2 + \Delta x) > f(x_2),$$

pour tous les Δx (positifs ou négatifs) suffisamment petits en valeur absolue (fig. 100). Par exemple, la fonction $y = x^4$, que nous avons considérée à la fin du précédent paragraphe (voir fig. 99), admet un minimum pour $x = 0$, puisque $y = 0$ pour $x = 0$, et $y > 0$ pour toutes autres valeurs de x.

[*] On énonce parfois comme suit cette définition: la fonction $f(x)$ admet un *maximum* au point x_1 s'il existe un voisinage (α, β) du point x_1 $(\alpha < x_1 < < \beta)$ tel que pour tous les points de ce voisinage différents de x_1 l'inégalité $f(x) < f(x_1)$ soit satisfaite.

Nous tenons à attirer l'attention sur les points suivants relatifs à la définition du maximum et du minimum.

1. Une fonction définie sur un segment ne peut atteindre son maximum ou son minimum qu'en un point intérieur de ce segment.

2. On ne doit pas confondre le maximum et le minimum d'une fonction respectivement avec sa plus grande et sa plus petite valeur (les bornes supérieure et inférieure) sur. le segment considéré : la valeur de la fonction au point de maximum n'est sa plus grande valeur que par rapport à ses valeurs aux points x suffisamment voisins du point de maximum. De même, en un point de minimum, elle n'est la plus petite valeur de la fonction que par rapport à ses valeurs aux points suffisamment voisins du point de minimum. C'est pourquoi on emploie parfois les expressions maximum relatif ou minimum relatif, au lieu de maximum et minimum.

Ainsi, la figure 101 représente une fonction définie sur le segment $[a, b]$ qui a

un maximum pour $x = x_1$ et $x = x_3$;
un minimum pour $x = x_2$ et $x = x_4$;

mais le minimum de la fonction pour $x = x_4$ est plus grand que le maximum de cette fonction pour $x = x_1$. En outre, la valeur de la fonction pour $x = b$ est plus grande que la valeur de cette fonction aux points de maximum.

On appelle les maximums et les minimums d'une fonction les *extremums* ou les *valeurs extrémales* de cette fonction.

Les valeurs extrémales d'une fonction et leurs dispositions sur le segment $[a, b]$ caractérisent dans une certaine mesure la variation de la fonction par rapport à la variation de la variable indépendante.

Nous indiquerons, par la suite, une méthode pour trouver les valeurs extrémales.

Théorème 1 (Condition nécessaire pour l'existence d'un, extremum). *Si la fonction dérivable $y = f(x)$ a un maximum ou un minimum au point $x = x_1$, alors sa dérivée s'annule en ce point, c'est-à-dire $f'(x_1) = 0$.*

Démonstration. Supposons, pour fixer les idées, que la fonction $y = f(x)$ ait un maximum au point $x = x_1$. Alors nous aurons pour les Δx ($\Delta x \neq 0$) suffisamment petits en valeur absolue

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1),$$

c'est-à-dire

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0.$$

Mais alors le signe du rapport

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

est déterminé par le signe de Δx

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \text{ pour } \Delta x < 0,$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0 \text{ pour } \Delta x > 0.$$

Il vient de la définition de la dérivée que

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Si la dérivée de $f(x)$ existe au point $x = x_1$, la limite du second membre ne dépend pas de la manière dont Δx tend vers zéro (en restant positif ou négatif).

Mais si $\Delta x \to 0$ en restant négatif, alors

$$f'(x_1) \geq 0.$$

Si $\Delta x \to 0$ en restant positif, alors

$$f'(x_1) \leq 0.$$

Comme $f'(x_1)$ est un nombre bien défini ne dépendant pas de la manière dont Δx tend vers zéro, les deux inégalités précédentes ne sont compatibles que dans le cas où

$$f'(x_1) = 0.$$

On démontrerait d'une manière analogue le théorème pour le cas du minimum.

Le théorème ainsi démontré traduit la propriété géométrique suivante : si la fonction $f(x)$ a une dérivée au point de maximum ou au point de minimum, la tangente à la courbe $y = f(x)$ en ces points est parallèle à l'axe Ox. En effet, il vient de la relation $f'(x_1) = \operatorname{tg} \varphi = 0$, où φ est l'angle formé par la tangente et l'axe Ox, que $\varphi = 0$ (fig. 100).

Il découle immédiatement du théorème 1 *: si la dérivée de la fonction $f(x)$ existe pour toutes les valeurs considérées de la variable indépendante, alors la f onction ne peut avoir un extremum* (*maximum ou minimum*) *que pour les valeurs de x annulant la dérivée.* La réciproque n'est pas vraie *: un point où la dérivée s'annule n'est pas nécessairement un maximum ou un minimum de la fonction*. Par exemple, la dérivée de la fonction représentée sur la figure 100 s'annule au point $x = x_3$ (la tangente est parallèle à l'axe Ox), mais en ce point la fonction n'a ni maximum ni minimum.

De même, la dérivée de la fonction $y = x^3$ (fig. 102) s'annule au point $x = 0$:

$$(y')_{x=0} = (3x^2)_{x=0} = 0$$

mais en ce point la fonction n'a ni maximum ni minimum. En effet, aussi voisin que soit le point x du point 0, nous avons $x_3 < 0$ pour $x < 0$ et $x_3 > 0$ pour $x > 0$.

Nous avons étudié le cas d'une fonction $f(x)$ dérivable en tout point de son domaine de définition. Que peut-on dire au sujet des points où la dérivée n'existe pas?

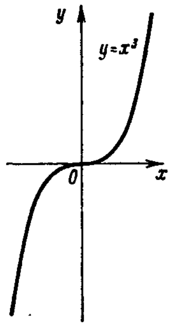


Fig. 102

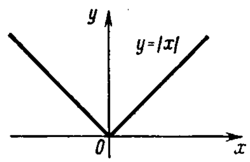


Fig. 103

Nous montrerons sur des exemples qu'en ces points la fonction peut avoir un maximum ou un minimum, mais peut également ne pas avoir de maximum ni de minimum.

E x e m p l e 1 . La fonction $y = |x|$ n'a pas de dérivée au point $x = 0$ (en ce point la courbe n'a pas de tangente définie), mais elle a un minimum en ce point (fig. 103) : $y = 0$ pour $x = 0$ et en tout autre point x différent de zéro $y > 0$.

E x e m p l e 2 . La fonction $y=(1-x^{\frac{2}{3}})$ n'a pas de dérivée au point $x = 0$, puisque $y'=-(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}$ devient infinie quand x tend vers zéro ; toutefois elle admet un maximum en ce point: $f(0) = 1$, $f(x) < 1$ quand x est différent de 0 (fig. 104).

E x e m p l e 3 . La fonction $y=\sqrt[3]{x}$ n'a pas de dérivée au point $x = 0$ ($y' \to \infty$ pour $x \to 0$). En ce point la fonction n'a ni maximum ni minimum $f(0)$ - 0 ; $f(x) < 0$ pour $x < 0$, $f(x) > 0$ pour $x > 0$ (fig. 105).

Ainsi, une fonction ne peut avoir d'extremum que dans deux cas aux points où la dérivée existe et s'annule ou aux points où la dérivée n'existe pas.

Remarquons que si en un point la dérivée n'existe pas (mais existe dans un certain voisinage de ce point), elle a une d i s c o n t i n u i t é en ce point.

Les valeurs de la variable indépendante, pour lesquelles la dérivée s'annule ou a une discontinuité, sont appelées points critiques ou valeurs critiques.

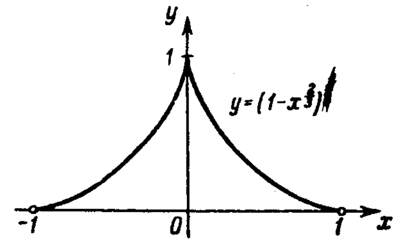


Fig. 104

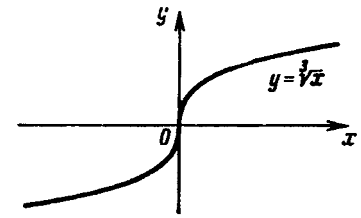


Fig. 105

II découle de ce qui précède que tout point critique n'est pas nécessairement un extremum. Mais si la fonction a un maximum ou un minimum en un certain point, ce dernier est nécessairement un point critique. C'est pourquoi on procède de la manière suivante pour rechercher les extremums. On trouve d'abord tous les points critiques, puis on étudie chaque point critique séparément, afin de déterminer si c'est un maximum, un minimum de la fonction ou si ce n'est ni l'un ni l'autre.

L'étude de la fonction aux points critiques est basée sur les théorèmes suivants.

T h é o r è m e 2 . (C o n d i t i o n s s u f f i s a n t e s p o u r l ' e x i s t e n c e d ' u n e x t r e m u m) . *Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle contenant le point critique x_1 et dérivable en tout point de cet intervalle (sauf peut-être au point x_1). Si la dérivée change de signe du plus au moins quand on passe par le point critique de gauche à droite, la fonction a un maximum pour $x = x_1$. Si la dérivée change de signe du moins au plus quand on passe par le point x_1 de gauche à droite, la fonction a un minimum en ce point.*

Ainsi,

$$\text{si a)} \begin{cases} f'(x) > 0 \text{ pour } x < x_1, \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x > x_1, \end{cases}$$

la fonction admet un *maximum* au point x_1;

$$\text{si b)} \begin{cases} f'(x) < 0 \text{ pour } x < x_1, \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x > x_1, \end{cases}$$

la fonction admet un *minimum* au point x_1. En outre, il faut que les conditions *a*) ou *b*) soient remplies pour toutes les valeurs de x suffisamment proches de x_1, c'est-à-dire pour tous les points d'un voisinage suffisamment petit du point critique x_1.

D é m o n s t r a t i o n . Supposons d'abord que la dérivée change de signe en passant du plus au moins, c'est-à-dire que pour tous les x suffisamment voisins du point x_1, nous avons

$$f'(x) > 0 \text{ pour } x < x_1,$$
$$f'(x) < 0 \text{ pour } x > x_1.$$

En appliquant le théorème de Lagrange à la différence $f(x) - f(x_1)$, on obtient:

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x - x_1),$$

où ξ est un point compris entre x et x_1.

1) Soit $x < x_1$; alors

$$\xi < x_1,\ f'(\xi) > 0, f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

et, par conséquent,

$$f(x) - f(x_1) < 0$$

ou

$$f(x) < f(x_1). \qquad (1)$$

2) Soit $x > x_1$; alors

$$\xi > x_1,\ f'(\xi) < 0,\ f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

et, par conséquent,

$$f(x) - f(x_1) < 0$$

ou

$$f(x) < f(x_1). \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) montrent que pour toutes les valeurs de x suffisamment voisines de x_1 la valeur de la fonction est plus petite que la valeur de la fonction au point x_1. Cela signifie justement que la fonction $f(x)$ admet un maximum au point x_1.
On démontre d'une manière analogue la seconde partie de ce théorème.

La figure 106 illustre clairement la signification géométrique du théorème 2.
Supposons que $f'(x_1) = 0$ pour $x = x_1$et que pour toutes les autres valeurs de x suffisamment voisines de x_1 les inégalités

$$f'(x) > 0 \text{ pour } x < x_1,$$
$$f'(x) < 0 \text{ pour } x > x_1$$

soient satisfaites.

Alors pour $x < x_1$ la tangente à la courbe forme avec l'axe Ox un angle aigu, la fonction est croissante ; pour $x > x_1$ la tangente à la courbe forme avec l'axe Ox un angle obtus, la fonction est décroissante ; au point $x = x_1$ la fonction qui était croissante devient décroissante, autrement dit, elle admet un maximum.
Supposons maintenant que $f(x_2) = 0$ pour $x = x_2$ et que pour toutes les autres. valeurs de x suffisamment voisines de x2 les inégalités

$$f'(x) < 0 \text{ pour } x < x_2,$$
$$f'(x) > 0 \text{ pour } x > x_2$$

sont satisfaites. Alors pour $x < x_1$ la tangente à la courbe forme avec l'axe Ox un angle obtus, la fonction est décroissante ; pour $x > x_2$ la tangente à la courbe forme avec

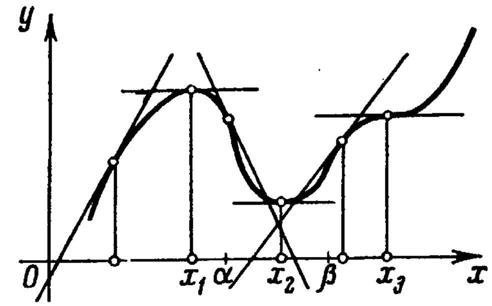


Fig. 106

l'axe Ox un angle aigu, la fonction est croissante. Au point $x = x_2$ la fonction décroissante devient croissante, c'est-à-dire qu'elle a un minimum.
Supposons qu'au point $x = x_3$ $f'(x_3) = 0$ et que pour toutes les valeurs de x suffisamment voisines de x_3, les inégalités soient satisfaites.

$$f'(x) > 0 \text{ pour } x < x_3,$$
$$f'(x) > 0 \text{ pour } x > x_3$$

Alors la fonction est croissante pour $x < x_3$ ainsi que pour $x > x_3$. Par conséquent, elle n'a ni maximum ni minimum au point $x = x_3$. C'est justement ce qui a lieu pour la fonction $y = x^3$ au point $x = 0$.
En effet, la dérivée de cette fonction est égale à $y' = 3x^2$, donc

$$(y')_{x=0} = 0,\ (y')_{x<0} > 0,\ (y')_{x>0} > 0$$

Cela signifie que la fonction n'a ni maximum ni minimum au point $x = 0$ (voir fig. 102).

§ 4. Marche à suivre pour l'étude du maximum et du minimum d'une fonction dérivable à l'aide de la dérivée première

En nous référant au paragraphe précédent, nous pouvons énoncer la règle suivante concernant l'étude du maximum et du minimum d'une fonction dérivable

$$y = f(x)$$

1. On calcule la dérivée première $f'(x)$ de la fonction.

2. On cherche les valeurs critiques de la variable indépendante x; pour cela

a) on cherche les racines réelles de l'équation obtenue en égalant à zéro la dérivée première $f'(x) = 0$;

b) on cherche les valeurs de x pour lesquelles la dérivée $f'(x)$ a des discontinuités.

3. On étudie le signe de la dérivée à gauche et à droite du point critique. Comme le signe de la dérivée ne change pas dans l'intervalle compris entre deux points critiques consécutifs, il suffit, pour étudier, par exemple, le signe de la dérivée à gauche et à droite du point critique x_2 (fig. 106), de déterminer le signe de la dérivée aux points α et β ($x_1 < \alpha < x_2$, $x_2 < \beta < x_3$, où x_1 et x_3 sont les points critiques voisins de x_2).

4. On calcule la valeur de la fonction $f(x)$ pour chaque valeur critique de la variable indépendante.

Nous obtenons ainsi le schéma suivant exprimant les différents cas qui peuvent se présenter.

Signe de la dérivée $f'(x)$ au voisinage du point critique x_1			Nature du point critique
$x < x_1$	$x = x_1$	$x > x_1$	
+	$f'(x_1)$=0 ou discontinuité	-	Maximum
-	$f'(x_1)$=0 ou discontinuité	+	Minimum
+	$f'(x_1)$=0 ou discontinuité	+	Ni maximum ni minimum (la fonction est croissante)
-	$f'(x_1)$=0 ou discontinuité	-	Ni maximum ni minimum (la fonction est décroissante)

E x e m p l e 1 . Trouver les maximums et les minimums de la fonction

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1 .$$

S o l u t i o n . 1) Calculons la dérivée première de cette fonction

$$y' = x^2 - 4x + 3.$$

2) Trouvons les racines réelles de la dérivée

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Par conséquent, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

La dérivée est partout continue; il n'y a donc pas d'autre point critique.

3) Etudions les valeurs critiques et reportons les résultats sur la figure 107.

Etudions le premier point critique $x_1 = 1$. Comme $y' = (x - 1)(x - 3)$, alors

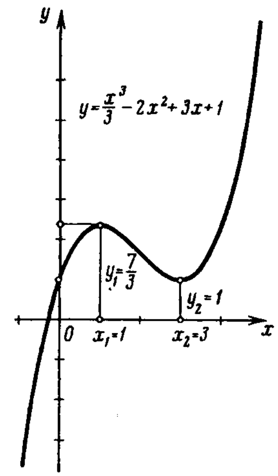


Fig. 107.

pour $x < 1$ nous avons $y' = (-) \cdot (-) > 0$;
pour $x > 1$ nous avons $y' = (+) \cdot (-) < 0$.

Donc au voisinage du point $x_1 = 1$ (quand on passe de gauche à droite) la dérivée change de signe ; elle passe du plus au moins. La fonction admet donc un maximum pour $x = 1$. La valeur de la fonction en ce point est

$$(y)_{x=1} = \frac{7}{3}$$

Etudions le second point critique $x_2 = 3$:
pour $x < 3$, nous avons $y' = (+) \cdot (-) < 0$;
pour $x > 3$, nous avons $y' = (+) \cdot (+) > 0$.

Cela signifie qu'au voisinage du point $x = 3$ la dérivée change de signe ; elle passe du moins au plus. La fonction a donc un minimum pour $x = 3$. La valeur de la fonction en ce point est:

$$(y)_{x=3} = 1$$

Les résultats de notre étude nous permettent de construire le graphique de la fonction (fig. 107).

E x e m p l e 2 . Trouver les maximums et les minimums de la fonction $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$

S o l u t i o n . 1) Calculons la dérivée

$$y' = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

2) Trouvons les valeurs critiques de la variable indépendante : a) trouvons les points où la dérivée s'annule

$$y' = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0, \quad x_1 = \frac{2}{5}$$

b) déterminons les points de discontinuité de la dérivée (dans le cas présent la fonction devient infinie). Le point

$$x_2 = 0$$

est évidemment au nombre de ces derniers. (Notons que la fonction est définie et continue au point $x_2 = 0$).

I1 n'y a pas d'autres points critiques.

3) Déterminons la nature des points critiques trouvés. Etudions le point

$x_1 = \dfrac{2}{5}$. Notons que $(y')_{x<\frac{2}{5}} < 0, \quad (y')_{x<\frac{2}{5}} > 0;$

nous pouvons donc conclure que la fonction admet un minimum au point $x = \dfrac{2}{5}$.

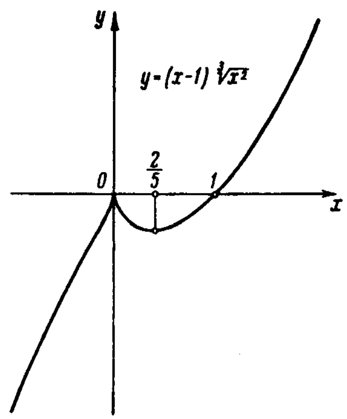
La valeur de la fonction au point de minimum est égale à

$$(y)_{x=\frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{5} - 1\right)\sqrt[3]{\frac{4}{25}} = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}.$$

Etudions le second point critique $x = 0$. Il vient de

$(y)_{x<0} > 0$, $(y')_{x>0} < 0$

que la fonction a un maximum au point $x = 0$. En outre, $(y)_{x=0}$. Le graphique de la fonction considérée est représenté sur la figure 108.



§ 5. Etude du maximum et du minimum des fonctions à l'aide de la dérivée seconde

Soit $y = f(x)$ une fonction dont la dérivée s'annule au point $x = x_1$, c'est-à-dire $f'(x_1) = 0$. Supposons, en outre, que la dérivée seconde $f''(x)$ existe et soit continue dans un voisinage du point x_1. Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant.

T h é o r è m e . *Soit $f'(x_1) = 0$; alors la fonction a un maximum au point $x = x_1$ si $f''(x_1) < 0$ et un minimum si $f''(x_1) > 0$.*

D é m o n s t r a t i o n . Démontrons d'abord la première partie du théorème. Soient

$f'(x_1) = 0$ et $f''(x_1) < 0$

$f''(x)$ étant par hypothèse continue dans un certain voisinage du point $x = x_1$, il existe évidemment un segment suffisamment petit contenant le point x_1 en tout point duquel la dérivée seconde $f''(x)$ est négative.

Mais $f''(x)$ est la dérivée de la dérivée première, $f''(x) = (f'(x))'$, c'est pourquoi il résulte de la condition $(f'(x))' < 0$ que la fonction $f'(x)$ est décroissante sur le segment contenant $x = x_1$ (§ 2, ch. V). Mais $f'(x_1) = 0$, par conséquent, sur ce segment nous avons $f'(x) > 0$ pour $x < x_1$ et $f'(x) < 0$ pour $x > x_1$, c'est-à-dire que la dérivée $f'(x)$ change son signe du plus au moins quand on passe par le point $x = x_1$. Cela signifie justement que la fonction $f(x)$ a un maximum au point x_1. La première partie du théorème est ainsi démontrée.

On démontre d'une manière analogue la seconde partie du théorème : si $f''(x_1) > 0$, alors $f''(x) > 0$ en tous points d'un certain segment contenant le point x_1, donc sur ce segment $f''(x) = (f(x))' > 0$, et, par conséquent, $f'(x)$ est croissante. Comme $f'(x_1) = 0$, cela signifie qu'en passant par le point x_1 la dérivée $f'(x)$ change son signe du moins au plus, en d'autres termes, la fonction $f(x)$ a un minimum au point $x = x_1$.

Si au point critique $f''(x_1) = 0$, la fonction peut soit admettre en ce point un maximum ou un minimum, soit ne pas avoir d'extremum en ce point. En pareil cas, l'étude de la fonction devra être faite suivant la première méthode (voir § 4, ch. V).

L'étude des extremums à l'aide de la dérivée seconde peut être schématisée par le tableau suivant.

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	Nature du point critique
0	-	Maximum
0	+	Maximum
0	0	Non déterminé

E x e m p l e 1 . Déterminer les maximums et les minimums de la fonction

$$y = 2\sin x + \cos 2x.$$

S o l u t i o n . La fonction étant périodique (la période est égale à 2π), il suffit d'étudier le comportement de la fonction sur le segment $(0, 2\pi)$.

1) Calculons la dérivée:

$$y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2(\cos x - 2\sin x\cos x) = 2\cos x\,(1 - 2\sin x).$$

2) Trouvons les valeurs critiques de la variable indépendante

$$2\cos x\,(1 - 2\sin x) = 0,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}; \quad x_2 = \frac{\pi}{2}; \quad x_3 = \frac{5\pi}{6}; \quad x_4 = \frac{3\pi}{2}$$

3) Calculons la dérivée seconde

$$y'' = 2\sin x - 4\cos 2x.$$

4) Déterminons la nature de chaque point critique

$$(y'')_{x_1=\frac{\pi}{6}} = -2\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2} = -3 < 0$$

Par conséquent, nous avons un maximum au point $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$:

$$(y)_{x=\frac{\pi}{6}} = -2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

D'autre part,

$$(y'')_{x=\frac{\pi}{2}} = -2\cdot 1+4\cdot 1=2>0.$$

Par conséquent, la fonction a un minimum au point $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$

$$(y)_{x=\frac{\pi}{2}} = 2\cdot 1-1=1.$$

Au point $x_3 = \dfrac{5\pi}{6}$ nous avons :

$$(y'')_{x=\frac{5\pi}{6}} = -2\cdot\frac{1}{2}-4\cdot\frac{1}{2}=-3<0.$$

Par conséquent, la fonction a un maximum au point $x_3 = \dfrac{5\pi}{6}$

$$(y)_{x_3=\frac{5\pi}{6}} = 2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Enfin

$$(y'')_{x=\frac{3\pi}{2}} = -2(-1)-4(-1)=6>0..$$

Par conséquent, la fonction a un minimum au point $x_4 = \dfrac{3\pi}{2}$:

$$(y)_{x=\frac{3\pi}{2}} = 2\cdot(-1)-1=-3.$$

Le graphique de la fonction considérée est représenté sur la figure 109.
Montrons sur des exemples que si $f'(x_1) = 0$ et $f''(x_1) = 0$, la fonction peut soit avoir au point x_1 un maximum ou un minimum, soit ne pas avoir d'extremum du tout.
E x e m p l e 2 . Déterminer les maximums et les minimums de la fonction

$$y = 1 - x^4.$$

S o l u t i o n . 1) Trouvons les points critiques :

$$y' = -4x^3,\ -4x^3 = 0,\ x = 0.$$

2) Déterminons le signe de la dérivée seconde au point $x = 0$:

$$y'' = -12x^2,\ (y'')_{x=0} = 0.$$

Par conséquent, nous ne pouvons dans ce cas déterminer la nature du point critique considéré à l'aide du signe de la dérivée seconde.

3) Etudions la nature du point critique en employant la première méthode
(voir § 4, ch. V)

$$(y')_{x<0} > 0,\ (y')_{x>0} < 0.$$

La fonction a donc un maximum au point $x = 0$. La valeur de la fonction en ce point est $(y)_{x=0} = 1$.
Le graphique de la fonction considérée est représenté sur la figure 110.

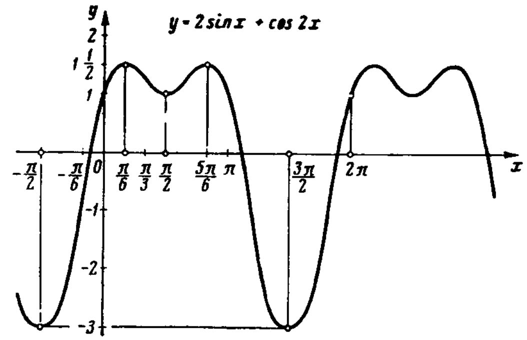


Fig. 109

E x e m p l e 3. Déterminer les maximums et les minimums de la fonction $y = x^6$.
S o l u t i o n . En procédant suivant la seconde méthode, nous trouvons:
1) $y' = 6x^5$, $y' = 6x^5 = 0$, $x = 0$; 2) $y'' = 30x^4$, $(y'')_{x=0} = 0$.
La seconde méthode ne permet donc pas de juger de la nature des points critiques.

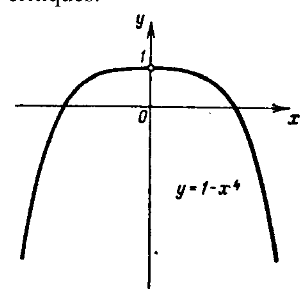


Fig. 110

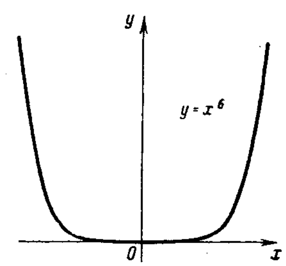


Fig. 111

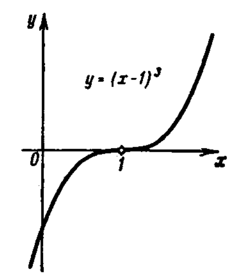


Fig. 112

L'emploi de la première méthode s'impose:
$(y')_{x<0} < 0$, $(y')_{x>0} > 0$. Par conséquent, la fonction a un minimum au point $x = 0$ (fig. 111).
E x e m p l e 4. Trouver les maximums et les minimums de la fonction

$$y = (x - 1)^3.$$

S o l u t i o n . Seconde méthode:

$$y' = 3\,(x-1)^2,\; 3\,(x-1)^2 = 0,\; x = 1;$$

$$y'' = 6\,(x-1),\; (y'')_{x=1} = 0;$$

ainsi, l'emploi de la première méthode s'impose puisque la. seconde méthode est inefficace

$$(y')_{x<1} > 0,\; (y')_{x>1} > 0.$$

Par conséquent, la fonction n'a ni minimum ni maximum au point $x = 1$ (fig. 112).

§ 6. Plus grande et plus petite valeur d'une fonction sur un segment

Soit $y = f(x)$ une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Elle atteint alors sur ce segment sa plus grande valeur (voir § 10,ch. 1I). Supposons que cette fonction a un nombre fini de points critiques sur ce segment. Si la plus grande valeur est atteinte à l'intérieur du segment $[a, b]$, elle s'identifiera évidemment avec l'un des maximums de la fonction (s'il y a plusieurs maximums), plus précisément, avec le plus grand de ces maximums. Mais il se peut également que la plus grande valeur soit atteinte à l'une des extrémités du segment considéré. Ainsi, sur le segment $[a, b]$ la fonction $f(x)$ atteint sa plus grande valeur soit à l'une des extrémités du segment considéré, soit en l'un des points critiques intérieurs qui est justement un maximum.

Ce raisonnement s'applique également à la plus petite valeur d'une fonction définie dans un intervalle donné ; elle est atteinte soit à l'une des extrémités du segment, soit à l'un des points critiques intérieurs qui est un minimum.

Il résulte de ce qui précède la règle suivante pour calculer la plus grande valeur d'une fonction continue sur le segment $[a, b]$ on procède de la manière suivante

1) on recherche tous les maximums de la fonction sur le segment considéré ;

2) on détermine la valeur de la fonction aux extrémités du segment en calculant $f(a)$ et $f(b)$;

3) on choisit la plus grande parmi ces valeurs ;

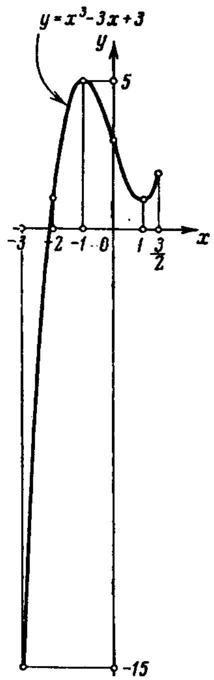


Fig. 113

elle sera justement la plus grande valeur de lafonction sur le segment considéré.

On procédera d'une manière analogue pour déterminer la plus petite valeur d'une fonction sur un segment donné.

E x e m p l e . Déterminer la plus grande et la plus petite valeur de la fonction $y = x^3 - 3x + 3$ sur le segment $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$.

S o l u t i o n . 1) Trouvons les maximums et les minimums de la fonction sur le segment $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$:

$$y' = 3x^2 - 3,\; 3x^2 - 3 = 0,\; \rightarrow = 1,\; x_2 = -1,$$

$$y'' = 6x,\; (y'')_{x=1} = 6 > 0.$$

Par conséquent, la fonction a un minimum au point $x = 1$: $(y)_{x=1} = 1$

D'autre part, $(y'')_{x=-1} = 6 < 0$.

Par conséquent, la fonction a un maximum au point $x = -1$: $(y)_{x=-1} = 5$

2) Calculons la valeur de la fonction aux extrémités de l'intervalle

$$(y)_{x=\frac{3}{2}} = \frac{15}{8},\quad (y)_{x=-3} = -15.$$

La plus grande valeur de la fonction considérée sur le segment $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ est : $(y)_{x=-1} = 5$, sa plus petite valeur est: $(y)_{x=-3} = -15$

Le graphique de la fonction considérée est représenté sur la figure 113.

§ 7. Application de la théorie du maximum et du minimum des fonctions à la résolution de problèmes

La théorie du maximum et du minimum des fonctions permet de résoudre de nombreux problèmes de géométrie, de mécanique, etc. Considérons quelques problèmes de cette nature.

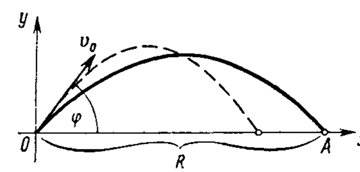


Fig. 114

Problème1. La portée $R = OA$ (fig. (114) d'un projectile lancé (dans le vide) avec une vitesse initiale v_0 sous un angle φ avec l'horizon est donnée par la formule :

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

(g étant l'accélération de la pesanteur). Pour une vitesse initiale donnée v_o déterminer pour quelle valeur de l'angle φ la portée sera la plus grande.

Solution. La grandeur R est une fonction de l'angle φ. Etudions les maximums de cette fonction sur le segment $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g}; \quad \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g} = 0$$

la valeur critique est $y = \frac{\pi}{4}$;

d'autre part,

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2} = -\frac{4v_0^2 \sin 2\varphi}{g}; \quad \left(\frac{d^2R}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = -\frac{4v_0^2}{g} < 0$$

La fonction R présente, par conséquent, un maximum pour la valeur $\varphi=\frac{\pi}{4}$

Les valeurs de la fonction R aux extrémités du segment $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sont

$$(R)_{\varphi=0} = 0, \quad (R)_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = 0$$

Le maximum trouvé est bien la plus grande valeur de R.

Problème 2. Quelles doivent être les dimensions d'un cylindre de volume v pour que sa surface totale S soit minimale ?

Solution. Désignons par r le rayon de la base du cylindre et par h la hauteur, nous avons:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Le volume étant donné, h s'exprime en fonction de r par la formule $v = \pi r^2 h$, d'où

$$h = \frac{v}{\pi r^2}$$

En substituant cette valeur de h dans l'expression de S, nous avons:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{v}{\pi r^2}$$

ou

$$S = 2\left(\pi r^2 + \frac{v}{r}\right)$$

v est ici un nombre donné. Par conséquent, nous avons exprimé S en fonction d'une seule variable indépendante r.

Trouvons la plus petite valeur de cette fonction dans l'intervalle $0 < r < \infty$:

$$\frac{dS}{dr} = 2\left(2\pi r - \frac{v}{r^2}\right), \qquad 2\pi r - \frac{v}{r^2} = 0, r_1 = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}},$$

$$\left(\frac{d^2S}{dr^2}\right)_{r=r_1} = 2\left(2\pi + \frac{2v}{r^3}\right)_{r=r_1} > 0.$$

Par conséquent, la fonction S a un minimum au point $r = r_1$. Remarquons que $\lim_{r\to 0} S = \infty$ et $\lim_{r\to\infty} S = \infty$, c'est-à-dire que la surface totale devient infinie pour $r \to 0$ ou $r \to \infty$. Nous concluons donc que la fonction S atteint sa plus petite valeur au point $r = r_1$.

Mais si $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, alors

$$h = \frac{v}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}} = 2r.$$

Il en résulte que la surface totale d'un cylindre, pour un volume donné, sera minimum si la hauteur du cylindre est égale au diamètre de la base.

§ 8. Etude des maximums et des minimums d'une fonctionà l'aide de la formule de Taylor

Nous avons indiqué au § 5 du chapitre V que si au point $x = a$ $f'(a) = 0$ et $f''(a) = 0$, la fonction peut avoir soit un maximum, soit un minimum en ce point, mais peut également ne pas avoir d'extremum. Dans de pareils cas nous avons recommandé de déterminer les extremums en étudiant le comportement de la dérivée première à gauche et à droite du point critique $x = a$.

Nous allons montrer maintenant comment cette question peut être résolue à l'aide de la formule de Taylor (§ 6, ch. IV).

Supposons que non seulement $f''(x)$, mais aussi les dérivées successives de la fonction $f(x)$, jusqu'à l'ordre n inclusivement, s'annulent au point $x = a$

$$f'(a) = f^{\circ}(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0, \qquad (1)$$

mais que

$$f^{(n+1)}(a) \neq 0$$

Supposons, en outre, que les dérivées de la fonction $f(x)$ d'ordre $n + 1$ inclus sont continues dans le voisinage du point $x = a$.

En tenant compte de (1), la formule de Taylor pour la fonction $f(x)$ prendra la forme :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \qquad (2)$$

où ξ est un nombre compris entre a et x.

Comme $f^{(n+1)}(x)$, est continue dans le voisinage du point a et que $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, il existe un nombre positif h assez petit tel que pour tout x satisfaisant à l'inégalité $| x - a | < h$ on a $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. De plus, si $f^{(n+1)}(a) > 0$, nous aurons $f^{(n+1)}(x) > 0$ en tout point de l'intervalle $(a - h, a + h)$; si $f^{(n+1)}(a) < 0$, nous aurons $f^{(n+1)}(x) < 0$ en tout point de cet intervalle.
Mettons la formule (2) sous la forme

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (2')$$

et considérons différents cas.

P r e m i e r c a s . n est impair.
a) Soit $f^{(n+1)}(a) < 0$. Alors, il existe un intervalle $(a - h, a + h)$ où la dérivée $(n + 1)^{\text{ième}}$ est négative en chaque point. Si x est un point de cet intervalle, ξ est également compris entre $a - h$ et $a + h$ et, par conséquent, $f^{(n+1)}(\xi) < 0$. $n + 1$ étant un nombre pair, $(x - a)^{n+1} > 0$ pour $x \neq a$ et par suite le second membre de la formule (2') est négatif.
Par conséquent, pour $x \neq a$ nous avons en tout point de l'intervalle $(a - h, a + h)$:

$$f(x) - f(a) < 0;$$

ce qui signifie que la fonction a un maximum au point $x = a$.
b) Soit $f^{(n+1)}(a) > 0$. Dans ce cas, pour h suffisamment petit nous avons $f^{(n+1)}(\xi) > 0$ en tout point x de l'intervalle $(a - h, a + h)$. Par conséquent, le second membre de la formule (2') est positif, c'est-à-dire qu'en tout point de l'intervalle considéré, pour $x \neq a$, nous aurons

$$f(x) - f(a) > 0,$$

ce qui signifie que la fonction a un minimum au point $x = a$.

D e u x i è m e c a s . n est pair.
Alors $n + 1$ est impair et la quantité $(x - a)^{n+1}$ a différents signes suivant que $x < a$ ou $x > a$.
Si h est suffisamment petit en valeur absolue, la dérivée $(n + 1)^{\text{ième}}$ conserve en tout point de l'intervalle $(a - h, a + h)$ le même signe qu'au point a. Il en résulte que $f(x) - f(a)$ a différents signes suivant que $x < a$ ou $x > a$. Cela signifie justement que la fonction n'a pas d'extremum au point $x = a$.
Remarquons que si pour n pair $f^{(n+1)}(a) > 0$, alors $f(x) < f(a)$ pour $x < a$ et $f(x) > f(a)$ pour $x > a$.

Si pour n pair $f^{(n+1)}(a) < 0$, alors $f(x) > f(a)$ pour $x < a$, et $f(x) < f(a)$ pour $x > a$.

On peut énoncer les résultats obtenus de la manière suivante.
Si l'on a pour $x = a$:

$$f(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$$

et si la première dérivée $f^{(n+1)}(a)$ qui ne s'annule pas au point a est d'ordre p a i r ,

alors $f(x)$ a un maximum au point a si $f^{(n+1)}(a) < 0$;
$f(x)$ a un minimum au point a si $f^{(n+1)}(a) > 0$.

Si la première dérivée qui ne s'annule pas au point a est d'ordre i m p a i r , la fonction n'a pas d'extremum en ce point. En outre,

$f(x)$ est croissante si $f^{(n+1)}(a) > 0$;
$f(x)$ est décroissante si $f^{(n+1)}(a) < 0$.

E x e m p l e. Trouver les maximums et les minimums de la fonction

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1. \qquad -$$

S o l u t i o n . Cherchons les valeurs critiques de la fonction

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1).$$

Nous trouvons de l'équation

$$4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

que l'unique point critique est $x = 1$ (car cette équation n'a qu'une seule racine réelle).
Déterminons la nature du point critique $x = 1$

$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12 = 0$ pour $x = 1$,
$f'''(x) = 24x - 24 = 0$ pour $x = 1$,
$f^{VI}(x) = 24 > 0$ quel que soit x.

Par conséquent, la fonction $f(x)$ a un minimum au point $x = 1$.

§ 9. Convexité et concavité des courbes. Points d'inflexion

Considérons dans le plan une courbe $y = f(x)$ dont le graphique est celui d'une fonction univoque dérivable.

D é f i n i t i o n 1. On dit que la courbe a sa *convexité tournée* vers les y positifs dans l'intervalle (a, b) si tous les points de la courbe se trouvent au-dessous de la tangente en l'un quelconque des points de cette courbe dans cet intervalle.

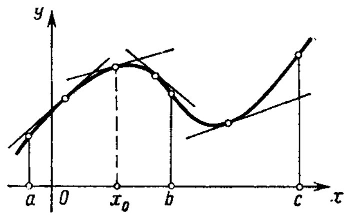
On dit que la courbe a sa convexité tournée *vers les y négatifs* dans l'intervalle (b, c) si tous les points de cette courbe se trouvent audessus de la tangente en l'un quelconque des points de cette courbe dans cet intervalle.

On dit qu'une courbe, dont la convexité est *tournée vers les y positifs*, est une courbe convexe; de même on dit qu'une courbe, dont la *convexité* est tournée vers les y négatifs, est une courbe *concave*.

On donne sur la figure 115 une courbe qui est convexe dans l'intervalle (a, b) et concave dans l'intervalle (b, c).

L'orientation de la convexité est une caractéristique importante de la forme de la courbe. Dans ce paragraphe nous déterminerons les critères permettant de définir l'orientation de la convexité de la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$ dans divers intervalles.

Démontrons lë théorème suivant.



T h é o r è m e 1. *Si la dérivée seconde de la fonction f* (x) *est négative en tout point de l'intervalle* (a, b) *c'est-à-dire si* $f''(x) < 0$, *la courbe* $y = f(x)$ *a alors sa convexité tournée vers les y positifs (la courbe est convexe) dans cet intervalle.*

D é m o n s t r a t i o n . Choisissons un point arbitraire $x = x_o$ dans l'intervalle (a, b) (fig. 115) et menons la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = x_o$. Le théorème sera démontré si nous prouvons que tous les points de la courbe dans cet intervalle sont disposes au-dessous de la tangente ou, en d'autres termes, si l'ordonnée d'un point arbitraire de la courbe $y = f(x)$ est plus petite que l'ordonnée y de la tangente pour une même valeur de x. L'équation de la courbe est $y = f(x)$.

L'équation de la tangente à la courbe au point $x = x_o$ est :

$$\overline{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ou

$$\overline{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Il résulte des equations (1) et. (2) que la différence des ordonnées de la courbe et de la tangente correspondant à une même valeur de x est égale à

$$y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Appliquons le théorème de Lagrange à la différence $f(x) - f(x_o)$:

$$y - \overline{y} = f'(c)\cdot(x - x_0) - f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

(où c est compris entre, x_o et x) ; alors

$$y - \overline{y} = \left[f'(c) - f'(x_0)\right](x - x_0)\,.$$

Appliquons de nouveau le théorème de Lagrange à l'expression entre crochets; alors

$$y - \overline{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0) \qquad (3)$$

(où ci est compris entre x_o et c).

Considérons d'abord le cas $x > x_o$. Dans ce cas $x_o < c_1 < c < x$; étant donné que

$$x - x_o > 0, \quad c - x_o > 0$$

et que, par hypothèse,

$$f''(c_1) < o,$$

il vient de l'égalité (3) que $y - \overline{y} < 0$.

Considérons maintenant le cas $x < x_o$. Dans ce cas $x < c < c_1 < x_o$ et $x - x_o < 0$, $c - x_o < 0$; mais comme par hypothèse $f''(c_1) < 0$, il vient de l'égalité (3) que

$$y - \overline{y} < 0.$$

Nous avons ainsi démontré que chaque point de la courbe se trouve audessous de la tangente à la courbe en ce point quelles que soient

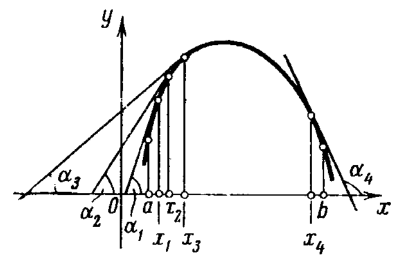


Fig. 116

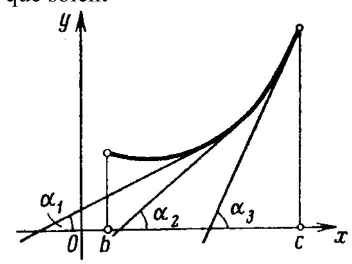


Fig. 117

les valeurs de x et de x_o dans l'intervalle (a, b). Cela signifie justement que la courbe est convexe. Le théorème est démontré.

On démontre d'une façon analogue le théorème suivant.

T h é o r è m e 1'. *Si la dérivée seconde de la fonction f* (x) *est positive en chaque point de l'intervalle* (b, c), *c'est-à-dire si* $f''(x) > 0$, *la courbe* $y = f(x)$ *a alors sa convexité tournée vers les y négatifs dans cet intervalle* (*la courbe est concave*).

R e m a r q u e . Les théorèmes 1 et l' peuvent être interprétés géométriquement de la manière suivante. Considérons une courbe $y = f(x)$ dont la convexité est tournée vers les y positifs dans l'intervalle (a, b) (fig. ll6). La dérivée $f'(x)$ est égale à la tangente de l'angle α formé par la tangente à la courbe au point d'abscisse x et l'axe Ox; en d'autres termes, $f'(x) = \text{tg}\,\alpha$. C'est pourquoi $f''(x) = [\text{tg}\,\alpha]'_x$. Si $f''(x) < 0$ pour tout x de l'intervalle (a, b), alors tg α décroît pour x croissant. I1 est géométriquement évident que si tg α décroît pour x croissant, la

courbe correspondante est convexe. Le théorème 1 donne la démonstration analytique de cette propriété géométrique.
Le théorème 1' est susceptible d'avoir une interprétation géométrique analogue (fig. 117).

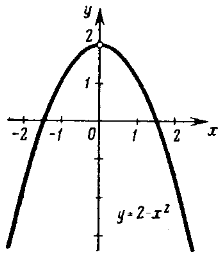


Fig. 118

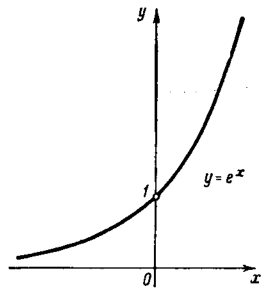


Fig. 119

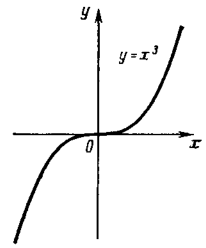


Fig. 120

E x e m p l e 1 Déterminer les intervalles de convexité et de concavité de la courbe

$$y = 2 - x^2$$

S o l u t i o n . La d érivée seconde

$$y'' = -2 < 0$$

Pour toutes les valeurs de x. Par conséquent, la convexité de la courbe est partout orientée vers le haut (la courbe est convexe) (fig 118).

E x e m p l e 2 . Soit $y=e^x$
Comme

$$y''= e^x > 0$$

Pour toutes les valeurs de x, la courbe est concave, c'est-à-dire que sa convexité est orientée vers le bas (fig. 119).

E x e m p l e 3 . Soit la courbe définie par l'équation

$$y = x^3$$

Comme

$$y'' = 6x$$

$y''<0$ pour x<0 et $y''>0$ pour $x > 0$. Par conséquent, la courbe a sa convexité orientée vers le haut pour $x < 0$ et vers le bas pour $x > 0$ (fig. 120).

D é f i n i t i o n 2. On appelle *point d'inflexion* le point qui sépare la partie convexe d'une courbe continue de sa partie concave. Les points O, A, et B des figures 120, 121 et 122 sont des points d'inflexion.

Il est évident qu'en un point d'inflexion la tangente t r a v e r s e la courbe, puisque d'un côté de ce point la courbe est disposée a u - d e s s o u s de la tangente et de l'autre côté a u - d e s s u s .
Établissons mainteneant les conditions suffisante pour qu'un point de la courbe soit un point d'inflexion.

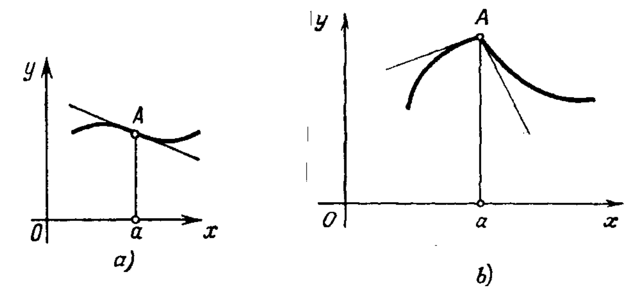


Fig.121

T h é o r è m e 2. *Soit $y=f(x)$ l'équation de la courbe. Si $f''(a) = 0$ ou si $f''(a)$ n'existe pas et que la dérivée seconde $f''(x)$ change de signe en passant par la valeur $x = a$, le point de la courbe d'abscisse $x = a$ est un point d'inflexion.*
D é m o n s t r a t i o n .
1) Soit $f''(x) < 0$ pour $x < a$ et $f''(x) > 0$ pour $x > a$.
Alors, la convexité de la courbe est tournée vers les y positifs pour $x < a$ et vers les y négatifs pour $x > a$. Par conséquent, le point A de la courbe d'abscisse $x = a$ est un point d'inflexion (fig. 121).
2) Si f'' $(x) > 0$ pour $x < b$ et f'' $(x) < 0$ pour x > b, la courbe a sa convexité tournée vers les y négatifs pour $x < b$ et vers les y positifs pour $x > b$. Par conséquent, le point B de la courbe d'abscisse $x = b$ est un point d'inflexion (voir fig. 122).

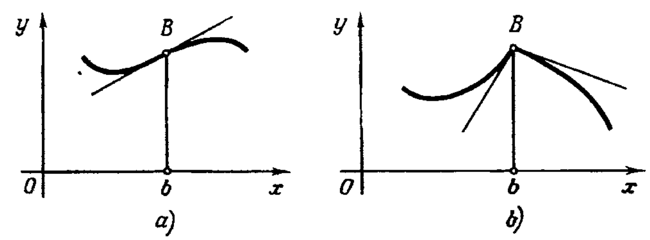


Fig. 122

E x e m p l e 4. Trouver les points d'inflexion et déterminer les intervalles de convexité et de concavité de la courbe $y = e^{-x^2}$ (courbe de Gauss).
S o l u t i o n . 1) Calculons les dérivées première et seconde:

$$y' = -2xe^{-x^2},\ y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

2) Les dérivées première et seconde existent partout. Trouvons les valeurs de x pour lesquelles $y'' = 0$:

$$2e^{-x^2}(2x^2-1)=0$$

$$x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

3) Etudions les valeurs obtenues

$$\text{pour } x<-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \text{on a } y''>0,$$

$$\text{pour } x>-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \text{on a } y''<0\ ;$$

la dérivée seconde change de signe au voisinage du point x_1. Par conséquent, le point de la courbe d'abscisse $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ est un point d'inflexion. Les coordonnées de ce point sont : $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$. Pour $x<\frac{1}{\sqrt{2}}$, on a $y''<0$,

$$\text{pour } x>\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \text{on a } y''>0\ ;$$

Par conséquent, pour $x_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$. la courbe a également un point d'inflexion.

2 t Les coordonnées de ce point sont : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$. D'autre part, l'existence de ce second point d'inflexion découle immédiatement de la symétrie de la courbe par rapport à l'axe Oy.

4) Il résulte de ce qui précède que la courbe est concave pour $-\infty<x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ la courbe est convexe pour $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$, la courbe est concave pour $\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\infty$.

5) Il vient de l'expression de la dérivée première $y'=2xe^{-x^2}$ que pour $x<0$ on a $y'>0$, donc la fonction est croissante ; pour $x>0$ on a $y'<0$, donc la fonction est décroissante ; pour $x=0$ on a $y'=0$.

La fonction a un maximum en ce point, à savoir $y = 1$. Il est maintenant facile grâce aux résultats obtenus de tracer le graphique de cette fonction (fig. 123).

E x e m p l e 5. Trouver les points d'inflexion de la courbe $y=x^4$.

S o l u t i o n . 1) Calculons la dérivée seconde: $y''=12x^2$.

2) Déterminons les racines de l'équation $y''=0$:

$$12x^2=0,\ x=0.$$

3) Etudions la valeur obtenue $x = 0$ pour $x < 0$, on a $y'' > 0$, la courbe est concave;

pour $x > 0$, on a $y'' > 0$, la courbe est concave.

Par conséquent, la courbe n'a pas de point d'inflexion (fig. 124).

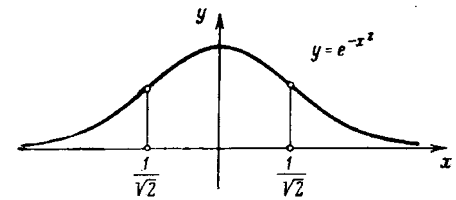


Fig. 123

E x e m p l e 6. Trouver les points d'inflexion de la courbe $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$.

S o l u t i o n . 1) Calculons les dérivées première et seconde

$$y'=\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}},\qquad y''=-\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}}$$

2) La dérivée seconde ne s'annule en aucun point, mais elle n'existe pas pour $x = 1$ ($y''=\pm\infty$).

3) Etudions la valeur $x = 1$

pour $x < 1$ on a $y'' > 0$, la courbe est concave ; pour $x > 1$ on a $y'' < 0$, la courbe est convexe. La courbe a donc un point d'inflexion pour $x = 1$. C'est le point (1 ; 0).

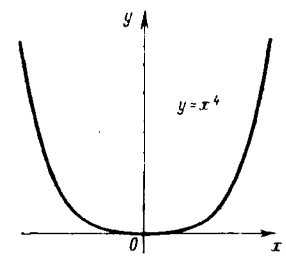


Fig. 124

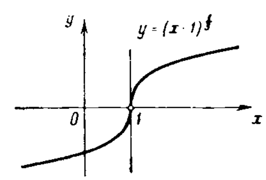


Fig. 125

Notons que $y'=\infty$ pour $x = 1$, c'est-à-dire que la tangente à la courbe en ce point est parallèle à l'axe Oy (fig. 125).

§ 10. Asymptotes

Il arrive fréquemment que l'on doit étudier la forme de la courbe $y = f(x)$ et, par conséquent, le comportement de la fonction lorsque les coordonnées ou l'une des coordonnées d'un point variable de la courbe t e n d e n t v e r s l ' i n f i n i (en valeur absolue). Au cours d'une telle étude, un cas particulier retient surtout l'attention.

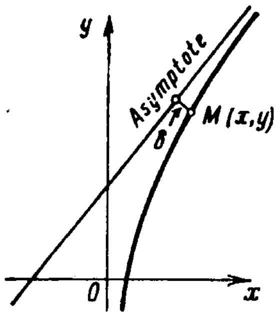


Fig. 126

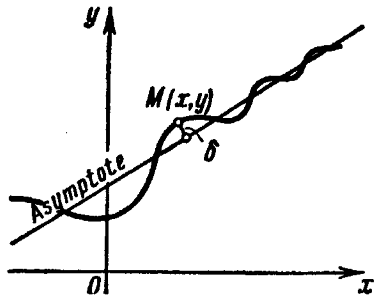


Fig. 127

C'est celui où la courbe considérée se rapproche indéfiniment d'une certaine droite lorsqu'un point variable pris sur cette courbe tend vers l'infini [*]).

D é f i n i t i o n . La droite *A* est appelée *asymptote* d'une courbe si la distance δ d'un point variable *M* de la courbe à cette droite tend vers zéro lorsque le point *M* tend vers l'infini (fig. 126 et 127).

Par la suite, nous distinguerons les asymptotes *parallèles* (c'est-àdire parallèles à l'axe des ordonnées) et *obliques* (c'est-à-dire non parallèles à l'axe des ordonnées).

I. A s y m p t o t e s p a r a l l è l e s à l ' a x e Oy

Il vient de la définition de l'asymptote que si $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, alors la droite $x = a$ est une asymptote de la courbe $y = f(x)$. Inversement, si la droite $x = a$ est une asymptote de cette courbe, alors l'une des égalités précédentes a lieu.

Par conséquent, pour déterminer les asymptotes parallèles à l'axe *Oy*, il faut trouver les valeurs $x = a$ pour lesquelles la fonction $y = f(x)$ tend vers l'infini lorsque $x \to a$. Si une telle valeur de *x* existe, la droite $x = a$ sera une asymptote de la courbe parallèle à l'axe *Oy*.

---

[*] On dit que le point variable *M* pris sur la courbe tend vers i'infini si la distance de ce point à l'origine des coordonnées augmente indéfiniment.

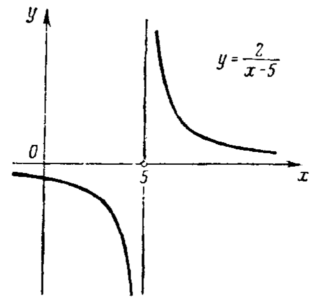


Fig. 128

E x e m p l e 1. La courbe $y = \dfrac{2}{x-5}$ a une asymptote parallèle à l'axe *Oy*, c'est la droite $x = 5$, puisque $y \to \infty$ pour $x \to 5$ (fig. 128).

E x e m p l e 2. La courbe $y = \operatorname{tg} x$ a une infinité d'asymptotes parallèles à l'axe *Oy*. Ce sont les droites $x = \pm\dfrac{\pi}{2},\ x = \pm\dfrac{3\pi}{2},\ x = \pm\dfrac{5\pi}{2},\dots$

Cela résulte de ce que $\operatorname{tg} x \to \infty$ quand *x* tend vers l'une des valeurs $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2},\dots$ ou $-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{5\pi}{2},\dots$ (fig. 129).

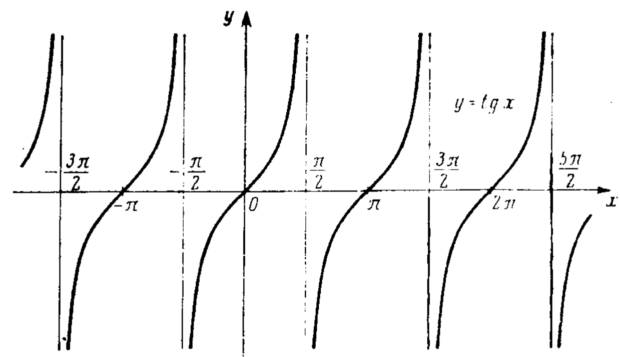


Fig. 129

E x e m p l e 3. La droite $x = 0$ est une asymptote parallèle à l'axe *Oy* pour la courbe $y = e^{\frac{1}{x}}$ puisque $\lim\limits_{x\to+0} y = e^{\frac{1}{x}} = \infty$ (fig. 130).

II. L e s a s y m p t o t e s o b l i q u e s

Supposons que la courbe $y = f(x)$ a une asymptote oblique dont l'équation est

$$y = kx + b. \qquad (1)$$

Déterminons les nombres *k* et *b* (fig. 131). Soit $M(x, y)$ un point de la courbe et $N(x, \bar{y})$ un point de l'asymptote.

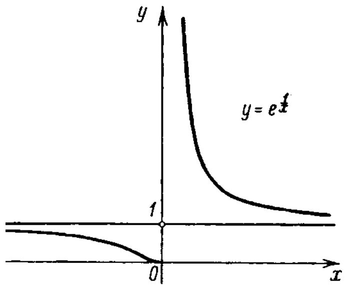


Fig. 130

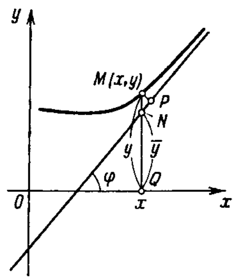


Fig. 131

La longueur du segment MP est égale à la distance du point M à l'asymptote. Par hypothèse

$$\lim_{x\to+\infty} MP = 0 . \qquad (2)$$

Désignons par φ l'angle formé par l'asymptote et l'axe Ox. Il vient du triangle NMP que

$$NM = \frac{MP}{\cos\varphi} .$$

φ étant un angle constant (différent de $\frac{\pi}{2}$) , il vient de l'égalité précédente que

$$\lim_{x\to+\infty} NM = 0 , \qquad (2\ )$$

et inversement, de l'égalité (2') découle l'égalité (2). Mais

$$NM = |\,QM - QN\,| = |\,y - \bar{y}\,| = |\,f(x) - (kx + b\,)|,$$

et l'égalité (2') devient

$$\lim_{x\to+\infty} NM = [f(x) - kx - b] = 0$$

Ainsi, si la droite (1) est une asymptote, l'égalité (3) a lieu, et réciproquement, si les constantes k et b vérifient l'égalité (3), la droite $y = kx + b$ est une asymptote. Déterminons maintenant k et b. Mettons x en facteur dans l'égalité (3), nous avons

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$

Comme $x \to +\infty$, nous devons avoir

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$

Mais comme b est constant, $\lim_{x\to+\infty} \frac{b}{x} = 0$. Par conséquent,

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k\right] = 0$$

ou

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \qquad (4)$$

Connaissant k, nous trouvons b de l'égalité (3)

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] \qquad (5)$$

Ainsi, si la droite $y = kx + b$ est une asymptote, on trouve les coefficients k et b à l'aide des formules (4) et (5). Inversement, si les limites (4) et (5) existent, l'égalité (3) a lieu et la droite $y = kx + b$ est une asymptote. Si l'une des deux limites (4) et (5) n'existe pas la courbe n'a pas d'asymptote.
Remarquons que nous avons étudié cette question en nous référant à la figure 131 pour $x \to +\infty$, mais tous nos raisonnement sont également valables pour le cas où $x \to -\infty$.

E x e m p l e 4. Trouver les asymptotes de la courbe $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$

S o l u t i o n . 1) Cherchons les asymptotes parallèles à l'axe Oy quand $x \to -0$, $y \to \infty$; quand $x \to +0$, $y \to -\infty$. La droite $x = 0$ est, par conséquent, une asymptote parallèle à l'axe Oy.
2) Cherchons les asymptotes obliques

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right] = 1$$

c'est-à-dire

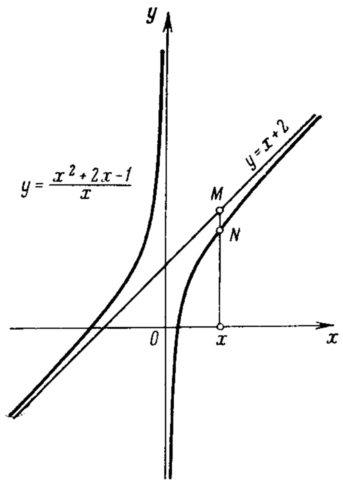
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [y - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[2 - \frac{1}{x}\right] = 2$$

ainsi

$b = 2.$

Par conséquent, la droite $y = x + 2$ est une asymptote oblique de la courbe considérée.
Pour étudier la position de la courbe par rapport à son asymptote, considérons la différence des ordonnées de la courbe et de l'asymptote correspondant à une même valeur de x : $\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - (x + 2) = -\frac{1}{x}$.

Pour $x > 0$ cette différence est négative, et pour $x < 0$ positive ; par conséquent,
pour $x > 0$ la courbe est disposée au-dessous et pour $x < 0$ au-dessus de son asymptote (fig. 132).



E x e m p l e 5. Trouver les asymptotes de la courbe : $y = e^{-x}\sin x + x$.

S o l u t i o n . 1) Il est évident qu'il n'y a pas d'asymptote parallèle à l'axe Oy.

2) Cherchons les asymptotes obliques

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{-x}\sin x + x}{x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{e^{-x}\sin x}{x} + 1\right] = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[e^{-x}\sin x + x - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x}\sin x = 0.$$

Par conséquent, la droite $y = x$ est une asymptote oblique pour $x \to +$ oo. La courbe considérée n'a pas d'asymptote pour $x \to -\infty$.

En effet, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}$

n'existe pas, puisque $\frac{y}{x} = \frac{e^{-x}}{x}\sin x + 1$ (le premier terme croit indéfiniment

lorsque $x \to -\infty$ et, par conséquent, la limite n'existe pas).

§ 11. Schéma général de l'étude des fonctions et de la construction des graphiques

L'étude des fonctions se ramène généralement à déterminer

1) le domaine naturel de définition de la fonction ;
2) les points de discontinuité de la fonction ;
3) les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction ;
4) les points de maximum et de minimum, ainsi que les valeurs maximales et minimales de la fonction ;
5) les domaines de convexité et de concavité du graphique, les points d'inflexion;
6) les asymptotes du graphique de la fonction.

Cette étude permet de tracer le graphique de la fonction (il est parfois préférable d'esquisser les éléments du graphique parallèlement au développement de l'étude).

R e m a r q u e 1. Si la fonction considérée $y = f(x)$ est paire, c'est-à-dire que la valeur de la fonction ne change pas quand la variable indépendante change de signe, en d'autres termes, si

$$f(-x) = f(x)\ ,$$

il suffit d'étudier la fonction et de construire son graphique uniquement pour les valeurs positives de la variable indépendante appartenant au domaine de définition. En ce qui concerne la partie du graphique correspondant aux valeurs négatives de la variable indépendante, il suffit de noter que le graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

E x e m p l e 1. La fonction $y = x^2$ est paire, puisque $(-x)^2 = (x^2)$ (voir fig. 5).

E x e m p l e 2. La fonction $y = \cos x$ est paire, puisque $\cos(-x) = \cos x$ (voir fig. 16).

R e m a r q u e 2. Si la fonction $y = f(x)$ est impaire, c'est-à-dire qu'elle change son signe quand la variable indépendante change de signe, en d'autres termes, si

$$f(-x) = -f(x),$$

il suffit d'étudier les valeurs positives de la variable indépendante. Le graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine des coordonnées.

E x e m p l e 3. La fonction $y = x^3$ est impaire, puisque $(-x)^3 = -x^3$ (voir fig. 7).

E x e m p l e 4. La fonction $y = \sin x$ est impaire, puisque $\sin(-x) = -\sin x$ (voir fig. 15).

R e m a r q u e 3. Il est parfois préférable d'intervertir l'ordre des opérations à effectuer quand on entreprend l'étude d'une fonction concrète, car certaines propriétés de la fonction permettent parfois d'en déduire d'autres. Par exemple, si nous avons déjà établi que la fonction considérée est continue et dérivable, et si nous avons déterminé les points de maximum et de minimum, par cela même nous avons déterminé les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.

E x e m p l e 5. Etudier la fonction

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

et construire son graphique.

S o l u t i o n . 1) Le domaine de définition de la fonction est l'intervalle $-\infty < x < +\infty$. Notons immédiatement que $y < 0$ pour $x < 0$ et que $y > 0$ pour $x > 0$.

2) La fonction est partout continue.

3) Cherchons les maximums et les minimums de cette fonction. En partant de l'égalité

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

nous trouvons les points critiques $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Etudions la nature des points critiques $y' < 0$ pour $x < -1$, $y' > 0$ pour $x > -1$.

La fonction a donc un minimum au point $x = -1$:

$$y_{\min} = (y)_{x=-1} = 0{,}5.$$

D'autre part. $y' > 0$ pour $x < 1$, $y' < 0$ pour $x > 1$. Par conséquent, la fonction admet un maximum au point $x = 1$

$$y_{\max} = (y)_{x=1} = 0{,}5.$$

4) Déterminons les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $y' < 0$ pour $-\infty < x < -1$, la fonction est décroissante ; $y' > 0$ pour $-1 < x < 1$, la fonction est croissante ; $y' < 0$ pour $1 < x < +\infty$, la fonction est décroissante.

5) Déterminons les intervalles de convexité, de concavité et les points d'inflexion de la courbe. Il vient de l'égalité

$$y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0 \text{ que } x_1 = -\sqrt{3},\quad x_2 = 0,\quad x_3\sqrt{3}$$

Etudions y'' en fonction de x

pour $-\infty < x < -\sqrt{3}$ on a $y'' < 0$, la courbe est convexe ;

pour $-\sqrt{3} < x < 0$ on a $y'' > 0$, la courbe est concave ;

pour $0 < x < \sqrt{3}$ on a $y'' < 0$, la courbe est convexe ;

pour $\sqrt{3} < x < +\infty$ on a $y'' > 0$, la courbe est concave.

Par conséquent, le point de coordonnées $x = -\sqrt{3}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ est un point d'inflexion. On voit de même que les points (0, 0) et ($\sqrt{3}$, $-\frac{\sqrt{3}}{4}$) sont aussi des points d'inflexion.

7) Déterminons les asymptotes de la courbe :

pour $x \to +\infty$, $y \to 0$; pour $x \to -\infty$, $y \to 0$.

Par conséquent, la droite $y = 0$ est l'unique asymptote oblique.

La courbe n'a pas d'asymptotes parallèles à l'axe Oy, car pour aucune valeurfinie de x la valeur correspondante de la fonction ne tend pas vers l'infini. Le graphique de la courbe étudiée est représenté sur la figure 133.

E x e m p l e 6. Etudier la fonction $y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$ et construire son graphique ($a > 0$).

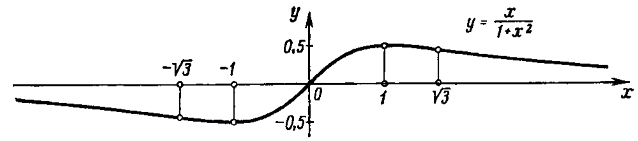


Fig. 133

S o l u t i o n . 1) La fonction est définie pour toutes les valeurs de x.

2) La fonction est partout continue.

3) Cherchons les maximums et les minimums de cette fonction:

$$y' = \frac{4ax - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2}} = \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x(2ax - x)^2}}$$

La dérivée existe partout, sauf aux points $x_1 = 0$ et $x_2 = 2a$.

Etudions les valeurs limites de is dérivée quand $x \to -0$ et $x \to +0$

$$\lim_{x\to -0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x(2ax - x)^2}} = -\infty,\ \lim_{x\to +0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x(2ax - x)^2}} = +\infty$$

Pour $x < 0$ on a $y' < 0$; pour $x > 0$ on a $y' > 0$.

Par conséquent, la fonction a un minimum au point $x = 0$. La valeur de 1a fonction en ce point est égale à zéro.

Etudions maintenant le comportement de la fonction dans le voisinage du second point critique $x_2 = 2a$. Quand $x \to 2a$, la dérivée tend aussi vers l'infin Toutefois, dans ce cas, la dérivée est négative pour toutes les valeurs de x suffisamment voisines de $2a$ (aussi bien pour les valeurs de x situées à gauche qu'à droite du point $2a$). La fonction n'a donc pas d'extremum en ce point. Dans voisinage du point $x_2 = 2a$, ainsi qu'en ce point, la fonction est décroissante la tangente à la courbe en ce point est parallèle à l'axe Oy.

La dérivée s'annule pour $x = \frac{4a}{3}$. Etudions ce point critique. Il vient de l'expression de la dérivée première que pour $x < \frac{4a}{3}$ on a $y' > 0$, pour $x > \frac{4a}{3}$ on a $y' < 0$.

Par conséquent, la fonction admet un maximum au point $x = \frac{4a}{3}$.

$$y_{\max} = \frac{2}{3}a\sqrt[3]{4}.$$

4) En utilisant les résultats de l'étude effectuée nous en déduisons les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction :

la fonction est décroissante pour $-\infty < x < 0$; la fonction est croissante pour $0 < x < \frac{4a}{3}$; la fonction est décroissante pour $\frac{4a}{3} < x < +\infty$.

5) Déterminons les intervalles de convexité et de concavité de la courbe ainsi que les points d'inflexion: la dérivée seconde

$$y'' = -\frac{8a^2}{9x^{4/3}(2a-x)^{5/3}}$$

ne s'annule en aucun point; cependant, elle a deux points de discontinuité : ce sont les points $x_1 = 0$ et $x_2 = 2a$.

Etudions le signe de la dérivée seconde dans le voisinage de chacun de ces points:

pour $x < 0$, on a $y'' < 0$, la convexité de la courbe est donc orientée vers le haut ;

pour $x > 0$, on a $y'' < 0$, la convexité de la courbe est encore orientée vers le haut.

Le point d'abscisse $x=- 0$ n'est donc pas un point d'inflexion.

Pour $x < 2a$ on a $y'' < 0$, la convexité de la courbe est donc orientée vers le haut ; pour $x > 2a$ on a $y'' > 0$, la convexité de la courbe est orientée vers le bas. Le point $(2a, 0)$ est donc un point d'inflexion.

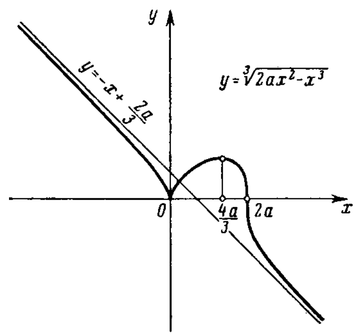


Fig. 134

6) Déterminons les asymptotes de la courbe :

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{2ax^2-x^3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{2a}{x}-1} = -1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt[3]{2ax^2-x^3}+x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2ax^2-x^3+x^3}{\sqrt[3]{(2ax^2-x^3)^2}-x\sqrt[3]{2ax^2-x^3}+x^2} = \frac{2a}{3}.$$

La droite

$$y = -x + \frac{2a}{3}$$

est donc une asymptote oblique de la courbe $y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$. Le grapliique de la courbe étudiée est représenté sur la figure 134.

§ 12. Etude des courbes données sous forme paramétrique

Soient

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\}$$

les équations paramétriques d'une courbe.

Dans ce cas l'étude et le tracé de cette courbe se font de la même manière que pour une courbe donnée par l'équation

$$y = f(x).$$

Calculons les dérivées

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi'(t), \\ \frac{dy}{dt} &= \psi'(t) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Calculons la dérivée

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad (3)$$

pour les points de la courbe au voisinage desquels le graphique de cette dernière a pour équation $y = f(x)$, où $f(x)$ est une certaine fonction.

Trouvons les valeurs du paramètre $t = t_1, t_2, \ldots, t_k$ pour lesquelles l'une au moins des dérivées $\varphi'(t)$ et $\psi'(t)$ s'annule ou a un point de discontinuité. (De telles valeurs de t seront dites valeurs critiques.) En vertu de la formule (3), on définit dans chaque intervalle $(t_1, t_2), (t_2, t_3), \ldots, (t_{k-1}, t_k)$ et, par conséquent, dans chaque intervalle $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{k-1}, x_k)$ (où $x_i = \varphi(t_i)$) le signe de $\frac{dy}{dx}$ et par cela même on détermine les intervalles de croissance et de décroissance. Cela permet de déterminer la nature des points correspondant aux valeurs $t_1, t_2, \ldots, t_k$ du paramètre. Calculons maintenant

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \qquad (4)$$

Cette formule nous permet de définir l'orientation de la convexité en chaque point de la courbe.

Pour trouver les asymptotes, on cherche les valeurs de t telles que dans leurs voisinages soit x, soit y tend vers l'infini, et les valeurs de t telles que dans leurs voisinages x et y tendent simultanément vers l'infini. L'étude de la courbe se poursuit de la manière habituelle.

Montrons sur des exemples certaines particularités de l'étude des courbes données sous forme paramétrique.

E x e m p l e 1. Etudier la courbe donnée par les équations

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right\} \quad (a > 0)$$

S o l u t i o n . Les grandeurs x et y sont définies pour toutes les valeurs de t. Mais, compte tenu de la périodicité des fonctions $\cos^3 t$ et $\sin^3 t$ (leur période est égale à 2π), il suffit de considérer la variation du paramètre t entre 0 et 2π; x varie alors sur le segment $[-a, a]$; le domaine de définition de la fonction y est le segment $[-a, a]$. La courbe considérée n'a donc pas d'asymptote. Nous trouvons ensuite:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t \end{array}\right\} \quad (2')$$

Ces dérivées s'annulent pour $t = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi$. Déterminons :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\operatorname{tg} t . \qquad (3')$$

En utilisant les formules (2'), (3'), formons le tableau suivant :

Domaine de variation de t	Domaine de variation correspondant de x	domaine de variation correspondant de y	Signe de $\frac{dy}{dx}$	Caractère de la variation de y en fonction de x
$0 < t < \frac{\pi}{2}$	$a > y > 0$	$0 < y < a$	-	décroît
$\frac{\pi}{2} < t < \pi$	$0 > x > -a$	$a > y > 0$	+	croît
$\pi < t < \frac{3\pi}{2}$	$-a < x < 0$	$0 > y > -a$	-	décroît
$\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$	$0 < x < a$	$-a < y < 0$	+	croît

Ce tableau nous montre que la relation (1') définit deux fonctions continues de la forme $y = f(x)$ telles que pour $0 \le t < \pi$ on a $y \ge 0$ (voir les deux premières lignes du tableau) et pour $\pi \le t \le 2\pi$ on a $y \le 0$ (voir les deux dernières lignes du tableau). Il vient de la formule (3')

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = \infty$$

La tangente à la courbe en ces points est parallèle à l'axe Oy. En outre

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\pi} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2\pi} = 0.$$

La tangente à la courbe en ces points est donc parallèle à l'axe Ox. Nous trouvons ensuite:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a\cos^4 t\cdot\sin t} ;$$

d'où nous concluons:

pour $0 < t < \pi$ on a $\dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$, la courbe est concave, pour $\pi < t < 2\pi$ on a $\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$, la courbe est convexe.

Les résultats obtenus nous permettent de construire la courbe considérée (fig. 135). Cette courbe est appelée *astroïde*.

E x e m p l e 2. Construire la courbe donnée par les équations (*folium de Descartes*)

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3} \quad (a > 0). \qquad (1'')$$

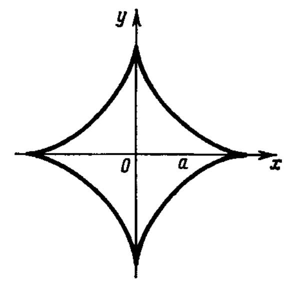


Fig. 135

S o l u t i o n . Ces deux fonctions sont définies pour toutes les valeurs de t, excepté $t = -1$. En outre,

$$\lim_{t\to-1-0} x = \lim_{t\to-1-0} \frac{3at}{1+t^3} = +\infty,$$

$$\lim_{t\to-1-0} y = \lim_{t\to-1-0} \frac{3at^2}{1+t^3} = -\infty,$$

$$\lim_{t\to-1-0} x = -\infty, \quad \lim_{t\to-1-0} y = +\infty.$$

D'autre part, remarquons que
pour $t = 0$ on a $x = 0, y = 0$,
quand $t \to +\infty$ on a $x \to 0, y \to 0$,
quand $t \to -\infty$ on a $x \to 0, y \to 0$.

Calculons $\dfrac{dx}{dt}$ et $\dfrac{dy}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6a\left(\frac{1}{2} - t^3\right)}{(1+t^3)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \qquad (2'')$$

Nous en déduisons les valeurs critiques suivantes pour t

$t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $t_4 = \sqrt[3]{2}$. Nous trouvons ensuite

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)} \qquad (3'')$$

En nous servant des formules (1''), (2''), (3''), formons le tableau suivant :

Domaine de variation de t	Domaine de variation correspondant de x	domaine de variation correspondant de y	Signe de $\frac{dy}{dx}$	Caractère de la variation de y en fonction de x
$-\infty < t < -1$	$0 < x < +\infty$	$0 > y > -\infty$	-	décroît
$-1 < t < 0$	$-\infty < x < 0$	$-\infty > y > 0$	-	Décroît
$0 < t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$0 < x < a\sqrt[3]{4}$	$0 < y < a\sqrt[3]{2}$	+	croît
$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < t < \sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{4} > x > a\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{2} < y < a\sqrt[3]{4}$	-	décroît
$\sqrt[3]{2} < t < +\infty$	$a\sqrt[3]{2} > x > 0$	$a\sqrt[3]{4} > y > 0$	+	croît

Il vient de la formule (3'') :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=0 \\ \left(\substack{x-0 \\ y=0}\right)}} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\infty \\ \left(\substack{x-0 \\ y=0}\right)}} = \infty$$

Par conséquent la courbe passe deux fois par l'origine des coordonnées (l'origine des coordonnées est un point double de la courbe, au voisinage de l'origine la courbe a deux branches) ; la première branche a une tangente parallèle à l'axe Ox et la seconde une tangente parallèle a l'axe Oy.

D'autre part,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \left(\substack{x-a\sqrt[2]{4} \\ y=a\sqrt[2]{2}}\right)}} = \infty.$$

En ce point la tangente à la courbe est prallèle à l'axe Oy.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\sqrt[3]{2} \\ \left(\substack{x-a\sqrt[2]{2} \\ y=a\sqrt[2]{4}}\right)}} = 0.$$

En ce point la tangente à la courbe est prallèle à l'axe Ox.

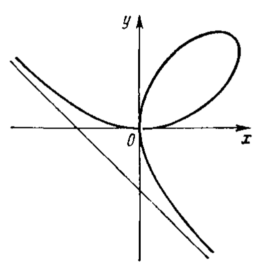


Fig. 136

Cherchons les asymptotes :

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{tx\to-1-0} \frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} = -1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y-kx) = \lim_{t\to-1-0} \left[\frac{3at^2}{1+t^3} - (-1)\frac{3at}{1+t^3}\right] =$$

$$\lim_{t\to-1-0} \left[\frac{3at(t+1)}{1+t^3}\right] = \lim_{t\to-1-0} \frac{3at}{1-t+t^2} = -a$$

Par conséquent, la droite $y = -x - a$ est une asymptote de l'une des branches de la courbe qûand $x \to +\infty$.

