

Calcul différentiel et Intégral I

MATH-F-101



Denis Bonheure & Joel Fine

ULB

BA1 en sciences mathématiques et physiques

Table des matières

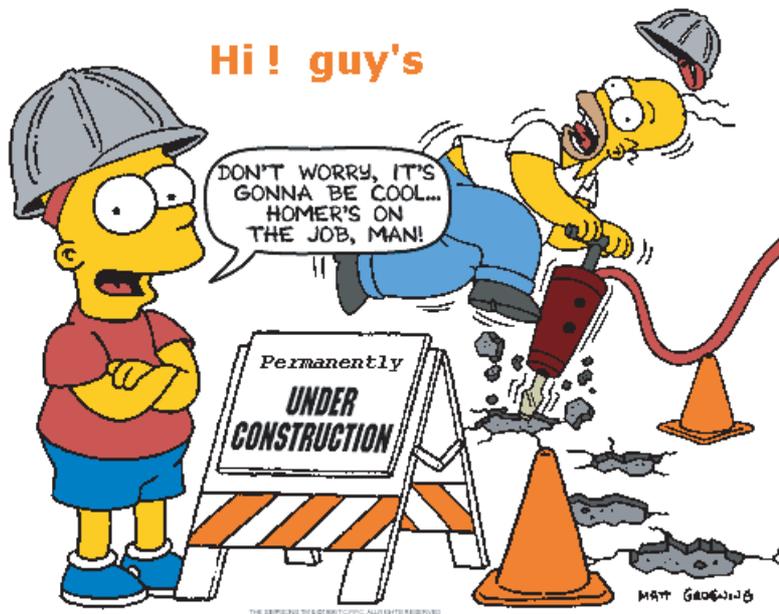
1 Motivations	5
2 Préliminaires	7
2.1 Rappels élémentaires	7
Les symboles et les quantificateurs	7
Opérations sur les ensembles	9
2.2 Un peu de logique de base	10
Les implications	10
Le raisonnement par l'absurde	11
Le raisonnement par induction	13
2.3 Les fonctions	15
2.4 Relation d'ordre et champ ordonné	18
Ensembles ordonnés	18
Champs ordonnés	19
2.5 Les naturels, les entiers et les rationnels	22
2.6 Ensembles dénombrables	23
2.7 Notations	26
3 Les nombres réels et les nombres complexes	27
3.1 Complétude pour l'ordre	28
L'extension \mathbb{R}	29
3.2 Quelques notations et propriétés de \mathbb{R}	30
Intervalles	31
Propriété d'Archimède	31
Densité de \mathbb{Q} et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	32
3.3 Les nombres complexes	33
4 Suites et séries	37
4.1 Suites	37
Sous-suites	38
4.2 Convergence dans un espace métrique	38
Distance et espace métrique	38
Suites bornées et suites convergentes	39
Critère d'existence de sous-suites convergentes	42
Suites de Cauchy	43
4.3 Suites réelles ou complexes	44
Convergence	44

	Règles de calcul	46
	Comparaison des suites réelles	47
	Limites infinies	48
	Suites monotones, \liminf et \limsup	49
	Critère de Cauchy	52
	Exemples importants	53
4.4	Séries	54
	Critères de convergence	56
	Convergence absolue	58
	Critères de convergence absolue	59
	Critères de Dirichlet et d'Abel	62
	Opérations sur les séries	63
	Séries de puissances	67
	\mathbb{R} n'est pas dénombrable	69

Chapitre 1

Motivations

Qu'est-ce que l'analyse? Pourquoi faire de l'analyse?



Chapitre 2

Préliminaires

Motivation

Ce chapitre contient en partie des notions élémentaires qui vous sont normalement familières.

Toutes les notions contenues dans ce chapitre ne seront pas systématiquement présentées telles quelles au cours oral mais le plus souvent insérées dans un contexte précis au moment où elles apparaissent pour la première fois dans la suite logique du cours.

Ce chapitre sert également à rappeler un certain nombre de notations courantes qui seront utilisées dans ce texte.

2.1 Rappels élémentaires

Les symboles et les quantificateurs

Considérons un ensemble X . Si x est un élément de X , nous écrivons

$$x \in X,$$

et on lit “ x appartient à X ”. Il nous arrive d’écrire à l’envers

$$X \ni x,$$

qui se lit “ X contient x ”. Si au contraire, nous voulons signifier que x n’est pas un élément de l’ensemble X , nous écrivons

$$x \notin X,$$

c’est-à-dire “ x n’appartient pas à X ”, ou bien

$$X \not\ni x,$$

c’est-à-dire “ X ne contient pas x ”.

Pour désigner le sous-ensemble des éléments de X qui satisfont une propriété P , nous écrivons

$$\{x \in X : x \text{ satisfait } P\},$$

où le symbole \exists se lit “il existe”. Le symbole \exists est parfois remplacé par $|$. Pour écrire qu’il existe un élément x dans X qui vérifie la propriété P , nous écrivons

$$(\exists x \in X) : x \text{ satisfait } P,$$

où le symbole \exists se lit “il existe”. Du point de vue logique, lorsque nous disons qu’il existe un élément de X tel que P est satisfait, cela signifie qu’il existe au moins un élément de X qui satisfait la propriété P . Si nous voulons attirer l’attention sur l’unicité d’un tel élément, nous disons “il existe un et un seul” élément de X tel que P est satisfait et nous écrivons

$$(\exists! x \in X) : x \text{ satisfait } P.$$

Pour signifier qu’il n’existe pas d’élément de X vérifiant la propriété P , nous écrivons

$$(\nexists x \in X) : x \text{ satisfait } P,$$

où le symbole \nexists se lit “il n’existe pas”.