De même, nous trouvons k- lim=-1,

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (y-kx) = -a$$

Ainsi, la droite $y = -x - a$ est une asymptote de l'une des branches de la courbe quand $x \to -\infty$.

D'après l'étude qui vient d'être faite, nous pouvons tracer la courbe (fig. 136).

Certaines questions relatives à l'étude des courbes seront traitées au chapitre VIII, § 19 « Points singuliers d'une courbe « .

Exercices

Trouver les extremums des fonctions

1. $y = x^2 - 2x + 3$. Rép. $y_{\min} = 2$ pour $x = 1$.
2. $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$. Rép. $y_{\max} = 2$ pour $x = 1$, $y_{\min} = 1$ Pour $x = 3$.
3. $y = x^2 - 9x^2 + 15x + 3$. Rép. $y_{\max} = 10$ pour $x = 1$, $y_{\min} = -22$ pour $x = 5$
4. $y = -x^4 + 2x^2$. Rép. $y_{\max} = 1$ pour $x = \pm 1$, $y_{\min} = 0$ Pour $x = 0$.
5. $y = x^4 - 8x^2 + 2$. Rép. $y_{\max} = 2$ pour $x = 0$, $y_{\min} = -14$ pour $x = \pm 2$.
6. $y = 3x^5 - 125x^3 + 2160x$. Rep. max pour $x = -4$ et $x = 3$, min pour $x = -3$ et $x = 4$.
7. $y = 2-(x-1)^{\frac{2}{3}}$. Rép. $y_{\max} = 2$ pour $x = 1$.
8. $y = 3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$. Rép. Il n'y a pas d'extremum.
9. $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$. Rép. min pour $x = \sqrt{2}$, max pour $x = -\sqrt{2}$.
10. $y = \dfrac{(x-2)(3-x)}{x^2}$. Rép. max pour $x = \dfrac{12}{5}$.

11. $y = 2\,e^{x} + e^{-x}$. Rép. min pour $x = \dfrac{\log 2}{2}$.

12. $y = \dfrac{x}{\log x}$. Rép. $y_{\min} = e$ pour $x = e$.

13. $y = \cos x + \sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$. Rép, $y_{\max} = \sqrt{2}$ pour $x = \dfrac{\pi}{4}$.

14. $y = \sin 2x - x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$. Rép. max pour $x = \dfrac{\pi}{6}$, min pour $x = -\dfrac{\pi}{6}$

15. $y = x + \operatorname{tg} x$. Rép. Pas d'extremum.

16. $y = e^{x} \sin x$. Rép. min pour $x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{4}$, max pour $x = 2k\pi + \dfrac{3\pi}{4}$.

17. $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Rép. max pour $x = 0$; min pour $x = -1$ et pour $x = 1$.

18. $y = (x - 2)^2 (2x + 1)$. Rép. $y_{\min} \approx -8{,}24$ pour $x = \dfrac{1}{8}$

19. $y = x + \dfrac{1}{x}$. Rép. min pour $x = 1$; max pour $x = -1$,

20. $y = x^2 (a - x)^2$. Rép. $y_{\max} = \dfrac{a^4}{16}$ Pour $x = \dfrac{a}{2}$; $y_{\min} = 0$ pour $x = 0$ et pour $x = a$

21. $y = \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{a - x}$. Rép. max pour $x\ \dfrac{a^2}{a-b} =$; min pour $x = \dfrac{a^2}{a+b}$

22. $y = x + \sqrt{1 - x}$. Rép. $y_{\max} = 5/4$ pour $x = 3/4$; $y_{\min} = 1$ pour $x = 1$.

23. $y = x\sqrt{1-x}$ $(x \le 1)$. Rép. $y_{\max} = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ pour $x = \dfrac{2}{3}$.

24. $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$. Rép. min pour $x = -1$; max pour $x = 1$.

25. $y = x \operatorname{Log} x$. Rép, min pour $x = 1/e$.

26. $y = x \operatorname{Log}^2 x$. Rép. $y_{\max} = 4e^{-2}$ pour $x = e^{-2}$; $y_{\min} = 0$ pour $x = 1$.

27. $y = \operatorname{Log} x - \operatorname{arc\,tg} x$. Rép. La fonction croît.

28. $y = \sin 3x - 3 \sin x$. Rép. min pour $x = \dfrac{\pi}{2}$; max pour $x = 3\pi/2$.

29. $y = 2x + \operatorname{arc\,tg} x$. Rép. pas d'extremums

30. $y = \sin x \cos^2 x$. Rép. min pour $x = \dfrac{\pi}{2}$; deux max : pour $x = \arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ et pour $x = \arccos\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$

31. $y = \arcsin(\sin x)$. Rép. max pour $x = \dfrac{(4m+1)\pi}{2}$, min pour $x = \dfrac{(4m+3)\pi}{2}$

Trouver la plus grande et la plus petite valeur des fonctions sur les segments indiqués

32. $y = -3x^4 + 6x^2 - 1$ $(-2 \le x \le 2)$. Rép. La plus grande valeur est $y = 2$ pour $x = \pm 1$, la plus petite valeur est $y = -25$ pour $x = \pm 2$.

33. $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ $(-1 \le x \le 5)$, Rep. La plus grande valeur est $y = \dfrac{23}{3}$ pour $x = 5$, la plus petite valeur est $y = -\dfrac{13}{3}$ pour $x = -1$,

34. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ $(0 \le x \le 5)$ Rép. La plus grande valeur est $y = \dfrac{3}{5}$ pour $x = 4$. La plus petite valeur est $y = -1$ pour $x = 0$.

35. $y = \sin 2x - x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$. Rép. La plus grande valeur est $y = \dfrac{\pi}{2}$ pour $x = -\dfrac{\pi}{2}$ plus petite valeur est $y = -\dfrac{\pi}{2}$ pour $x = \dfrac{\pi}{2}$.

36. On désire faire une caisse sans couvercle de volume maximum en découpant et en pliant d'une manière appropriée des carrés égaux dans une feuille de tôle de côté a. Quelle doit être la longueur du côté de ces carrés? Rép. $\dfrac{a}{6}$.

37. Montrer que parmi tous les rectangles inscrits dans un cercle donné, le carré a une surface maximum. Montrer aussi que le périmètre est maximum pour le carré.

38. Montrer que parmi tous les triangles isocèles inscrits dans un cercle donné, le triangle équilatéral a un périmètre maximum.

39. Trouver parmi les triangles rectangles, dont l'hypoténuse est égale à h, celui qui a une surface maximum. Rép. La longueur de chaque côté ëst égale à $\dfrac{h}{\sqrt{2}}$

40. Trouver parmi les cylindres droits inscrits dans une sphère de rayon R celui qui a un volume maximum. Rép. La hauteur de ce cylindre est égale à $\frac{2R}{\sqrt{3}}$
41. Trouver parmi les cylindres droits inscrits dans une sphère donnée de rayon R celui dont la surface latérale est maximum. Rép. La hauteur de ce cylindre est égale à $R\sqrt{2}$.
42. Trouver parmi les cônes droits circonscrits à une sphère de rayon R la hauteur de celui qui a un volume minimum. Rép. La hauteur est égale à $4R$ (le volume du cône est alors égal au double de celui de la sphère).
43. L'intérieur d'un réservoir sans couvercle, dont le fond a la forme d'un carré, doit être recouvert de plomb. La capacité du réservoir est 32 1. Quelles doivent être les dimensions de ce réservoir pour que la quantité de plomb utilisé soit minimale ? Rép. Hauteur 0,2 m ; côté de la base 0,4 m (autrement dit, le côté de la base doit être le double de la hauteur).
44. Un couvreur doit faire une gouttière de capacité maximale dont le fond et les côtés latéraux aient 10 cm de largeur ; de plus, les côtés latéraux doivent être également inclinés par rapport au fond. Quelle sera, en haut, la largeur de la gouttière ? Rép. 20 cm.
45. Démontrer que la fabrication d'une tente conique, de capacité donnée, exige une dépense de tissu minimum quand la hauteur de la tente est $\sqrt{2}$ fois plus grande que le rayon de la base.
46. On doit fabriquer un cylindre sans couvercle dont les parois et le fond ont une épaisseur donnée. Quelles doivent être les dimensions de ce cylindre, pour une capacité donnée, si l'on désire que la quantité de matériel employé soit minimale ? Rép. Si R désigne le rayon intérieur de la base et v le volume intérieur du cylindre, alors $R = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$.
47. On doit fabriquer une chaudière en soudant aux extrémités d'un cylindre deux demisphères. Les parois de la chaudière ont une épaisseur constante. Pour un volume donné v de la chaudière, comment procéder pour que la surface extérieure soit minimale ? Rép. La chaudière doit avoir la forme d'une sphère de rayon intérieur $R = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$.
48. Construire un trapèze isocèle de périmètre minimum pour une surface S donnée ; l'angle de base est égal à α. Rép. La longueur des côtés latéraux est égale à $\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}$

49. Inscrire dans une sphère de rayon R un prisme triangulaire régulier de volume maximum. Rép. La hauteur du prisme est égale à $\frac{2R}{\sqrt{3}}$
50. Circonscrire un cône de volume minimal à une demi-sphère de rayon R. La base de ce cône coïncide avec le plan diamétral de base de la demisphère. Calculer la hauteur de ce cône. Rép. La hauteur du cône est égale à R $\sqrt{3}$.
51. Circonscrire un cône droit de volume minimal à un cylindre de rayon r en supposant que leurs bases soient dans un même plan et que les centres de ces dernières coïncident. Rép. Le rayon de la base du cône est égal à $\frac{3}{2}r$.
52. Découper un secteur dans un cercle de carton de rayon R de manière qu'en l'enroulant on obtienne un entonnoir de capacité maximum. Rép. L'angle au centre de ce secteur est égal à $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$
53. Parmi tous les cylindres circulaires inscrits dans un cube d'arête a, dont l'axe coïncide avec la diagonale du cube et dont les cercles de base sont tangents aux faces du cube, trouver celui qui a un volume maximum.Rép. La hauteur du cylindre est égale à $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; le rayon de la base est égal à $\frac{a}{\sqrt{6}}$
54. Soit dans le plan un système orthogonal de coordonnées et un point (x_o, y_o) pris dans le premier quadrant. Mener une droite passant par ce point de manière qu'elle forme avec les directions positives des axes de coordonnées un triangle de surface minimum. Rép. L'équation de la droite est $\frac{x}{2x_0}+\frac{y}{2y_0}=1$.
55. Soit un point donné sur l'axe de la parabole $y^2 = 2px$ et situé à la distance a du sommet de cette parabole. Trouver l'abscisse du point de la courbe le plus proche de ce point. Rép. $x = a - p$.
56. On estime que la résistance d'une poutre parallélépipédique est proportionnelle à sa largeur et au cube de sa hauteur ; trouver la largeur de la poutre la plus résistante que l'on peut obtenir d'un tronc de 16 cm de diamètre. Rép. La largeur est égale à 8 cm.
57. Un bateau est au mouillage à 9 km du point le plus proche de la côte. Un messager doit parvenir au plus vite à une localité située à 15 km du point de la berge le plus proche du bateau. Etant donné qu'un messager parcourt 5 km à l'heure à pied et 4 km à l'heure en canot, en quel point de la berge doit-il accoster pour arriver au plus vite à cette localité ? Rép. A 3 km de la localité.
58. Un point matériel se déplace dans le plan à la vitesse v_1 en dehors de la ligne droite MN et à la vitesse v_2 sur cette ligne. Quel chemin doit-il

parcourir pour accomplir, dans le temps le plus court, le trajet AB, si B est un point de la ligne MN ? La distance du point A à la ligne MN est égale à h, la distance entre le point B et la projection α du point A sur la ligne MN est égale à a. Rép. Si ABC est le chemin parcouru, alors $\frac{\alpha C}{AC} = \frac{v_1}{v_2}$ si $\frac{\alpha B}{AB} \geq \frac{v_1}{v_2}$ et $\alpha C = \alpha B$ si $\frac{\alpha B}{AB} < \frac{v_1}{v_2}$.

59. On soulève un poids w à l'aide d'un levier du premier genre. Le fardeau se trouve à la distance a cm du point d'appui; chaque tronçon de levier de 1 cm de longueur pèse v grammes. Quelle doit être la longueur du levier pour que la force nécessaire pour soulever le poids soit minimale ? Rép. $x = \sqrt{\frac{2aw}{v}}$ cm.
60. Les mesures successives d'une grandeur x inconnue ont donné les résultats suivants : $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Montrer que la somme des carrés des écarts $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2$ sera minimale si l'on choisit $x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$
61. Afin de réduire au maximum le frottement d'un fluide contre les parois d'un canal, on conçoit ce dernier de manière que la surface de contact soit minimale. Montrer que la forme idéale d'un canal parallélépipédique ouvert, dont l'aire de la section transversale est donnée, est obtenue quand la largeur du canal est double de la hauteur.

Déterminer les points d'inflexion et les intervalles de convexité et de concavité des courbes:

62. $y = x^5$. Rép. Pour $x < 0$ la courbe est convexe et pour $x > 0$ concave; $x = 0$ est un point d'inflexion.
63. $y = 1 - x^2$. Rép. La courbe est partout convexe.
64. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$. Rép. Point d'inflexion pour $x = 1$.
65. $y = (x - b)^3$. Rép. Point d'inflexion pour $x = b$.
66. $y = x^4$. Rép. La courbe est partout concave.
67. $y = \frac{1}{x^2+1}$. Rép. Point d'inflexion pour $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
68. $y = \mathrm{tg}\, x$. Rép. Point d'inflexion pour $x = n\pi$.
69. $y = xe^{-x}$. Rép. Point d'inflexion pour $x = 2$.
70. $y = a - \sqrt[3]{x-b}$. Rép. Point d'inflexion pour $x = b$.
71. $y = a - \sqrt[3]{(x-b)^2}$. Rép. La courbe n'a pas de point d'inflexion.

Trouver les asymptotes des courbee suivantes

72. $y = \frac{1}{x-1}$. Rép. $x = 1$; $y = 0$.
73. $y = \frac{1}{(x+2)^3}$. Rép. $x = -2$; $y = 0$.
74. $y = c + \frac{a^3}{(x-b)^2}$. Rép. $x = b$; $y = c$.
75. $y = e^{1/x}$. Rép. $x = 0$; $y = 0$.
76. $y = \mathrm{Log}\, x$. Rép. $x = 0.77$
77. $y^3 = 6x^2 + x^3$. Rép. $y = x + 2$.
78. $y^2 = a^3 - x^3$. Rép. $y + x = 0.79$
79. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$. Rép. $x = 2a$.
80. $y^2 (x - 2a) = x^3 - a^3$. Rép. $x = 2a$, $y = \pm(x + a)$.

Etudier le comportement et construire le graphique des fonctions

81. $y = x^4 - 2x + 10$.
82. $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$
83. $y = e^{-\frac{1}{x}}$
84. $y = \frac{6x}{1+x^2}$
85. $y = \frac{4+x}{x^2}$.
86. $y = \frac{x}{x^2-1}$.
87. $y = \frac{x+2}{x^3}$.
88. $y = \frac{x^2}{1+x}$
89. $y^2 = x^3 - x$.
90. $y = \frac{x^3}{3-x^2}$
91. $y = \sqrt[3]{x^2} + 2$.
92. $y = x - \sqrt[3]{x^3+1}$.
93. $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
94. $y = x\, e^{-x}$.
95. $y = x^2 e^{-x^2}$.
96. $y = x - \log(x+1)$
97. $y = \mathrm{Log}\,(x^2 + 1)$.
98. $y = \sin 3x$.
99. $y = x + \sin x$.
100. $y = x \sin x$.
101. $y = e^{-x} \sin x$.
102. $y = \log \sin x$
103. $y = \frac{\log x}{x}$.
104. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{1}{2} t \end{cases}$
105. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$
106. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$
107. $\begin{cases} x = ae^t \cos t) \\ y = ae^t \sin t) \end{cases}$

Exercices supplémentaires

Trouver les asymptotes des courbes :

108. $y = \frac{x^2+1}{1+x}$ Rép. x=-1.
109. $y = x + e^{-x}$. Rép. $y = x$.
110. $2y (x + 1)^2 = x^3$. Rép. $x = -1$; $y = \frac{1}{2} x - 1$.
111. $y^3 = a3 - x^2$. Rép. Pas d'asymptotes.
112. $y = e^{-2x} \sin x$. Rép. $y = 0$.
113. $y = e^{-x} \sin 2x + x$. Rép. $y = x$.

114. $y = x\,\text{Log}\left(e+\frac{1}{x}\right)$. Rép. $x = -\frac{1}{e}$; $y = x+\frac{1}{e}$

115. $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$. Rép. $x = 0$; $y = x$. 116. $x=\frac{2t}{1-t^2}$, $y=\frac{t^2}{1-t^2}$ Rép. $y=\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

Etudier le comportement et eonstruire le graphique des fonctions

117. $y = |x|$. 118. $y = \text{Log}\,|x|$. 119. $y^2 = x^3 - x$.

120. $y = (x+1)^2(x-2)$. 121. $y = x + |x|$. 122. $y=\sqrt[3]{x^2}-x$

123. $y = x^2\sqrt{x+1}$. 124. $y=\frac{x^2}{2}-\log x$. 125. $y=\frac{x^2}{2}\log x$.

126. $y=\frac{1}{e^x-1}$ 127. $y=\frac{x}{\log x}$. 128. $y=x+\frac{\log x}{x}$

129. $y = x\,\text{Log}\,x$. 130. $y=e^{\frac{1}{x}}-x$. 131. $y = |\sin 3x|$.

132. $y=\frac{\sin x}{x}$. 133. $y = x\,\text{arc tg}\,x$. 134. $y = x - 2\,\text{arc tg}\,x$.

135. $y = e^{-2x}\sin 3x$. 136. $y = |\sin x| + x$. 137. $y = \sin(x^2)$.

138. $y = \cos^3 x + \sin 3x$. 139. $y=\frac{x+|x|}{2}$.

140. $y=\frac{x-|x|}{2}$. 141. $y=\sin\left(\frac{x+|x|}{2}\right)-\frac{x-|x|}{2}$ $(-\pi\le x\le\pi)$

142. $y=\cos\left(\frac{x-|x|}{2}\right)-\frac{x+|x|}{2}$ $(-\frac{\pi}{2}\le x\le 1)$

143. $y=\frac{1}{2}(3x+|x|)+1$. 144. $y=\frac{1}{2}\left[3(x-1)+|x-1|\right]+1$ $(0\le x\le 2)$.

Chapitre VI COURBURE D'UNE COURBE

§ 1. Longueur de l'arc et sa dérivée

Supposons que l'arc de courbe M_0M (fig. 137) soit le graphique de la fonction $y = f(x)$ définie dans l'intervalle (a, b). Définissons la longueur de l'arc de courbe. Prenons sur la courbe AB les points M_0, M_1, M_2, . . ., M_{i-1}, , . . ., M_{n-1}, M. En joignant ces points par des segments de droite nous obtenons une ligne polygonale
$M_0\, M_1\, M_2 \ldots M_{i-1}\, M_i \ldots M_{n-1}\, M$ inscrite dans l'arc $M_0\, M$. Désignons par P_n la longueur de cette ligne polygonale.
On appelle *longueur de l'arc* M_0M (et l'on désigne par s) la limite vers laquelle tend la longueur de cette ligne polygonale quand la longueur du plus grand des segments $M_{i-1}M_i$ constituant cette ligne tend vers zero si cette limite existe et ne depend pas du choix des sommets de la ligne polygonale $M_0\, M_1\, M_2 \ldots M_{i-1}\, M_i \ldots M_{n-1}\, M$

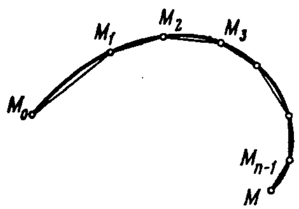


Fig. 137

Remarquons que cette définition de la longueur d'un arc de courbe quelconque est analogue à celle de 1a longueur de la circonférence.
Nous montrerons au chapitre XII que si la fonction $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ sont continues sur le segment $[a, b]$, l'arc de la courbe $y = f(x)$, compris entre les points $[a, f(a)]$ et $[b, f(b)]$, a une longueur bien déterminée que l'on peut calculer à l'aide de formules appropriées. On démontrera dans ce même chapitre que sous les conditions citées plus haut le rapport de la longueur de l'arc à la longueur de la corde correspondante tend vers l'unité, quand la longueur de la corde tend vers zéro, c'est-à-dire

$$\lim_{M_0M\to 0}\frac{\text{longueur } M_0M}{\text{longueur } \overline{M_0M}}=1\,.$$

On peut facilement démontrer ce théorème pour la circonférence *), cependant pour le cas général nous l'admettrons pour le moment sans démonstration.

* Considérons l'arc AB correspondant à l'angle au centre 2α (fig 138). La longueur de cet arc est égale à $2R\alpha$ (R désigne le rayon du cercle) ; la longueur

Considérons le problème suivant.
Soit $y = f(x)$ l'équation d'une courbe du plan Oxy.
Soient M_0 (x_0, y_0) un point donné pris sur cette courbe et M (x, y) un point variable de cette courbe. Désignons par s la longueur de l'arc M_0M (fig. 139).

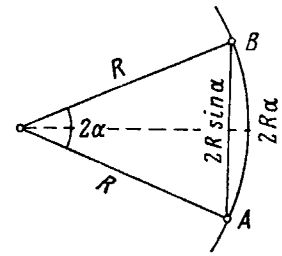


Fig. 138

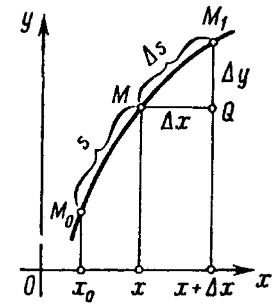


Fig. 139

Quand l'abscisse x du point M varie, la longueur s de l'arc varie également ; elle est, par conséquent, une fonction de x. Calculons la dérivée de s par rapport à x.
Donnons à x un accroissement Δx. L'arc s subit alors un accroissement Δs = longueur MM_1. Soit $\overline{MM_1}$ la corde qui sous-tend cet arc. Pour trouver la limite

lim $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}$, procédons de la manière suivante : nous tirons du triangle MM_1Q

$$\overline{MM_1^2}=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\,.$$

Multiplions et divisons le premier membre par Δs^2:

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2\cdot\Delta s^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2.$$

Divisons les deux membres de l'égalité par Δx^2:

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2\cdot\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Trouvons la limite du premier et du second membre quand $\Delta x\to 0$.

Comme $\lim\limits_{MM_1\to 0}\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}$ et $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$, nous avons

de la corde correspondante est 2R sin α. C'est pourquoi

$$\lim_{M_0M\to 0}\frac{\text{longueur } M_0M}{\text{longueur } \overline{M_0M}}=1$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (1)$$

Nous trouvons l'expression suivante pour la différentielle de l'arc

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (2)$$

ou *)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \qquad (2')$$

Nous avons trouvé l'expression de la différentielle de la longueur de l'arc pour une courbe dont l'équation est $y = f(x)$. Toutefois, la formule (2') est valable également dans le cas où la courbe est exprimée par des équations paramétriques.
Si les équations paramétriques de la courbe sont

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

alors

$$dx = \varphi'(t)dt, \;\; dy = \psi'(t)\,dt,$$

et l'expression (2') se met sous la forme

$$ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$$

§ 2. Courbure

Un des éléments qui caractérisent la forme d'une courbe est son degré de flexion, d'incurvation. Soit donnée une courbe qui n'a pas de points doubles et qui a une tangente déterminée en chaque point Menons les tangentes à la courbe en deux points quelconques A et B et désignons par a l'angle formé par ces tangentes ou, plus exactement, l'angle de rotation de la tangente quand on passe du point A au point B (fig. 140). On appelle cet angle *angle de contingence* de l'arc AB. De deux arcs de même longueur, le plus incurvé est celui dont l'angle de contingence est le plus grand (fig. 140 et 141).
D'autre part, on ne peut pas évidemment caractériser le degré d'incurvation des arcs de courbe de longueurs différentes en se basant uniquement sur l'angle de contingence. Par conséquent, la caractéristique complète de la courbure d'une

* A vrai dire la formule (2') n'est juste que si $dx > 0$. Si $dx < 0$, alors $ds = -\sqrt{dx^2 + dy^2}$. C'est pourquoi, il est plus juste d'écrire dans le cas général

$$|ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

courbe quelconque sera le r a p p o r t de l'angle de contingence à la longueur de l'arc correspondant.

D é f.i n i t i o n 1. On appelle *courbure moyenne* K_m de l'arc AB le rapport de l'angle de contingence correspondant a à la longueur de l'arc qu'il sous-tend

$$K_m = \frac{\alpha}{AB}$$

La courbure moyenne des différents arcs d'une courbe peut varier avec l'arc choisi ; ainsi, la courbure moyenne des arcs AB et A_1B_1 de la courbe représentée sur la

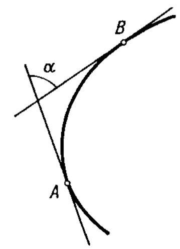


Fig. 140

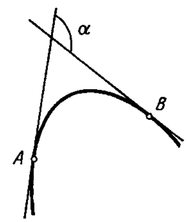


Fig. 141

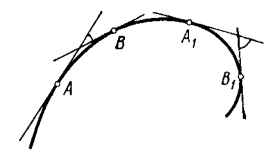


Fig. 142

figure 142 n'est pas égale, bien que ces arcs soient d'égale longueur. De plus, le degré d'incurvation de cette courbe varie de proche en proche. C'est pourquoi, afin de caractériser le degré d'incurvation d'une courbe donnée dans le voisinage immédiat d'un point A donné, nous introduisons la notion de courbure en un point.

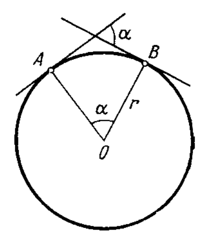


Fig. 143

D é f i n i t i o n 2. On appelle *courbure de la courbe* au point A et on note K_A la limite vers laquelle tend la courbure moyenne de l'arc AB quand la longueur de cet arc tend vers zéro (c'est-à-dire quand B s'approche *) indéfiniment du point A):

$$K_A = \lim_{B\to A} K_m = \lim_{AB\to 0}\frac{\alpha}{AB}.$$

E x e m p l e . Etant donné un cercle de rayon r: 1) déterminer la courbure moyenne de l'arc $\hat{A}B$ correspondant à l'angle au centre α (fig. 143) ; 2) déterminer la courbure au point A.

* Nous supposons que la valeur de la limite est indépendante du choix du point variable B (à gauche ou à droite du point A).

S o l u t i o n . 1) Il est évident que l'angle de contingence de l'arc AB est égal à α et que la longueur de cet arc est égale à αr. Par conséquent,

$$K_m = \frac{\alpha}{\alpha r} \text{ ou } K_m = \frac{1}{r}$$

2) La courbure au point A est égale à

$$K_m = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\alpha r} = \frac{1}{r}$$

Ainsi, la courbure moyenne d'un arc du cercle de rayon r ne dépend pas de la position et de la longueur de cet arc; elle est égale pour tous les arcs à 1/r. De même, la courbure du cercle en un point donné ne dépend pas de la position de ce point et elle est aussi égale à $\frac{1}{r}$.

R e m a r q u e . Notons que pour une courbe quelconque la courbure peut généralement varier quand on passe d'un point à l'autre. C'est ce que nous verrons par la suite.

§ 3. Calcul de la courbure

Nous allons établir une formule qui nous permettra de calculer la courbure en chaque point M (x, y) d une courbe. Nous supposerons que dans un système de coordonnées cartésiennes la courbe est donnée par une équation de la forme

$$y = f(x) \quad (1)$$

et que la fonction $f(x)$ a une dérivée seconde continue. Menons les tangentes à la courbe aux points M et M_1 d'abscisses x et $x + \Delta x$ et désignons par φ et $\varphi + \Delta\varphi$ les angles formés par ces tangentes avec l'axe Ox positif (fig. 144).

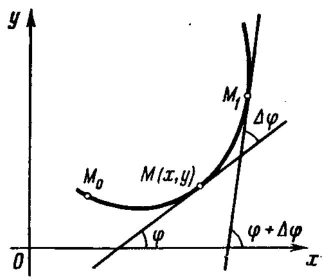


Fig. 144

Désignons par s la longueur de l'arc M_0M comptée à partir d"un, point donné M_0 (on l'appelle parfois l'abscisse curviligne du point M); alors $\Delta s = M_0M_1 - M_0M$, et $|\Delta s| = MM_1$,. On voit immédiatement de la figure 144 que l'angle de contingence correspondant à l'arc MM_1 est égal à la valeur absolue*) de la différence des angles φ et $\varphi + \Delta\varphi$, c'est-à-dire qu'il est égal à $|\Delta\varphi|$.

En vertu de la définition de la courbure moyenne, nous avons pour l'arc MM_1:

---

* Il est évident que pour la courbe représentée sur la figure 144 | Aφ | = Δφ puisque Δφ > 0.

$$K_m = \frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$

Pour calculer la c o u r b u r e au point M, il faut trouver la limite de cette expression quand la longueur de l'arc MM_1 tend v ers zéro

$$K_m = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$

Comme φ et s dépendent de x (sont des fonctions de x), nous pouvons considérer φ comme une fonction de s et supposer que cette fonction est exprimée par des équations paramétriques à l'aide du paramètre x. Alors

$$K_m = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$$

et, par conséquent,

$$K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|. \qquad (2)$$

Pour calculer $\frac{d\varphi}{ds}$ utilisons la formule de dérivation des fonctions paramétriques:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}.$$

Pour exprimer $\frac{d\varphi}{dx}$ à l'aide de la fonction $y = f(x)$, remarquons que tg $\varphi = dx$ et, par conséquent, φ=arc tg $\frac{d\varphi}{dx}$.

Dérivons cette égalité par rapport à x; nous avons:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

En ce qui concerne la dérivée $\frac{ds}{dx}$, nous avons déjà trouvé au § 1, ch. V I que $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

C'est pourquoi

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

ou, puisque $K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$, nous trouvons en définitive:

$$K = \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \qquad (3)$$

Par conséquent, en tout point de la courbe où la dérivée seconde $\frac{d^2y}{dx^2}$ existe et est continue, on peut calculer la courbure à l'aide de la formule (3). Notons que, au cours du calcul de la courbure, on affecte du signe plus la racine du dénominateur puisque la courbure est, par définition, une quantité non négative.

Exemple 1. Déterminer la courbure de la parabole $y^2 = 2px$ a) en un point arbitraire $M(x, y)$; b) au point $M_1(0, 0)$ c) au point $M_2\left(\frac{p}{2}, p\right)$

Solution. Trouvons les dérivées première et seconde de la fonction $y = \sqrt{2px}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}};\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{(2px)^{3/2}}.$$

En substituant ces expressions dans la formule (3), nous trouvons

a) $K = \frac{p^2}{(2px+p^2)^{3/2}}$. b) $(K)_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \frac{1}{p}$; c) $K_{\substack{x=\frac{p}{2},\\ y=p}} = \frac{1}{2\sqrt{2}p}$;

Exemple 2. Déterminer la courbure de la droite $y = ax + b$ en un point arbitraire $M(x, y)$.

Solution. $y' = a, y'' = 0$.

En vertu de la formule (3) nous avons

$$K = 0.$$

La droite est donc « une courbe de courbure nulle ». Ce résultat peut être facilement retrouve en partant de la définition même de la courbure.

§ 4. Calcul de la courbure des courbes sous forme paramétrique

Soient

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$$

les équations paramétriques d'une courbe.

Alors (voir § 24, ch. III):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{(\varphi')^3}$$

En substituant ces expressions dans la formule (3) du paragraphe précédent, nous avons:

$$K = \frac{|\psi''\varphi' - \psi'\varphi''|}{\left[\varphi'^2 + \psi'^2\right]^{3/2}} \qquad (1)$$

Exemple. Déterminer la courbure de la cycloïde $x = a(t - \sin t)$, $y = (t - \cos t)$ en un point arbitraire (x, y).

Solution.

$$\frac{dx}{dt} = a(1-\cos t),\quad \frac{dx^2}{dt^2} = a\sin t,\quad \frac{dy}{dt} = a\sin t,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = a\cos t.$$

En substituant ces expressions dans la formule (1), nous avons:

$$K = \frac{|a(1-\cos t)a\cos t - a\sin t\cdot a\sin t|}{\left|a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t\right|^{3/2}} = \frac{|\cos t - 1|}{2^{3/2}a(1-\cos t)^{3/2}} = \frac{1}{4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}.$$

§ 5. Calcul de la courbure des courbes en coordonnées polaires.

Supposons que la courbe soit donnée par l'équation

$$\rho = f(\theta). \qquad (1)$$

Ecrivons les formules de passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta, \\ y &= \rho\sin\theta. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

En remplaçant dans ces formules ρ par son expression en fonction de θ, c'est-à-dire par $f(\theta)$, nous avons :

$$\left.\begin{aligned} x &= f(\theta)\cdot\cos\theta, \\ y &= f(\theta)\cdot\sin\theta. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

On peut considérer ces équations comme les équations paramétriques de la courbe (1) avec θ pour paramètre. Alors,

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta, \frac{dy}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta + \rho\cos\theta,$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}\cos\theta - 2\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta - \rho\cos\theta, \quad \frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}\sin\theta + 2\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta$$

En substituant les expressions ci-dessus dans la formule (1) du paragraphe précédent, nous en déduisons une formule permettant de calculer la courbure d'une courbe en coordonnées polaires

$$K = \frac{\left|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''\right|}{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{3/2}} \quad (4)$$

E x e m p l e. Déterminer la courbure de la spirale d' Arcbimède $\rho = a\theta$ ($a > 0$) en un point arbitraire (fig. 145).
Solution.

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a; \quad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = 0$$

Par conséquent,

$$K = \frac{\left|a^2\theta^2 + 2a^2\right|}{\left(a^2\theta^2 + a^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{a}\frac{\theta^2 + 2}{\left(\theta^2 + 1\right)^{3/2}}.$$

Remarquons que pour les grandes valeurs de θ sont vérifiées les égalités approchées suivantes:

$$\frac{\theta^2 + 2}{\theta^2} \approx 1, \quad \frac{\theta^2 + 1}{\theta^2} \approx 1;$$

c'est pourquoi, en remplaçant dans la formule précédente $\theta^2 + 2$ par θ^2 et

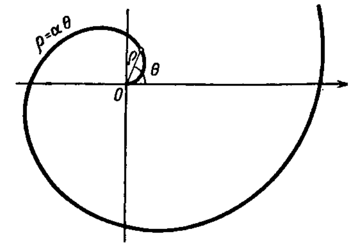


Fig. 145

de $\theta^2 + 1$ par θ^2, nous en déduisons une formule approchée (pour les grandes valeurs de θ):

$$K = \frac{1}{a}\frac{\theta^2}{\left(\theta^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{a\theta}.$$

Ainsi, la spirale d'Archimède a, pour les grandes valeurs de θ, la même courbure qu'un cercle de rayon $a\theta$.

§ 6. Rayon et cercle de courbure. Centre de courbure. Développée et développante

D é f i n i t i o n . On appelle *rayon de courbure* d'une courbe en un point donné M la grandeur R égale à l'inverse de la courbure K de cette courbe en ce point

$$R = \frac{1}{K} \quad (1) \text{ ou } R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} \quad (2)$$

Menons au point M de la courbe la normale (fig. 146), orientée dans le sens de la concavité de cette courbe, et portons sur cette normale le segment MC égal au rayon de courbure R de cette courbe au point M. Le point C est appelé *centre de courbure* de cette courbe au point M, et le cercle de rayon R et de centre au point C (passant par le point M) cercle de courbure de cette courbe au point M.

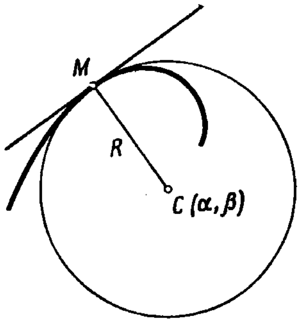


Fig. 146

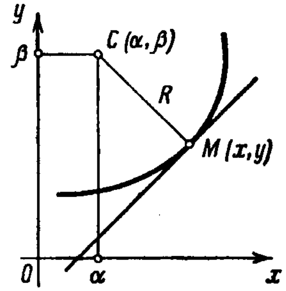


Fig. 147

Il découle de la définition du cercle de courbure qu'en un point donné, la courbure de la courbe est égale à celle du cercle de courbure.

Etablissons les formules définissant les coordonnées du centre de courbure.

Soit

$$y = f(x) \qquad (3)$$

l'équation de la courbe.

Fixons sur la courbe un point M (x, y) et déterminons les coordonnées α et β du centre de courbure correspondant à ce point (fig. 147). Pour cela formons l'équation de la normale à la courbe au point M :

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) \qquad (4)$$

(X et Y désignent les coordonnées courantes d'un point de la normale).

Le point C (α, β) étant sur la normale, ses coordonnées doivent vérifier l'équation (4) :

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x) \qquad (5)$$

La distance du point C (α, β) au point M (x, y) est égale au rayon de courbure R

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = R^2 \quad (6)$$

En résolvant les équations (5) et (6) nous déterminons α et β

$$(\alpha - x)^2 + \frac{1}{y'^2}(\alpha - x)^2 = R^2,$$

$$(\alpha - x)^2 = \frac{y'^2}{1 + y'^2} R^2;$$

d' où

$$\alpha = x \pm \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} R, \quad \beta = y \mp \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} R.$$

Mais comme $R = \dfrac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{|y''|}$, alors

$$\alpha = x \pm \frac{y'\left(1 + y'^2\right)}{|y''|}, \quad \beta = y \mp \frac{1 + y'^2}{|y''|}.$$

Pour savoir quel signe nous devons prendre dans ces dernières formules, nous aurons à considérer deux cas : $y'' > 0$ et $y'' < 0$. Si $y'' > 0$, la courbe est concave en ce point et, par conséquent, $\beta > y$ (fig. 147), donc nous devrons prendre les signes d'en bas. Comme dans ce cas $|y''| = y''$, les formules des coordonnées du centre de courbure seront les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y'\left(1 + y'^2\right)}{y''} \\ \beta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

On peut démontrer, d'une manière analogue, que les formules (7) sont valables également dans le cas où $y'' < 0$.

Si la courbe est donnée par des équations paramétriques

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t),$$

on peut aisément déterminer les coordonnées du centre de courbure à partir des formules (7), en rempaçant dans ces dernières y' et y'' par leurs expressions correspondantes en fonction du paramètre

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t}; \; y'' = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{x'^3_t}$$

Alors

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= x - \frac{y'\left(x'^2 + y'^2\right)}{x'y'' - x''y'}\\ \beta &= y + \frac{x'\left(x'^2 + y'^2\right)}{x'y'' - x''y'}.\end{aligned}\right\} \qquad (7')$$

E x e m p l e 1. Déterminer les coordonnées du centre de courbure de la parabole $y^2 = 2px$
a) en un point arbitraire $M(x, y)$;
b) au point M_0 (0, 0) ;
c) au point M_1 ($\frac{p}{2}$, p).

S o l u t i o n . En substituant les valeurs correspondantes de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans les formules (7), nous avons (fig. 148):

a) $\alpha = 3x + p,\ \beta = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}$

b) pour $x = 0$ on trouve : $\alpha = p$, $\beta = 0$;

c) pour $x = \frac{p}{2}$ on a : $\alpha = \frac{5p}{2}$, $\beta = -p$

Si au point M_1 (x, y) la courbure de la courbe n'est pas égale à zéro, il correspond à ce point un centre de courbure bien déterminé C_1 (a, β).

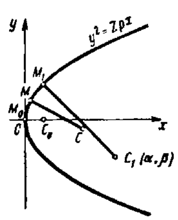


Fig. 148

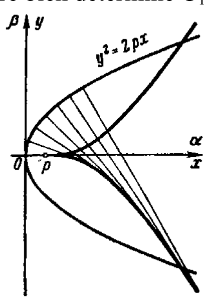


Fig. 149

L'ensemble de tous les centres de courbure d'une courbe constitue une nouvelle courbe appelée *développée* de la courbe considérée.

Ainsi, on appelle développée d'une courbe le lieu géométrique des centres de courbure de cette courbe. La courbe en question est alors appelée *dévetoppante*.

Si la courbe est donnée par l'équation $y = f(x)$, on peut alors considérer les équations (7) comme les équations paramétriques de la développée, avec x pour paramètre. En éliminant le paramètre x de ces équations (si cela est possible), on en déduit l'expression de la dépendance directe entre les coordonnées courantes α et β de la développée. Si la courbe est donnée par des équations paramétriques $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, les équations (7') seront alors les équations paramétriques de la développée (puisque les quantités x, y, x', y', x'', y'' sont des fonctions de t).

E x e m p l e 2. Trouver l'équation de la développée de la parabole $y^2 = 2px$.

S o l u t i o n . En nous servant des résultats de l'exemple 1, nous pouvons écrire pour tout point arbitraire (x, y) de la parabole:

$$\alpha = 3x + p,$$

$$\beta = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}$$

En éliminant le paramètre x entre ces deux relations, nous trouvons $\beta^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3$. C'est l'équation d'une parabole semi-cubique (fig. 149).

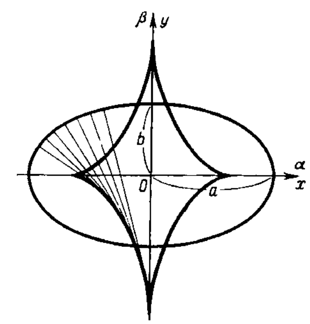


Fig. 150

E x e m p l e 3. Trouver l'équation de la développée de l'ellipse définie par les équations paramétriques

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t.$$

S o l u t i o n . Calculons les dérivées de x et y par rapport à t

$$x' = -a\sin t,\ y' = b\cos t;$$
$$x'' = -a\cos t,\ y'' = -b\sin t.$$

En substituant l'expression de ces dérivées dans la formule (7'), nous avons:

$$\alpha = a\cos t - \frac{b\cos t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t} = .$$

$$a\cos t - a\cos t\sin^2 t - \frac{b^2}{a}\cos^3 t = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t$$

Ainsi,

$$\alpha = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t.$$

Nous trouvons d'une manière analogue :

$$\beta = \left(b - \frac{a^2}{b}\right)\sin^3 t.$$

En éliminant le paramètre t, nous en déduisons l'équation de la développée de l'ellipse sous la forme

$$\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{\beta}{a}\right)^{2/3} = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{2/3}.$$

α et β sont ici les coordonnées courantes de la développée (fig. 150).

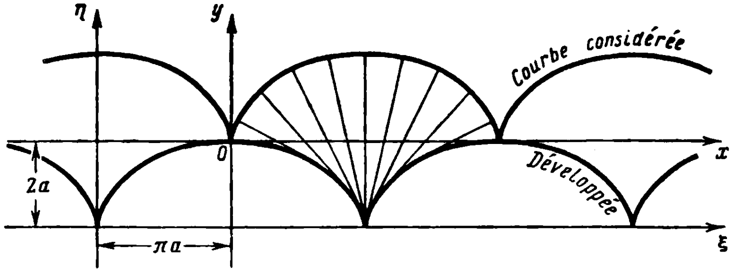


Fig. 151

E x e m p l e 4. Trouver les équations paramétriques de la développée de la cycloïde $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Solution.

$$x' = a(1 - \cos t),\quad y' = a\sin t;$$
$$x'' = a\sin t,\quad y'' = a\cos t.$$

En substituant les expressions trouvées dans la formule (7') nous avons:

$\alpha = a(t + \sin t)$, $\beta = -a(1 - \cos t)$.

Procédons à un changement de variables en posant

$\alpha = \xi - \pi a$, $\beta = \eta - 2a$, $t = \tau - \pi$; les équations de la développée se mettent alors sous la forme $\xi = a(\tau - \sin\tau)$, $\eta = a(1 - \cos\tau)$. Par rapport aux coordonnées ξ et η ces équations définissent une cycloïde engendrée par une circonférence de même rayon a. Ainsi, la développée de la cycloïde est la même cycloïde mais qui a subi une translation $-\pi\alpha$ dans le sens de l'axe Ox et $-2a$ dans le sens de l'axe Oy (fig. 151).

§ 7. Propriétés de la développée

T h é o r è m e 1. *La normale à une courbe donnée est la tangente à sa développée.*

D é m o n s t r a t i o n . Le coefficient angulaire de la tangente à la développée définie par les équations paramétriques (7) du précédent paragraphe est

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\dfrac{d\beta}{dx}}{\dfrac{d\alpha}{dx}}$$

En remarquant que [en vertu de ces mêmes équations (7)]

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{3y''^2 y'^2 - y'y''' - y'^3 y'''}{y''^2} = -y'\frac{3y'y''^2 - y''' - y'^2 y'''}{y''^2} \qquad (1)$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{3y''^2 y' - y''' - y'^2 y'''}{y''^2} \qquad (2)$$

nous en déduisons la relation

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{y'}.$$

Mais y' est le coefficient angulaire de la tangente à la courbe au point correspondant. Par conséquent, il découle de cette dernière relation que la tangente à la courbe est perpendiculaire à la tangente à la développée de cette courbe au point correspondant ; en d autres termes, la normale à la courbe est la tangente à la développée de cette courbe.

T h é o r è m e 2. *Si le rayon de courbure varie d'une façon monotone* (*c'est-à-dire en restant croissant ou décroissant*)*, dans une certaine partie* $M_1 M_2$ *de la courbe, l'accroissement de la longueur de l'arc de la développée dans cette partie de la courbe est égal* (*en valeur absolue*) *à l'accroissement correspondant du rayon de courbure de cette courbe.*

D é m o n s t r a t i o n . En vertu de la formule (2') du § 1, ch. VI, nous avons:

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

où ds est la différentielle de la longueur de l'arc de la développée; il vient, par conséquent,

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2.$$

En substituant dans cette dernière relation les expressions (1) et (2), nous avons

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=\left(1+y'^2\right)\left(\frac{3y'y''^2-y'''-y'^2y'''}{y''^2}\right) \qquad (3)$$

Calculons maintenant $\left(\frac{dR}{dx}\right)^2$. Comme

$R=\frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{y''}$, alors $R^2=\frac{\left(1+y'^2\right)^3}{y''^2}$.

Dérivons, par rapport à x, les deux membres de cette égalité ; nous trouvons après avoir effectué les transformations adéquates

$$2R\frac{dR}{dx}=\frac{2\left(1+y'^2\right)^2\left(3y'y''^2-y'''-y'^2y'''\right)}{\left(y''\right)^3}.$$

Divisons les deux membres de cette égalité par $2R=\frac{2(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ nous avons:

$$\frac{dR}{dx}=\frac{\left(1+y'^2\right)^{1/2}\left(3y'y''^2-y'''-y'^2y'''\right)}{y''^2}.$$

En élevant au carré, nous avons

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2=\left(1+y'^2\right)\left(\frac{3y'y''^2-y'''-y'^2y'''}{y''^2}\right)^2. \quad (4)$$

Des équations (3) et (4) nous tirons

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2=\left(\frac{ds}{dx}\right)^2$$

d'où

$$\frac{dR}{dx}=\mp\frac{ds}{dx}.$$

Par hypothèse $\frac{dR}{dx}$ ne change pas son signe (R est soit croissant, soit décroissant), par conséquent, $\frac{ds}{dx}$ conserve également son signe. Prenons pour fixer les idées $\frac{dR}{dx}\le 0$, $\frac{ds}{dx}\ge 0$ (ce qui correspond à la fig. 152). Par conséquent, $\frac{dR}{dx}=-\frac{ds}{dx}$.

Soient x_1 et x_2 les abscisses des points M_1 et M_2. Appliquons le théorème de Cauchy aux fonctions $s\,(x)$ et $R\,(x)$ sur le segment $[x_1, x_2]$:

$$\frac{s(x_2)-s(x_1)}{R(x_2)-R(x_1)}=\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=\xi}}{\left(\frac{dR}{dx}\right)_{x=\xi}}=-1,$$

où ξ est un nombre compris entre x_1 et x_2 $(x_1<\xi<x_2)$.

Posons (fig. 152) : $s\,(x_2)=s_2$, $s(x_1)=s_1$, $R\,(x_2)=R_2$, $R\,(x_1)=R_1$.

Alors $\frac{s_2-s_1}{R_2-R_1}=-1$ ou

$s_2-s_1=-(R_2-R_1)$.

Mais cela signifie que $|\,s_2-s_1\,|=|\,R_2-R_1\,|$.

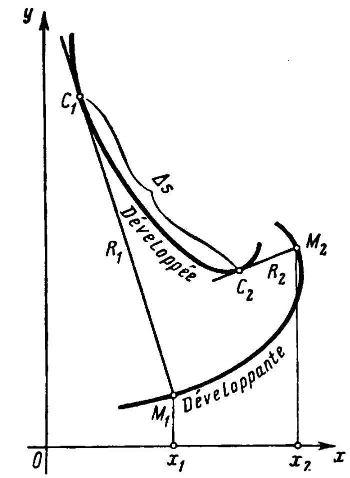


Fig. 152

On démontrerait, d'une manière identique, cette égalité pour le cas où le rayon de courbure serait croissant.

Nous avons démontré les théorèmes 1 et 2 dans le cas où la courbe est définie par une équation explicite $y=f\,(x)$.

Ces théorèmes sont également valables dans le cas où la courbe est définie par des équations paramétriques. La démonstration est identique.

R e m a r q u e. Indiquons un procédé mécanique élémentaire permettant de construire la courbe (développante) à partir de sa développée.

Donnons à une règle flexible la forme de la développée C_0C_5 (fig. 153). Supposons qu'un fil inextensible, dont l'une des extrémités soit fixée au point Co, épouse la forme de la règle. Si nous déroulons le fil tout en le gardant tendu, l'autre extrémité décrira la courbe M_5M_0 qui est la développante. C'est d'ailleurs cette propriété qui a donné à la courbe le nom de développante. Or. peut démontrer, en s'appuyant sur les propriétés de la développée établies plus haut, que la courbe ainsi tracée est bien la développante.

Remarquons également qu'à chaque développée donnée correspond une infinité de développantes (fig. 153).

E x e m p l e. Soit un cercle de rayon a (fig. 154). Choisissons parmi les développantes de ce cercle celle qui passe par le point M_0 $(a, 0)$.

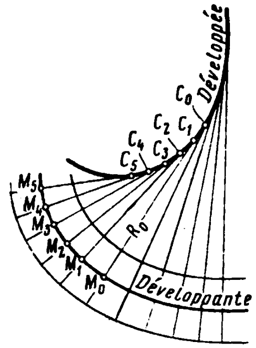


Fig. 153

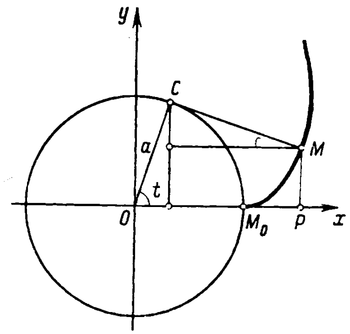


Fig. 154

On trouve facilement l'équation de la développante du cercle en remarquant que $CM = CM_0 = at$:
$OP = x = a\,(\cos t + t \sin t)$, $PM = y = a\,(\sin t - t \cos t)$.
Remarquons que dans la majorité des cas les profils des dents d'un engrenage ont la forme de la développante du cercle.

§ 8. Calcul approché des racines réelles d'une équation

Les méthodes d'étude de la variation des fonctions permettent le calcul des valeurs approchées des racines de l'équation $f(x) = 0$.
Si c'est une équation algébrique *) du premier, deuxième, troisième ou quatrième degré, il existe alors des formules donnant les racines de cette équation en fonction de ses coefficients après un nombre fini d'opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division et d'extraction de racine. De telles formules n'existent pas dans le cas général si le degré de ces équations est supérieur à quatre. Si les coefficients d'une équation quelconque, algébrique ou non (transcendante), ne sont pas des lettres, mais des chiffres, il est alors possible de calculer la valeur approchée des racines de cette équation avec le degré de précision voulu. Remarquons, également, que l'emploi des méthodes pratiques de calcul des valeurs approchées des racines d'une équation donnée s'impose fréquemment, même dans le cas où la valeur exacte des racines de l'équation algébrique peat être exprimée par des radicaux. Nous exposerons cidessous certaines méthodes de calcul de la valeur approchée des racines d'une équation.

* On dit que $f(x) = 0$ est une équation algébrique si $f(x)$ est un polynôme (voir § 6, ch. VII).

1. Méthode des cordes*). Soit

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

une équation, où $f(x)$ est une fonction continue sur le segment $[a, b]$, dont la dérivée d'ordre deux existe. Après l'étude de la fonction $f(x)$, supposons que dans l'intervalle (a, b) il existe un segment $[x_1, x_2]$ à l'intérieur duquel la fonction est

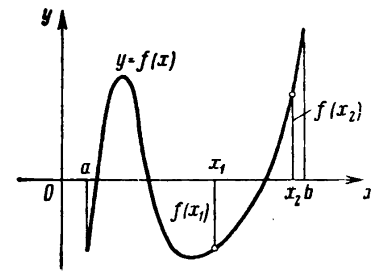


Fig. 155

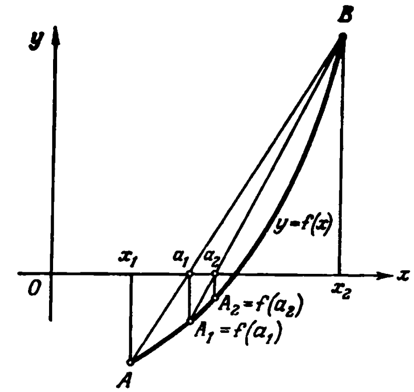


Fig. 156

monotone (croissante ou décroissante) et prend des valeurs de signes contraires aux extrémités de ce segment. Prenons pour fixer les idées $f(x_1) < 0$ et $f(x_2) > 0$ (fig. 155). La fonction $y = f(x)$ étant continue sur le segment $[x_1, x_2]$, son graphique doit nécessairement couper l'axe Ox en un point de l'intervalle (x_1, x_2).
Menons la corde AB joignant les points de la courbe d'abscisses x_1 et x_2. L'abscisse a_1 du point d'intersection de cette corde avec l'axe Ox sera la valeur approchée de la racine (fig. 156). Pour trouver cette valeur approchée, formons l'équation de la droite AB passant par les points donnés $A\,[x_1, f(x_1)]$ et $B\,[x_2, f(x_2)]$

Comme $y = 0$ pour $x = a_1$, nous avons

d'ou

Afin d'obtenir une meilleure approximation de la valeur de la racine déterminons $f(a_1)$. Si $f(a_1) < 0$, nous répétons le procédé que nous venons

* Cette méthode s'appelle également méthode de Lagrange ou méthode des parties proportionnelles. (N.d.T.)

d'indiquer en appliquant la formule (2) au segment $[a_1, x_2]$. Si $f(a_1) > 0$, nous appliquons cette formule au segment $[x_1, a_1]$. En appliquant ce procédé plusieurs fois, nous trouvons une approximation toujoürs meilleure a_2, a_3, etc., de la racine cherchée.

E x e m p l e 1. Trouver les valeurs approchées des racines de l'équation :

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0.$$

S o l u t i o n . Trouvons tout d'abord les intervalles de monotonité de la fonction. Le calcul de la dérivée $f'(x) = 3x^2 - 6$ montre que cette dernière est positive pour $x < -\sqrt{2}$, négative pour $-\sqrt{2} < x < +\sqrt{2}$, et de nouveau positive pour $x > \sqrt{2}$ (fig. 157). La fonction a donc trois intervalles de monotonité ; à l'intérieur de chacun d'eux se trouve une racine.

Afin de simplifier les calculs ultérieurs, rétrécissons les intervalles de monotonité (tout en prenant soin que dans chaque intervalle se trouve la racine correspondante). Pour cela, ayant choisi au hasard certaines valeurs de x et les ayant substituées dans l'expression de $f(x)$, on délimite des intervalles de monotonité plus petits aux extrémités desquels la fonction prend des valeurs de signes contraires :

$x_1 = 0$, $f(0) = 2$,
$x_2 = 1$, $f(1) = -3$,
$x_3 = -3$, $f(-3) = -7$,
$x_4 = -2$, $f(-2) = 6$,
$x_5 = 2$ $f(2) = -2$,
$x_6 = 3$ $f(3) = 11$.

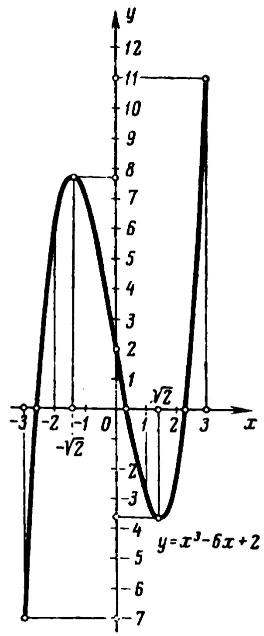


Fig. 157

Les racines se trouvent donc à l'intérieur des intervalles (0; 1), (-3 ; -2), (2 ; 3).

Calculons la valeur approchée de la racine comprise dans l'intervalle (0; 1). En vertu de la formule (2), nous avons:

$$a_1 = 0 - \frac{(1-0)2}{-3-2} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

Mais $f(0{,}4) = 0{,}4^3 - 6 \cdot 0{,}4 + 2 = -0{,}336$, $f(0) = 2$, par conséquent, la racine est comprise entre 0 et 0,4. Appliquons de nouveau la formule (2) à l'intervalle (0;0,4) ; nous trouvons la valeur approchée suivante

$$a_2 = 0 - \frac{(0{,}4-0)2}{-0{,}336-2} = \frac{0{,}8}{2{,}336} = 0{,}342 \text{, etc.}$$

On procédera de même pour trouver les valeurs approchées des racines comprises

dans les autres intervalles.

2. M é t h o d e d e s t a n g e n t e s (m é t h o d e d e N e w t o n). Supposons, à nouveau, que $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$ et que, en outre, la dérivée première conserve son signe sur le segment $[x_1, x_2]$. Alors, l'intervalle (x_1, x_2) ne contient qu'une seule racine de l'équation $f(x) = 0$.

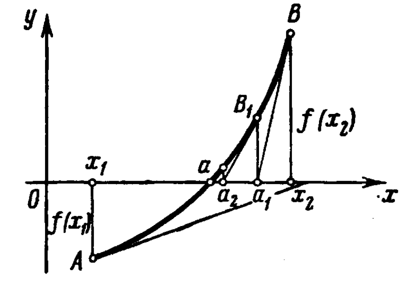


Fig. 158

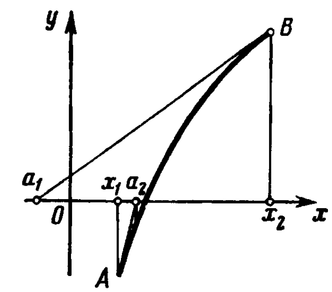


Fig. 159

Supposons, en outre, que la dérivée seconde conserve également son signe sur le segment $[x_1, x_2]$; nous pouvons y arriver en réduisant la longueur de l'intervalle contenant la racine.

Du fait que la dérivée seconde ne change pas son signe sur le segment $[x_1, x_2]$, on déduit que la courbe est soit convexe, soit concave sur ce segment.

Menons la tangente à la courbe au point B (fig. 158). L'abscisse a_1 du point de rencontre de cette tangente avec l'axe Ox sera la valeur approchée de la racine cherchée. Formons l'équation de la tangente au point B pour trouver cette abscisse $y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$. En remarquant que $y = 0$ pour $x = a_1$, nous avons

$$a_1 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \qquad (3)$$

Menant ensuite la tangente à la courbe au point B_1, nous en déduisons une meilleure approximation a_2 de la racine. En répétant ce procédé un nombre de fois suffisamment grand, on peut calculer la valeur approchée de la racine avec le degré de précision voulu.

Attirons l'attention sur le point suivant. Si nous avions mené la tangente à la courbe non au point B mais au point A, le point de rencontre de cette tangente avec l'axe Ox aurait pu se trouver en dehors de l'intervalle (x_1, x_2).

On voit immédiatement des figures 158 et 159 que l'on doit mener la tangente à la courbe à l'extrémité de l'arc où les signes de la fonction et de sa dérivée seconde coïncident. Par hypothèse, la dérivée seconde conserve son signe et, par conséquent, les signes de la fonction et de la dérivée seconde coïncideront nécessairement à l'une des extrémités. Cette règle est égalément valable pour le cas $f'(x) < 0$.

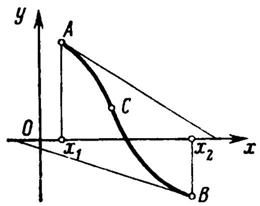


Fig. 160

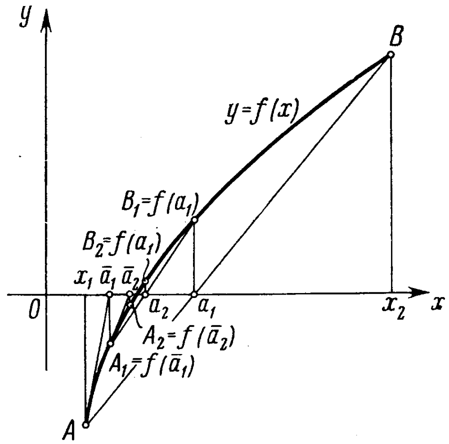


Fig. 161

Si l'on mène la tangente au point de la courbe dont l'abscisse est l'extrémité gauche de l'intervalle, il faut remplacer dans la formule (3) x_2 par x_1

$$a_1 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (3')$$

Si à l'intérieur de l'intervalle (x_1, x_2) se trouve un point d'inflexion C, la méthode des tangentes peut donner une valeur approchée de la racine située en dehors de l'intervalle (x_1, x_2) (fig. 160).

E x e m p l e 2. Appliquons la formule (3') au calcul de la racine de l'équation $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$, située dans l'intervalle (0 ; 1). Nous avons $f(0) = 2, f'(0) = (3x^2 - 6)|_{x=0} = -6, f''(x) = 6x > 0$, c'est pourquoi nous trouvons en vertu de la formule (3'):

$$a_1 = 0 - \frac{2}{-6} = \frac{1}{3} = 0{,}333.$$

M é t h o d e c o m b i n é e (fig. 161). En appliquant simultanément au segment $[x_1, x_2]$ la méthode des cordes et la méthode des tangentes, on obtient deux points a_1 et $\bar{a}_1$ a1, disposés_de part et d'autre de la racine a recherchée (puisque $f(a_1)$ et $f(\bar{a}_1)$ ont des signes différents). On applique ensuite au segment $[a_1, \bar{a}_1]$ la méthode des cordes et la méthode des tangentes. Nous trouvons deux nombres a_2 et $\bar{a}_2$ qui sont encore plus près de la valeur de la racine.

On applique successivement cette méthode jusqu'à ce que la différence des valeurs approchées ainsi obtenues soit inférieure à la marge de précision voulue.

Notons qu'en appliquant la méthode combinée nous nous approchons de la valeur-cherchée de la racine des deux côtés à la fois (c'est-à-dire que nous déterminons simultanément les valeurs approchées par excès et par défaut de la racine).

Ainsi, on vérifie pour l'exemple considéré que $f(0{,}333) > 0, f(0{,}342) < 0$.

Par conséquent, la valeur de la racine est comprise entre les valeurs approchées calculées:

$$0{,}333 < x < 0{,}342.$$

Exercices

Trouver la courbure des courbes aux points indiqués:

1. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ aux points $(0, b)$ et $(a, 0)$. Rép. $\frac{b}{a^2}$ au point $(0, b)$; $\frac{a}{b^2}$ au point $(a, 0)$
2. $xy=12$ au point (3 ; 4). Rép $\frac{24}{125}$
3. $y = x^3$ au point (x_1, y_1). Rép . $\frac{6x_1}{\left(1+3x_1^4\right)^{3/2}}$
4. $16y^2 = 4x^4 - x^6$ au point (2, 0). Rép. $\frac{1}{2}$
5. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ au point arbitraire. Rep. $\frac{1}{3(axy)^{1/3}}$

Trouver le rayon de courbure des courbes aux points indiqués ; construire chaque courbe et le cercle de courbure correspondant:

6. $y^2 = x^3$ au point (4 ; 8). Rép. $R = \frac{80\sqrt{10}}{3}$.
7. $x^2 = 4ay$ au point (0; 0). Rép. $R = 2a$.
8. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ au point (x_1, y_1). Rép. $R = \frac{\left(b^4x_1 + a^4y_1\right)^{3/2}}{a^4b^4}$.
9. $y = \text{Log}\, x$ au point (1; 0). Rép. $R = 2\sqrt{2}$.
10. $y = \sin x$ au point (2 , 1) . Rép. $R = 1$.
11. $\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right\}$ pour $t = t_1$. Rép .$R = a \sin t_1 \cos t_1$

Trouver le rayon de courbure des courbes suivantes:

12. $\left.\begin{array}{l} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{array}\right\}$ pour $t = 1$. Rép. $R = 6$.

13. La circonférence $\rho = a \sin\theta$. Rép. $R = \dfrac{a}{2}$.

14. La spirale d'Archimède $\rho = a\theta$. Rép. $R = \dfrac{\left(\rho^2 + a^2\right)^{3/2}}{\rho^2 + 2a^2}$.

15. La cardioide $\rho = a\,(1 - \cos\theta)$. Rép. $R = \dfrac{2}{3}\sqrt{2a\rho}$.

16. La lemniscate $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$. Rép. R= 3P

17. La parabole $\rho = a \sec^2 \dfrac{\theta}{2}$. Rép. $R = 2a \sec^3 \dfrac{\theta}{2}$.

18. $P = a \sin^3 \dfrac{\theta}{3}$ 3 . Rép. $R = \dfrac{3}{4} a \sin^2 \dfrac{\theta}{3}$.

Trouver les points des courbes où le rayon de courbure est le plus petit:

19. $y = \operatorname{Log} x$. Rép. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{1}{2}\log 2\right)$.

20. $y = e^x$. Rép. $\left(-\dfrac{1}{2}\log 2, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

21. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. Rép $\left(\dfrac{a}{4}, \dfrac{a}{4}\right)$.

22. $y = a \operatorname{Log}\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$. Rép. Au point (0, 0) $R = \dfrac{a}{2}$.

Trouver les coordonnées du centre de courbure (α, β) et l'équation de la développée de chacune des courbes suivantes:

23. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Rép. $\alpha = \dfrac{\left(a^2 + b^2\right)x^3}{a^4}$; $\beta = -\dfrac{\left(a^2 + b^2\right)y^3}{b^4}$

24. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Rép. $\alpha = x + 3x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$; $\beta = y + 3x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$.

25. $y^3 = a^2 x$. Rép. $\alpha = \dfrac{a^4 + 15y^4}{6a^2 y}$; $\beta = \dfrac{a^4 y - 9y^5}{2a^4}$,

26. $\begin{cases} x = 3t, \\ y = t^2 - 6 \end{cases}$ Rép. $\alpha = -\dfrac{4}{3}t^3$; $\beta = 3t^2 - \dfrac{3}{2}$

27. $\begin{cases} x = k \log \operatorname{ctg} \dfrac{t}{2} - k \cos t, \\ y = k \sin t. \end{cases}$ Rép. $y = \dfrac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$ (tractrice).

28. $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$ Rép. $\begin{array}{l} \alpha = a \cos t; \\ \beta = a \sin t. \end{array}$

29. $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$. Rép $\begin{array}{l} \alpha = a \cos^3 t + 3a \cos t \sin^2 t; \\ \beta = a \sin^3 t + 3a \cos^2 t \sin t \end{array}$.

30. Calculer les racines de l'équation $x^3 - 4x + 2 = 0$ à 0,001 près.Rép. x_1 = 1,675, x_2 = 0,539, x_3 = -2,214.

31. Calculer la valeur approchée de la racine de l'équation $f(x) = x^5 - x - 0{,}2 = 0$ comprise dans l'intervalle (1 ; 1,1). Rép. 1,045.

32. Calculer les racines de l'équation $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$ à 0,01 près. Rép. $0{,}38 < x_1 < 0{,}39$; $1{,}24 < x_2 < 1{,}25$.

33. Trouver la valeur approchée des racines de l'équation $x^3 - 5 = 0$.Rép. $x_1 \approx$ 1,71, $x_{2,3}$=1,71 $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

34. Trouver la valeur approchée de la racine de l'équation $x - \operatorname{tg} x = 0$ comprise entre 0 et $\dfrac{3\pi}{2}$. Rép. 4,4935.

35. Trouver la valeur approchée de la racine de l'équation $\sin x = 1 - x$ à 0,001 près. I n d i c a t i o n. Mettre l'équation sous la forme $f(x) = 0$. Rép. $0{,}5110 < x < 0{,}5111$.

Problèmes divers

36. Montrer qu'en chaque point de la lemniscate $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ la courbure est proportionnelle au rayon vecteur en ce point.

37. Trouver la plus grande valeur du rayon de courbure de la courbe $\rho = a \sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$ .Rép. $R = 3a/4$.

38. Trouver les coordonnées du centre de courbure de la courbe $y = x \operatorname{Log} x$ au point où $y' = 0$. Rép. $(e^{-1}, 0)$.

39. Démontrer que pour les points de la spirale d'Archimède $\rho = a\varphi$ la valeur de la différence entre le rayon vecteur et le rayon de courbure tend vers zéro quand $\varphi \to \infty$.

40. Trouver la parabole $y = ax^2 + bx + c$, ayant avec la sinusoïde $y = \sin x$ une tangente commune et la même courbure au point ($\pi/2$, 1). Faire undessin. Rép. $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2} + 1 - \frac{\pi^2}{8}$. .

41. La fonction $y = f(x)$ est ainsi déterminée $f(x) = x^3$ dans l'intervalle $-\infty < x < 1$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ dans l'intervalle $1 < x < +\infty$. Quelles doivent être les valeurs de a, b, c pour que la courbe $y = f(x)$ ait partout une courbure continue ? Faire un dessin. Rép. $a = 3$, $b = -3$ $c = 1$.

42. Montrer que le rayon de courbure d'une cycloïde est en chaque point le double de la longueur de la normale en ce point.

43. Ecrire l'équation du cercle de courbure de la parabole $y = x^2$ au point (1, 1). Rép. $(x+4)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}$.

44. Ecrire l'équation du cercle de courbure de la courbe $y = \operatorname{tg} x$ au point $\left(\frac{\pi}{4};1\right)$ Rép. $\left(x - \frac{\pi - 10}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}$.

45. Trouver la longueur de la développée de l'ellipse dont les demi-axes sont égaux à a et b. Rép. $4\,(a^3 - b^3)/ab$.

46. Trouver la valeur approchée des racines de l'équation $xe^x = 2$ à 0,01 près.Rép. L'équation a une racine réelle unique $x \approx 0{,}84$.

47. Trouver la valeur approchée des racines de l'équation $x \operatorname{Log} x = 0{,}8$ à0,01 près. Rép. L'équation a une racine réelle unique $x \approx 1{,}64$.

48. Trouver la valeur approchée des racines de l'équation $x^2 \operatorname{arc\,tg} x = 1$ à 0,001 près. Rép. L'équation a une racine réelle unique $x \approx 1{,}096$.

Chapitre VII NOMBRES COMPLEXES. POLYNÔMES

§ 1. Nombres complexes.Définitions :

On appelle *nombre complexe z* toute expression de la forme

$$z = a + ib, \qquad (1)$$

où a et b sont des nombres réels et i l'unité imaginaire définie par la relation

$$i = \sqrt{-1} \text{ ou } i^2 = -1 ; \qquad (2)$$

a est appelé la partie *réelle* et b la partie *imaginaire* du nombre complexe z. On les note ainsi

$$a = \operatorname{Re} z,\ b = \operatorname{Im} z.$$

Si $a = 0$, le nombre $0 + ib = ib$ est dit *purement imaginaire* ; si $b = 0$, on retrouve un nombre réel: $a + i0 = a$. On dit que deux nombres complexes $z = a + ib$ et $\bar{z} = a - ib$ sont conjugués s'ils ne diffèrent que par le signe de leur partie imaginaire.

On adopte deux conventions fondamentales

1) deux nombres complexes $z_1 = a_1 + i\,b_1$ et $z_2 = a_2 + i\,b_2$ sont égaux $z_1 = z_2$,

$$\text{si } a_1 = a_2,\ b_1 = b_2,$$

autrement dit si séparément leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales.

2) un nombre complexe z est égal à zéro

$$z = a + ib = 0$$

si et seulement si $a = 0$, $b = 0$.

1.R e p r é s e n t a t i o n g é o m é t r i q u e d e s n o m b r e s c o m p l e x e s .Tout nombre complexe $z = a + ib$ peut être représenté sur le plan Oxy par un point A (a, b) de coordonnées a et b, et réciproquement, tout point M (x, y) du plan Oxy peut être considéré comme l'image géométrique du nombre complexe $z = x + iy$. Le plan sur lequel on représente les nombres complexes est appelé *plan de la variable complexe z* (fig. 162) (sur le plan le symbole z est entouré d'un petit cercle).

Mais si à *tout point* A (a, b) correspond un nombre complexe $a + ib$, alors, en particulier, à tout point de l'axe Ox correspond un nombre réel ($b = 0$). Tout point de l'axe Oy représente un nombre purement imaginaire puisque dans ce cas $a = 0$.

C'est pourquoi, eu égard à une telle représentation des nombres complexes sur le plan, on appelle l'axe *Oy axe imaginaire* et l'axe *Ox axe réel*. 260

En joignant le point A (a, b) à l'origine des coordonnées on obtient le vecteur $\overline{OA}$.

Pour des raisons de commodité, on assimile parfois le nombre complexe $z = a + ib$ au vecteur $\overline{OA}$ correspondant.

2. F o r m e t r i g o n o m é t r i q u e d e s n o m b r e s c o m p l e x e s . Désignons par φ et r ($r \geq 0$) les coordonnées polaires du point A (a, b), en prenantl'origine des coordonnées pour pôle et le sens positif de l'axe Ox pour axe polaire.Alors (fig. 162) on a les relations suivantes $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ et, par conséquent, tout nombre complexe z peut être mis sous la forme

$$a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$$

ou

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \ (3)$$

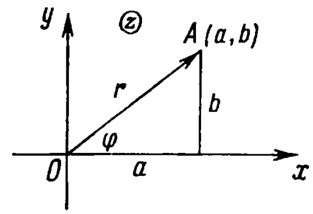


Fig. 162

L'expression figurant dans le second membre de cette relation est la forme trigonométrique du nombre complexe $z = a + ib$; r est dit module et φ argument du nombre complexe ; ils sont notés ainsi $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. (4)

Les grandeurs r et φ s'expriment ainsi en fonction de a et b:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

Donc

$$\left.\begin{aligned} |z| &= |a + ib| = \sqrt{a^2+b^2}, \\ \arg z &= \arg(a + ib) = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

L'argument du nombre complexe, l'angle φ, est positif s'il est compté à partir de l'axe des x positifs dans le sens inverse des aiguilles dune montre et négatif dans le cas contraire. Il est évident que l'argument φ n'est pas défini d'une manière univoque, mais à $2\pi k$ près, où k est un nombre entier quelconque.

R e m a r q u e . Les nombres complexes conjugués $z = a + ib$ et $\bar{z} = a - ib$ ont des modules égaux $|z| = |\bar{z}|$ et leurs arguments sont égaux en valeur absolue, mais de signes différents : $\arg z = -\arg \bar{z}$.

Notons que tout nombre réel A peut être également mis sous la forme (3), à savoir

$$A = |A| (\cos 0 + \mathrm{i} \sin 0) \text{ quand } A > 0,$$
$$A = |A| (\cos \pi + \mathrm{i} \sin \pi) \text{ quand } A < 0.$$

Le module du nombre complexe 0 est égal à zéro : $|0| = 0$. On peut prendre pour argument du nombre zéro un angle φ quelconque. En effet, quel que soit φ, on aura $0 = 0 (\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi)$.

§ 2. Principales opérations sur les nombres complexes

1. Addition des nombres complexes. La *somme* de deux nombres complexes $z_1 = a_1 + i\, b_1$ et $z_2 = a_2 + i\, b_2$ est le nombre complexe défini par l'égalité

$$z_1 + z_2 = (a_1 + i\, b_1) + (a_2 + i\, b_2) = (a_1 + a_2) + \mathrm{i}\, (b_1 + b_2) \quad (1)$$

On voit de la formule (1) que l'addition des nombres complexes représentés sous forme de vecteurs satisfait aux règles d'addition des vecteurs (fig. 163, *a*).

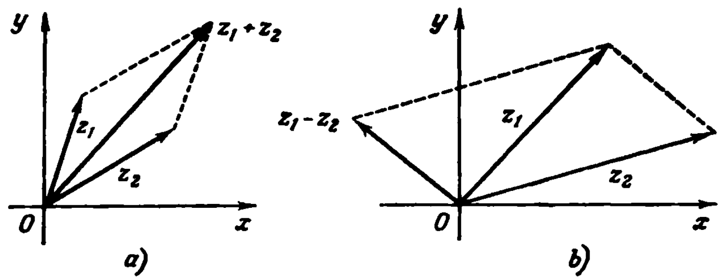


Fig. 163

2. Soustraction des nombres complexes. La *différence* de deux nombres complexes $z_1 = a_1 + i\, b_1$ et $z_2 = a_2 + i\, b_2$ est le nombre complexe qui, ajouté à z_2, donne z_1:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + i\, b_1) - (a_2 + i\, b_2) = (a_1 - a_2) + \mathrm{i}\, (\mathrm{bi} - \mathrm{b2}) \quad (2)$$

Remarquons que le module de la différence de deux nombres complexes, $\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$, est égal à la distance entre les deux points correspondants du plan complexe (fig. 163, *b*)

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}\ .$$

3. Multiplication des nombres complexes.Le *produit* des nombres complexes $z_1 = a_1 + i\, b_1$, et $z_2 = a_2 + i\, b_2$ est le nombre complexe que

l'on trouve en multipliant ces nombres comme des binômes d'après les règles du calcul algébrique et en tenant compte des relations:

$$i^2 = -1 \qquad i^3 = -i\; i^4 = (-i)\, i = -\mathrm{i}2 = i^5 = \mathrm{i}, \text{ etc.},$$

et en général pour tout entier k:

$$i^{4k} = 1\ ,\ i^{4k+1} = i\ ,\ i^{4k+2} = -1\ ,\ i^{4k+3} = -i.$$

En vertu de cette règle, nous avons:

$$z_1 z_2 = (a_1 + i\, b_1)(a_2 + i\, b_2) = a_1 a_2 + i\, b_1 a_2 + i\, a_1 b_2 + i^2 b_1 b_2$$

ou

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i\, (b_1 a_2 + a_1 b_2). \qquad (3)$$

Si les nombres complexes sont donnés_ sous forme trigonométrique, on aura

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

Trouvons le produit de ces nombres

$$z_1 z_2 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)\, r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$
$$= r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2]$$
$$= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i\, (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)]$$
$$= r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Ainsi,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] \qquad (3')$$

c'est-à-dire *le produit de deux nombres complexes est un nombre complexe dont le module est égal au produit des modules des facteurs et l'argument à la somme des arguments des facteurs*.

Remarque 1. En vertu de la formule (3), les nombres complexes conjugués $z = a + ib$ et $\bar{z} = a - ib$ vérifient la relation

$$z\bar{z} = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2$$

ou

$$z\bar{z} = |z|^2 - |\bar{z}|^2$$

Le produit de deux nombres complexes conjugués est un nombre réel égal au carré du module de chacun d'eux.

4. Division des nombres complexes. La division de deux nombres complexes est l'opération inverse de leur produit. Soient $z_1 = a_1 + i\, b_1$, $z_2 = a_2 + i\, b_2$, $|z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \neq 0$. Alors $\dfrac{z_1}{z_2} = z$ est un nombre complexe tel que $z_1 = z_2 z$.