Nous utilisons le symbole \forall pour dire “pour tout”. Par exemple, l’expression

$$(\forall x \in X) : x \text{ satisfait } P,$$

signifie que tous les éléments de X satisfont la propriété P . Dans ce cas-ci, le symbole \forall se lit plutôt “on a”.

Attention à l’ordre des quantificateurs. Lorsqu’une affirmation contient plusieurs quantificateurs, un changement dans l’ordre de ceux-ci modifie le sens de l’affirmation. Ainsi, les affirmations

$$\text{“pour tout entier } x, \text{ il existe un entier } y \text{ tel que } x + y = 0\text{”}$$

et

$$\text{“il existe un entier } y \text{ tel que pour tout entier } x \text{ on a } x + y = 0\text{”}$$

ne sont pas équivalentes. La première assertion s’écrit

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) : x + y = 0$$

et signifie que tout entier x possède un inverse pour l’addition ($-x$). La deuxième assertion s’écrit

$$(\exists y \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z}) : x + y = 0$$

et n’est évidemment pas satisfaite puisqu’un nombre entier ne peut pas être simultanément l’inverse pour l’addition de tous les nombres entiers.

On veillera donc à ne pas confondre les affirmations

$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y) : P(x, y) \text{ est vraie}$$

et

$$(\exists y \in Y)(\forall x \in X) : P(x, y) \text{ est vraie,}$$

où $P(x, y)$ est une propriété qui dépend de x et y . Dans le premier cas, on affirme que chaque fois que l’on choisit un élément $x \in X$, on peut trouver un élément $y \in Y$ tel que $P(x, y)$ est vraie et cet élément y peut dépendre de x (c’est à dire que ce ne doit pas être le même pour tous les x), tandis que dans le second cas, on affirme qu’il existe un élément $y \in Y$ tel que $P(x, y)$ est vraie pour tous les $x \in X$ (ce qui implique cette fois que y ne peut pas dépendre de x).

Opérations sur les ensembles

Considérons à présent deux ensembles X et Y . La notation \subseteq est utilisée pour indiquer une inclusion. Ainsi, l'expression

$$X \subseteq Y$$

signifie que X est un sous-ensemble de Y (ou encore X est contenu dans Y), ce qui veut dire que

$$(\forall x \in X) : x \in Y.$$

Nous utilisons aussi la notation $Y \supseteq X$, “ Y contient X ” au lieu de $X \subseteq Y$.

Si x est un élément de X , nous notons $\{x\}$ le sous-ensemble de X ne contenant que l'élément x . Nous appelons ce sous-ensemble, le “**singleton** x ”. Il convient de distinguer la notation $x \in X$, qui signifie que x est un élément de X , de la notation $\{x\} \subseteq X$ qui signifie que le singleton $\{x\}$ est un sous-ensemble de X .

Une fois que la relation d'inclusion est définie, nous pouvons définir l'égalité ensembliste par

$$X = Y \text{ si et seulement si } X \subseteq Y \text{ et } Y \subseteq X.$$

Remarquez que la relation d'inclusion est **transitive**, c'est-à-dire que si $X \subset Y$ et $Y \subset Z$, alors $X \subset Z$.

Définition 2.1. Soient deux ensembles X et Y . Si $X \subseteq Y$ et $X \neq Y$, on dit que X est un sous-ensemble **propre** de Y .

Le sous-ensemble vide de X est l'unique sous-ensemble de X qui ne contient aucun élément. On le note \emptyset . Une façon de le définir est d'écrire

$$\emptyset := \{x \in X : x \neq x\}.$$

Remarquez que nous avons utilisé le symbole “ $:=$ ” pour “est défini par”. Ainsi, l'expression ci-dessus signifie “l'ensemble vide est défini par l'ensemble des éléments x de X tels que $x \neq x$ ” (il n'y a pas de tels éléments).

Définitions 2.2. Soient A, B deux sous-ensembles d'un ensemble X . L'**union** de A et B est l'ensemble

$$A \cup B := \{x \in X : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

L'**intersection** de A et B est l'ensemble

$$A \cap B := \{x \in X : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Si $A \cap B$ est l'ensemble vide, on dit que A et B sont **disjoints**. La **différence** de A et de B est l'ensemble

$$A \setminus B := \{x \in X : x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

L'ensemble $X \setminus A$ est noté A^c et est appelé le **complémentaire** de A .



En construction...

FIG. 2.1 – Union, intersection et différence ensembliste

Ces définitions s'étendent à des familles d'ensembles. Considérons un ensemble I d'indices (pas forcément des nombres entiers). La collection

$$\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$$

est appelée **une famille** d'ensembles. Si X est un ensemble et \mathcal{A} une famille de sous-ensembles de X , l'intersection et l'union de cette famille se définissent par

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in X : (\forall i \in I : x \in A_i)\}$$

et

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in X : (\exists i \in I : x \in A_i)\}$$

Nous ferons parfois usage des **lois de De Morgan** :

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c \text{ et } \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c.$$

Terminons ce paragraphe en rappelant la définition du produit cartésien de deux ensembles X et Y , noté $X \times Y$. Il s'agit de l'ensemble des paires (x, y) où $x \in X$ et $y \in Y$. Si X_1, X_2, \dots, X_n sont des ensembles, on définit

$$\prod_{i=1}^n X_i = X_1 \times \dots \times X_n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in X_i, i = 1, \dots, n\}.$$

2.2 Un peu de logique de base

Il est très important de savoir manier les quelques éléments de logique qui suivent sans hésitation.

Les implications

Considérons deux affirmations ou propriétés A et B . Nous notons

$$A \Rightarrow B,$$

et lisons A implique B , si l'affirmation A entraîne l'affirmation B . Dans ce cas, si nous voulons vérifier que l'affirmation B est vraie, il suffit de vérifier que l'affirmation A est vraie (puisque dès que A est vraie, B l'est aussi). On dit que A est une **condition suffisante** pour B . D'autre part, pour que A soit vraie, il faut que B le soit (puisque

si A était vraie, B le serait aussi). On dit que B est une **condition nécessaire** pour A .

Deux affirmations A et B sont dites équivalentes si

$$A \Rightarrow B \text{ et } B \Rightarrow A.$$

Dans ce cas, on dit que A est une condition nécessaire et suffisante pour B (et vice versa). On note

$$A \Leftrightarrow B,$$

où \Leftrightarrow se lit “est équivalent à” ou encore “si et seulement si”. Par exemple, l’assertion

$$A \Rightarrow B \tag{2.1}$$

est équivalente à l’assertion

$$B \text{ est fausse} \Rightarrow A \text{ est fausse} . \tag{2.2}$$

L’affirmation (2.2) est appelée la **contraposée** de l’affirmation (2.1). On retiendra le diagramme suivant

$$\begin{array}{c} A \text{ est vraie} \Rightarrow B \text{ est vraie} \\ \Updownarrow \\ B \text{ est fausse} \Rightarrow A \text{ est fausse.} \end{array}$$

Le raisonnement par l’absurde

Pour vérifier l’équivalence entre une affirmation et sa contraposée, on peut raisonner **par l’absurde** ou **par contradiction**. Nous décrivons à présent cette technique de démonstration. Pour démontrer l’assertion $A \Rightarrow B$, on suppose que B est fausse. Ensuite, tout en utilisant que A est vrai, on déduit du fait que B est fausse une contradiction, par exemple qu’une tierce affirmation C , dont on sait qu’elle est fausse, est vraie.

Raisonnons par l’absurde pour démontrer l’équivalence des assertions (2.1) et (2.2). Montrons pour commencer que

$$(2.1) \Rightarrow (2.2).$$

Supposons que (2.2) est fausse, c’est-à-dire que “ B est fausse” n’implique pas “ A est fausse”. Mais si A est vraie, alors l’assertion (2.1) entraîne que B est vraie ce qui est contradictoire.

Pour montrer la réciproque (2.2) \Rightarrow (2.1), supposons que (2.1) est fausse, c’est-à-dire que A n’entraîne pas B . Mais si B est fausse, alors A est fausse, ce qui est de nouveau contradictoire.

Exemples 1. 1. *Il existe une infinité de nombres premiers*¹.

Raisonnons par l’absurde. Supposons donc qu’il y a un nombre fini de nombres premiers. Écrivons les dans une liste 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., p. Considérons le nombre

$$N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot p) + 1.$$

¹Un nombre premier est un nombre entier $n \geq 2$ qui n’a d’autres diviseurs que 1 et n . Les nombres 2, 3, 5, 7 sont premiers. Le nombre 6 n’est pas premier, il est divisible par 2 et 3.

Par construction, N n'est pas dans la liste des nombres premiers. Si N est premier, on a obtenu une contradiction et le raisonnement est terminé. Si N n'est pas premier, alors N est un produit de nombres premiers² plus petits que N . Mais aucun des nombres premiers de la liste ne sont des diviseurs de N , car le reste est 1. Il existe donc (au moins) un nombre premier qui n'est pas dans la liste. Ceci conclut le raisonnement par l'absurde.

2. Il n'existe pas de nombre rationnel³ x tel que $x^2 = 2$. Autrement dit, $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Démontrons ceci par l'absurde. Supposons qu'il existe deux entiers p et q tels que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2. \quad (2.3)$$

Nous pouvons supposer sans perte de généralité que la fraction est irréductible (sinon on simplifie les facteurs communs). Il s'ensuit que $p^2 = 2q^2$, ce qui nous apprend que p^2 est un nombre pair et par conséquent p est un nombre pair également. Cette dernière affirmation découle du fait que si $p = 2k + 1$ est impair, alors $p^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est impair. Le nombre p étant pair, il s'écrit $2n$ où n est un entier. Mais dans ce cas, $p^2 = 4n^2$ et on déduit de (2.3) que $q^2 = 2n^2$. Par le raisonnement précédent, on conclut que q est pair. Ceci contredit l'irréductibilité de la fraction p/q .

Pour bien manier la technique de démonstration par l'absurde, il est indispensable de savoir nier correctement l'affirmation à démontrer et en particulier lorsque celle-ci est décrite à l'aide de quantificateurs et de conjonctions. Nions par exemple l'affirmation "tous les étudiants trouvent que le cours de CDI est ennuyeux". Cela donne "il existe (au moins) un étudiant qui ne trouve pas le cours de CDI ennuyeux". La négation de "pour tout" donne "il existe". Réciproquement, la négation de "il existe" donne "pour tout". Nions l'affirmation "il existe un étudiant qui aime le cours de CDI". Cela donne "aucun étudiant n'aime le cours de CDI" ou encore "tous les étudiants n'aiment pas le cours de CDI". En termes de quantificateurs, nous retiendrons les exemples suivants qui sont extrêmement importants.

(i) La négation de

$$(\forall x \in X) : x \text{ satisfait } P$$

est

$$(\exists x \in X) : x \text{ ne satisfait pas } P.$$

(ii) La négation de

$$(\exists x \in X) : x \text{ satisfait } P$$

est

$$(\nexists x \in X) : x \text{ satisfait } P,$$

ce qui s'écrit aussi

$$(\forall x \in X) : x \text{ ne satisfait pas } P.$$

²Voir la preuve par induction dans les Exemples 2.

³Voir la définition 2.8.