Si

$$\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=x+iy$$

alors

$$a_1 + ib_1 = (a_2 + i\, b_2)(x + iy)$$

ou

$$a_1 + ib_1 = (a_2x - b_2y) + i\,(a_2y + b_2x)\;;$$

x et y sont déterminés du système d'équations

$$a_1 = a_2x - b_2\, y, \quad b_1 = b_2\, x + a_2\, y,$$

d'où nous trouvons:

$$x=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}, \quad y=\frac{a_{21}b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

et nous avons en définitive

$$z=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_{21}b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}. \quad (4)$$

En pratique, on procède de la manière suivante pour effectuer la division de deux nombres complexes : pour diviser $z_1 = a_1 + i\, b_1$ par $z_2 = a_2 + i\, b_2$ on multiplie le dividende et le diviseur par le nombre complexe conjugué du diviseur (c'est-à-dire par $a_2 - i\, b_2$).

Le diviseur devient alors un nombre réel ; en divisant par ce nombre réel la partie réelle et la partie imaginaire du dividende, on trouve le quotient

$$\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+i(a_2b_1-a_1b_2)}{(a_2^2+b_2^2)}=$$

$$\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

Dans le cas des nombres complexes exprimés sous forme trigonométrique

$$z_1 = r_1\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\; z_2 = r_2\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

on a

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]. \quad (5)$$

Pour vérifier cette égalité, il suffit de multiplier le diviseur par le quotient

$$r_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)\frac{\mathrm{r}_1}{\mathrm{r}_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]=$$

$$r_2\frac{\mathrm{r}_1}{\mathrm{r}_2}\left[\cos(\varphi_2+\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_2+\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

$$=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1).$$

Ainsi, *le module du quotient de deux nombres complexes est égal au -quotient des modules du dividende et du diviseur; l'argument du quotient est égal à la différence des arguments respectifs du dividende et du diviseur*.

R e m a r q u e 2. Les règles qui régissent les opérations .effectuées avec les nombres complexes montrent que la somme, la différence, le produit et le quotient des nombres complexes sont aussi des nombres complexes.

Si on applique aux nombres réels, considérés comme un cas particulier des nombres complexes, les règles qui régissent les opérations effectuées avec les nombres complexes, on voit qu'elles concordent avec les règles usuelles en arithmétique.

R e m a r q u e 3. En revenant aux définitions de la somme, de la différence, du produit et du quotient des nombres complexes, on vérifie aisément que si on les remplace par leurs conjugués respectifs, les résultats des opérations indiquées doivent aussi être remplacés par leurs conjugués. En particulier, il en découle le théorème suivant.

T h é o r è m e . Si dans le polynôme à coefficients réels

$$A_0x^{\mathrm{n}+}A_1x^{\mathrm{n}-1}+\ldots+A^{\mathrm{n}}$$

on substitue à x le nombre $a + ib$, puis le nombre conjugué $a - ib$, les résultats obtenus seront respectivement conjugués.

§ 3. Elévation d'un nombre complexe à une puissance et extraction de la racine d'un nombre complexe

1. E l é v a t i o n à u n e p u i s s a n c e . Il vient de la formuale (3') du paragraphe précédent que si n est un entier positif, alors

$$\left[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \quad (1)$$

Cette formule est appelée *formule de Moivre*. Elle montre que *quand on élève un nombre complexe à une puissance entière positive, le module de ce nombre* *est élevé.à cette puissance et l'argument est multiplié par l'exposant de cette puissance.*

Arrêtons-nous à une application de la formule de Moivre.

Posons dans cette formule $r = 1$, nous avons:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

En développant le premier membre, d'après la formule du binôme de Newton, et en identifiant les parties réelles et les coefficients de i, on peut exprimer sin $n\varphi$ et cos ncp en fonction des puissances de sin cp et cos cp. Par exemple, pour n = 3 nous avons:

$$\cos^3\varphi + i3\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

I1 découle de l'égalité de ces nombres complexes que

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi,$$
$$\sin 3\varphi = -\sin^3\varphi + 3\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

2. Extraction de la racine. On appelle racine $n^{\text{ième}}$ a d'un nombre complexe le nombre complexe qui, élevé à la puissance n, donne le nombre figurant sous la racine, c'est-à-dire

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),,$$

si

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Puisque pour deux nombres complexes égaux leurs modules sont égaux et la différence de leurs arguments est un multiple de 2π, nous pouvons écrire

$$\rho^n = r,\quad n\psi = \varphi + 2k\pi.$$

D'où nous trouvons

$$\rho = \sqrt[n]{r},\quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

où k est un entier arbitraire et $\sqrt[n]{r}$ la racine arithmétique (c'est-à-dire un nombre réel positif) du nombre positif r. Par conséquent,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right). \qquad (2)$$

En donnant à k les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n - 1$ nous trouvons n valeurs différentes de la racine. Chaque valeur de la racine obtenue, en donnant à k une valeur plus

grande que $n - 1$, ne se distingue de l'une des valeurs précédentes que par un multiple de 2π et, par conséquent, ces deux valeurs de la racine s'identifient.

La racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe a donc n valeurs différentes.

La racine $n^{\text{ième}}$ du nombre réel A, différent de zéro, a également n valeurs différentes, puisque les nombres réels sont un cas particulier des nombres complexes et peuvent être exprimés également sous forme trigonométrique

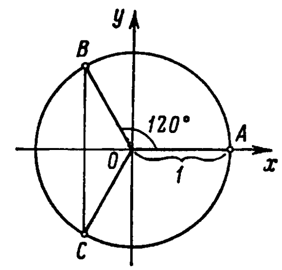


Fig. 164.

si $A > 0$, alors $A = |A|(\cos 0 + i\sin 0)$;

si $A < 0$, alors $A = |A|(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Exemple 1. Soit à calculer les racines cubiques de l'unité.

Solution. Mettons l'unité sous forme trigonométrique

$$1 = \cos 0 + i\sin 0.$$

Nous trouvons de la formule (2)

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{0 + 2k\pi}{3}.$$

Pour k=0, 1, 2 nous avons les trois valeurs de la racine

$$x_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1;\quad x_2 = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3};\ x_3 = \cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3};$$

Or,

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2};\quad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2};\quad \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

nous avons, par conséquent:

$$x_1 = 1;\ x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\quad x_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Les points A, B, C de la figure 164 sont les images géométriques des racines obtenues.

3. Résolution des équations binômes. On appelle équation bin6me toute équation de la forme

$$x^n = A.$$

Cherchons les racines de cette équation.

Si A est un nombre réel positif, alors

$$x = \sqrt[n]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1).$$

L'expression entre parenthèses donne toutes les valeurs de la racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.
Si A est un nombre réel négatif, alors

$$x=\sqrt[n]{|A|}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}\right).$$

L'expression entre parenthèses donne toutes les valeurs de la racine $n^{\text{ième}}$ de -1.
Si A est un nombre complexe, on trouve les valeurs de x à partir de la formule (2).
E x e m p l e 2. Résoudre l'équation $x^4 = 1$.
S o l u t i o n.

$$x=\sqrt[4]{\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi}=\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}.$$

Pour $k = 0, 1, 2, 3$ nous avons

$$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$x_2=\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}=i,$$

$$x_3=\cos\frac{4\pi}{4}+i\sin\frac{4\pi}{4}=-1,$$

$$x_4=\cos\frac{6\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi}{4}=-i.$$

§ 4. Fonction exponentielle à exposant complexe et ses propriétés

Soit $z = x + iy$. Si x et y sont des variables réelles, z est une variable complexe. A chaque valeur de la variable z correspond un point bien déterminé (fig. 162) dans le plan Oxy (p l a n d e l a v a r i a b l e c o m p l e x e).
D é f i n i t i o n. On dit que w est une *fonction de la variable complexe* z si à chaque valeur de la variable z, prise dans un certain domaine du plan de la variable complexe, correspond une valeur bien définie de la variable complexe w; cette *fonction de la variable complexe* est notée : $w = f(z)$ ou $w = w(z)$.
Nous considérerons ici une seule fonction de la variable complexe, la fonction exponentielle

$$w = e^z$$

ou

$$w = e^{z+iy}.$$

Les valeurs complexes de la fonction w se définissent comme suit *)

$$e^{z+iy} = e^x (\cos y + i \sin y),\quad (1)$$

c'est-à-dire

$$w(z) = e^x (\cos y + i \sin y).\quad (2)$$

Exemples.

1) $z=1+\frac{\pi}{4}i,\ e^{1+\frac{\pi}{4}i}=e\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=e\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$

2) $z=0+\frac{\pi}{2}i,\ e^{0+\frac{\pi}{2}i}=e^0\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=i,$

3) $z = 1 + i$, $e^{1+i} = e^1 (\cos 1 + i \sin 1) \approx 0{,}54 + i\cdot 0{,}83$,

4) $z = x$ est le nombre réel, $e^{x+0i} = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x$ est la fonction exponentielle ordinaire.

P r o p r i é t é s d e l a f o n c t i o n e x p o n e n t i e l l e.

1. Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}.\quad (3)$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit

$$z_1 = x_1 + i y_1,\ z_2 = x_2 + i y_2;$$

alors

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)}=e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \\ &= e^{x_1}e^{x_2}\left[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)\right] \end{aligned}\quad (4)$$

Par ailleurs, en vertu du théorème relatif au produit de deux nombres complexes exprimés sous forme trigonométrique, nous avons

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+iy_1)}e^{(x_2+iy_2)}=e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)\times e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)= \\ &= e^{x_1}e^{x_2}\left[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)\right] \end{aligned}\quad (5)$$

Les seconds membres dans les égalités (4) et (5) sont égaux et, par conséquent, les premiers membres le sont aussi : $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$.

2. On démontre d'une façon analogue la formule:

$$e^{z_1-z_2}=\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}.\quad (6)$$

3. Si m est un nombre entier, on a

$$(e^z)^m = e^{mz}\quad (7)$$

Pour $m > 0$ cette formule se démontre aisément à partir de la formule (3) ; si $m < 0$, cette formule est déduite des formules (3) et (6).

4. Démontrons l'identité

---

* Le bien-fondé d'une telle définition de la fonction exponentielle de la variable complexe apparaîtra par la suite, v. t. II, § 21, ch. XIII et § 18, ch. XVI.

$$e^{z+2\pi i}=e^{z}. \qquad (8)$$

En effet, on obtient des formules (3) et (1)

$$e^{z+2\pi i}=\text{-}\ e^{z}\,e^{2\pi i}=e^{z}\,(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^{z}.$$

I1 vient de l'identité (8) que la fonction exponentielle e^z est une fonction périodique de période $2\pi i$.

5. Considérons maintenant la quantité complexe

$$w=u\,(x)+iv\,(x),$$

où $u\,(x)$ et $v\,(x)$ sont des fonctions réelles de la variable réelle x. C'est ce que l'on appelle une *fonction complexe de la variable réelle x*.

a) Supposons que les limites

$$\lim_{x\to x_0} u(x)=u(x_0), \qquad \lim_{x\to x_0} v(x)=v(x_0)$$

existent. Alors, on appelle $u\,(x_o)+iv\,(x_o)=w_0$ la limite de la variable complexe w.

b) Si les dérivées $u'\,(x)$ et $v'\,(x)$ existent, on appelle l'expression

$$w'_x=u'\,(x)+i\,v'\,(x) \qquad (9)$$

la *dérivée* de la fonction complexe de la variable réelle par rapport. à cette variable réelle.

Considérons ensuite la fonction exponentielle

$$w=e^{\alpha x+i\beta x}=e^{(\alpha+i\beta)\,x}$$

où α et β sont des nombres réels constants et x une variable réelle. C'est une fonction complexe de la variable réelle, que l'on peut, en vertu de la formule (1), mettre sous la forme

$$w=e^{\alpha x}[\cos\beta x+i\sin\beta x]$$

ou

$$w=e^{\alpha x}\cos\beta x+i\,e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Calculons la dérivée w'_x. En vertu de la formule (9), nous avons:

$$w'_x=(e^{\alpha x}\cos\beta x)'+i(e^{\alpha x}\sin\beta x)'=$$
$$e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x)+ie^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x)=$$
$$\alpha\left[e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)\right]+i\beta\left[e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x\right]=$$
$$(\alpha+i\beta)\left[e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)\right]=(\alpha+i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}.$$

Donc si $w=e^{(\alpha+i\beta)\,x}$, alors $w'=(\alpha+i\beta)\,e^{(\alpha+i\beta)\,x}$ ou

$$\left[e^{(\alpha+i\beta)x}\right]'=(\alpha+i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}. \qquad (10)$$

Ainsi, si k est un nombre complexe (en particulier un nombre réel) et x un nombre réel, alors

$$(e^{kx}).=ke^{kx}.$$

Nous retrouvons la formule usuelle de dérivation de la fonction exponentielle. Par ailleurs,

$$(e^{kx})''=[(e^{kx})']'=k\,(e^{kx})'=k^2e^{kx},$$

et pour n quelconque

$$(e^{k})^{(n)}=k^n\,e^{kx}.$$

Ces formules nous seront utiles par la suite.

§ 5. Formule d'Euler. Forme exponentielle d'un nombre complexe

Si l'on pose dans la formule (1) du paragraphe précédent $x=0$, on a:

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y. \qquad (1)$$

C'est la *formule d'Euler* qui exprime le lien entre la fonction exponentielle à exposant imaginaire et les fonctions trigonométriques.

En remplaçant dans la formule (1) y par $-y$, on a

$$e^{-iy}=\cos y-i\sin y. \qquad (2)$$

Dn déduit des égalités (1) et (2) l'expression de sin y et de cos y

$$\left.\begin{aligned}\cos y&=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\\ \sin y&=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

On utilise, en particulier, ces dernières formules pour exprimer les puissances de cos φ et sin φ ainsi que leurs produits en fonction des sinus et des cosinus des arcs multiples.

E x e m p l e s : 1.

$$\cos^2 y=\left(\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(e^{i2y}+2+e^{-i2y})=$$
$$\frac{1}{4}\left[(\cos 2y+i\sin 2y)+2+(\cos 2y-i\sin 2y)\right]=$$
$$\frac{1}{4}(2\cos 2y+2)=\frac{1}{2}(1+\cos 2y).$$

2. $\cos^2\varphi\sin^2\varphi=\left(\dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)=$

$$\frac{(e^{i2\varphi}-e^{-i2\varphi})^2}{4\cdot 4i^2}=-\frac{1}{8}\cos 4\varphi+\frac{1}{8}.$$

F o r m e exponentielle des nombres complexes. Représentons le nombre complexe z sous forme trigonométrique:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

où r est le module et y l'argument de ce nombre complexe. En vertu de la formule d'Euler

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}. \qquad (4)$$

Par conséquent, tout nombre complexe peut être mis sous la forme dite exponentielle:

$$z = r\,e^{i\varphi}.$$

E x e m p l e s. Mettre les nombres 1, i, -2, - i sous la forme exponentielle.

S o l u t i o n . $1=\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = e^{2k\pi i}$

$i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$,

$-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2e^{\pi i}$,

$-i = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

A l'appui des propriétés (3), (6), (7) § 4 de la fonction exponentielle on peut effectuer aisément les opérations sur les nombres complexes donnés sous forme exponentielle. Soient

$$z_1=r_1e^{i\varphi_1}, \quad z_2=r_2e^{i\varphi_2}.$$

Nous avons alors

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}; \qquad (5)$$

ce résultat coïncide avec la formule (3') § 2.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \qquad (6)$$

cette formule coïncide avec la formule (5) § 2.

$$z^n = (r\,e^{i\varphi})^n = r^n\,e^{in\varphi}. \qquad (7)$$

cette formule coïncide avec la formule (1) § 3.

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \quad (k=0, 1, 2, \qquad , n-1); \quad (8)$$

cette formule coïncide avec la formule (2) § 3.

§ 6. Décomposition d'un polynôme en facteurs

On appelle *polynôme ou fonction rationnelle entière de* x la fonction

$$f(x) = A_o x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n,$$

où n est un nombre entier ; comme on le sait, le nombre n est appelé *degré* du polynôme. Les coefficients A_o, A_1, . . ., A_n sont ici des nombres réels ou complexes. La variable indépendante x peut également prendre soit des valeurs réelles, soit des valeurs complexes.

On appelle racine d'un polynôme la valeur de la variable x pour laquelle le polynôme s'annule.

T h é o r è m e 1 (*Théorème de Bézout*).*Le reste de la division du polynôme* $f(x)$ *par le monôme* $x - a$ est égal à $f(a)$.

D é m o n s t r a t i o n . Le quotient de la division de $f(x)$ par $x - a$ est un polynôme $f_1(x)$ de degré inférieur d'une unité à celui du polynôme $f(x)$; le reste est un nombre constant R. Nous pouvons donc écrire

$$f(x) = (x - a) f_1(x) + R. \qquad (1)$$

Cette égalité est vraie pour toutes les valeurs de x différentes de a (la division par $x - a$ n'a pas de sens pour $x = a$).

Si maintenant x tend vers a, la limite du premier membre de l'égalité (1) sera égale à $f(a)$ et la limite du second membre sera égale à R. Les fonctions $f(x)$ et $(x- a) f_1(x) + R$ étant égales pour toutes les valeurs de $x \neq$ a, leurs limites quand $x \to a$ sont aussi égales, c'est-à-dire $f(a) = R$.

C o r o l l a i r e . *Si a est une racine du polynôme, c'est-à-dire si* $f(a) = 0$, $f(x)$ *se divise exactement par* $x - a$ et peut être, par conséquent, mise sous forme du produit

$$f(x) = (x - a) f_1(x),$$

où $f_1(x)$ est un polynôme.

E x e m p l e 1. Le polynôme $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ s'annule pour $x = 1$, c'est-à-dire $f(1)=0$, donc le polynôme se divise exactement par $x - 1$:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 =(x - 1)(x^2 - 5x + 6).$$

Considérons maintenant les équations à une inconnue x.

On appelle *racine* d'une équation tout nombre (réel ou complexe) qui, substitué à x dans l'équation, la transforme en identité.

E x e m p l e 2. Les nombres $x_1=\dfrac{\pi}{4}$; $x_2=\dfrac{5\pi}{4}$; $x_3=\dfrac{9\pi}{4}$, . . . sont les racines de l'équation $\cos x = \sin x$.

On appelle équation *algébrique* de degré n les équations de la forme $P(x) = 0$, où $P(x)$ est un polynôme de degré n. Il découle de la définition que les racines de l'équation algébrique $P(x) = 0$ s'identifient à celles du polynôme $P(x)$.

La question se pose naturellement de savoir si toute équation a des racines. La réponse est négative si l'on considère les équations non algébriques, car il existe des équations de ce genre qui n'ont ni de racines réelles ni de racines complexes : par exemple, l'équation $e^x = 0$ *).

Toutefois, si l'on considère les équations algébriques, on doit répondre par l'affirmative à cette question. Dans ce cas, la réponse constitue ce que l'on appelle le théorème fondamental de l'algèbre.

Théorème 2 (Théorème fondamental de l'algèbre). *Toute fonction rationnelle entière $f(x)$ a au moins une racine réelle ou complexe*.

On démontre ce théorème en algèbre supérieure. Nous l'admettons ici sans démonstration.

En se servant du théorème fondamental de l'algèbre, on démontre facilement la proposition suivante.

Théorème 3. *Tout polynôme de degré n se décompose en n facteurs linéaires de forme x - a et un facteur égal au coefficient de x^n*.

Démonstration. Soit $f(x)$ un polynôme de degré n

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n.$$

En vertu du théorème fondamental de l'algèbre, ce polynôme a au moins une racine ; désignons-la par a_1. Alors, en vertu du corollaire du théorème de Bézout, nous pouvons écrire

$$f(x) = (x - a_1) f_1(x),$$

où $f_1(x)$ est un polynôme de degré $(n - 1)$; $f_1(x)$ a également une racine. Désignons-la par a_2. Alors

$$f_2(x) = (x - a_2) f_2(x),$$

où $f_2(x)$ est un polynôme de degré $(n - 2)$. De même,

$$f_2(x) = (x - a_3) f_3(x)$$

En procédant ainsi le nombre de fois nécessaire, on arrive â la relation

$$f_{n-1}(x) = (x - a_n) f_n,$$

où f_n est un polynôme de degré zéro, c'est-à-dire une constante. Cette constante est égale, évidemment, au coefficient de x^n, c'est-à-dire $f_n = A_0$.

Nous pouvons donc écrire en vertu des égalités obtenues

$$f(x) = A_o (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n). \qquad (2)$$

* En effet si un nombre $x_1 = a + bi$ était la racine de cette équation, on aurait l'identité e^{a+bi}; = 0 ou (en vertu de la formule d'Euler e^a (cos b + i sin b) = 0. Mais e^a ne peut s'annuler quel que soit l'exposant réel a; de même, cos b + i sin b n'est pas nul (puisque le module de ce nombre est égal à $\sqrt{\cos^2 b + \sin^2 b} = 1$ quel que soit b). Par conséquent, le produit e^a (cos b + i sin b) $\neq 0$, c'est-à-dire $e^{a+bi} \neq 0$, ce qui signifie que l'équation $e^x = 0$ n'a pas de racines.

Il découle de la décomposition (2) que les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les racines du polynôme $f(x)$, puisque le second membre, et par conséquent le premier membre, est égal à zéro lorsqu'on substitue $x = a_1$, $x = a_2$, $x = a_3$, ..., $x = a_n$.

Exemple 3.

Le polynôme $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ s'annule pour $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

Par conséquent,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Aucune autre valeur $x = a$, différente de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ne peut être une racine du polynôme $f(x)$, puisque aucun facteur du second membre de l'égalité (2) ne s'annule pour $x = a$. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante.

Tout polynôme de degré n ne peut avoir plus de n racines différentes. Ce résultat nous conduit à énoncer le théorème suivant.

Théorème 4. *Si les valeurs de deux polynômes* $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$, *de degré n, coïncident pour n + 1 valeurs différentes* $a_o, a_1, \ldots, a_n$ *de la variable indépendante x, alors ces deux polynômes sont identiques*.

Démonstration. Désignons par $f(x)$ la différence de ces polynômes

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$$

$f(x)$ est, par hypothèse, un polynôme de degré non supérieur à n qui s'annule aux points $a_1, \ldots, a_n$. Nous pouvons donc le mettre sous la forme

$$f(x) = A_o(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n).$$

Mais, toujours d'après l'hypothèse, $f(x)$ s'annule également au point a_o. Alors, $f(a_o) = 0$ quoique aucun des facteurs linéaires ne s'annule. Par suite, $A_o = 0$, et il résulte de l'égalité (2) que le polynôme $f(x)$ est identiquement nul. Par conséquent, $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \equiv 0$ ou $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$.

Théorème 5. *Si le polynôme*: $P(x) = A_o x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$ *est identiquement nul, tous ses coefficients sont alors égaux à zero.*

Démonstration. Décomposons ce polynôme en facteurs en vertu de la formule (2)

$$P(x) = A_o x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = A_o (x - a_1) \ldots (x - a_n). \qquad (1')$$

Si ce polynôme est identiquement nul, il doit l'être également pour une valeur de x différente de $a_1, \ldots, a_n$. Dans ce cas, les facteurs $x - a_1, \ldots, x - a_n$ ne s'annulent pas et, par conséquent, $A_o = 0$.

On démontre de même que $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, etc.

Théorème 6. *Les coefficients respectifs de deux polynômes identiquement égaux sont égaux.*
Cela résulte du fait que la différence de ces polynômes est un polynôme identiquement nul. Par conséquent, en vertu du théorème précédent, tous ses coefficients sont nuls.

Exemple 4. Si le polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ est identiquement égal au polynôme $x^2 - 5x$, alors $a = 0$, $b = 1$, $c = -5$, $d = 0$.

§ 7. Racines multiples du polynôme

Si certains facteurs linéaires de la décomposition d'un polynôme de degré n

$$f(x) = A_o (x - a_1)(x - a_1) \dots (x - a_n) \qquad (1)$$

sont égaux, on peut alors les grouper et décomposer ce polynôme nn facteurs de la manière suivante

$$f(x) = A_o (x - a_1)^{k_1} (x - a2)^{k_2} \dots (x - a,n)^{k_m}, \qquad (1')$$

où

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n.$$

Dans ce cas on dit que a_1 est une racine multiple d'ordre k_1 et k_1 s'appelle la multiplicité de la racine. On dira de même que a_2 est une racine multiple d'ordre k_2, etc.
Exemple. Le polynôme $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ se décompose en facteurs de la manière suivante:

$$f(x) = (x - 2)(x - 2)(x - 1).$$

Cette décomposition peut se mettre sous la forme $f(x) = (x - 2)^2 (x - 1)$. $a_1 = 2$ est une racine double et $a_2 = 1$ une racine simple.
Si le polynôme a une racine multiple a d'ordre k_2 nous le considérerons comme ayant k racines égales.
Il résulte alors du théorème relatif à la décomposition d'un polynôme en facteurs linéaires le théorème suivant.
Tout polynôme de degré n a exactement n racines (réelles ou complexes).
Remarque. Tout ce qui a été dit au sujet des racines du polynôme

$$f(x) = A_o x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$$

est également vrai pour les racines de l'équation algébrique

$$A_o x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n = 0.$$

Démontrons maintenant le théorème suivant.

Théorème. *Si a_1 est une racine multiple d'ordre $k_1 > 1$ pour le polynôme $f(x)$, c'est alors une racine d'ordre $k_1 - 1$ pour la dérivée $f'(x)$ de ce polynôme.*

Démonstration. a_1 étant une racine multiple d'ordre k_1, où $k_1 > 1$, il vient de la formule (4') que

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1} \varphi(x),$$

où $\varphi(x) = (x - a_2)^{k2} \dots (x - a_m)^{km}$ ne s'annule pas au point $x = a_1$, c'est-à-dire $y(a_1) \neq 0$. En dérivant nous avons

$$f'(x) = k_1 (x - a_1)^{k_1 - 1} \varphi(x) + (x - a_1)^{k_1} \varphi'(x) =$$
$$(x - a_1)^{k_1 - 1} [k_1 \varphi(x) + (x - a_1) \varphi'(x)].$$

Posons

$$\psi(x) = k_1 \varphi(x) + (x - a_1) \varphi'(x).$$

Alors

$$f'(x) = (x - a1)^{k_1 - 1} \psi(x)$$

où

$$\psi(a_1) - k_1 \varphi(a_1) + (a_1 - a_1) \varphi'(a_1) = k_1 \varphi(a_1) \neq 0,$$

c'est-à-dire que $x = a_1$ est une racine d'ordre $k_1 - 1$ du polynôme $f(x)$. On voit immédiatement, d'après la démonstration, que si $k_1 = 1$, a_1 n'est pas une racine pour la dérivée $f'(x)$.

Il résulte de ce théorème que a_1 est une racine d'ordre $k_1 - 2$ pour la dérivée $f''(x)$, une racine d'ordre $k_1 - 3$ pour la dérivée $f'''(x)$, . . . et, enfin, une racine d'ordre 1 (une racine simple) pour la dérivée $f^{k_1 - 1} > (x)$; a_1 n'est pas une racine pour la dérivée $f^{k_1}(x)$, en d' autres termes,

$$f(a_1) = 0, f'(a_1) = 0, f''(a_1) = 0, \dots, f^{k_1 - 1} > (a_1) = 0,$$

mais

$$f^k(a_1) \neq 0.$$

§ 8. Décomposition en facteurs d'un polynôme dans le cas des racines complexes

Les racines $a_1, a_2, \dots, a_n$, de la formule (1) du § 7, ch. VII, peuvent être soit réelles, soit complexes. En pareil cas, on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème. *Si $a + ib$ est une racine complexe du polynôme $f(x)$ à coefficients réels, ce polynôme a également pour racine le nombre conjugué $a - ib$.*

Démonstration. Si nous substituons à la variable x du polynôme $f(x)$ le nombre $a + ib$, nous trouvons, après avoir effectué les opérations correspondantes et groupé séparément les coefficients de i et ceux qui ne contiennent pas i, que

$$f(a + ib) = M + iN,$$

où M et N sont des expressions qui ne contiennent pas i.

$a + ib$ étant une racine du polynôme, nous avons

$$f(a+ib)=M+iN=0,$$

d'où

$$M=0,\ N=0.$$

Substituons maintenant à la variable x du polynôme le nombre $a - ib$. Nous trouvons alors, après avoir effectué les opérations correspondantes (en vertu de la remarque 3 faite à la fin du § 2 du présent chapitre), le nombre conjugué de $M + iN$; en d'autres termes,

$$f(a - ib) = M - iN.$$

Mais comme $M = 0$ et $N = 0$, nous voyons que $f(a - ib) = 0$, ce qui exprime bien que $a - ib$ est une racine du polynôme.

Par conséquent, les racines complexes entrent dans la décomposition du polynôme

$$f(x) = Ao\ (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

par paires conjuguées.

En multipliant entre eux les facteurs linéaires correspondant au couple de racines complexes conjuguées, nous obtenons un trinôme du second degré à coefficients réels

$$[x - (a + ib)]\,[x - (a - ib)] = [(x - a) - ib]\,[(x - a) + ib]$$
$$= (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q,$$

où $p = -2a$ et $q = a^2 + b^2$ sont des nombres réels.

Si le nombre $a + ib$ est une racine multiple d'ordre k, le nombre conjugué $a - ib$ est aussi une racine multiple d'ordre k, de sorte que dans la décomposition d'un polynôme en facteurs entrent autant de factenrs linéaires $x - (a + ib)$ que de facteurs linéaires $x - (a - ib)$.

Par conséquent, *tout polynôme à coefficients réels peut être décomposé era facteurs à coefficients réels du premier et du second degré de multiplicité correspondante*, c'est-à-dire

$$f(x) = A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_1)^{k_2}\dots(x-a_1)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$$

où

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2l_1 + \dots + 2l_s = n$$

§ 9. Interpolation. Formule d'interpolation de Lagrange

Supposons qu'en étudiant un certain phénomène, on ait démontré l'existence d'une dépendance fonctionnelle entre des grandeurs x et y exprimant l'aspect quantitatif de ce phénomène; la fonction $y = \varphi(x)$ n'est pas connue, mais y on a établi en procédant à une série d'expériences que la fonction $y = \varphi(x)$ prend respectivement les valeurs y_o, y_1, $y_2, \dots$, yn quand on donne à la variable indépendante les valeurs x_o, x_1, $x_2, \dots, x_n$ appartenant au segment $[a, b]$.Le problème qui se pose est de trouver une fonction aussi simple que possible (un polynôme par exemple), qui soit l'expression exacte ou approchée de la fonction inconnue $y = \varphi(x)$ sur le segment $[a, b]$. D'une manière plus générale le problème peut être posé comme suit : la valeur de la fonction $y = \varphi(x)$ est donnée en $n + 1$ points différents $x_o, x_1, \dots, x_n$ du segment $[a, b]$:

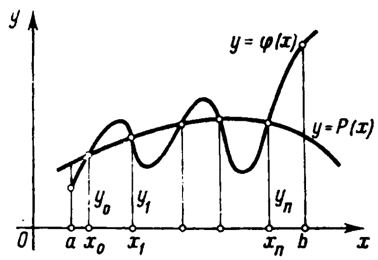


Fig. 165

$$y_o = \varphi(x_o),\ y_1 = \varphi(x_1), \dots, y_n = \varphi(x_n)$$

on demande de trouver un polynôme $P(x)$ de degré $\leq n$ exprimant d'une manière approchée la fonction $\varphi(x)$.

Il est tout naturel de choisir le polynôme de manière qu'il prenne aux points x_o, $x_1, x_2, \dots, x_n$ les valeurs $y_o, y_1, y_2, \dots, y_n$ de la fonction $\varphi(x)$ (fig. 165). Dans ce cas, le problème que nous avons posé et qui s'appelle « *problème d'interpolation de la fonction* » peut être formulé de la manière suivante : trouver pour une fonction donnée $\varphi(x)$ un polynôme $P(x)$ de degré $\leq n$ qui prenne aux points $x_o, x_1, \dots, x_n$ les valeurs

$$y_o = \varphi(x_o), \qquad y_1 = \varphi(x_1), \dots, y_n = \varphi(x_n)$$

A cette fin, choisissons un polynôme de degré n de la forme

$$P(x) = C_o (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) + C_1 (x - x_o)(x - x_2) \ldots (x - x_n) + C_2 (x - x_o)(x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_n) + \ldots + C_n (x - x_o)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \qquad (1)$$

et déterminons les coefficients C_o, C_1, . . ., C_n de manière que soient vérifiées les conditions

$$P(x_o) = y_o, \qquad P(x_1) = y_1, \ldots, P(x_n) = y_n. \qquad (2)$$

Faisons dans la formule (1) $x = x_o$; alors, en vertu des égalités (2), nous avons

$$y_o = C_o (x_o - x_1)(x_o - x_2) \ldots (x_o - x_n),$$

d'où

$$C_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_n)}.$$

Faisons ensuite $x = x_1$, nous avons:

$$y_1 = C_1 (x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n),$$

d' où

$$C_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_n)}$$

En procédant de cette manière, nous trouvons successivement

$$C_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_n)},$$

$$C_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_3)\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

En substituant les valeurs ainsi trouvées des coefficients dans la formule (1), nous avons

$$P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} y_1 + \ldots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})} y_n \qquad (3)$$

Cette formule est appelée *formule d'interpolation de Lagrange*.

Indiquons, sans donner de démonstration, que si $\varphi(x)$ a une dérivée d'ordre $(n + 1)$ sur le segment $[a, b]$, l'erreur commise en remplaçant la fonction $\varphi(x)$ par le polynôme $P(x)$, c'est-à-dire la quantité $R(x) = \varphi(x) - P(x)$, vérifie l'inégalité

$$|R(x)| < |(x - x_o)(x - x_1) \ldots (x - x_n)| \times \frac{1}{(n+1)!} \max |\varphi^{(n+1)}(x)|.$$

R e m a r q u e . Il résulte du théorème 4, § 6, ch. VII que le polynôme trouvé P (x) est le seul polynôme qui satisfasse aux conditions du problème posé.

Notons qu'il exis a également d'autres formules d'interpolation. L'une d'entre elles, la formule de Newton, est considérée dans le § 10.

E x e m p l e . Les résultats d'une expérience nous ont fourni les valeurs de la fonction $y = \varphi(x)$: $y_o = 3$, $y_1 = -5$, $y_2 = 4$ correspondant aux valeurs 1, 2, -4 de la variable indépendante x.

Exprimer la fonction $y = \varphi(x)$ d'une manière approchée par un polynôme du second degré.

S o 1 u t i o n. En vertu de la formule (3), nous avons (pour $n = 2$)

$$P(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)} 3 + \frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)} (-5) + \frac{(x-1)(x+2)}{(-4-1)(-2-4)} 4$$

ou

$$P(x) = -\frac{39}{30} x^2 - \frac{123}{30} x + \frac{252}{30}.$$

§ 10. Formule d'interpolation de Newton

Supposons que soient connues $(n + 1)$ valeurs yo, $y1$, . . ., yn de la fonction $\varphi(x)$ pour les $(n + 1)$ valeurs de la variable indépendante x_o, x_1, . . ., x_n. La différence entre les valeurs consécutives de la variable indépendante est supposée constante. Désignons-la par h. Nous pouvons ainsi dresser le tableau suivant des valeurs de la fonction inconnue $y = \varphi(x)$ pour les valeurs correspondantes de la variable indépendante.

x	x_o	$x_1 = x_o + h$	$x_2 = x_o + 2h$	...	$x_n = x_o + nh$
y	y_o	y_1	y_2	...	y_n

Formons un polynôme de degré non supérieur à n qui prend les valeurs correspondantes de y pour les valeurs correspondantes de x. Ce polynôme représentera approximativement la fonction $\varphi(x)$.

Introduisons au préalable les notations:

$$\Delta y_o = y_1 - y_o, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \Delta y_2 = y_3 - y_2, \ldots,$$

$$\Delta^2 y_o = y_2 - 2y_1 + y_o = \Delta y_1 - \Delta y_o, \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \ldots,$$

$$\Delta^3 y_o = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_o, \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^n y_0 = \Delta^{\nu-1} y_1 - \Delta^{\nu-1} y_0$$

Ce sont ce qu'on appelle les différences du l[er], 2[e], . . ., n-[ième] ordre.
Ecrivons le polynôme prenant les valeurs y_o, y_1 respectivement pour x_o, x_1. Ce sera un polynôme du l[er] degré

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h}. \quad (1)$$

En effet,

$$P_1(x)\big|_{x=x_0} = y_0, P_1(x)\big|_{x=x_1} = y_0 + \Delta y_0 \frac{h}{h} = y_0 + (y_1 - y_0) = y_1$$

Ecrivons le polynôme prenant les valeurs y_o, y_1, y_2 respectivement pour x_o, x_1, x_2. Ce sera un polynôme du 2[e] degré

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right). \quad (2)$$

En effet,

$$P_2(x)\big|_{x=x_0} = y_0, P_2(x)\big|_{x=x_1} = y_1$$

$$P_2(x)\big|_{x=x_2} = y_0 + \Delta y_0 \cdot 2 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{2h}{h}\left(\frac{2h}{h} - 1\right) = y_2$$

Le polynôme du troisième degré sera de la forme

$$P_3(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 2\right). \quad (3)$$

Enfin le polynôme du *n-ième* degré adoptant les valeurs y_o, y_1, y_2, . . ., y_n respectivement pour x_o, x_1, x_2, . . ., x_n sera de la forme:

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\ldots\left[\frac{x - x_0}{h} - (n-1)\right] \quad (4)$$

ce dont on peut se convaincre par substitution directe. C'est là ce qu'on appelle la *formule d'interpolation* ou le *polynôme d'interpolation de Newton*.

En fait, pour ce tableau le polynôme de Lagrange et le polynôme de Newton sont identiques, bien que différemment écrits, car le polynôme du degré non supérieur à n, prenant (n + 1) valeurs données pour les (n + 1) valeurs données de x, est déterminé univoquement.

Dans de nombreux cas le polynôme d'interpolation de Newton est plus commode que le polynôme d'interpolation de Lagrange. La particularité de ce polynôme réside dans le fait qu'en passant du polynôme du *k-ième* degré au polynôme du (k + 1)-ième degré les (k + 1) premiers termes ne sont pas modifiés; seul un nouveau terme vient s'ajouter qui est égal à zéro pour toutes les valeurs précédentes de la variable indépendante.

R e m a r q u e . D'après les formules d'interpolation de Lagrange [cf. formule (3), § 9] et de Newton [formule (4)] les valeurs de la fonction sont déterminées sur l'intervalle $x_o < x < x_n$. Si l'on détermine d'après ces formules la valeur de la fonction pour $x < x_o$ (on peut le faire pour de faibles valeurs de $| x - x_o |$), on dit alors que l'on effectue une *extrapolation du tableau dans le passé*. Si l'on détermine la valeur de la fonction pour x_n, $< x$, on dit que l'on effectue une *extrapolation du tableau dans le futur*.

§ 11. Dérivation numérique

Supposons que les valeurs d'une certaine fonction inconnue φ (x) sont données dans le tableau, que nous avons considéré au début du § 10. On demande de déterminer la valeur approchée de la dérivée de cette fonction. Le problème se résout ainsi. On construit le polynôme d' interpolation de Lagrange ou de Newton et on trouve la dérivée de ce polynôme.

Comme on considère habituellement des tables dressées pour des différences égales entre les valeurs voisines de l'argument, nous utiliserons la formule d'interpolation de Newton. Soient données trois valeurs de la fonction y_o, y_1, y_2 pour les valeurs x_o, x_1, x_2 de l'argument. Nous écrivons alors le polynôme (2) § 10 et nous le dérivons. Nous obtenons la valeur approchée de la dérivée de la fonction sur le segment $x_o \le x \le x_2$

$$\varphi'(x_0) \approx P_2'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \left(2\frac{x - x_0}{h} - 1\right). \quad (1)$$

Pour $x = x_o$ nous obtenons

$$\varphi'(x_0) \approx P_2'(x_0) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} \qquad (2)$$

Si nous considérons un polynôme du troisième ordre (cf. (3)10), nous aurons après dérivation pour sa dérivée l'expression:

$$\varphi'(x_0) \approx P_n'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \left(2\frac{x-x_0}{h} - 1\right) + \frac{\Delta^3 y_0}{2\cdot 3h}\left[3\left(\frac{x-x_0}{h}\right)^2 - 6\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + 2\right] \qquad (3)$$

En particulier, pour $x = x_o$ nous obtenons

$$\varphi'(x_0) \approx P_3'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h} \qquad (4)$$

Si nous utilisons la formule (4) § 10, nous obtiendrons pour l'expression approchée de la dérivée au point $x = x_o$

$$\varphi'(x_0) \approx P_n'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h} - \frac{\Delta^4 y_0}{4h} + \ldots \qquad (5)$$

Notons que pour les fonctions possédant une dérivée, la différence Δy_o est un infiniment petit du premier ordre, $\Delta^2 y_o$ un infiniment petit du second ordre, $\Delta^3 y_o$ un infiniment petit du troisième ordre, etc., par rapport à h.

§ 12. Meilleure approximation d'une fonction par despolynômes. Théorie de Tchébychev

Le problème considéré dans les paragraphes 9 et 10 nous conduit tout naturellement à nous poser la question suivante : soit une fonction continue φ (x) définie sur le segment [a, b]. Peut-on approcher cette fonction à l'aide d'un polynôme P (x) avec un degré de précision arbitrairement donné au préalable? En d'autres termes, peut-on trouver un polynôme P (x) tel que la différence en valeur absolue entre φ (x) et P (x) soit inférieure en chaque point du segment [a, b] à un nombre arbitraire donné ε > 0?

Le théorème suivant, que nous énonçons sans donner de démonstration, répond par l'affirmative *) à cette question.

Théorème de Weierstrass. *Si la fonction* φ(x) *est continue sur le segment* [a, b], *alors pour tout* ε > 0 *il existe un. polynôme* P (x) *tel qu'en chaque point de ce segment l'inégalité*

$$| \varphi(x) - P(x) | < \varepsilon$$

est satisfaite.

Le célèbre mathématicien soviétique S. Bernstein a indiqué une méthode rationnélle pour construire des polynômes sensiblement égaux à la fonction continue donnée sur le segment considéré.

Supposons que la fonction φ (x) soit continue sur le segment [0, 1]. Formons l'expression:

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \varphi\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

Dans cette expression C_n^m sont les coefficients du binôme de Newton et φ ($\frac{m}{n}$) la valeur de la fonction donnée au point $x = \frac{m}{n}$. L'expression B_n (x) est un polynôme de degré n; on l'appelle *polynôme de Bernstein*.

Pour tout nombre arbitrairement petit ε > 0, on peut toujours trouver un polynôme de Bernstein de degré tel que soit vérifiée l'inégalité

$$| B_n(x) - \varphi(x) | < \varepsilon$$

en tous points du segment [0, 1].

Remarquons que le choix du segment [0, 1] ne restreint pas la généralité, car on peut toujours ramener un segment quelconque [a, b] au segment [0, 1] à l'aide du changement de variable $x = a + t\,(b - a)$. Cette transformation conserve le degré du polynôme.

C'est au célèbre mathématicien russe P. Tchébychev (1821-1894), l'un des représentants les plus éminents de la pensée mathématique, qu'appartient le mérite d'avoir élaboré la théorie de la meilleure approximation des fonctions à l'aide de polynômes. I1 lui appartient, dans ce domaine des mathématiques, des

* Remarquons que le polynôme d'interpolation de Lagrange (voir (3), § 9) ne permet pas de répondre à la question posée. Aux points $x_o, x_1, \ldots, x_n$ les valeurs de ce polynôme sont effectivement égales aux valeurs correspondantes de la fonction, mais, en tout autre point du segment [a, b], ces valeurs peuvent différer notablement.

résultats fondamentaux qui ont ouvert la voie aux travaux ultérieurs de ses nombreux continuateurs.

Le point de départ de cette théorie de Tchébychev fut son mémoire sur la théorie des mécanismes articulés. C'est justement l'étude de ces mécanismes qui le conduisit à rechercher parmi tous les polynômes d'un degré n donné, dont le coefficient de x^n est égal à un, celui qui diffère le moins de zéro sur le segment donné. Le grand mathématicien parvint à résoudre ce problème, et les polynômes trouvés furent nommés par la suite *polynômes de Tchébychev*. Ces polynômes ont de nombreuses propriétés remarquables et constituent à l'heure actuelle un puissant moyen d'investigation dans de nombreux problèmes mathématiques et techniques.

Exercices

1. Calculer $(3 + 5i)(4 - i)$ .Rép. $17 + 17i$.
2. Calculer $(6 + 11i)(7 + 3i)$. Rép. $9 + 95i$.
3. Calculer $\frac{3-i}{4+5i}$. Rep. $\frac{7}{41}-\frac{19}{41}i$
4. Calculer $(4 - 7i)^3$. Rép. $-524 + 7i$.
5. Calculer. $\sqrt{i}$ Rép. $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
6. Calculer $\sqrt{-5-12i}$. Rép. $\pm(2 - 3i)$.
7. Mettre sous forme trigonométrique les expressions
   a) $1 + i$. Rép. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.
   b) $1 - i$. Rép. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.
8. Trouver $\sqrt[3]{i}$. Rép. $\frac{i+\sqrt{3}}{2}$; $-i$; $\frac{i-\sqrt{3}}{2}$
9. Exprimer les expressions suivantes en fonction des puissances de $\sin x$ et $\cos x$: $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin 4x$, $\cos 4x$, $\sin 5x$, $\cos 5x$.
10. Exprimer en fonction des sinus et cosinus des arcs multiples les expressions: $\cos 2x$, $\cos^3 x$, $\cos^4 x$, $\cos^5 x$, $\cos^6 x$; $\sin^2 x$, $\sin^3 x$, $\sin^4 x$, $\sin^5 x$.
11. Diviser $f(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 1$ par $x + 4$. Rép. $f(x) = (x + 4) \times (x^2 - 8x + 40) - 161$, c'est-à-dire quotient : $x^2 - 8x + 40$; reste $f(-4)=-161$.
12. Diviser $f(x) = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$ par $x + 3$. Rép. $f(x) = (x + 3)(x^3 - 9x^2 + 27x + 27)$.
13. Diviser $f(x) = x7 - 1$ par $x - 1$. Rép. $f(x) = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

Décomposer en facteurs les polynômes suivants

14. $f(x) = x^4 - 1$. Rép. $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$.
15. $f(x) = x^2 - x - 2$. Rép. $f(x) = (x - 2)(x + 1)$.
16. $f(x) = x^3 + 1$. Rép. $f(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1)$
17. Les résultats des expériences ont donné les valeurs suivantes de la fonction y de x: $y_1 = 4$ pour $x_1 = 0$, $y_2 = 6$ pour $x_2 = 1$, $y_3 = 10$ pour $x_3 = 2$.Exprimer cette fonction d'une manière approchée à l'aide d'un polynôme du second degré. Rép. $x^2 + x + 4$.
18. Trouver un polynôme du quatrième degré qui prenne respectivement les valeurs 2, 1, -1, 5, 0 pour les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 de x.
    Rép. $-\frac{7}{6}x^4+\frac{79}{6}x^3-\frac{151}{3}x^2+\frac{226}{3}x-35$.
19. Trouver le polynôme de degré aussi petit que possible qui prenne respectivement les valeurs 3, 7, 9, 19 pour $x = 2, 4, 5, 10$. Rép. $2x - 1$.
20. Trouver les polynômes de Bernstein du premier, deuxième, troisième et quatrième degré pour la fonction $y = \sin \pi x$ sur le segment [0, 1].

Rép. $B_1(x)=0$; $B_2(x) = 2x(1 - x)$; $B_3(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}x(1 - x)$; $B_4(x)=2x(1 - x)\times$ $[(2\sqrt{2} - 3)x^2 - (2\sqrt{2} - 3)x + \sqrt{2}]$.

Chapitre VIII FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

§ 1. Définition des fonctions de plusieurs variables

En étudiant les fonctions d'une seule variable nous avons remarqué que l'analyse de nombreux phénomènes nécessite l'emploi des fonctions de deux ou plusieurs variables indépendantes. Citons quelques exemples.

E x e m p l e 1. L'aire S d'un rectangle de côtés x et y est donnée par la formule bien connue

$$S = xy.$$

A chaque couple des valeurs de x et y correspond une valeur bien déterminée de la surface S. S est donc une fonction de deux variables.

E x e m p l e 2. Le volume V d'un parallélépipède rectangle, dont la longueur des arêtes est respectivement x, y, z, est donné par la formule

$$V = xyz.$$

Ici V est une fonction de trois variables x, y, z.

E x e m p l e 3. La portée R d'un projectile lancé à la vitesse initiale v_o sous un angle φ avec l'horizon est donnée par la formule

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

(si l'on néglige la résistance de l'air). g désigne ici l'accélération de la pesanteur. A chaque couple de valeurs v_o et φ correspond une valeur bien déterminée de R, en d'autres termes, R est une fonction de deux variables v_o et φ.

E x e m p l e 4.

$$u = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{\sqrt{1 + x^2}}$$

est ici une fonction de quatre variables x, y, z, t.

D é f i n i t i o n 1. Si à chaque couple (x, y) de valeurs de deux variables x et y, indépendantes, prises dans un certain domaine de définition D correspond une valeur bien déterminée de la variable z, on dit que z est une *fonction de deux variables indépendantes x et y* définie dans le domaine D.

On désigne une fonction de deux variables par la notation

$$z = f(x, y) \text{ ou } z = F(x, y), \text{ etc.}$$

Une fonction de deux variables peut être exprimée soit à l'aide de tables, soit analytiquement, à l'aide d'une formule comme nous l'avons fait dans les quatre exemples cités ci-dessus. La formule permet de dresser le tableau des valeurs que prend la fonction pour chaque couple de valeurs des variables indépendantes. Par exemple, on peut former le tableau à double entrée suivant dans le cas du premier exemple:

y x	0	1	1,5	2	3
1	0	1	1,5	2	3
2	0	2	3	4	6
3	0	3	4,5	6	9
4	0	4	6	8	12

Dans ce tableau on trouve la valeur de la fonction S à l'intersection de la ligne et de la colonne correspondant aux valeurs choisies de x et de y.

Si la dépendance fonctionnelle $z = f(x, y)$ a été établie à la suite de mesures effectuées sur la variable z au cours de l'étude expérimentale d'un phénomène quelconque, on obtient alors un tableau à double entrée définissant z en fonction des deux variables x et y. Dans ce cas, la fonction est donnée uniquement par un tableau.

La fonction de deux variables, de même que la fonction d'une seule variable, peut ne pas être définie pour toutes les valeurs arbitraires des variables indépendantes x et y.

D é f i n i t i o n 2. On appelle *domaine de définition* ou *domaine d'existence* de la fonction

$$z = f(x, y)$$

l'ensemble des couples (x, y) des valeurs de x et de y pour lesquelles cette fonction est définie.

Le domaine d'existence d'une fonction de deux variables peut être géométriquement interprété comme suit : si l'on représente chaque couple des valeurs x et y par un point $M(x, y)$ du plan Oxy, le domaine de définition de la fonction sera représenté par un ensemble de points de ce plan. Nous appellerons cet ensemble de points domaine de définition de la fonction. En particulier, ce domaine peut occuper le plan Oxy tout entier. Par la suite, les domaines de définition, que nous aurons à considérer, seront constitués par des parties du plan d é l i m i t é e s p a r c e r t a i n e s c o u r b e s. La courbe qui délimite le domaine de définition est appelée *frontière* de ce domaine. Les points du domaine qui n'appartiennent pas à la frontière sont appelés points *intérieurs* du domaine. Tout domaine constitué de points intérieurs s'appelle *domaine ouvert*.

Un domaine complété de sa frontière est dit *domaine fermé*. Le domaine est dit *borné* s'il existe une constante C telle que la distance M de tout point de ce domaine à l'origine des coordonnées O est inférieure à C, autrement dit, $|OM| < C$.

E x e m p l e 5. Déterminer le domaine naturel de définition de la fonction

$$z = 2x - y .$$

L'expression analytique $2x - y$ est définie pour toutes les valeurs arbitraires de x et de y. Par conséquent, le domaine naturel de définition de cette fonction coïncide avec le plan Oxy entier.

E x e m p l e 6. $$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Pour que z soit réel il faut que le radical soit un nombre non négatif ou, en d'autres termes, que x et y vérifient les inégalités

$$1 - x^2 - y^2 > 0 \text{ ou, } x^2 + y^2 \quad 1.$$

L'ensemble des points M (x, y), dont les coordonnées vérifient cette inégalité, est la partie du plan délimitée par le cercle de rayon 1 et de centre à l'origine des coordonnées (plus exactement l'intérieur de ce cercle et sa circonférence).

E x e m p l e 7. $z = \text{Log}\,(x + y)$.

Les logarithmes n'étant définis que pour les nombres positifs, on doit avoir nécessairement l'inégalité

$$x + y > 0 \text{ ou } y > -x.$$

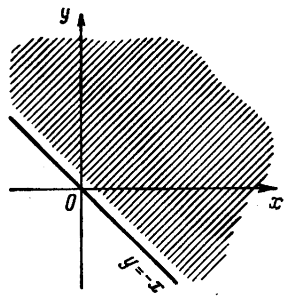


Fig. 166

Le domaine naturel de définition de cette fonction est, par conséquent, le demi-plan situé au-dessus de la droite $y = -x$ (les points de la droite n'appartiennent pas au domaine) (fig. 166).

E x e m p l e 8. La surface S d'un triangle est une fonction de la base x et de la hauteur y

$$S = \frac{xy}{2} .$$

Le domaine de définition de cette fonction est évidemment le domaine $x > 0$, $y > 0$ (il est clair que la base et la hauteur ne peuvent être exprimées que par des nombres strictement positifs).

Notons que le domaine de définition de la fonction considérée ne s'identifie pas au domaine naturel de définition de l'expression analytique qui la définit, le domaine naturel de définition de l'expression $\frac{xy}{2}$ occupant évidemment le plan Oxy tout entier.

On peut aisément étendre la définition d'une fonction de deux variables réelles indépendantes au cas de trois et plus variables indépendantes.

D é f i n i t i o n 3. Si à tout système ordonné de valeurs des variables $x, y, z, \ldots$, u, t correspond une valeur bien déterminée de la variable w, on dit que w est une

fonction des variables indépendantes $x, y, z, \ldots, u, t$ et on note $w = F(x, y, z, \ldots, u, t)$ ou $w = f(x, y, z, \ldots, u, t)$, etc.

On définit le domaine de définition d'une fonction de trois, quatre ou d'un nombre quelconque de variables de la même façon que dans le cas d'une fonction de deux variables.

Ainsi, le domaine de définition d'une fonction de trois variables est un ensemble de systèmes ordonnés des valeurs (x, y, z). Notons immédiatement que tout système ordonné de trois nombres définit un point M- (x, y, z) de l'espace $Oxyz$. Il en résulte que le domaine de définition d'une fonction de trois variables est un certain ensemble de points de l'espace.

On peut définir de même le domaine de définition d'une fonction de quatre variables indépendantes $u = f(x, y, z, t)$, comme un certain ensemble de systèmes ordonnés des quatre valeurs (x, y, z, t). Toutefois, il n'est pas possible dans ce cas, ainsi que dans le cas d'un nombre plus grand de variables indépendantes, de donner une interprétation géométrique simple du domaine de définition.

La fonction considérée dans l'exemple 2 est une fonction de trois variables indépendantes définie pour toutes les valeurs de x, y, z.

La fonction considérée dans l'exemple quatre est une fonction de quatre variables indépendantes.

Exemple 9. $$w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2} ,$$

w est ici une fonction de quatre variables indépendantes x, y, z, u ; elle est définie pour les valeurs des variables indépendantes vérifiant l'inégalité

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2 \quad 0.$$

§ 2. Représentation géométrique d'une fonction de deux variables

Soit $$z = f(x, y) \qquad (1)$$

une fonction définie dans un domaine G du plan Oxy (ce domaine peut occuper, en particulier, le plan tout entier) et soit $Oxyz$ un système de coordonnées cartésiennes dans l'espace (fig. 167). En chaque point (x, y) du domaine G élevons une perpendiculaire au plan Oxy sur laquelle nous portons un segment égal à la valeur de $f(x, y)$

Nous obtenons alors un point P de l'espace dont les coordonnées sont

$$x, y, z = f(x, y)$$

Le lieu géométrique de tous les points P, dont les coordonnées vérifient l'équation (1), est appelé le graphique de la fonction de deux variables. On sait, du cours de géométrie analytique, que l'équation (1) définit une surface dans l'espace. Le graphique dune fonction de deux variables est donc une surface dont la projection dans le plan Oxy est le domaine de définition de cette fonction. Chaque perpendiculaire au plan Oxy coupe la surface $z = f(x, y)$ au plus en un seul point.

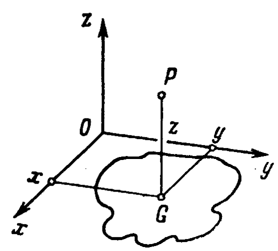


Fig. 167

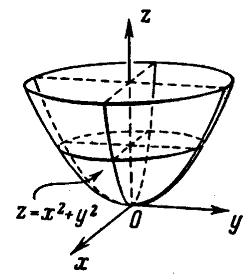


Fig. 168

E x e m p l e . On sait, du cours de géométrie analytique, que le graphique de la fonction $z = x^2 + y^2$ est un paraboloïde de révolution (fig. 168).

R e m a r q u e . Il n'est pas possible de représenter géométriquement dans l'espace le graphique d'une fonction de trois ou d'un nombre plus élevé de variables indépendantes.

§ 3. Accroissement partiel et accroissement total de la fonction

Considérons la courbe PS définie par l'intersection de la surface

$$z = f(x, y)$$

avec le plan y = const parallèle au plan Oxz (fig. 169).
y étant constant en tout point de ce plan, z variera le long de la courbe PS en fonction de x seulement. Donnons à la variable indépendante x un accroissement Δx ; l'accroissement correspondant de z est alors, appelé *accroissement partiel de z par rapport à x*; il est noté par $\Delta_x z$ (le segment SS' de la figure 169) et défini par la relation

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) . \qquad (1)$$

De même, si x est constant et que l'on donne à y un accroissement Δy, l'accroissement correspondant de z est appelé alors *accroissement partiel de z par rapport à y* et noté $\Delta_y z$ (le segment TT' de la figure 169)

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y). \qquad (2)$$

La fonction reçoit donc l'accroissement $\Delta_y z$ « le long de la courbe » définie par l'intersection de la surface $z = f(x, y)$ et du plan x = const, parallèle au plan Oyz. Si maintenant on donne simultanément un accroissement Δx à la variable indépendante x et un accroissement Δy à la variable indépendante y, l'accroissement correspondant Δz de z qui en résul tera est appelé *accroissement total* de la fonction z; l'accroissement total est défini par la formule

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) .$$

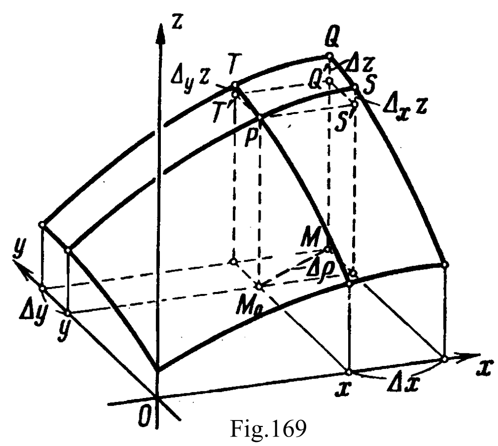


Fig.169

L'accroissement Δz est représenté par le segment QQ' de la figure 169.

Notons qu'en général l'accroissement total n'est pas égal à la somme des accroissements partiels

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Exemple. $z = xy$,

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)\, y - xy = y\Delta x$$
$$\Delta_y z = x\,(x + \Delta x) - xy = x\Delta x,$$
$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

Pour $x = 1$, $y = 2$,

$$\Delta x = 0{,}2,\ \Delta y = 0{,}3, \text{ on a } \Delta_x z = 0{,}4,\ \Delta_y z = 0{,}3,\ \Delta z = 0{,}76.$$

On définit d'une manière analogue l'accroissement total et les accroissements partiels des fonctions d'un nombre quelconqué de variables. On aura par exemple pour une fonction de trois variables indépendantes $u = f(x, y, t)$

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta_t u = f(x, y, t + \Delta t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta u = f(x + \mathrm{A}x, y + \Delta y, t + \Delta t) - f(x, y, t).$$

§ 4. Continuité des fonctions de plusieurs variables

Introduisons tout d'abord la notion importante de voisinage d'un point donné. On appelle voisinage du point M_o (x_o, y_o) de rayon r l'ensemble de tous les points (x, y) qui satisfont à l'inégalité $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points situés à l'intérieur du cercle de rayon r et de centre au point M_o (x_o, y_o).

Par la suite, quand nous dirons que la fonction f (x, y) a une certaine propriété au voisinage du point M_o (x_o, y_o) », cela signifiera qu'il existe un cercle de centre au point M_o (x_o, y_o) tous les points duquel la propriété donnée de la fonction est vérifiée.

Avant de passer à l'étude de la continuité des fonctions de plusieurs variables, arrêtons-nous à la notion de limite des fonctions de plusieurs variables *). Soit donnée

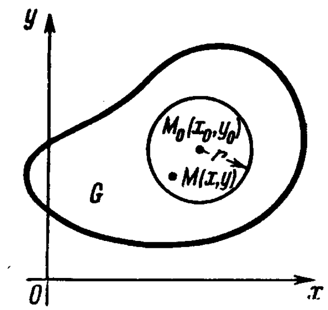


Fig. 170

$$z=f(x,y)$$

une fonction définie dans un certain domaine G du plan Oxy. Considérons un certain point M_o (x_o, y_o) situé à l'intérieur ou sur la frontière du domaine G (fig. 170).

D é f i n i t i o n 1. On dit que le nombre A est la limite de la fonction f (x, y) quand le point M (x, y) tend vers le point M_o (x_o, y_o) si pour tout, e > 0 il existe un nombre $r > 0$ tel que pour tous les points M (x, y) vérifiant l'inégalité $\overline{MM_0} < r$, l'inégalité $|f(x,y) - A| < \varepsilon$ est satisfaite.

Si le nombre A est la limite dé la fonction f (x, y) quand M (x, y) → M_o (x_o, y_o), on note

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

D é f i n i t i o n 2. Soit M_o (x_o, y_o) un point appartenant au domaine de définition de la fonction f (x, y). On dit que la fonction $z = f$ (x, y) *est continue au point* M_o (x_o, y_o) si l'égalité

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)\,(1)$$

---

* En fait, nous n'étudierons que les fonctions de deux variables, car l'étude des fonctions de trois ou d'un nombre plus élevé de variables n'apporte aucun élément nouveau, mais entraîne des difficultés complémentaires d'ordre technique.

est vérifiée quand le point M (x, y) tend arbitrairement (tout en restant à l'intérieur du domaine de définition) vers le point M_o (x_o, y_o).

Posons $x = x_o + \Delta x$, $y = y_o + \Delta y$. L'égalité (1) peut alors s'écrire

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0) \qquad (1')$$

ou

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right]=0 \qquad (1'')$$

Posons $\Delta\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ (voir fig. 169). Quand $\Delta x \to 0$ et $\Delta y \to 0$, $\Delta\rho \to 0$ et, inversement, si $\Delta\rho \to 0$, alors $\Delta x \to 0$ et $\Delta y \to 0$.

L'expression entre crochets dans l'égalité (1") n'est autre que l'accroissement total Δz de la fonction z. Par conséquent, l'égalité (1") peut être mise sous la forme

$$\lim_{\Delta\rho\to 0}\Delta z=0\,. \qquad (1''')$$

Une fonction continue en chaque point d'un certain domaine est dite *continue dans ce domaine*.

Si la condition (1) n'est pas remplie en un certain point N (x_o, y_o), ce point est appelé *point de discontinuité* de la fonction $z = f$ (x, y). Citons quelques exemples où la condition (1') n'a pas lieu

1) $z = f$ (x, y) est définie en chaque point d'un certain voisinage du point N (x_o, y_o), mais n'est pas définie en ce point ;

2) la fonction $z = f$ (x, y) est définie en chaque point d'un voisinage du point N (x_o, y_o), mais la limite $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ n'existe pas ;

3) la fonction est définie en chaque point du voisinage de N (x_o, y_o), la limite $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ existe, mais

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\neq f(x_0,y_0).$$

E x e m p l e 1. La fonction $z = x^2 + y^2$ est continue pour toutes les valeurs de x et y, c'est-à-dire en chaque point du plan Oxy.

En effet, quels que soient les nombres x, y, Δx et Δy, on a:

$$\Delta z = [(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2] - (x^2 + y^2) = 2x\,\Delta x + 2y\,\Delta y + \Delta x^2 + \Delta x^2.$$

Par conséquent.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$$

Citons maintenant un exemple de fonction discontinue.

E x e m p l e 2. La fonction $$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

est définie partout, sauf au point $x = 0$, $y = 0$ (fig. 171, 172).
Considérons les valeurs que prend z aux points situés sur la droite $y = kx$ (k = const). Il est évident que pour tous les points de cette droite

$$z = \frac{2kx^2}{x^2 + k^2 y^2} = \frac{2k}{1 + k^2} = \text{const},$$

en d'autres termes, sur chaque droite passant par l'origine la fonction z a une valeur constante, mais qui dépend du coefficient angulaire k de cette droite.

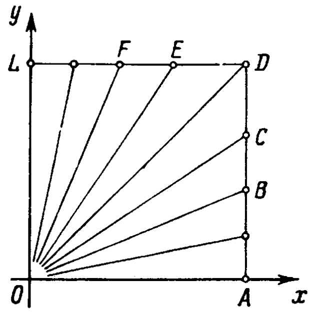


Fig. 171

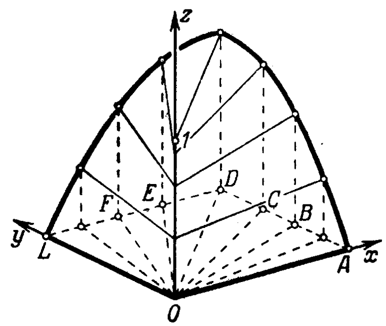


Fig.172

C'est pourquoi la valeur limite de la fonction z dépend du chemin parcouru par le point (x, y) quand il tend vers l'origine des coordonnées. Cette fonction a, par conséquent, une discontinuité en ce point. Cette discontinuité est telle qu'on ne peut pas la faire disparaître en donnant à la fonction z une valeur appropriée à l'origine. D'autre part, on voit aisément qu'en tout point différent de l'origine la fonction est continue.

Indiquons sans démonstration certaines propriétés importantes de la fonction de plusieurs variables continue dans un domaine fermé borné. Ces propriétés sont analogues aux propriétés des fonctions d'une seule variable, continue sur un segment (cf. § 10, ch. II).

P r o p r i é t é 1. Si la fonction $f(x, y, \ldots)$ est définie et continue dans le domaine fermé et borné D, alors il existe dans le domaine D au moins un point $N(x_0, y_0, \ldots)$ tel que pour tous les autres points du domaine on a la relation

$$f(x_0, y_0, \ldots) \geq f(x, y, \ldots),$$

et au moins un point $\bar{N}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \ldots)$ tel que pour tous les autres points du domaine on a la relation

$$f(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \ldots) \leq f(x, y, \ldots).$$

Nous appellerons la valeur $f(x_0, y_0, \ldots) = M$ de la fonction *la plus grande valeur de la fonction* $f(x, y, \ldots)$ dans le domaine D, et la valeur $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \ldots) = m$ la plus petite valeur.
Cette propriété peut également être formulée comme suit. *Une fonction continue dans le domaine fermé borné D atteint dans ce domaine au moins une fois sa plus grande valeur M et sa plus petite valeur m.*

P r o p r i é t é 2. Si la fonction $f(x, y, \ldots)$ est continue dans le domaine fermé borné D et si M et m sont la plus grande et la plus petite valeur de la fonction $f(x, y, \ldots)$ dans ce domaine, alors pour tout nombre μ vérifiant la condition $m < \mu < M$, il existe dans le domaine un point $N^*(x_0^*, y_0^*, \ldots)$ tel que l'on aura l'égalité $f(x_0^*, y_0^*, \ldots) = \mu$.
C o n s é q u e n c e d e l a p r o p r i é t é 2. Si la fonction $f(x, y, \ldots)$ est continue dans un domaine fermé borné et prend des valeurs tant positives que négatives, alors à l'intérieur de ce domaine il existe des points où la fonction $f(x, y, \ldots)$ s'annule.

§ 5. Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables

D é f i n i t i o n . On appelle *dérivée partielle par rapport à x* de la fonction $z = f(x, y)$ la limite du rapport de l'accroissement partiel $\Delta_x z$ par rapport à x à l'accroissement Δx de la variable x, quand Δx tend vers zéro.
On désigne la dérivée partielle par rapport à x de la fonction $z = f(x, y)$ par l'une des notations suivantes

$$z'_x; \quad f'_x(x, y); \quad \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Donc, par définition,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

On définit de même la *dérivée partielle* de la fonction $z = f(x, y)$ par rapport à y comme la limite du rapport de l'accroissement partiel $\Delta_y z$ par rapport à y à l' accroissement Δy quand Δy tend vers zéro. On désigne la dérivée partielle par rapport à y par l'une des notations suivantes

$$z'_y; \quad f'_y(x, y); \quad \frac{\partial z}{\partial y}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ansi, $$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

En remarquant que $\Delta_x z$ est calculé en laissant y inchangé et $\Delta_y z$ en laissant x inchangé, on peut alors définir la dérivée partielle de la manière suivante : on appelle *dérivée partielle* de la fonction $z = f(x, y)$ *par rapport à* x la dérivée par rapport à x calculée en supposant y constant. De même, on appelle dérivée partielle de la fonction $z = f(x, y)$ *par rapport à* y la dérivée par rapport à y calculée en supposant x constant.

Il résulte de cette définition que les règles de calcul des dérivées partielles sont les mêmes que celles employées pour calculer la dérivée des fonctions à une variable ; il faut seulement se rappeler par rapport à quelle variable on effectue la dérivation.

E x e m p l e 1. Trouver les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ de la fonction $z = x^2 \sin y$.

Solution.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y .$$

E x e m p l e 2. $z = x^y$.

Dans ce cas,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \log x .$$

On définit, d'une manière analogue, les dérivées partielles d'une fonction d'un nombre quelconque de variables. Par exemple, si nous prenons une fonction u de quatre variables $x, y, z,$ t

$$u = f(x, y, z, t),$$

alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta y}, \text{etc}$$

E x e m p l e 3. $u = x^2 + y^2 + xtz^3$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + tz^3; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xtz^2; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = xz^3;$$

§ 6. Interprétation géométrique des dérivées partielles d'une fonction de deux variables

Soit

$$z = f(x, y)$$

l'équation de la surface représentée sur la figure 173.

Menons le plan x = const. L'intersection de ce plan et de la surface définit une courbe PT. Considérons pour une valeur donnée de x un point $M(x, y)$ du plan Oxy. Au point M correspond un point $P(x, y, z)$ sur la surface $z = f(x, y)$. En laissant x inchangé, donnons à y un accroissement $\Delta y = MN = PT'$. La fonction z reçoit alors un accroissement $\Delta_y z = TT'$ [au point $N(x, y + \Delta y)$ côrrespond un point $T(x, y + \Delta y, z + \Delta_y z)$ de la surface $z = f(x, y)$].

Le rapport $\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ est égal à la tangente de l'angle formé par la *sécante PT* avec l'axe des y positifs $\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \text{tg}\, T\hat{P}T'$.

Par conséquent, la limite

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

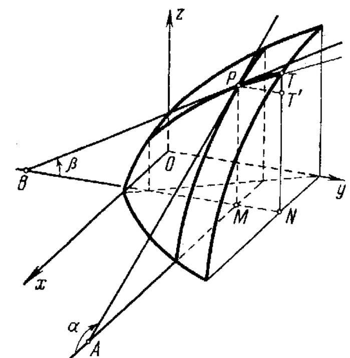


Fig. 173

est égàlè à la tangente de l'angle β formé par la tangente PB (au sens géométrique) à la courbe PT au point P avec 1'axe des y positifs

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \text{tg}\,\beta$$

La valeur de la dérivée partielle $\frac{\partial z}{\partial y}$ est donc égale à la tangente y de l'angle formé par la tangente (au sens géométrique) à la courbe définie par l'intersection de la surface $z = f(x, y)$ et du plan x = const, d'une part, et la trace de l'intersection des plans xOy et x = const, d'autre part.

De même, la valeur de la dérivée partielle $\frac{\partial z}{\partial x}$ est égale à la tangente de l'angle α formé par la tangente à la courbe définie par l'intersection de la surface $z = f(x, y)$ et du plan y = const et la trace des plans xOy et y = const.

§ 7. Accroissement total et différentielle totale

Par définition l'accroissement total de la fonction $z = f(x, y)$ est égal à (voir § 3, ch. VIII)

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad (1)$$

Supposons que les dérivées partielles de la fonction $f(x, y)$ au point considéré existent et sont continues.
Exprimons Δz à l'aide des dérivées partielles. Pour cela ajoutons et retranchons $f(x, y + \Delta y)$ dans le second membre de l'égalité (1)

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \qquad (2)$$

L'expression

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

qui figure dans le second crochet, peut être considérée comme la différence de deux valeurs d'une fonction d'une seule variable y (x étant constant). Appliquons le théorème de Lagrange à cette différence ; nous avons

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}, \qquad (3)$$

où $\bar{y}$ est compris entre y et $y + \Delta y$.
De même, on peut considérer l'expression figurant dans le premier crochet de l'égalité (2) c.omme la différence de deux valeurs d'une fonction d'une seule variable indépendante x (la seconde variable étant constante et égale à $y + \Delta y$). Appliquons à cette différence le théorème de Lagrange ; nous avons

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial y}, \quad (4)$$

où $\bar{x}$ est compris entre x et $x + \Delta x$.
En substituant les expressions (3) et (4) dans l'égalité (2), on a

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}. \qquad (5)$$

Les dérivées partielles étant continues par hypothèse, on a

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{aligned}\right\}, \quad (6)$$

($\bar{x}$ et $\bar{y}$ étant respectivement compris entre x et $x + \Delta x$, y et $y + \Delta y$, ils tendent respectivement vers x et y pour $\Delta x \to 0$ et $\Delta y \to 0$). On peut donc mettre l'égalité (6) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \gamma_1, \\ \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \gamma_2, \end{aligned}\right\} \qquad (6')$$

où γ_1 et γ_2 tendent vers zéro quand Δx et Δy tendent vers zéro (c'est-à-dire lorsque $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$).
En vertu de l'égalité (6') la relation (5) devient

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y. \qquad (5')$$

L'expression $\gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$ est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. En effet, le rapport $\frac{\gamma_1 \Delta x}{\Delta\rho} \to 0$ quand $\Delta\rho \to 0$ puisque γ_1 est un infiniment petit et que $\frac{\Delta x}{\Delta\rho}$ est borné $\left(\left|\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right| \le 1\right)$. On vérifie, de même, que $\frac{\gamma_2 \Delta y}{\Delta\rho} \to 0$.
La somme des deux premiers termes est une expression linéaire en Ox et Ay. Elle représente, quand $f'_x(x, y) \neq 0$ et $f'_y(x, y) \neq 0$, la partie p r i n c i p a l e de l'accroissement et diffère de Δz par un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ..
D é f i n i t i o n . On dit que la fonction $z = f(x, y)$ *est différentiable au point* (x, y) si l'accroissement total Δz en ce point peut être mis sous la forme d'une somme composée de deux termes, le premier étant une expression linéaire en Δx et Δy et le second un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $\Delta\rho$. La partie linéaire de l'accroissement est alors appelée *différentielle totale* et notée dz ou df.

I1 vient de l'égalité (5') que si les dérivées partielles de la fonction $f(x, y)$ sont continues en un point donné, cette fonction est différentiable en ce point ; la différentielle totale est alors

$$dz = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'(x, y)\,\Delta y.$$

On peut mettre l'égalité (5') sous la forme

$$\Delta z = dz + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$$

et écrire l'égalité a p p r o c h é e suivante

$$\Delta z \approx dz,$$

l'erreur commise étant un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $\Delta\rho$.

On appelle *différentielles* des variables indépendantes x et y et l'on désigne respectivement par dx et dy les accroissements Δx et Δy des variables x et y.
On peut alors écrire la différentielle totale de la façon suivante

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Par conséquent, si la fonction $z = f(x, y)$ a des dérivées partielles continues, elle est différentiable au point (x, y) et sa différentielle totale est égale à la somme des produits des dérivées partielles par les différentielles des variables indépendantes correspondantes.

E x e m p l e 1. Calculer la différentielle totale et l'accroissement total de la fonction $z = xy$
au point (2; 3), si Δx =0,1 et Δy =0,2.
Solution.
$\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\, \Delta y$,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = ydx + xdy = y\Delta x + x\Delta y .$$

Par conséquent,

$\Delta z = 3\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}2 + 0{,}1\cdot 0{,}2 = 0{,}72$;
$dz = 3\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}2 = 0{,}7$.

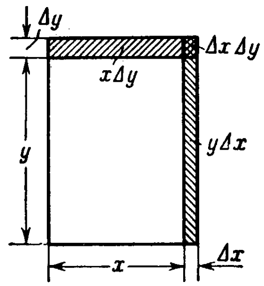


Fig. 174

La figure 174 illustre cet exemple.

Les définitions et les raisonnements précédents peuvent être étendus au cas dune fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes.
Soit $w = f(x, y, z, u, \ldots, t)$ une fonction d'un nombre quelconque de variables, dont toutes les dérivées partielles sont continues au point $(x, y, z, u, \ldots, t)$.
L'expression

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

constitue alors la partie principale de l'accroissement total de la fonction ; on la nomme différentielle totale. On démontre facilement, de la même manière que dans le cas d'une fonction ,de deux variables, que la différence $\Delta w - dw$ est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $\sqrt{(\Delta x^2) + (\Delta y^2) + \ldots + (\Delta t^2)}$.

E x e m p l e 2. Trouver la différentielle totale de la fonction $u = e^{x^2+y^2}\sin^2 z$ de trois variables x, y, z.

S o l u t i o n . Les dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2}\, 2x\sin^2 z \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2}\, 2y\sin^2 z$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2+y^2}\, 2\sin^2 z\cos z = e^{x^2+y^2}\sin 2z$$

sont continues pour toutes les valeurs de x, y, z, par conséquent,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = e^{x^2+y^2}(2x\sin^2 z\, dx + 2y\sin^2 z\, dy + \sin 2z\, dz) .$$

§ 8. Emploi de la différentielle totale pour les calculs approchés

Soit $z = f(x, y)$ une fonction différentiable au point (x, y).
Calculons l'accroissement total de cette fonction

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) ,$$

D'où

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z. \quad (1)$$

Nous avions la formule approchée

$$\Delta z \approx dz, \ (2)$$

où

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \qquad (3)$$

En remplaçant dans la formule (1) Δz par l'expression explicite de dz, on trouve la formule approchée

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y , \qquad (4)$$

l'erreur commise étant un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à Δx et Δy.
Montrons comment utiliser les formules (2) et (4) pour les calculs approchés.
P r o b l è m e . Calculer le volume de la matière utilisée pour la fabrication d'un cylindre dont les dimensions sont (fig. 175)
R - rayon du cylindre intérieur,
H - hauteur du cylindre intérieur,
k - épaisseur des parois et du fond.