(iii) Si $P(x, y)$ est une propriété qui dépend de x et y , la négation de

$$(\exists x \in X)(\forall y \in Y) : x, y \text{ satisfont } P(x, y)$$

est

$$(\nexists x \in X)(\forall y \in Y) : x, y \text{ satisfont } P(x, y),$$

ce qui donne

$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y) : x, y \text{ ne satisfont pas } P(x, y).$$

(iv) Si $P(x, y)$ est une propriété qui dépend de x et y , la négation de

$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y) : x, y \text{ satisfont } P(x, y)$$

est

$$(\exists x \in X)(\nexists y \in Y) : x, y \text{ satisfont } P(x, y),$$

ce qui donne

$$(\exists x \in X)(\forall y \in Y) : x, y \text{ ne satisfont pas } P(x, y).$$

Nier correctement les conjonctions “et” et “ou” est également capital dans bien des situations. Si P_1 et P_2 sont deux propriétés, on retiendra que

(i) la négation de

$$P_1 \text{ est vraie et } P_2 \text{ est vraie}$$

est

$$P_1 \text{ est fausse ou } P_2 \text{ est fausse,}$$

(ii) la négation de

$$P_1 \text{ est vraie ou } P_2 \text{ est vrai}$$

est

$$P_1 \text{ est fausse et } P_2 \text{ est fausse.}$$

Le raisonnement par induction

La **preuve par induction** ou **récurrence** consiste à démontrer une affirmation $A(n)$ qui dépend d'un entier positif n en deux étapes. Dans la première étape, on montre que l'affirmation $A(0)$ est correcte. Dans la seconde étape on suppose que l'affirmation $A(n)$ est vraie et on montre qu'elle entraîne l'affirmation $A(n + 1)$. Ce raisonnement peut s'illustrer par l'image suivante : imaginez que vous devez gravir un escalier qui possède une infinité de marches. Si vous pouvez gravir la première marche et que partant d'une marche donnée vous pouvez gravir la suivante, alors vous êtes théoriquement capable de monter sur toutes les marches.

Schématiquement, la preuve par induction se présente comme suit

(i) prouver que $A(0)$ est vraie : c'est le pas initial ;



En construction...

FIG. 2.2 – Induction

- (ii) (a) supposer que $A(n)$ est vraie : c'est l'hypothèse d'induction ;
- (b) prouver que $A(n) \Rightarrow A(n+1)$: c'est le pas d'induction.

Dans certains cas, il est possible de déduire $A(n+1)$ des affirmations $A(n_0)$, $A(n_0+1)$, \dots , $A(n)$. L'affirmation $A(n)$ est alors vraie pour tout $n \geq n_0$ si on peut vérifier $A(n_0)$. Plus généralement, la preuve par induction consiste à

- (i) prouver que $A(n_0)$ est vraie : c'est le pas initial ;
- (ii) (a) supposer que $A(k)$ est vraie pour tout $n_0 \leq k \leq n$: c'est l'hypothèse d'induction ;
- (b) prouver que l'affirmation $A(n+1)$ se déduit des affirmations $A(n_0)$, $A(n_0+1)$, \dots , $A(n)$: c'est le pas d'induction.

Exemples 2. 1. Montrons que pour $n \geq 1$, on a $n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$.

Le pas initial est "montrer que le résultat est vrai pour $n_0 = 1$ ". Si $n = 1$, l'égalité est trivialement satisfaite. Vient ensuite l'hypothèse d'induction : " $n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ " pour un entier n donné. Le pas d'induction consiste à montrer que si

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) \quad (2.4)$$

pour un entier n donné, alors

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2(n+1) - 1) \\ &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1). \end{aligned}$$

Comme l'hypothèse (2.4) est vraie (c'est l'hypothèse d'induction), en ajoutant $2n+1$ de chaque côté de l'égalité, nous obtenons

$$n^2 + 2n + 1 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1).$$

La conclusion suit maintenant de l'identité $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

2. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + \dots + n.$$

Ceci peut se prouver d'une façon directe. Notons x la somme $1 + 2 + \dots + n$. En regroupant les termes de façon judicieuse, on observe que

$$\begin{aligned} 2x &= \quad 1 \quad + \quad 2 \quad + \dots + (n-1) + \quad n \\ &\quad + \quad n \quad + (n-1) + \dots + \quad 2 \quad + \quad 1 \\ &= (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) \\ &= n(n+1), \end{aligned}$$

et le résultat est démontré. Testons la technique d'induction. Pour $n = 1$, le résultat est vrai. Supposons que la formule est correcte pour un entier n donné, c'est à dire que

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ajoutons $n + 1$ au deux membres de cette égalité. Nous obtenons

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

ce qui prouve que la formule est correcte pour $n + 1$.

3. Montrons que pour tout $n \geq 5$, on a $2^n > n^2$. Commençons l'induction avec $n_0 = 5$. On observe que

$$2^5 = 32 > 25 = 5^2.$$

L'hypothèse d'induction est $2^n > n^2$ pour un entier donné $n \geq 5$. Multiplions l'inégalité par 2. Il vient

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 = n^2 + n^2. \quad (2.5)$$

Comme $n \geq 5$, on a

$$n^2 = n \cdot n \geq 5n = 2n + 3n > 2n + 1.$$

En remplaçant dans le membre de droite de (2.5), on en déduit que

$$2^{n+1} > n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2,$$

ce qui complète le pas d'induction.

4. Tout nombre entier $n \geq 2$ est un produit de nombres premiers. L'induction commence avec $n = 2$ qui est premier. Le pas initial est donc satisfait. Nous prenons ici comme hypothèse d'induction que l'affirmation est correcte pour tout $k \leq n$. Si n est premier, alors l'affirmation vaut aussi pour n . Si n n'est pas premier, n possède deux diviseurs n_1 et n_2 tels que $n = n_1 \cdot n_2$ et $n_1, n_2 < n$. L'hypothèse d'induction entraîne que n_1 et n_2 sont des produits de nombres premiers. Il s'ensuit que n est lui-même produit de nombres premiers.

2.3 Les fonctions

Le concept de fonction est fondamental dans tous les domaines des mathématiques et bien plus encore en analyse.

Dans cette section, les lettres capitales A, B, C, X, Y, Z représentent des ensembles.

Définitions 2.3. Une **fonction** $f : A \subseteq X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$ est une relation qui, à chaque élément x de A , associe un et un seul élément $f(x)$ de Y ; $f(x)$ est l'**image** de x , ou encore la **valeur** de f en x . L'ensemble A est le **domaine** de f , noté aussi $\text{dom}(f)$; l'ensemble Y est le **codomaine**; l'ensemble

$$\text{im}(f) := \{y \in Y \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$$

est l'**image** de f . Si $B \subseteq \text{im}(f)$, les éléments $x \in A$ pour lesquels $f(x) \in B$ sont les **préimages** de B et l'ensemble des préimages

$$f^{-1}(B) := \{x \in A \mid f(x) \in B\},$$

est appelé l'**image réciproque** de l'ensemble B . Le **graphe** de la fonction f est le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par

$$G(f) := \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in A \text{ et } y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in A\}.$$

Si $C \subseteq A$, nous utilisons la notation $f(C)$ pour désigner l'ensemble des images des éléments de C , c'est-à-dire

$$f(C) = \{f(x) \mid x \in C\} = \{y \in Y \mid \exists x \in C : f(x) = y\}.$$

Certaines fonctions qui sont utilisées fréquemment possèdent un nom bien précis et une notation (plus ou moins) standard.

Définitions 2.4. La fonction $\text{id}_X : X \rightarrow X$ définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in X$ est appelée l'**identité** sur X . Si $X \subseteq Y$, la fonction $i_{X,Y} : X \rightarrow Y$ définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in X$ est appelée l'**injection** de X dans Y . Si $X \neq \emptyset$ et $A \subseteq X$, la fonction $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \in A^c, \end{cases}$$

est appelée la **fonction caractéristique** de l'ensemble A .

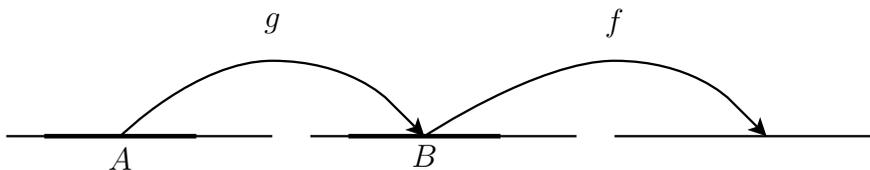
Nous utiliserons aussi souvent les définitions suivantes.

Définitions 2.5. Soient une fonction $f : X \rightarrow Y$ et un sous-ensemble $A \subseteq X$. La fonction $f|_A : A \rightarrow Y$ définie par $\text{dom}(f|_A) = A$ et $f|_A(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$ est appelée la **restriction** de f à l'ensemble A . Si $X \subseteq Z$ et $g : Z \rightarrow Y$ est une fonction telle que $g|_X(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$, on dit que g est une **extension** de f sur l'ensemble Z .

Rappelons la loi de **composition** des fonctions.

Définition 2.6. Soient $g : A \subseteq X \rightarrow B \subseteq Y$ et $f : B \subseteq Y \rightarrow Z$ deux fonctions. La **fonction composée** de f et g est la fonction $f \circ g : A \subseteq X \rightarrow Z$ définie par

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

FIG. 2.3 – Composée de f et g .

On peut se représenter cette définition sur la base de la Figure 2.3. Si on considère qu'appliquer g consiste à suivre la flèche g à partir de A et appliquer f à suivre la flèche f à partir de B alors appliquer la composée $f \circ g$ revient à suivre les flèches g puis f à partir de A .

Rappelons aussi qu'une fonction $f : A \subset X \rightarrow Y$ est **surjective** sur $B \subset Y$ si tout élément de B est l'image par f d'un élément de A , c'est-à-dire

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) : f(x) = y.$$

Une fonction $f : A \subset X \rightarrow Y$ est **injective** si deux éléments différents de A ont des images différentes, i.e.

$$(\forall x_1 \in A)(\forall x_2 \in A \mid x_2 \neq x_1) : f(x_1) \neq f(x_2).$$

En pratique, on vérifie la contraposée, c'est-à-dire

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Une fonction, qui est à la fois injective et surjective est dite **bijective**. Nous avons le résultat⁴ suivant.

Proposition 2.7. *Une fonction $f : A \subset X \rightarrow B \subset Y$ est bijective si et seulement si il existe une fonction $g : B \subset Y \rightarrow A \subset X$ telle que*

$$g \circ f = id_A \text{ et } f \circ g = id_B. \quad (2.6)$$

Démonstration. Prouvons en premier lieu la condition nécessaire. Supposons que f est bijective. Par surjectivité de f , chaque élément $y \in B$ possède une préimage $x \in A$. Comme d'autre part, f est injective, cette préimage x est déterminée de façon unique par y . Ceci définit une fonction $g : B \rightarrow A$ telle que $f(g(y)) = y$ pour tout $y \in B$ et $g(f(x)) = x$ pour tout $x \in A$.

Vérifions à présent la condition suffisante. Supposons l'existence de $g : B \rightarrow A$ satisfaisant (2.6). Comme $f \circ g = id_B$, il est clair que f est surjective sur B . En effet, si $y \in B$, on vérifie que $g(y) \in f^{-1}(\{y\})$. Pour ce qui est de l'injectivité, considérons $x_1, x_2 \in A$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Puisque $g \circ f = id_A$, on a $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$, ce qui montre que f est injective. \square

⁴Tout au long du cours, les affirmations qui ont de l'importance seront énoncées sous la forme d'un théorème, d'une proposition, d'un lemme ou d'un corollaire. De coutume, un théorème est un résultat auquel on accorde beaucoup d'importance; un lemme est un résultat plutôt technique qui précède en général un théorème; un corollaire est le plus souvent un résultat qui se déduit directement d'un théorème. Le mot proposition est passe-partout, il sert à qualifier un résultat que l'on veut mettre en avant mais auquel on ne désire pas donner le statut de théorème.