S o l u t i o n . Nous donnerons deux solutions de ce problème, l'une exacte et l'autre approchée.
a) S o l u t i o n e x a c t e . Le volume cherché v est égal à la différence des volumes des cylindres extérieur et intérieur. Le rayon du cylindre extérieur étant $R + k$ et la hauteur $H + k$, on a: $v = \pi (R + k)^2 (H + k) - \pi R^2 H$ ou

$$v = \pi\,(2RHk + R^2k + Hk^2 + 2Rk^2 + k^3). \qquad (5)$$

b) S o l u t i o n a p p r o c h é e. Désignons par f le volume du cylindre intérieur, alors $f = \pi R^2H$, f est une fonction des deux variables R et H. Si l'on ajoute k à R et à H, la fonction f reçoit un accroissement correspondant Δf; cet accroissement sera précisément le volume cherché, c'est-à-dire

$$v = \Delta f.$$

En vertu de la relation (1), nous avons l'égalité approchée : $v \approx df$ ou

$$v \approx \frac{\partial f}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial f}{\partial H}\Delta H$$

Mais comme

$$\frac{\partial f}{\partial R} = 2\pi RH, \quad \frac{\partial f}{\partial H} = \pi R^2, \quad \Delta R = \Delta H = k$$

nous avons

$$v \approx \pi\,(2RHk + R^2k). \qquad (6)$$

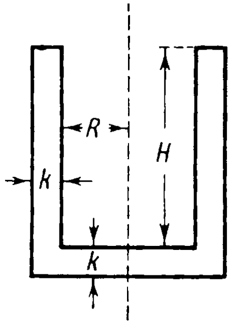


Fig. 175

En comparant les résultats (5) et (6), nous voyons qu'ils diffèrent par la quantité $\pi\ (Hk^2\ 2Rk^2 + k^3)$ composee uniquement de termes contenant k au carré et au cube.

Appliquons ces formules pour des données concrètes. Soit R = 4 cm, H = 20 cm, k =0,1 cm.

Appliquant (5) nous avons la valeur exacte du volume cherché:

$$v = \pi\,(2\cdot4\cdot20\cdot0,1 + 4^2\cdot0,1 + 20\cdot0,1^2 + 2\cdot4\cdot0,1^2 + 0,1^3) = 17,881\ \pi.$$

Appliquant (6), nous avons la valeur approchée

$$V = \pi\,(2\cdot4\cdot20\cdot0,1 + 4^2.0,1) = 17,6\ \pi.$$

L'erreur commise, en appliquant la formule approchée (6), est inférieure à $0,3\pi$, soit $100\cdot\frac{0,3\pi}{17,881\pi}$ %, c'est-à-dire mains de 2 % de la quantité mesurée.

§9. Emploi de la différentielle pour évaluer l'erreur commise pendant les calculs numériques

Soit $$u = f(x, y, z, \ldots, t)$$

une fonction des variables $x, y, z, \ldots, t$. Supposons que l'évaluation des valeurs numériques des quantités $x, y, z, \ldots, t$ soit faite avec une certaine erreur (respectivement à Δx, Δy, Δz, . . ., Δt près). La valeur de u sera également déterminée avec une certaine erreur

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \ldots, t + \Delta t) - f(x, y, z, \ldots, t),$$

due à l'erreur d'évaluation des variables indépendantes. Proposonsnous d'évaluer l'erreur Δu, si l'on suppose connues les erreurs Δx, Δy, . . ., Δt.

Les valeurs absolues des Δx, Δy, . . ., Δt étant supposées suffisamment petites, on peut remplacer l'accroissement total de la fonciion par la différentielle totale; on obtient alors l'égalité approchée

$$\Delta u \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t\,.$$

Les dérivées partielles et les erreurs relatives aux variables indépendantes sont soit positives, soit négatives. Remplaçons-les par leurs valeurs absolues; on trouve alors l'inégalité

$$|\Delta u| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\,|\,\Delta x\,| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\,|\,\Delta y\,| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|\,|\,\Delta t\,|. \qquad (1)$$

Si l'on désigne par $|\,\Delta^*x\,|$, $|\,\Delta^*y\,|$, . . ., $|\,\Delta^*u\,|$ les erreurs absolues maximales des variables correspondantes (les bornes des valeurs absolues des erreurs), on peut évidemment admettre que

$$|\Delta^* u| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\,|\,\Delta^* x\,| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\,|\,\Delta^* y\,| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|\,|\,\Delta^* t\,|. \qquad (2)$$

Exemples.

1) Soit $u = x + y + z$, alors $|\,\Delta^*u\,| = |\,\Delta^*x\,| + |\,\Delta^*y\,| + |\,\Delta^*z\,|$.

2) Soit $u = x - y$, alors $|\,\Delta^*u\,| = |\,\Delta^*x\,| + |\,\Delta^*y\,|$

3) Soit $u = xy$, alors $|\,\Delta^*u\,| = |\,x\,|\,|\,\Delta^*y\,| + |\,y\,|\,|\,\Delta^*x\,|$

4) Soit $u = \frac{x}{y}$, alors $|\Delta^*x\,| = \left|\frac{1}{y}\right|\,|\,\Delta^*x\,| + \left|\frac{x}{y^2}\right|\,|\,\Delta^*y\,| = \frac{|\,y\,||\Delta^* x| + |\,x\,||\Delta^* y|}{y^2}$.

5) On mesure l'hypoténuse c et le côté a d'un triangle rectangle ABC avec les erreurs absolues maximales $|\,\Delta^*c\,| = 0,2$, $|\,\Delta^*a\,| = 0,1$. On trouve respectivement $c = 75$ et $a = 32$. Déterminer l'angle A par la formule $\sin A = \frac{a}{c}$ et l'erreur absolue maximale $|\overline{\Delta A}|$ commise en calculant cet angle.

S o l u t i o n . $\sin A = \frac{a}{c}$, $A = \arcsin\frac{a}{c}$, par conséquent,

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \quad \frac{\partial A}{\partial c} = -\frac{a}{c\sqrt{c^2 - a^2}}\,.$$

Nous trouvons d'après la formule (2) :

$$\left|\overline{\Delta A}\right| = \frac{1}{\sqrt{(75)^2-(32)^2}}\cdot 0{,}1+\frac{32}{75\sqrt{(75)^2-(32)^2}}\cdot 0{,}2 = 0{,}00273 \text{ rd} = 9'24''.$$

Donc,

$$A = \arcsin\frac{32}{75} \pm 9'24''$$

6) On a déterminé le côté b = 121,56 m et l'angle A = 25°21'40" d'un triangle rectangle ABC. Les erreurs absolues maximales, commises au cours de l'évaluation de ces grandeurs, sont respectivement $|\Delta^*b|$ = 0,05 m et $|\Delta^*a|$ = 12".

Déterminer l'erreur absolue maximale commise en calculant le côté a par la formule $a = b.\text{tg}\,A$.

S o l u t i o n . Nous trouvons en vertu de la formule (2)

$$|\Delta^*a| = |\text{tg A}|\,|\Delta^*b| + \frac{|b|}{\cos^2 A}\,|\Delta^*A|.$$

En substituant les valeurs correspondantes (et exprimant $|\Delta^*a|$ en radians), nous avons:

$$|\Delta^*a| = \text{tg } 25°21'40''.0{,}05+\frac{121{,}56}{\cos^2 25°21'40''}\,\frac{12}{206\,265} = 0{,}0237+0{,}0087 = 0{,}0324$$

rn.

On appelle *erreur relative* de la grandeur x le rapport de l'erreur Δx à la valeur approchée x de cette grandeur. On la désigne par δx,

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}$$

On appelle *erreur relative maximale* de la grandeur x et l'on note $|\delta^*x|$ le rapport de l'erreur absolue maximale à la valeur absolue de x,

$$|\delta^*x| = \frac{|\Delta^*x|}{|x|}$$

Pour évaluer l'erreur relative de la fonction u, divisons tous les termes de l'égalité (2) par $|u| = f(x, y, z, \ldots, t)$

$$\frac{|\Delta^*u|}{|u|} = \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f}\right||\Delta^*x| + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f}\right||\Delta^*y| + \ldots + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f}\right||\Delta^*t| \quad (4)$$

mais

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = \frac{\partial}{\partial x}\text{Log}|f|;\ \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \frac{\partial}{\partial y}\text{Log}|f|;\ldots;\ \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f} = \frac{\partial}{\partial t}\text{Log}|f|\ .$$

C'est pourquoi on peut mettre l'égalité (3) sous la forme

$$|\delta^*x| = \left|\frac{\partial}{\partial x}\text{Log}|f|\right||\Delta^*x| + \left|\frac{\partial}{\partial y}\text{Log}|f|\right||\Delta^*y| + \ldots + \left|\frac{\partial}{\partial t}\text{Log}|f|\right||\Delta^*t| \ldots \quad (5)$$

ou sous une forme compacte

$$|\delta^*u| = |\delta^*\text{Log}\,|f||. \qquad (6)$$

Il résulte de la formule (3), ainsi que de la formule (5), que l'erreur relative maximale d'une fonction est égale à l'erreur absolue maximale du logarithme de cette fonction.

Nous déduisons de la formule (6) les règles que l'on doit appliquer pendant les calculs approchés.

1. Soit $u = xy$.

En utilisant les résultats de l'exemple 3, on a

$$|\delta^*u| = \frac{|y||\Delta^*y|}{|xy|} + \frac{|x||\Delta^*y|}{|xy|} = \frac{|\Delta^*x|}{|x|} + \frac{|\Delta^*y|}{|y|} = |\delta^*x| + |\delta^*y|$$

c'est-à-dire l'erreur relative maximale du produit est égale à la somme des erreurs relatives maximales de chacun des facteurs.

2. Soit $u = \frac{x}{y}$; en utilisant les résultats de l'exemple 4, nous avons:

$$|\delta^*u| = |\delta^*x| + |\delta^*y|$$

R e m a r q u e . Il résulte de l'exemple 2 que si $u = x - y$, alors

$$|\delta^*u| = \frac{|\Delta^*x| + |\Delta^*y|}{|x-y|}$$

Si les valeurs de x et y sont proches, il peut arriver que $|\delta^*u|$ soit très grand par rapport à la grandeur cherchée $x - y$. Il faut tenir compte de cette circonstance pendant les calculs.

E x e m p l e 7. La période des oscillations d'un pendule est égale à

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

où l désigne la longueur du pendule et g l'accélération de la pesanteur.

Quelle erreur relative commettons-nous en déterminant T par cette formule en prenant $\pi \approx 3{,}14$ (à 0,005 près), l = 1 m (à 0,01 m près), g = 9,8 m/s^2 (à 0,02 m/s^2 près).

S o l u t i o n . L'erreur relative malimale est égale, en vertu de la formule

(6), à

$$|\delta^*T| = |\delta^*\text{Log } T|.$$

Mais

$$\text{Log } T = \text{Log } 2 + \text{Log } \pi + \frac{1}{2}\text{ Log } l - \frac{1}{2}\text{ Log } g.$$

Calculon $|\delta^*\text{Log } T|$. En tenant compte de ce que $\pi \approx 3{,}14$, $\Delta^*\pi = 0{,}005$, l=m, $\Delta^* l = 0{,}01$ m, $g = 9{,}8$ m/s^2, $\Delta^* g = 02$ m/s^2, nous avons

$$\Delta^*\text{Log } T = \frac{\Delta^*\pi}{\pi} + \frac{\Delta^* l}{2l} + \frac{\Delta^* g}{2g} = \frac{0{,}005}{3{,}14} + \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}02}{2\cdot 9{,}8} = 0{,}0076\,.$$

L'erreur relative maximale est donc égale à $\delta^* T = 0{,}0076 = 0{,}76$ %.

§ 10 Dérivée d'une fonction composée. Dérivée totale.Différentielle totale d'une fonction composée.

Supposons que dans l'équation

$$z = F(u, v) \qquad (1)$$

u et v soient des fonctions des variables indépendantes x et y

$$u = \varphi(x, y)\,; \qquad v = \psi(x, y). \qquad (2)$$

Dans ce cas, z est une fonction composée des variables x et y.
On peut évidemment exprimer z directement en fonction de x et y

$$z = F[\varphi(x, y), \psi(x, y)]\,. \quad (3)$$

Exemple 1. Soit $z = u^3v^3 + u + 1$; $u = x^2 + y^2$; $v = e^{x+y} + 1$; alors

$$z = (x^2 + y^2)^3 (e^{x+y} + 1)^3 + (x^2 + y^2) + 1.$$

Supposons que toutes les dérivées partielles des fonctions $F(u, v)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ soient continues et proposons-nous de calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ à partir des équations (1) et (2) sans utiliser l'égalité (3). Donnons à la variable x un accroissement Δx, en gardant y constant. Alors u et v reçoivent respectivement, en vertu de l'équation (2), un accroissement $\Delta_x u$ et $\Delta_x v$.
Mais alors, si les variables u et v reçoivent respectivement l'accroissement $\Delta_x u$ et $\Delta_x v$, la fonction $z = F(u, v)$ recevra à son tour un accroissement Δz, défini par la formule (5'), § 7, ch. VIII

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v + \gamma_1\Delta_x u + \gamma_2\Delta_x v\,.$$

Divisons tous les termes de cette égalité par Δx

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta} + \gamma_1\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \gamma_2\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\,.$$

Si $\Delta x \to 0$, alors $\Delta_x u \to 0$ et $\Delta_x v \to 0$ (en vertu de la continuité des fonctions a et v). Mais alors γ_1 et γ_2 tendent également vers zéro. En passant à la limite, pour $\Delta x \to 0$, on a

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x};\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x};\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x};\ \lim_{\Delta x\to 0}\gamma_1 = 0;\ \lim_{\Delta x\to 0}\gamma_2 = 0$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\,. \qquad (4)$$

Si nous avions donné un accroissement Δy à la variable y et gardé x constant, nous aurions eu en raisonnant de la même manière

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\,. \qquad (4')$$

E x e m p l e 2.

$$z = \text{Log}(y^2 + v);\quad u = e^{x+y^2};\quad v = x^2 + y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2+v};\ \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{u^2+v}\ \frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2};\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2};\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2x;\ \frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

En utilisant les formules (4) et (4') on trouve

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2+v}e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v}2x = \frac{2}{u^2+v}\left(ue^{x+y^2} + x\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2+v}2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v} = \frac{1}{u^2+v}\left(4ue^{x+y^2} + 1\right).$$

Dans la dernière expression on doit remplacer u et v respectivement par e^{x+y^2} et $x^2 + y$.

Les formules (4) et (4') peuvent être naturellement étendues dans le cas d'un plus grand nombre de variables.
Par exemple, si $w = F(z, u, v, s)$ est une fonction de quatre variables z, u, v, s et si chacune de ces variables dépend à son tour de x et y, les formules (4) et (4') deviennent

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x},\\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Si la fonction $z = F(x, y, u, v)$ est telle que les variables y, u, v dépendent à leur tour de la seule variable x

$$y = f(x)\ ;\ u = \varphi(x)\ ;\ v = \psi(x),$$

elle est en somme fonction d'une seule variable x ; on peut alors se proposer de calculer la dérivée $\frac{dz}{dx}$.

Cette dérivée peut être calculée d'après la première des formules (5):

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};$$

mais comme y, u, v ne dépendent que d'une seule variable x, les dérivées partielles correspondantes sont en fait des dérivées ordinaires ; en outre, $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$; par conséquent,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}; \qquad (6)$$

C'est la formule de la dérivée totale $\frac{dz}{dx}$ (par opposition à la dérivée *partielle* $\frac{\partial z}{\partial x}$)

E x e m p l e 3.

$$z = x^2 + \sqrt{y}, \quad y = \sin x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}; \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

D'après la formule (6) on a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}}\cos x = 2x + \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x.$$

Trouvons ensuite la différentielle totale de la fonction composée définie par les égalités (1) et (2).

Portons les expressions $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ définies par les égalités (4) et (4') dans la formule de la différentielle totale

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (6)$$

Nous obtenons

$$dz = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy.$$

Effectuons les transformations suivantes dans le second membre

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right). \qquad (7)$$

Or

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du,\\ \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = dv\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

On peut, compte tenu des égalités (8), écrire l'égalité (7) sous la forme

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv. \qquad (9)$$

ou

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv. \qquad (9')$$

La comparaison de (6) et (9') nous permet d'affirmer que l'expression de la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables (différentielle du premier ordre) possède la même forme, autrement dit la forme de la différentielle est invariante et ne dépend pas de ce que u et v sont des variables indépendantes ou des fonctions de variables indépendantes.

E x e m ple 4. Trouver la différentielle totale de la fonction composée

$$z = u^2v^3,\ u = x^2 \sin y,\ v = x^3e^y.$$

S o l u t i o n . Nous avons en vertu de la formule (9')

$$dz = 2uv^3\,du + 3u^2v^2\,dv = 2uv^3\,(2x \sin y\,dx + x^2 \cos y\,dy) +$$
$$+ 3u^2v^2\,(3x^2e^y\,dx + x^3e^y\,dy).$$

Cette dernière expression peut s'écrire

$dz = (2uv^3\ \ 2x\ \sin\ y\ +\ 3u^2v^2\ \ 3x^2e^y\ )dx+(2uv^3\ \ x^2\ \cos\ y\ \ 3u^2v^2\ \ x^3e^y\ dy).= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

§11. Dérivation des fonctions implicites

Nous allons aborder ce problème par l'étude d'une fonction implicite d'une seule variable [*]). Soit y la fonction de x définie par l'équation

$$F(x, y) = 0.$$

Démontrons le théorème suivant.

T h é o r è m e . *Soit y une fonction continue de x, définie par l'équation implicite*

$$F(x, y) = 0, \qquad (1)$$

où $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ *sont des fonctions continues dans un certain domaine D contenant le point* (x, y), *dont les coordonnées vérifient l'équation* (1) ; *en outre supposons qu'en ce point* $F'_y(x, y) \neq 0$. *La dérivée de la fonction y de x est alors égale à*

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (2)$$

D é m o n s t r a t i o n. Supposons qu'à une certaine valeur de x corresponde une certaine valeur de la fonction implicite y. Donc,

$$F(x, y) = 0.$$

Donnons à la variable indépendante x un accroissement Δx. La fonction y reçoit alors un accroissement Δy, en d'autres termes, à la valeur x + Δx de la variable indépendante correspond la valeur $y + \Delta x$ de la fonction. En vertu de l'équation $F(x, y) = 0$, nous avons:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Par conséquent,

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0.$$

Le premier membre de cette égalité représente l'accroissement total de la fonction de deux variables. En vertu de la formule (5'), § 7, on peut le mettre sous la forme

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$$

où γ_1 et γ_2 tendent vers zéro quand Δx et Δy tendent vers zéro. Le premier membre de cette dernière égalité étant égal à zéro, on peut écrire

[*] Au § 11 du ch. 111 nous .avons résolu le problème de la dérivation des fonctions implicites. Toutefois, nous n'avions considéré que certains exemples et n'avions pas obtenu de formule générale, ni déterminé les conditions d'existence de cette dérivée.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y = 0$$

Divisons cette égalité par Δx et calculons $\frac{\Delta x}{\Delta y}$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \gamma_1}{\frac{\partial F}{\partial y} + \gamma_2}.$$

Faisons tendre Δx vers zéro. Nous avons alors à la limite, vu que γ_1 et γ_2 tendent également vers zéro et que $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$:

$$y'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \qquad (2')$$

Ainsi, nous avons démontré l'existence de la dérivée y'_x d'une fonction implicite et obtenu une formule adéquate pour le calcul de cette dérivée.

E x e m p l e 1. L'équation

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

définit implicitement y en fonction de x. Dans ce cas

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Par conséquent, en vertu de la formule (1),

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Notons que cette équation définit deux fonctions implicites différentes (puisqu'à chaque valeur de x prise dans l'intervalle (-1, 1) correspondent deux valeurs de y), mais que la valeur trouvée de la dérivée y'_x est valable pour toutes les deux.

E x e m p l e 2. Soit l'équation

$$e^y - e^x + xy = 0.$$

Ici $F(x, y) = e^y - e^x + xy$; $\frac{\partial F}{\partial x} = -e^x + y$; $\frac{\partial F}{\partial y} = e^y + x$

Par conséquent, on obtient en vertu de la formule (1)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-e^x + y}{e^y + x} = -\frac{e^x - y}{e^y + x}$$

Considérons maintenant une équation de la forme

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (3)$$

Si à chaque couple des valeurs x et y, prises dans un certain domaine, correspondent une ou plusieurs valeurs de z satisfaisant à l'équation (3), cette équation définit implicitement une ou plusieurs fonctions univoques z de x et y. Par exemple, l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

définit implicitement deux fonctions continues z de x et y que l'on peut exprimer explicitement en résolvant l'équation par rapport à z ; nous obtenons alors

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \text{ et } z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Calculons les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ de la fonction implicite z de x et y définie par l'équation (3).

Pour calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$, nous supposons y constant. C'est pourquoi nous pouvons utiliser la formule (2'), en considérant z comme une fonction de la variable indépendante x. Donc,

$$z'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

On trouverait de même

$$z'_y = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

en supposant $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

On définit et on calcule, de la même manière, les fonctions implicites d'un nombre quelconque de variables et leurs dérivées partielles.

E x e m p l e 3.

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,\ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z};\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

On aurait obtenu le même résultat en dérivant la fonction explicite que l'on aurait trouvée en résolvant cette équation par rapport à z.

E x e m p l e 4.

$$e^z + x^2y + z + 5 = 0.$$

Ici $F(x, y, z) = e^z + x^2y + z + 5$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy\ ;\ \frac{\partial F}{\partial y} = x^2;\ \frac{\partial F}{\partial z} = e^z + 1\ ;\ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{e^z + 1};\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{e^z + 1}.$$

R e m a r q u e :Tous les raisonnements de ce paragraphe ont été conduit dans l'hypothèse, que l'équation $F(x, y) = 0$ détermine une certaine fonction d'une variable $y = \varphi(x)$; l'équation $F(x, y, z) = 0$ détermine une certaine fonction de deux variables $z = f(x, y)$. Indiquons sans démonstration la condition à laquelle doit satisfaire la fonction $F(x, y)$, pour que l'équation $F(x, y) = 0$ détermine une fonction univoque $y = \varphi(x)$.

T h é o r è m e . *Soit $F(x, y)$ une fonction continue dans le voisinage du point (x_0, y_0) possédant dans ce voisinage des dérivées partielles continues, telles que $F'y(x, y) = 0$* et soit $F(x_0, y_0) = 0$. *Il existe alors un voisinage contenant le point (x_0, y_0) dans lequel l'équation $F(x, y) = 0$ détermine une fonction univoque $y = \varphi(x)$.*

On a un théorème analogue pour les conditions d'existence de la fonction implicite définie par l'équation $F(x, y, z) = 0$.

R e m a r q u e . Lors de la déduction des règles de différentiation des fonctions implicites nous avons utilisé les conditions qui déterminent l'existence des fonctions implicites.

§ 12. Dérivées partielles de différents ordres

Soit $z = f(x, y)$ une fonction de deux variables indépendantes.

Les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ de cette fonction sont, en général, des fonctions de x et de y. C'est pourquoi nous pouvons calculer leurs dérivées partielles. Par conséquent, les dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables sont au nombre de *quatre*, puisque chaque fonction $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ peut être dérivée par rapport à x et par rapport à y.

On désigne par les notations suivantes les dérivées partielles du second ordre :

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$; on dérive successivement la fonction f deux fois par rapport à x

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$; on dérive d'abord f par rapport à x, puis le résultat par rapport à y;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$; on dérive d'abord f par rapport à y, puis le résultat par rapport à x ;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$; on dérive successivement la fonction f deux fois par rapport à y.

On peut ensuite dériver, de nouveau, les dérivées partielles du second ordre par rapport à x ou à y. On obtient alors les dérivées partielles du troisième ordre, qui sont au nombre de huit

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3};\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y};\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x};\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2};$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2};\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y};\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x};\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

D'une manière générale, on appelle *dérivée partielle du $n^{ième}$ ordre* (ou *d ordre* n) la dérivée première de la dérivée du $(n - 1)^{ième}$ ordre. Par exemple, $\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$, est une dérivée du $n^{ième}$ ordre ; nous avons, dans ce cas, dérivé z d'abord p fois par rapport à x et ensuite $n - p$ fois par rapport à y.

On définit, de la même manière, les dérivées partielles d'ordre supérieur pour des fonctions d'un nombre quelconque de variables.

E x e m p l e 1. Calculer les dérivées partielles du second ordre de la fonction

$$f(x, y) = x^2y + y^3.$$

S o l u t i o n . Nous trouvons successivement

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy ; \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 y + 3y^2 ; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial (2xy)}{\partial y} = 2x \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial (x^2 + 3y^2)}{\partial x} = 2x \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

E x e m p l e 2. Calculer $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ et $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$ si $z = y^2e^x + x^2y^3 + 1$.

S o l u t i o n . Nous trouvons successivement

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^x + 2xy^3 ; \; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^x + 2y^3 \; ; \; \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2ye^x + 6y^2 \; ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^x + 3x^2 y^2 ; \; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2ye^x + 6xy^2 \; ; \; \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 2ye^x + 6y^2$$

E x e m p l e 3. Calculer axe $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z}$ si $u = z^2e^x + y^2$.

Solution. $\frac{\partial u}{\partial x} = z^2 e^{x+y^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y} = 2yz^2 e^{x+y^2}$; $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} = 4yze^{x+y^2}$.

Une question se pose. Le résultat de la dérivation d'une fonction de plusieurs variables dépend-il de l'ordre dans lequel on effectue les dérivations successives par rapport aux différentes variables indépendantes, en d'autres termes, les dérivées

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

ou $$\frac{\partial^3 f(x, y, t)}{\partial x \partial y \partial t} \text{ et } \frac{\partial^3 f(x, y, t)}{\partial t \partial x \partial y}, \text{ etc.,}$$

seront-elles identiques ?

La réponse à cette question nous est donnée par le théorème suivant.

T h é o r è m e . *Si la fonction $z = f(x, y)$ et ses dérivées partielles* fx, f~, fxy et fyx *sont définies et continues au point $M(x, y)$ et dans un voisinage de ce point, alors en ce point*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y)$$

D é m o n s t r a t i o n . Considérons l'expression :

$$A = (x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Introduisons la fonction auxiliaire $\varphi(x)$, définie par l'égalité

$$\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) .$$

On peut alors mettre A sous la forme

$$A = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x).$$

f'_x étant, par hypothèse, définie dans le voisinage du point (x, y), la fonction $\varphi(x)$ dérivable sur le segment $[x, x + \Delta x]$; mais alors, en appliquant le théorème de Lagrange, on a:

$$A = \Delta x \varphi'(\bar{x}),$$

où $\bar{x}$ est compris entre x et $x + \Delta x$.

Mais

$$\varphi'(\bar{x}) = f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y).$$

D'autre part, fxy est définie dans le voisinage du point (x, y), par conséquent, f'_x est dérivable sur le segment $[y, y + \Delta y]$ et en appliquant le théorème de Lagrange à cette différence (relativement à la variable y), on a

$$f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y) = \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}),$$

où $\bar{y}$ est compris entre y et $y + \Delta y$.

Nous obtenons donc l'expression suivante pour A

$$A = \Delta x\, \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}). \qquad (1)$$

En changeant l'ordre des termes, on aura

$$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] - [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)].$$

lntroduisons, la fonction auxiliaire

$$\psi(y) - f(x + \Delta y) - f(x, y),$$

alors

$$A = \psi(y + \Delta y) - \psi(y)$$

En appliquant de nouveau le théorème de Lagrange, on a

$$A = \Delta y \cdot \psi'(\bar{\bar{y}}),$$

où $\bar{\bar{y}}$ est compris entre y et $y + \Delta y$.

Mais

$$\psi'(\bar{\bar{y}}) = f'_y(x + \Delta x, \bar{\bar{y}}) - f'_y(x, \bar{\bar{y}}).$$

Appliquant encore une fois le théorème de Lagrange, on obtient

$$f'_y(x + \Delta x, \bar{\bar{y}}) - f'_y(x, \bar{\bar{y}}) = \Delta x f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}),$$

où $\bar{\bar{x}}$ est compris entre x et $x + \Delta x$.

A peut donc être mis sous la forme

$$A = \Delta y\, \Delta x f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}). \qquad (2)$$

Les premiers membres des égalités (1) et (2) sont égaux à A, par conséquent, les seconds membres sont égaux entre eux ; en d'autres termes,

$$\Delta x\, \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}). = \Delta y\, \Delta x f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}).,$$

d'où

$$f''_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}).$$

En passant à la limite dans cette égalité, quand $\Delta x \to 0$ et $\Delta y \to 0$, on a:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}),$$

Les dérivées f''_{xy} et f''_{yx} étant continues au point (x, y), on a

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{yx}(x, y) \text{ et } \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) = f''_{yx}(x, y).$$

Nous avons en définitive : $\qquad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$,

ce qu'il fallait démontrer.

I1 résulte de ce théorème que si les dérivées partielles $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ et $\dfrac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}$ sont continue, alors on a

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}.$$

Un théorème analogue est vrai pour les fonctions d'un nombre quelconque de variables.

E x e m p l e 4. Calculer $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ et $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$ si : $u = e^{xy} \sin z$.

Solution.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy} \sin z\,; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{xy} \sin z + xye^{xy} \sin z = e^{xy}(1 + xy) \sin z\ ;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xy}(1 + xy) \cos z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy} \sin z\,; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = xe^{xy} \cos z\ ;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x} = e^{xy} \cos z + xye^{xy} \cos z = e^{xy}(1 + xy) \cos z.$$

Par conséquent, $\quad \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$

(voir les exemples 1 et 2 de ce paragraphe).

§ 13. Surfaces de niveau

Soit dans l'espace (x, y, z) un domaine D dans lequel est donnée la fonction

$$u = u\,(x, y, z). \quad (1)$$

On dit dans ce cas que dans le domaine D est défini un champ scalaire. Si, par exemple, u (x, y, z) désigne la lempérature au point

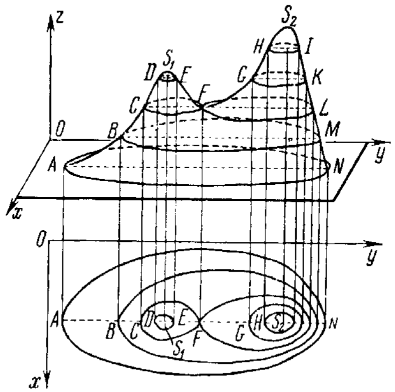


Fig. 176

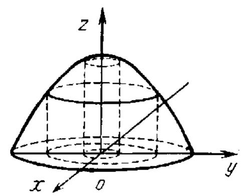


Fig. 177

M (x, y, z), on dit qu'est défini un champ scalaire de température ; si le domaine D est rempli de liquide ou de gaz et si u (x, y, z) désigne la pression, on est en présence d'un champ scalaire de pression, etc.
Considérons le point du domaine D où la fonction u (x, y, z) possède une valeur constante c

$$u\,(x, y, z) = c. \quad (2)$$

L'ensemble de ces points constitue une certaine surface. Si l'on prend une autre valeur de c, on obtient une autre surface. Ces surfaces sont appelées *surfaces de niveau.*

E x e m p l e 1. Soit donné le champ scalaire

$$u\,(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$$

Les surfaces de niveau seront ici

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = c,$$

c'est-à-dire des ellipsoïdes de demi-axes $2\sqrt{c}$, $3\sqrt{c}$, $4\sqrt{c}$
Si la fonction a dépend de deux variables x et y :

$$u = u\,(x, y),$$

les « surfaces » de niveau seront des lignes clans le plan Oxy

$$u\,(x, y) = c, \quad (2')$$

que l'on appelle *lignes de niveau*.
Si nous portons les valeurs de u sur 1 ate Oz

$$z = u\,(x, y),$$

les lignes de niveau dans le plan Oxy seront les projections des lignes formées par l'intersection de la surface $z = u$ (x, y) avec les plans $z = c$ (fig. 176). Connaissant les lignes de niveau on peut aisément étudier la nature de la surface $z = u$ (x, y).

E x e m p l e 2. Déterminer les lignes de niveau de la fonction $z = 1 - x^2 - y^2$. Les lignes de niveau seront les lignes d'équations $1 - x^2 - y^2 = c$. Ce sont des cercles (fig. 177) de rayon $\sqrt{1-c}$. En particulier, quand $c = 0$, nous obtenons le cercle $x^2 + y^2 = 1$.

§ 14. Dérivée suivant une direction donnée

Considérons dans le domaine D une fonction u (x, y, z) et un point M (x, y, z). Menons du point M le vecteur S dont les cosinus directeurs sont cos α, cos β, cos γ (fig. 178). Considérons sur le vecteur S à une distance Δs de son origine le point M_1 ($x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$). Ainsi,

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} .$$

Nous supposerons que la fonction u (x, y, z) est continue et possède des dérivées continues par rapport aux variables indépendantes dans le domaine D.

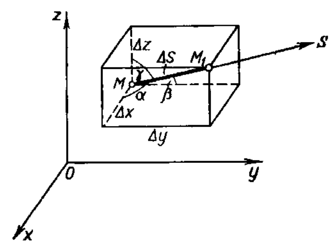


Fig. 178

De même que nous l'avons fait au § 7, représentons l'accroissement total de la fonction de la manière suivante

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z, \quad (1)$$

où ε_1, ε_2 et ε_3 tendent vers zéro quand $\Delta s \to 0$. Divisons tous les termes de l'égalité (1) par Δs:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s}. \quad (2)$$

I1 est évident que:

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta \ , \quad \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma.$$

Par conséquent, l'égalité (2) peut être mise sous la forme

$$\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma+\varepsilon_1\cos\alpha+\varepsilon_2\cos\beta+\varepsilon_2\cos\gamma \quad (3)$$

La limite du rapport $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ quand $\Delta s \to 0$ est appelée *dérivée de la fonction* $u = u$ (x, y, z) *au point* (x, y, z) *suivant la direction du vecteur S*, et notée $\frac{\partial u}{\partial s}$, autrement dit

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{\partial u}{\partial s} \quad (4)$$

Ainsi, passant à la limite dans l'égalité (3) nous obtenons

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \quad (5)$$

Il découle de la formule (5) que, connaissant les dérivées partielles, on peut trouver aisément la dérivée suivant une direction quelconque S. Les dérivées partielles ne sont qu'un cas particulier de la dérivée suivant une direction donnée. Par exemple, si $\alpha = 0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$, $\gamma=\frac{\pi}{2}$ nous obtenons:

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos 0+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\partial u}{\partial s}.$$

E x e m p l e . Soit donnée la fonction $u = x^2 + y^2 + z^2$. Trouver la dérivée $\frac{\partial u}{\partial s}$ au point M (1, 1, 1) a) dans la direction du vecteur $S_1 = 2i + j + 3k$;
b) dans la direction du vecteur $S_2 = i + j + k$.

S o l u t i o n . a) On trouve les cosinus directeurs du vecteur S_1

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{2}{\sqrt{14}},\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{14}},\ \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{14}}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{3}{\sqrt{14}}$$

Les dérivées partielles au point M (1, 1, 1) seront

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2z,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M=2,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M=2,\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M=2$$

Ainsi,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1}=2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{12}{\sqrt{14}}.$$

b) Calculons les cosinus directeurs du vecteur S_2

Si $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

Par conséquent,

$$\frac{\partial u}{\partial s_2}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}.$$

Notons que $2\sqrt{3}. > \frac{12}{\sqrt{14}}$ (fig. 179).

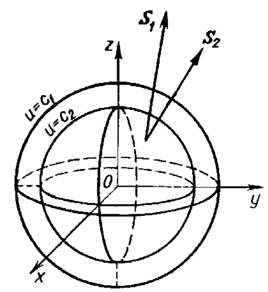


Fig. 179

§ 15. Gradient

En chaque point du domaine D où est donnée une certaine fonction $u = u$ (x, y, z) définissons un vecteur, dont les projections sur les axes de coordonnées sont les valeurs des dérivées partielles au au au de cette fonction au point. correspondant

$$\text{grad}\, u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k} \quad (1)$$

Ce vecteur est appelé le gradient de la fonction u (x, y, z). On dit alors que dans le domaine D est défini le champ vectoriel des gradients. Démontrons le théorème suivant établissant la liaison entre le gradient et la dérivée suivant une direction donnée.

T h é o r è m e . *Soit donné un champ scalaire* $u = u$ (x, y, z) *et dans ce champ scalaire le champ des gradients*

$$\text{grad}\, u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

La dérivée $\frac{\partial u}{\partial s}$ *suivant la direction d'un certain vecteur* ***S*** *est égale à la projection du vecteur* grad *u sur le vecteur* ***S***.

D é m o n s t r a t i o n. Considérons le vecteur unité $S°$, correspondant au vecteur

$$\boldsymbol{S}^0=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\cos\beta+\boldsymbol{k}\cos\gamma.$$

Calculons le produit scalaire des vecteurs grad u et $\boldsymbol{S}^0$

$$\text{grad}\, u\cdot\boldsymbol{S}^0=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \quad (2)$$

L'expression au second membre de cette égalité est la dérivée de la

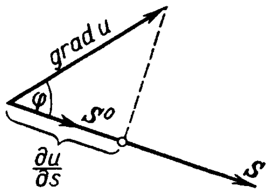


Fig. 180

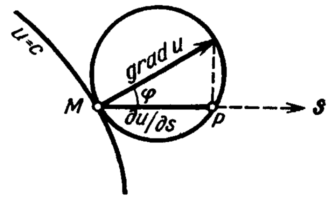


Fig. 181

fonction u (x, y, z) suivant la direction S. Par conséquent, nous pouvons écrire

$$\text{grad}\, u \cdot \boldsymbol{S}^0 = \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Désignant par φ l'angle compris entre vecteurs grad u et $\boldsymbol{S}^0$ (fig. 180) nous pouvons écrire

$$|\,\text{grad}\, u\,| \cos \varphi = \frac{\partial u}{\partial s}. \qquad (3)$$

ou

$$\text{pr}_{s^\circ}\, \text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial s}. \, (4)$$

Le théorème est démontré.

Le théorème que nous avons démontré établit une liaison concrète entre le gradient et la dérivée suivant une direction donnée. Construisons au point M (x, y, z) le vecteur grad u (fig. 181). Construisons la sphère pour laquelle grad u est le diamètre. Du point M menons le vecteur S. Désignons le point d'intersection du vecteur S avec la surface de la sphère par P. Il est alors évident que $MP = |\,\text{grad}\, u\,| \cos \varphi$ si φ est l'angle compris entre les directions du gradient et du segment MP ralors $\varphi < \frac{\pi}{2}$), c'est-à-dire $MP = \frac{\partial u}{\partial s}$.

Il est évident que quand on inverse la direction du vecteur S, la dérivée change de signe alors que sa valeur absolue n'est pas modifiée.

Etablissons certaines propriétés du gradient.

1) *La dérivée en un point donné suivant la direction du vecteur S admet une valeur maximum quand la direction du vecteur S coincide avec celle du gradient ; cette valeur maximum de la dérivée est égale à* | grad u |.

Cette proposition découle immédiatement de l'égalité (3) : la valeur maximum $\frac{\partial u}{\partial s}$ sera pour $\varphi = 0$ et dans ce cas $\frac{\partial u}{\partial s} = |\,\text{grad}\, u\,|$.

2) *La dérivée suivant la direction du vecteur tangent à la surface de niveau est nulle.*

Cette affirmation découle de la formule (3).En effet dans ce cas

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \cos \varphi = 0$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\,\text{grad}\, u\,| \cos \varphi = 0$$

E x e m p l e 1. Soit donnée la fonction $u = x^2 + y^2 + z^2$.

a) Déterminer le gradient au point M (1, 1, 1). L'expression du gradient de cette fonction en un point arbitraire sera grad $u = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$.
par conséquent,

$$(\text{grad}\, u)_M = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}\,,\ |\,\text{grad}\, a\,|_M = 2\sqrt{3}\,.$$

b) Déterminons la dérivée de la fonction u au point M (1, 1, 1) dans la direction du gradient. Les cosines directeurs du gradient seront

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 2\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

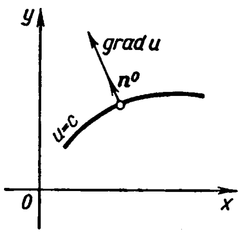
c'est-à-dire

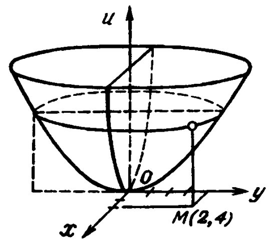
$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\,\text{grad}\, u\,|$$

R e m a r q u e . Si la fonction $u = u\,(x, y)$ est une fonction de deux variables, le vecteur

$$\text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

est situé dans le plan Oxy. Démontrons que le grad *u est orienté perpendiculairement à la ligne de niveau u* $(x, y) = c$, située dans le plan Oxy





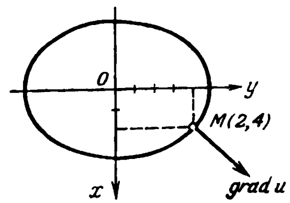


Fig. 182 Fig. 183 Fig. 184

et passant par le point correspondant. En effet, le coefficient angulaire k_1 de la tangente à la ligne sera égal à $k_1 = -\frac{u'_x}{u'_y}$. Le coéfficient angulaire k_2 du gradient est égal à $k_2 = \frac{u'_y}{u'_x}$. Il est evident que $k_1\ k_2 = -1$. Cela démontre la justesse de notre affirmation (fig . 182). Nous établirons une propriété analogue du gradient d'une fonction de trois variables au § 6 du ch. IX.

E x e m p l e 2. Déterminer le gradient de la fonction $u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$ (fig. 183) au point M (2, 4).

solution. Ici

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x} = x\right|_M = 2 \quad , \left|\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{3}y\right|_M = \frac{8}{3}$$

Par conséquent,

$$\text{grad } u = 2\boldsymbol{i} + \frac{8}{3}\boldsymbol{j}.$$

L'équation de la ligne de niveau (fig. 184) passant par le point donné sera

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = \frac{22}{3}.$$

§ 16. Formule de Taylor pour une fonction de deux variables

Soit

$$z = f(x, y)$$

une fonction de deux variables continue, ainsi que ses dérivées partielles d'ordre (n + 1) inclus, dans un certain voisinage du point M (a, b). Un peut alors représenter (de même que dans le cas d'une fonction d'une seule variable

indépendante, voir § 6, ch. IV) cette fonction de deux variables comme étant la somme d'un polynôme de degré n suivant les puissances entières de (x - a) et (y - b) et d'un reste. Nous allons démontrer que pour n = 2 cette formule est de la forme

$$f(x, y) = A_o + D\,(x - a) + E\,(y - b) +$$
$$\frac{1}{2!}[A\,(x - a)^2 + 2B\,(x - a)(y - b) + C\,(y - b)^2] + R2, \qquad (1)$$

où les coefficients A_o, D, E, A, B, C ne dépendent pas de x et y et le reste R_2 a une structure analogue à celle du reste de la formule de Taylor pour une fonction d'une seule variable.

Appliquons la formule de Taylor à la fonction f (x, y) considérée comme fonction d'une seule variable y, x étant supposé constant (bornons-nous aux termes du deuxième ordre)

$$f(x, y) = f(x, b) + \frac{y-b}{1} f'_y(x,b) + \frac{(y-b)^2}{1\cdot 2} f''_{yy}(x,b) + \frac{(y-b)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''_{yyy}(x, \eta_1)\,, \quad (2)$$

où $\eta_1 = b + \theta_1(\,y - b\,)$, $0 < \theta_1 < 1$.

Développons les fonctions. $f(x,b), f'_y(x,b), f''_{yy}(x,b)$ suivant les puissances entières de (x - a), par la formule de Taylor, en nous bornant aux dérivées mixtes du troisième ordre inclus

$$f(x, b) = f(a, b)\ \frac{x-a}{1} f'_x(a,b) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''_{xx}(a,b) + \frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''_{xxx}(\xi_1, b) \quad (3)$$

où $\xi_1 = x + \theta_2(\,x - a\,)$, $0 < \theta_2 < 1$;

$$f'_y(x,b) = f'_y(a,b) + \frac{x-a}{1} f''_{yx}(a,b) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f'''_{yxx}(\xi_2, b) \qquad (4)$$

où

$$\xi_2 = x + \theta_3(\,x - a\,),\ 0 < \theta_3 < 1\ ;$$

$$f''_{yy}(x,b) = f''_{yy}(a,b) + \frac{x-a}{1} f'''_{yyx}(\xi_3, b) \quad (5)$$

où

$$\xi_3 = x + \theta_4(\,x - a\,),\ 0 < \theta_4 < 1\ ;$$

En substituant les expressions (3), (4), (5) dans la formule (2) nous avons:

$$f(x, y) = f(a,b) + \frac{x-a}{1} f'_x(a,b) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''_{xx}(a,b) + \frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''_{xxx}(\xi_1, b) +$$

$$+\frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''_{xxx}(\xi_1,b)+\frac{y-b}{1}\left[f'_y(a,b)+\frac{x-a}{1}f''_{yx}(a,b)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f'''_{yxx}(\xi_2,b)\right]+$$

$$+\frac{(y-b)^2}{1\cdot 2}\left[f''_{yy}(a,b)+\frac{x-a}{1}f'''_{yyx}(\xi_2,b)\right]+\frac{(y-b)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''_{yyy}(x,\eta_1)\,.$$

En rétablissant l'ordre d'écriture indiqué dans la formule (1), nous avons:

$$f(x,y)=f(a,b)+(x-a)f'_x(a,b)+(y-b)f'_y(a,b)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[(x-a)^2 f''_{xx}(a,b)+2(x-a)(y-b)f''_{xy}(a,b)+(y-b)^2 f''_{yy}(a,b)\right]+$$
$$+\frac{1}{3!}\left[(x-a)^3 f'''_{xxx}(\xi_1,b)+3(x-a)^2(y-b)f'''_{xxy}(\xi_2,b)+\right.$$
$$\left.+3(x-a)(y-b)^2 f'''_{xyy}(\xi_3,b)+(y-b)^3 f'''_{yyy}(a,\eta_1)\right] \qquad (6)$$

Cette expression constitue précisément la formule de Taylor pour $n = 2$. L'expression

$$R_2=\frac{1}{3!}\left[(x-a)^3 f'''_{xxx}(\xi_1,b)+3(x-a)^2(y-b)f'''_{xxy}(\xi_2,b)+\right.$$
$$\left.+3(x-a)(y-b)^2 f'''_{xyy}(\xi_3,b)+(y-b)^3 f'''_{yyy}(a,\eta_1)\right]$$

est appelée le reste. Posons, ensuite, $x - a = \Delta x$, $y - b = \Delta y$, $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

Transformons R_2:

$$R_2=\frac{1}{3!}\left[\frac{\Delta x^3}{\Delta\rho^3}f'''_{xxx}(\xi_1,b)+3\frac{\Delta x^2\Delta y}{\Delta\rho^3}f'''_{xxy}(\xi_2,b)+\right.$$
$$\left.+3\frac{\Delta x\Delta y^2}{\Delta\rho^3}f'''_{xyy}(\xi_3,b)+\frac{\Delta y^3}{\Delta\rho^3}f'''_{yyy}(a,\eta_1)\right]\Delta\rho^3$$

Etant donné que $|\,\Delta x\,| < \Delta\rho$, $|\,\Delta y\,| < \Delta\rho$ et que, par hypothèse, les dérivées d'ordre trois sont bornées, le coefficient de $\Delta\rho^3$ est borné dans le domaine considéré; désignons-le par α_o.

On peut alors écrire :

$$R_2 = \alpha_o\,\Delta\rho^3.$$

La formule de Taylor (6), pour le cas $n = 2$, peut alors être mise sous la forme

$$f(x,y)=f(a,b)+\Delta x\, f'_x(a,b)+\Delta y\, f'_y(a,b)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\Delta x^2 f''_{xx}(a,b)+2\Delta x\Delta y\, f''_{xy}(a,b)+\Delta y^2 f''_{yy}(a,b)\right]+\alpha_0\Delta\rho^3 \quad (6')$$

Pour n quelconque, la formule de Taylor s'exprime sous une forme analogue.

§ 17. Maximum et minimum d'une fonction de plusieurs variables

D é f i n i t i o n - 1. On dit que la fonction $z = f(x, y)$ admet un *maximum* au point M_o (x_o, y_o) (c'est-à-dire quand $x = x_o$ et $y = y_o$) si $f(x_o, y_o) > f(x, y)$ pour tous les points (x, y) suffisamment voisins du point (x_o, y_o), mais différents de ce point.

D é f i n i t i o n 2. On dit que la fonction $z = f(x, y)$ a un *minimum* au point M_o (x_o, y_o) si

$$f(x_o, y_o) < f(x, y)$$

pour tous les points (x, y) suffisamment voisins du point (x_o, y_o), mais différents de ce point.

Le maximum et le minimum d'une fonction sont appelés les extremums de cette fonction ; en d'autres termes, on dit qu'une fonction admet un extremum en un point donné si elle a en ce point soit un maximum, soit un minimum.

E x e m p l e 1. La fonction

$$z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$$

admet un minimum pour $x = 1$, $y = 2$, c'est-à-dire au point (1 ; 2). En effet, $f(1 ; 2) = -1$, et comme $(x - 1)^2$ et $(y - 2)^2$ sont toujours positifs pour $x \neq -1$, $y \neq 2$,on a

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 > -1,$$

c'est-à-dire

$$f(x, y) > f(1; 2).$$

On voit sur la figure 185 la signification géométrique de ce résultat.

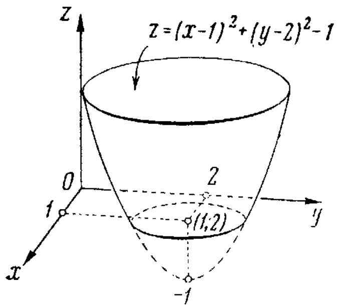


Fig. 185

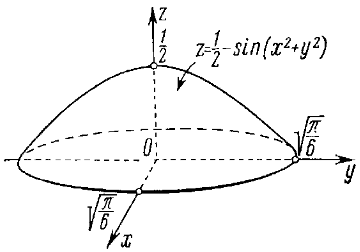


Fig. 186

E x e m p l e 2. La fonction $z = \frac{1}{2}$ - sin $(x^2 - y^2)$ admet un maximum à l'origine des coordonnées (fig. 186).

En effet, pour $x = 0$, $y = 0$

$$f(0, 0) = -\ \frac{1}{2}$$

Choisissons à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{6}$ un point (x, y), différent du point (0, 0) ; alors pour $0 < x^2 + y^2 < \frac{\pi}{6}$,

$$\sin(x^2 + y^2) > 0$$

et par suite

$$f(x, y) = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2) < \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire

$$f(x, y) < f(0, 0)$$

On peut également formuler comme suit les définitions du maximum et du minimum.

Posons $x = x_o + \Delta x$; $y = y_o + \Delta y$; alors

$$f(x, y) - f(x_o, y_o) = f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o) = \Delta f.$$

1) Si $\Delta f < 0$ pour tous les accroissements suffisamment petits des variables indépendantes, la fonction $f(x, y)$ admet un maximum au point $M(x_o, y_o)$.

2) Si $\Delta f > 0$ pour tous les accroissements suffisamment petits des variables indépendantes, la fonction $f(x, y)$ admet un minimum au point $M(x_o, y_o)$.

Ces définitions sont également valables pour une fonction d'un nombre quelconque de variables.

T h é o r è m e 1 (C o n d i t i o n s n é c e s s a i r e s p o u r l ' e x i s t e n c e d ' u n e x t r e m u m). *Si la fonction $z = f(x, y)$ admet un extremum pour les valeurs $x = x_o$* et *$y = y_o$, alors chaque dérivée partielle du premier ordre de z s'annule pour ces valeurs des variables indépendantes ou n'existe pas.*

En effet, fixons la valeur de y, $y = y_o$. La fonction $f(x, y_o)$ sera alors une fonction d'une seule variable x. Cette fonction admet, par hypothèse, un extremum (maximum ou minimum) au point $x = x_o$, par conséquent, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ s'annule ou n'existe pas en ce point. On démontre de même que $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ s'annule ou n'existe pas en ce point.

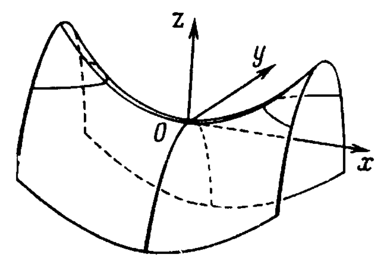


Fig. 187

Ce théorème ne donne pas une condition suffisante pour l'existence d'un extremum. Toutefois, si nous sommes assurés de l'existence d'extremums, il permet de trouver leurs valeurs. Dans le cas contraire il faut faire une étude plus détaillée.

Par exemple, les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x} = +2x$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ de la fonction $z = x^2 - y^2$ s'annulent. pour $x = 0$, $y = 0$. Mais cette fonction n'a ni maximum ni minimum pour ces valeurs. En effet, elle s'annule à l'origine des coordonnées, mais prend, dans le voisinage immédiat de ce point, aussi bien des valeurs positives que des valeurs négatives. La valeur zéro n'est pas, par conséquent, un extremum (fig. 187).

Les points où $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ (ou n'existe pas) et $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (ou n'existe pas) sont appelés points *critiques* de la fonction $z = f(x, y)$. Il résulte du théorème 1 qu'une fonction ne peut avoir d'extremum qu'en un point critique.

Pour faire l'étude d'une fonction aux points critiques établissons les conditions suffisantes d'extremum d'une fonction de deux variables.

T h é o r è m e 2. *Soit $f(x, y)$ une fonction définie dans un domaine contenant le point $M_o(x_o, y_o)$ et dont les dérivées partielles sont continues jusqu'au troisième ordre inclus; supposons, en outre, que le point $M_o(x_o, y_o)$ soit un point critique de la fonction $f(x, y)$*, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

Alors, pour $x = x_o$, $y = y_o$

1) $f(x, y)$ *a un maximum, si*

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

$$et \quad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0$$

2) $f(x, y)$ *a un minimum, si*

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \ et \quad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0$$

3) $f(x, y)$ *n'a ni maximum ni minimum, si*

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0$$

4) si $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$, *il peut exister ou ne pas exister d'extremum* (dans ce cas, l'étude doit être plus détaillée).

D é m o n s t r a t i o n. Ecrivons la formule de Taylor pour la fonction $f(x, y)$, en se limitant aux dérivées du deuxième ordre (formule (6), § 16). Posons
$a = x_o$, $b = y_o$, $x = x_o + \Delta x$, $y = y_o + \Delta y$.
Nous avons alors

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right] + \alpha_0 (\Delta\rho)^3$$

où $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, et α_o tend vers zéro, quand $\Delta\rho \to 0$.

Par hypothèse

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

Par conséquent,

$$\Delta f = f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o) =$$

$$= \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2\right] + \alpha_0 (\Delta\rho)^3 . \qquad (1)$$

Désignons respectivement par A, B, C les valeurs prises au. point M_o (x_o, y_o) par les dérivées partielles du deuxième ordre

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_0} = A, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{M_0} = B, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{M_0} = C .$$

Désignons par φ l'angle formé par le segment M_oM, où M est le point de coordonnées $M(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$, et l'axe Ox; alors

$$\Delta x = \Delta\rho \cos\varphi \ ; \ \Delta y = \Delta\rho \sin\varphi.$$

En substituant ces expressions dans la formule (1), nous avons:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta\rho)^2 [A \text{ cost } \varphi + 2B \cos\varphi \sin\varphi + C \sin^2\varphi + 2\alpha_o \Delta\rho]. \qquad (2)$$

Supposons que $A \neq 0$.

Multiplions et divisons par A l'expression entre crochets; nous avons:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 \times \left[\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi}{A} + 2\alpha_0 \Delta\rho\right]. \qquad (3)$$

Considérons séparément les quatre cas possibles.

1) Soit $AC - B^2 > 0$, $A < 0$. Nous avons alors au numérateur de la fraction la somme de deux quantités non négatives. Elles ne s'annulent pas en même temps, puisque la première s'annule pour tg φ = - $-\frac{A}{B}$ et la seconde pour sin φ = 0.

Si $A < 0$, la fraction est égale à un nombre négatif, non nul. Désignons-le par $-m^2$; alors

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta\rho)^2 [- m^2 + 2 \alpha_o \Delta\rho],$$

où m ne dépend pas de $\Delta\rho$, $\alpha_o \Delta\rho \to 0$, pour $\Delta\rho \to 0$.

Par conséquent, pour $\Delta\rho$ suffisamment petit on aura

$$\Delta f < 0$$

ou

$$f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o) < 0.$$

Mais alors, pour tous les points $(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$ suffisamment voisins du point (x_o, y_o) aura lieu l'inégalité

$$f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) < f(x_o, y_o),$$

ce qui veut dire qu'au point (x_o, y_o) la fonction $f(x, y)$ admet un maximum.

2) Soit $AC - B^2 > 0$, $A > 0$. On trouve, en raisonnant de la même manière, que

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 [- m^2 + 2\alpha_o \Delta\rho],$$

ou

$$f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) > f(x_o, y_o)$$

c'est-à-dire que la fonction $f(x, y)$ admet un minimum au point (x_o, y_o).

3') Soit $AC - B^2 < 0$, $A > 0$. Dans ce cas, la fonction n'a ni maximum ni minimum. La fonction croît quand on s'écarte du point (x_o, y_o) suivant certaines directions, et décroît suivant d'autres directions. En effet, si l'on se déplace le long du rayon $\varphi = 0$, on a

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 [A + 2\alpha_o \Delta\rho] > 0;$$

la fonction croît quand on se déplace le long de ce rayon. Si l'on se déplace le long du rayon $\varphi = \varphi_o$ (où $\operatorname{tg}\varphi_o = -\frac{A}{B}$), on a, quand $A > 0$:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 \left[\frac{AC - B^2}{A}\sin^2\varphi_0 + 2\alpha_0\Delta\rho\right] < 0;$$

la fonction décroît quand on se déplace le long de ce rayon.

3") Soit $AC - B^2 < 0$, $A<0$. La fonction n'admet clans ce cas ni maximum ni minimum. L'étude détaillée est conduite de la même manière que dans le cas 3'.

3"') Soit $AC - B^2 < 0$, $A = 0$. Alors $B \neq 0$ et on peut écrire l'égalité (2) sous la forme

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 [\sin\varphi\,(2B\cos\varphi + C\sin\varphi) + 2\alpha_o \Delta\rho].$$

Quand φ est suffisamment petit, l'expression entre parenthèses conserve son signe, puisqu'elle est voisine de $2B$, alors que le facteur $\sin\varphi$ change de signe suivant que φ est plus grand ou plus petit que zéro (après avoir choisi $\varphi > 0$ et $\varphi < 0$, on peut prendre ρ suffisamment petit pour que $2\alpha_o$ n'influe pas sur le signe de l'expression entre crochets). Par conséquent, dans ce cas également Δf

change son signe pour différents φ, c'est-à-dire pour différents Δx et Δy. Donc, la fonction ne présente ni maximum ni minimum en ce point.

On peut alors, quel que soit le signe de A, énoncer la proposition suivante:

Si $AC - B^2 < 0$ au point (x_o, y_o), la fonction n'admet pas d'extremum en ce point. La surface représentant graphiquement cette fonction peut alors, par exemple, avoir dans le voisinage de ce point la forme d'une selle (voir plus haut, fig. 187). On dit en pareil cas que la fonction a un minimax en ce point.

4) Soit $AC - B^2 = 0$. Dans ce cas, les formules (2) et (3) ne nous donnent aucune indication sur le signe de Δf. Par exemple, si $A = 0$, on a:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 \left[\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2}{A} + 2\alpha_0\Delta\rho\right].$$

pour $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{A}{B}\right)$ le signe de Δf est déterminé par le signe de $2\alpha_o$. On doit alors entreprendre une étude spéciale (par exemple, en prenant dans la formule de Taylor un nombre plus élevé de termes, ou par un autre procédé). Nous avons ainsi entièrement démontré le theorème 2.

Exemple 3. Etudier les maximums et les minimums de la fonction

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$$

Solution. 1) Trouvons les points critiques:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - x + 2y - 2.$$

Résolvons le système d'équations : $\left.\begin{array}{l} 2x - y + 3 = 0, \\ -x + 2y - 2 = 0 \end{array}\right\}$

nous trouvons

$$x = -\frac{4}{3};\ y = \frac{1}{3}$$

2) Calculons les valeurs des dérivées partielles du deuxième ordre au point critique $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$, et établissons la nature de ce point critique

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2,\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial z} = -1,\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\ ;$$

$$AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0.$$

Par conséquent, au point $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ la fonction a un minimum qui est égal à

$$z_{\substack{x=-\frac{4}{3}\\ y=\frac{1}{3}}} = -\frac{4}{3}$$

Exemple 4. Etudier les maximums et les minimums de la fonction

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Solution. 1) Trouvons les points critiques, en utilisant les conditions nécessaires pour l'existence d'un extremum:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2 - 3y = 0,\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 3x^2 - 3x = 0\end{aligned}\right\}$$

Nous trouvons deux points critiques: $x_1 = 1, y_1 = 1$ et $x_2 = 0, y_2 = 0$.

2) Calculons les dérivées partielles du deuxième ordre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x\ ,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3\ ,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y\ .$$

3) Etudions la nature du premier point critique

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=1\\ y=1}} = 6\ ;\ B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=1\\ y=1}} = -3\ ;\ C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=1\\ y=1}} = 6$$

$$AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0;\ A > 0.$$

Par conséquent, la fonction admet un minimum au point (1, 1) ; la valeur de la fonction en ce point est : $z_{\substack{x=1\\ y=1}} = -1$

4) Etudions la nature du second point critique M_2 (0, 0)

$$A = 0;\ B = -3;\ \ C = 0;\qquad AC - B^2 = -9 < 0.$$

Par conséquent, le second point critique n'est ni un minimum ni un maximum (minimax).

Exemple 5. Trouver trois nombres positifs dont la somme est égale à un nombre positif a et dont le produit est maximum.

Solution. Désignons respectivement ces trois nombres par x, y et $a - x - y$. Leur produit est alors egal à : $u = x\cdot y\ (a - x - y)$.

Par hypothèse $x > 0$, $y > 0$, $a - x - y > 0$, c'est-à-dire $x + y < a$, $u > 0$. Par conséquent, x et y prennent des valeurs appartenant au domaine limité par les droites $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$.

Calculons les dérivées partielles de la fonction u :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\ (a - 2x - y),\ \ \frac{\partial u}{\partial y} = x\ (a - 2y - x)$$

En égalant ces dérivées à zéro, on obtient le système d'équations

$$y\ (\ a - 2x - y\ ) = 0;\ \ x\ (\ a - 2y - x\ ) = 0.$$

En résolvant ce système, on trouve les points critiques:

$x_1 = 0,\ \ y_1 = 0,\ \ \ M_1\ (0, 0)$

$x_2 = 0\ \ y_2 = a,\ \ \ M_2\ (0, a)$;

$x_3 = a,\ \ y_3 = 0,\ \ \ M_3\ (a, 0)$;

$x_4 = \frac{a}{3},\ y_4 = \frac{a}{3},\ \ M_4\ (\frac{a}{3}, \frac{a}{3})$.

Les trois premiers points sont situés sur la frontière et le dernier à l'intérieur du domaine. La fonction a est positive à l'intérieur du domaine et s'annule sur la frontière ; par conséquent, la fonction a admet un maximum au point $(\frac{a}{3}, \frac{a}{3})$ (c'est l'unique extremum à l'intérieur du triangle). La valeur maximum du produit est donc : $u_{max} = \frac{a}{3}\,\frac{a}{3}\left(a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}$

Etudions la nature des points critiques (en nous servant des conditions suffisantes d'existence d'un extremum).Calculons les dérivées partielles du deuxième ordre de la fonction u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2y\ ,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a - 2x - 2y\ ,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2x$$

Au point M_1 (0, 0) nous avons A = $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$; B = $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a$; C = $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

$AC - B^2 = -a^2 < 0$. Par conséquent, au point M_1 il n y a ni maximum ni minimum. Au point M_2 (0, a) nous avons $A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2a$;$B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -a$,$C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

$AC - B^2 = -a^2 < 0$. Par conséquent, au point M_2 il n'y a ni maximum ni minimum. Au point M_3 (a, 0) nous avons $A = 0$; $B = -a$; $C = -2a$; $AC - B^2 = -a^2 < 0$. Au point M_3 il n'y a également ni maximum ni minimum. Nous avons au point M_4 $(\frac{a}{3}, \frac{a}{3})$ $A = -\frac{2a}{3}$; $B = -\frac{a}{3}$; C = $-\frac{2a}{3}$; $AC - B^2 = \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9} > 0$; $A < 0$. Par conséquent, la fonction admet un maximum au point M_4.

Remarque. La théorie des maximums et des minimums des fonctions de plusieurs variables est à la base d'une méthode pour obtenir les formules permettant de représenter les dépendances fonctionnelles d'après les données expérimentales. Cette question est exposée au § 19.

§ 18. Maximums et minimums des fonctions de plusieurs variables soumises à certaines conditions (maximums et minimums liés)

Bien souvent le problème de la détermination des plus grandes et des plus petites valeurs d'une fonction se ramène à la recherche des maximums et des minimums d'une fonction de plusieurs variables qui ne sont pas indépendantes, mais liées entre elles par certaines conditions supplémentaires (par exemple, assujetties à vérifier certaines équations).

Considérons, par exemple, le problème suivant. On demande de fabriquer une boîte parallélépipédique de volume maximum avec une feuille de tôle de surface $2a$.

Désignons respectivement la longueur, la largeur et la hauteur de la boîte par x, y, z. Le problème se ramène, par conséquent, à la recherche du maximum de la fonction

$$u = xyz,$$

où x, y, z vérifient la condition $2xy + 2xz + 2yz = 2a$. Nous sommes donc en présence du problème de la recherche des extremums liés [*]) : les variables x, y, z sont liées par la relation: $2xy + 2xz + 2yz = 2a$. Nous allons considérer dans ce paragraphe les méthodes de résolution des problèmes de ce genre.

Considérons tout d'abord le problème de l'extremum lié d'une fonction de deux variables quand elles ne sont liées entre elles que par une seule condition.

Soit à calculer les maximums et les minimums de la fonction

$$u = f(x, y), \qquad (1)$$

où x et y sont liés par l'équation

$$\varphi(x, y) = 0. \qquad (2)$$

La condition (2) implique que seule l'une des variables x et y est indépendante, par exemple x, car y est alors déterminé à partir de l'égalité (2) comme fonction de x. Si l'on résout l'équation (2) par rapport à y, et si l'on substitue dans l'égalité (1) l'expression trouvée pour y, u sera fonction d'une seule variable x et le problème sera ainsi ramené à l'étude du maximum et du minimum d'une fonction d'une seule variable indépendante x.

[*] Par opposition à l'extremum usuel que l'on appelle aussi extremum libre (N.d.T.).

Mais on peut résoudre le problème posé sans qu'il soit nécessaire de résoudre l'équation (2) par rapport à x ou à y. La dérivée de u par rapport à x doit s'annuler pour les valeurs de x telles que la fonction u est susceptible d'admettre un maximum ou un minimum.

Calculons $\frac{du}{dx}$ à partir de (1), sachant que y est une fonction de x :

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Par conséquent, aux points d'extremum

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (3)$$

On trouve de l'égalité (2)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (4)$$

Cette équation est satisfaite pour tous les x et y vérifiant l'équation (2) (voir § 11, ch. VIII).

Multiplions tous les termes de l'égalité (4) par un coefficient indéterminé λ, et ajoutons-les aux termes correspondants de l'égalité (3). Nous trouvons

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ou

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (5)$$

Cette égalité a lieu pour tous les points où il y a un extremum. Choisissons λ de manière que pour les valeurs de x et y telles que la fonction u présente un extremum, la seconde parenthèse de l'égalité (5) s'annule [*])

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 .$$

Mais alors pour ces valeurs de x et de y il vient de l'égalité (5) que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 .$$

Ainsi aux points d'extremum les trois équations

[*] Pour fixer les idées nous supposerons qu'aux points critiques â'p =,& 0.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0\\&\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0\\&\varphi(x,y)=0\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

à trois inconnues x, y, λ sont vérifiées. La résolution de ces équations nous donne les inconnues x, y et λ qui n'a joûé qu'un rôle auxiliaire et dont nous n'aurons plus besoin.

Il est clair que les équations (6) sont les conditions nécessaires pour l'existence d'un extremum lié, c'est-à-dire en tout point d'extremum les équations (6) sont vérifiées. La réciproque n'est pas vraie, car la fonction peut ne pas avoir. d'extremum lié pour les valeurs correspondantes de x, y et λ tirées des équations (6). On est donc amené à entreprendre une étude détaillée de la nature du point critique. En résolvant des problèmes concrets, on peut parfois determiner la nature du point critique d'après le caractère même du problème. Remarquons que les premiers membres des équations (6) sont les dérivées partielles par rapport aux variables x, y, λ de la fonction

$$F(x, y, \lambda) - f(x, y)+ \lambda\varphi(x, y). \qquad (7)$$

Ainsi, pour trouver les yaleurs de x et y vérifiant la condition (2) pour lesquelles la fonction $u = f(x, y)$admet un maximum ou un minimum lié, il faut former la fonction auxiliaire (7), égaler à zéro ses dérivées partielles par rapport à x, y, λ, et déterminer les inconnues x, y (ainsi que le facteur auxiliaire λ) des trois équations (6) ainsi obtenues. Cette méthode peut être aisément étendue à la recherche des extremums liés d'une fonction d'un nombre quelconque de variables.

Soit à déterminer les maximums et les minimums de la fonction $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, assujetties à vérifier les m équations ($m < n$)

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_1(x_1,x_1,\ldots,x_n)=0\\&\varphi_2(x_1,x_1,\ldots,x_n)=0\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\varphi_m(x_1,x_1,\ldots,x_n)=0\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

Pour trouver les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ susceptibles de donner des maximums ou des minimums liés de cette fonction, on doit former la fonction auxiliaire

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = f(x_1, \ldots, x_n)+ \lambda_1\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) +$$
$$+ \lambda_2\varphi_2(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

égaler à zéro ses dérivées partielles par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\ldots+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}=0,\\&\frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}+\ldots+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2}=0,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\frac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}+\ldots+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

et déterminer des $m + n$ équations (8) et (9) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les inconnues auxiliaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Tout comme pour une fonction de deux variables, la question de savoir si aux valeurs trouvées des variables correspond véritablement un maximum ou un minimum de lâ fonction ou si cette dernière n'admet pas d'extremum en ce point reste sans réponse dans le cas général. Cette question sera résolue à l'aide de considérations particulières découlant de chaque problème concret.

E x e m p l e 1. Revenons au problème considéré au début de ce paragraphe : trouver le maximum de la fonction

$$v = xyz$$

si les variables x, y, z sont assujetties à vérifier la relation

$$xy + xz + yz - a = 0 \ (x > 0, y > 0, z > 0). \qquad (10)$$

Formons la fonction auxiliaire

$$F(x, y, \lambda) = xyz + \lambda\,(xy + xz + yz - a).$$

Calculons ses dérivées partielles et égalons-les à zéro: .

$$\left.\begin{aligned}&yz+\lambda(y+z)=0\\&xz+\lambda(x+z)=0\\&xy+\lambda(x+y)=0\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

Le problème se ramène donc à la résolution du système des quatre équations (10) et (11) à quatre inconnues (x, y, z et λ). Pour résoudre ce système d'équations multiplions la première équation (11) par x, la deuxieme par y la troisième par z et ajoutons les expressions ainsi obtenues. En nous servant de l'équation (10), nous trouvons $\lambda = -\frac{3xyz}{2a}$. Substituons cette valeur de λ dans l'équation (11), nous avons

$$yz\left[1-\frac{3x}{2a}(y+z)\right]=0,$$

$$xz\left[1-\frac{3y}{2a}(x+z)\right]=0,$$

$$xy\left[1-\frac{3z}{2a}(x+y)\right]=0.$$

Puisque x, y et z, d'après la nature du problème, sont différents de zéro, on déduit de ces équations que

$$\frac{3x}{2a}(y+z)=0\,,\ \frac{3y}{2a}(x+z)=1\,,\ \frac{3z}{2a}(x+y)=1\,.$$

Des deux premières équations nous trouvons $x = y$, de la deuxième et de la troisième $y = z$. Mais alors il vient de l'équation (10) $x = y = z = \sqrt{\frac{a}{3}}$. Nous avons ainsi obtenu l'unique système de valeurs des variables x, y et z pour lesquelles la fonction est susceptible d'avoir un maximum ou un minimum.

On peut démontrer que ce point est précisément un point de maximum. Cela découle également de certaines considérations géométriques (les conditions du problème étant telles que le volume de la boîte ne peut être infiniment grand, il doit être, par conséquent, maximum pour certaines valeurs des dimensions des côtés). Le volume de la boîte est donc maximum quand elle a la forme d'un cube d'arête $\sqrt{\frac{a}{3}}$.

E x e m p l e 2. Déterminer 1a valeur maximum de la racine n-ième du produit des nombres x_1,: x_2, . ., x_n, si la somme de ces nombres est égale à un nombre donné a. On peut donc poser le problème de la manière suivante: on demande de trouver le maximum de la fonction $u=\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$ si les variables x_1, . . ., x_n sont assujetties à vérifier la relation

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n - a = 0 \ (x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0).\ (12)$$

Formons la fonction auxiliaire

$$F(x_1, ..., x_n, \lambda)= \sqrt[n]{x_1\ldots x_n} + \lambda\,(x_1 + x_1 +...+ x_n - a).$$

Calculons ses dérivées partielles

$$F'_{x_1}=\frac{1}{n}\frac{x_2x_3\ldots x_n}{(x_1\ldots x_n)^{\frac{n-1}{n}}}+\lambda=\frac{1}{n}\frac{n}{x_1}+\lambda=0 \qquad \text{ou } u=-n\,\lambda\,x_1$$

$$F'_{x_2}=\frac{1}{n}\frac{n}{x_2}+\lambda=0 \qquad \text{ou } u=-n\,\lambda\,x_2$$

. . . .

$$F'_{x_n}=\frac{1}{n}\frac{u}{x_n}+\lambda=0 \qquad \text{ou } u=-n\,\lambda\,x_n$$

Il vient de ces dernières égalités:

$$x_1 = x_2 =. \ . \ . = x_n,$$

et, en vertu de l'équation(12), nous trouvons

$$x_1 = x_2 . . . = x_n = \frac{a}{n}\ .$$

La nature du problème nous dicte qu'en ce point critique la fonction $u=\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$ présente un maximum égal à $\frac{a}{n}$

Par conséquent, tout système de nombres positifs x_1, x_2, . . , x_n, vérifiant la relation $x_1 + x_1 + \ldots + x_n = a$, satisfait à l'inégalité

$$u=\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}\ \le \frac{a}{n}$$

($\frac{a}{n}$ étant la plus grande valeur de cette fonction). En remplaçant dans l'inégalité (13) a par son expression tirée de l'égalité (12), on trouve:

$$\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}\le\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \qquad (14)$$

Cette inégalité a lieu pour tous les nombres positifs x_1, x_2, . . ., x_n. Le premier membre de l'inégalité (14) est appelé *moyenne géométrique* de ces nombres. Ainsi, la moyenne géométrique d un nombre fini de nombres positifs n'est pas supérieure à la moyenne arithmétique de ces nombres.

§ 19. Dépendance fonctionnelle obtenue en traitant les données expérimentales par la méthode des moindres carrés

Supposons que l'on doive utiliser les résultats de l'expérience pour etablir la dépendance fonctionnelle de la grandeur y de la grandeur x:

$$y = \varphi\,(x)$$

Supposons encore que les expériences réalisées nous aient fourni n valeurs de la fonction y pour les valeurs correspondantes de l'argument. Les résultats obtenus sont écrits dans la table

x	x_1	x_2	. . .	x_n
y	y_1	y_2	. . .	y_n

On établit la forme de la fonction $y = \varphi\,(x)$ soit à partir de considérations théoriques, soit sur la base du caractère de la disposition sur le plan de coordonnées des points correspondant aux valeurs expérimentales. (Nous appellerons ces points « points expérimenaux »). Supposons, par exemple, que les points expérimentaux soient disposés sur le plan de coordonnées comme l'indique la fig. 188.

Tenant compte du fait que les résultats de l'expérience sont entachés d'erreurs il est naturel de supposer que la fonction cherchée $y = \varphi(x)$ peut être recherchée sous forme de la fonction linéaire $y = ax + b$.
Si les points expérimentaux sont disposés comme l'indique la fig. 189, il est naturel de rechercher la fonction $y = \varphi(x)$ sous la forme y = axe, etc.
Quand la forme de la fonction $y = \varphi(x, a, b, c, \ldots)$ est adoptée, il reste à choisir les valeurs des paramètres $a, b, c, \ldots$ de sorte que la fonction obtenue décrive dans un certain sens de la meilleure manière possible le processus considéré.

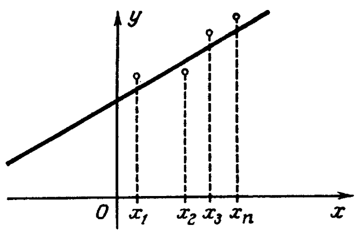


Fig. 188

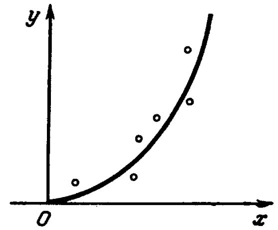


Fig. 189

Une méthode largement répandue de résolution de ce problème est la *méthode* dite *des moindres carrés*. Elle consiste en ce qui suit. Considérons la somme des carrés des différences entre les valeurs expérimentales y_i et celles de la fonction $\varphi(x, a, b, c, \ldots)$ aux points correspondants

$$S(a, b, c, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)\right]^2 \quad (2)$$

Choisissons les paramètres $a, b, c, \ldots$ de manière que cette somme ait la plus petite valeur possible

$$S(a, b, c, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)\right]^2 = \min. \qquad (3)$$

Le problème se ramène ainsi à trouver les valeurs des paramètres $a, b, c, \ldots$ pour lesquelles la fonction $S(a, b, c, \ldots)$ admet un minimum.
Il découle du théorème 1 (§ 17), que ces valeurs $a, b, c, \ldots$ vérifient le système d'équations

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \ \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \ \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \ldots,$$

ou sous forme détaillée

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)\right] \dfrac{\partial \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)}{\partial a} = 0, \\
\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)\right] \dfrac{\partial \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)}{\partial b} = 0, \\
\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)\right] \dfrac{\partial \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)}{\partial c} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (5)$$

Il y a ici autant d'équations que d'inconnues. En chaque cas concret on étudie le problème de l'existence de la solution du système d'équations (5) et de l'existence du minimum de la fonction $S(a, b, c, \ldots)$.
Considérons certains cas de détermination de la fonction $y = \varphi(x, a, b, c \ldots)$.
I. Soit $y = ax + b$. La fonction $S(a, b)$ s'écrit alors dans ce cas (cf. expression (2))

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \varphi(ax_i + b)\right]^2$$

C'est une fonction des deux variables a et b (x_i et y_i sont des nombres donnés; cf. table p. 328). Par conséquent, on a

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \varphi(ax_i + b)\right] x_i = 0, \\
\dfrac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \varphi(ax_i + b)\right] = 0
\end{array}\right\}$$

autrement dit, le système d'équations (5) s'écrit dans ce cas

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \\
\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn. = 0
\end{array}\right\} \quad (7)$$

Nous avons obtenu un système de deux équations linéaires à deux inconnues, a et b. Il est évident, que ce système possède une solution déterminée et que pour les valeurs trouvées de a et b la fonction $S(a, b)$ admet un minimum [*]).