En vertu de la proposition précédente, une fonction bijective f est également dite **inversible** et la fonction g correspondante, notée f^{-1} , est appelée l'**inverse** de f . Il conviendra de ne pas confondre la fonction f^{-1} et la fonction $1/f$.

Proposition 2.8. *Soient $g : A \subseteq X \rightarrow B \subseteq Y$ et $f : B \subseteq Y \rightarrow C \subseteq Z$ deux fonctions bijectives. La fonction $f \circ g : A \subseteq X \rightarrow C \subseteq Z$ est inversible et son inverse est*

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Démonstration. En vertu de la Proposition 2.7, il nous suffit de vérifier que

$$(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = id_A \text{ et } (f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = id_C.$$

Ces deux égalités découlent immédiatement de l'associativité de la composée et des définitions de f^{-1} et g^{-1} . \square

2.4 Relation d'ordre et champ ordonné

Ensembles ordonnés

Une relation \leq sur un ensemble X est un **ordre** si pour tout $x, y, z \in X$, on a

- (i) $x \leq x$ (réflexivité),
- (ii) $x \leq y$ et $y \leq z$ implique $x \leq z$ (transitivité),
- (iii) $x \leq y$ et $y \leq x$ implique $x = y$ (antisymétrie).

Un ensemble X muni d'une relation d'ordre \leq est dit **ordonné**. L'ordre est **total** si pour tout $x, y \in X$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$. Les notations suivantes sont pratiques : on note $x \geq y$ si et seulement si $y \leq x$; $x < y$ si et seulement si $x \leq y$ et $x \neq y$; $x > y$ si et seulement si $y < x$.

Exemples 3. *Les ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} et \mathbb{R} sont ordonnés.*

Dans un ensemble ordonné, on peut comparer les éléments et donc essayer de déterminer le plus petit et le plus grand élément d'un ensemble.

Définitions 2.9. *Soient (X, \leq) un ensemble ordonné et $A \subset X$. Un élément $s \in X$ est un **majorant** de A si $a \leq s$ pour tout $a \in A$. L'élément $m \in X$ est un **maximum** de A , noté $\max A$ si $m \in A$ et m est un majorant de A . Un élément $s \in X$ est un **minorant** de A si $s \leq a$ pour tout $a \in A$. L'élément $m \in X$ est un **minimum** de A , noté $\min A$ si $m \in A$ et m est un minorant de A . Un ensemble A est dit **borné supérieurement** s'il possède un majorant, il est dit **borné inférieurement** s'il possède un minorant et simplement **borné** s'il est borné supérieurement et inférieurement.*

Si s est un majorant (resp. minorant) de A , on dit que s **majore** (resp. **minore**) A . Remarquons que si le maximum et le minimum existent (ce qui n'est pas nécessairement le cas), ils sont uniques. La définition suivante joue un rôle essentiel en analyse.

Définitions 2.10. Soient (X, \leq) un ensemble ordonné et $A \subset X$ un sous-ensemble borné. Si l'ensemble des majorants de A possède un minimum, celui-ci est appelé le **supremum** de A , noté $\sup A$. Si l'ensemble des minorants de A possède un maximum, celui-ci est appelé l'**infimum** de A , noté $\inf A$.

Autrement dit, le supremum et l'infimum, s'ils existent, sont le plus petit des majorants et le plus grand des minorants, c'est-à-dire

$$\sup A := \min\{s \in X \mid s \text{ majore } A\}$$

et

$$\inf A := \max\{s \in X \mid s \text{ minore } A\}.$$

Ces notions s'étendent naturellement aux fonctions de la façon suivante. Si (X, \leq) et (Y, \leq) ⁵ sont des ensembles ordonnés, on dit que la fonction $f : X \rightarrow Y$ est **bornée inférieurement**, **bornée supérieurement** ou **bornée** si l'ensemble $im(f) \subset Y$ est respectivement borné inférieurement, borné supérieurement ou borné. On définit les notions de minimum, maximum, infimum et supremum de f en conséquence.

Sur des espaces ordonnés, il est utile de définir le concept de **monotonie** d'une fonction.

Définition 2.11. Soient (X, \leq) , (Y, \leq) des ensembles ordonnés. La fonction $f : X \rightarrow Y$ est **croissante** si chaque fois que $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$; f est **décroissante** si chaque fois que $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \geq f(x_2)$; f est **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) si chaque fois que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$). La fonction f est dite (**strictement**) **monotone** si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Champs ordonnés

Un ensemble E doté de deux lois internes, "+" et "·", est un **champ** ou corps commutatif si les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $E, +$ est un groupe commutatif dont l'élément neutre est noté 0,
2. $E \setminus \{0\}, \cdot$ est un groupe commutatif dont l'élément neutre est noté 1,
3. la multiplication est distributive pour l'addition, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} e_1 \cdot (e_2 + e_3) &= (e_1 \cdot e_2) + (e_1 \cdot e_3), \\ (e_1 + e_2) \cdot e_3 &= (e_1 \cdot e_3) + (e_2 \cdot e_3), \end{aligned}$$

pour tout $e_1, e_2, e_3 \in E$.

Rappelons que

1. $E, +$ est un groupe commutatif si la loi "+" est
 - (i) interne et partout définie,
 - (ii) associative, c'est-à-dire que si $e_1, e_2, e_3 \in E$, on peut écrire

$$e_1 + (e_2 + e_3) = (e_1 + e_2) + e_3,$$

⁵Nous utilisons le même symbole pour désigner l'ordre sur Y mais il ne doit pas pour autant être défini de la même façon.