---

[*] On l'établit aussi aisément à l'appui des conditions suffisantes (cf. théorème 2 § 17). En effet on a ici

II. Supposons, que l'on ait adopté en qualité de fonction d'approximation le trinôme du second degré $y = ax^2 + bx + c$.
Dans ce cas l'expression (2) s'écrit

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \varphi(ax_i^2 + bx_i + c) \right]^2 . \qquad (8)$$

C'est une fonction des trois variables a, b, c. Le système d'équations (5) devient:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c) \right] x_i^2 = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c) \right] x_i = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c) \right] = 0 \end{aligned}\right\}$$

ou sous forme développée

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 - a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = 0 \end{aligned}\right\} (9)$$

Nous obtenons un système d'équations linéaires pour déterminer les inconnues a, b, c. Il découle du caractère du problème, que le système possède une solution déterminée et que pour les valeurs obtenues a, b, c la fonction S (a, b, c) admet un *minimum*.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 , \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i , \quad \frac{\partial^2 S}{\partial c^2} = 2n$$

Par conséquent

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b}\right)^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 4\sum_{\substack{i,j \\ i<j}} (x_i - x_j)^2 > 0, \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0.$$

E x e m p l e . Supposons que l'expérience nous ait fourni quatre valeurs de la fonction cherchée $y = \varphi(x)$ pour 1es quatre valeurs de l'argument ($n = 4$), ainsi que l'indique le tableau

x	1	2	3	5
y	3	4	2,5	0,5

Nous recherchons la fonction y sous forme de la fonction linéaire $y = ax + b$. Composons l'expression de S (a, b)

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{4} \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2 .$$

Pour composer le système (7) servant à déterminer les coefficients a et b calculons au préalable

$$\sum_{i=1}^{4} y_i, x_i = 21, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 39,$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 11, \quad \sum_{i=1}^{4} y_i = 10.$$

Le système (2) s'écrit alors:

$$\left.\begin{aligned} 21 - 39a - 11b = 0, \\ 10 - 11a - 4b = 0. \end{aligned}\right\}$$

Résolvant ce système nous trouvons

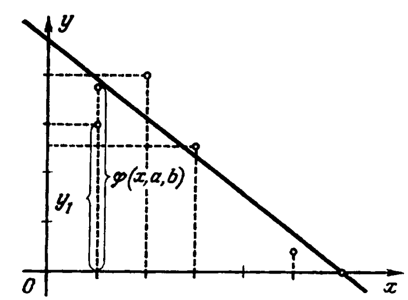


Fig. 190

a et b : a = -26/35, b = 159/35.
La droite recherchée (fig. 190) est

$$y = -\frac{26}{35}x + \frac{159}{35}$$

§ 20. Points singuliers d'une courbe

On emploie également les dérivées partielles pour l'étude des courbes. Soit

$$F(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe. La valeur du coefficient angulaire de la tangente à la courbe est donnée par la formule

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

(voir § 14 ch. VIII).

Si l'une au moins des dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ ne s'annule pas au point donné M (x, y) pris sur la courbe, la quantité $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{dx}{dy}$ est alors bien déterminée. La courbe F (x, y)= 0 a donc en ce point une tangente bien déterminée. On dit alors que M (x, y) est un point *simple* de la courbe.

Si au contraire le point M_o (x_o, y_o) est tel que

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = 0 ,$$

le coefficient angulaire de la tangente est indéterminé.

D é f i n i t i o n . On appelle *point singulier* d'une courbe F (x, y) = 0 le point M_o (x_o, y_o), où les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ s'annulent.

Il résulte de la définition que les points singuliers sont définis par le système d'équations

$$F = 0; \ \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \ ; \ \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

I1 est évident que toutes les courbes n'ont pas nécessairement des points singuliers. Par exemple, pour l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

nous avons évidemment

$$F\,(\,x, y\,) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \ ; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2} \ ; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$$

les dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ ne s'annulent qu'au point $x = 0$, $y = 0$, qui n'appartient pas à l'ellipse. Par conséquent, l'ellipse n'a pas de points singuliers.

Sans entreprendre une étude détaillée du comportement d'une courbe au voisinage des points singuliers, nous nous bornerons à considérer quelques exemples de courbes ayant des points singuliers.

E x e m p l e 1. Etudier les points singuliers de la courbe

$$y^2 - x\,(x - a)^2 = 0 \ (a > 0).$$

S o l u t i o n . Dans le cas donné $f\,(x, y) = y^2 - x\,(x - a)^2$ et par suite

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x - a)\,(\mathrm{a} - 3x) \ ; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

En résolvant le système des trois équations

$$F\,(x, y) = 0, \ \frac{\partial F}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

nous trouvons:

$$x_o = a, \ y_o = 0.$$

Le point M_o (a, 0) est, par conséquent, un point singulier.

Etudions 1a comportement de 1a courbe au voisinage du point singulier et construisons cette courbe. Ecrivons cette équation sous la forme

$$y = \pm\,(\,x - a\,) \cdot \sqrt{x}\ .$$

On voit de cette formule que la courbe : 1) n'est définie que pour $x \geq 0$; 2) est symétrique par rapport à l'axe Ox ; 3) coupe l'axe Ox aux points (0, 0) et (a, 0). Ce dernier point est un point singulier.

Considérons tout d'abord la partie de la courbe correspondant aux valeurs positives : $\quad y = \ (\,x - a\,)\ \sqrt{x}$.

Calculons les dérivées de y du premier et du deuxième ordre par rapport à x

$$y' = \frac{3x - a}{2\sqrt{x}} \ ; \ y'' = \frac{3x + a}{4x\sqrt{x}}\,.$$

Pour $x = 0$, on a $y' = \infty$. Par conséquent, la courbe est tangente à l'axe Oy à l'origine des coordonnées. Pour $x = 3$, on a $y' = 0$, $y'' > 0$, c'est-à-dire que la fonction y présente un minimum pour $x = \frac{a}{3}$, $\qquad y = -\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$

Sur le segment $0 < x < a$, on a $y < 0$; pour $x > 3$, $y' > 0$; quand $x \to \infty$, $y \to \infty$. Pour $x = a$, y' =-I/a, c'est-à-dire la branche de la courbe y = + (x – a) yx a pour tangente au point singulier M_o (a, 0) la droite

$$y = \sqrt{a}\ \ (x - a).$$

La deuxième branche de la courbe $y = -\ (x\ -\ a)\sqrt{x}$ étant symétrique de la première par rapport à l'axe Ox la courbe a, par conséquent, une deuxième tangente au point singulier, défini par l'équation

$$y = -\sqrt{a}\ \ (x - a\,).$$

La courbe passe deux fois par le point singulier. Un point présentant une telle particularité est appelé *point double*.

La courbe considérée est représentée sur la figure 191.

E x e m p l e 2. Etudier les points singuliers de la courbe (parabole semicubique)

$$y^2 + x^3 = 0.$$

S o l u t i o n . On détermine les coordonnées des points singuliers à partir du système d'équations

$$y^2 - x^3 = 0;\ 3x^2 = 0;\ 2y = 0.$$

Il en résulte que le point M_o (0, 0) est un point singulier.

Mettons l'équation considérée sous la forme : $y = \pm\sqrt{x^3}$.

Pour construire cette courbe procédons de la manière suivante: étudions tout d'abord la branche de la courbe correspondant aux valeurs positives; la branche correspondant au signe moins n'exige pas une étude particulière puisqu'elle est symétrique de la première branche par rapport à l'axe *Ox*.

La fonction *y* n'est définie que pour $x \geq 0$, elle est non négative et croît avec *x*.

–

Calculons les dérivées première et seconde de la fonction $y = \sqrt{x^3}$;

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}\ ;\quad y'' = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Pour $x = 0$, on a $y = 0$, $y' = 0$. Par conséquent, la branche considérée de la courbe a pour tangente à l'origine des coordonnées la droite $y = 0$. La deuxième branche de la courbe $y = -\sqrt{x^3}$ passe également par l'origine des coordonnées

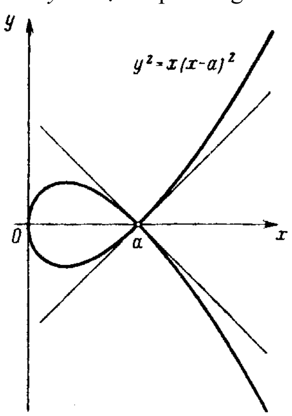


Fig. 191

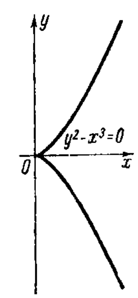


Fig. 192

et a aussi pour tangente en ce point la droite $y = 0$. Par conséquent, les deux branches de la courbe passent par l'origine des coordonnées, y ont une même

tangente et sont disposées symétriquement de part et d'autre de cette tangente. Un point singulier de cette sorte est appelé *point de rebroussernent de première espèce* (fig. 192).

R e m a r q u e . On peut considérer la courbe $y^2 - x^3 = 0$ comme un cas limite de la courbe $y^2 = x\,(x - a)^2 = 0$ (considérée dans l'exemple 1), pour $a \to 0$, c'est-à-dire quand la boucle se contracte jusqu'à être réduite à un seul point.

E x e m p l e 3. Etudier la courbe $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$.

S o l u t i o n . On détermine les points singuliers à partir du système d'équations

$$-4x\,(y - x2) - 5x^4 = 0\ ;2\,(y - xz) = 0.$$

Ce système a une solution unique : $x = 0$, $y = 0$. L'origine des coordonnées est, par conséquent, un point singulier.

Mettons l'équation considérée sous la forme $y = x^2 \pm \sqrt{x^5}$.

I1 en résulte que x est susceptible de prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et $+\infty$.

Calculons les dérivées première et seconde

$$y' = 2x \pm \frac{5}{2}\sqrt{x^3};\quad y'' = 2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{x}\ .$$

Etudions séparément les branches de la courbe qui correspondent respectivement au signe plus et au signe moins du radical. Dans les deux cas, pour

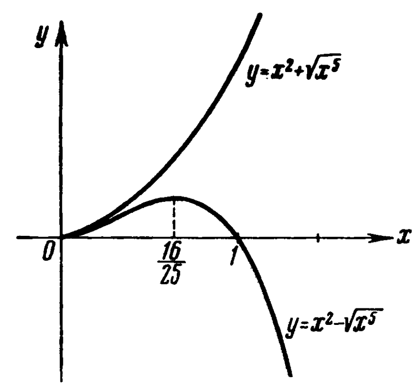


Fig. 193

$x = 0$, nous avons $y = 0$, $y' = 0$. Par conséquent, l'axe *Ox* est une tangente pour les deux branches de la courbe.

Considérons d'abord la branche $y = x^2 + \sqrt{x^5}$. Quand *x* croît de 0 à ∞, *y* croît de 0 à ∞. La seconde branche *y* - xs - 1/x2 coupe l'axe *Ox* aux points (0, 0) et (1, 0).

La fonction $y = x^2 - \sqrt{x^5}$ présente un maximum pour $x = 25$. Pour

$x \to +\infty, y \to -\infty$.

Les deux branches de la courbe passent par l'origine des coordonnées; elles out une tangente commune et sont disposées d'un même côté de la tangente au voisinage du point de tangence. Un tel point singulier est appelé point de refiroussement de deuxième espèce. Le graphique de la fonction considérée est représenté sur la figure 193.

E x e m p l e 4. Etudier la courbe $y^2 - x^4 + x^6 = 0$.

S o l u t i o n . L'origine des coordonnées est un point singulier. Pour étudier la variation de la courbe au voisinage de ce point singulier mettons l'équation de la courbe sous la forme : $y = \pm x^2\sqrt{1-x}$

La courbe est symétrique par rapport aux axes de coordonnées, puffsque dans 1 équation de la courbe n'entrent quo les puissances paires des variables et, par cnnséquent, il suffit d'étudier la courbe pour les valeurs positives de x et y. Il vient de cette dernière équation que x varie de 0 à 1, c'est-à-dire $0 \le x \le 1$.

Calculons la dérivée de la branche de la courbe dont l'équation est $y = +x^2\sqrt{1-x}$

$$y' = \frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour $x = 0$, on a $y = 0$, $y' = 0$. La courbe est donc tangente à l'axe Ox à l'origine des coordonnées.

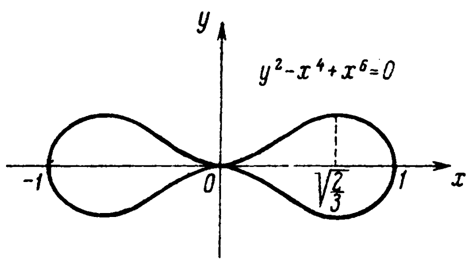


Fig. 194

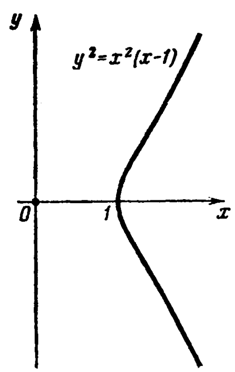


Fig. 195

Pour $x = 1$, $y = 0$, $y' = \infty$; par conséquent, au point (1, 0) la tangente à la courhe est parallèle à l'axe Oy. En outre, la fonction admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

(fig. 194). A l'origine (au point singulier) les deux branches de la courbe sont tangentes. Un point singulier de ce genre est appelé *point de tangence*.

E x e m p l e 5. Etudier la courbe $y^2 - x^2(x-1) = 0$.

S o l u t i o n . Les points singuliers sont déterminés à partir du système d'équations

$$y^2 - x^2(x - 1) = 0; \quad -3x^2 + 2x = 0, \quad 2y = 0.$$

Ce système admet pour solution $x = 0$, $y = 0$. Le point (0, 0) est, par conséquent, un point singulier de la courbe. Mettons l'équation de la courbe sous la forme

$$y = \pm x\sqrt{x-1}.$$

Il est évident que x peut prendre tortes les valeurs comprises entre 1 et $+\infty$, ainsi que la valeur zéro (en ce cas $y = 0$).

Etudions la branche de la courbe correspondant au signe plus du radical. Quand x croît de 1 à ∞, y croît de 0 à ∞. 1.a dérivée de y est

$$y' = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}.$$

Pour $x = 1$, on a $y' = \infty$. La tangente à la courbe au point (1, 0) est donc parallèle à l'axe Oy.

La seconde branche de la courbe (correspondant au signe moins du radical) est symétrique de la première par rapport à l'axe Ox.

Les coordonnées du point (0, 0) vérifient l'équation de la courbe, mais aucun autre point de son voisinage n'appartient à la courbe (fig. 195). Dans ce cas on appelle un point singulier de ce genre point isolé de la courbe.

Exercices

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes:

1. $z = x^2 \sin^2 y$. Rép. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin^2 y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \sin 2y$.
2. $z = x^{y^2}$. Rép. $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^{y^2} \cdot 2y \log x$.
3. $u = e^{x^2+y^2+z^2}$. Rép $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z^2}$ $\frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+z^2}$ $\frac{\partial u}{\partial z} = 2ze^{x^2+y^2+z^2}$.
4. $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Rép. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x \quad + y^2 + z^2}}$.
5. $z =$arc tg (xy). Rép. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1+x^2y^2}$.
6. $z =$ arc tg $\frac{y}{x}$. Rép. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}$ $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$

7. $z = \log \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$. Rép. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$

8. $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$. Rép. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} - \dfrac{z}{y^2} e^{\frac{z}{y}}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{1}{y} e^{\frac{z}{y}}$.

9. z = arc sin $(x + y)$. Rép. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$

10. z = arc tg $\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$. Rép. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-y}{\sqrt{x^4+y^4}}$.

Calculer les différentielles totales des fonctions suivantes:

11. $z = x^2 + xy^2 + \sin y$. Rép. $dz = (2x + y^2)\, dx + (2xy + \cos y)\, dy$.

12. z = Log (xy). Rép. $dz = \dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y}$

13. $z = e^{x^2+y^2}$. Rép. $dz = 2e^{x^2+y^2} \cdot (x\, dx + y\, dy)$.

14. $u = \mathrm{tg}\,(3x - y) + 6^{y+z}$.

Rép. $du = \dfrac{3dx}{\cos^2(3x-y)} + \left(-\dfrac{1}{\cos^2(3x-y)} + 6^{y+z}\log 6\right)dy + 6^{y+z}\log 6\ dz$.

15. $w = \arcsin \dfrac{x}{y}$. Rép. $dw = \dfrac{ydx - xdy}{|\,y\,|\sqrt{y^2-x^2}}$

16. Calculer $f'_x(2, 3)$ et $f'_y(2, 3)$, si $f(x, y) = x^2 + y^2$. Rép. $f'_x(2, 3)$= 4, $f'_y(2, 3)$= 27

17. Calculer $df\ (x, y)$pour $x = 1$, $y = 0$; $dx = \dfrac{1}{2}$, $dy = \dfrac{1}{4}$, si $f\ (x, y)$=. $\sqrt{x^2+y^2}$ Rép. $\dfrac{1}{2}$

Trouver pour les petites valeurs absolues des variables x, y, z une formule approchée pour les expressions:

18. $\sqrt{\dfrac{1+x}{(1+x)(1+z)}}$. Rép. $1 + \dfrac{1}{2}(x - y - z)$. .

19. $\sqrt{\dfrac{1+x}{1+y+z}}$. Rép. $1 + \dfrac{1}{2}(x - y - z)$.

20. Calculer $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, si $z = u + v^2$, $u = x^2 + \sin y$, v = Log $(x + y)$.Rép.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2v\frac{1}{x+y} \ ; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \cos y + 2v\frac{1}{x+y} \ .$$

21. Calculer $\dfrac{dz}{dx}$ si $z = \sqrt{\dfrac{1+u}{1+v}}$, $u = \cos x$; $v = \cos x$. Rép. $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}$

22. Calculer $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, si $z = e^{u-2v}$, $u = \sin x$, $v = x^3 + y^2$. Rép. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{u-2v}$ (cos x - $6x^2$) ; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{u-2v}(0 - 2{\cdot}2y) - 4\, y\, e^{u-2v}$.

Calculer les dérivées totales des fonctions suivantes:

23. z = arc sin $(u + v)$; $u = \sin x \cos \alpha$; $v = \cos x \sin \alpha$. Rép. $\dfrac{dz}{dx}$ = 1, si $2k\pi - \dfrac{\pi}{2} < x + \alpha < 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{dz}{dx}$ = - 1, si $2k\pi + \dfrac{\pi}{2} < x + \alpha < (2k + 1)\, \pi + \dfrac{\pi}{2}$.

24. $u = \dfrac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$; $y = a \sin x$; $z = \cos x$. Rép. $\dfrac{du}{dx}$ $=e^{ax} \sin x$.

25. z = Log $(1+ x^4)$; $x = \sqrt{\sin \theta}$; $\dfrac{dz}{d\theta}$ = -2 tg θ.

Calculer les dérivées des fonctions implicites de x données par les équations

26. . $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ Rép . $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}$.

27. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}$

28. $y^x = x^y$. Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{yx^{y-1} - y^x \log y}{xy^{x-1} - x^y \log x}$.

29. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y = 0$. Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\left[\cos(xy) - e^{xy} - 2x\right]}{x\left[x + e^{xy} - \cos(xy)\right]}$.

30. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; calculer $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Rép, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{c^2 x}{a^2 z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{c^2 y}{b^2 z}$

31. $u - v \operatorname{tg} aw = 0$; calculer $\frac{\partial w}{\partial u}$ et $\frac{\partial w}{\partial v}$. Rép. $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\cos^2 aw}{av}$; $\frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{\sin 2aw}{2av}$

32. $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$, montrer que $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z}$.

33. $\frac{z}{x} = F\left(\frac{y}{x}\right)$, montrer que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$, quelle que soit la fonction dérivable F.

Calculer les dérivées partielles du second ordre:

34. $z = x^3 - 4x^2y + 5y^2$. Rép. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 8y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -8x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10$.

35. $z = e^x \operatorname{Log} y + \sin y \operatorname{Log} x$. Rép. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \log y - \frac{\sin y}{x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{e^x}{y} + \frac{\cos y}{x}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{e^x}{y^2} - \sin y \log x$.

36. Montrer que si $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, alors $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

37. Montrer que si $z = \frac{x^2 y^2}{x + y}$, alors $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial z}{\partial x}$.

38. Montrer que si $z = \operatorname{Log}(x^2 + y^2)$, alors $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

39. Montrer que si $z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax)$, alors $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ quelles que soient les fonctions arbitraires φ et ψ dérivables jusqu'au deuxième ordre.

40. Calculer la dérivée de la fonction $z = 3x^4 - xy + y^3$ au point M (1, 2) suivant une direction formant un angle de 60° avec l'axe Ox. Rép. $5 + \frac{11\sqrt{3}}{2}$.

41. Calculer la dérivée de la fonction $z = 5x^2 - 3x - y - 1$ au point M (2, 1) suivant la direction de la droite joignant ce point au point N (5, 5). Rép. 9,4.

42. Calculer la dérivée de la fonction $f(x, y)$ suivant les directions : 1) de la bissectrice de l'angle des coordonnées Oxy. Rép. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)$; 2) de l'axe des x négatifs. Rép. $-\frac{\partial f}{\partial x}$. .

43. $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$. Montrer qu'au point $M\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ la dérivée est égale à zéro suïvant n'importe quelle direction (u fonction stationnaire »).

44. Déterminer parmi les triangles ayant un même périmètre $2p$ celui dont la surface est la plus grande. Rép. Le triangle équilatéral.

45. Trouver parmi les parallélépipèdes rectangles d'aire donnée S celui dont le volume est le plus grand. Rép. Le cube d'arète $\sqrt{\frac{S}{6}}$.

46. Calculer la distance entre les deux droites de l'espace d'équations $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$, $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. Rép. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Etudier le maximum et le minimum des fonctions:

47. $z = x^3y2\,(a - x - y)$. Rép. z est maximum pour $x = \frac{a}{2}$; $y = \frac{a}{3}$.

48. $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ .Rép. z est minimum pour $x = y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

49. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ $(0 \le x \le \frac{\pi}{2}; 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$. Rép. z est maxinmum pour $x = y = \frac{\pi}{3}$.

50. $z = \sin x \sin y \sin(x + y)$ $(0 \le x \le \pi ; 0 \le y \le \pi)$. Rép. z est maximumpour $x = y = \frac{\pi}{3}$

Trouver les points singuliers des courbes suivantes, étudier la nature de ces points singuliers et former l'équation des tangentes en ces points

51. $x^3 + y^5 - 3axy = 0$. Rép. M_o (0, 0) est un point multiple ; équations des tangentes : $x = 0, y = 0$.

52. $a^4y^2 = x^4(a^2 - x^2)$. Rép. L'origine est un point de tangence. Tangente double $y^2 = 0$

53. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ Rep. M_o (0, 0) est un point de rebroussement de première espèce ; $y^2 = 0$ est l'équation de la tangente.

54. $y^2 - x^2 (9 - x^2)$. Rép. M_o (0, 0) est un point multiple ; équations des tangentes: $y = \pm 3x$.
55. $x4 - 2ax^2y - axy^2 + a^2x^2 = 0$. Rép. M_o (0, 0) est un point de rebroussement de deuxième espèce, $y^2 = 0$ est l'équation de la tangente double.
56. $y^2 (a^2 + x^2) = x2 (a^2 - x^2)$. Rép. M_o (0, 0) est un point multiple; équations des tangentes: $y = \pm x$.
57. $b^2 x^2 + a^2y^2 = x^2y^2$. Rép. M_o (0, 0) est un point isolé.
58. Montrer que l'origine des coordonnées est un point terminal pour la courbe $y = x \operatorname{Log} x$ et qu'en ce point l'axe Oy est tangent à la courbe.
59. Montrer que l'origine des coordonnées est un point multiple de la courbe $y = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. Les tangentes en ce point sont: à droite $y = 0$, à gauche $y = x$.

Chapitre IX APPLICATIONS DU CALCUL DIFFERENTIEL A LA GEOMETRIE DE L'ESPACE

§ 1. Equation d'une courbe dans l'espace

Considérons le vecteur $\overline{OA} = \boldsymbol{r}$ joignant l'origine des coordonnées à un point variable A (x, y, z) (fig. 196). Ce vecteur est appelé rayon vecteur.
Exprimons ce vecteur à l'aide de ses projections sur les axes de coordonnées:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \quad (1)$$

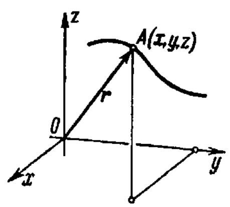


Fig. 196

Supposons que les projections du vecteur r sont fonctions d'un certain paramètre t

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= \chi(t). \end{aligned}\right\} . \qquad (1)$$

La formule (1) peut être alors mise sous la forme

$$\boldsymbol{r} = \varphi\,(t)\,\boldsymbol{i} + \psi\,(t)\,\boldsymbol{j} + \ \chi(t)\,\boldsymbol{k}\ (1')$$

ou

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(t).\ (1'')$$

Quand t varie, les coordonnées x, y, z varient et le point A, extrémité du rayon vecteur $\boldsymbol{r}$, décrit dans l'espace une certaine courbe que l'on appelle *hodographe* du vecteur $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}$ (t). Les équations (4') et (1'') sont appelées *équations vectorielles* d'une courbe dans l'espace ou c o u r b e g a u c h e . Les équations (2) sont appelées *équations paramétriques* d'une courbe gauche. A chaque valeur de t, ces équations font correspondre des valeurs bien déterminées des coordonnées x, y, z d'un certain point de la courbe.

R e m a r q u e . On peut également définir une courbe gauche comme étant le lieu géométrique des points d'intersection de deux surfaces. La courbe peut donc être définie par les deux équations de ces surfaces

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(x, y, z) &= 0, \\ \Phi_2(x, y, z) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Par exemple, les équations

$$x^2 + y^2\ \ z^2 = 4,\ z = 1$$

sont les équations d'un cercle dans l'espace, ce cercle étant défini comme l'intersection d'une sphère et d'un plan (fig. 197).
Une courbe gauche peut donc être exprimée soit par les équations paramétriques (2), soit par les deux équations des surfaces (3).
On passe des courbes paramétriques aux courbes exprimées par l'intersection de deux surfaces en éliminant le paramètre t des équations (2);

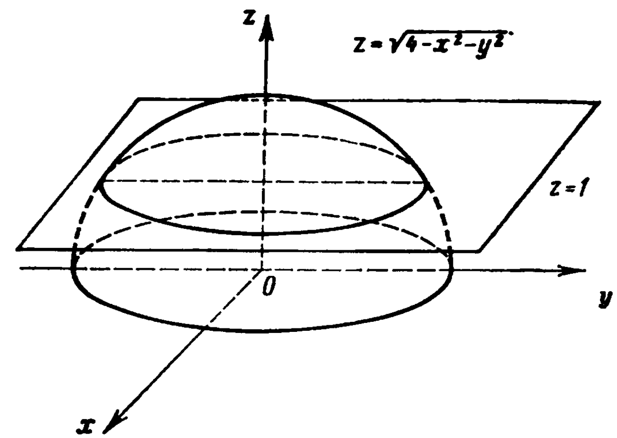


Fig. 197

on obtient alors deux équations reliant x, y et z. Inversement, si l'on pose $x = \varphi$ (t) (où φ (t) est une fonction arbitraire) et si l'on exprime y et z en fonction de t à partir des équations

$$\Phi_1[\ \varphi\ (t), y, z\ ] = 0,\ \Phi_2[\ \varphi\ (t), y, z\ ] = 0,$$

on effectue le passage des courbes exprimées par l'intersection de surfaces aux courbes définies paramétriquement.

E x e m p l e 1. Soient $x = 4t - 1$, $y = 3t$, $z = t + 2$
les équations paramétriques d'une droite. En éliminant le paramètre t, nous en déduisons les équations de deux plans. Par exemple, en retranchant successivement de la première équation la deuxième et la troisième, on a $x - y - z = -3$. En retranchant de la première la troisième, multipliée préalablement par quatre, on a $x - 4z = -9$. La droite donnée est donc la courbe définie par l'intersection des deux plans

$$x - y - z + 3 = 0 \text{ et } x - 4z + 9 = 0.$$

E x e m p l e 2. Considérons un cylindre droit de révolution de rayon a, dont l'axe coïncide avec l'axe Oz (fig. 198). Enroulons autour du cylindre un triangle rectangle flexible C_1AC, de sorte que le sommet A du triangle coïncide avec le point de rencontre de la génératrice du cylindre et de l'axe Ox, et que le côté AC,

s'enroule sur la section de ce cylindre située dans le plan Oxy. L'hypothénuse détermine alors sur le cylindre une courbe appelée hélice.
Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point variable M de l'hélice et par t l'angle AOP (voir fig. 198). Alors

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = PM = AP\ \mathrm{tg}A,$$

où θ désigne l'angle aigu du triangle C_1AC. Remarquons que $AP = at$, car AP est l'arc de circonférence de rayon a correspondant à l'angle au centre t.

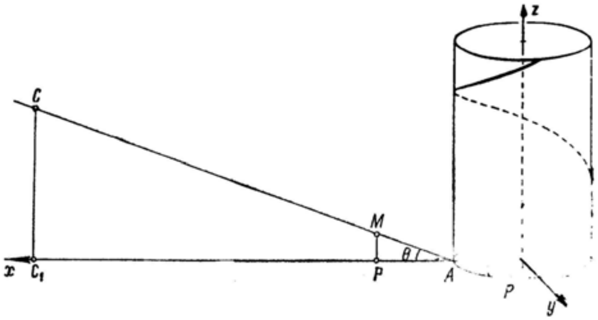


Fig. 198

En désignant tg θ par m, on trouve les équations paramétriques de l'hélice

$$x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\ z = amt$$

(où t est le paramètre), ou sous forme vectorielle

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos t + \boldsymbol{j}a\sin t + \boldsymbol{k}amt.$$

On élimine le paramètre t des équations paramétriques de l'hélice; en élevant les deux premières équations au carré et en les ajoutant on trouve $x^2 + y^2 = a^2$. C'est précisément l'équation du cylindre sur lequel est tracée l'hélice. Ensuite, en divisant terme à terme la deuxième équation par la première et en remplaçant dans la relation obtenue t par son expression tiré de la troisième équation, on trouve l'équation d'une autre surface sur laquelle est tracée l'hélice:

$$\frac{x}{y} = \mathrm{tg}\frac{z}{am}.$$

Elle est appelée hélicoïde à plan directeur. On peut la considérer comme engendrée par une demi-droite parallèle au plan Oxy d'extrémité située sur l'axe Oz lorsque cette demidroite tourne avec une vitesse angulaire constante autour de l'axe Oz et qu'elle se déplace vers le haut avec une vitesse constante, de sorte que son extrémité reste constamment sur l'axe Oz. L'hélice est définie par l'intersection du cylindre et de la surface hélicoïdale. C'est pourquoi, on peut la définir par les deux équations

$$x^2 + y^2 = a^2,\quad \frac{x}{y} = \mathrm{tg}\frac{z}{am}$$

§ 2. Limite et dérivée d'une fonetion vectorielle d'une variable scalaire indépendante. Equation de la tangente à une courbe. Equation du plan normal

Revenons aux formules (1') et (1 ") du précédent paragraphe

$$\boldsymbol{r} = \varphi(t)\,\boldsymbol{i} + \psi(t)\,\boldsymbol{j} + \chi(t)\,\boldsymbol{k} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t).$$

En général, quand t varie, la grandeur et la direction du vecteur $\boldsymbol{r}$ varient également. On dit alors que $\boldsymbol{r}$ est une *fonction vectorielle* de la variable scalaire

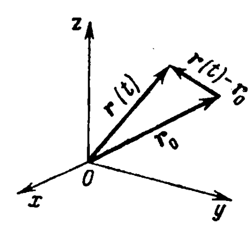


Fig. 199

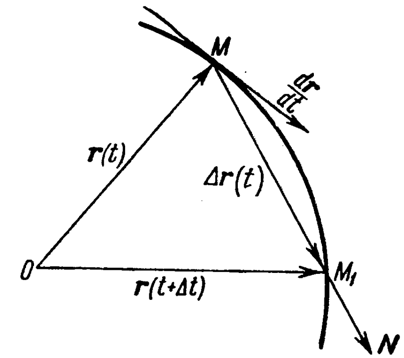


Fig. 200

indépendante t. Supposons que

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t) = \varphi_0,\quad \lim_{t\to t_0}\psi(t) = \psi_0,\quad \lim_{t\to t_0}\chi(t) = \chi_0$$

On dit alors que le vecteur $\boldsymbol{r}_0 = \varphi_0(t)\,\boldsymbol{i} + \psi_0(t)\,\boldsymbol{j} + \chi_0(t)\,\boldsymbol{k}$ est la limite du vecteur $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ et on écrit (fig. 199)

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0$$

Il en résulte les égalités évidentes:

$$\lim_{t\to t_0}\left|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0\right| = \lim_{t\to t_0}\sqrt{[\varphi(t)-\varphi_0]^2 + [\psi(t)-\psi_0]^2 + [\chi(t)-\chi_0]^2} = 0$$

et

$$\lim_{t\to t_0}\left|\boldsymbol{r}(t)\right| = \left|\boldsymbol{r}_0\right|$$

Passons maintenant à la notion de dérivée d'une fonction vectorielle d'une variable scalaire indépendante

$$\boldsymbol{r} = \varphi(t)\,\boldsymbol{i} + \psi(t)\,\boldsymbol{j} + \chi(t)\,\boldsymbol{k}, \qquad (1)$$

en supposant que l'origine du vecteur $\boldsymbol{r}$ (t) coïncide avec l'origine des coordonnées. Nous savons que l'équation (1) est l'équation vectorielle d'une courbe gauche.
Choisissons une valeur de t qui correspond à un point déterminé M de la courbe et donnons à t un accroissement Δt ; nous avons alors le vecteur

$$\boldsymbol{r}\,(t+\Delta t)=\varphi\,(t+\Delta t)\,\boldsymbol{i}+\psi\,(t+\Delta t)\,\boldsymbol{j}+\chi(t+\Delta t)\,\boldsymbol{k},$$

qui détermine sur la courbe un point M_1 (fig. 200). Calculons l'accroissement du vecteur

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\,(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}\,(t)=[\varphi\,(t+\Delta t)-\varphi\,(t)]\,\boldsymbol{i}+[\psi\,(t+\Delta t)-\psi(t)]\,\boldsymbol{j}+[\chi(t+\Delta t)-\chi(t)]\boldsymbol{k}.$$

Cet accroissement est représenté sur la figure 200 par le vecteur $\overline{MM_1}=\Delta\boldsymbol{r}\,(t)$, où $\overline{OM}=\boldsymbol{r}\,(t)$, $\overline{OM_1}=\boldsymbol{r}\,(t+\Delta t)$. Considérons le rapport $\frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$ de l'accroissement de la fonction vectorielle à l'accroissement de la variable scalaire indépendante ; c'est évidemment un vecteur colinéaire au vecteur $\Delta\boldsymbol{r}\,(t)$ puisqu'on l'obtient en multipliant $\Delta\boldsymbol{r}\,(t)$ par le facteur scalaire $\frac{1}{\Delta t}$. Nous pouvons mettre ce vecteur sous la forme:

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\frac{\chi(t+\Delta t)-\chi(t)}{\Delta t}\boldsymbol{k}$$

Si les dérivées des fonctions $\varphi\,(t)$, $\psi\,(t)$, $\chi\,(t)$ existent pour la valeur choisie de t, les coefficients de $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ tendront respectivement vers $\varphi'\,(t)$, $\psi'\,(t)$, $\chi'\,(t)$ quand $\Delta t\to 0$.

Par conséquent, dans ce cas la limite $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ existe quand $\Delta t\to 0$ et est égale au vecteur $\varphi'\,(t)\,\boldsymbol{i}+\psi'\,(t)\,\boldsymbol{j}+\chi'\,(t)\,\boldsymbol{k}$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\varphi'\,(t)\,\boldsymbol{i}+\psi'\,(t)\,\boldsymbol{j}+\chi'\,(t)\,\boldsymbol{k}$$

On appelle le vecteur défini par cette dernière égalité la dérivée du vecteur r (t) par rapport à la variable scalaire t. On désigne la dérivée par le symbole $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ ou $\boldsymbol{r}'$.

Ainsi,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{r}'=\varphi'\,(t)\,\boldsymbol{i}+\psi'\,(t)\,\boldsymbol{j}+\chi'\,(t)\,\boldsymbol{k}\quad(2)$$

ou

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}\qquad(2')$$

Voyons quelle est la direction du vecteur $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$.

Quand $\Delta t\to 0$, le point M_1 tend vers le point M; la direction de la sécante MM_1 coïncide à la limite avec celle de la tangente. Par conséquent, le vecteur dérivée $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ est orienté suivant la tangente à la courbe au point M. La longueur du vecteur $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ est donnée par la formule *)

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}$$

Les résultats obtenus permettent d'écrire aisément l'équation de la tangente à la courbe $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ au point $M\,(x,y,z)$; il suffit de se rappeler que $x=\varphi\,(t)$, $y=\psi\,(t)$, $z=\chi(t)$.
L'équation de la droite passant par le point $M\,(x,y,z)$est

$$\frac{X-x}{m}=\frac{Y-y}{n}=\frac{Z-z}{p}.$$

où X, Y, Z sont les coordonnées du point variable de la droite et m, n, p des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de cette droite (c'est-à-dire aux projections du vecteur unitaire de la droite).
D'autre part, nous avons établi que le vecteur

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}$$

est orienté suivant la tangente. C'est pourquoi les projections de ce vecteur sont des nombres proportionnels aux cosinus directeurs de la tangente et, par conséquent, aux nombres m, n, p. L'équation de la tangente sera donc

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}\qquad(3)$$

E x e m p l e 1. Ecrire l'équation de la tangente à l'hélice

---

* Nous supposerons qu'aux points considérésdré $\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right]\neq 0$

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = amt$$

pour t quelconque et pour $t = \frac{\pi}{4}$

Solution.

$\frac{dx}{dt} = -a\sin t,\ \frac{dy}{dt} = a\cos t,\ \frac{dz}{dt} = am.$

Nous avons, d'après la formule (4)

$$\frac{X - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{Y - a\sin t}{a\cos t} = \frac{Z - amt}{am}$$

En particulier, nous trouvons pour $t = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{X - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{Y - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{Z - am\frac{\pi}{4}}{am}.$$

De même que pour une courbe plane, on appelle normale à une courbe gauche en un point donné la droite perpendiculaire à la tangente et passant par le point de tangence. Il existe, évidemment, une infinité de normales en chaque point d'une courbe gauche. Toutes ces normales sont situées dans le plan perpendiculaire à la tangente à la courbe. On appelle ce plan plan normal.

Nous déduisons l'équation du plan normal en partant (le sa définition en tant que plan perpendiculaire à la tangente (4)

$$\frac{dx}{dt}(X - x) + \frac{dy}{dt}(Y - y) + \frac{dz}{dt}(Z - z) = 0 \qquad (5)$$

E x e m p l e 2. Former l'équation du plan normal à l'liélice au point. correspondant à la valeur $t = \frac{\pi}{4}$ du paramètre.

S o l u t i o n . En utilisant les résultats de l'exemple 1 et la formule (5), on a

$$-\left(X - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + \left(Y - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + m\sqrt{2}\left(Z - am\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

ou

$$-X + Y + m\sqrt{2}\,Z = am^2\frac{\pi}{4}\sqrt{2}.$$

Etablissons maintenant l'équation de la tangente et du plan normal à une courbe gauche, dans le cas d'une courbe exprimée par les equations

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0. \quad (6)$$

Exprimons les coordonnées x, y, z de cette courbe en fonction d'un paramètre arbitraire t

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t). \qquad (7)$$

Nous supposerons que $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ sont des fonctions dérivables de t.

En substituant dans l'équation (6) les expressions de x, y, z en fonction de t pour les points de la courbe, nous trouvons deux identités en t:

$$\Phi_1[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] = 0, \quad (8a)$$
$$\Phi_2[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] = 0. \quad (8b)$$

En dérivant les identités (8a) et (8b) par rapport à t, nous trouvons:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0 \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

II vient de ces equations que

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}};\quad \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}}; \qquad (10)$$

Nous avons suppose ici que l'expression

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} \neq 0,$$

mais on peut démontrer que les formules définitives (11) et (12) (voir plus bas) sont également valables dans le cas où cette expression est égale à zero, et que l'un au moins des determinants figurant dans ces formules est different de zero.

II vient de l'égalité (10)

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}}$$

Par conséquent, nous pouvons, en vertu de la formule (4), mettre l'équation de la tangente sous la forme

$$\frac{X-x}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}}$$

ou, en nous servant des déterminants,

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\end{vmatrix}}. \quad (11)$$

L'équation du plan normal est alors

$$(X-x)\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\end{vmatrix}+(Y-y)\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\end{vmatrix}+(Z-z)\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\end{vmatrix}=0 \qquad (12)$$

Ces formules sont valables quand l'un au moins des déterminants est différent de zéro. Si en un point de la courbe les trois déterminants

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\end{vmatrix}$$

s'annulent simultanément, le point considéré est appelé *point singulier* de la courbe gauche. La courbe peut ne pas avoir de tangente en ce point, de même qu'aux points singuliers d'une courbe plane (voir § 20, ch. VIII).

E x e m p l e 3. Trouver l'équation de la tangente et du plan normal à la courbe définie par l'intersection de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$ et du cylindre $x^2 + y^2 = 2ry$ au point $M(r, r, r\sqrt{2})$ (fig. 201).

S o l u t i o n.

$$\Phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2,$$
$$\Phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 = 2ry$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}=2x, \qquad \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}=2y, \qquad \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}=2z$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}=2x, \qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}=2y-2r, \qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}=0.$$

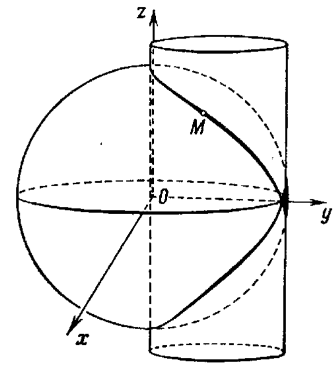


Fig. 201

Les valeurs des dérivées au point M sont respectivement

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}=2r, \qquad \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}=2r, \qquad \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}=2r\sqrt{2}$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}=2r, \qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}=0.$$

L'équation de la tangente est

$$\frac{X-r}{0}=\frac{Y-r}{\sqrt{2}}=\frac{Z-r\sqrt{2}}{-1}.$$

L'équation du plan normal est

$$\sqrt{2}\,(Y-r)-(Z-r\sqrt{2})=0 \text{ ou } \sqrt{2}\,Y-Z=0$$

§ 3. Règles de dérivation des vecteurs (fonctions vectorielles)

Nous avons défini la dérivée du vecteur par la relation

$$\boldsymbol{r}(t)=\varphi(t)\,\boldsymbol{i}+\psi(t)\,\boldsymbol{j}+\chi(t)\,\boldsymbol{k} \qquad (1)$$

par la relation

$$\boldsymbol{r}'(t)=\varphi'(t)\,\boldsymbol{i}+\psi'(t)\,\boldsymbol{j}+\chi'(t)\,\boldsymbol{k}. \qquad (2)$$

Il résulte immédiatement de cette définition que les principales règles de dérivation des fonctions sont valables également pour les vecteurs. Nous établirons ici les formules de dérivation de la somme et du produit scalaire de vecteurs, et nous nous bornerons à énoncer les autres formules en laissant au lecteur le soin de les démontrer.

I. *La dérivée de la somme de vecteurs est égale à la somme des dérivées de ces vecteurs.*

En effet, étant donnés deux vecteurs

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1(t) &= \varphi_1(t)\boldsymbol{i} + \psi_1(t)\boldsymbol{j} + \chi_1(t)\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{r}_2(t) &= \varphi_2(t)\boldsymbol{i} + \psi_2(t)\boldsymbol{j} + \chi_2(t)\boldsymbol{k} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

leur somme est égale à

$$\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t) = [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]\,\boldsymbol{i} + [\psi_1(t) + \psi_2(t)]\,\boldsymbol{j} + [\chi_1(t) + \chi_2(t)]\boldsymbol{k}.$$

Par définition, la dérivée du vecteur variable est

$$\frac{d[\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)]}{dt} = [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]'\boldsymbol{i} + [\psi_1(t) + \varphi_2(t)]'\boldsymbol{j} + [\chi_1(t) + \chi_2(t)]'\boldsymbol{k}$$

ou

$$\frac{d[\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)]}{dt} = [\varphi'_1(t) + \varphi'_2(t)]\boldsymbol{i} + [\psi'_1(t) + \psi'_2(t)]\boldsymbol{j} + [\chi'_1(t) + \chi'_2(t)]\,\boldsymbol{k} =$$

$$[\varphi'_1(t)\,\boldsymbol{i} + \psi'_1(t)\boldsymbol{j}\,\chi'_1(t)\,\boldsymbol{k}] + [\varphi'_2(t)\,\boldsymbol{i} + \psi'_2(t)\boldsymbol{j}\,\chi'_2(t)\,\boldsymbol{k}] = \boldsymbol{r}'_1 + \boldsymbol{r}'_2$$

Par conséquent,

$$\frac{d[\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)]}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} \qquad \text{(I)}$$

II. *La dérivée du produit scalaire de deux vecteurs est donnée par la formule*

$$\frac{d(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1\frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}. \qquad \text{(II)}$$

En effet, si les vecteurs $\boldsymbol{r}_1(t)$ et $\boldsymbol{r}_2(t)$ sont définis par les formules (3), leur produit scalaire est égal à

$$\boldsymbol{r}_1(t)\,\boldsymbol{r}_2(t) = \varphi_1\varphi_2 + \psi_1\psi_2 + \chi_1\chi_2$$

C'est pourquoi

$$\frac{d(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)}{dt} = \varphi'_1\,\varphi_2 + \varphi_1\,\varphi'_2 + \psi'_1\,\psi_2 + \psi_1\,\psi'_2 + \chi'_1\,\chi_2 + \chi_1\,\chi'_2 =$$

$$(\varphi'_1\,\varphi_2 + \psi'_1\,\psi_2 + \chi'_1\,\chi_2) + (\varphi_1\,\varphi'_2 + \psi_1\,\psi'_2 + \chi_1\,\chi'_2) =$$

$$(\varphi'_1\,\boldsymbol{i} + \psi'_1\boldsymbol{j} + \chi'_1\,\boldsymbol{k})\,(\varphi_2\,\boldsymbol{i} + \psi_2\boldsymbol{j} + \chi_2\,\boldsymbol{k}) +$$

$$(\varphi_1\,\boldsymbol{i} + \psi_1\boldsymbol{j} + \chi_1\,\boldsymbol{k})\,(\varphi'_2\,\boldsymbol{i} + \psi'_2\boldsymbol{j} + \chi'_2\,\boldsymbol{k}) = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1\frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}.$$

Le théorème est démontré.

Nous déduisons de la formule (II) un corollaire d'une grande importance.

C o r o l l a i r e . *La dérivée du vecteur unitaire* $\boldsymbol{e}$ (*c'est-à-dire tel que* $|\,\boldsymbol{e}\,| = 1$) *est perpendiculaire à ce vecteur.*

D é m o n s t r a t i o n . Si a est un vecteur unitaire, alors

$$\boldsymbol{ee} = 1.$$

Dérivons les deux membres de cette égalité par rapport à t

$$\boldsymbol{e}\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{e}}{dt}\boldsymbol{e} = 0$$

ou

$$2\boldsymbol{e}\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} = 0$$

Donc, le produit scalaire

$$\boldsymbol{e}\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} = 0;$$

cela signifie justement que le vecteur $\frac{d\boldsymbol{e}}{dt}$ est perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{e}$.

III. *Si $f(t)$ est une fonction scalaire et $\boldsymbol{r}(t)$ une fonction vecterielle, alors la dérivée du produit $f(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)$ est donnée par la formule*

$$\frac{d(f\boldsymbol{r})}{dt} = \frac{df}{dt}\boldsymbol{r} + f\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \qquad \text{(III)}$$

D é m o n s t r a t i o n . Si le vecteur $\boldsymbol{r}(t)$ est déterminé par la formule (1) alors

$$f(t)\,\boldsymbol{r}(t) = f(t)\,\varphi(t)\,\boldsymbol{i} + f(t)\,\psi(t)\boldsymbol{j} + f(t)\,\chi(t)\,\boldsymbol{k}.$$

Nous obtenons d'après la formule (2)

$$\frac{d(f(t)\boldsymbol{r}(t))}{dt} = \left(\frac{df}{dt}\varphi + f\frac{d\varphi}{dt}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{df}{dt}\psi + f\frac{d\psi}{dt}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{df}{dt}\chi + f\frac{d\chi}{dt}\right)\boldsymbol{k} =$$

$$\frac{df}{dt}(\varphi\,\boldsymbol{i} + \psi\,\boldsymbol{j} + \chi\,\boldsymbol{k}) + f\left(\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{d\psi}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{d\chi}{dt}\boldsymbol{k}\right) = \frac{df}{dt}\boldsymbol{r} + f\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.$$

IV. *On peut sortir un facteur numérique constant de sous le signe de la dérivée*

$$\frac{d(a \cdot \boldsymbol{r}(t))}{dt} = a\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = a\boldsymbol{r}'(t)\,. \qquad \text{(IV)}$$

Cela découle de III, si $f(t) = a =$ const. Par conséquent, $\frac{df}{dt} = 0$.

V. *La dérivée du produit vectoriel des vecteurs* $\boldsymbol{r}_1(t)$ et $\boldsymbol{r}_2(t)$ *est déterminée par la formule*

$$\frac{d(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \times \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}\,.$$

Elle se démontre comme la formule (II).

§ 4. Dérivées première et seconde d'un vecteur par rapport à la longueur de l'arc. Courbure de la courbe. Normale principale. Vitesse et accélération du point dans un mouvement curviligne

La longueur de l'arc *) d'une courbe gauche $\overset{\frown}{M_0 A} = s$ est définie de la même manière que pour une courbe plane (fig. 202). La longueur de l'arc s varie quand le point variable $A\ (x, y, z)$ se déplace le long de la courbe ; inversement, quand s varie, les coordonnées x, y, z du point variable A de la courbe varient.

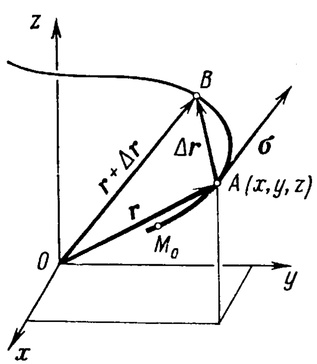


Fig. 202

Par conséquent, on peut considérer les coordonnées x, y, z du point variable A de la courbe comme des fonctions de la longueur de l'arc s

$$x = \varphi(s)\,,\ y = \psi(s)\,,\ z = \chi(s).$$

Dans ces équations paramétriques le paramètre est la longueur de l'arc s.

Le vecteur $\overline{OA} = \boldsymbol{r}$ s'exprime de la manière suivante

$$\boldsymbol{r} = \varphi(s)\,\boldsymbol{i} + \psi(s)\,\boldsymbol{j} + \chi(s)\,\boldsymbol{k}$$

ou

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$$

* Voir définition de la longueur de l'arc d'une courbe plane § 1, ch. VI et § 3, ch. XII.

c'est-à-dire le vecteur $\boldsymbol{r}$ est une fonction de la longueur de l'arc s. Elucidons la signification géométrique de la dérivée $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$.

Il découle de la figure 202 les égalités

$$M_O A = s,\ AB = \Delta s,\ M_O B = s + \Delta s,$$
$$OA = \boldsymbol{r}(s),\ \mathrm{OB} = \boldsymbol{r}(s + \Delta s),$$
$$AB = \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s + \Delta s) - \boldsymbol{r}(s),$$
$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s} = \frac{\overline{AB}}{AB}\,.$$

Nous avons vu, au § 2, que le vecteur $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}$ est dirigé suivant la tangente à la courbe au point A dans le sens des s croissants. D'autre part, nous avons l'égalité $\lim \left|\frac{\overline{AB}}{AB}\right| = 1$ (la limite du rapport de la longueur de la corde à la longueur de l'arc soustendu *)). Par conséquent ,s est un vecteur u n i t a i r e dirigé suivant la tangente. Désignons-le par σ:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{\sigma}\,.$$

Si le vecteur $\boldsymbol{r}$ est donné par ses projections

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \quad (2)$$

alors

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{dx}{ds}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{ds}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{ds}\boldsymbol{k}, \qquad (3)$$

où

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1\,.$$

Considérons, ensuite, la dérivée s e c o n d e $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$ de la fonction vectorielle $\boldsymbol{r}$, c'est-à-dire la dérivée de $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$, et donnons la signification géométrique de cette dérivée seconde.

* Nous avons démontré cette égalité pour les courbes planes au § 1, ch. VI. Elle est également vraie pour les courbes gauches $\boldsymbol{r}(t) = \varphi(t)\boldsymbol{i} + \psi(t)\boldsymbol{j} + \chi(t)\boldsymbol{k}$ si les dérivées des fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ et $\chi(t)$ sont continues et ne s'annulent pas simultanément.

Il vient de la formule (2) que

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right]=\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}.$$

Par conséquent, nous devons calculer $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\sigma}}{\Delta s}$.

D'après la figure 203, $AB = \Delta s$, $\overline{AL}=\boldsymbol{\sigma}$, $\overline{BK}=\boldsymbol{\sigma}+\Delta\boldsymbol{\sigma}$. Menons du point B le vecteur $\overline{BL_1}=\boldsymbol{\sigma}$. Il vient du triangle BKL_1:

$$\overline{BK}=\overline{BL_1}+\overline{L_1K},$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma}+\Delta\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}+\overline{L_1K}$$

Par conséquent, $L_1K = \Delta\boldsymbol{\sigma}$. Puisque la longueur du vecteur $\boldsymbol{\sigma}$ est constante,

$$|\boldsymbol{\sigma}| = |\boldsymbol{\sigma}+\Delta\boldsymbol{\sigma}|;$$

il en résulte que le triangle BKL_1 est isocèle. L'angle $\Delta\varphi$ au sommet de ce triangle est l'angle de rotation de la tangente à la courbe quand on passe du point A au point B. Il correspond donc à l'accroissement de la longueur ds de l'arc Δs. Il vient du triangle BKL_1:

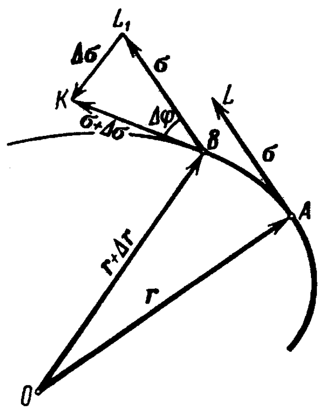


Fig. 203

$$\overline{L_1K}=|\Delta\boldsymbol{\sigma}|=2|\boldsymbol{\sigma}|\left|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right|=2\left|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right|.$$

(car $|\boldsymbol{\sigma}| = 1$).

Divisons les deux membres de cette égalité par Δs

$$\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\sigma}}{\Delta s}\right|=2\left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right|\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Passons à la limite dans les deux membres de cette égalité, en faisant tendre Δs vers zéro. A gauche, nous trouvons

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\sigma}}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}\right|$$

De plus,

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right|=1,$$

puisque nous considérons des courbes pour lesquelles la limite $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ existe et que, par conséquent, $\Delta\varphi\to 0$ quand $\Delta s\to 0$.

Ainsi, nous avons, après le passage à la limite,

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| \qquad (4)$$

On appelle *courbure moyenne* de l'arc AB de la courbe considérée le rapport de l'angle de rotation $\Delta\varphi$ de la tangente, quand on passe du point A au point B, à la valeur absolue de la longueur Δs de l'arc AB

$$\text{courbure moyenne}=\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$

La limite de la courbure moyenne quand $\Delta s\to 0$ est appelée courbure de la courbe au point A et désignée par la lettre K

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$

Mais alors il vient de l'égalité (4) que $\left|\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}\right|=K$, c'est-à-dire la longueur de la dérivée par rapport à la longueur de l'arc du vecteur unitaire *) de la tangente est égale à la courbure de la courbe en ce point. Le vecteur a étant un vecteur unitaire, la dérivée ds lui est perpendiculaire (voir § 3, ch. IX, corollaire).

Ainsi, le vecteur $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}$ est dirigé suivant la perpendiculaire au vecteur de la tangente, sa longueur est égale à la courbure en ce point.

D é f i n i t i o n . On appelle *normale principale* à la courbe, en un point donné, une droite coïncidant avec le support du vecteur $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}$. On désigne par $\boldsymbol{n}$ le vecteur unitaire de cette direction.

La longueur du vecteur $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}$ est égale à la courbure K de la courbe, par conséquent,

$$\frac{a\boldsymbol{\sigma}}{ds}=K\boldsymbol{n}.$$

---

* Rappelons que la dérivée d'un v e c t e u r est encore un v e c t e u r , de sorte qu'il y a lieu de considérer la l o n g u e u r de cette dérivée.

La quantité $\frac{1}{K}$ est appelée *rayon de courbure* de cette courbe au point donné, et on la désigne par R, c'est-à-dire $\frac{1}{K} = R$, on peut donc écrire :

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} = \frac{\boldsymbol{n}}{R} \quad (5)$$

Il vient de cette formule :

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right)^2. \quad (6)$$

Mais

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\boldsymbol{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\boldsymbol{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\boldsymbol{k}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \quad (6')$$

La formule (6') permet de calculer la courbure en un point quelconque d'une courbe donnée par ses équations paramétriques, dont le paramètre est la longueur de l'arc s (c'est-à-dire quand le rayon vecteur du point variable de cette courbe est une fonction de la longueur de l'arc).

Considérons le cas où le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ est fonction d'un paramètre quelconque t

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t).$$

Dans ce cas, nous considérerons s comme une fonction du paramètre t. Le calcul de la courbure est alors effectué de la manière suivante :

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt}. \quad (7)$$

Comme

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right| = 1 \text{*)}$$

alors

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \quad (8)$$

Dérivons les deux membres de cette égalité et simplifions par 2, nous avons :

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}. \quad (9)$$

I1 vient de la formule (7):

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

Dérivons par rapport à s les deux membres de cette égalité

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} - \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3};$$

en substituant l'expression trouvée pour $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$ dans la formule (6), nous avons:

$$\frac{1}{R^2} = \left[\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} - \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}\right]^2 =$$

$$= \frac{\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - 2\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^6}.$$

Exprimons maintenant $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{d^2s}{dt^2}$ à partir des formules (8) et (9) en fonction des dérivées de $\boldsymbol{r}$ (t), nous avons *)

---

* Cette égalité résulte de ce que $\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{|\Delta s|}$. Mais $\Delta\boldsymbol{r}$ est la corde sons-tendant l'arc de longueur Δs. C'est pourquoi $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}$ tend vers 1, quand $\Delta s \to 0$.

* Nous transformons le dénominateur de la manière suivante

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^6 = \left\{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right\}^3 = \left\{\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\right\}^3$$

$$\frac{1}{R^2}=\frac{\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)^2\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2-\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2}{\left\{\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\right\}^3}. \qquad (10)$$

La formule (10) peut être mise sous la forme [**])

$$K^2=\frac{1}{R^2}=\frac{\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right]^2}{\left\{\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\right\}^3} \qquad (11)$$

Nous avons donc établi une formule permettant le calcul de la courbure en tout point d'une courbe donnée par des équations paramétriques de paramètre quelconque.

Si, en particulier, la courbe est plane et est située dans le plan Oxy, elle a pour équations paramétriques

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ \ z=0.$$

En substituant ces expressions de x, y, z dans la formule (11), nous retrouvons la formule exprimant la courbure d'une courbe plane, donnée par des équations paramétriques, que nous avions précédemment établie (cf. ch. VI)

$$K=\frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\varphi''(t)|}{\left\{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2\right\}^{3/2}}.$$

E x e m p l e . Calculer la courbure de l'hélice

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}a\cos t\ \ \boldsymbol{j}a\sin t+\boldsymbol{k}amt,$$

Nous ne pouvons pas écrire $\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^6$, car $\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2$ désigne le carré scalaire du vecteur $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ et $\left\{\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\right\}^3$ désigne le cube du nombre $\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2$. L'expression $\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^6$ n'a pas de sens.

[**] Nous avons utilisé l'identité $a^2b^2-(ab)^2=(a\times b)^2$ que l'on vérifie aisément en la mettant sous la forme: $a^2b^2-(ab\cos\varphi)^2=(ab\sin\varphi)^2$.

en un point quelconque.

S o l u t i o n : $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=-\boldsymbol{i}a\sin t+\boldsymbol{j}a\cos t+\boldsymbol{k}am$, $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-\boldsymbol{i}a\cos t-\boldsymbol{j}a\sin t$,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -a\sin t & a\cos t & am\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}a^2m\sin t-\boldsymbol{j}a^2m\cos t+\boldsymbol{k}a^2,$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)^2=a^4(m^2+1),$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2=a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+a^2m^2=a^2(1+m^2).$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{R^2}=\frac{a^4(m^2+1)}{\left[a^2(1+m^2)\right]^3}=\frac{1}{a^2(1+m^2)^2}.$$

d'où

$$R=a\,(1+m^2)=\text{const.}$$

Nous concluons donc que le rayon de courbure de l'hélice est constant.

R e m a r q u e . On peut toujours supposer qu'une courbe plane est située dans le plan Oxy. (Il suffit d'effectuer un changement d'axes de coordonnées). Dans le plan Oxy, $z=0$; mais alors $\frac{d^2z}{ds^2}=0$ et, par conséquent, le vecteur $\boldsymbol{n}$ est également situé dans le plan Oxy. Une conclusion s'impose donc : la normale principale à une courbe plane est située dans le plan de la courbe.

V i t e s s e d'u n p o i n t e n m o u v e m e n t c u r v i l i g n e . Supposons qu'à l'instant t du temps le point mobile se trouve au point M déterminé par le rayon vecteur $\overline{OM}=\boldsymbol{r}\ (t)$ (cf. fig. 200), et qu'à l'instant $t+\Delta t$ au point M_1 déterminé par le rayon vecteur $\overline{OM_1}=\boldsymbol{r}\ (t+\Delta t)$. Le vecteur $\overline{MM_1}$ est alors *appelé vecteur du déplacement du point*. Le rapport du vecteur du déplacement $\overline{MM_1}$ à l'accroissement correspondant du temps Δt est appelé vitesse moyenne du point au cours de ce laps de temps

$$v_{\text{moy}}=\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\overline{MN}.$$

Le vecteur de la vitesse moyenne est également dirigé suivant la corde MM_1 (cf. fig. 200, p. 345) dans le sens du mouvement du point (lors d'un mouvement rectiligne il est orienté suivant la trajectoire elle même).

La vitesse du point à un instant donné est définie ainsi

$$\nu = \lim_{\Delta t \to 0} (\nu_{\text{moy}}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

autrement dit

$$\nu = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \quad (12)$$

On peut dire ainsi *que la vitesse du point à un instant donné est la dérivée première du rayon vecteur du point par rapport au temps.*
I1 découle de la formule (2') § 2 que les projections de la vitesse sur les axes de coordonnées seront

$$\nu_x = \frac{dx}{dt}, \quad \nu_y = \frac{dy}{dt}, \quad \nu_z = \frac{dz}{dt}$$

Le module de la vitesse est déterminé d'après la formule (3) § 2

$$\nu = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \qquad (13)$$

Si l'on introduit la longueur de l'arc s, comme nous l'avons fait au début de ce paragraphe, et si nous considérons la longueur de l'arc s comme une fonction du temps t, alors la formule (12) peut s'écrire ainsi

$$\nu = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{\sigma}\nu \qquad (14)$$

où $\nu = \frac{ds}{dt}$ est la valeur absolue de la vitesse, $\boldsymbol{\sigma}$ le vecteur unitaire, orienté suivant la tangente dans le sens du mouvement.

A c c é l é r a t i o n d u p o i n t e n m o u v e m e n t c u r v i l i g n e. De même que nous l'avons défini au § 25 du ch. III, on appelle *accélération* $\boldsymbol{w}$ du point en mouvement curviligne la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}. \qquad (15)$$

Or $\nu = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, par conséquent

$$\boldsymbol{w} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}. \qquad (16)$$

Si nous nous basons sur la formule (14) nous obtenons:

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d(\nu \cdot \boldsymbol{\sigma})}{dt}.$$

Calculant cette dernière dérivée d'après la formule (III) § 3, nous obtenons

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{v}\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}. \qquad (17)$$

Transformons la dérivée da en utilisant les formules (7) et (5)

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{\boldsymbol{n}}{R}\boldsymbol{\nu}.$$

Portant dans l'égalité (17) nous obtenons en définitive

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\nu}{dt}\boldsymbol{\sigma} + \nu^2\frac{\boldsymbol{n}}{R}. \qquad (18)$$

Ici $\boldsymbol{\sigma}$ désigne le vecteur unitaire orienté suivant la tangente dans le sens du mouvement, n le vecteur unitaire orienté suivant la normale principale.
La formule (18) peut être énoncée ainsi.

La projection de l'accélération du point sur la tangente est égale à la dérivée première de la valeur absolue de la vitesse, et la projection de l'accélération sur la normale principale est égale au carré de la vitesse, divisé par le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré.
Comme les vecteurs $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{n}$ sont perpendiculaires, le module de l'accélération est déterminé par la formule

$$w = \sqrt{\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\nu^2}{R}\right)^2}. \qquad (19)$$

§ 5. Plan osculateur. Binormale. Torsion d'une courbe gauche

D é f i n i t i o n 1. On appelle *plan osculateur* à une courbe donnée au point A le plan défini par la tangente à la courbe et la normale principale en ce point.

Il est évident que le plan osculateur à une courbe plane coïncide avec le plan de cette courbe. Si la courbe n'est pas plane, les plans osculateurs, correspondant à deux points P et P_1 de la courbe, forment entre eux un angle dièdre μ. Plus μ est grand, plus la courbe diffère d'une courbe plane. Pour être plus précis, introduisons la définition suivante.

D é f i n i t i o n 2. On appelle *binormale* la normale à la courbe perpendiculaire au plan osculateur.

Choisissons, sur la binormale, un vecteur unitaire $\boldsymbol{b}$ et orientons-le de sorte que les vecteurs $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ forment un trièdre trirectangle de même orientation que les vecteurs unitaires $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ des axes de coordonnées (fig. 204, 205).

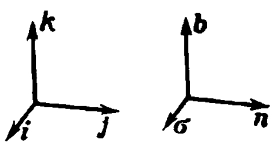


Fig. 204

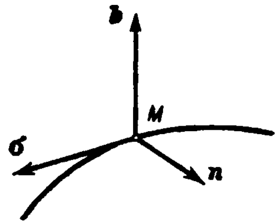


Fig. 205

Nous avons, en vertu de la définition des produits scalaire et vectoriel

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{n};\ \boldsymbol{bb} = 1. \qquad (1)$$

Calculons la dérivée $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$. En vertu de la formule (V), § 3, nous avons:

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \frac{d(\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{n})}{ds} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} \times \boldsymbol{n} + \boldsymbol{\sigma} \times \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} \qquad (2)$$

Mais $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} = \frac{\boldsymbol{n}}{R}$ (voir § 4), c'est pourquoi

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} \times \boldsymbol{n} = \frac{1}{R} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} = 0\,,$$

et la formule (2) peut être mise sous la forme

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \boldsymbol{\sigma} \times \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}. \qquad (3)$$

Il découle de la définition du produit vectoriel que le vecteur $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ est perpendiculaire au vecteur de la tangente $\boldsymbol{\sigma}$. D'autre part, $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ est perpendiculaire à $\boldsymbol{b}$, puisque $\boldsymbol{b}$ est un vecteur unitaire (voir § 3, corollaire).

Nous concluons donc que le vecteur $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ est perpendiculaire à $\boldsymbol{\sigma}$ et à $\boldsymbol{b}$, autrement dit, colinéaire au vecteur $\boldsymbol{n}$

Désignons par $\frac{1}{T}$ la longueur du vecteur $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$, c'est-à-dire posons

$$\left|\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\right| = \frac{1}{T}\ ;$$

alors

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \frac{1}{T}\boldsymbol{n}\,. \qquad (4)$$

On appelle $\frac{1}{T}$ *torsion* de la courbe donnée.

L'angle dièdre μ formé par les plans osculateurs correspondant à deux points de la courbe, est égal à l'angle formé par les binormales.

Nous pouvons alors écrire une formule analogue à la formule (4) du § 4, ch. IX

$$\left|\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mu}{|\Delta s|}\,.$$

Ainsi, la torsion de la courbe au point A est égale, en valeur absolue, à la limite du rapport de l'angle μ formé par les plans osculateurs au point A et au point voisin B, à la longueur $|\Delta s|$ de l'arc AB quand $\Delta s \to 0$.

Si la courbe est p l a n e , le plan osculateur ne varie pas et, par conséquent, la torsion est égale à zéro.

Il résulte de la définition de la torsion que cette quantité caractérise l'écart entre une courbe gauche et une courbe plane.

La quantité T est appelée *rayon de torsion* de la courbe. Trouvons la formule donnant la torsion. Il vient des formules (3) et (4)

$$\frac{1}{T}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\sigma} \times \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$$

Multiplions scalairement les deux membres de l'égalité par $\boldsymbol{n}$, nous avons:

$$\frac{1}{T}\boldsymbol{nn} = \boldsymbol{n}\left[\boldsymbol{\sigma} \times \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right].$$

Le second membre de cette égalité est ce que l'on appelle le produit mixte de trois vecteurs $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\sigma}$ et $\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$. On sait que ce produit ne varie pas lors de la permutation circulaire des facteurs. Comme $\boldsymbol{nn} = 1$, nous pouvons mettre la dernière égalité sous la forme

$$\frac{1}{T} = \boldsymbol{\sigma}\left[\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} \times \boldsymbol{n}\right]$$

ou

$$\frac{1}{T} = -\boldsymbol{\sigma}\left[\boldsymbol{n} \times \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right].(5)$$

Mais comme $\boldsymbol{n} = R\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$, alors

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = R\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3} + \frac{dR}{ds}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$$

et

$$\left[\boldsymbol{n}\times\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right]=R\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\times\left\{R\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}+\frac{dR}{ds}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right\}=$$

$$=R^2\left[\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right]+R\frac{dR}{ds}\left[\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right],$$

le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même étant égal à zéro,

$$\left[\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right]=0$$

Ainsi,

$$\left[\boldsymbol{n}\times\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right]=R^2\left[\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right].$$

En remarquant que $\boldsymbol{\sigma}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ et en revenant à l'égalité (5), on a

$$\frac{1}{T}=-R^2\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\left[\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right]. \qquad (6)$$

Si $\boldsymbol{r}$ est exprimé en fonction d'un paramètre arbitraire t, on peut démontrer *), de la même manière que dans le paragraphe précédent,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\left[\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right]=\frac{\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\left[\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\times\dfrac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right]}{\left\{\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\right\}^3}.$$

En substituant cette expression dans la formule (6) et en remplaçant R^2 par son expression tirée de la formule (11), § 4, nous trouvons en définitive

$$\frac{1}{T}=-\frac{\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\left[\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\times\dfrac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right]}{\left[\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right]^2} \qquad (7)$$

Cette formule nous permet de calculer la torsion en tout point d'une courbe donnée par ses équations paramétriques dans le cas d'un paramètre arbitraire t.

Remarquons que les formules exprimant les dérivées des vecteurs $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}$ sont appelées *formules de Serret-Frénet* :

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}=\frac{\boldsymbol{n}}{R},\quad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{\boldsymbol{n}}{T},\quad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\frac{\boldsymbol{\sigma}}{R}-\frac{\boldsymbol{b}}{T}.$$

La dernière d'entre elles peut être établie comme suit

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\sigma},$$

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\frac{d(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\sigma})}{ds}=\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\times\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{b}\times\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}=\frac{\boldsymbol{n}}{T}\times\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{b}\times\frac{\boldsymbol{n}}{R}=\frac{1}{T}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\sigma}+\frac{1}{R}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n};$$

mais

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\sigma}=-\boldsymbol{b}\ ;\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{\sigma}$$

c'est pourquoi

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\frac{\boldsymbol{b}}{T}-\frac{\boldsymbol{\sigma}}{R}.$$

---

* En effet, $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}\dfrac{ds}{dt}$;dérivons encore une fois cette égalité par rapport à t:

$\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)\dfrac{ds}{dt}\dfrac{ds}{dt}+\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}\dfrac{d^2s}{dt^2}=\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2+\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}\dfrac{d^2s}{dt^2}$. Dérivons de nouveau la relation obtenue par rapport à t:

$$\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}=\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right)\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}2\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{d}{ds}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+$$

$$+\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}+\frac{d^3s}{dt^3}=\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3+3\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{d^3s}{dt^3}.$$

Formons ensuite le produit mixte

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\times\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right)=$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{ds}{dt}\left\{\left[\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}\right]\times\left[\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3+3\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{d^3s}{dt^3}\right]\right\}.$$

Développons ce produit, d'après la règle de multiplication des polynômes, en omettant tous les termes dans lesquels entrent au moins deux vecteurs identiques (car le produit mixte de trois vecteurs, dont deux sont identiques, est égal à zéro); nous trouvons:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\times\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right)=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^6.$$

En remarquant que

$\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2=\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2$,ou $\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^6=\left\{\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dr}\right)^2\right\}^3$ nous trouvons l'égalité cherchée.

E x e m p l e . Calculer la torsion de l'hélice

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos t + \boldsymbol{j}a\sin t + \boldsymbol{k}amt.$$

S o l u t i o n .

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\left[\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\times\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right] = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & am \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = a^3 m$$

$$\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right]^2 = a^4(1+m^2) \text{ (voir exemple du §4).}$$

Par conséquent,

$$T = -\frac{a^4(1+m^2)}{a^3 m} = -\frac{a(1+m^2)}{m}$$

§ 6. *Plan tangent et normale à une surface*

Soit

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

l'équation d'une surface.

Introduisons les définitions suivantes.

D é f i n i t i o n 1. On dit qu'une droite est *tangente* à une surface en un point P (x, y, z) si elle est tangente à une courbe quelconque tracée sur cette surface et passant par ce point.

Puisqu'une infinité de courbes tracées sur la surface passe par le point $P(x, y, z)$, il y aura également en ce point une infinité de tangentes à cette surface.

Définissons les points simples et les points singuliers d'une surface $F(x, y, z) = 0$.

On dit que le point M est un point *singulier* de la surface si les trois dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ s'annulent simultanément en ce point ou l'une au moins les dérivées n'existe pas en ce point. Le point M est dit point *simple* si les dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ existent et sont continues en ce point et si l'une d'entre elles au moins est différente de zéro.

Enonçons le théorème suivant.

T h é o r è m e . *Toutes les droites tangentes à la surface* (1) *au point simple P appartiennent à un même plan.*

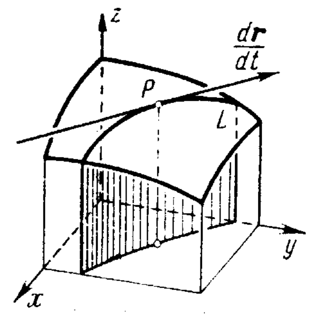


Fig. 206

D é m o n s t r a t i o n . Considérons sur la surface une courbe L (fig. 206) passant par un point P donné de la surface. Soient

$$x = \varphi(t)\,;\; y = \psi(t),\; z = \chi(t) \qquad (2)$$

les équations paramétriques de cette courbe.

La tangente à cette courbe est, par définition, une tangente à la surface. Les équations de cette tangente sont

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}.$$

Si l'on substitue les expressions (2) dans l'équation (1), cette équation devient une identité en t puisque la courbe (2) est tracée sur la surface (1). Dérivons cette identité par rapport à t, nous avons *)

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

Considérons, ensuite, les vecteurs $\boldsymbol{N}$ et $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, passant par le point P:

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Les projections $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ de ce vecteur dépendent des coordonnées x, y, z du point P.

Remarquons que ces projections ne s'annulent pas simultanément au point P, puisque P est un point simple. C'est pourquoi

$$|\boldsymbol{N}| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \neq 0.$$

Le vecteur

---

* Nous utilisons ici la règle de dérivation des fonctions composées de trois variables. Cette règle est valable dans le cas présent puisque les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ sont continues par hypothèse.

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} \quad (5)$$

est tangent à la courbe passant par le point P et tracée sur la surface. On peut calculer les projections de ce vecteur à partir de l'équation (2), en donnant au paramètre t la valeur qui correspond au point P. Calculons le produit scalaire des vecteurs $\boldsymbol{N}$ et $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$; il est égal à la somme des produits des projections correspondantes

$$\boldsymbol{N}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

En vertu de la formule (3), le second membre de cette expression est égal à zéro et, par conséquent,

$$\boldsymbol{N}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=0$$

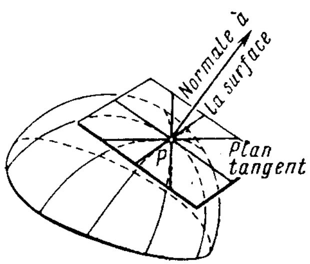


Fig. 207

On déduit de cette égalité que le vecteur $\boldsymbol{N}$ est perpendiculaire au vecteur $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ de la tangente à la courbe (2) au point P. La démonstration que nous venons de donner est valable pour toute courbe (2) passant par le point P et tracée sur la surface. Par conséquent, toutes les tangentes à cette surface au point P sont perpendiculaires à un même vecteur $\boldsymbol{N}$; elles appartiennent donc toutes à un même plan perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{N}$. Le théorème est démontré.

D é f i n i t i o n 2. Le plan formé par toutes les tangentes en un point P aux courbes tracées sur une surface et passant par ce point est appelé *plan tangent* à la surface au point P (fig. 207).

Notons que le plan tangent peut ne pas exister si P est un point singulier de la surface. En de tels points, les drones tangentes à la surface peuvent ne pas appartenir à un plan unique. Le sommet d'un cône, par exemple, est un point singulier et en ce point les tangentes à la surface n'appartiennent pas à un plan unique (elles constituent précisément la surface conique).

Formons l'équation du plan tangent à la surface (1) en un point simple. Ce plan étant perpendiculaire au vecteur (4), son équation est de la forme

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0. \quad (6)$$

Si la surface est donnée par l'équation

$$z=f(x,y) \text{ ou } z-f(x,y)=0,$$

alors

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial F}{\partial z}=1$$

et l'équation du plan tangent est

$$Z-z=\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y). \quad (6')$$

R e m a r q u e . Si l'on pose dans la formule (6') $X - x = \Delta x$; $Y - y = \Delta y$, on a

$$Z-z=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

le second membre est la différentielle totale de la fonction $z = f(x, y)$. Par conséquent, $Z - z = dz$. Ainsi, la différentielle totale dune fonction de deux variables au point $M(x, y)$, qui correspond aux accroissements Δx et Δy des variables indépendantes x et y, est égale à l'accroissement correspondant de la cote (z) du plan tangent à la surface représentant le graphique de cette fonction.

D é f i n i t i o n 3. On appelle *normale* à la surface (1) en un point $P(x, y, z)$ la droite perpendiculaire au plan tangent à la surface en ce point (fig. 207). Formons l'équation cle la normale. Celle-ci étant orientée suivant le vecteur $\boldsymbol{N}$, son équation est

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (7)$$

Si l'équation de la surface est $z = f(x, y)$ ou $z - f(x, y) = 0$. l'équation de la normale sera

$$\frac{X-x}{-\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{-\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-z}{1}$$

R e m a r q u e . Supposons que la surface $F(x, y, z) = 0$ soit la surface de niveau pour une fonction de trois variables $u(x, y, z)$, autrement dit,

$$F(x, y, z) = u(x, y, z) - C = 0.$$

I1 est évident que le vecteur $\boldsymbol{N}$, défini par la formule (4), dirigé suivant la normale à la surface de niveau $F = u(x, y, z) - C = 0$, sera

$$\boldsymbol{N}=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{N} = \text{grad } u.$$

Par cela même nous avons démontré que le *gradient de la fonction u* (x, y, z) *est dirigé suivant la normale à la surface de niveau passant par le point donné*.

E x e m p l e . Former l'équation du plan tangent et l'équation de la normale à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ au point P (1, 2, 3).

S o l u t i o n .

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z \;;$$

pour $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 6$$

Par conséquent, l'équation du plan tangent est

$$2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0$$

ou

$$x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

L'équation de la normale est

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6},$$

ou

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

Exercices

Calculer la dérivée des vecteurs:

1. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,\mathrm{ctg}\, t + \boldsymbol{j}\,\mathrm{arc\,tg}\, t$. Rép. $\boldsymbol{r}' = -\frac{1}{\sin^2 t}\boldsymbol{i} + \frac{1}{1+t^2}\boldsymbol{j}$.
2. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}e^{-t} + \boldsymbol{j}2t + \boldsymbol{k}\,\mathrm{Log}\, t$. Rép. $\boldsymbol{r}' = -\boldsymbol{i}e^{-t} + 2\boldsymbol{j} + \frac{\boldsymbol{k}}{t}$
3. $\boldsymbol{r} = t^2\boldsymbol{i} - \frac{\boldsymbol{j}}{t} + \frac{\boldsymbol{k}}{t}$. Rép. $\boldsymbol{r}' = 2t\boldsymbol{i} + \frac{\boldsymbol{j}}{t^2} - \frac{2\boldsymbol{k}}{t^3}$.
4. Trouver le vecteur de la tangente, l'équation de la tangente et l'équation du plan normal à la courbe $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$ au point (3, 9, 27). Rép. $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 27\boldsymbol{k}$; la tangente est $\frac{x-3}{1} = \frac{y-9}{6} = \frac{z-27}{27}$; le plan normal: $x + 6y + 27z = 786$.
5. Trouver le vecteur de la tangente, l'équation de la tangente et l'équation du plan normal à la courbe : $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\cos^2\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{j}\sin t + \boldsymbol{k}\sin\frac{t}{2}$. Rép. $\boldsymbol{r}' = -\frac{1}{2}$

$\boldsymbol{i}\sin t + \frac{1}{2}\boldsymbol{j}\cos t + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}\cos\frac{t}{2}$; l'équation de la tangente est $\frac{X - \cos^2\frac{t}{2}}{-\sin t} = \frac{Y - \frac{1}{2}\sin t}{\cos t} = \frac{Z - \sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}$; l'équation du plan normal est $X \sin t - Y\cos t - Z\cos\frac{t}{2} = + x\sin t - y\cos t - z\cos\frac{t}{2}$, où x, y, z sont les coordonnées du point de la courbe par où passe le plan normal (c'est-à-dire $x = \cos^2\frac{t}{2}$, $y = \frac{1}{2}\sin t$, $z = \sin\frac{t}{2}$).

6. Trouver l'équation de la tangente à la courbe $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin\frac{t}{2}$ et les cosinus directeurs de cette tangente. Rép. $\frac{X - X_0}{\sin\frac{t_0}{2}} = \frac{Y - Y_0}{\cos\frac{t_0}{2}} = \frac{Z - Z_0}{\mathrm{ctg}\frac{t_0}{2}}$, $\cos\alpha = \sin^2\frac{t_0}{2}$; $\cos\beta = \frac{1}{2}\sin t_0$; $\cos\gamma = \cos\frac{t_0}{2}$
7. Trouver l'équation du plan normal à la courbe $z = x^2 - y^2$, $y = x$ à l'origine des coordonnées. I n d i c a t i o n . Exprimer la courbe à l'aide d'équations paramétriques. Rép. $x + y = 0$.
8. Trouver $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ au point $t = \frac{\pi}{2}$ pour la courbe $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}(\cos t + \sin^2 t) + \boldsymbol{j}\sin t(1 - \cos t) - \boldsymbol{k}\cos t$. Rép. $\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$; $\boldsymbol{n} = \frac{-5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}{\sqrt{42}}$; $\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}}{\sqrt{14}}$.
9. Trouver l'équation de la normale principale et de la binormale à la courbe $x = \frac{t^4}{4}$; $y = \frac{t^3}{3}$; $z = \frac{t^2}{2}$ au point (x_0, y_0, z_0). Rép. $\frac{x - x_0}{t_0^3 + 2t_0} = \frac{y - y_0}{1 - t_0^4} = \frac{z - z_0}{-2t_0^3 - t_0}$; $\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{-2t_0} = \frac{z - z_0}{t_0^2}$
10. Trouver l'équation du plan osculateur à la courbe $y^2 = x$; $x^2 = z$ au point M (1, 1, 1). Rép. $6x - 8y - z + 3 = 0$.
11. Trouver le rayon de courbure de la courbe donnée par les équations $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$, $x + y - z = 0$. Rép. $R = 2$.

12. Trouver le rayon de torsion de la courbe: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} \cos t + \boldsymbol{j} \sin t + \boldsymbol{k}$ sh t.Rép. T = -ch t.
13. Trouver le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe $\boldsymbol{r} = t^2\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j}$. Rép. R = 3 t (1 + 9t^2)$/2, $T = \infty$.
14. Démontrer que la courbe $\boldsymbol{r} =(a_1t^2 + b_1t + c_1)\ \boldsymbol{i} + (a_2t^2 + b_2t + c_2)\ \boldsymbol{j} + (a_3t^2 + b_3t + c_3)\ \boldsymbol{k}$; est une courbe plane. Rép. $r''' \equiv 0$, c'est pourquoi la torsion est nulle.
15. Trouver la courbure et la torsion de la courbe $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ .Rép. La courbure est égale à $\frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$; la torsion est $\frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$.
16. Trouver la courbure et la torsion de la courbe $x = e^{-t} \sin t$; $y = e^{-t} \cos t$; $z = e^{-t}$. Rép. La courbure est égale à $\frac{\sqrt{2}}{3}$ et, la torsion à $-\frac{1}{3}e^t$.
17. Trouver l'équation du plan tangent à l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ au point (x_1, y_1, z_1). Rép. $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = 1$.
18. Trouver l'équation de la normale à la surface $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ au point (2, 2, 3). Rép. $y + 4x - 10$; $3x - z = 3$.
19. Trouver l'équation du plan tangent à la surface $z = 2x^2 + 4y^2$ au point M(2, 1, 12). Rép. $8x + 8y - z = 12$.
20. Mener un plan tangent à la surface $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ de sorte qu'il soit parallèle au plan $x - y + 2z = 0$. Rép. $x - y + 2z = \pm\sqrt{\frac{11}{2}}$

Chapitre X INTÉGRALE INDÉFINIE

§ 1. Primitive et intégrale indéfinie

Nous avons étudié, au chapitre III, le problème suivant : étant donnée une fonction $F(x)$, trouver sa dérivée, c'est-à-dire la fonction $f(x) = F'(x)$.
Dans ce chapitre, nous considérerons le problème inverse : étant donnée une fonction $f(x)$, trouver une fonction $F(x)$ telle que sa dérivée soit égale à $f(x)$, c'est-à-dire

$$F'(x) = f(x).$$

Définition 1. On dit que la fonction F (x) est une primitive de la fonction $f(x)$ sur le segment [a, b] si en tout point de ce segment on a l'égalité $F'(x) = f(x)$.

Exemple. Trouver une primitive de la fonction $f(x) = x^2$.
On vérifie immédiatement, d'après la définition, que la primitive cherchée est $F(x) = \frac{x^3}{3}$. En effet, $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$

On remarque aisément que si la fonction $f(x)$ admet une primitive, cette dernière n'est pas unique. Ainsi, dans l'exemple precedent, nous aurions pu prendre pour primitives les fonctions suivantes : $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$; $F(x) = \frac{x^3}{3} - 7$ ou plus généralement $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ (où C est une constante arbitraire). En effet, $\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$

D'autre part, on peut démontrer qu'une primitive quelconque de la fonction x^2 est nécessairement de la forme $\frac{x^3}{3} + C$. Cela résulte du théorème suivant.

Théorème. *Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives de la fonction $f(x)$ sur le segment $[a,b]$, leur différence est une constante.*

Démonstration. Nous avons, en vertu de la définition de la primitive

$$\left.\begin{aligned} F_1'(x) &= f(x), \\ F_2'(x) &= f(x). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

pour tout x du segment $[a, b]$.
Posons

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x) \qquad (2)$$

Nous pouvons donc écrire en vertu de l'égalité (1)

$$F'_1(x) - F_2(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Ou $\varphi'(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' \equiv 0,$

pour tous les x appartenant au segment $[a, b]$. Mais il vient de l'égalité $\varphi'(x) = 0$ que φ
(x) est une constante.
En effet, appliquons le théorème de Lagrange (voir § 2, ch. IV) à la fonction $\varphi(x)$ qui est continue et dérivable sur le segment $[a, b]$.
En vertu du théorème de Lagrange, pour tout x arbitraire du segment $[a, b]$, on a

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x - a)\,\varphi'(\xi),$$

où $a < \xi < x$.
Mais puisque $\varphi'() = 0$, alors

$$\varphi(x) - \varphi(a) = 0$$

ou

$$\varphi(x) = \varphi(a). \qquad (3)$$

Ainsi, la fonction $\varphi(x)$ conserve, en tout point du segment $[a, b]$, la valeur $\varphi(a)$. Elle est donc constante sur le segment $[a, b]$. Désignons la constante $\varphi(a)$ par C. II vient alors des égalités (2) et (3)

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

I1 résulte de ce théorème que si nous connaissons une primitive quelconque $F(x)$ de la fonction $f(x)$, toute autre primitive de cette fonction sera de la forme $F(x) + C$, où C est une constante.

Définition 2. On appelle *intégrale indéfinie* de la fonction $f(x)$ et on note $\int f(x)\,dx$ toute expression de la forme $F(x) + C$, où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$. Ainsi, par définition,

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

si

$$F'(x) = f(x).$$

De plus, $f(x)$ est appelée *fonction sous le signe somme* ou *fonction à intégrer*; $f(x)\,dx$

expression sous le signe somme et le signe $\int$ *signe d'intégration* ou *signe « somme »*.
Ainsi, l'intégrale indéfinie représente une famille de fonctions $y = F(x) + C$.
Géométriquement, on peut considérer l'intégrale indéfinie comme un ensemble (une famille) de courbes telles que l'on passe de l'une à l'autre en effectuant une translation dans le sens positif ou négatif de l'axe Oy.
Une question se pose naturellement: toute fonction $f(x)$ possède-t-elle une primitive (et, par onséquent, une intégrale indéfinie)? La réponse est négative, mais toutefois remarquons, sans le démontrer, que *toute fonction* $f(x)$ *continue sur le segment* $[a, b]$ *possède une primitive* (et, par conséquent, *une intégrale indéfinie*).
Le présent chapitre est consacré à l'exposé des différentes méthodes permettant de déterminer la primitive (et, par conséquent, l'intégrale indéfinie) pour certaines classes de fonctions élémentaires.
Le processus qui permet de trouver la primitive d'une fonction $f(x)$ est appelé *intégration de la fonction* $f(x)$.
Faisons la remarque suivante: à l'encontre de la dérivée qui pour une fonction élémentaire est toujours une fonction élémentaire, la primitive d'une fonction élémentaire peut ne pas s'exprimer à l'aide d'un nombre fini de fonctions élémentaires. Nous reviendrons d ailleurs à cette question à la fin de ce chapitre.
I1 vient de la définition 2 que
1. *La dérivée d'une intégrale indéfinie est égale à la fonction à intégrer, c'est-à-dire si* $F'(x) = f(x)$, alors

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x). \quad (4)$$

Cette égalité exprime que la dérivée d'une primitive quelconque est égale à la fonction à intégrer.
2. *La différentielle d'une intégrale indéfinie est égale à l'expression sous le signe somme*

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx. \quad (5)$$

Cela découle de la formule (4).
3. *L'intégrale indéfinie de la différentielle d'une certaine fonction est égale à la somme de cette fonction et d'une constante arbitraire*

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

I1 est facile de vérifier cette égalité par dérivation (la différentielle de chaque membre de l'égalité est égale à $dF(x)$).

§ 2. Table d'intégrales

Avant d'entreprendre l'exposé des différentes méthodes d'intégration, nous donnerons une liste (les primitives de certaines fonctions élémentaires.
Cette table petit être obtenue directement à partir de la définition 2, § 1, ch. X et de la table des dérivées (§ 15, ch. III). (Il est facile de justifier tous les détails du tableau par dérivation; c'est-à-dire on peut vérifier que la dérivée du second membre est égale à la fonction à intégrer.)

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha - 1)$. (Ici et dans les formules suivantes C désigne une constante arbitraire.)
2. $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$.
3. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.
4. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
7. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\operatorname{Log}|\cos x| + C$.
8. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \operatorname{Log}|\sin x| + C$.
9. $\int e^x dx = e^x + C$.
10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$.
12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C$.
13. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x + \mathrm{C}$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mathrm{Log} \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

R e m a r q u e. Dans la table des dérivées (§ 15, ch. III) les formules correspondant aux formules 7, 8, 13, 13, 15 et 16 manquent. Il est toutefois facile de les justifier par dérivation.
Dans le cas de la formule 7, nous avons

$$(- \mathrm{Log} \mid \cos x \mid)' = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}\, x,$$

par conséquent, $\int \mathrm{tg}\, x\, dx = - \mathrm{Log} \mid \cos x \mid + C.$

Dans le cas de la formule 8,

$$(\mathrm{Log} \mid \sin x \mid)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \mathrm{ctg}\, x,$$

17. par conséquent, $\int \mathrm{tg}\, x\, dx = - \mathrm{Log} \mid \cos x \mid + C.$

Dans le cas de la formule 12,

$$\left(\frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \right)' = \frac{1}{2a} \left[\log \mid a+x \mid - \log \mid a-x \mid \right]' = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right] = \frac{1}{a^2 - x^2}$$

par conséquent,

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

Remarquons que cette dernière formule découle également des résultats généraux du § 9, ch. X.
Dans le cas de la formule 14,

$$\left(\mathrm{Log} \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

par conséquent,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mathrm{Log} \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Cette formule découle également des résultats généraux du § 10.

On pourrait justifier d'une manière analogue les formules 13 et 15. Remarquons, toutefois, qu'elles sont une conséquence immédiate des formules 13 et 14 que nous établirons plus loin (voir § 4, exemples 3 et 4).

§ 3. Quelques propriétés de l'intégrale indéfinie

T h é o r è m e 1. *L'intégrale indéfinie de la somme algébrique de deux ou plusieurs fonctions est égale à la somme algébrique de leurs intégrales*

$$\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx. \quad (1)$$

Dérivons les deux membres de cette égalité. En vertu de l'égalité (4) du paragraphe précédent, nous pouvons écrire

$$\left(\int [f_1(x) + f_2(x)] dx \right)' = f_1(x) + f_2(x),$$

$$\left(\int [f_1(x) + f_2(x)] dx \right)' = \left(\int f_1(x) dx \right)' + \left(\int f_2(x) dx \right)' = f_1(x) + f_2(x).$$

Ainsi, la dérivée du premier membre (le l'égalité (1) est égale à la dérivée dit second membre, c'est-à-dire la dérivée d'une primitive quelconque du second membre est égale à la dérivée d'une fonction arbitraire figurant à droite. I1 en résulte. en vertu du théorème du § 1. ch. X, que toute fonction du premier membre de l'égalité
(1) ne diffère (le toute fonction du second membre que par une constante. C'est dans ce sens que l'égalité (1) doit être comprise.

T h é o r è m e 2. *On peut sortir un facteur constant de sous le signe somme, c'est-à-dire si a* = const*, alors*
S af (x) dx = a s f (x) dx. (2)
On justifie cette égalité en dérivant les deux membres:

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx.$$

$$\left(a \int f(x) dx \right)' = a \left(\int f(x) dx \right)' = af(x).$$

Les dérivées de ces deux membres sont égales; par conséquent, la différence des fonctions figurant à gauche et à droite est constante. L'égalité (2) doit être comprise dans ce sens.
Au cours du calcul des intégrales indéfinies, il est parfois utile de se rappeler les règles suivantes
I. Si

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

alors

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C. \quad (3)$$

En effet, en dérivant les deux membres de l'égalité (3), nous avons:

$$\left(\int f(ax)dx\right)' = f(ax)$$

$$\left(\frac{1}{a}F(ax)\right)' = \frac{1}{a}\left(F(ax)\right)'_x = \frac{1}{a}F'(ax)a = F'(ax) = f(ax).$$

Les dérivées de/ ces deux membres sont égales, c.q.f.d. II. Si

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

alors

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C. \qquad (4)$$

III. Si

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

alors

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(x+b) + C. \ (5)$$

On démontre également les égalités (4) et (5) en dérivant les deux membres.

E x e m p l e 1.

$$\int (2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x})dx = \int 2x^3 dx - \int 3\sin x dx + \int 5\sqrt{x}dx =$$

$$2\int x^3 dx - 3\int \sin x dx + 5\int x^{\frac{1}{2}} dx = 2\frac{x^{3+1}}{3+1} - 3(-\cos x) + 5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$\frac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C.$$

E x e m p l e 2.

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x}\right)dx = 3\int x^{-\frac{1}{3}}dx +^1 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{5}{4}}dx =$$

$$3\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \frac{1}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C = \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + \frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x} + C.$$

E x e m p l e 3.

$$\int \frac{dx}{x+3} = \mathrm{Log}\,|\,x+3\,| + C.$$

E x e m p l e 4.

$$\int \cos 7x dx = \frac{1}{7}\sin 7x + C..$$

E x e m p l e 5.

$$\int \sin(2x-6)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x-6) + C.$$

§ 4. Intégration par changement de variable

Soit à calculer l'intégrale

$$\int f(x)dx\,;$$

bien que nous ne sachions pas calculer directement la primitive de la fonction $f(x)$, nous savons qu'elle existe.

Effectuons dans cette intégrale le changement de variable

$$x = \varphi(t), \ (1)$$

où $\varphi(t)$ est une fonction continue, ainsi que sa dérivée, et admet une fonction inverse. Alors $dx = \varphi'(t)\,dt$; démontrons que dans ce cas l'égalité

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \ (2)$$

est satisfaite.

On sous-entend ici que la variable t sera remplace après intégration du second membre par son impression en fonction de x tirée de (1).

Pour justifier l'égalité (2) en ce sens, il suffit de montrer que les deux quantités considérées dont chacune n'est définie qu'à une constante arbitraire près ont la même dérivée par rapport à x. La dérivée du premier membre est

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x)..$$

Nous dérivons le second membre par rapport à x en tenant compte que t est une fonction de x. Il vient de l'égalité (1) que $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ et, en vertu de la règle de dérivation des fonctions inverses,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Nous avons, par conséquent

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_t \frac{dt}{dx} = f\left[\varphi(t)\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}\right] = f[\varphi(t)] = f(x).$$

Les dérivées par rapport à x des deux membres de l'égalité (2) sont donc égales, c.q.f.d.

La fonction $x = \varphi(t)$ doit être choisie de manière que l'on sache calculer l'intégrale indéfinie figurant à droite de l'égalité (2).

R e m a r q u e. Il est parfois préférable de choisir le changement de variable sous la forme $t = \psi(x)$ au lieu de $x = \varphi(t)$. Montrons-le sur un exemple. Proposons-nous de calculer une intégrale de la forme

$$\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}$$

II est ici commode de poser

$$\psi(x) = t,$$

alors

$$\psi'(x)\,dx = dt,$$

$$\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \operatorname{Log}|t| + C = \operatorname{Log}|\psi(x)| + C.$$

Donnons, comme application de ce qui précède, quelques exemples d'intégration par changement de variable.

E x e m p l e 1. $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx = ?$ Effectuons le changement de variable $t = \sin x$; alors $dt = \cos x\, dx$ et, par conséquent,

$$\int \sqrt{\sin x}\cos x dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x + C.$$

E x e m p l e 2. $\int \frac{xdx}{1+x^2} = ?$ Posons $t = 1 + x^2$; alors $dt = 2x\, dx$ et $\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\operatorname{Log} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1+x^2) + C.$

E x e m p l e 3. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$. . Posons $t = \frac{x}{a}$; alors $dx = a\,dt$

E x e m p l e 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$. Posons $t = \frac{x}{a}$; alors $dx = a\,dt$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{adt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

(nous supposons ici que $a > 0$).

On démontre dans les exemples 3 et 4 les formules 11' et 13' de la table d'intégrales (voir plus haut, § 2).

E x e m p l e 5. $\int (\log x)^3 \frac{dx}{x} = ?$ Posons $t = \operatorname{Log} x$; alors $dt = \frac{dx}{x}$;

$$\int (\log x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}(\log x)^4 + C$$

E x e m p l e 6. $\int \frac{xdx}{1+x^4} = ?$ Posons $t = x^2$ alors $dt = 2x\,dx$,

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x^2 + C = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x^2 + C.$$

La méthode d'intégration par changement de variable est l'une des méthodes les plus importantes de calcul des intégrales indéfinies. Même quand nous employons une autre méthode, il arrive très souvent que l'on doit effectuer un changement de variable pendant les calculs intermédiaires. Le succès de l'intégration dépend fréquemment de notre habileté à choisir le changement de variable approprié qui simplifiera les calculs. C'est pourquoi l'étude des méthodes d'intégration se ramène à la détermination du changement de variable à effectuer pour intégrer une fonction donnée.
Le présent chapitre est consacré en grande partie à la résolution de cette tâche.

§ 5. Intégration de certaines expressions contenant le trinôme $ax^2 + bx + c$

I. Considérons l'intégrale

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Transformons tout d'abord le dénominateur en le mettant sous la forme d'une somme ou d'une différence de carrés

$$ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] =$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right],$$

où on a posé

$$\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2.$$

On prendra le signe plus ou le signe moins suivant que le signe du premier membre de la relation précédente est positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$ sont complexes ou réelles.
L'intégrale I_1 peut donc être mise sous la forme

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]}.$$

Effectuons un changement de variable en posant

$$x+\frac{b}{2a} = t,\ dx = dt.$$

Nous avons alors

$$I_1 = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}.$$

C'est justement les intégrales 11' et 12 de la table.
E x e m p l e 1. Soit à calculer l'intégrale

$$\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$$

Solution.

$$I = \int \frac{dx}{2x^2+8x+20} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+10} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+4+10-4} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2+6}$$

Faisons le changement de variable $x + 2 = t$, $dx = dt$. Après substitution dans I, nous retrouvons une intégrale de la table d'intégrales

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+6} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{6}} + C$$

Remplaçons t par son expression en fonction de x, nous avons en définitive:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{\sqrt{6}} + C$$

II. Considérons une intégrale d'un type plus général

$$I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$$

Mettons la fonction à intégrer sous la forme suivante

$$I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx.$$

Cette intégrale peut être mise sous la forme d'une somme de deux intégrales et, en sortant les facteurs constants de sous le signe somme, nous avons:

$$I_2 = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

La seconde intégrale est justement I1 que nous savons calculer. Effectuons un changement de variable dans la première intégrale en posant

$$ax^2 + bx + c = t,\ (2ax + b)\, dx = dt.$$

Par conséquent,

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{dt}{t} = \mathrm{Log}\,|\,t\,| + \mathrm{C} = \mathrm{Log}\,|\,ax^2 + bx + c\,| + C.$$

Nous avons donc en définitive

$$I_2 = \frac{A}{2a}\ \mathrm{Log}\,|\,ax^2 + bx + c\,| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1.$$

E x e m p l e 2. Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx.$$

Utilisons le procédé que nous venons d'indiquer:

$$I = \int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+\left(3+\frac{1}{2}2\right)}{x^2-2x-5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{x^2-2x-5} + 4\int \frac{dx}{x^2-2x-5} =$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left|x^2-2x-5\right| + 2\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{Log}\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right| + C$$

III. Considérons l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

A l'aide du changement de variable indiqué au point I de ce paragraphe, on ramène cette intégrale suivant le signe de a soit à une intégrale du type

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}},$$

dans le cas où $a > 0$, soit à une intégrale du type

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - k^2}}$$

dans le cas où $a < 0$; ces deux intégrales figurent dans la table d'intégrales (voir les formules 15 et 16).

IV.L'intégrale

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

peut être calculée à l'aide de transformations analogues à celles considérées au point II

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

$$\frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Effectuons dans la première intégrale un changement de variable, en posant

$$ax^2 + bx + c = t,\ (2ax + b)\ dx = dt,$$

nous avons:

$$\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C = 2\sqrt{ax^2+bx+c}+C$$

La seconde intégrale a déjà été calculée au point III.

E x e m p l e 3.

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx =$$

$$\frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx - 7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} =$$

$$5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ \mathrm{Log}\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right| + C =$$

$$5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ \mathrm{Log}\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right| + C =$$

§ 6. Intégration par parties

Si u et v désignent deux fonctions dérivables de x, on sait que la différentielle du produit uv est :

$$d\,(uv) = u\,dv + v\,du.$$

En intégrant, on trouve

$$uv = \int udv + \int vdu$$

ou

$$\int udv = uv - \int vdu\ . \quad (1)$$

C'est ce que l'on appelle la *formule d'intégration par parties*. On utilise généralement cette formule pour l'intégration des expressions pouvant être mises sous forme de produit de deux facteurs u et dv, tels que la recherche de la fonction v à partir de sa différentielle dv et le calcul de l'intégrale $\int vdu$ constituent un problème plus simple que le calcul direct de l'intégrale $\int udv$.

L'habileté requise pour effectuer un choix judicieux des deux facteurs u et dv nécessite une certaine expérience que l'on acquiert par la résolution des exercices.

Nous indiquerons sur des exemples comment il faut procéder en pareil cas.

E x e m p l e 1. Soit à calculer $\int x \sin xdx$. Posons $u = x$, $dv = \sin x\ dx$; alors

$$du = dx,\ v = -\cos x.$$

Par conséquent,

$$\int x\sin xdx = -x\cos x + \int \cos xdx = -\cos x + \sin x + C\ .$$

R e m a r q u e. Quand nous déterminons v à partir de sa différentielle dv, nous pouvons prendre une constante arbitraire, puisqu'elle ne figure pas dans le résultat final (ce qui est facile de vérifier en remplaçant dans l'égalité (1) v par $v + C$). C'est pourquoi il est préférable de choisir cette constante égale à zéro.

La méthode d'intégration par parties s'emploie fréquemment. Par exemple, on peut calculer à l'aide de cette méthode les intégrales de la forme

$$\int x^k \sin axdx, \quad \int x^k \cos axdx,$$

$$\int x^k e^{ax}dx, \quad \int x^k \mathrm{Log}\, xdx\ ,$$

ainsi que d'autres intégrales dans lesquelles entrent les fonctions trigonométriques inverses.

Exemple 2. Soit à calculer $\int \mathrm{arc\ tg}\, x\, dx$. Posons $u = \mathrm{arc\ tg}\, x$, $dv = dx$;

alors $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. Par conséquent,

$$\int \mathrm{arc\ tg}\, x\, dx = x\ \mathrm{arc\ tg}\, x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\ \mathrm{arc\ tg}\, x - \frac{1}{2}\ \mathrm{Log}\,|1+x^2| + C.$$

E x e m p l e 3. Soit à calculer $\int x^2 e^x dx$. Posons $u = x^2$, $dv = e^x\, dx$; alors $du = 2x\, dx$, $v = e^x$,

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2\int xe^xdx\ .$$

Appliquons de nouveau à cette dernière intégrale la méthode d'intégration par parties, en posant

$$u_1 = x,\ du_1 = dx,$$
$$dv_1 = e^x\,dx,\ v_1 = e^x.$$

Alors

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Nous avons en définitive

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C = x^2 e^x - 2xe^x - 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

E x e m p l e 4. Soit à calculer . $\int (x^2 + 7x - 5)\cos 2x dx$. Posons $u = x^2 + 7x - 5$,

$dv = \cos 2x\,dx$; alors $du = (2x + 7)\,dx$, $v = \dfrac{\sin 2x}{2}$,

$$\int (x^2 + 7x - 5)\cos 2x dx = (x^2 + 7x - 5)\frac{\sin 2x}{2} - \int (2x+7)\frac{\sin 2x}{2}dx.$$

Appliquons la méthode d'intégration par parties à cette dernière intégrale en posant $u_1 = \dfrac{2x+7}{2}$, $dv_1 = \sin 2x\,dx$; alors $du_1 = dx$, $v_1 = -\dfrac{\cos 2x}{2}$,

D'où en définitive:

$$\int (x^2 + 7x - 5)\cos 2x dx = (x^2 + 7x - 5)\frac{\sin 2x}{2} + (2x+7)\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

E x e m p l e 5. $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = ?$

Multiplions et divisons la fonction à intégrer par $\sqrt{a^2 - x^2}$:

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$
$$a^2 \arcsin\frac{x}{a} - \int x\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Appliquons à cette intégrale la méthode d'intégration par parties, en posant

$u = x,\ du = dx,\quad dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}},\quad v = -\sqrt{a^2 - x^2}$;

alors

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int x\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

En substituant ce résultat dans l'expression que nous avons obtenue plus haut pour l'intégrale recherchée, nous trouvons

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx + C$$

En effectuant certaines transformations élémentaires évidentes, nous avons en définitive

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

E x e m p l e 6. Calculer les intégrales

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx dx\ , \text{ et } I_2 = \int e^{ax}\sin bx dx$$

En appliquant la méthode d'intégration par parties à la première intégrale, on a:

$$u = e^{ax},\ du = ae^{ax}\,dx,\quad dv = \cos bx\,dx,\ v = \frac{1}{b}\sin bx,$$

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx.$$

Appliquons de nouveau la méthode d'intégration par parties à cette dernière intégrale

$$u = e^{ax},\ du = ae^{ax}\,dx,\qquad dv = \sin bx\,dx,\ v = -\frac{1}{b}\cos bx,$$

$$\int e^{ax}\sin bx dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx.$$

Substituons l'expression obtenue dans l'égalité précédente, nous avons:

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx dx.$$

Nous déduisons I_1 de cette égalité:

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx dx = e^{ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx + \frac{a}{b^2}\cos bx\right) + C + \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right),$$

d'où

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

On trouve de même

$$I_2 = \int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

§ 7. Fractions rationnelles. Fractions rationnelles élémentaires et leur intégration.

Comme nous allons le voir, ce ne sont pas toutes les fonctions élémentaires qui .s'intègrent à l'aide de fonctions élémentaires. C'est pourquoi il est très important de définir les classes de fonctions dont les intégrales peuvent être exprimées à l'aide de fonctions élémentaires. Parmi ces classes, la plus simple est celle des fonctions rationnelles. Toute fonction rationnelle peut être mise sous forme de fraction rationnelle, c'est-à-dire sous forme de quotient de deux polynômes

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m}{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n}$$

Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que ces polynômes n'ont pas de racines communes. Si le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, on dit alors que la fraction est *régulière*, dans le cas contraire on dit qu'elle est *irrégulière*. Si la fraction est irrégulière, en divisant le numérateur par le dénominateur (suivant la règle de division des polynômes), on peut représenter la fraction initiale comme la somme d'un polynôme et d'une fraction régulière

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)},$$

où $M(x)$ est un polynôme et $\frac{F(x)}{f(x)}$, une fraction régulière.

E x e m p l e 1. Soit

$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}$ une fraction rationnelle irrégulière.

Divisons le numérateur par le dénominateur (suivant la règle de division des polynômes), nous avons

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x - 6}{x^2 + 2x + 1}.$$

L'intégration des polynômes ne présentant aucune difficulté, notre tâche consiste donc à intégrer les fractions rationnelles régulières.

D é f i n i t i o n . Les fractions rationnelles régulières du type

I. $\frac{A}{x-a}$

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k est un nombre entier positif ≥ 2).

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (les racines du dénominateur sont complexes, c'est-à-dire $\frac{p^2}{4} - q < 0$),

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (k est un entier positif ≥ 2 ;les racines du dénominateur minateur sont complexes),

sont appelées respectivement éléments simples des types I, II, III et IV.

Nous démontrerons au paragraphe 8 que toute fraction rationnelle peut être mise sous forme de la somme d'éléments simples. Pour cette raison, nous considérerons d'abord les intégrales des éléments simples.

L'intégration des éléments simples des types I, II et III ne présente pas de grandes difficultés, c'est pourquoi nous les intégrons sans donner d'explications détaillées:

I. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \operatorname{Log} |x-a| + C$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$

III. $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q} dx =$$

$$\frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$\frac{A}{2} \log\left|x^2+px+q\right| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \times \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$\frac{A}{2} \operatorname{Log}\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4a - p^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+p}{\sqrt{4a-p^2}} + C \text{ (voir § 5).}$$

L'intégration des éléments simples du type IV est liée à des calculs plus compliqués. Soit à calculer une intégrale

IV. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx$

Effectuons les transformations

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k}dx =$$

$$\frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$$

La première intégrale peut être calculée par un changement de variable en posant $x^2 + px + q = t$; $(2x + p)\, dx = dt$:

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k}dt = \frac{t^{-k+1}}{1-k} + C = \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C.$$

Appelons I_k la seconde intégrale et mettons-la sous la forme

$$I_k = \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k},$$

où l'on a posé

$$x + \frac{p}{2} = t,\ dx = dt,\ \text{q} - \frac{p^2}{4} = m^2$$

(par hypothèse, les racines du dénominateur sont complexes et, par conséquent, $\text{q} - \frac{p^2}{4} > 0$).

Procédons ensuite de la manière suivante

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k}dt = \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k}$$

Transformons cette dernière intégrale

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k} = \int \frac{t\cdot t\ dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{2}\int t\frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\int td\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right)$$

.

En intégrant par parties, nous trouvons

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\left[t\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right].$$

Substituant cette expression dans l'égalité (1), nous avons:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{1}{m^2}\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right] =$$

$$\frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}.$$

L'intégrale qui figure dans le second membre est du même type que I_k à cette différence que le degré du dénominateur de la fonction à intégrer est inférieur d'une unité $(k - 1)$; nous avons donc exprimé I_k en fonction de I_{k-1}

En appliquant successivement ce procédé, on arrive à l'intégrale connue:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m}\text{arc tg}\frac{t}{m} + C$$

En remplaçant ensuite t et m par leurs expressions correspondantes en fonction de x, on obtient l'expression de l'intégrale IV en fonction de x, A, B, p, q.

E x e m p l e 2.

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+(-1-1)}{(x^2+2x+3)^2}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}dx - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} =$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2x+3)} - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Posons dans cette dernière intégrale $x + 1 = t$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{dx}{\left[(x+1)^2+2\right]^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2}dt =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc tg}\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+2)^2}.$$

Considérons maintenant cette dernière intégrale:

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{td(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2}\int td\left(\frac{1}{t^2+2}\right) =$$

$$-\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} = -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arc tg}\frac{t}{\sqrt{2}}$$

(il est inutile d'ajouter une constante arbitraire ; nous l'écrirons dans l'expression définitive). Par conséquent,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} arctg \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{arc tg} \frac{x+1}{\sqrt{2}}\right] + C$$

Nous avons en définitive:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \text{arc tg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

§8. Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples

Démontrons que toute fraction rationnelle régulière peut être mise, et cela d'une seule manière, sous la forme d'une somme d'éléments simples. Soit

$$\frac{F(x)}{f(x)}$$

une fraction rationnelle régulière.

Nous supposerons que les coefficients des polynômes qui la composent sont réels et qu'en outre la fraction est irréductible (c'est-àdire que le numérateur et le dénominateur n'ont pas de racines communes).

T h é o r è m e 1. *Soit $x = a$ une racine multiple d'ordre k du dénominateur, c'est-à-dire* $f(x) = (x-a)^k f_1(x)$, où $f_1(a) \neq 0$ (voir § 6, ch. VII) ; *la fraction régulière* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *peut alors se décomposer en une somme de deux fractions régulières de la manière suivante:*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)} \qquad (1)$$

où le coefficient A est différent de zéro et $F_1(x)$ *est un polynôme de degré inférieur à celui du dénominateur* $(x-a)^{k-1} f_1(x)$.

D é m o n s t r a t i o n . Ecrivons l'identité

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F(x) - A f_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)} \qquad (2)$$

(celle-ci a lieu quel que soit A) et déterminons A de sorte que le polynôme $F(x) - Af_1(x)$ soit divisible par $x - a$. En vertu du théorème de Bézout, il faut et il suffit que l'égalité.

$$F(a) - A f_1(a) = 0$$

soit vérifiée. Comme $f_1(a) \neq 0$, $F(a) \neq 0$, on peut déterminer A d'une manière univoque à partir de cette égalité avec

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

Pour un tel A nous avons

$$F(x) - A f_1(x) = (x-a) F_1(x),$$

où $F_1(x)$ est un polynôme de degré inférieur à celui du polynôme $(x-a)^{k-1} f_1(x)$. Simplifions la fraction dans la formule (2) en divisant le numérateur et le dénominateur par $(x - a)$. Nous trouvons alors l'égalité cherchée (1).

C o r o l l a i r e . On peut appliquer un raisonnement analogue à la fraction rationnelle régulière

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}$$

qui entre dans la composition de l'égalité (1). Ainsi, si le dénominateur de la fraction a une racine multiple $x = a$ d'ordre k, on peut écrire

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

où $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ est une fraction régulière irréductible. On peut appliquer le théorème que nous venons de démontrer à cette nouvelle fraction si $f_1(x)$ a d'autres racines réelles.

Etudions maintenant le cas où le dénominateur a des racines complexes.

Rappelons tout d'abord que les racines complexes d'un polynôme à coefficients réels sont conjuguées deux à deux (voir § 8, ch. VII).

Dans la décomposition du polynôme en facteurs réels, à chaque couple de racines conjuguées correspond une expression de la forme $x^2 + px + q$; si les racines complexes conjuguées sont multiples d'ordre μ, l'expression correspondante sera $(x^2 + px + q)^\mu$.

T h é o r è m e 2. *Si* $f(x) = (x^2 + px + q)^\mu \varphi_1(x)$, *où le polynôme* $\varphi_1(x)$ *n'est pas divisible par* $x^2 + px + q$, *la fraction rationnelle régulière* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *peut être représentée par la somme de deux fractions régulières de la manière suivante*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2+px+q)^{\mu-1} \varphi_1(x)}, \qquad (3)$$

où $\Phi_1(x)$ *est un polynôme de degré inférieur à celui du polynôme* $(x^2 + px + q)^{\mu-1} \varphi_1(x)$.

D é m o n s t r a t i o n. Ecrivons l'identité

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x^2+px+q)^\mu \varphi_1(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^\mu \varphi_1(x)} \quad (4)$$

qui a lieu quels que soient M et N. Déterminons M et N de sorte que le polynôme F (x) – ($Mx + N$) φ_1 (x) soit divisible par $x^2 + px + q$. Pour cela il faut et il suffit que 1'équation

$$F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x) = 0$$

ait les mêmes racines $\alpha \pm i\beta$ que le polynôme $x^2 + px + q$. Par conséquent,

$$F(\alpha + i\beta) - [M(\alpha + i\beta) + N]\varphi_1(\alpha + i\beta) = 0$$

ou

$$M(\alpha + i\beta) + N = \frac{F(\alpha+i\beta)}{\varphi_1(\alpha+i\beta)} .$$

Mais $\frac{F(\alpha+i\beta)}{\varphi_1(\alpha+i\beta)}$ est un nombre complexe, bien déterminé, que l'on peut mettre sous la forme $K + iL$, où K et L sont des nombres réels. Ainsi,

$$M(\alpha + i\beta) + N = K + iL;$$

d'où

$$M\alpha + N = K, \quad M\beta = L$$

ou

$$M = \frac{L}{\beta}, \quad N = \frac{K\beta - L\alpha}{\beta}$$

Si l'on choisit les coefficients M et N de cette manière, le polynôme F (x) (Mx + N) φ_1 (x) aura pour racine $\alpha + i\beta$ et, par conséquent, la racine conjuguée $\alpha - i\beta$.

Ainsi, ce polynôme se divise exactement par $x - (\alpha + i\beta)$ et $x - (\alpha - i\beta)$, et, par conséquent, par leur produit, c'est-à-dire par $x^2 + px + q$. En désignant le quotient de cette division par Φ_1 (x), nous trouvons

$$F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x) = (x^2 + px + q)\Phi_1(x).$$

En simplifiant par $x2 + px + q$ la dernière fraction de l'égalité (4), nous en déduisons l'égalité (3), et il est clair que Φ_1 (x) est un polynôme de degré inférieur à celui du dénominateur, c.q.f.d.

En appliquant les théorèmes 1 et 2 à la fraction régulière $\frac{F(x)}{f(x)}$ on détermine tous les éléments simples correspondant aux racines du dénominateur $f(x)$. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante.

Si

$$f(x) = (x-a)^\alpha \ldots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\mu \ldots (x^2+lx+s)^\nu,$$

la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ peut être décomposée de la manière suivante:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \\
\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \ldots \\
\ldots + \frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q} + \ldots + \frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^\nu} + \\
\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{P_{\nu-1}x+Q_{\nu-1}}{x^2+px+q}
\end{array}\right\} \quad (5)$$

On peut déterminer les coefficients A, A_1, . . ., B, B_1, . . . en tenant compte des considérations suivantes. L'égalité (5) est une identité, par conséquent, si nous réduisons ces fractions au même dénominateur, nous aurons aux numérateurs à droite et à gauche des polynômes identiquement égaux. En égalant les coefficients des mêmes puissances de x, nous trouvons un système d'équations pour déterminer les coefficients inconnus A, A_1, . . ., B, B_1, . . .
Cette méthode de recherche des coefficients est appelée *méthode des coefficients indéterminés.*

Nous pouvons également déterminer ces coefficients en tenant compte de la remarque suivante : les polynômes que l'on obtient à droite et à gauche de l'égalité après réduction des fractions au même dénominateur doivent être identiquement égaux, par conséquent, les valeurs de ces polynômes sont égales quelle que soit la valeur de x. En donnant à x certaines valeurs concrètes, nous obtenons les équations nécessaires pour déterminer les coefficients.

Ainsi, nous avons démontré que toute fraction rationnelle régulière peut être mise sous la forme d'une somme d'éléments simples.

E x e m p l e . Soit à décomposer la fraction $\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ en éléments simples. En vertu de la formule (5) nous avons

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A}{(x+1)^3}+\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{x-2}.$$

Mettons les fractions au dénominateur commun et égalons les numérateurs. Nous trouvons $x^2 + 2 = A(x-2) + A_1(x+1)(x-2) + A_2(x+1)(x-2) + B(x+1)3$ (6)

ou

$x^2 + 2 = (A_2 + B)x^3 + (A_1 + 3B)x^2 + (A - A_1 - 3A_2 + 3B)x + (-2A - 2A_1 - 2A_2 + B)$.

En égalant les coefficients de x^3, x^2, x^1, x^o, nous trouvons un système d'équations pour déterminer les coefficients

$0 = A_2 + B$,

$1 = A_1 + 3B$,

$0 = A - A_1 - 3A_2 + 3B$,

$2 = -2A - 2A_1 - 2A_2 + B$.

La résolution de ce système donne

$$A = -1 ;\ A_1 = \frac{1}{3} ;\ A_2 = -\frac{2}{9} ;\ B = \frac{2}{9} .$$

On aurait pu également déterminer certains coefficients à partir des équations que l'on obtient de l'égalité (6) qui est une identité en x, en donnant à la variable x certaines valeurs particulières.

Ainsi, posons $x = -1$, nous trouvons $3 = -3A$ ou $A = -1$; posons $x = 2$, nous trouvons $6 = 27B$; $B = \frac{2}{9}$. Si nous ajoutons à ces deux équations deux autres obtenues en égalant les coefficients de mêmes puissances de x, nous aurons quatre équations à quatre inconnues pour déterminer les coefficients. Nous avons en définitive la décomposition

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{2}{9(x+1)}+\frac{2}{9(x-2)}.$$

§ 9. Intégration des fractions rationnelles

Soit à calculer l'intégrale de la fraction rationnelle $\frac{Q(x)}{f(x)}$, c'est-à-dire l'intégrale

$$\int \frac{Q(x)}{f(x)}dx .$$

Si la fraction donnée est i r r é g u l i è r e , nous la mettons sous la forme d'une somme d'un polynôme $M(x)$ et d'une fraction rationnelle r é g u l i è r e $\frac{F(x)}{f(x)}$ (voir § 7). Nous mettons ensuite la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ sous la forme d'une somme d ' é l é m e n t s s i m p l e s (voir (5), § 8). Ainsi, l'intégration d'une fraction rationnelle arbitraire se ramène à l'intégration d'un polynôme et de plusieurs é l é m e n t s s i m p l e s .

Nous avons vu au § 8 que ces éléments simples étaient définis par les racines du dénominateur $f(x)$. Les différents cas sont possibles.

I[er] c a s . *Les racines du dénominateur sont réelles et différentes*, c'est-à-dire

$$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-d).$$

Dans ce cas, la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ se décompose en éléments simples du premier type :

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{D}{x-d},$$

et alors

$$\int\frac{F(x)}{f(x)}dx=\int\frac{A}{x-a}dx+\int\frac{B}{x-b}dx+\ldots+\int\frac{D}{x-d}dx=$$

$$= A \operatorname{Log}|x-a| + B \operatorname{Log}|x-b| + \ldots + D \operatorname{Log}|x-d| + C$$

II[em] c a s . L*es racines du dénominateur sont toutes réelles, mais certaines sont multiples*:

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-d)^\delta.$$

Dans ce cas, la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ peut être décomposée en éléments x simples des types I et II.

E x e m p l e 1 (voir exemple au § 8, ch. X).

$$\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx=-\int\frac{dx}{(x+1)^3}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2}{9}\operatorname{Log}\left|x+1\right|+\frac{2}{9}\operatorname{Log}\left|x-2\right|+C=$$

$$-\frac{2x-1}{6(x+1)^2}+\frac{2}{9}\text{Log}\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C.$$

III^{em} c a s . *Le dénominateur a des racines complexes simples* (*c'est-à-dire différentes*)

$$f(x) = (x^2 + px + q)\ldots(x^2 + lx + s)(x-a)^\alpha\ldots(x-d)^\delta.$$

Dans ce cas, la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ se décompose en éléments simples x des types I, II, III.

E x e m p l e 2. Soit à calculer l'intégrale

$$\int\frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Décomposons la fraction qui figure sous le signe d'intégration en éléments simples (voir (5), § 8, ch. X)

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}.$$

Par conséquent,

$$x = (Ax + B)(x-1) + C(x^2 + 1).$$

Posons $x = 1$, nous trouvons: $1 = 2C$, $C = \frac{1}{2}$;

posons $x = 0$, nous trouvons : $0= -B + C$, $B = \frac{1}{2}$

En égalant les coefficients de x^2, nous avons $0 = A + C$, d'où $A = -\frac{1}{2}$.

Ainsi,

$$\int\frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}=-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$-\frac{1}{4}\text{Log}\,|x^2+1|+\frac{1}{2}\text{ arc tg }x+\frac{1}{2}\text{Log}\,|x-1|+C$$

IV^{em} c a s . Le dénominateur comporte également des racines complexes multiples:

$$f(x) = (x^2 + px + q)^\mu\ldots(x^2 + lx + s)^\nu(x-a)^\alpha\ldots(x-d)^\delta.$$

Dans ce cas, les éléments simples du type IV entrent aussi dans la décomposition de la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$.

E x e m p l e 3. Soit à calculer l'intégrale

$$\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx$$

S o l u t i o n . Décomposons la fraction en éléments simples

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}+\frac{E}{x-1},$$

d'où

$x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8 =$

$$(Ax + B)(x + 1) + (Cx + D)(x^2 + 2x + 3)(x + 1) + E(x^2 + 2x + 3)^2$$

En combinant les deux méthodes données pour la détermination des coefficients, nous trouvons

$$A = 1, B = -1, C = 0, D = 0, E =1.$$

On a ainsi

$$\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx=\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx+\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\text{arc tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\text{Log}\,|x+1|+C$$

Nous avons calculé dans l'exemple 2, § 7, ch. X la première intégrale du second membre. La deuxième intégrale peut être calculée immédiatement.

Il ressort de l'étude effectuée que l'intégrale d'une fonction rationnelle quelconque peut être exprimée par des fonctions élémentaires en nombre fini

1) par des logarithmes si les éléments simples sont du type I ;
2) par des fonctions rationnelles si les éléments simples sont clu type II ;
3) par des logarithmes et des arcs tangents si les éléments simples sont du type III;
4) par des fonctions rationnelles et des arcs tangents si les éléments simples sont du type IV.

§ 10. Intégration des fonctions irrationnelles

Il n'est pas toujours possible d'exprimer l'intégrale d'nne fonction irrationnelle quelconque à l'aide de fonctions élémentaires. Nous allons étudier, dans ce paragraphe et dans les paragraphes suivants, les fonctions irrationnelles dont les intégrales peuvent être ramenées par des changements de variable appropriés à celles cle fonctions rationnelles que nous savons intégrer.

I. Considérons l'intégrale $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})dx$, où R est une fonction rationnelle de ses arguments *).

Soit k le dénominateur commun des fractions $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$. Effectuons la substitution

$$x = t^k, \quad dx = kt^{k-1}\, dt.$$

Chaque puissance f r a c t i o n n a i r e de x peut alors être exprimée par une puissance e n t i è r e de t, et, par conséquent, la fonction à intégrer se transforme en u n e f o n c t i o n r a t i o n n e l l e de t.

E x e m p l e 1. Soit à calculer l'intégrale

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}$$

S o l u t i o n . Le dénominateur commun des fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$ est 4.

Posons, par conséquent, $x = t^4$, $dx = 4t^3\, dt$; alors

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1} = 4\int \frac{t^2}{t^2+1}t^3 dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}dt = 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt =$$

$$4\int t^2 dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1}dt = 4\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}\operatorname{Log}\left|t^3+1\right| + C = \frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}} - \operatorname{Log}\left|t^{\frac{3}{4}}+1\right|\right] + C .$$

Il. Considérons maintenant les intégrales du type

En effectuant le changement de variable

---

* Le symbole $R(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})$ indique que l'on effectue uniquement des opérations r a t i o n n e l l e s sur les quantités x, $x^{m/n}$ .. . , $x^{r/s}$. Les symboles $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \ldots\right)$, $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ R (sin x, cos x), etc., que nous emploierons par la suite, doivent être interprétés de la même façon. Par exemple, R (sin x, cos x) indique que l'on effectue des opérations rationnelles sur sin x et cos x.

ax + b _ k cx + d t '

on ramène cette intégrale à celle d'une fonction rationnelle où k désigne le dénominateur commun des fractions $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

E x e m p l e 2. Soit à calculer l'intégrale

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\, dx.$$

S o l u t i o n . Posons $x + 4 = t^2$, $x = t^2 - 4$, $dx = 2t\, dt$; alors

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx = 2\int \frac{t^2}{t^2-4}dt = 2\int \left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right)dt = 2\int dt + 8\int \frac{dt}{t^2-4} =$$

$$2t + 2\operatorname{Log}\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = 2\sqrt{x+4} + 2\operatorname{Log}\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C .$$

§ 11. Intégrales du type $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$

Considérons l'intégrale

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx, \quad (1)$$

où $a \neq 0$.

Cette intégrale peut être ramenée à celle d'une fonction rationnelle par les substitutions de variables d'Euler.

1. Première substitution d'Euler. Si $a > 0$, on pose

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\; x + t$$

Prenons, pour fixer les idées, le signe plus devant Ya. Alors

$ax^2 + bx + c = ax2 + 2$ lVa $xt + t^2$,

d'où x est défini comme une fonction rationnelle de t:

$$x = \frac{t^2 - c}{c - 2\sqrt{a}\; t}$$

(dx est aussi une fonction rationnelle de t), par conséquent,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\; x + t = \sqrt{a}\; \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}} + t$$

c'est-à-dire que $\sqrt{ax^2+bx+c}$ est ramenée à une fonction rationnelle de t.

Puisque $\sqrt{ax^2+bx+c}$, x et dx s'expriment par des fonctions rationnelles de t, l'intégrale (1) est donc ramenée à celle d'une fonction rationnelle de t.

E x e m p l e 1. Soit à calculer l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}$$

Solution. Puisque ici $a = 1 > 0$, nous posons $\sqrt{x^2+c} = -x + t$; alors

$$x^2 + c = x^2 - 2xt + t^2,$$

d'où

$$x = \frac{t^2 - c}{2t}$$

Par conséquent,

$$dx = \frac{t^2+c}{2t^2}dt\ ,$$

$$\sqrt{x^2+c} = -x + t = -\frac{t^2-c}{2t} + t = \frac{t^2+c}{2t}.$$

En revenant à l'intégrale initiale, nous avons

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} = \int \frac{\frac{t^2+c}{2t^2}dt}{\frac{t^2+c}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \mathrm{Log}\left| t \right| + C_1 = \mathrm{Log}\left| x + \sqrt{x^2+c} \right| + C_1 .$$

(voir la formule 14 de la table d'intégrales).

2. *Deuxième substitution d'Euler*. Si $c > 0$, nous posons

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$$

alors

$$ax2 + bx + c = x^2t^2 + 2xt\ \sqrt{c}\ + c$$

(nous avons pris, pour fixer les idées, le signe plus devant la racine), d'où x est défini comme une fonction rationnelle de *t:*

$$x = \frac{2\sqrt{c}\ t - b}{a - t^2}.$$

Puisque dx et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ s'expriment également par des fonctions rationnelles de t, alors en substituant les valeurs de x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ et de dx en fonction de t dans l'intégrale $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ on ramène cette dernière à l'intégrale d'une fonction rationnelle de t.

E x e m p l e 2. Soit à calculer l'intégrale

$$\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx$$

S o l u t i o n . Posons $\sqrt{1+x+x^2} = xt + 1$; alors

$$1 + x + x^2 = x^2t^2 + 2xt + 1; \quad x = \frac{2t-1}{1-t^2}; \quad dx = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2};$$

$$\sqrt{1+x+x^2} = xt + 1 = \frac{t^2-t+1}{1-t^2};$$

$$1 - \sqrt{1+x+x^2} = \frac{-2t^2-t}{1-t^2}.$$

Substituant les expressions ainsi obtenues dans l'intégrale que nous désirons calculer, nous trouvons

$$\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx = \int \frac{(-2t^2+t)^2(1-t^2)^2(1-t^2)(2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2(2t-1)^2(t^2-t+1)(1-t^2)^2}dt =$$

$$2\int \frac{t^2}{1-t^2}dt = -2t + \mathrm{Log}\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

$$-\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} + Log\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1} + C\right| =$$

$$-\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} + \mathrm{Log}\left| 2x + 2\sqrt{1+x+x^2} + 1 \right| + C .$$

3. *Troisième substitution d'Euler*. Soient α et β les racines réelles du trinôme $ax^2 + bx + c$. Posons

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x - \beta)\ t.$$

Comme $ax^2 + bx + c = a\,(x - \alpha)\,(x - \beta)$, il vient

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t,$$

$$a\,(\,x-\alpha\,)(x-\beta) = (x - \alpha)^2\,t^2$$

$$a\,(\,x-\alpha\,) = (x - \alpha)\,t$$

x s'exprime alors par une fonction rationnelle de t:

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}.$$

Etant donné que dx et $\sqrt{ax^2+bx+c} =$ sont également des fonctions rationnelles de t, l'intégrale considérée se ramène, par conséquent, à celle d'une fonction rationnelle de t.

R e m a r q u e 1. Le changement de variable indiqué dans la troisième substitution peut être appliqué non seulement quand $a < 0$, mais aussi quand $a > 0$ si seulement le trinôme $ax^2 + bx + c$ a deux racines réelles.

E x e m p l e 3. Soit à calculer l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}.$$

S o l u t i o n . Comme $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$, posons

$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = (x+4)t;$$

alors $(x + 4)(x - 1) = (x + 4)^2 t^2$, $x-1 = (x + 4)t^2$

$$x = \frac{1+4t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{10t}{(1-t^2)^2}dt,$$

$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = \left[\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4\right]t = \frac{5t}{1-t^2}.$$

Revenons à l'intégrale considérée, nous trouvons:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} = \int \frac{10t(1-t^2)}{(1-t^2)^2 5t}dt = \int \frac{2}{1-t^2}dt =$$

$$\mathrm{Log}\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \mathrm{Log}\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}\right| + C =$$

$$\mathrm{Log}\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right| + C$$

R e m a r q u e 2. Remarquons que les substitutions de variables d'Euler indiquées aux cas 1 et 3 suffisent pour que l'intégrale (1) soit ramenée à celle d'une fonction rationnelle. En effet, considérons le trinôme $ax^2 + bx + c$. Si $b^2 - 4ac > 0$, les racines du trinôme sont reélles, et nous sommes donc en présence du cas 3. Si $b^2 - 4ac \le 0$, nous avons dans ce cas

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}\left[(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)\right]$$

et, par conséquent, le signe du trinôme coïncide avec celui de a. Pour que $\sqrt{ax^2+bx+c}$ soit réel, il faut que le trinôme soit positif et, partant, que $a > 0$. Nous sommes donc en présence du premier cas.

§ 12. Intégration de certaines classes de fonctions trigonométriques

Nous n'avons étudié jusqu'ici que les intégrales des fonctions algébriques (rationnelles ou irrationnelles).

Dans ce paragraphs nous considérerons l'intégration de certaines classes de fonctions non algébriques, et, en premier lieu, celle des fonctions trigonométriques. Soit une intégrale de la forme

$$\int R(\sin x, \cos x)dx. \qquad (1)$$

Montrons que cette intégrale peut toujours être ramenée à une intégrale d'une fonction rationnelle par le changement de variable

$$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t. \qquad (2)$$

Exprimons $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ et, partant, en fonction de t:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

En outre,

$$x = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Nous pouvons donc exprimer $\sin x$, $\cos x$ et dx par des fonctions rationnelles de t. Une fonction composée de fonctions rationnelles étant une fonction rationnelle, en substituant les expressions ainsi obtenues dans l'intégrale (1), nous la ramenons à une intégrale d'une fonction rationnelle:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left[\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right]\frac{2dt}{1+t^2}.$$

E x e m p l e 1. Considérons l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

En vertu des formules précédentes, nous pouvons écrire

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \text{Log}\left| t \right| + C = \text{Log}\left| \text{tg} \frac{x}{2} \right| + C .$$

Le changement de variable considéré résout le problème de l'intégration de toute expression de la forme R (cos x, sin x). C'est pourquoi il est parfois appelé « changement de variable universel pour l'intégration des expressions trigonométriques ». En réalité ce changement de variable conduit fréquemment à des fonctions trop compliquées. Pour cette raison, il est parfois préférable de ne pas utiliser ce changement de variable, mais d'avoir recours à d'autres méthodes menant plus rapidement au but.

1) Si l'intégrale est de la forme $\int R(\sin x)\cos x dx$, le changement de variable sin $x = t$, cos $x\, dx = dt$ nous conduit à une intégrale de la forme $\int R(t)dt$.

2) Si l'intégrale est de la forme $\int R(\cos x)\sin x dx$, elle peut être ramenée à une intégrale d'une fonction rationnelle par le changement de variable cos $x = t$, sin $x\, dx = - dt$.

3) Si la fonction à intégrer ne dépend que de tg x, en effectuant le changement de variable tg $x = t$, x = arc tg t, dx $= \frac{dt}{1+t^2}$, nous ramenons son intégrale à l'intégrale d'une fonction rationnelle

$$\int R(\text{tg}\, x)dx = \int R(t)\frac{dt}{1+t^2}$$

4) Si la fonction à intégrer est de la forme R (sin x, cos x), où sin x et cos x ne figurent qu'aux puissances p a i r e s, nous emploierons le changement de variable

$$\text{tg}\, x = t, \quad (2')$$

car $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ peuvent être exprimés par des expressions rationnelles de tg x:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\text{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin^2 x = \frac{\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Après avoir effectué ce changement de variable, nous obtenons l'intégrale d'une fonction rationnelle.

E x e m p l e 2. Calculer l'intégrale

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx .$$

S o l u t i o n. Cette intégrale se ramène aisément à une intégrale de la forme $\int R(\cos x)\sin x dx$. En effet,

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{2+\cos x} = \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x} \sin x dx .$$

Effectuons le changement de variable cos $x = z$. Alors sin $x\, dx = - dz$:

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx = \int \frac{1-z^2}{2+z}(-dz) = \int \frac{z^2-1}{z+2} dz = \int \left(z-2+\frac{3}{z+2} \right) dz =$$

$$\frac{x^2}{2} - 2z + 3\,\text{Log}\,(z+2) + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + \text{Log}\,(\cos x + 2) + C.$$

E x e m p l e 3. Calculer $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$. Effectuons le changement de variable tg $x = t$

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{dt}{\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc tg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc tg}\left(\frac{\text{tg}\, x}{\sqrt{2}} \right) + C .$$

5) Considérons maintenant une intégrale du type $\int R(\sin x, \cos x)dx$, où R (sin x, cos x) = $\sin^m x \cos^n x\, dx$ (où m et n sont des nombres entiers). Il faut ici considérer trois cas. a) $\int \sin^m x, \cos^n x\, dx$, où l' un au moins des nombres m et n est i m p a i r. Supposons pour fixer les idées que n est impair. Posons $n = 2p + 1$ et transformons l'intégrale:

$$\int \sin^m x \cos^{2p+1} x\, dx = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x\, dx = \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^p \cos x\, dx$$

.

Effectuons le changement de variable

$$\sin x = t, \cos x\, dx = dt.$$

Substituons ces expressions dans l'intégrale considérée, nous trouvons:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int t^m (1-t^2)^p\, dt .$$

C'est l'intégrale d'une fonction rationnelle de t.

E x e m p l e 4.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x\, dx}{\sin^4 x}.$$

Posons $\sin x = t$, $\cos x\, dx = dt$, nous avons

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{(1-t^2 x)\, dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C$$

.

b) $\int \sin^m x, \cos^n x\, dx$, où m et n sont cles nombres pairs non négatifs.

Posons $m = 2p$, $n = 2q$. Ecrivons les forinules irigonornétriques bien connues

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \qquad (3)$$

En substituant ces expressions , dans l'intégrale considérée, on obtient

$$\int \sin^{2p} \cos^{2q} x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^p \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^q dx.$$

En effectuant les opérations indiquées, ou obtient un développement suivant les puissances paires et impaires de cos $2x$. Les termes contenant des puissances impaires peuvent être inlégrés comme nous l'avons indiqué dans le cas a). En ce qui concerne les termes contenant des puissances paires, nous appliquons successivement la formule (3) afin d'abaisser le degré de ces puissances. En procédant de cette manière, on arrive finalement à des termes de la forme $\int \cos kx\, dx$ que l'on intègre facilement.

E x e m p l e 5.

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{2^2}\int (1-\cos 2x)^2\, dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$\frac{1}{4}\left[x - \sin 2x + \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)dx\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + C.$$

c) Si les deux esposants sont pairs et si l'un d'eux au moins est négatif, 1a méthode indiquée dans le cas b) est sans effet. Il faut alors poser tg $x = t$ (ou cotg $x = t$).

E x e m p l e 6.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int \frac{\sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^6 x}dx = \int \mathrm{tg}^2 x(1+\mathrm{tg}^2 x)^2\, dx.$$

Posons tg $x = t$; alors $x =$ arc tg t, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, et nous avons:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int t^2(1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2(1+t^2)dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \frac{\mathrm{tg}^5 x}{3} + C.$$

6) Considérons enfin les intégrales suivantes:

$\int \cos mx, \cos nx\, dx$, $\int \sin mx, \cos x\, dx$, $\int \sin mx, \sin nx\, dx$. On peut les calculer en utilisant les formules*) suivantes ($m \neq n$)

cos mx cos nx = $\frac{1}{2}$ [cos $(m + n)x$ + cos $(m - n)x$],

sin mx cos nx = $\frac{1}{2}$ [sin $(m + n)x$ + cos $(m - n)x$],

sin mx sin nx = $\frac{1}{2}$ [– cos $(m + n)x$ + cos $(m - n)x$].

En substituant et en intégrant, on trouve

$$\int \cos mx, \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx =$$

$$\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

Les deux autres intégrales se calculent d'une manière analogue.

E x e m p l e 7.

$$\int \sin 5x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int [-\cos 8x + \cos 2x]dx = -\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

§ 13. Intégration de certaines fonctions irrationnelles à l'aide de transformations trigonométriques

Revenons à l'intégrale considérée au § 11, ch. X

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx, \quad (1)$$

---

* On peut étabiir aisément ces formules comme suit : cos $(m + n)\, x$ = cos mx cos nx – sin mx sin nx, cos $(m - n)\, x$ = cos mx cos nx + sin mx sin nx. En ajoutant membre à membre et en divisant par deux, on obtient la première des trois formules. De même, en retranchant membre à membre puis en divisant par deux, on obtient la troisième formule. La deuxième formule peut être établie de la même manière en écrivant les développements de sin $(m + n)\, x$ et de sin $(m - n)\, x$ puis en sommant les expressions correspondantes.

où a ≠ 0 et $c - \frac{b^2}{4a} \neq 0$ (dans le cas où $a = 0$ l'intégrale est de la forme II § 10, quand $c - \frac{b^2}{4a} = 0$ l'expression $ax^2 + bx + c = a\,(x + c - \frac{b}{2a})^2$, et nous avons affaire à une fonction rationnelle, si $a > 0$; si $a < 0$ la fonction $\sqrt{ax^2+bx+c}$ n'est pas définie pour aucune valeur de x). Nous allons montrer comment cette intégrale peut être ramenée à une intégrale de la forme

$$\int \overline{R}(\sin z, \cos z)dz \ (2)$$

étudiée au paragraphe précédent.
Transformons le trinôme figurant sous le signe de la racine

$$ax^2 + bx + c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

Posons

$$x+\frac{b}{2a}=t, \quad dx = dt.$$

Alors

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{at^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}.$$

Etudions séparément les divers cas possibles .

1. Soit $a > 0$, c-$\frac{b^2}{4a}$>0. Posons $a = m^2$, c-$\frac{b^2}{4a} = n^2$. Nous aurons alors dans ce cas:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2+n^2} \ .$$

2. Soit $a > 0$, c-$\frac{b^2}{4a}$ < 0. Alors

$$a = m^2,\ c\text{-}\frac{b^2}{4a} = n^2,$$

Par conséquent,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2-n^2} \ .$$

3. Soit $a < 0$, c-$\frac{b^2}{4a}$ > 0. Alors

$$a = m2,\ c\text{-}\frac{b^2}{4a} = n^2.$$

Par conséquent,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{n^2-m^2t^2} \ .$$

4. Soit $a < 0$, c-$\frac{b^2}{4a}$ < 0. Dans ce cas, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ est une quantité complexe quel que soit x.
L'intégrale (1) peut donc être ramenée à une intégrale de l'un des types suivants

I. $\int R(t, \sqrt{m^2t^2+n^2})dt$. (3.1)

I I. $\int R(t, \sqrt{m^2t^2-n^2})dt$ dt. (3.2)

III. $\int R(t, \sqrt{n^2-m^2t^2})dt$. (3.3)

I1 est évident que l'intégrale (3.1) se ramène à une intégrale de la forme (2) si l'on effectue le changement de variable

$$t = -\ \frac{n}{m}\,\mathrm{tg}\, z.$$

L'intégrale (3.2) se ramène à une intégrale de la forme (2) si l'on pose

$$t = -\ \frac{n}{m}\sec z.$$

L'intégrale (3.3) se ramène à une intégrale de la forme (2) si l'on pose

$$t = -\ \frac{n}{m}\sin x$$

E x e m p l e . Calculer l'intégrale

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} \ .$$

S o l u t i o n . Cette intégrale est du type III. Posons $x = a \sin z$; alors $dx = a \cos z\, dz$,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\int\frac{a\cos z dz}{\sqrt{(a^2-a^2\sin^2 z)^3}}=\int\frac{a\cos z dz}{a^3\cos^3 z}=^{*}$$

$$\frac{1}{a^2}\int\frac{dz}{\cos^2 z}=\frac{1}{a^2}\,\mathrm{tg}\, z+C=\frac{1}{a^2}\frac{\sin z}{\cos z}+C=\frac{1}{a^2}\frac{\sin z}{\sqrt{1-\sin^2 z}}+C=\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$$

---

* $\sqrt{1-\sin^2 z}$ = | cos z |, nous nous arrêterons, pour fixer les idées, sur un seul cas :
| cos z | = cos z.

§ 14. Fonctions dont les intégrales ne peuvent être exprimées par des fonctions élémentaires

Nous avons indiqué au § 1, ch. X (sans donner de démonstration) que toute fonction $f(x)$ continue dans un intervalle (a, b) a dans cet intervalle une primitive, c'est-à-dire qu'il existe une fonction F (x) telle que $F'(x)$ = f (x). Cependant, t o u t e p r i m i t i v e, même si elle existe, ne s'exprime pas p a r d e s c o m i b i n a i s o n s e n n o m b r e f i n i d e f o n c t i o n s é l é m e n t a i r e s.

Telles sont, par exemple, les primitives exprimées par les intégrales

$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}dx,\quad \int \frac{\cos x}{x}dx,\quad \int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx,\quad \int\frac{dx}{\operatorname{Log} x}$$

ainsi que bien d'autres encore.

Dans tous ces cas, la primitive qui ne peut être exprimée par des combinaisons en nombre fini de fonctions élémentaires représente évidemment une fonction d'une nature nouvelle.

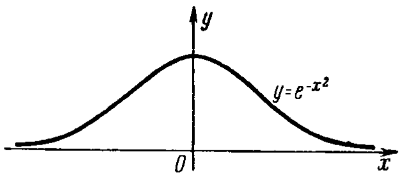


Fig. 208

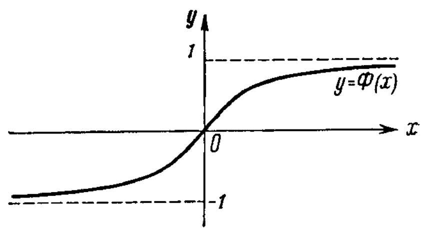


Fig. 209

Par exemple, celle des primitives

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-x^2}dx+C$$

qui s'annule pour $x = 0$, est appelée *fonction de Laplace* et est désignée par la notation $\Phi(x)$. Ainsi,

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-x^2}dx+C$$

si

$$\Phi(0) = 0$$

Cette fonction est très bien étudiée. Il existe des tables détaillées donnant les valeurs de cette fonction pour diverses valeurs de x. Nous verrons au § 21, ch. XVI comment cela peut être réalisé. Les graphiqnes de la fonction e^{-x^2} et de la fonction de Laplace $y = \Phi(x)$ sont représentés sur les figures 208 et 209. De même, celle des primitives

$$\int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx + C_1\ (k < 1),$$

qui s'annule pour $x = 0$, est appelée « intégrale elliptique » et est désignée par la notation $E(x)$,

$$E(x)=\int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx+C_2$$

Si

$$E(0) = 0.$$

I1 existe également des tables détaillées donnant la valeur de cette fonction pour diverses valeurs de x.

Exercices

I. Calculer les intégrales

1. $\int x^5dx$. Rép. $\frac{x^6}{6}+C$.

2. $\int(x+\sqrt{x})dx$. Rép. $\frac{x^2}{2}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$.

3. $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$. Rép. $6\sqrt{x}-\frac{1}{10}x^2\sqrt{x}+C$.

4. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x}}$. Rép. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$.

5. $\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x\sqrt{x}}+2\right)dx$. Rép. $-\frac{1}{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}+2x+C$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$. Rép. $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$.

7. $\int\left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2dx$. Rép. $\frac{x^5}{5}+\frac{3}{4}x^3\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+C$.

Intégration par changement de variable

8. $\int e^{5x}dx$ Rép. $\frac{1}{5}e^{5x}+C$.

9. $\int\cos 5x\,dx$ Rép. $\frac{\sin 5x}{5}+C$.

10. $\int\sin ax\,dx$ Rép. $-\frac{\cos ax}{a}+C$.

11. $\int \frac{\mathrm{Log}\, x}{x} dx$. Rép. $\frac{1}{2}\mathrm{Log}^2 x + C$

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$. Rép. $-\frac{\mathrm{cotg}\, 3x}{3} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$ Rép. $\frac{\mathrm{tg}\, 7x}{7} + C$.

14. $\int \frac{dx}{3x-7}$ Rép. $\frac{1}{3}\mathrm{Log}\,|\,3x-7\,| + C.$

15. $\int \frac{dx}{1-x}$ Rép. $-\mathrm{Log}\,|\,1-x\,| + C.$

16. $\int \frac{dx}{5-2x}$ Rép. $-\frac{1}{2}\mathrm{Log}\,|\,5-2x\,| + C.$

17. $\int \mathrm{tg}\, 2x\, dx$ Rép. $-\frac{1}{2}\mathrm{Log}\,|\cos 2x\,| + C.$

18. $\int \mathrm{cotg}\,(5x-7)dx$ Rép. $\frac{1}{5}\mathrm{Log}\,|\sin(5x-7)\,| + C.$

19. $\int \frac{dy}{\mathrm{cotg}\, 3y}$ Rép. $-\frac{1}{3}\mathrm{Log}\,|\cos 3y\,| + C$

20. $\int \mathrm{cotg}\frac{x}{3} dx$. Rép. $3\mathrm{Log}\left|\sin\frac{x}{3}\right| + C$

21. $\int \mathrm{tg}\,\varphi\cdot\sec^2\varphi\, d\varphi$ Rép. $\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\varphi + C$

22. $\int\left(\mathrm{tg} 4S - \mathrm{cotg}\frac{S}{4}\right)dS$ Rép. $\mathrm{Log}\,|\sin e^x\,| + C$

23. Rép. $\int\left(\mathrm{tg}\, 4S - \mathrm{cotg}\frac{S}{4}\right)dS$ Rép. $-\frac{1}{4}\mathrm{Log}\,|\cos 4S\,| - 4\,\mathrm{Log}\left|\sin\frac{S}{4}\right| + C$

24. $\int \sin^2 x \cos x\, dx$ Rép. $\frac{\sin^3 x}{3} + C$

25. $\int \cos^3 x \sin x\, dx$ Rép. $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$.

26. $\int \sqrt{x^2+1}\, x\, dx$ Rép. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C$.

27. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2x^2+3}}$ Rép. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3} + C$.

28. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}$ Rép. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C$.

29. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x}$ Rép. $-\frac{1}{\sin x} + C$.

30. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^3 x}$ Rép. $\frac{1}{2\cos^2 x} + C$.

31. $\int \frac{\mathrm{tg}\, x}{\cos^2 x} dx$ Rép. $\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} + C$

32. $\int \frac{\mathrm{cotg}\, x\, dx}{\sin^2 x}$ Rép. $-\frac{\mathrm{cotg}^2 x}{2} + C$.

33. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\mathrm{tg}\, x - 1}}$ Rép. $2\sqrt{\mathrm{tg}\, x - 1} + C$

34. $\int \frac{\mathrm{Log}\,(x+1)}{x+1} dx$ Rép. $\frac{\mathrm{Log}^2(x+1)}{2} + C$

35. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2\sin x + 1}}$ Rép. $\sqrt{2\sin x + 1} + C$.

36. $\int \frac{\sin 2x dx}{(1+\cos 2x)^2}$ Rép. $\frac{1}{2(1+\cos 2x)} + C$

37. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ Rép. $2\sqrt{1+\sin^2 x} + C$

38. $\int \frac{\sqrt{\mathrm{tg}\, x + 1}}{\cos^2 x}$ Rép. $\frac{2}{3}\sqrt{(\mathrm{tg}\, x + 1)^3} + C$

39. $\int \frac{\cos 2x\, dx}{(2+3\sin 2x)^3}$ Rép. $-\frac{1}{12}\frac{1}{(2+3\sin 2x)^2} + C$

40. $\int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}$ Rép. $\frac{1}{\sqrt[3]{\cos 3x}} + C$

41. $\int \frac{\mathrm{Log}^2 x\, dx}{x}$ Rép. $\frac{\mathrm{Log}^3 x}{3} + C$

42. $\int \frac{\mathrm{arc}\sin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ Rép. $\frac{\mathrm{arc}\sin^2 x}{2} + C$

43. $\int \frac{\mathrm{arctg}\, x\, dx}{1+x^2}$ Rép. $\frac{\mathrm{arctg}^2 x}{2} + C$

44. $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ Rép. $-\frac{\arccos^3 x}{3}+C$

45. $\int \frac{\text{arc cotg}\, x}{1+x^2}\,dx$ Rép. $-\frac{\text{arc cotg}^2 x}{2}+C$

46. $\int \frac{x\,dx}{x^2 1}$ Rép. $\frac{1}{2}$ Log $(x^2+1)+C$

47. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$ Rép. $\frac{1}{2}$ Log$(x^2+2x+3)+C$

48. $\int \frac{\cos x\,dx}{2\sin x+3}$ Rép. $\frac{1}{2}$ Log $(2\sin x+3)+C$

49. $\int \frac{dx}{x \,\text{Log}\, x}$ Rép. Log $|\,\text{Log}\, x\,|+C$

50. $\int 2x(x^2+1)^4\,dx$ Rép. $\frac{(x^2+1)^5}{5}+C$

51. $\int tg^4 x\,dx$ Rép. $\frac{\text{tg}^3 x}{3}-\text{tg}\, x+x+C$

52. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\text{arc tg}\, x}$ Rép. Log $|\,\text{arc tg}\, x\,|+C$

53. $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\text{tg}\, x+1)}$ Rép. $\frac{1}{3}$ Log $|\,3\,\text{tg}\, x+1\,|+C$

54. $\int \frac{\text{tg}^3 x}{\cos^2 x}\,dx$ Rép. $\frac{\text{tg}^4 x}{4}+C$

55. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x}$ Rép. Log $|\arcsin x\,|+C$

56. $\int \frac{\cos 2x}{2+3\sin 2x}\,dx$ Rép. $\frac{1}{6}$ Log $|\,2+3\sin 2x\,|+C$

57. $\int \cos(\text{Log}x)\frac{dx}{x}$ Rép. sin (Log x) $+C$

58. $\int \cos(a+bx)dx$ Rép. $\frac{1}{b}\sin(a+bx)+C$

59. $\int e^{2x}\,dx$ Rép. $\frac{1}{2}e^{2x}+C.$

60. $\int e^{\frac{x}{3}}\,dx$ Rép. $3e^{\frac{x}{3}}+C$

61. $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$ Rép. $e^{\sin x}+C$

62. $\int a^{x^2} x\,dx$ Rép. $\frac{a^{x^2}}{2\text{Log}\, a}+C$

63. $\int e^{\frac{x}{a}}\,dx$ Rép. $ae^{\frac{x}{a}}+C$

64. $\int (e^{2x})^2\,dx$ Rép. $\frac{1}{4}e^{4x}+$ C

65. $\int 3^x e^x\,dx$ Rép. $\frac{3^x e^x}{\text{Log}\,3+1}+C$.

66. $\int e^{-3x}\,dx$ Rép. $-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$

67. $\int (e^{5x}+a^{5x})dx$ Rép. $\frac{1}{5}\left(e^{5x}+\frac{a^{5x}}{\log a}\right)+C$

68. $\int e^{x^2+4x+3}(x+2)dx$ Rép. $\frac{1}{5}\left(e^{5x}+\frac{a^{5x}}{\log a}+C\right)$.

69. $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x}\,dx$ Rép. $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x-\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\log a-\log b}-2x+C$

70. $\int \frac{e^x\,dx}{3+4e^x}$ Rép. $\frac{1}{4}$ Log $(3+4e^x)+C$

71. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{2+e^{2x}}$ Rép. $\frac{1}{2}$ Log $(2+e^{2x})+C$

72. $\int \frac{dx}{1+2x^2}$ Rép. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ arc tg $(\sqrt{2x})+C$

73. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$ Rép. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ arc sin $(\sqrt{3x})+C$

74. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$ Rép. $\frac{1}{3}$ arc sin $\frac{3x}{4}+C$

75. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ Rép.arc sin $\frac{x}{3}$ $+C$

76. $\int \frac{dx}{4+x^2}$ Rép. $\frac{1}{2}$ arc tg $\frac{x}{2}+C$

77. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$ Rép. $\frac{1}{6}$ arc tg $\frac{3x}{2}$ $+C$

78. $\int \frac{dx}{4-9x^2}$ Rép. $\frac{1}{12}$ Log $\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right|$

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$ Rép. Log $|\, bx+\sqrt{x^2+9}\,| + C$

80. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}$ Rép. $\frac{1}{b}$ Log $\left| bx+\sqrt{b^2x^2-a^2}\right|+C$

81. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2+a^2x^2}}$ Rép. $\frac{1}{a}$ Log $\left| ax+\sqrt{b^2+a^2x^2}\right|+C$

82. $\int \frac{dx}{a^2x^2-c^2}$ Rép. $\frac{1}{2ac}$ Log $\left|\frac{ax-c}{ax+c}\right|+C$

83. $\int \frac{x^2dx}{5-x^6}$ Rép. $\frac{1}{6\sqrt{5}}$ Log $\left|\frac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}}\right|+C$

84. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$ Rép. $\frac{1}{2}$ arc sin x^2+C

85. $\int \frac{xdx}{x^4+a^4}$ Rép. $\frac{1}{2a^2}$ arc tg $\frac{x^2}{a^2}+C$.

86. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ Rép.arc sin e^x+C

87. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$ Rép. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ arcsin $\sqrt{\frac{5}{3}}\,x+C$

88. $\int \frac{\cos xdx}{a^2+\sin^2 x}$ Rép. $\frac{1}{a}$ arc tg $\left(\frac{\sin x}{a}\right)+C$

89. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\log^2 x}}$ Rép.arc sin (Log x) + C

90. $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ Rép. $-\frac{1}{2}(\text{arc}\cos x)^2+\sqrt{1-x^2}+C$

91. $\int \frac{x-\text{arc tg}\, x}{1+x^2}\,dx$ Rép. $\frac{1}{2}$ Log $(1+x^2)$ - $\frac{1}{2}$ (arc tg $x)^2+C$

92. $\int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx$ Rép. $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\log x)^3}+C$

93. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ Rép. $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}+C$

94. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$ Rép. $4\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$

95. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ Rép.arc tg e^x+C

96. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\sin x dx$ Rép. $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3}+C$

97. $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ Rép. $3\sqrt[3]{\sin x}+C$

98. $\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ Rép. $-2\sqrt{1+\cos^2 x}+C$

99. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$ Rép. $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}+C$

100. $\int \frac{\sqrt[3]{\text{tg}^2 x}}{\cos^2 x}\,dx$ Rép. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\text{tg}^5 x}+C$

101. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$ Rép. $\frac{1}{\sqrt{6}}$ arc tg $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\text{tg}\, x\right)+C$

Intégrales du type $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$:

102. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ Rép. $\frac{1}{2}$ arc tg $\frac{x+1}{2}+C$

103. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$ Rép. $\frac{1}{\sqrt{11}}$ arc tg $\frac{3x-1}{\sqrt{11}}+C$

104. $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$ Rép. $\frac{1}{\sqrt{5}}\text{Log}\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right|+C$

105. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$ Rép. $\frac{1}{4}\text{Log}\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C$

106. $\int \frac{dz}{2z^2-2z++}$ Rép.arc tg $(2z-1)+C$

107. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$ Rép. $\frac{1}{\sqrt{5}}\text{arc tg}\frac{3x-1}{2\sqrt{5}}+C$

108. $\int \frac{(6x-7)dx}{3x^2-7x+11}$ Rép.Log $|3x^2-7x+11|+C$

109. $\int \frac{(3x-2)dx}{5x^2-3x+2}$ Rép. $\frac{3}{10}\text{Log}(5x^2-3x+2)-\frac{11}{5\sqrt{31}}\text{arc tg}\frac{10x-3}{\sqrt{31}}+C$

110. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$ Rép. $\frac{3}{2}\text{Log}(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

111. $\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}dx$ Rép. $\frac{2}{3}\text{Log}(3x-1)+\frac{1}{2}\text{Log}(2x+1)+C$

112. $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}dx$ Rép. $\frac{1}{5}\text{Log}(5x^2-x+2)-\frac{8}{5\sqrt{39}}\text{arc tg}\frac{10x-1}{\sqrt{39}}+C$

113. $\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}dx$ Rép.

$x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\text{Log}\left|2x^2-x+1\right|+\frac{1}{2\sqrt{7}}\text{arc tg}\frac{4x-1}{\sqrt{7}}+C$

114. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x+\sin x\cos x+\sin^2 x}$ Rép. $\frac{2}{\sqrt{7}}\text{arc tg}\frac{2\text{tg}\,x+1}{\sqrt{7}}+C$

Intégrales du type $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$:

115. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$ Rép. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+C$

116. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$ Rép.Log $\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$

117. $\int \frac{dS}{\sqrt{2aS+S^2}}$ Rép. Log $\left|S+a+\sqrt{2aS+S^2}\right|+C$

118. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$ Rép. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x+7}{\sqrt{109}}+C$

119. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(3x-5)}}$ Rép. $\frac{1}{\sqrt{3}}\text{Log}\left|6x+5+\sqrt{12x(3x+5)}\right|+C$

120. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$ Rép. $\arcsin\frac{2x+3}{\sqrt{17}}+C$

121. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}$ Rép. $\frac{1}{\sqrt{5}}\text{Log}\left|10x-1+\sqrt{20(5x^2-x-1)}\right|+C$

122. $\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ Rép.2 $\sqrt{ax^2+bx+c}+C$

123. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$ Rép.

$\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}\text{Log}\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}\right|+C$

124. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{-11x^2+66x+3}}$ Rép. $-\frac{1}{11}\sqrt{-11x^2+66x+3}+C$

125. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$ Rép. $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\text{arc sin}\frac{2x-1}{2}+C$

126. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}}dx$ Rép. $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x}+\frac{23}{4\sqrt{2}}\text{Log}(4x-1+\sqrt{8(2x^2-x)})+C$

Intégration par parties :

127. $\int xe^x\,dx$ Rép.$e^x(x-1)+C$

128. $\int x\,\text{Log}\,x\,dx$ Rép. $\frac{1}{2}x^2\left(\text{Log}\,x-\frac{1}{2}\right)+C$

129. $\int x\sin x\,dx$ Rép.$\sin x-x\cos x+C$

130. $\int \text{Log}\,x\,dx$ Rép.$x(\text{Log}\,x-1)+C$

131. $\int \arcsin x\,dx$ Rép. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$

132. $\int \text{Log}(1-x)\,dx$ Rép. $-x-(1-x)\text{Log}(1-x)+C$

133. $\int x^n \operatorname{Log} x\,dx$ Rép. $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\left(\operatorname{Log} x-\dfrac{1}{n+1}\right)+C$

134. $\int x \operatorname{arc\,tg} x\,dx$ Rép. $\dfrac{1}{2}\,[(x^2+1)\operatorname{arc\,tg} x - x] + C$

135. $\int x \arcsin x\,dx$ Rép. $\dfrac{1}{4}\,[(2x^2+1)\arcsin x + x\sqrt{1+x^2}\,] + C$

136. $\int \operatorname{Log}(x^2+1)\,dx$ Rép. $x\operatorname{Log}(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arc\,tg} x + C$

137. $\int \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx$ Rép. $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x}+C$

138. $\int \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ Rép. $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$

139. $\int \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\,dx$ Rép. $x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}+C$

140. $\int x\cos^2 x\,dx$ Rép. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{1}{4}x\sin 2x+\dfrac{1}{8}\cos 2x+C$

141. $\int \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ Rép. $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$

142. $\int \dfrac{x\operatorname{arct\,g} x}{(x^2+1)^2}\,dx$ Rép. $\dfrac{x}{4(1+x^2)}+\dfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} x-\dfrac{1}{2}\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}+C$

143. $\int x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}\,dx$ Rép. $\dfrac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}-\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$

144. $\int \dfrac{\arcsin x}{x^2}\,dx$ Rép. $\operatorname{Log}\left|\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\dfrac{1}{x}\arcsin x + C$

145. $\int \operatorname{Log}(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$ Rép. $x\operatorname{Log}\left|\,x+\sqrt{1+x^2}\,\right|-\sqrt{1+x^2}\;+C$

146. $\int \arcsin x\,\dfrac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ Rép. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\operatorname{Log}\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|+C$

Dans les exemples suivants introduire des variables trigonométriques :

147. $\int \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$ Rép. $-\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\dfrac{x}{a}+C$

148. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ Rép. $2\arcsin\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{4}x^3\sqrt{4-x^2}+C$

149. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ Rép. $-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$

150. $\int \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$ Rép. $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\dfrac{a}{x}+C$

151. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$ Rép. $\dfrac{x}{a^2}\,\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$

Intégration des fractions rationnelles :

152. $\int \dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ Rép. $\operatorname{Log}\left|\dfrac{(x-2)^3}{x-1}\right|+C$

153. $\int \dfrac{x\,dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$ Rép. $\dfrac{1}{8}\,Log\,\dfrac{(x+3)^6}{(x+5)^5(x+1)}+C$

154. $\int \dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$ Rép. $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+4x+\operatorname{Log}\left|\dfrac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$

155. $\int \dfrac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}$ Rép. $\dfrac{x^2}{2}-2x+\dfrac{1}{6}\operatorname{Log}\dfrac{(x-1)}{(x+1)^3}+\dfrac{16}{3}\operatorname{Log}(x+2)+C$

156. $\int \dfrac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$ Rép. $\dfrac{1}{x-1}+\operatorname{Log}\dfrac{x-2}{x-1}+C$

157. $\int \dfrac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx$ Rép. $\dfrac{3}{x-2}+\operatorname{Log}\dfrac{(x-2)^2}{x^2}+C$

158. $\int \dfrac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx$ Rép. $\dfrac{4x+3}{2(x-1)^2}+\operatorname{Log}\dfrac{x^2}{(x+1)^2}+C$

159. $\int \dfrac{x^3\,dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$ Rép. $-\dfrac{5x+12}{x^2+6x+8}+\operatorname{Log}\left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)^2+C$

160. $\int \dfrac{dx}{x(x^2+1)}$ Rép. $\operatorname{Log}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$

161. $\int \dfrac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx$ Rép. $\operatorname{Log}\dfrac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{x-1}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-1}{2}+C$

162. $\int \dfrac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$ Rép. $\operatorname{Log}\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\dfrac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$

163. $\int \frac{dx}{x^3+1}$ Rép. $\frac{1}{6}\,\mathrm{Log}\,\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\ tg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

164. $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}\,dx$ Rép. $\mathrm{Log}\,\frac{x^2+4}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\ tg}\,\frac{x}{2}+C$

165. $\int \frac{4x\,dx}{x^4+1}$ Rép. $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Log}\,\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}\,\mathrm{arc\ tg}\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$

166. $\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx$ Rép. $\frac{1}{3}\,[x^3+\mathrm{Log}\,(x^3-1)]+C$

167. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$ Rép. $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\mathrm{Log}\,(x^2+2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\ tg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}+C$

168. $\int \frac{(4x^2-8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$ Rép. $\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+\mathrm{Log}\,\frac{(x-1)^2}{x^2+1}-\mathrm{arc\ tg}\,x+C$

169. $\int \frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}$ Rép.

$\mathrm{Log}\,\frac{x-1}{x}-\frac{10}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\ tg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{2x-1}{3(x^2-x+1)}+C$

Intégration des fonctions irrationnelles :

170. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$ Rép. $\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3}-\mathrm{Log}(\sqrt[4]{x^3}+1)\right]+C$

171. $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}\,dx$ Rép. $\frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-\frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C$

172. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}$ Rép. $-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+2\mathrm{Log}\,x-24\mathrm{Log}\,(\sqrt[12]{x}+1)+C$

173. $\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}\,dx$ Rép.

$\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4}+4\sqrt[6]{x^3}-6\sqrt[6]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-9\mathrm{Log}(\sqrt[6]{x}-+1)+$

$+\frac{3}{2}\mathrm{Log}(\sqrt[6]{x^2}+1)+3\mathrm{arc\ tg}\sqrt[6]{x}+C$

174. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x^2}$ Rép.Log $\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$

175. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$ Rép. $2\mathrm{arc\ tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\mathrm{Log}\,\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+C$

176. $\int \frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8}+\sqrt[14]{x^{15}}}\,dx$ Rép. $14\left[\sqrt[14]{x}-\frac{1}{2}\sqrt[7]{x}+\frac{1}{3}\sqrt[14]{x^3}-\frac{1}{4}\sqrt[7]{x^2}+\frac{1}{5}\sqrt[14]{x^5}\right]+C$

177. $\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}\,dx$ Rép. $\sqrt{3x^2-7x-6}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\,Log\left(x-\frac{7}{6}+\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x-2}\right)+C$

Intégrales du types $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$:

178. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$ Rép. $\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Log}\left|\frac{\sqrt{x^2-x-3}-\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right|+C$

179. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$ Rép. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Log}\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}-\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|+C$

180. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$ Rép. $\frac{1}{2}\,\mathrm{arcsin}\,\frac{x-2}{x\sqrt{2}}+C$

181. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx$ Rép. $\sqrt{x^2+2x}+\mathrm{Log}\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+C$

182. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$ Rép. $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}+C$

183. $\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$ Rép. $\frac{1}{2}\left[(x-1)\sqrt{2x-x^2}+\mathrm{arcsin}(x-1)\right]+C$

184. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$ Rép. $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$

185. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$ Rép.Log $\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}}\right|+C$

186. $\int \frac{(x+1)}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}\,dx$ Rép. $-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}+C$

187. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$ Rép.Log $\left|\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2}\right|+C$

188. $\int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}\,dx$ Rép. $-\frac{8}{x+\sqrt{x^2+4x}}+\mathrm{Log}\left|x+2+\sqrt{x^2+4x}\right|+C$

Intégration des fonctions trigonométriques :

189. $\int \sin^3 x\,dx$ Rép. $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

190. $\int \sin^5 x\,dx$ Rép. $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{\cos^5 x}{x}+C$

191. $\int \cos^4 x\sin^3 x\,dx$ Rép. $-\frac{1}{5}\cos 5x+\frac{1}{7}\cos^7 x+C$

192. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$ Rép. $\mathrm{cosec}\, x-\frac{1}{3}\mathrm{cosec}^3 x+C$

193. $\int \cos^2 x\,dx$ Rép. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

194. $\int \sin^4 x\,dx$ Rép. $\frac{3}{8}x-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$

195. $\int \cos^6 x\,dx$ Rép. $\frac{1}{16}\left(5x+4\sin 2x-\frac{\sin^3 2x}{3}+\frac{3}{4}\sin 4x\right)+C$

196. $\int \cos^4 x\sin^3 x\,dx$ Rép. $\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{\sin 8x}{8}\right)+C$

197. $\int \mathrm{tg}^3 x\,dx$ Rép. $\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}+\mathrm{Log}\,|\cos x|+C$

198. $\int \mathrm{cotg}^5 x\,dx$ Rép. $-\frac{1}{4}\mathrm{cotg}^4 x+\frac{1}{2}\mathrm{cotg}^2 x+\mathrm{Log}\,|\sin x|+C$

199. $\int \mathrm{cotg}^3 x\,dx$ Rép. $-\frac{\mathrm{cotg}^2 x}{2}-\mathrm{Log}\,|\sin x|+C$

200. $\int \sec^8 x\,dx$ Rép. $\frac{\mathrm{tg}^7 x}{7}+\frac{3\mathrm{tg}^5 x}{5}+\mathrm{tg}^3 x+\mathrm{tg}\, x+C$

201. $\int \mathrm{tg}^4 x\sec^4 x\,dx$ Rép. $\frac{\mathrm{tg}^7 x}{7}+\frac{\mathrm{tg}^5 x}{5}+C$

202. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ Rép. $\mathrm{tg}\, x+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x+C$

203. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$ Rép. $C-\mathrm{cosec}\, x$

204. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$ Rép. $\frac{3}{5}(\cos^{\frac{5}{3}} x)+3(\cos^{-\frac{1}{3}} x)+C$

205. $\int \sin x\sin 3x\,dx$ Rép. $-\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+C$

206. $\int \cos 4x\cos 7x\,dx$ Rép. $\frac{\sin 11x}{22}+\frac{\sin 3x}{6}+C$

207. $\int \cos 2x\sin 4x\,dx$ Rép. $-\frac{\cos 6x}{12}-\frac{\cos 2x}{4}+C$

208. $\int \sin\frac{1}{4}x\cos\frac{3}{4}x\,dx$ Rép. $-\frac{\cos x}{12}+\cos\frac{1}{2}x+C$

209. $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$ Rép. $\frac{1}{3}\mathrm{Log}\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-2}{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1}\right|+C$

210. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$ Rép. $\frac{1}{2}\mathrm{arc\,tg}\left|2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C$

211. $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$ Rép. $\frac{2}{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}+x+C$

212. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}$ Rép. $x-\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C$

213. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx$ Rép. $\mathrm{arc\,tg}\,(2\sin^2 x-1)+C$

214. $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$ Rép. $\frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\mathrm{tg}^3\frac{x}{2}+C$

215. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\mathrm{tg}^2 x}$ Rép. $-\frac{1}{2}\left[\mathrm{cotg}\, x+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{2}}\right)\right]+C$

216. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx$ Rép. $\sqrt{2}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{2}}\right)-x+C$.

Chapitre XI INTÉGRALE DÉFINIE

§ 1. Position du problème. Sommes intégrales inférieure et supérieure

Un puissant moyen d'investigation en mathématiques, en physique, en mécanique, ainsi que dans d'autres disciplines est fourni par l'intégrale définie, une des notions fondamentales de l'analyse. Le calcul des aires délimitées par des courbes, des arcs, des volumes, du travail, de la vitesse, du chemin, des moments d'inertie, etc., se ramène au calcul d'une intégrale définie.

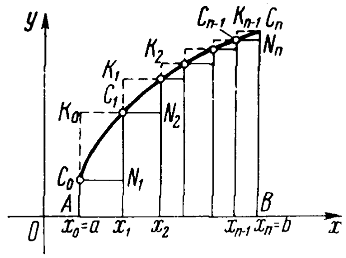


Fig. 210

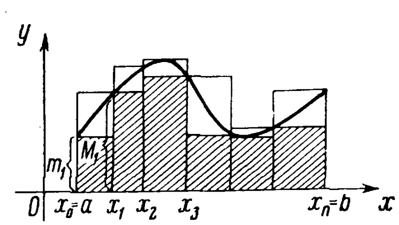


Fig. 211

Soit y = $f(x)$ une fonction continue donnée sur le segment $[a, b]$ (fig. 210 et 211). Soient m et M respectivement sa plus petite et sa plus grande valeur sur ce segment. Partageons le segment $[a, b]$ en n parties par les points

$$a = x_o, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$$

avec

$$x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_n,$$

et posons

$$x_1 - x_o = \Delta x_1 \,;\, x_2 - x_1 = \Delta x_2, \ldots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n.$$

Désignons la plus petite et la plus grande valeur de $f(x)$

sur le segment $[x_o, x_1]$ par m_1 et M_1,
sur le segment $[x_1, x_2]$ par m_2 et M_2,
sur le segment $[x_{n-1}, x_n]$ par m_n et M_n.

Formons les sommes

$$\underline{s}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{s}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

La somme $\underline{s}_n$ est appelée *somme intégrale inférieure* et $\overline{s}_n$ *somme intégrale supérieure*.

Lorsque $f(x) \geq 0$. la somme intégrale inférieure a pour valeur numérique l'aire de la figure en escalier « inscrite » $AC_0N_1\ C_1N_2,\ C_{n-1},N_nBA$ et la somme intégrale supérieure l'aire de la figure en escalier « circonscrite » $AK_oC_1K_1 \ldots C_{n-1}K_{n-1}C_nBA$.

Indiquons quelques propriétés des sommes intégrales inférieures et supérieures.

a) Etant donné que $m_i < M_i$ quel que soit i ($i = 1, 2, \ldots, n$), on a, en vertu des formules (1) et (2)

$$\underline{s}_n \leq \overline{s}_n \quad (3)$$

(l'égalité correspondant à $f(x)$ = const).

b) Etant donné que

$$m_1 \geq m, m_2 \geq m, \ldots, m_n \geq m,$$

où m est la plus petite valeur de $f(x)$ sur $[a, b]$, on a

$$\underline{s}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n \geq m\Delta x_1 + m\Delta x_2 + \ldots$$
$$\ldots + m\Delta x_n = m(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots - \Delta x_n) = m(b - a).$$

Ainsi,

$$\underline{s}_n > m(b - a).$$

c) Etant donné que

$$M_1 \leq M, M_2 \leq M, \ldots, M_n \leq M,$$

où M est la plus grande valeur de $f(x)$ sur $[a, b]$, on a

$$\overline{s}_n = M_1\,\Delta x_1 + M_2\,\Delta x_2 + \ldots + M_n\,\Delta x_n < M\Delta x_1 + M\Delta x_2 + \ldots\ldots + M\Delta x_n =$$
$$M(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots\ldots + \Delta x_n) = M(b - a).$$

Ainsi,

$$\overline{s}_n \leq M(b - a). \quad (5)$$

Réunissant les deux inégalités obtenues, on a

$$m(b - a) \leq \underline{s}_n \leq \overline{s}_n < M(b - a). \quad (6)$$

Lorsque $f(x) \geq 0$, la double inégalité obtenue admet une interprétation géométrique simple (fig. 212), étant donné que les produits $m(b - a)$ et $M(b -$

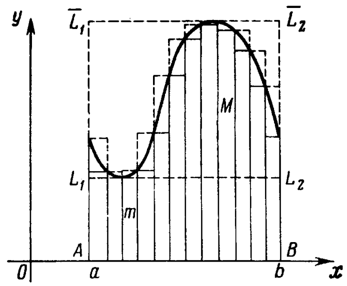


Fig. 212

a) représentent respectivement les valeurs numériques des aires du rectangle « inscrit » AL_1L_2B et du rectangle « circonscrit » AL_1L_2B.

§ 2. *Intégrale définie. Théorème d'existance de l'intégrale définie*

Continuons l'examen de la question du paragraphe précédent.
Prenons un point sur chaque segment $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$

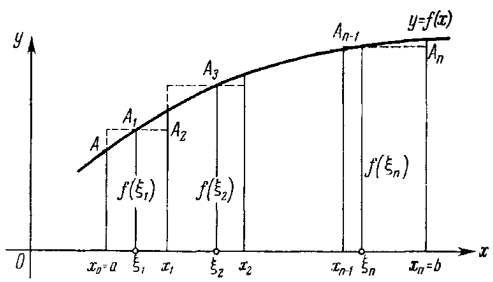


Fig. 213

que nous désignerons respectivement par $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ (fig. 213),

$$x_0 < \xi_1 < x_1, x_1 < \xi_2 < x_2, \ldots, x_{n-1} < \xi_n < x_n$$

Soient $f(\xi_1), f(\xi_2, \ldots, f(\xi_n)$ les valeurs de la fonction en ces points. Formons la somme

$$s_n = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

qu'on appelle *somme intégrale* pour la fonction $f(x)$ sur le segment $[a, b]$. Etant donné que, quel que soit ξ_i sur le segment $[x_{i-1}, x_i]$,

$$m_i \le f(\xi_i) \le M_i$$

et que $\Delta x_i > 0$, on en déduit

$$m_i\Delta x_i \le f(\xi_i)\,\Delta x_i < M_i\,\Delta x_i,$$

par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

ou

$$\underline{s}_n \le s_n \le \bar{s}_n\,. \qquad (2)$$

L'interprétation géométrique de cette dernière inégalité est que, pour $f(x) > 0$, la figure ayant s_n pour aire est délimitée par une courbe comprise entre les courbes en escalier « inscrite » et « circonscrite » .
La Somme s_n dépend du mode de découpage du segment $[a, b]$ en segments $[x_{i-1}, x_i]$ et du choix des points ξ_i sur ces segments.
Désignons maintenant par max $[x_{i-1}, x_i]$ la longueur du plus grand des segments $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Considérons divers découpages du segment $[a, b]$ en segments partiels $[x_{i-1}, x_i]$ tels que max $[x_{i-1}, x_i] \to 0$. Il est évident que le nombre n de segments d'un tel découpage tend vers Pinfini. On peut former pour chaque découpage, en choisissant les valeurs correspondantes ξ_i, la somme intégrale

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (3)$$

Considérons une certaine suite de partitions, pour lesquelles max $\Delta x_i \to 0$, et $n \to \infty$. Pour chaque partition nous choisissons les valeurs ξ_i. Supposons que cette suite de sommes intégrales [*]) s_n^* tende vers une certaine limite

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} s_n^* = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (4)$$

Nous pouvons maintenant formuler la définition suivante.
D é f i n i t i o n 1. Si pour toutes partitions du segment $[a, b]$ telles que max $\Delta x_i \to 0$ et pour tout choix des points ξ_i dans les segments $[x_{i-1}, x_i]$ la somme intégrale

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

tend vers une même limite s, cette limite est appelée intégrale définie de la fonction $f(x)$ sur le segment $[a, b]$ et notée

[*] Dans le cas donné, la somme est une grandeur variable ordonnée.

$$\int_a^b f(x)dx$$

Ainsi par définition

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \quad (6)$$

Le nombre a est la *borne* (ou la *limite*) *inférieure* de l'intégrale et b la *borne* (ou la *limite*) *supérieure*. Le segment $[a, b]$ est *le segment d'intégration*, x *la variable d' intégration.*

D é f i n i t i o n 2. Si la limite (6) existe pour la fonction $f(x)$, cette fonction est dite *intégrable sur le segment* $[a, b]$. Notons que la somme intégrale inférieure $\underline{s}_n$ et la somme intégrale supérieure $\overline{s}_n$ sont des cas particuliers de la somme intégrale (5), de sorte que si $f(x)$ est intégrable, les sommes intégrale inférieure et supérieure tendent vers une même limite s, de sorte que nous pouvons écrire en vertu de l'égalité (6) :

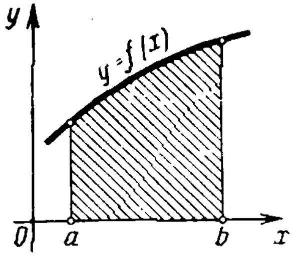


Fig. 214

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \qquad (7)$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \qquad (7')$$

Si l'on construit le graphique de la fonction sous le signe somme (le signe d'intégration) $y = f(x)$, lorsque $f(x) > 0$, l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

est numériquement égale à l ' a i r e du trapèze curvilignc formé par la courbe $y = f(x)$, les droites $x = a$, $x = b$ et l'axe Ox (fig. 214).

Par conséquent, on calculera l'aire du trapèze curviligne formé par la courbe $y = f(x)$, les droites $x = a$, $x = b$ et l'axe Ox au moyen de l'intégrale

$$Q = \int_a^b f(x)dx\,. \quad (8)$$

Démontrons l'important théorème suivant.

T h é o r è m e 1. *Si la fonction $f(x)$ est continue sur le segment $[a, b]$, elle est intégrable sur ce segment.*

D é m o n s t r a t i o n . Partitionnons de nouveau le segment $[a, b]$ $(a < b)$ en segments $[x_o, x_1]$, $[x_1, x_2]$, . . ., $[x_{I-1}, x_i]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$. Formons les sommes intégrales inférieure et supérieure

$$\underline{s}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \qquad (9)$$

$$\overline{s}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \qquad (10)$$

Etablissons maintenant quelques propriétés des sommes intégrales inférieures et supérieures.

P r o p r i é t é 1. *Quand on augmente le nombre des segments figurant dans la partition du segment* $[a, b]$ *en ajoutant de nouveaux points de division, la somme intégrale inférieure ne peut qu'augmenter, et la somme intégrale supérieure ne peut que diminuer.*

D é m o n s t i a t i o n . Supposons que le segment $[a, b]$ soit partitionné en n' segments en ajoutant de nouveaux points $(n' > n)$. Si un segment quelconque $[x_{k-1}, x_k]$ sera partitionné en plusieurs segments, par exemple en p_k segments, alors dans la nouvelle somme intégrale inférieure $\underline{s}_n$, au segment $[x_{k-1}, x_k]$ correspondra une somme de p_k termes, que nous noterons $\underline{s}^*_{p_k}$. Dans la somme $\underline{s}_n$ à ce segment correspond un seul terme $m_k(x_k - x_{k-1})$. Or pour la somme $\underline{s}^*_{p_k}$ et la grandeur $m_k(x_k - x_{k-1})$ on a une inégalité analogue à l'inégalité (4) § 1. Nous pouvons écrire

$$\underline{s}^*_{p_k} \ge m_k(x_k - x_{k-1}).$$

Ecrivant les inégalités correspondantes pour chaque segment et sommant les termes à gauche et à droite nous obtenons

$$\underline{s}_{n'} \ge \underline{s}_n \quad (n' > n). \quad (11)$$

La propriété 1 est démontrée.

P r o p r i é t é 2. *La somme intégrale inférieure* (9) *et la somme intégrale supérieure* (10) *tendent, quand le nombre des segments augmente indéfiniment du fait de l'adjonction de nouveaux points de division, vers certaines limites* $\underline{s}$ et $\overline{s}$.

D é m o n s t r a t i o n . Nous pouvons écrire à l'appui de l'inégalité (6) § 1

$$\underline{s}_n \le M(b - a),$$

autrement dit $\underline{s}_n$ est bornée pour tous les n. En vertu de la propriété 1 $\underline{s}_n$ est monotone croissante quand n croît. Par conséquent en vertu du théorème 7 sur les limites (cf. § 5 ch. II) cette grandeur variable possède une limite : désignons-la par $\underline{s}$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{s}_n = \underline{s}. \qquad (12)$$

On établit de même, que $\overline{s}_n$ est bornée supérieurement et monotone décroissante. Par conséquent, $\overline{s}_n$ possède une limite, que nous désignerons par $\overline{s}$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{s}_n = \overline{s}$$

P r o p r i é t é 3. *Si la fonction* $f(x)$ *est continue sur le segment fermé* $[a, b]$, *alors les limites* $\underline{s}$ *et* $\overline{s}$ *définies dans la propriété 2 sont égales, à condition que* $\max \Delta \overline{x}_i \to 0$.

Désignons cette limite commune par s:

$$\underline{s} = s = \overline{s}. \qquad (13)$$

D é m o n s t r a t i o n . Considérons la différence des sommes intégrales supérieure et inférieure

$$\overline{s}_n - \underline{s}_n = (M_1 - m_1)\,\Delta x_1 + (M_2 - m_2)\,\Delta x_2 + \ldots + (M_i - m_i)\,\Delta x_i + \ldots$$

$$+ (M_n - m_n)\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i\,. \qquad (14)$$

Désignons par ε_n la plus grande des différences $(M_i - m_i)$ pour n'importe quelle partition

$$\varepsilon_n = \max\,(M_i - m_i)$$

On pent démontrer (mais nous ne nous y arrêterons pas), que si la fonction $f(x)$ est continue sur un segment fermé, alors pour toute partition du segment $[a, b]$ $\varepsilon_n \to 0$, si seulement $\max \Delta x_i \to 0$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \varepsilon_n = 0 \qquad (15)$$

La propriété d'une fonction continue sur un segment fermé qu'exprime l'égalité (15) est appelée la *continuité uniforme* de la fonction.

Nous utiliserons ainsi le théorème : *Une fonction continue sur un intervalle fermé est uniformément continue sur cet intervalle.*

Revenons à l'égalité (14). Remplaçons chaque différence $(M_i - m_i)$ dans le second membre par la grandeur non inférieure ε_n. Nous obtenons l'inégalité

$$\overline{s}_n - \underline{s}_n \le \varepsilon_n\,\Delta x_i + \varepsilon_n\,\Delta x_2 + \ldots + \varepsilon_n\,\Delta x_n =$$
$$\varepsilon_n\,(\Delta x_1 + \Delta x_2 - \ldots + \Delta x_n) = \varepsilon_n\,(b - a).$$

Passant à la limite quand $\max \Delta x_i \to (n \to \infty)$ nous obtenons

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} (\overline{s}_n - \underline{s}_n) \le \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \varepsilon_n (b-a) = (b-a) \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \varepsilon_n = 0 \qquad (16)$$

c'est-à-dire

$$\lim \overline{s}_n = \lim \underline{s}_n = s \qquad (17)$$

ou

$$\overline{s} = \underline{s} = s, \text{ c.q.f.d.}$$

P r o p r i é t é 4. *Soient* $\underline{s}_{n_1}$ et $\overline{s}_{n_2}$ *les sommes intégrales inférieure et supérieure correspondent aux partitions du segment* $[a, b]$ *respectivement en* n_1 *et en* n_2 *segments. On a alors l'inégalité*

$$\underline{s}_{n_1} \le \overline{s}_{n_2} \qquad (18)$$

pour tous n_1 et n_2.

D é m o n s t r a t i o n . Considérons la partition du segment $[a, b]$ en $n_3 = n_1 + n_2$ segments, où les points de division sont les , points de division de la première et de la seconde partition. Nous avons alors en vertu de l'inégalité (3) § 1

$$\underline{s}_{n_3} \le \overline{s}_{n_3}. \qquad (19)$$

Nous avons en vertu de la propriété 1

$$\underline{s}_{n_1} \le \overline{s}_{n_3}. \qquad (20)$$

$$\underline{s}_{n_3} \le \overline{s}_{n_2}.. \qquad (21)$$

Utilisant les relations (20) et (21) nous pouvons élargir l'inégalité (19)

$$\underline{s}_{n_1} \le \underline{s}_{n_2} \le \overline{s}_{n_3} \le \overline{s}_{n_2}$$

ou

$$\underline{s}_{n_1} \le \overline{s}_{n_2}$$

c.q.f.d.

P r o p r i é t é 5. *Si la fonction* $f(x)$ *est continue sur le segment* $[a, b]$, *alors pour n'importe quelle suite de partitions du segment* $[a, b]$ *en segments* $[x_{i-1}, x_i]$, *réalisée non nécessairement en ajoutant de nouveaux points de division, si seulement* $\max \Delta x_1 \to 0$ *la somme intégrale inférieure* $\underline{s}^*_m$ *et la sornme intégrale supérieure* $\overline{s^*_m}$ *tendent vers la limite s définie dans la propriété* 3.

D é m o n s t r a t i o n . Considérons la suite des partitions de la suite des sommes intégrales supérieures sn, définies dans la propriété 2. Pour toutes valeurs de n et m (en vertu de l'inégalité (18)) nous pouvons écrire :

$$\underline{s}_m^* \leq \overline{s}_n .$$

Passant à la limite pour $n \to \infty$, nous aurons eu vertu de (15)

$$\underline{s}_m^* \leq s.$$

Nous démontrerons de même que $s \leq \overline{s_m^*}$. Ainsi,

$$\underline{s}_m^* \leq s \leq \overline{s_m^*}$$

ou

$$s - \underline{s}_m^* \geq 0,\ \overline{s_m^*} - s \geq 0 \qquad (22)$$

Considérons la limite de la différence

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} (\overline{s}_m^* - \underline{s}_m^*).$$

Comme la fonction $f(x)$ est continue sur le segment fermé $[a, b]$, démontrons (de même que nous l'avons fait pour établir la propriété 3) que (cf. égalité (16))

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} (\overline{s}_m^* - \underline{s}_m^*) = 0.$$

Ecrivons ainsi cette dernière relation

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \left[(\overline{s}_m^* - s) + (s - \underline{s}_m^*) \right] = 0$$

En vertu de (22) chacune des différences figurant entre crochets est non négative. Par conséquent,

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} (\overline{s}_m^* - s) = 0 \ ; \quad \lim_{\max \Delta x_i \to 0} (\underline{s}_m^* - s) = 0$$

Et nous obtenons en définitive

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \overline{s}_m^* = s \ ; \quad \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \underline{s}_m^* = s$$

c.q.f.d.

On peut maintenant démontrer et énoncer le théorème. Soit $f(x)$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Considérons une suite arbitraire de sommes intégrales

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

telle que $\max \Delta x \to 0$, ξ_i est un point arbitraire du segment $[x_{i-1}, x_i]$.

Considérons pour la suite donnée de partitions les suites correspondantes des sommes intégrales inférieures et supérieures $\underline{s}_n$ et $\overline{s}_n$. Pour chaque partition on aura les relations (2)

$$\underline{s}_n \leq s_n \leq \overline{s}_n .$$

Passant à la limite pour $\max \Delta x_i \to 0$ et utilisant les égalités (23) et le théorème 4 § 5, ch. 11, nous obtenons

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} s_n = s ,$$

où s est la limite définie dans la propriété 3.

Cette limite, comme nous l'avons dit plus haut, est appelée intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$. Ainsi, si la fonction $f(x)$ est continue sur le segment $[a, b]$, alors

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \quad (24)$$

Notons que parmi les fonctions discontinues il existe aussi bien des fonctions intégrables que des fonctions non intégrables.

R e m a r q u e 1. Notons que l'intégrale définie dépend seulement de la fonction $y = f(x)$ et des bornes d'intégration, mais non de la variable d'intégration, qu'il est loisible de désigner par n'importe quelle lettre. On pourra donc, sans changer la valeur de l'intégrale définie, remplacer la lettre x par n'importe quelle autre lettre

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \ldots = \int_a^b f(z)dz$$

R e m a r q u e 2. Lorsque nous avons introduit la notion d'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$, nous avons supposé $a < b$. Si $b < a$, on prendra p a r d é f i n i t i o n

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx . \qquad (25)$$

Ainsi,

$$\int_5^0 x^2 dx = -\int_0^5 x^2 dx$$

R e m a r q u e 3.Enfin,si $a = b$,on posera p a r d é f i n i t i o n pour toute fonction $f(x)$

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \qquad (26)$$

Ceci est naturel du point de vue géométrique. En effet, la longueur de la base du trapèze curviligne est nulle, et donc son aire aussi.

E x e m p l e 1. Calculer l'intégrale $\int_a^b kx\,dx$ $(b > a)$.

S o l u t i o n . Géométriquement, le problème revient à calculer l'aire Q du trapèze formé par les droites $y = kx$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (fig. 215).
La fonction $y = kx$ sous le signe somme est continue. Par conséquent, il nous est permis dans le calcul de l'intégrale définie, comme on l'a noté plus haut, de découper le segment $[a, b]$ arbitrairement et de choisir des ξ_k intermédiaires arbitraires. Le résultat du calcul ne dépend pas du procédé de construction de la somme intégrale, pourvu que le plus grand des segments partiels tende vers zéro.
Partageons le segment $[a, b]$ en n parties égales. La longueur Δx de chaque segment est $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, qu'on appelle « pas » de la division. Les abscisses des points de division sont

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \Delta x$$
$$x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_n = a + n\Delta x.$$

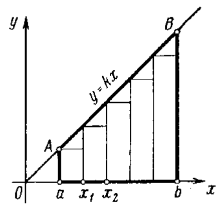


Fig. 215

Prenons pour points ξ_k les extrémités gauches de châque segment

$$\xi_1 = a,\ \xi_2 = a + \Delta x,\ \xi_3 = a + 2\Delta x, \ldots,$$
$$\xi_n = a + (n - 1)\,\Delta x.$$

Formons la somme intégrale (1). On déduit de $f(\xi_i) = k\xi_i$

$$s_n = k\xi_1\Delta x + k\xi_2\Delta x + \ldots + k\xi_n\Delta x =$$
$$= ka\Delta x + [k(a + \Delta x)]\,\Delta x + \ldots + \{k\,[a + (n - 1)\,\Delta x]\}\,\Delta x =$$
$$= k\,\{a + (a + \Delta x) + (a + 2\Delta x) + \ldots + [a + (n - 1)\,\Delta x]\}\,\Delta x =$$
$$= k\,\{na + [\Delta x + 2\Delta x + \ldots + (n - 1)\,\Delta x]\}\Delta x =$$
$$= k\,\{na + [1 + 2 + \ldots + (n - 1)]\,\Delta x\}\,\Delta x,$$

où $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Etant donné que $1 + 2 + \ldots + (n - 1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$
(la somme d'une progression arithmétique),

$$s_n = k\left[na + \frac{n(n-1)}{2}\frac{b-a}{n}\right]\frac{b-a}{n} = k\left[a + \frac{n-1}{n}\frac{b-a}{2}\right](b-a).$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n} = 1$, on a

$$\lim_{n\to\infty} s_n = Q = k\left[a + \frac{b-a}{2}\right](b-a) = k\,\frac{b^2-a^2}{2}$$

Ainsi,

$$\int_a^b kx\,dx = k\,\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Le calcul de l'aire $ABba$ (fig. 215) en géométrie élémentaire est trivial. Le résultat est le même.

E x e m p l e 2. Calculer $\int_0^b x^2 dx$.

S o l u t i o n . L'intégrale donnée est égale à l'aire Q du trapèze curviligne formé par la parabole $y = x^2$, les droites $x = b$ et $y = 0$ (fig. 216).
Découpons le segment $[0, b]$ en n parties égales par les points

$$x_0 = 0,\ x_1 = \Delta x,\ x_2 = 2\Delta x, \ldots, x_n = b = n\Delta x,$$
$$\Delta x = \frac{b}{n}.$$

Prenons pour ξ_i les extrémités droites des segments.
Formons la somme intégrale

$$s_n = x_1^2\Delta x + x_2^2\Delta x + \ldots + x_n^2\Delta x =$$
$$= \left[(\Delta x)^2\Delta x + (2\Delta x)^2\Delta x + \ldots + (n\Delta x)^2\Delta x\right] =$$
$$= (\Delta x)^3\left[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right].$$

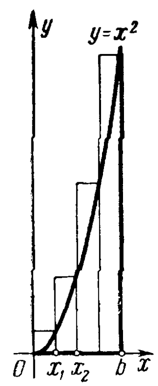


Fig. 216

Comme on sait

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

donc

$$s_n = \frac{b^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = Q = \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$

E x e m p l e 3. Calculer $\int_a^b m\,dx$ $(m = \text{const})$.

S o l u t i o n .

$$\int_a^b m\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n m\Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} m \sum_{i=1}^n \Delta x_i = m \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = m(b-a)$$

Ici $\sum_{i=1}^n \Delta x_i$ est la somme des longueurs des segments partiels constituant le segment $[a, b]$. Quel que soit le découpage, cette somme est égale à la longueur du segment $b - a$.

E x e m p l e 4. Calculer $\int_a^b e^x\,dx$.

S o l u t i o n . Divisons de nouveau le segment $[a, b]$ en n parties égales

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \Delta x,\ \ldots,\ x_n = a + n\Delta x, \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Prenons pour points ξ_i les extrémités gauches. Formons la somme intégrale

$$s_n = e^a \Delta x + e^{a+\Delta x}\Delta x + \ldots + e^{a+(n-1)\Delta x}\Delta x = e^a(1 + e^{\Delta x} + \ldots + e^{(n-1)\Delta x})\Delta x$$

L'expression entre parenthèses est une progression géométrique de raison $e^{\Delta x}$ et de premier terme 1, donc,

$$s_n = e^a \frac{e^{n\Delta x} - 1}{e^{\Delta x}} \Delta x = e^a (e^{n\Delta x} - 1) \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}$$

On a ensuite $\qquad n\Delta x = b - a \ ; \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = 1.$

(D'après la règle de L'Hospital, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{z}{e^z - 1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{e^z} = 1$.) Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = Q = e^a(e^{b-a} - 1)\cdot 1 = e^b - e^a,$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$$

R e m a r q u e 4. Les exemples traités montrent que le calcul des intégrales définies en tant que limites de sommes intégrales est sujet à des difficultés considérables. Même quand les fonctions à intégrer sont très simples (kx, x^2, e^x), ce procédé exige des calculs fastidieux. Les calculs deviennent inextricables quand il s'agit de fonctions plus compliquées. I1 est donc naturel de chercher une méthode pratique de calcul des intégrales définies. Cette méthode, due à Newton et à Leibniz, utilise le lien profond entre l'intégration et la dérivation. Les paragraphes suivants du présent chapitre ont pour objet l'exposé des fondements de cette méthode.

§ 3. Propriétés fondamentales de l'intégrale définie

P r o p r i é t é 1. *On peut sortir un facteur constant de sous le signe somme* : *si* A = const,

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx. \quad (1)$$

D é m o n s t r a t i o n .

$$\int_a^b Af(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n Af(\xi_i)\Delta x_i = A \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = A\int_a^b f(x)dx$$

P r o p r i é t é 2. *L'intégrale définie de la somme algébrique de plusieurs fonctions est égale à la somme algébrique des intégrales des fonctions. Ainsi, dans le cas de deux fonctions*

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx. \qquad (2)$$

D é m o n s t r a t i o n .

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n [f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\Delta x_i\right] =$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$\int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

La démonstration est valable pour un nombre arbitraire de fonctions.

Les propriétés 1 et 2, démontrées pour les cas $a < b$, subsistent pour $a \geq b$.

Cependant, la propriété suivante n'a lieu que pour $a < b$.

P r o p r i é t é 3. *Si sur le segment* $[a, b]$, $(a < b)$, *les fonctions* $f(x)$ *et* $\varphi(x)$ *satisfont à la condition* $f(x) \leq \varphi(x)$, *on a*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (3)$$

D é m o n s t r a t i o n . Considérons la différence

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n [\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)]\Delta x_i$$

On a $\varphi(\xi_i) - f(\xi_i) \geq 0$, $\Delta x_i \geq 0$. Donc, chacun des termes est positif ou nul, il en est de même de la somme et de sa limite

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]dx \geq 0 \quad \text{ou} \quad \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

d'où l'on déduit l'inégalité (3).

Si $f(x) > 0$ et $\varphi(x) > 0$, la fig. 217 donne une illustration géométrique de cette propriété. Il résulte de $\varphi(x) \geq f(x)$ que faire du trapèze curvilgne aA_1B_1b n'est pas supérieure à celle du trapèze aA_2B_2b.

Propriété 4. *m et M étant respectivement la plus petite et la plus grande valeur de f (x) sur le segment* $[a, b]$ *et* $a \leq b$, *on a*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \quad (4)$$

Démonstration. On a par hypothèse

$$m < f(x) < M.$$

On déduit de la propriété (3)

$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dx$ (4') Or, $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$; $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$

(voir exemple 3, § 2, ch. XI). Substituant ces expressions dans l'inégalité (4'), on obtient l'inégalité (4).

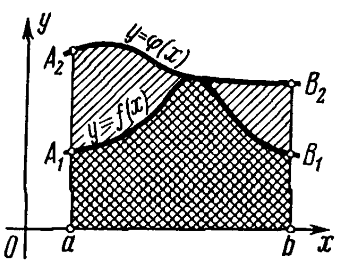


Fig. 217

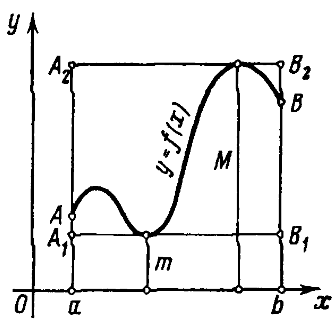


Fig. 218

Lorsque $f(x) > 0$, cette condition est illustrée géométriquement par la fig. 218: l'aire du trapèze curviligne $aABb$ est comprise entre les aires des rectangles aA_1B_1b et aA_2B_2b.

Propriété 5 (Théorème de la moyenne). *La fonction f (x) étant continue sur le segment* $[a, b]$, *il existe sur ce segment un point* ξ *tel que l'on a*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi). \quad (5)$$

Démonstration. Soit, pour fixer les idées, $a < b$. Si m et M sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur de $f(x)$ sur $[a, b]$, on a, en vertu de la formule (4),

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

D'où

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu \qquad \text{où } m \leq \mu \leq M$$

$f(x)$ étant continue, elle prend toutes les valeurs comprises entre m et M. On aura donc pour une certaine valeur ξ $(a \leq \xi \leq b)$ $\mu = f(\xi)$, soit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

propriété 6. *a, b, c étant trois nombres arbitraires, on a*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (6)$$

pourvu que ces trois intégrales existent.

Démonstration. Supposons d'abord que $a < c < b$ et formons la somme intégrale pour la fonction $f(x)$ sur $[a, b]$.

Etant donné que la limite des sommes intégrales ne dépend pas du mode de découpage de $[a, b]$, nous découperons $[a, b]$ en segments partiels de sorte que c soit un point de division. Décomposons ensuite la somme intégrale $\sum_a^b$, correspondant au segment $[a, b]$, en deux sommes $\sum_a^c$ et $\sum_c^b$ correspondant respectivement aux segments $[a, c]$ et $[c, b]$. On a dans ces conditions

$$\sum_a^b f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i)\Delta x_i$$

Passant à la limite quand $\max \Delta x_i \to 0$, on obtient la relation (6).

Si $a < b < c$, on peut écrire, en vertu de ce qui précède

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

mais, en vertu de la formule (4) du § 2

$$\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx \quad \text{par conséquent.} \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

On démontre d'une manière analogue cette propriété pour un agencement quelconque des points a, b et c.

La fig. 219 illustre la propriété 6 dans le cas où $f(x) > 0$ et $a < c < b$: l'aire du trapèze *aABb* est la somme des aires des trapèzes *aACc* et *cCBb*.

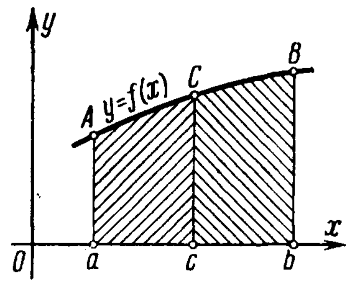


Fig. 219

§4. Calcul de l'intégrale définie. formule de Newton-Leibniz

Dans l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

fixons la borne inférieure a et faisons varier la borne supérieure b. La valeur de l'intégrale variera en conséquence, c'est-à-dire que l'intégrale sera une fonction de sa borne supérieure.

Désignons la borne supérieure par x pour revenir à des notations familières et, pour éviter toute confusion, désignons la variable d'intégration par t. (La valeur de l'intégrale ne dépend pas de la désignation de la variable d'intégration.)

On a l'intégrale $\int_a^x f(t)dt$. a étant constant, cette intégrale est une fonction de sa borne supérieure x. Soit $\Phi(x)$ cette fonction:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \,. \ (1)$$

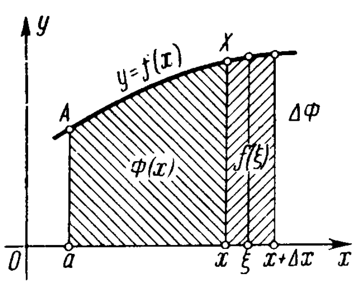


Fig. 220

Si la fonction $f(t)$ est non négative, $\Phi(x)$ est numériquement égale à l'aire du trapèze *aAXx* (fig. 220). Il est évident que cette aire varie avec x.

Trouvons la dérivée de $\Phi(x)$ par rapport à x, c'est-à-dire la dérivée de l'intégrale (1) par rapport à sa borne supérieure.

Théorème 1. *$f(x)$ étant une fonction continue et si l'on pose* $\Phi(x)= \int_a^x f(t)dt$

$$\Phi'(x) = f(x)$$

En d'autres termes, *la dérivée d'une intégrale définie par rapport à sa borne supérieure est égale à la fonction sous le signe somme dans laquelle la variable d'intégration a été remplacée par la valeur de la borne supérieure* (sous la condition que la fonction sous le signe somme soit continue).

Démonstration. Donnons à la variable x un accroissement arbitraire Δx positif ou négatif ; on a (compte tenu de la propriété 6 de l'intégrale définie)

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

L'accroissement de la fonction $\Phi(x)$ est égal à

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)$$
$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

soit

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Appliquons à cette dernière intégrale le théorème de la moyenne (propriété 5)

$$\Delta\Phi = f(\xi)\,(x + \Delta x - x) = f(\xi)\,\Delta x$$

où ξ est compris entre x et $x + \Delta x$.

Formons le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(\xi)$$

Par conséquent,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi)$$

Mais comme $\xi \to x$ quand $\Delta x \to 0$, on a

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi)$$

et comme $f(x)$ est continue

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$$

On a donc $\Phi'(x) = f(x)$ et le théorème est démontré.

Ce théorème admet une illustration géométrique simple (fig. 220) l'accroissement $\Delta\Phi = f(\xi)\,\Delta x$ est égal à l'aire du trapèze curviligne de base Δx et la dérivée $\Phi'(x) = f(x)$ est égale à la longueur du segment xX.

R e m a r q u e . Il résulte notamment du théorème démontré que *toute fonction continue admet une primitive*. En effet, si la fonction $f(t)$ est continue sur le segment $[a, x]$, comme il a été indiqué au § 2, chap. XI, l'intégrale $\int_a^x f(t)dt$ existe, c'est-à-dire qu'existe la fonction

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

qui est, comme on l'a démontré ci-dessus, une primitive de $f(x)$.

T h é o r è m e 2. *$F(x)$ étant une primitive de la fonction continue $f(x)$, on a*

$$\int_a^x f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (2)$$

Cette formule est appelée la formule de Newton-Leibniz *).

D é m o n s t r a t i o n . Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$. D'après le théorème 1, la fonction $\int_a^x f(t)dt$ est aussi une primitive de $f(x)$. Or, deux primitives arbitraires d'une fonction donnée se distinguent par une constante C^*. On peut écrire, par conséquent, $\int_a^x f(x)dx = F(x) + C^*$. (3)

C^* étant adéquatement choisi, cette égalité est vraie pour tous les x, c'est donc une identité. Pour déterminer la constante C^*, posons dans cette identité $x = a$; alors

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C^*$$

ou

$$0 = F(a) + C^*,$$

donc

$$C^* = - F(a).$$

Par conséquent,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Posant $x = b$, on obtient la formule de Newton-Leibniz:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

ou, en revenant à la variable d'intégration x,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Notons que la différence $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F, car toutes les primitives se distinguent les unes des autres par une constante qui disparaît dans la soustraction. Introduisant la notation *)

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b,$$

on peut mettre la formule (2) sous la forme

$$\int_a^x f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

La formule de Newton-Leibniz fournit un moyen de calcul pratique des intégrales définies quand on connaît une primitive de la fonction à intégrer. C'est la découverte de cette formule qui a conféré à l'intégrale définie la portée qu'elle a aujourd'hui en mathématiques. Bien qu'un processus analogue au calcul de l'intégrale définie en tant que limite d'une somme intégrale fût déjà connu dans l'Antiquité (Archimède), les applications de cette méthode étaient limitées toutefois aux cas les plus simples où la limite de la somme intégrale pouvait être calculée directement. La formule de NewtonLeibniz a considérablement étendu le domaine d'application de l'intégrale définie, les mathématiques ayant reçu une m é t h o d e g é n é r a l e permettant de résoudre différents problèmes particuliers, et il en est résulté un élargissement considérable de la sphère des applications de l'intégrale définie en technique, en mécanique, en astronomie, etc.

* Notons que cette appellation de la formule (2) est conventionnelle car ni Newton ni Leibniz n'ont donné explicitement cette formule. Mais il est important de souligner que ce sont précisément Leibniz et Newton qui, les premiers, ont établi le lien entre l'intégration et la dérivation ayant permis d énoncer une règle de calcul des intégrales définies.

* On utilise les deux transcriptions équivalentes

$$F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b \text{ et } F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Nous utiliserons par la suite indifféremment l'une ou l'autre transcription.

Exemple 1.

$$\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Exemple 2

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{2}$$

Exemple 3.

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$$

Exemple4

$$\int_a^b e^x\,dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a.$$

Exemple 5.

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_a^b = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0$$

Exemple 6.

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

§ 5. Changement de variable dans une intégrale définie

Théorème. *Soit donnée l'intégrale*

$$\int_a^b f(x)dx,$$

où $f(x)$ *est continue sur le segment* $[a, b]$.
Introduisons la nouvelle variable t par la formule

$$x = \varphi(t).$$

Si
1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,
2) $\varphi(t)$ et $\varphi'(t)$ *sont continues sur le segment* $[\alpha, \beta]$,
3) $f[\varphi(t)]$ *est définie et continue sur* $[\alpha, \beta]$, *alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

Démonstration. Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, on peut écrire les égalités suivantes

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) + C, \qquad (2)$$

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C \qquad (3)$$

dont on vérifie la légitimité en dérivant les deux membres par rapport à t. (Elle résulte aussi de la formule (2), § 4, chap. X.) On déduit de l'égalité (2)

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

et de l'égalité (3)

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

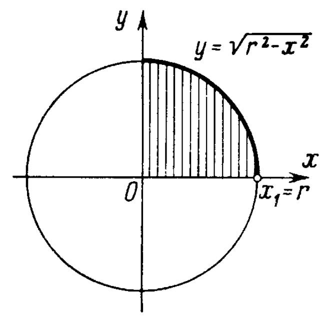


Fig. 221

Les seconds membres de ces égalités sont égaux et, par conséquent, les premiers le sont aussi, c.q.f.d.

Remarque. Dans le calcul de l'intégrale définie par application de la formule (1) nous ne revenons pas à l'ancienne variable. Les valeurs numériques des deux intégrales de l'égalité (1) sont égales.

Exemple. Calculer l'intégrale

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

Solution. Faisons le changement de variable

$$x = r\sin t, \quad dx = r\cos t\,dt.$$

Déterminons les nouvelles limites $x = 0$ pour $t = 0$, $x = r$ pour $t = \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent,

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\; r\cos t\,dt = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\,\cos t\,dt =$$

$$= r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 t\right)dt = r^2\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}$$

Géométriquement, nous avons calculé l'ai/re du quart de cercle $x^2 + y^2 = r^2$ (fig. 221).

§ 6. Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de x dérivables. On a

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Intégrons les deux membres de cette identité de a à b, on obtient

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'\,dx \quad (1)$$

Etant donné que $\int (uv)'dx = uv + C$, on a $\int_a^b (uv)'dx = uv\big|_a^b$;

on peut donc écrire l'égalité (1) sous la forme

$$uv\big|_a^b = \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv \quad \text{ou, en définitive,} \quad \int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

E x e m p l e . Calculer l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,d\cos x =$$

$$= -\sin^{n-1} x\cos x\big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos x\cos x dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

Avec les notations choisies, on peut recopier la dernière égalité sous la forme

$$I_n = (n-1)\,I_{n-2} - (n-1)\,I_n,$$

d'où l'on trouve

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \quad (2)$$

On trouve de même

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-1} I_{n-4} \quad \text{et donc} \quad I_n = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2} I_{n-4}$$

En continuant ainsi, on arrive jusqu'à I_0 ou I_1, selon la parité de n. Examinons les deux cas

1) n est pair, $n = 2m$

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m}\frac{2m-3}{2m-2}\ldots\frac{3}{4}\frac{1}{2} I_0$$

2) n est impair, $n = 2m + 1$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1}\frac{2m-2}{2m-1}\ldots\frac{4}{5}\frac{2}{3} I_1$$

mais

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

donc,

$$I_{2m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx = \frac{2m-1}{2m}\frac{2m-3}{2m-2}\ldots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x dx = \frac{2m}{2m+1}\frac{2m-2}{2m-1}\ldots\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$$

De ces deux formules résulte la formule de Wallis; qui exprime $\frac{\pi}{2}$ sous forme de praduit infini.

En effet, on déduit de ces deux dernières formules en divisant membre à membre

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2m}{3\cdot 5\ldots(2m-1)}\right)^2 \frac{1}{2m+1}\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} \quad (3)$$

Montrons maintenant que

$$\lim_{m\to\infty}\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1$$

On a quel que soit x dans l'intervalle $(0, \frac{\pi}{2})$

$$\sin^{2m-1} x > \sin^{2m} x > \sin^{2m+1} x$$

Intégrant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on obtient

$$I_{2m-1} \geq I_{2m} \geq I_{2m+1} \quad \text{d'où} \quad \frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} \geq \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} \geq 1$$

Il résulte de l'égalité (2)

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \frac{2m+1}{2m} \quad \text{Par conséquent,} \quad \lim_{m\to\infty} \frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \lim_{m\to\infty} \frac{2m+1}{2m} = 1$$

On déduit de l'inégalité (4)

$$\lim_{m\to\infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1$$

Passant à la limite dans (3), on obtient la *formule de Wallis*

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty}\left[\left(\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2m}{3\cdot5\ldots(2m-1)}\right)^2 \frac{1}{2m+1}\right]$$

On peut recopier cette formule sous la forme

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2}{2m-1}\cdot\frac{22}{2m+1}\right)$$

§ 7. *Intégrales impropres*

1. Intégrales avec des bornes infinies.

Soit $f(x)$ une fonction définie et continue pour tous les x tels que

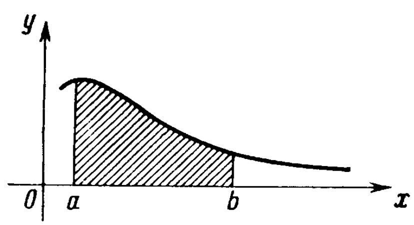


Fig. 222

$a \leq x < +\infty$. Considérons l'intégrale

$$I(b) = \int_a^b f(x)dx$$

Cette intégrale a un sens pour tout $b > a$. Quand b varie, l'intégrale varie, elle est une fonction continue de b (voir § 4, ch. XI). Etudions le comportement de cette intégrale lorsque $b \to +\infty$ (fig. 222).

Définition. Lorsque la limite suivante

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

existe, et cette limite est appelée *intégrale impropre* de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, +\infty]$, on la représente par

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{On a, par définition,} \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

On dit encore que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *existe ou converge* *). Si $\int_a^b f(x)dx$ n'a pas de limite finie lorsque $b \to +\infty$, on dit que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *n'existe pas ou diverge*.

Il est facile de voir quel est le sens géométrique de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ lorsque $f(x) \geq 0$: si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ représente

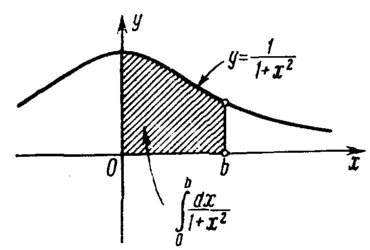


Fig. 223

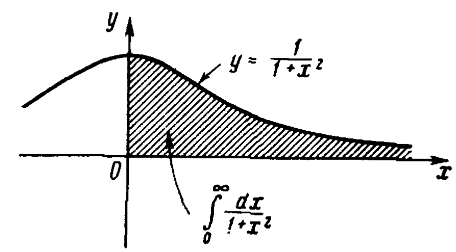


Fig. 224

l'aire du domaine délimité par la courbe $y = f(x)$, l'axe des abscisses et les droites $x = a$, $x = b$, il est naturel de dire que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ exprime l'aire du domaine infini compris entre les courbes $y = f(x)$, $x = a$ et l'axe des x.

---

* On l'appelle aussi parfois intégrale impropre.

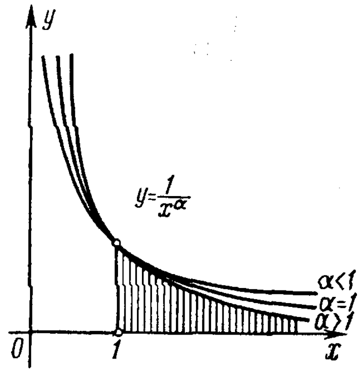
On définit d'une manière analogue les intégrales dins d'autres intervalles infinis:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{\alpha\to+\infty}\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

Cette dernière égalité doit être comprise comme suit : si chacune des intégrales du second membre existe, on dira que l'intégrale du premier membre existe (converge).

E x e m p l e 1. Calculer l'intégrale $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$



(voir fig. 223 et 224).

Fig. 225

Solution. On a, par définition,

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale considérée exprime l'aire du domaine infini hachuré sur la fig. 224.

Fig. 225

E x e m p le 2. Discuter les valeurs de α pour lesquelles l'intégrale $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ converge ou diverge (fig. 225).

S o l u t i o n . Etant donné que (pour $\alpha \neq 1$)

$$\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}\left[b^{1-\alpha}-1\right]$$

on a

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha}-1)$$

Par conséquent,

si $\alpha > 1$, $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha-1}$, l'intégrale converge ;

si $\alpha < 1$, $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \infty$ l'intégrale diverge.

Lorsque $\alpha = 1$, $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x} = \operatorname{Log} x\Big|_1^{+\infty} = \infty$, l'intégrale diverge.

E x e m p l e 3. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

S o l u t i o n .

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

La seconde intégrale est égale à $\frac{\pi}{2}$ (voir exemple 1). Calculons la première intégrale

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha\to-\infty}\operatorname{arc\,tg} x\Big|_{\alpha}^{0} = (\operatorname{arc\,tg} 0 - \operatorname{arc\,tg}\alpha) = \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

Dans beaucoup de cas, il suffit d'établir que l'intégrale donnée converge ou diverge et d'évaluer sa valeur. Il est utile de se reporter à cet effet aux théorèmes suivants que nous nous bornerons d'énoncer et dont nous montrerons les applications sur des exemples.

T h é o r è m e 1. *Si, quel que soit x ($x > a$), on a l'inégalité*

$$0 \le f(x) \le \varphi(x)$$

et si $\int_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx$ *converge,* $\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$ *converge aussi et* $\int_{a}^{+\infty}f(x)dx \le \int_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx$

E x e m p l e 4. Etudier la convergence de l'intégrale $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^x)}$,

S o l u t i o n . Remarquons que pour $1 \le x$

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$$

Ensuite, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1$. Donc, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ converge et est inférieure à l'unité.

T h é o r è m e 2. *Si, quel que soit x ($x \geq a$), on a l'inégalité* $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ *et si* $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ *diverge, l' intégrale* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *diverge aussi.*

E x e m p l e 5. Etudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$

On remarque que

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{Or,} \quad \int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = +\infty$$

Par conséquent, l'intégrale donnée diverge.

Les deux théorèmes précédents concernaient des intégrales à domaines d'intégration infinis, la fonction sous le signe somme étant non négative. Lorsqu'on intègre dans un domaine infini une fonction $f(x)$ à signe variable, on a le théorème suivant.

T h é o r è m e 3. *Si l'intégrale* s $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ *converge, il en est de même de* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. On dit alors que cette dernière intégrale est *absolument convergente*.

E x e m p le 6. Etudier la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx$$

S o l u t i o n . Ici, la fonction à intégrer est à signe variable. On a

$$\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \left|\frac{1}{x^3}\right|. \qquad \text{Mais} \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3} = -\left|\frac{1}{2x^2}\right|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^3}\right|dx$ converge. Il en résulte la convergence de l'intégrale donnée.

2. I n t é g r a l e d ' u n e f o n c t i o n d i s c o n t i n u e. Soit $f(x)$ une fonction définie et continue lorsque $a \leq x < c$, la fonction n'étant pas définie au point $x = c$, ou bien encore ayant une discontinuité. On ne peut définir alors $\int_a^c f(x)dx$ comme limite de sommes intégrales, $f(x)$ n'étant pas continue sur le segment $[a, c]$ et cette limite pouvant ne pas exister.

On définit comme suit l'intégrale $\int_a^c f(x)dx$ d'une fonction $f(x)$ d i s c o n t i n u e a u p o i n t c :

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to c-0}\int_a^b f(x)dx$$

Cette intégrale est dite *convergente* lorsque la limite du second membre existe, et *divergente* dans le cas contraire.

Si la fonction $f(x)$ a une discontinuité à l'extrémité gauche du segment $[a, c]$ (c'est-à-dire pour $x = a$), on pose, p a r d é f i n i t i o n ,

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to a+0}\int_a^b f(x)dx .$$

Si $f(x)$ a une discontinuité en un point $x = x_0$ à l ' i n t é r i e u r du segment $[a, c]$, on pose

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^c f(x)dx$$

lorsque les deux intégrales du second membre existent.

E x e m p l e 7. Calculer

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

S o l u t i o n .

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b\to1-0}\int_0^b\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{b\to1-0}2\sqrt{1-x}\Big|_0^b = -\lim_{b\to1-0}2\left[\sqrt{1-b}-1\right] = 2$$

E x e m p l e 8. Calculer l'intégrale $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2}$.

S o l u t i o n . La fonction sous le signe somme ayant une discontinuité au point $x = 0$, on décomposera l'intégrale en deux

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon_1\to-0}\int_{-1}^{\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2}$$

Calculons chaque limite séparément

$$\lim_{\varepsilon_1\to-0}\int_{-1}^{\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2}=-\lim_{\varepsilon_1\to-0}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\varepsilon_1}=-\lim_{\varepsilon_1\to-0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{-1}\right)=\infty$$

Par conséquent, l'intégrale diverge dans l'intervalle [- 1, 0]:

$$\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\lim_{\varepsilon_2\to+0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=\infty$$

Donc, l'intégrale diverge également dans l'intervalle [0, 1].

On voit que l'intégrale donnée diverge sur le segment [-1, 1]. Si l'on avait intégré en omettant la discontinuité au point $x = 0$, on aurait obtenu un résultat erroné. En effet,

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{-1}\right)=-2,$$

ce qui est évidemment faux (fig. 226).

R e m a r q u e . Si la fonction $f(x)$ définie sur le segment $[a, b]$ possède sur ce segment des discontinuités en nombre fini aux points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on définit l'intégrale de $f(x)$ sur le segment $[a, b]$ comme suit

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{a_1} f(x)dx+\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx+\ldots+\int_{a_n}^{b} f(x)dx,$$

si chacune des intégrales de droite converge.
Si l' une quelconque de ces intégrales diverge, alors $\int_a^b f(x)dx$ est dite divergente.

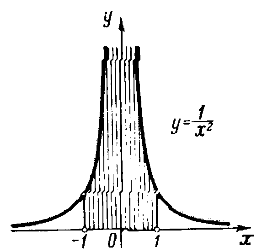


Fig. 226

Pour déterminer la convergence des intégrales des fonctions discontinues et évaluer leurs valeurs, il est souvent possible d'utiliser des théorèmes analogues aux théorèmes sur les intégrales avec des bornes infinies.

T h é o r è m e 1'. *Si les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont discontinues au point c du segment $[a, c]$, si l'on a en chaque point de ce segment l' inégalité*

$$\varphi(x)\geq f(x)\geq 0$$

et si $\int_a^c \varphi(x)dx$ *converge, il en est de même de* $\int_a^c f(x)dx$.

T h é o r è m e 2'. *Si les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont discontinues au point c du segment $[a, c]$, si l'on a en chaque point de ce segment*

$$f(x)\geq\varphi(x)\geq 0$$

et si $\int_a^c \varphi(x)dx$ *diverge, il en est de même de* $\int_a^c f(x)dx$.

T h é o r è m e 3'. *Si la fonction $f(x)$ est de signe variable sur le segment $[a, c]$, si elle est discontinue seulement au point c et si l'intégrale* $\int_a^c |f(x)|dx$ *de la valeur absolue de cette fonction converge, il en est de même de* $\int_a^c f(x)dx$.

Souvent on prend $\frac{1}{(c-x)^\alpha}$ comme fonction de comparaison. I1 est facile de voir que $\int_a^c \frac{1}{(c-x)^\alpha}dx$ converge pour $\alpha < 1$, diverge pour $\alpha > 1$.

Ceci concerne également les intégrales $\int_a^c \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx$

E x e m p l e 9. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}dx$ converge-t-elle ?

S o l u t i o n . La fonction à intégrer est discontinue à l'extrémité gauche du segment [0, 1]. On obtient, en la comparant à la fonction $\frac{1}{\sqrt{x}}$,

$$\frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}<\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ existe. Il en résulte que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}dx$, l'intégrale de la fonction donnée, qui est plus petite, existe aussi.

§ 8. Calcul approché des intégrales définies

Nous avons indiqué à la fin du chapitre X que la primitive d'une fonction continue arbitraire peut ne pas s'exprimer au moyen de fonctions élémentaires. Le calcul des intégrales définies par application de la formule de Newton-Leibniz est alors difficile et on a recours à diverses méthodes de calcul approché. Nous allons exposer maintenant plusieurs méthodes d'intégration a p p r o c h é e , en partant de la notion d'intégrale définie comme limite dune somme.

1. Formule des rectangles. Soit donnée sur le segment $[a, b]$ une fonction continue $y = f(x)$. On se propose de calculer l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)dx$$

Découpons le segment $[a, b]$ par les points $a = x_0, x_1, x_2, \ldots x_n = b$ en n parties égalés de longueur Δx :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Désignons ensuite par $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ les valeurs de la fonction aux points $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, soit

$$y_0 = f(x_0)\ ;\ y_1 = f(x_1)\ ;\ \ldots\ ;\ y_n = f(x_n)$$

Formons les sommes

$$y_0\,\Delta x + y_1\Delta x + \ldots + y_{n-1}\,\Delta x$$
$$y_1\,\Delta x + y_2\Delta x + \ldots + y_n\,\Delta x$$

Chacune de ces sommes est une somme intégrale pour la fonction $f(x)$ sur le segment $[a, b]$ et, par conséquent, représente approximativement l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \quad (1')$$

Ce sont les formules des rectangles. Il résulte de la fig. 227 que si $f(x)$ est une fonction positive croissante, la formule (1) représente l'aire des rectangles se trouvant sous la courbe $y = f(x)$ et (1') l'aire des rectangles empiétant sur la courbe.

L'erreur commise en calculant l'intégrale selon la formule des rectangles est d'autant plus petite que n est plus grand (c'est-à-dire que les segments partiels $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ sont plus petits).

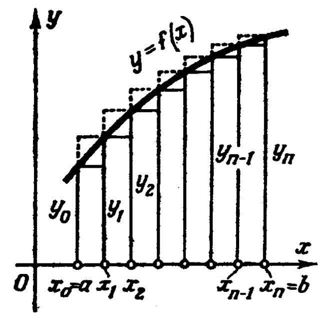


Fig. 227

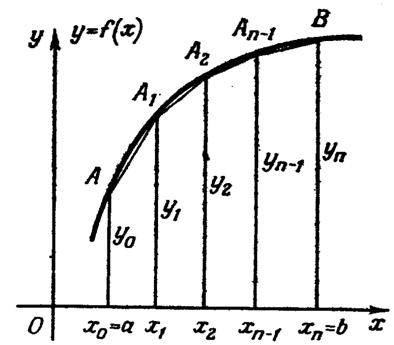


Fig.228

II. F o r m u l e d e s t r a p è z e s . Il est naturel d'espérer une valeur plus exacte de l'intégrale définie si l'on remplace la courbe donnée $y = f(x)$ non par une courbe en escalier, comme pour la formule des rectangles, mais par une ligne brisée i n s c r i t e (fig. 228). On prend alors au lieu de l'aire du trapèze curviligne $aABb$ la somme des aires de trapèzes rectangles dont les cordes AA_1, A_1A_2, . . ., $A_{n-1}B$ figurent parmi les côtés. Les aires de ces trapèzes étant successivement $\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x$, $\frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x$ etc., on a

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x\right), \quad (2)$$

C'est la formule des trapèzes.

Le nombre n est pris arbitrairement. Plus n est grand et plus les segments partiels $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ sont petits, plus précise est l'approximation fournie par l'expression du second membre de l'égalité approchée (2).

III. F o r m u l e d e s p a r a b o l e s (f o r m u l e d e S i m p s o n). Partageons le segment $[a, b]$ en un nombre pair $n = 2m$ de parties égales. Remplaçons l'aire du trapèze curviligne correspondant aux deux premiers segments $[x_0, x_1]$ et $[x_1, x_2]$ et délimité supérieurement par la courbe donnée $y = f(x)$ par celle d'un trapèze curviligne semblable délimité par u n e p a r a b o l e d u s e c o n d d e g r é passant par les trois points:

$$M(x_0, y_0)\ ;\ M_1(x_1, y_1)\ ;\ M_2(x_2, y_2),$$

et dont l'axe est parallèle à l'axe Oy (fig. 229). Nous appellerons un tel trapèze un trapèze parabolique.

L'équation d'une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe Oy s'écrit

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

On détermine les coefficients A, B, C univoquement de la condition que la parabole passe par les trois points donnés. On construit des paraboles analogues pour les autres paires de segments. La somme des aires des trapèzes paraboliques fournira une valeur approchée de l'intégrale.
Calculons d'abord l'aire d'un trapèze parabolique.
L e m m e. *Un trapèze curviligne délimité par la parabole*

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

l'axe Ox et deux droites parallèles à l'axe Oy et distantes de 2h a pour aire

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2), \quad (3)$$

où y_o et y_2 sont les ordonnées extrêmes et y_1 l'ordonnée de la courbe au milieu du segment.
D é m o n s t r a t i o n . Prenons les axes de coordonnées comme il est indiqué sur la fig. 230.

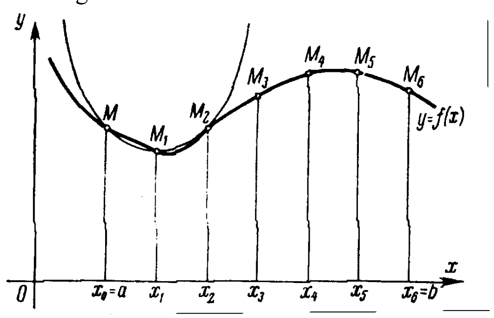


Fig. 229

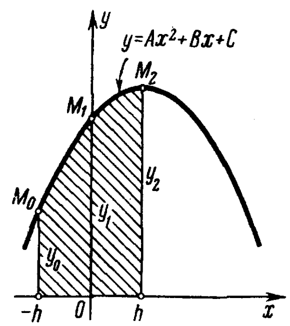


Fig. 230

On déduit les coefficients de la parabole $y = Ax^2 + Bx + C$ des équations suivantes

$$\left.\begin{array}{ll} x_0 = -h, & y_0 = Ah^2 - Bh + C; \\ x_1 = 0, & y_1 = C; \\ x_2 = h, & y_2 = Ah^2 + Bh + C \end{array}\right\} \quad (4)$$

Supposant les coefficients A, B, C connus, on calcule l'aire du trapèze parabolique au moyen de l'intégrale définie

$$S = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)$$

Mais il résulte de l'égalité (4)

$$y_o + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C.$$

Par conséquent,

$$S = \frac{h}{3}(y_o + 4y_1 + y_2)$$

c.q.f.d.
Revenons à notre problème initial (voir fig. 229). Utilisant la formule (3), on peut écrire les égalités approchées ($h = \Delta x$)

$$\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_o + 4y_1 + y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_o + 4y_1 + y_2),$$

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m=b}} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}),$$

Ajoutant membre à membre, on retrouve à gauche l'intégrale cherchée et à droite sa valeur approchée

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_o + 4y_1 + y_2 + 4\,y_3 + \ldots + 2y_{2m-2} + 4\,y_{2m-1} + y_{2m}),$$

ou bien

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}[\,y_o + y_{2m} + 2\,(\,y_2 + \,y_4 + \ldots + y_{2m-2}\,) + 4\,(y_1 + \,y_3 + \ldots + y_{2m-1}\,)].$$

C'est la *formule de Simpson*. Le nombre de points de division $2m$ est. arbitraire, mais plus il est grand et plus la somme clans le second membre de (5) donne une valeur exacte de l'intégrale [*]).
E x e m p 1 e . Calculer approximativement

$$\text{Log } 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

S o l u t i o n . Divisons le segment [1, 2] en 10 parties égales (fig. 231).
Posons

[*] Pour déterminer le nombre de points de division qu'il faut prendre pour calculer l'intégrale avec une précision donnée, on pourra utiliser des formules permettant d'évaluer l'erreur résultant du calcul approché de l'intégrale. Nous n'indiquerons pas ici ces évaluations.

$$\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0{,}1\,,$$

et formons le tableau des valeurs de la fonction sous le signe somme:

x	$y=\dfrac{1}{x}$	x	$y=\dfrac{1}{x}$
$x_o=1{,}0$	$y_0=1{,}00000$	$x_6=1{,}6$	$y_6=0{,}62500$
$x_1=1{,}1$	$y_1=0{,}90909$	$x_7=1{,}7$	$y_7=0{,}58824$
$x_2=1{,}2$	$y_2=0{,}83333$	$x_8=1{,}8$	$y_8=0{,}55556$
$x_3=1{,}3$	$y_3=0{,}76923$	$x_9=1{,}9$	$y_9=0{,}52632$
$x_4=1{,}4$	$y_4=0{,}71429$	$x_{10}=2{,}0$	$y_{10}=0{,}5$
$x_2=1{,}5$	$y_5=0{,}66667$		

1. On obtient d'après la première formule des rectangles (1)

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1(y_o + y_1 + \ldots + y_9) = 0{,}1\cdot 7{,}18773 = 0{,}71877.$$

On obtient d'après la seconde formule des rectangles (1')

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1(y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}) = 0{,}1\cdot 6{,}68773 = 0{,}66877.$$

Il résulte immédiatement de la fig. 231 que dans notre cas la première formule donne la valeûr de l'intégrale par excès et la seconde par défaut.

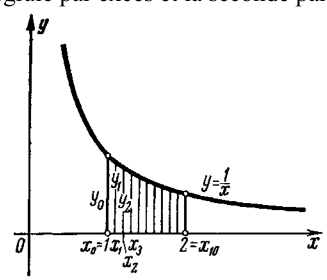


Fig. 231

II. On obtient d'après la formule des trapèzes (2)

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1\left(\frac{1+0{,}5}{2} + 6{,}18773\right) = 0{,}69377\,.$$

III. On a d'après la formule de Simpson (5)

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1\left[y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)\right] =$$

$$\frac{0{,}1}{3}(1 + 0{,}5 + 2\cdot 2{,}7818 + 4\cdot 3{,}45955) = 0{,}69315\,.$$

En réalite, Log 2 = $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ = 0,6931472 (à la septième décimale près).

Par conséquent, en divisant le segment [0, 1] en dix parties égales, la formule de Simpson donne cinq décimales exactes ; la formule des trapèzes seulement trois, et nous ne pouvons répondre que de la première décimale lorsqu'on applique la formule des rectangles.