- (iii) telle qu'il existe un élément neutre (noté 0) satisfaisant $e + 0 = 0 + e = e$ pour tout $e \in E$,
- (iv) telle que pour tout $e \in E$, il existe un inverse $-e \in E$ satisfaisant $e + (-e) = (-e) + e = 0$,
- (v) commutative, c'est-à-dire que si $e_1, e_2 \in E$, on peut écrire

$$e_1 + e_2 = e_2 + e_1.$$

2. $E \setminus \{0\}, \cdot$ est un groupe commutatif si la loi “ \cdot ” est

- (i) interne et partout définie,
- (ii) associative, c'est-à-dire que si $e_1, e_2, e_3 \in E \setminus \{0\}$, on peut écrire

$$e_1 \cdot (e_2 \cdot e_3) = (e_1 \cdot e_2) \cdot e_3,$$

- (iii) telle qu'il existe un élément neutre (noté 1) satisfaisant $e \cdot 1 = 1 \cdot e = e$ pour tout $e \in E \setminus \{0\}$,
- (iv) telle que pour tout $e \in E \setminus \{0\}$, il existe un inverse $e^{-1} \in E \setminus \{0\}$ satisfaisant $e \cdot e^{-1} = e^{-1} \cdot e = 1$,
- (v) commutative, c'est-à-dire que si $e_1, e_2 \in E \setminus \{0\}$, on peut écrire

$$e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1.$$

Si en plus des lois d'addition et de multiplication, l'ensemble E est muni d'un ordre \leq , on dit que cet ordre est compatible si

- (a) $e_1 \leq e_2$ implique $e_1 + e_3 \leq e_2 + e_3$ pour tout $e_3 \in E$,
- (b) $e_1, e_2 \geq 0$ implique $e_1 \cdot e_2 \geq 0$.

Un **champ ordonné** est un champ muni d'un ordre total compatible avec l'addition et la multiplication.

Exemples 4. Les ensembles \mathbb{N} et \mathbb{Z} sont ordonnés mais ce ne sont pas des champs. Les ensembles \mathbb{Q} et \mathbb{R} sont des champs, l'ensemble \mathbb{R} étant l'exemple de champ le plus important dans ce cours.

Dans un champ ordonné, on peut définir les fonctions **valeur absolue**, $|\cdot| : E \rightarrow E$, et **sign**, $sign : E \rightarrow \{-1, 0, 1\} \subset E$, par

$$|e| := \begin{cases} e, & \text{si } e > 0, \\ 0, & \text{si } e = 0, \\ -e, & \text{si } e < 0, \end{cases} \quad sign(e) := \begin{cases} 1, & \text{si } e > 0, \\ 0, & \text{si } e = 0, \\ -1, & \text{si } e < 0. \end{cases}$$

Il convient de bien retenir les propriétés de ces fonctions. Nous omettons systématiquement de noter le “ \cdot ” de la loi multiplicative.

Proposition 2.12. Soient (E, \leq) un champ ordonné et $x, y, a, \varepsilon^6 \in E$, où $\varepsilon > 0$. Nous avons les propriétés

⁶Ce symbole est une lettre grecque qui se lit *epsilon*.

- (i) $x = |x| \operatorname{sign}(x)$ et $|x| = x \operatorname{sign}(x)$,
- (ii) $|x| = |-x|$ et $x \leq |x|$,
- (iii) $|xy| = |x||y|$,
- (iv) $|x| \geq 0$ et $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- (v) $|x - a| < \varepsilon$ si et seulement si $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$,
- (vi) $|x + y| \leq |x| + |y|$,
- (vii) $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

Démonstration. Les cinq premières propriétés découlent directement des définitions et des axiomes de compatibilité de l'ordre avec l'addition et la multiplication. Vérifions les deux dernières. Pour démontrer (vi), supposons dans un premier temps que $x + y \geq 0$. On déduit alors de la propriété (ii) que

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|.$$

Si $x + y < 0$, alors

$$|x + y| = |-(x + y)| = |(-x) + (-y)| \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|,$$

ce qui achève la preuve de cette propriété.

Démontrons finalement la propriété (vii). Pour ce faire, appliquons la propriété (vi) à la somme $(x - y) + y$, ce qui donne

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$$

ou encore

$$|x - y| \geq |x| - |y|.$$

En changeant le rôle de x et y dans cette inégalité, on obtient

$$|x - y| = |y - x| \geq |y| - |x| = -(|x| - |y|).$$

□

L'inégalité (vi) porte le nom d'**inégalité triangulaire**. Nous l'utiliserons abondamment dans les prochains chapitres. En raisonnant par induction, on démontre l'inégalité généralisée

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

où nous avons utilisé les notations condensées

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

et

$$\sum_{i=1}^n |x_i| = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

2.5 Les naturels, les entiers et les rationnels

L'ensemble des nombres naturels⁷ (ou entiers positifs) est l'ensemble

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (2.7)$$

Il existe une addition $+$, une multiplication \cdot et un ordre \leq sur \mathbb{N} . Nous supposons connues toutes les règles classiques de l'arithmétique des nombres entiers (ce sont celles que vous connaissez depuis l'école primaire).