§ 9. Formule de Tchébychev

Dans les calculs techniques, on a souvent recours à la formule d'intégration approchée de Tchébychev.

Soit encore à calculer $\int_a^b f(x)dx$.

Remplaçons la fonction sous le signe somme par les polynômes d'interpolation de Lagrange $P(x)$ (§ 9, ch. VII) en prenant sur le segment $[a, b]$ n certaines valeurs de la fonction : $f(x_1), f(x_1), \ldots, f(x_n)$, où $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sont des points arbitraires du segment $[a, b]$

$$P(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)} f(x_1) +$$
$$\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)} f(x_2) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_n-x_1)(x_n-x_3)\ldots(x_n-x_{n-1})} f(x_n)$$

On obtient la formule suivante d'intégration approchée

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx$$

qui, après des calculs, prend la forme

$$\int_a^b f(x)dx \approx C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n) \qquad (3)$$

où les coefficients C_i sont donnés par les formules

$$C_i = \int_a^b \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}dx \qquad (4)$$

La formule (3) est lourde et incommode pour les calculs, étant donné que les coefficients Ci s'expriment en fonction de fractions compliquées.

Tchébychev a posé le problème inverse : se donner non pas les abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mais les coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_n$ et déterminer les abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

On prend les coefficients C_i de manière que la formule (3) soit la plus simple possible pour les calculs. Il en est év idemment ainsi quand tous les C_i sont égaux

$$C_1 = C_1 = \ldots = C_n.$$

Désignant la valeur commune des coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_n$ par C_n, la formule (3) devient

$$\int_a^b f(x)dx \approx C_n\left[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right] \; . \qquad (5)$$

La formule (5) représente, en général, une égalité a p p r o c h é e , mais si $f(x)$ est un polynôme de degré non supérieur à n - 1, on a alors une égalité e x a c t e . C'est cette circonstance qui permet de déterminer les quantités $C_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Afin d'obtenir une formule qui convienne à tout intervalle d'intégration, ramenons le segment d'intégration $[a, b]$ au segment $[-1, 1]$. Posons à cet effet

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t \; ;$$

on aura alors $x = a$ pour $t = -1$ et $x = b$ pour $t = 1$. Par conséquent,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\varphi(t)dt \; ,$$

où l'on a désigné par $\varphi(t)$ la fonction de t sous le signe somme. Par conséquent, l'intégration d'une fonction $f(x)$ donnée sur un segment $[a, b]$ peut toujours être ramenée à l'intégration d'une autre fonction $\varphi(x)$ sur le segment $[-1, 1]$.

Ainsi, le problème revient à choisir les nombres $C_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$. dans la formule

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx C_n\left[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right] \qquad (6)$$

de manière que cette formule soit exacte pour toute fonction $f(x)$ de la forme

$$f(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

Remarquons que

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1})dx =$$

$$= \begin{cases} 2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n}\right) & \text{si } n \text{ est impair;} \\ 2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{n-1}\right) & \text{si } n \text{ est pair;} \end{cases} \qquad (8)$$

Par ailleurs, compte tenu de (7), la somme du second membre de l'égalité (6) est égale à

$$C_n\left[\, na_o + a_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + a_2(x^2_1 + x^2_2 + \ldots + x^2_n) + \ldots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_{n1}^{n-1})\,\right]$$

Egalant les expressions (8) et (9), on obtient une égalité qui doit être vraie quels que soient $a_o, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$

$$2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \ldots\right) = C_n\left[\, na_o + a_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + a_2(x^2_1 + x^2_2 + \ldots + x^2_n) + \ldots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_{n1}^{n-1})\,\right]$$

Egalons les coefficients de $a_o, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ dans les deux membres

$$\left.\begin{aligned} & 2 = C_n n \text{ ou } C_n = \frac{2}{n}; \\ & x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0; \\ & x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \frac{2}{3C_n} = \frac{n}{3}; \\ & x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 0; \\ & x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4 = \frac{2}{5C_n} = \frac{n}{5}; \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

On déduit les abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de ces n – 1 dernières équations. Ces solutions ont été trouvées par Tchébychev pour diverses valeurs de n. Nous donnons ci-dessous les solutions qu'il a trouvées lorsque le nombre de points de division n est égal à 3, 4, 5, 6, 7, 9:

Nombre d'ordonnées n	Coefficients C_n	valeurs des abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_n$
3	$\frac{2}{3}$	$x_1 = - x_3 = 0,707107$ $x_1 = 0$
4	$\frac{1}{2}$	$x_1 = - x_4 = 0,794654$ $x_1 = - x_3 = 0,187592$
5	$\frac{2}{5}$	$x_1 = - x_5 = 0,832498$ $x_2 = - x_4 = 0,374541$ $x_3 = 0$
6	$\frac{1}{3}$	$x_1 = - x_6 = 0,832498$ $x_2 = - x_5 = 0,422519$ $x_3 = - x_5 = 0,266635$
7	$\frac{2}{7}$	$x_1 = - x_6 = 0,883862$ $x_2 = - x_5 = 0,529657$ $x_3 = - x_5 = 0,323912$ $x_4 = 0$
9	$\frac{2}{9}$	$x_1 = - x_9 = 0,911589$ $x_2 = - x_8 = 0,601019$ $x_3 = - x_7 = 0,528762$ $x_4 = - x_6 = 0,167906$ $x_5 = 0$

Par conséquent, on effectuera le calcul approché de l'intégrale sur le segment [-1, 1] en appliquant la formule suivante de Tchébychev

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{2}{n}\,[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]$$

où n est choisi dans le groupe 3, 4, 5, 6, 7, 9 et $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sont représentés dans le tableau. On ne peut prendre pour n le nombre 8 ou des nombres supérieurs à 9 ; le système d'équations (10) donne alors des racinés complexes.

Lorsque les bornes d'intégration de l'intégrale donnée sont a et b, la formule de Tchébychev devient

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\,[f(X_1) + f(X_2) + \ldots + f(X_n)]$$

où $X_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), et les x_i ont les valeurs données dans le tableau.

Donnons un exemple de calcul par application de la formule de Tchébychev.

E x e m p l e . Calculer $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ (=Log 2).

S o l u t i o n . Ramenons par un changement de variable le segment d'intégration au segment [-1, 1]

$$x = \frac{1+2}{2} + \frac{2-1}{2} t = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} = \frac{3+t}{2},$$

$$dx = \frac{dt}{2}.$$

Et

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{3+t}$$

Calculons cette dernière intégrale avec $n = 3$, en appliquant la formule de Tchébyohev

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{2}{3}\,[f(0,707107) + f(0) + f(-0,707107)]$$

Etant donné que

$$f(0,707107) = \frac{1}{3+0707107} = \frac{1}{3,707107} = 0,269752$$

$$f(0) = \frac{1}{3+0} = 0,333333,$$

$$f(-0,707107) = \frac{1}{3-0,707107} = \frac{1}{2,292893} = 0,436130$$

on a

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{2}{3}\,(0,269752 + 0,333333 + 0,436130) = 0,692810$$

Comparant ce résultat aux résultats fournis par les formules des rectangles, des trapèzes et de Simpson (voir l'exemple du paragraphe précédent), on remarque que le résultat obtenu par application de la formule de Tchébychev (avec trois points de division) est.plus précis que le résultat obtenu par application de la formule des trapèzes (avec neuf points de division).

Indiquons que la théorie du calcul approché des intégrales a été développée dans les travaux de A. Krylov (1863-4945).

§ 10. Intégrales dépendant d'un paramètre. Fonction gamma

Dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre. Soit l'intégrale

$$I(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx \qquad (1)$$

dans laquelle la fonction sous le signe somme dépend d'un certain paramètre α. Si le paramètre α varie, la valeur de l'intégrale variera aussi. Il en résulte que l'intégrale définie est fonction de α ; on pourra donc la désigner par $I(\alpha)$.

1. Supposons que $f(x, \alpha)$ et $f'_\alpha(x, \alpha)$ soient des fonctions continues lorsque

$$c \le a \le d \text{ et } a \le x \le b. \qquad (2)$$

Trouvons la dérivée de l'intégrale par rapport à α

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=I'(\alpha)$$

Remarquons à cet effet que

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\frac{1}{\Delta\alpha}\left[\int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_a^b f(x,\alpha)dx\right]=$$

$$=\int_a^b \frac{f(\alpha+\Delta\alpha)-f(\alpha)}{\Delta\alpha}dx$$

Appliquons la formule des accroissements finis de Lagrange à la fonction sous le signe somme ; on obtient

$$\frac{f(\alpha+\Delta\alpha)-f(\alpha)}{\Delta\alpha}=f'_\alpha(x, \alpha+\theta\,\Delta\alpha)$$

où $0 < \theta < 1$.

Etant donné que $f'_\alpha(x, \alpha)$ est continue dans le domaine fermé (2), on a

$$f'_\alpha(x, \alpha+\theta\,\Delta\alpha)=f'_\alpha(x, \alpha)+\varepsilon,$$

où la quantité ε, dépendant de x, α, Δα , tend vers zéro lorsque $\Delta\alpha \to 0$.

De sorte que

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b [f'_\alpha(x,\alpha)+\varepsilon]dx=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx+\int_a^b \varepsilon\, dx$$

Passant à la limite, en faisant $\Delta\alpha \to 0$, on obtient *)

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=I'_\alpha(\alpha)=\int_a^b f'_a(x,\alpha)dx$$

ou

$$\left[\int_a^b f(x,\alpha)dx\right]'_\alpha=\int_a^b f'_a(x,\alpha)dx$$

C'est la *formule de Leibniz*.

2. Supposôns à present que les bornes d'intégration a et b dans (1) soient des fonctions de α:

$$I(\alpha)=\Phi[\alpha, a(\alpha), b(\alpha)]=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx \qquad (1')$$

$\Phi[\alpha, a(\alpha), b(\alpha)]$ est une fonction composée de α, par l'intermédiaire de a et b. Pour trouver la dérivée de $I(\alpha)$, appliquons la régle de dérivation des functions composées (voir § 10, ch. VIII)

$$I'(\alpha)=\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial a}\frac{da}{d\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial b}\frac{db}{d\alpha}$$

En vertu du théorème de dérivation d'une intégrale définie par rapport à sa borne supérieure variable (voir formule (1), § 4), on obtient

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b}=\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x,\alpha)dx=f[b(\alpha),\alpha]$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x,\alpha)dx=-\int_b^a f(x,\alpha)dx=-f[a(\alpha),\alpha]$$

Enfin, pour calculer $\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$ utilisons la formule de Leibniz établie ci-dessus

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx.$$

On obtient en substituant dans la formule (3) les expressions obtenues des dérivées

---

* La function sous le signe somme dans l'intégrale $\int_a^b \varepsilon\, d\alpha$ tend vers zero lorsque $\Delta\alpha \to 0$. Du fait que la fonction sous le signe somme tend en chaque point vers zéro, il ne découle pas forcément que l'intégrale tende aussi vers zéro. Cependant, dans le cas donné $\int_a^b \varepsilon\, dx$ tend vers zéro lorsque $\Delta\alpha \to 0$. Nous l'admettrons sans demonstration.

$$I'_\alpha(\alpha) = \int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)dx + f[b(\alpha),\alpha]\frac{db}{d\alpha} - f[a(\alpha),\alpha]\frac{da}{d\alpha} \qquad (4)$$

La formule de Leibniz permet de calculer certaines intégrales définies.
E x e m p l e 1. Calculer l'intégrale

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx\,.$$

S o l u t i o n . Remarquons d'abord qu'on ne peut calculer directement cette intégrale, étant donné que la primitive de la fonction $e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}$ ne s'exprime pas au moyen des functions élémentaires. Pour calculer cette intégrale, on la considérera comme fonction du paramètre α

$$I(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$$

On calcule alors sa dérivée par rapport à a en appliquant la formule de Leibniz *) ;

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^\infty \left[e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}\right]'_\alpha dx = \int\limits_0^\infty e^{-x}\cos\alpha x\,dx$$

Mais cette dernière intégrale se calcule aisément au moyen des fonctions élémentaires ; on obtient $\frac{1}{1+\alpha^2}$. par conséquent,

$$I'(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2}$$

On trouve $I(\alpha)$, en intégrant l'identité trouvée

$$I(\alpha) = \text{arc tg}\,\alpha + C. \qquad (5)$$

Reste à déterminer C. Remarquons à cet effet que

$$I(0)\int\limits_0^\infty e^{-x}\frac{\sin 0\cdot x}{x}dx = \int\limits_0^\infty 0dx = 0$$

Par ailleurs, arc tg 0 = 0.
Substituant α = 0 dans l'égalité (5), on trouve:

$$I(0) = \text{arc tg}\,0 + C,$$

---

* On a établi la formule de Leibniz en supposant ue les bornes d'intégration a et b étaient finies. Toutefois, la formule de Leibniz convient dans le cas present, bien qu'une des bornes d'intêgration soit infinie.

donc $C = 0$. On a donc pour toute valeur de α l'égalité suivante

$$I(\alpha) = \text{arc tg}\,\alpha$$

c'est-à-dire

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx = \text{arc tg}\,\alpha,$$

E x e m p l e 2. Fonction gamma.
Considérons l'intégrale dépendant du paramètre α

$$\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx \qquad (6)$$

Montrons que cette intégrale impropre existe (converge) pour α > 0. Mettons-la sous forme de la somme

$$\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx + \int\limits_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

La première intégrale du second membre converge, car

$$0 < \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx < \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha}\,.$$

La seconde intégrale converge aussi. En effet, soit n un nombre entier tel que $n > \alpha - 1$. I1 est alors évident que

$$0 < \int\limits_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx < \int\limits_1^\infty x^n e^{-x}dx < \infty$$

Cette dernière intégrale se calcule par intégration par parties en tenant compte du fait que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^x} = 0 \qquad (7)$$

pour tout k entier positif. Ainsi l'intégrale (6) définit une certaine fonction α.
Elle est appelée *fonction gamma* et notée r (α)

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx \qquad (8)$$

Cette fonction est fréquemment utilisée dans les applications des mathématiques. Trouvons la valeur de r (α) pour α entier. Pour α = 1 nous avons

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}dx = 1 \qquad (9)$$

Supposons que $\alpha > 1$ est un entier. Intégrons par parties:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx = -x^{\alpha-1}e^{-x}\Big|_0^\infty + (\alpha-1)\int_0^\infty x^{\alpha-2}e^{-x}dx$$

ou, compte tenu de (7),

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\,\Gamma(\alpha - 1). \qquad (10)$$

En vertu de (10) et (9) nous trouvons pour $\alpha = n$

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \qquad (11)$$

§ 11. Intégration d'une fonction complexe de la variable réelle

Nous avons défini au § 4 ch. VII la fonction complexe $\tilde{f}(x) = u(x) + iv(x)$ de la variable réelle x et sa dérivée $\tilde{f}'(x) = u'(x) + iv'(x)$.

D é f i n i t i o n . La fonction $\tilde{F}(x) = U(x) + iV(x)$ est appelée *la primitive de la fonction complexe de la variable réelle* $\tilde{f}(x)$, si

$$\tilde{F}'(x) = \tilde{f}(x), \quad (1)$$

c'est-à-dire si

$$U'(x) + iV'(x) = u(x) + iv(x). \qquad (2)$$

Il découle de l'égalité (2) que $U'(x) = u(x)$, $V'(x) = v(x)$, autrement dit $U(x)$ est la primitive de $u(x)$ et $V(x)$ la primitive de $v(x)$.

Il découle de la définition et de cette remarque que si $\tilde{F}(x) = U(x) + iV(x)$ est la primitive de la fonction $\tilde{f}(x)$, alors toute primitive de $\tilde{f}(x)$ est de la forme $\tilde{F}(x) + C$, où C est une constante complexe arbitraire. Nous appellerons l'expression $\tilde{F}(x) + C$ l'*intégrale indéfinie de la fonction complexe de la variable réelle* et nous écrirons

$$\int \tilde{f}(x)dx = \int u(x)dx + i\int v(x)dx = \tilde{F}(x) + C. \qquad (3)$$

L'intégrale définie de la fonction complexe de la variable réelle $\tilde{f}(x) = u(x) + iv(x)$ sera définie ainsi

$$\int_a^b \tilde{f}(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx \qquad (4)$$

Cette définition ne contredit pas, mais est entièrement conforme à la définition de l'intégrale définie en tant que limite d'une somme.

Exercices

1. Calculer les intégrales définies suivantes, en les considérant comme des limites de sommes intégrales s_n $\int_a^b x^2dx$. I n d i c a t i o n . Découper le segment $[a, b]$ en n parties par les points $x_i = aq^i$ ($i = 0, 1, 2, ..., n$), où $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. Rép. $\frac{b^3 - a^3}{3}$.
2. . $\int_a^b \frac{dx}{x}$, où $0 < a < b$. Rép. Log $\frac{b}{a}$. I n d i c a t i o n . Découper le segment $[a, b]$ comme dans l'exemple précédent.
3. $\int_a^b \sqrt{x}dx$ Rép. $\frac{2}{3}(b^{3/2} - a^{3/2})$. I n d i c a t i o n . Voir l'exemple précédent.
4. $\int_a^b \sin x\,dx$. Rép. cos a – cos b. I n d i c a t i o n . Etablir préalablement l'identité suivante $\sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + ... + \sin[a+(n-1)h] = \frac{\cos(a-h) - \cos(a+nh)}{2\sin h}$ il faut, à cet effet, multiplier et diviser tous les termes du premier membre par sin h et remplacer les produits de sinus par des différences de cosinus.
5. $\int_a^b \cos x\,dx$. Rép. $\sin b - \sin a$.

Utiliser la formule de Newton-Leibniz pour calculer les intégrales définies

6. $\int_0^1 x^4dx$. Rép. $\frac{1}{5}$.
7. $\int_0^1 e^x dx$. Rép. $e - 1$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$. Rép. 1.
9. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Rép. $\frac{\pi}{4}$.
10. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Rép. $\frac{\pi}{4}$.
11. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\,dx$. Rép. Log 2.

12. $\int_1^e \frac{dx}{x}$. Rép. 1.

13. $\int_1^x \frac{dx}{x}$ Rép. Log x.

14. $\int_0^x \sin x\, dx$. Rép. 2 $\sin^2 \frac{x}{2}$.

15. $\int_{\sqrt[3]{a}}^x x^2 dx$. Rép. $\frac{x^3 - a}{3}$

16. $\int_1^z \frac{dx}{2x-1}$. Rép. Log $(2z - 1)$.

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$. Rép. $\frac{\pi}{4}$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$. Rép $\frac{\pi}{4}$.

Calculer les intégrales suivantes en faisant les changements de variable indiqués :

19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\, dx$, $\cos x = t$. Rep. $\frac{1}{3}$

20. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$, tg $\frac{x}{2} = t$. Rép. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$

21. $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$, $2+4x = t^2$. Rép. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

22. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, $x =$ tg t. Rép. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

23. $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$, $x - 1 = t^2$. Rép. 2 (2 – arc tg 2).

24. $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dz}{s\sqrt{z^2+1}}$, $z = \frac{1}{2}$. Rép. Log $\frac{3}{2}$

25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi\ d\varphi}{6 - 5\sin\varphi + \sin^2\varphi}$, $\sin\varphi = t$. Rép. Log $\frac{4}{3}$

Montrer que

26. $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$ $(m > 0, n > 0)$.

27. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

28. $\int_0^a f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^a f(x^2)dx$.

Calculer les intégrales impropres suivantes (bornes infinies ou singularité de la fonction à intégrer):

29. $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Rép. 1

30. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$. Rép. 1

31. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$. Rép. $\frac{\pi}{2a}$ $(a > 0)$.

32. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Rép. $\frac{\pi}{2}$.

33. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5}$. Rep. $\frac{1}{4}$

34. $\int_0^1 \text{Log}\, x\, dx$. Rép . -1.

35. $\int_0^{\infty} x \sin x\, dx$. Rép. L'intégrale diverge.

36. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Rép. L'intégrale diverge.

37. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. Rép. π.

38. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. Rép. $\frac{3}{2}$

39. $\int_0^2 \frac{dx}{x^3}$. Rép. L'intégrale diverge.

40. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. Rép. $\frac{\pi}{2}$.

41. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$. Rép. L'intégrale diverge.

42. $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx\ dx$ $(a > 0)$. Rép. $\frac{b}{a^2+b^2}$

43. $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx\ dx$ $(a > 0)$. Rép. $\frac{a}{a^2+b^2}$

Calculer les valeurs approchées des intégrales

44. Log 5= $\int_1^5 \frac{dx}{x}$ par application de la formule des trapèzes et de la formule de Simpson (n=12). Rép. 1,6182 (d'après la formule des trapèzes); 1,6098 (Simpson).

45. $\int_1^{11} x^3 dx$ d'après la formule des trapèzes et la formule de Simpson (n=10).Rép. 3690 ; 3660.

46. $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx$ d'après la formule des trapèzes (n = 6). Rép. 0,8109.

47. $\int_1^3 \frac{dx}{2x-1}$ d'après la formule de Simpson (n = 4). Rép. 0,8111.

48. $\int_1^{10} \log_{10} x\,dx$ d'après la formule des trapèzes et la formule de Simpson (n = 10). Rép. 6,0656 ; 6,0896.

49. Calculer la valeur de π en partant de ce que $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, par application de la formule de Simpson (n = 10). Rép. 3,14159.

50. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ d'après la formule de Simpson (n = 10). Rép. 1,371.

51. En partant de l'égalité $\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$, où $\alpha > 0$, trouver pour l'entier $n > 0$ la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x} x^n dx$. Rép. n!.

52. Partant de l'égalité $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$, trouver la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$ Rép. $\frac{\pi}{2}\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n n!}$

53. Calculer l'intégrale $\int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x} dx$. Rép. Log (1+ α) ($\alpha > -1$).

54. Se servir de l'égalité $\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$ pour calculer l'intégrale $\int_0^1 x^{n-1} (\text{Log}\, x)^k\, dx$. Rép. $(-1)^k \frac{k!}{n^{k+1}}$.

Chapitre XII APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES ET MÉCANIQUES DE L'INTÉGRALE DÉFINIE

§ 1. Calcul des aires en coordonnées rectangulaires

Si la fonction $f(x) > 0$ sur le segment $[a, b]$, on sait que (§ 2, ch. XI) l'aire du trapèze curviligne formé par la courbe $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$ (fig. 214) est donnée par

$$Q = \int_a^b f(x)dx . \quad (1)$$

Si $f(x) \le 0$ sur $[a, b]$, l'intégrale définie s $f(x)$ dx est aussi ≤ 0.

Sa valeur absolue est égale à l'aire Q du trapèze curviligne correspondant:

$$- Q = \int_a^b f(x)dx .$$

Si $f(x)$ change un nombre fini de fois de signe sur le segment $[a, b]$, on décomposera l'intégrale sur $[a, b]$ en intégrales partielles.

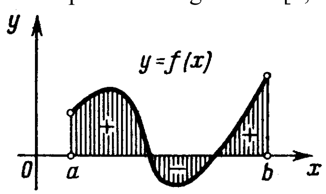


Fig. 232

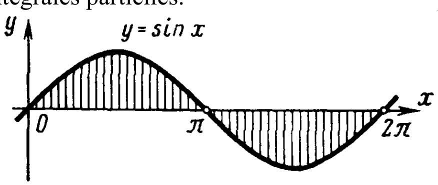


Fig. 233

L'intégrale est positive sur les segments où $f(x) \ge 0$ et négative sur ceux où $f(x) \le 0$. L'intégrale sur le segment tout entier représente la différence des aires se trouvant de part et d'autre de l'axe Ox (fig. 232). Pour obtenir la somme des aires au sens ordinaire, il faut trouver la somme des valeurs absolues des intégrales sur les intervalles partiels indiqués ou bien calculer l'intégrale

$$Q = \int_a^b | f(x) | dx .$$

E x e m p l e 1. Calculer l'aire Q délimitée par la sinusoïde $y = \sin x$ et l'axe Ox lorsque $0 \le x \le 2\pi$ (fig. 233).

S o l u t i o n . Etant donné que $\sin x \ge 0$ pour $0 \le x \le \pi$ et $\sin x \le 0$ pour $\pi < x \le 2\pi$, on a

$$Q = \int_0^\pi \sin x \, dx + \left| \int_\pi^{2\pi} \sin x \, dx \right| \int_0^{2\pi} | \sin x | \, dx ,$$

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$$

$$\int_\pi^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos \Big|_\pi^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos\pi) = -2$$

Par conséquent, $Q = 2 + | -2 | = 4$.

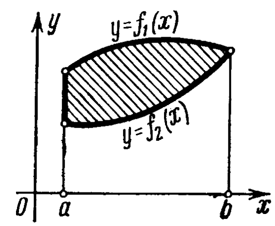


Fig. 234

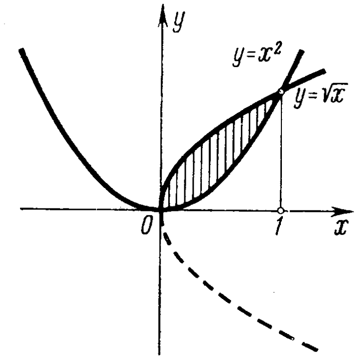


Fig. 235

S'il faut calculer l'aire délimitée par les courbes $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ et les droites $x = a$, $x = b$ avec la condition $y = f_1(x) \ge y = f_2(x)$, on aura évidemment (fig. 234)

$$Q = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx . \qquad (2)$$

E x e m p l e 2. Calculer l'aire délimitée par les courbes (fig. 235)

$$y = \sqrt{x} \text{ et } y = x^2.$$

S o l u t i o n . Trouvons les points d'intersection des courbes : $\sqrt{x} = x^2$, $x = x^4$, d'où $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Par conséquent,

$$Q = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} .$$

Calculons maintenant l'aire du trapèze curviligne délimité par la courbe d'équations paramétriques (fig. 236)

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \qquad (3)$$

où

$$\alpha \le t \le \beta.$$

et

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$$

Supposons que la courbe définie par les équations (3) puisse être mise encore sousla forme $y = f(x)$ avec le segment [a, b) pour domaine de définition. On pourra calculer alors l'aire comme suit

$$Q = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b y\, dx\,.$$

Faisons le changement de variable

$$x = \varphi(t);\ dx = \varphi'(t)dt.$$

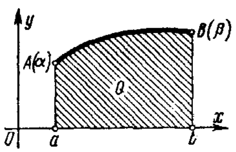


Fig. 236

On a, eu égard aux équations (3)

$$y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t)$$

Par conséquent,

$$Q = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (4)$$

Telle est la formule permettant de calculer l'aire d'un trapèze curviligne délimité supérieurement par une courbe en coordonnées paramétriques.

E x e m p l e 3. Calculer l'aire du domaine délimité par l'ellipse

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t.$$

Solution. Calculons l'aire délimitée par la demi-ellipse supérieure et doublons le résultat obtenu. Ici x varie entre $-a$ et $+a$; par conséquent, t varie de π à 0,

$$Q = 2\int_\pi^0 (b\sin t)(-a\sin t\, dt) = -2ab\int_\pi^0 \sin^2 t\, dt = 2ab\int_0^\pi \sin^2 t\, dt =$$

$$= 2ab\int_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}dt = 2ab\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^\pi = \pi ab\,.$$

E x e m p l e 4. Calculer l'aire délimitée par l'axe Ox et un arc de la cycloïde

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

S o l u t i o n . Lorsque t varie de 0 à 2π, x varie de 0 à $2\pi a$. On obtient en appliquant la formule (4)

$$Q = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\, dt =$$

$$= a^2\left[\int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi}\cos t\, dt + \int_0^{2\pi}\cos^2 t\, dt\right];$$

$$\int_0^{2\pi} dt = 2\pi; \quad \int_0^{2\pi}\cos t\, dt = 0; \quad \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = \pi$$

On obtient finalement

$$Q = a^2(2\pi + \pi) = 3\pi a^2.$$

§ 2. Aire d'un secteur curviligne en coordonnées polaires

Soit

$$\rho = f(\theta)$$

l'équation d'une courbe en coordonnées polaires, où $f(\theta)$ est une fonction continue lorsque $\alpha \le \theta \le \beta$.

Déterminons l'aire du secteur OAB délimitée par la courbe $\rho = f(\theta)$ et les rayons vecteurs $\theta = \alpha$ et $\theta = \beta$.

Découpons l'aire donnée en n parties par les rayons $\theta_o = \alpha$, $\theta = \theta_1, \ldots, \theta_n = \beta$. Désignons par $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \ldots, \Delta\theta_n$ les angles formés par ces rayons (fig. 237).

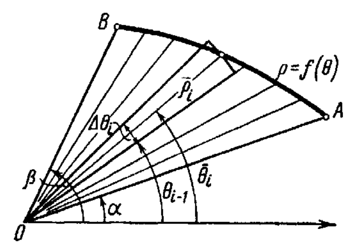


Fig. 239

Désignons par $\bar\rho_i$ la _longueur du rayon vecteur correspondant à un angle quelconque $\bar\theta_i$, compris entre θ_{i-1} et θ_i.

Considérons le secteur circulaire de rayon $\bar\rho_i$ et d'angle au centre $\Delta\theta_i$. Son aire est

$$\Delta Q_i = \frac{1}{2}\bar\rho_i^{\,2}\Delta\theta_i$$

La somme

$$Q_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \bar\rho_i^{\,2}\Delta\theta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left[f(\bar\theta_i)\right]^2\Delta\theta_i$$

donne l' aire du secteur en « escalier ».

Cette somme étant une somme intégrale de la fonction $\rho^2 = [f(\theta)]^2$ sur le segment $\alpha \le \theta \le \beta$, sa limite lorsque max $\Delta\theta_i \to 0$ donne l'intégrale définie

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\theta\,.$$

Elle ne dépend pas du rayon vecteur $\bar{\rho}_i$ choisi dans l'angle $\Delta\theta_i$. Il est naturel de considérer que cette limite représente l'aire cherchée [*]).

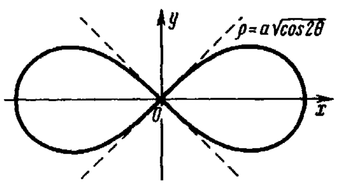


Fig. 238

Ainsi, l' aire du secteur OAB est égale à

$$Q=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta \qquad (1)$$

ou

$$Q=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\theta)]^2 d\theta . \qquad (1')$$

E x e m p l e . Calculer l'aire intérieure à la lemniscate $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ (fig. 238).

S o l u t i o n . Le rayon vecteur balaie le quart de l'aire cherchée lorsque θ varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{1}{4}Q=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2 d\theta=\frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\, d\theta=\frac{a^2}{2}\left.\frac{\sin 2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{2},$$

par conséquent, l'aire intérieur à la lemniscate sera

$$Q=a^2$$

§3. Longueur d'un arc de courbe

1. L o n g u e u r d ' u n a r c d e c o u r b e e n c o o r d o n n é e s c a r t é s i e n n e s . Soit $y=f(x)$ l'équation d'une courbe plane en coordonnées rectangulaires.

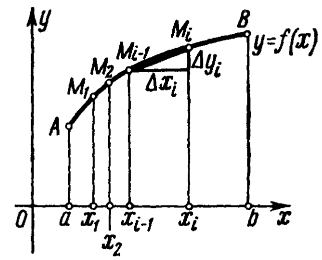
Cherchons la longueur de l'arc AB de cette courbe comprise entre les verticales $x=a$ et $x=b$ (fig. 239).

On a donné au chapitre VI (§1) la définition de la longueur d'un arc de courbe. Rappelons la. Prenons sur l'arc AB des points A, M_1, M_1, . . . , M_i, . . . , B d'abscisses $x_0 = a$, x_1, x_2, . . . x_i, . . . , $b = x_n$ et menons les cordes AM_1, M_1M_2, . . .M_{n-1} B, dont nous désignerons les longueurs pa Δs_1, Δs_2, . . , Δs_n. On obtient

[*] On pourrait montrer que cette définition de l'aire ne contredit pas celle donnée précédemment ; en d'autres termes, calculant l'aire du secteur curviligne au moyen de trapèzes curvilignes on retrouverait le même résultat.

alors la ligne polygonale AM_1M_2, . . $M_{n-1}B$ incrite dans l'arc AB. La longueur de cette ligne polygonale est

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i ,$$



On appelle *longueur s* de l'arc AB la limite vers laquelle tend la longueur de la ligne polygonale inscrite lorsque la plus grande corde tend vers zéro :

$$s=\lim_{\max \Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i \qquad (1)$$

Nous allons montrer maintenant que si la foncyion $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ sont continues sur le segment $a \le x \le b$, cette limite existe. Chemin faisant, on aura donné en même temps un procédé de calcul de la longueur d'un arc.

Introduisons la notation :

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(y_{i-1}).$$

Alors

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i .$$

D'après la formule des accroissements finis

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f'(\xi_i)$$

où

$$x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

par conséquent

$$\Delta s_i = \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i .$$

De sorte que la longueur de la ligne polygonale inscrite est

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i$$

La fonction $f'(x)$ étant continue par hypothèse, il en est de même de $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$. Il en résulte que la somme intégrale a une limite qui est égale à l'intégrale définie:

$$s=\lim_{\max \Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_1)]^2}\,\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx .$$

Ainsi, on a trouvé pour le calcul des arcs la formule

$$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\,. \qquad (2)$$

R e m a r q u e . 1. On peut obtenir en part`ant'de cette dernière formule la dérivée de l'arc par rapport à l'abscisse. Si l'on suppose que la borne supérieure d'intégration est variable et si on la désigne par x (nous ne changerons pas la variable d'intégration), la longueur de l'arc s sera une fonction de x:

$$s=\int_a^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Dérivant cette intégrale par rapport à la borne supérieure, on obtient:

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (3)$$

Cette formule a été établie au § 1, ch. VI sous certaines autres hypothèses.

E x e m p l e 1. Chercher la longueur de la circonférence

$$x^2+y^2=r^2$$

S o l u t i o n . Calculons d'abord la longueur du quart de circonférence dans le premier quadrant. L'équation de cette portion d'arc s'écrit

$$y=\sqrt{r^2-x^2}\,.$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{4}s=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx=\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=r\arcsin\frac{x}{r}\bigg|_0^r=r\frac{\pi}{2}$$

La longueur de la circonférence tout entière est $s=2\pi r$.

Cherchons maintenant la longueur d'un arc de courbe lorsque la courbe est donnée par des équations paramétriques

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ (\alpha<t<\beta), \qquad (4)$$

oû $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont des fonctions continues douées de dérivées également continues, et $\varphi'(t)$ ne s'annule pas sur le segment considéré. Dans ces conditions, les équations (4) déterminent une certaine fonction $y=f(x)$ continue avec sa dérivée

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\,.$$

Soit $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$.

Faisant alors dans l'intégrale (2) la substitution

$$x=\varphi(t),\ dx=\varphi'(t)\,dt,$$

on obtient

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\,\varphi'(t)dt$$

ou, en définitive, s

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt\,. \qquad (5)$$

R e m a r q u e 2. On démontre que la formule (5) reste en vigueur pour des courbes qui sont coupées par des verticales en plus d'un point (notamment pour des courbes fermées), pourvu que les deux dérivées $\varphi'(t)$ et $\psi'(t)$ soient continues en tout point de la courbe.

E x e m p l e 2. Calculer la longueur de l'hypocycloïde (astroïde)

$$x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t\,.$$

S o l u t i o n . La courbe étant symétrique relativement aux deux axes de coordonnées, calculons d'abord le quart de la longueur de cette courbe se trouvant dans le premier quadrant. On trouve:

$$\frac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t.$$

Le paramètre t variera de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Par conséquent,

$$\frac{1}{4}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\,dt=$$

$$=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=3a\frac{\sin^2 t}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3a}{2};\qquad s=6a$$

R e m a r q u e 3. Si l'on a une courbe g a u c h e définie par des équations paramétriques

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t), \qquad (6)$$

où $\alpha\le t\le\beta$ (voir § 1, ch. IX), on définit sa longueur (comme pour une courbe plane) comme la limite d'une ligne polygonale inscrite lorsque la plus grande corde tend vers zéro. Si les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ et $\chi(t)$ sont continues avec leurs dérivées sur le segment [a, P1, la courbe a une longueur déterminée (c'est-àdire la limite indiquée ci-dessus existe) donnée par la formule

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt$$

Nous admettrons ce résultat sans démonstration.

E x e m p l e 3. Calculer la longueur de l'arc d'hélice

$$x = a \cos t,\ y = a \sin t,\ z = amt$$

correspondant à t entre 0 et 2π.

S o l u t i o n . On déduit des équations données

$$dx = -a \sin t\, dt,\ dy = a \cos t\, dt,\ dz = am\, dt.$$

On trouve en substituant dans la formule (7)

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos t + a^2 m^2}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1+m^2}\, dt = 2\pi a\sqrt{1+m^2}\ .$$

2. L o n g u e u r d'u n a r c d e c o u r b e e n c o o r d o n n é e s p o l a i r e s . Soit

$$\rho = f(\theta)\ (8)$$

l'équation d'une courbe en coordonnées polaires, ρ étant le rayon polaire et 0 l'angle polaire.

Les coordonnées rectangulaires s'expriment au moyen des coordonnées polaires

$$x = \rho \cos \theta,\ y = \rho \sin \theta.$$

Si l'on remplace p par son expression (8) en fonction de θ, on obtient les équations $x = f(\theta) \cos \theta$, $y = f(\theta) \sin \theta$.

On peut considérer ces équations comme les équations paramétriques de la courbe et appliquer la formule (5). Trouvons à cet effet les dérivées de x et de y par rapport au paramètre θ:

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta;$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta.$$

On a alors

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2 = \rho'^2 + \rho^2 .$$

Par conséquent,

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\theta .$$

E x e m p l e 4. Calculer la longueur de la cardioïde (fig. 240)

$$\rho = a\,(1 + \cos \theta).$$

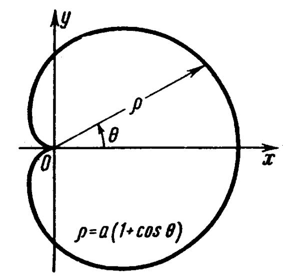


Fig. 240

Faisant varier l'angle polaire θ de 0 à π, on obtient la moitié de la longueur cherchée. On a ici $\rho' = -a \sin \theta$. Par conséquent,

E x e m p l e 5. Calculer la longueur de l'ellipse en supposant $a > b$.

Fig. 240

S o l u t i o n . Servons-nous de la formule (5). Calculons d'abord le ¼ de la longueur, c'est-à-dire la longueur de l'arc correspondant aux variations du paramètre t entre 0 et $\frac{\pi}{2}$

$$\frac{s}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (1-\cos^2 t) + b^2 \cos^2 t}\, dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}\, dt = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\cos^2 t}\, dt = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t}\, dt$$

ou $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} < 1$. Par conséquent,

$$s = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t}\, dt .$$

I1 ne reste plus qu'à calculer cette dernière intégrale. Mais on sait qu'elle ne s'exprime pas au moyen des fonctions élémentaires (voir § !4, ch. X). Cette intégrale ne peut être calculée que par des méthodés approchées (par la formule de Simpson, par exemple).

En particulier, si le demi-grand axe de l'ellipse est égal à 5 et le demi-petit axe à 4, on a $k = 3/5$ et la longueur de l'ellipse est

$$s = 4 \cdot 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cos^2 t}\, dt .$$

Calculant cette dernière intégrale par application de la formule de Simpson , (en divisant le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en quatre parties), on obtient la valeur approchée de l'intégrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{3}{5}\cos^2 t\, dt} \approx 1{,}298 .$$

La longueur totale de l'ellipse est approximativement égale à $s \approx 25{,}96$ unités de longueur.

§ 4. Calcul du volume d'un corps en fonction des aires des sections parallèles

Considérons un corps T et supposons connue l'aire de toute section arbitraire de ce corps par un plan perpendiculaire à l'axe Ox (fig. 241). Cette aire dépend du plan sécant, c'est-à-dire qu'elle est fonction de x:

$$Q = Q(x)$$

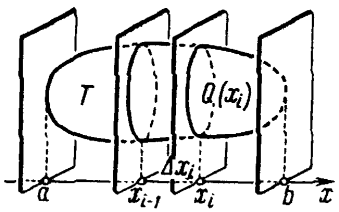


Fig. 241

Supposons que $Q(x)$ soit une fonction continue de x et cherchons le volume du corps donné.

Menons les plans $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2$,. . ., $x = x_n = b$.

Ces plans découpent le corps en tranches. Prenons dans chaque segment partiel $x_{i-1} \le x \le x_i$ un point arbitraire ξ_i et construisons pour chaque section $i = 1, 2,. . ., n$ un cylindre dont la génératrice parallèle à l'axe des x s'appuie sur le contour de la section par le plan $x = \xi_i$.

L'aire de la base d'un tel cylindre élémentaire est

$$Q(\xi_i)\ (x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$$

la hauteur Δx_i et le volume $Q(\xi_i)\,\Delta x_i$.

Le volume de tous les cylindres est

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i .$$

La limite de cette somme lorsque $\max \Delta x_i \to 0$ (quand elle existe) s'appelle le volume du corps donné

$$v_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i$$

Comme v_n représente évidemment une somme intégrale pour la fonction continue $Q(x)$ sur le segment $a \le x \le b$, la limite indiquée existe et s'exprime par l'intégrale définie

$$v = \int_a^b Q(x)dx . \qquad (1)$$

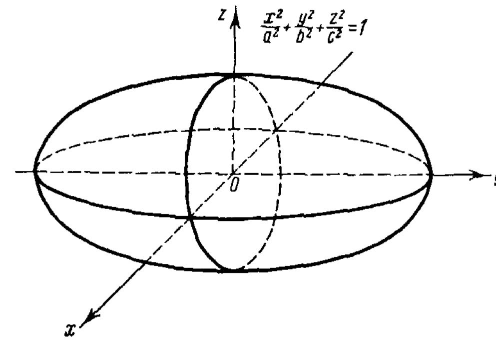


Fig. 242

E x e m p l e . Calculer le volume délimité par l'ellipsoïde (fig. 242)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

S o l u t i o n . La section par un plan parallèle au plan Oyz et se trouvant à la distance x de ce dernier donne l'ellipse

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

ou

$$\frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2}+\frac{z^2}{\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2}=1$$

avec pour demi-axes

$$b_1 = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \ ; \ c_1 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

Mais l'aire d'une telle ellipse est égale à nbic! (voir l'exemple 3 du § 1). Par conséquent,

$$Q(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Le volume de l'ellipsoïde est égal à

$$v = \pi bc\int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc\,.$$

Notamment si $a = b = c$, l'ellipsoïde devient une sphère dont le volume délimité est $v= \frac{4}{3}\pi a^3$.

§ 5. Volume d'un corps de révolution

Considérons le corps de révolution engendré par la rotation autour de l'axe Ox du trapèze curviligne $aABb$ formé par la courbe $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$, $x = b$. Dans ce cas, toute section de ce corps par un plan perpendiculaire à l'axe des abscisses est un cercle, ayant pour aire $Q = \pi y^2 = \pi\,[f(x)]^2$.On trouve, en appliquant la formule usuelle du calcul des volumes [(1), § 4], la formule permettant de calculer les volumes des corps de révolution:

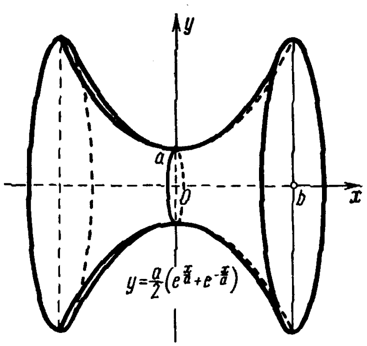


Fig. 243

$$.\, v = \pi\int_0^b y^2\,dx = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx\,.$$

E x e m p le. Trouver le volume du corps engendré par la rotation de la chaînette

$$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

au tour de l'axe Ox entre les plans $x = 0$ et $x = b$ (fig. 243).

S o l u t i o n.

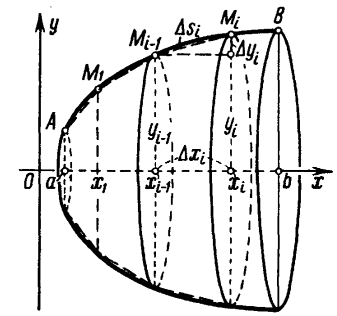
$$v = \pi\frac{a}{4}\int_0^b (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})dx = \frac{\pi a^2}{4}\int_0^b (e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}})dx =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]_0^b = \frac{\pi a^2}{8}(e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}}) + \frac{\pi a^2 b}{2}\,.$$

§ 6. Aire d'un corps de révolution

Considérons la surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe $y = f(x)$ autour de l'axe Ox. Calculons l'aire de cette surface dans l'intervalle $a \le x \le b$. Nous supposerons la fonction $f(x)$ continue avec sa dérivée en tous les points du segment $[a, b]$.

Comme au § 3, menons les cordes AM_1, M_1M_2, . . ., $M_{n-1}B$ dont nous désignerons les longueurs par Δs_1, Δs_2, . . ., Δs_n (fig. 244)



Dans sa rotation, chaque corde de longueur Δs_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) engendre un cône tronqué dont l'aire ΔP_i est égale à

$$\Delta P_i = 2\pi\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\Delta s_i\,.$$

Or,

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)}\Delta x_i\,.$$

Fig. 243

On obtient en appliquant la formule des accroissements finis

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \equiv f'(\xi_i), \qquad \text{où} \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

par conséquent,

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i, \quad \Delta P_i = 2\pi\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i\,.$$

L'aire de la surface engendrée par la ligne polygonale sera égale à

$$P_n = 2\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i\,,$$

ou bien encore à la somme

$$P_n = 2\pi\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i\,,$$

étendue à toutes les cordes. La limite de cette somme, lorsque la plus grande corde Δs_i tend vers zéro, s'appelle l'aire de la surface de révolution considérée. La somme (1) n'est pas une somme intégrale pour la fonction ,

$$2\pi\, f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} \qquad (2)$$

étant donné que dans le terme correspondant au segment $[x_{i-1}, x_i]$ figurent plusieurs points de ce segment : x_{i-1}, x_i, ξ_i. Mais on peut démontrer que la limite de la somme (1) est égale à la limite de la somme intégrale de la fonction (2), c'est-à-dire

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i-1}) + f(x_i) \right] \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2 f(\xi_i) \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i \text{ ou } P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\; dx$$

E x e m p l e . Calculer l'aire du paraboloide engendrée par la rotation autour de l'axe Ox de la parabole $y^2 = 2px$. On se limitera à la portion comprise entre les plans $x = 0$ et $x = a$.

S o l u t i o n .

$$y = \sqrt{2px}, \quad y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{2p}{4x}} = \sqrt{\frac{2x+p}{2x}},$$

et on trouve en appliquant la formule (3):

$$P = 2\pi \int_a^b \sqrt{2px}\sqrt{\frac{2x+p}{2x}} dx = 2\pi\sqrt{p} \int_a^b \sqrt{2x+p}\;\; dx =$$

$$= 2\pi\sqrt{p}\,\frac{2}{3}(2x+p)^{3/2}\frac{1}{2}\Big|_0^a = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{3/2} - p^{3/2}\right].$$

§ 7. Calcul du travail au moyen de l'intégrale définie

Supposons qu'un point matériel M sollicité par une force F se meuve sur une droite Os et que la direction de la force coincide avec celle du mouvement. On demande de calculer le travail effectué par la force F pour déplacer le point M de la position $s = a$ à la position $s = b$.

1) Si la force F est constante, le travail A est donné par le produit de F par le chemin parcouru, soit

$$A = F\,(b - a).$$

2) Supposons que la force F varie continûment en fonction de la position du point matériel, c'est-à-dire qu'elle représente une fonction $F\,(s)$ continue sur le segment $a \le s \le b$.

Découpons le segment $[a, b]$ en n parties arbitraires de longueurs

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n,$$

puis choisissons dans chaque segment partiel $[s_{i-1}, s_i]$ un point arbitraire ξ_i et remplaçons le travail de la force $F\,(s)$ sur le chemin Δs_i ($i = 1, 2, \ldots$, n) par le produit

$$F\,(\xi_i)\,\Delta s_i.$$

Cela signifie que nous supposons la force F constante sur chaque segment, à savoir $F = F\,(\xi_i)$. Dans ces conditions, l'expression F $(\xi_i)\,\Delta s_i$ si donne, pour Δs_i suffisamment petit, une valeur approchée du travail de F sur le chemin Δs_i et la somme

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta s_i$$

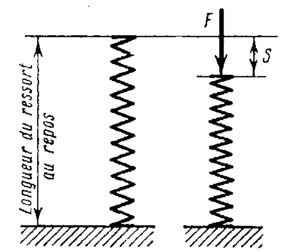


Fig. 245

exprime approximativement le travail de F sur tout le segment $[a, b]$. Il est évident que A_n représente une somme intégrale pour la fonction $F = F\,(s)$ sur le segment $[a, b]$. La limite de cette somme, lorsque max $(\Delta s_i) \to 0$, existe et exprime le travail de la force $F\,(s)$ sur le chemin entre les points $s = a$ et $s = b$:

$$A = \int_a^b F(s)ds\,. \qquad (1)$$

E x e m p l e 1. La comppression S d'un ressort à boudin est proportionnelle à la force appliquée F. Calculer le travail de F lorsque le ressort est comprimé de 5 cm, s'il faut appliquer une force de 1 kg pour comprimer le ressort de 1 cm (fig. 245).

S o l u t i o n . La force F et le déplacement S sont reliés, par hypothèse, par la relation $F = kS$, où k est une constante.

Nous exprimerons S en mètres et F en kilogrammes. Pour $S = 0{,}01$ on a $F = 1$, c'est-à-dire que $1 = k\cdot 0{,}01$, d'où $k = 100$ et $F = 100S$.

On a en vertu de la formule (1)

$$A = \int_0^{0{,}05} 100SdS = 100\frac{S^2}{2}\Big|_0^{0{,}05} = 0{,}125 \text{ kgm}$$

E x e m p l e 2. La force de répulsion entre deux charges électriques de mime signe e_1 et e_2 distantes de r s'exprime par la formule

$$F = k\,\frac{e_1 e_2}{r^2},$$

où k est une conatante.

Déterminer le travail de la force F pour dépiacer la charge e_2 du point A_1, se trouvant à la distance r_1 de e_1, au point A_2, à la distance r_2 de e_1, en admettant que la charge e_1 se trouve à l'origine A_o.

S o l u t i o n . On a d'après la formule (1)

$$A=\int_{r_1}^{r_2} k\frac{e_1e_2}{r^2}dr=-ke_1e_2\frac{1}{r}\bigg|_{r_1}^{r_2}=ke_1e_2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

On obtient pour $r_2=\infty$:

$$A=\int_{r_1}^{\infty} k\frac{e_1e_2}{r^2}dr=k\frac{e_1e_2}{r_1}$$

Pour $e_2 = 1$, on a $A=k\frac{e_1}{r}$. Cette dernière quantité s'appelle *potentiel du champ* créé par la charge e_1.

§ 8. Coordonnées du centre de gravité

Soit donné dans le plan Oxy un système de points matériels

$$P_1\,(x_1, y_1),\ P_2\,(x_2, y_2),\ \ldots,\ P_n(x_n, y_n)$$

de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

On appelle les produits x_im_i; et y_im_i *moments statiques* de la masse m_i par rapport aux axes Oy et Ox.

Désignons par x_c et y_c les coordonnées du centre de gravité (barycentre) du système donné. Comme on le sait du cours de mécanique. les coordonnées du barycentre d'un système de points matériels sont définies par les formules

$$x_c=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_im_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i} \quad (1)$$

$$y_c=\frac{y_1m_1+y_2m_2+\ldots+y_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_im_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i} \quad (2)$$

Nous allons utiliser ces formules pour chercher les centres de gravité de divers corps et figures.

1. C e n t r e d e g r a v i t é d ' u n e c o u r b e p l a n e p e s a n t e . Soit une courbe m a t é r i e l l e AB donnée par son équation $y=f(x)$, $a \le x \le b$.

Soit y la densité linéaire *) de cette courbe. Découpons la courbe en n parties de longueurs $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. Les masses de ces parties seront égales aux produits des longueurs par la densité (constante) : $\Delta m_i = \gamma\,\Delta s_i$. Prenons un point arbitraire d'abscisse ξ_i sur chaque portion d'arc Δs_i. Considérant maintenant que chaque portion Δs_i représente un point matériel $P_i\,[\xi_i, f(\xi_i)]$ de masse $\gamma\Delta s_i$ et substituant dans les formules (1) et (2) au lieu de x_i et y_i respectivement ξ_i et $f(\xi_i)$ et au lieu de m_i la valeur $\gamma\Delta s_i$ (la masse de la portion Δs_i), on obtient les formules approchées déterminant le centre de gravité

$$x_c\approx\frac{\sum\xi_i\gamma\Delta s_i}{\sum\gamma\Delta s_i},\quad x_c\approx\frac{\sum f(\xi_i)\gamma\Delta s_i}{\sum\gamma\Delta s_i}.$$

Si la fonction $y = f(x)$ est continue ainsi que sa dérivée, les sommes du numérateur et du dénominateur de chaque fraction ont des limites lorsque max $\Delta s_i \to 0$. Par conséquent, les coordonnées du centre de gravité de la courbe s'expriment par les intégrales définies

$$x_c=\frac{\int_a^b x\,ds}{\int_a^b ds}=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx} \quad (1')$$

$$y_c=\frac{\int_a^b f(x)\,ds}{\int_a^b ds}=\frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx} \quad (2')$$

E x e m p l e 1. Trouver les coordonnées du centre de gravité de la demi-circonférence $x^2 + y^2 = a^2$ se trouvant au-dessus de l'axe Ox.

S o l u t i o n . Déterminons l'abscisse du centre de gravité

$$y=\sqrt{a^2-x^2},\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\ ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$ds=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

---

* On appelle .densité linéaire la masse de l'unité de longueur de la courbe donnée. Nous supposerons que la densité linéaire est la même en tous les points de la courbe.

$$x_c = \frac{a\int\limits_{-a}^{a}\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a\int\limits_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}} = \frac{-a\sqrt{a^2-x^2}\Big|_{-a}^{a}}{a\arcsin\frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a}} = \frac{0}{\pi a} = 0 .$$

Déterminons maintenant l'ordonnée du centre de gravité:

$$y_c = \frac{\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx}{\pi a} = \frac{a\int\limits_{-a}^{a}dx}{\pi a} = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi} .$$

2. C e n t r e d e g r a v i t é d u n e f i g u r e p l a n e. Supposons que la figure donnée soit délimitée par les courbes $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$ et représente une figure plane m a t é r i e l l e. Nous supposerons que la densité superficielle, e'est-à-dire la masse de l'unité d'aire, est constante et égale à δ pour toutes les parties de la figure.

Découpons la figure donnée par les droites $x = a$, $x = x_1$, . . ., $x = x_n = b$ en tranches parallèles de largeurs Δx_1, Δx_2, . . ., Δx_n.

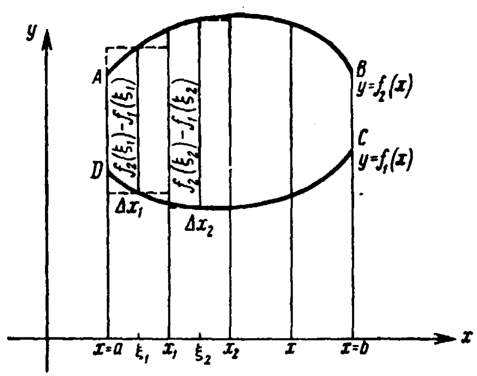


Fig. 246

La masse de chaque tranche sera égale au produit de son aire par la densité δ. Assimilant chaque tranche à un rectangle (fig. 246) de base Δx_i et de hauteur $f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)$ où $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, la masse de cette tranche sera à peu près égale à

$$\Delta m_i = \delta\,[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\Delta x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le centre de gravité de cette tranche se trouvera à peu près au centre du rectangle correspondant:

$$(x_i)_c = \xi_i; \qquad (y_i)_c = \frac{f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)}{2} .$$

Localisant maintenant la masse de chaque tranche en son centre de gravité, on trouve les coordonnées approchées du barycentre de toute la figure [en vertu des formules (1) et (2)]

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum \delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i}$$

$$y_c \approx \frac{\frac{1}{2}\sum [f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)]\delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum \delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i} .$$

Passant à la limite lorsque $\Delta x_i \to 0$, on obtient les coordonnées e x a c t e s du barycentre de la figure donnée

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]dx}{\int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx}; \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b [f_2(x) + f_1(x)][f_2(x) - f_1(x)]dx}{\int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx} .$$

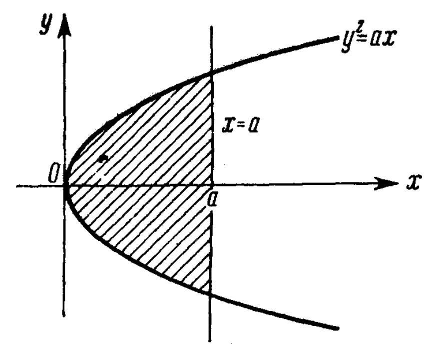


Fig. 247

Ces formules conviennent à toute figure plane homogène (ayant une densité constante en tous les points). On voit que les coordonnées du centre de gravité ne dépendent pas de la densité δ de la figure (elle s'élimine dans les calculs).

E x e m p l e 2. Déterminer les coordonnées du centre de gravité du segment de parabole $y^2 = ax$ découpé par la droite $x = a$ (fig. 247).

S o l u t i o n . Dans le cas donné $f_2(x) = \sqrt{ax}$, $f_1(x) = -\sqrt{ax}$, donc

$$x_c = \frac{2\int\limits_0^a x\sqrt{ax}\;dx}{2\int\limits_0^a \sqrt{ax}\;dx} = \frac{2\sqrt{a}\,\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^a}{2\sqrt{a}\,\frac{2}{5}x^{3/2}\Big|_0^a} = \frac{\frac{4}{5}a^3}{\frac{4}{3}a^2} = \frac{3}{5}a ,$$

$y_c = 0$ (étant donné que le segment est symétrique par rapport à l'axe Ox).

§ 9. Calcul du moment d'inertie d'une courbe, d'un cercle et d'un cylindre à l'aide de l'intégrale définie

Soit donné sur le plan xOy un système de points matériels P_1 (x_1, y_1), P_2 (x_2, y_2), . . ., P_n (x_n, y_n) de masses m_1, m_2, ..., m_n. On sait alors de la mécanique que le moment d'inertie du système de points matériels par rapport au point 0 est par définition :

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2) m_i \quad \text{où} \quad I_O = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i \ , \qquad (1)$$

Supposons, comme au § 8, que la courbe AB est donnée par l'équation $y = f(x)$, $a \le x \le b$, où $f(x)$ est une fonction continue. Supposons que cette courbe représente une *ligne matérielle* de densité linéaire γ. Partageons de nouveau la courbe en n parties de longueur Δs_1, Δs_2, . . ., Δs_n, où $\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$ et de masses $\Delta m_1 = \gamma \Delta s_1$, $\Delta m_2 = \gamma \Delta s_2$, . . ., $\Delta m_n = \gamma \Delta s_n$. Sur chaque portion d arc prenons un point arbitraire d'abscisse ξ_i. L'ordonnée de ce point sera $\eta_i = f(\xi_i)$. Le moment d'inertie de l'arc par rapport au point O est alors approximativement, conformément à la formule (1)

$$I_O \approx \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2) \gamma \Delta s_i \ . \quad (2)$$

Si la fonction $y = f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ sont continues, alors quand $\Delta s_i \to 0$ la somme (2) possède une limite. Cette limite, s'exprimant par une intégrale définie, détermine le moment d'inertie de la ligne matérielle

$$I_O = \gamma \int_a^b \left[x^2 + f^2(x)\right] \sqrt{1 + f'^2(x)} \ dx \ . \qquad (3)$$

1. M o m e n t   d ' i n e r t i e   d ' u n e   t i g e   m i n c e   h o m o g è n e   d e   l o n g u e u r l p a r   r a p p o r t   à   s o n   e x t r é m i t é . Faisons coïncider la tige avec le segment de l'axe Ox: $0 \le x \le 1$. Dans ce cas $\Delta s_i = \Delta x_i$, $\Delta m_i = \gamma \Delta x_i$, $r_i^2 = x_i^2$ et la formule (3) s'écrit

$$I_{O_c} = \gamma \int_0^l x^2 dx = \gamma \frac{l^3}{3} \ (4)$$

Si la masse M de la tige est donnée, alors $\gamma = \dfrac{M}{l}$ et la formule (4) devient

$$I_{O_c} = \frac{1}{3} M l^2 \qquad (5)$$

2. M o m e n t   d ' i n e r t i e   d ' u n e   c i r c o n f é r e n c e   d e   r a y o n r p a r   r a p p o r t   à   s o n   c e n t r e . Comme tous les points de la circonférence se trouvent à une distance r du centre et sa masse $m = 2\pi \ r \cdot \gamma$, le moment d'inertie de la circonférence sera

$$I_o = mr^2 = \gamma \ 2\pi \ r \cdot r^2 = \gamma \ 2\pi \ r^3. \qquad (6)$$

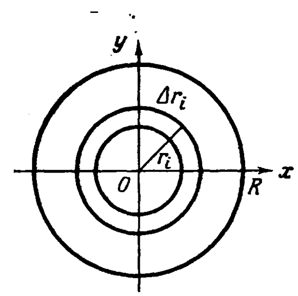


Fig. 248

3. M o m e n t   d ' i n e r t i e   d ' u n   c e r c l e   h o m o g è n e   d e   r a y o n R p a r   r a p p o r t   à   s o n   c e n t r e . Soit δ la masse d'une unité de surface du cercle. Divisons le cercle en n anneaux. Considérons un anneau (fig. 248). Soit r_i son rayon intérieur, et $r_i + \Delta r_i$ son rayon extérieur. La masse de cet anneau Δm_i sera, aux infiniments petits d'ordre supérieur par rapport à Δr_i près, égale à $\Delta m_i = \delta 2\pi \ r_i \Delta r_i$.

Le moment d'inertie de cette masse par rapport au centre sera approximativement (conformément à la formule (6))

$$(\Delta I_o) \approx \delta 2\pi r_i \ \Delta r_i \cdot \ r_i^2 = \delta 2\pi r_i \ r_i^3 \cdot \Delta r_i.$$

Le moment d'inertie de tout le cercle considéré en tant que système d'anneaux s'exprimera par la formule approchée

$$I_o \approx \sum_{i=1}^{n} \delta 2\pi r_i^3 \cdot \Delta r_i \qquad ('7)$$

Passant à la limite quand max $\Delta r_i \to 0$, nous obtenons le moment d'inertie de la surface du cercle par rapport au centre

$$I_O = \delta 2\pi \int_0^R r^3 dr = \pi\delta \frac{R^4}{2} \ . \qquad (8)$$

Si la masse M du cercle est donnée, la densité superficielle δ sera

$$\delta = \frac{M}{\pi R^2}$$

Portant cette valeur nous obtenons en définitive

$$I_O = \frac{MR^2}{2} \ . \qquad (9\ )$$

4. Il est évident que si nous avons un cylindre circulaire, dont le rayon de la base est R et la masse M, son moment d'inertie par rapport à l'axe s'exprimera par la formule (9).

Exercices

Calcul des aires

1. Trouver l'aire de la figure délimitée par les courbes $y^2 = 9x$, $y = 3x$ Rép. $\frac{1}{2}$.
2. Trouver l'aire de la figure délimitée par l'hyperbole équilatère $xy = a^2$ l'axe Ox et les droites $x = a$, $x = 2a$. Rép. a^2 Log 2.
3. Trouver l'aire de la figure comprise entre la courbe $y = 4 - x^2$ et l'axe Ox. Rép. $10\frac{1}{3}$.
4. Trouver l'aire de la figure délimitée par l'hypocycloïde $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Rép. $\frac{3}{8}\pi a^2$.
5. Trouver l'aire de la figure délimitée par la chaînette $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ l'axe Ox, l'axe Oy et la droite $x = a$. Rép. $\frac{a^2}{2e}(e^2 - 1)$.
6. Trouver l'aire de la figure délimitée par la courbe $y = x^3$, la droite $y = 8$ et l'axe Oy. Rép. 12.
7. Trouver l'aire du domaine délimité par une demi-onde de sinusoïde et l'axe des abscisses. Rép. 2.
8. Trouver l'aire du domaine compris entre les paraboles $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$.Rép. $\frac{4}{3}p^2$.
9. Trouver l'aire totale de la figure délimitée par les courbes $y = x^3$, $y =2x$, $y = x$. Rép. $\frac{3}{2}$.
10. Trouver l'aire du domaine délimité par un arc de cycloïde $x = a\ (t - \sin t)$, $y = a\ (1 - \cos t)$ et l'axe des abscisses. Rép. $3\pi a^2$.
11. Trouver l'aire de la figure délimitée par l'hypocycloïde $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$. Rép. $\frac{3}{8}\pi a^2$.
12. Trouver l'aire du domaine délimité par la lemniscate $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.Rép. a^2.

13. Calculer l'aire du domaine délimité par une boucle de la courbe $\rho =a \sin 2\varphi$. Rép. $\frac{1}{8}\pi a^2$.
14. Calculer l'aire totale du domaine délimité par la cardioide $p = a \times (1 - \cos \varphi)$. Rép. $\frac{3}{2}\pi a^2$
15. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe $\rho= a \cos \varphi$. Rép. $\frac{\pi a^2}{4}$.
16. Trouver l'aire du domaine délimité par la courbe $\rho = a \cos 2\varphi$. Rép. $\frac{\pi a^2}{4}$.
17. Trouver l'aire du domaine délimité par la courbe $\rho = \cos 3\varphi$. Rép. $\frac{\pi}{4}$.
18. Trouver l'aire du domaine délimité par la courbe $\rho = a \cos 4\varphi$. Rép. $\frac{\pi a^2}{4}$

Calcul des volumes

19. On fait tourner l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ autour de l'axe Ox. Trouver le volume du corps de révolution. Rép. $\frac{4}{3}\pi ab^2$.
20. On fait tourner le segment de droite réunissant l'origine et le point (a, b)autour de l'axe des y. Trouver le volume du cône obtenu. Rép. $\frac{1}{3}\pi a^2 b$.
21. Trouver le volume du tore engendré par la rotation du cercle $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ autour de l'axe Ox (on suppose que $b \geq a$). Rép. $2\pi^2 a^2 b$.
22. On fait tourner l'arc de la parabole $y^2 = 2px$ limitée par la droite $x = a$ autour de l'axe Ox. Calculer le volume du corps de révolution obtenu. Rép. πpa^2.
23. La figure délimitée par l'hypocycloïde $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ tourne autour de l'axe Ox. Trouver le volume du corps de révolution. Rép $\frac{32\pi a^3}{105}$.
24. Trouver le volume engendré par la rotption autour de l'axe Ox d'un arcde sinusoïde $y = \sin x$. Rép. $\frac{\pi^2}{2}$.
25. La figure délimitée par la parabole $y^2 = 4x$ et la droite $x = 4$ tourne au tour de l'axe Ox. Trouver le volume du corps de révolution. Rép. 32π.

26. La figure délimitée par la courbe $y = xe^x$ et les droites $y = 0$, $x = 1$ tourne autour de l'axe Ox. Trouver le volume du corps derévolution. Rép. $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$.
27. La figure délimitée par un arc de cycloïde $x = a\ (t - \sin t)$, $y = a\ (1 - \cos t)$ et l'axe Ox tourne autour de l'axe Ox. Trouver le volume du corps de révolution. Rép. $5\pi^2 a^3$.
28. La figure du problème 27 tourne autour de l'axe Oy. Trouver le volume du corps de révolution. Rép. $6\pi^2 a^3$.
29. La figure du problème 27 tourne autour de la droite passant par le sommet de la cycloïde parallèlement à l'axe Oy. Trouver le volume du corps de ns révolution. Rép. $\frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2 - 16)$.
30. La figure du problème 27 tourne autour de la tangente au sommet de la cycloïde. Trouver le volume du corps de révolution. Rép. $7\pi^2 a^3$.
31. Un cylindre de rayon R est coupé par un plan passant par un diamètre de la base sous un angle α avec la base. Trouver le volume de la partie tronquée. Rép. $\frac{2}{3}R^3 \operatorname{tg}\alpha$.
32. Trouver le volume commun aux deux cylindres: $x^2 + y^2 = R^2$, $y^2 + z^2 = R^2$. Rép. $\frac{16}{3}R^3$.
33. Le point d'intersection des diagonales d'un carré décrit le diamètre d'une circonférence de rayon a, le plan du carré restant constamment perpendiculaire au plan de la circonférence, et deux sommets opposés du carré s'appuyant sur cette circonférence (la grandeur du carré varie évidemment pendant le mouvement). Trouver le volume du corps engendré par ce carré. Rép. $\frac{8}{3}a^3$.
34. Calculer le volume du segment obtenu en coupant le paraboloïde elliptique $\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x$ par le plan $x = a$. Rép. $\pi a^2\sqrt{pq}$.
35. Calculer le volume du corps délimité par les plans $z = 0$, $y = 0$, les surfaces cylindriques $x^2 = 2py$ et $z^2=2px$ et le plan $x = a$. Rép. $\frac{a^3\sqrt{2a}}{7\sqrt{p}}$ (dans le premier octant).

36. Une droite se meut parallèment au plan Oyz en s'appuyant sur les deux ellipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ se trouvant res ectivement dans les plans Oxy et Oxz. Calculer le volume du corps obtenu. Rép. $\frac{3}{8}abc$.

Calcul des arcs

37. Trouver la longueur totale de l'hypocycloïde $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Rép. $6a$.
38. Calculer la longueur de l'arc de la parabole semi-cubique $ay^2 = x^3$ del'origine des coordonnées au point d'abscisse $x = 5a$. Rép. $\frac{335}{27}a$.
39. Trouver la longueur de la chaînette $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ de l'origine aux point (x, y). Rép $\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = \sqrt{y^2 - a^2}$.
40. Trouver la longueur d'un arc de cycloïde $x = a\ (t - \sin t)$, $y = a\ (1 - \cos t)$.Rép. $8a$.
41. Trouver l'arc de la courbe $y = \operatorname{Log} x$ entre les limites $x = \sqrt{3}$ et $x = \sqrt{8}$ .Rép. $1 + \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{3}{2}$.
42. Trouver la longueur de la courbe $y = 1 - \operatorname{Log}\cos x$ entre les limites $x = 0$ et $x = 4$. ép. $\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$.
43. Trouver la longueur de la première spire de la spirale d'Archimède $\rho = a\varphi$ à partir du pôle. Rép. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\operatorname{Log}(2\pi\sqrt{1+4\pi^2})$
44. Trouver la longueur de la spirale logarithmique $\rho = e^{\alpha\varphi}$ du pôle au point (ρ, φ). Rép. $\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}e^{\alpha\varphi} = \frac{\rho}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2}$.
45. Trouver la longueur totale de la courbe $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$. Rép. $\frac{3}{2}\pi a$.
46. Trouver la longueur de la développée de l'ellipse $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t \quad y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t$. Rép. $\frac{4(a^3 - b^3)}{ab}$.
47. Trouver la longueur de la cardioïde $\rho = a\ (1 + \cos\varphi)$. Rép. $8a$.

48. Trouver la longueur de la développante du cercle $x = a$ (cos φ + φ sin φ), $y = a$ (sin φ - φ cosφ) de φ = 0 à φ = φ₁. Rép. $\frac{1}{2}a\varphi_1^2$.

Calcul des aires des corps de révolution

49. Trouver l'aire de la surface obtenue en faisant tourner la parabole $y^2 = 4ax$ autour de l'axe Ox, de l'origine au point d'abscisse $x = 3a$. , Rép. $\frac{56}{3}\pi a^2$.

50. Trouver l'aire du cône engendré par la rotation du segment de droite $y = 2x$, $0 \le x \le 2$: a) Autour de l'axe Ox. Rép. $8\pi\sqrt{5}$. b) Autour de l'axe Oy. Rép. $4\pi\sqrt{5}$.

51. Trouver l'aire du tore obtenu en faisant tourner le cercle $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ autour de l'axe Ox ($b > a$). Rép. $4\pi^2ab$.

52. Trouver l'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation de la cardioïde d'équations paramétriques $x = a$ (2cos φ - cos 2φ), $y = a$ (2sin φ - sin 2φ) autour de l'axe Ox. Rép. $\frac{128}{5}\pi a^2$.

53. Troùver l'aire de la surface obtenue en faisant tourner un arc de cycloïde $x = a\,(t - \sin t)$; $y = a\,(1 - \cos t)$ autour de l'axe Ox. Rép. $\frac{64\pi a^2}{3}$.

54. On fait tourner un arc de cycloïde (voir problème 53) autour de l'axe Oy. Trouver l'aire de la surface de révolution. Rép. $16\pi^2a^2 + \frac{64\pi a^2}{3}$.

55. L'arc de cycloïde (problème 53) tourne autour de la tangente à son sommet. Trouver l'aire de la surface de révolution. Rép. $\frac{32\pi a^2}{3}$

56. L'astroïde $x = a\sin^3 t$, $y = a\cos^3 t$ tourne autour de l'axe Ox. Trouver l'aire de la surface de révolution. Rép. $\frac{12\pi a^2}{5}$.

57. L'arc de sinusoïde $y = \sin x$ de $x = 0$ à $x = 2\pi$ tourne autour de l'axe Ox.Trouver l'aire de la surface de révolution. Rép. $4\pi\left[\sqrt{2} + \mathrm{Log}(\sqrt{2} + 1)\right]$.

58. L'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) tourne autour de l'axe Ox. Trouver l'aire de la surface de révolution. Rép. $2\pi b^2 + 2\pi ab\frac{\arcsin e}{c}$ où $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

Différentes applications de l'intégrale définie

59. Trouver le centre de gravité du quart d'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($x \ge 0$, $y \ge 0$). Rép. $\frac{4a}{3\pi}; \frac{4b}{3\pi}$

60. Trouver le centre de gravité de la figure déiimitée par la parabole $x^2 + 4y - 16 = 0$ et l'axe Ox. Rép. (0; $\frac{8}{5}$) .

61. Trouver le centre de gravité d'une demi-sphère. Rép. Sur l'axe de symétrie, à la distance $\frac{3}{8}R$ de la base.

62. Trouver le centre de gravité de la surface d'une demi-sphère. Rép. Sur l'axe de symétrie, à 1a distance $\frac{R}{2}$ de la base.

63. Trouver le centre de gravité de la surface d'un cône circulaire droit dont le rayon de la base est R et la hauteur h. Rép. Sur l'axe de symétrie, à la distance $\frac{h}{3}$ de la base.

64. Trouver le centre de gravité de la surface plane délimitée par les courbes $y = \sin x$ ($0 \le x \le \pi$), $y = 0$. Rép. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$

65. Trouver le centre de gravité d'une aire plane délimitée par les paraboles $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$. Rép. (9 ; 9).

66. Trouver le centre de gravité de l'aire d'un secteur circulaire d'angle au centre 2α et de rayon R. Rép. Sur l'axe de symétrie, à la distance $\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ du sommet du secteur.

67. Trouver la grandeur de la pression de l'eau sur un rectangle qui y est plongé verticalement : la base est de 8 m, la hauteur de 12 m et la base supérieure se trouve à 5 m de la surface parallèlement à cette dernière. Rép. 1056 tonnes.

68. Le bord supérieur d'une écluse carrée de 8 m de côté se trouve à la surface de l'eau. Quelle est la pression exercée par l'eau sur chacun des triangles de l'écluse obtenus en menant une diagonale du carré. Rép. 85 333,33 kg, 970 666,67 kg.

69. Calculer le travail nécessaire pour pomper l'eau contenue dans un réservoir en forme de demi-sphère de 20 m de diamètre. Rép. $2{,}5\cdot10^6\,\pi$ kgm.

70. Un corps est animé d'un mouvement rectiligne, selon la loi $x = ct^3$, où x est le chemin parcouru pendant le temps t, c = const. La résistance du milieu est proportionnelle au carré de la vitesse, le coefficient de proportionnalité

est k. Calculer le travail dû à la résistance à l'avancement lorsque le corps passe du point $x = 0$ au point $x = a$. Rép. $\frac{27}{7}k\sqrt[3]{c^2a^7}$

71. Calculer le travail dépensé pour pomper un liquide de densité γ contenu dans un réservoir conique, le sommet tourné vers le bas, de hauteur H et de rayon à la base R. Rép. $\frac{\pi\gamma R^2 H^2}{12}$
72. Un flotteur de bois cylindrique dont la surface de base est $S = 4\ 000$ cm^2 et la hauteur H = 50 cm flotte sur l'eau. Quel est le travail dépensé pour le sortir de l'eau ? (Le poids spécifique du bois est de 0,8.) Rép. $\frac{\gamma^2 H^2 S}{2} = 32$ kgm.
73. Calculer la pression totale exercée par l'eau sur un barrage en forme de trapèze isocèle, de dimensions: base supérieure a = 6,4 m, base inférieure b = 4,2 m, hauteur H = 3 m. Rép. 22,2 tonnes.
74. Trouver la composante axiale P kg de la pression totale de la vapeur exercée sur le fond sphérique d'une chaudière. Le diamètre de la partie cylindriquede la chaudière est D mm, la pression de la vapeur dans la chaudière p kg/cm^2. Rép $\frac{\pi p D^2}{400}$
75. Un arbre vertical de rayon r est soutenu par une crapaudine plane. Le poids P de l'arbre est uniformément réparti sur toute la surface d'appui. Calculer le travail total des forces de frottement lorsque l'arbre tourne d'un tour. Le coefficient de frottement est μ. Rép. $\frac{4}{3}\pi\mu Pr$.
76. Un arbre vertical est terminé par un tronc de cône. La pression spécifique de ce tronc de cône sur la crapaudine est constante et égale à P. Le diamètre upérieur du cône tronqué est D, le diamètre inférieur d l'angle au sommet 2α. Le coefficient de frottement est μ . Calculer le travail des forces de frottement pour un tour de l'arbre. Rép $\frac{\pi^2 P\mu}{6\sin\alpha}(D^3 - d^3)$.
77. Une tige prismatique de longueur l s'allonge progressivement sous l'action d'une force croissant de 0 à P de sorte que la force d'extension est équilibrée à chaque instant par les forces élastiques de la tige. Calculer le travail A de la force d'extension, en supposant que l'allongement est élastique. La section transversale de la tiga est F, le module d élasticité du matériau E. I n d i c a t i o n . Si x est l'allongement et f la force appliquée, on a $f = \frac{FE}{l}x$. L'allongement sous l'action de la force P est $\Delta l = \frac{Pl}{EF}$.

Rép. $A = \frac{P\Delta l}{2} = \frac{P^2 l}{2EF}$

78. Une barre prismatique est suspendue verticalement et une force d'extension P est appliquée à son extrémité inférieure. Calculer l'allongement de la barre sous l'action de son propre poids et de la force P, connaissant la longueur de la barre au repos l, la section transversale F son poids Q et le module d'élasticité du matériau E. Rép. $\Delta l = \frac{(Q + 2P)l}{2EF}$
79. Calculer le temps pendant lequel se vide un réservoir prismatique rempli jusqu'au niveau H. La section transversale est F, la section de l'ouverture f, la vitesse de vidange est donnée par la formule $v = \mu\sqrt{2gh}$, où μ est le coefficient de viscosité, g l'accélération de la force de pesanteur, h la distance de l'ouverture au niveau du liquide. Rép. $T = \frac{2FH}{\mu f\sqrt{2gH}} = \frac{F}{\mu f}\sqrt{\frac{2H}{g}}$.
80. Déterminer le débit Q de l'eau (quantité d'eau évacuée pendant l'unité de temps) à travers un déversoir de section rectangulaire. La hauteur du déversoir est h, sa largeur b. Rép. $Q = \frac{2}{3}\mu bh\sqrt{2gh}$.
81. Déterminer le débit Q de l'eau coulant à travers une ouverture rectangulaire latérale de hauteur a et de largeur b, la hauteur de la surface libre de l'eau au-dessus du côté inférieur du rectangle étant H. Rép. $Q = \frac{2b\mu\sqrt{2g}}{3} \times \left[H^{3/2} - (H-a)^{3/2}\right]$.