Les éléments de \mathbb{N} ne possèdent pas d'inverse pour l'addition et donc $\mathbb{N}, +$ n'est pas un groupe. Ceci nous conduit à considérer une première extension de \mathbb{N} : l'ensemble des entiers⁸

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

L'ensemble $\mathbb{Z}, +$ est un groupe commutatif. Cependant, dans \mathbb{Z} , nous ne pouvons résoudre l'équation $2x = 1$, c'est-à-dire que 2 n'a pas d'inverse pour la multiplication. Il s'ensuit que $\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot$ n'est pas un groupe. Ce nouveau défaut nous conduit à considérer un ensemble encore plus grand : l'ensemble des rationnels⁹

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ et } q \neq 0 \right\}. \quad (2.8)$$

Puisque \mathbb{Q} est une extension de \mathbb{N} , les opérations $+$ et \cdot s'étendent sur \mathbb{Q} . Rappelons que

$$\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + qm}{qn} \text{ et } \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}.$$

Nous avons corrigé les défauts de \mathbb{N} et \mathbb{Z} pour que $\mathbb{Q}, +, \cdot$ soit un champ. C'est un champ ordonné. L'ordre est défini par extension de l'ordre sur \mathbb{N} :

$$\frac{p}{q} \leq \frac{m}{n} \text{ si et seulement si } mq - pn \in \mathbb{N}.$$

Nous avons vu dans l'Exemple 1 que l'équation $x^2 = 2$ ne possède pas de solution dans \mathbb{Q} . Cette équation peut se résoudre dans \mathbb{R} que nous décrivons dans le Chapitre 3.

Terminons cette section par quelques notations courantes que nous utiliserons dans ce texte :

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_0 &:= \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ \mathbb{Z}_0 &:= \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ \mathbb{Z}^- &:= \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq 0\}, \\ \mathbb{Z}_0^- &:= \{z \in \mathbb{Z} \mid z < 0\}. \end{aligned}$$

⁷Voir [1, section I.5] ou [7, Chapitre 2] pour une approche constructive de \mathbb{N} .

⁸ \mathbb{Z} est le plus petit anneau commutatif contenant \mathbb{N} , voir par exemple [1, section I.9].

⁹ \mathbb{Q} est le plus petit champ contenant \mathbb{Z} , voir par exemple [1, section I.9].

2.6 Ensembles dénombrables

Dans ce paragraphe, nous discutons brièvement la notion de dénombrement. Une première approche naïve consiste à dire qu'un ensemble est **dénombrable** si on peut compter ses éléments.

Définitions 2.13. *Un ensemble X est*

- (i) **fini** s'il existe un entier positif m et une fonction bijective $f : X \rightarrow \{1, \dots, m\}$,
- (ii) **infini** s'il n'est pas fini,
- (iii) **dénombrable** s'il existe une fonction bijective $f : X \rightarrow \mathbb{N}$,
- (iv) **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable.

Cette définition traduit l'idée que les éléments d'un ensemble au plus dénombrable peuvent être numérotés (ou rangés) dans une liste (peut-être infinie). Un ensemble **non dénombrable** est un ensemble pour lequel il n'est pas possible de construire une bijection avec \mathbb{N} , c'est-à-dire qu'il est impossible de numéroter les éléments.

Il est facile de montrer que deux ensembles finis sont en bijection si et seulement si ils ont le même nombre d'éléments. L'idée naïve est de penser qu'un ensemble infini est dénombrable s'il a le même nombre d'éléments que \mathbb{N} . Cette idée est trop simpliste car l'ensemble des nombres pairs est dénombrable et il y a clairement plus d'entiers positifs que de nombres pairs. De même \mathbb{Z} est dénombrable. L'idée est plutôt qu'il y a la même infinité (ou une infinité comparable) d'éléments.

Exemples 5. 1. *L'ensemble \mathbb{N} est infini. Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \rightarrow \{1, \dots, m\}$. Considérons les nombres $0, 1, \dots, m$. Puisque f est injective, les nombres $f(0), f(1), \dots, f(m)$ sont tous différents, ce qui est impossible puisque $\text{im}(f) = \{1, \dots, m\}$ ne contient que m éléments.*

2. *L'ensemble $2\mathbb{N} := \{0, 2, 4, \dots\}$ des nombres pairs est dénombrable. En effet, l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N} : n \mapsto 2n$ est une bijection.*

3. *L'ensemble \mathbb{Z} est dénombrable car l'application $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par*

$$f(z) = \begin{cases} 2z & \text{si } z \geq 0, \\ -2z - 1 & \text{si } z < 0, \end{cases}$$

est une bijection.

Définition 2.14. *Deux ensembles X et Y sont dits **équipotents** lorsqu'il existe une bijection $f : X \rightarrow Y$.*

Il est clair que si X est dénombrable et Y est équipotent à X , alors Y est dénombrable. Il suffit d'invoquer le fait que la composée de deux bijections est une bijection.

Proposition 2.15. *Soient X et Y deux ensembles au plus dénombrables. On a les propriétés suivantes :*

- (i) *si $A \subset X$, A est au plus dénombrable,*
- (ii) *$X \cup Y$ est au plus dénombrable,*

(iii) $X \times Y$ est au plus dénombrable.

Démonstration. (i) Si A est fini (c'est le cas si X est fini), il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que A est infini (cela entraîne que X est infini). Supposons dans un premier temps que $X = \mathbb{N}$. Comme \mathbb{N} est ordonné, les éléments de A peuvent être numérotés par ordre croissant, c'est-à-dire que l'on peut définir récursivement $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ par $f(a_0) = 0$, où $a_0 = \min A$ et pour $m \geq 1$, $f(a_m) = m$, où $a_m = \min\{a \in A \mid a > a_{m-1}\}$. Par construction, f est une bijection.

Considérons à présent le cas général. Comme X est dénombrable, il existe une bijection $g : X \rightarrow \mathbb{N}$. Il est clair que $g|_A : A \rightarrow g(A)$ est une bijection. Comme $g(A) \subset \mathbb{N}$, il suit du cas $X = \mathbb{N}$ que $g(A) = g|_A(A)$ est dénombrable. Pour conclure, on observe que A et $g(A)$ sont équipotents.

(ii) Si X et Y sont finis, $X \cup Y$ est fini. Si X est fini et Y est infini, il existe deux bijections $f : X \rightarrow \{1, \dots, m\}$ et $g : Y \rightarrow \mathbb{N}$. On vérifie facilement que la fonction $h : X \cup Y \rightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} f(x) - 1 & \text{si } x \in X, \\ g(x) + m & \text{si } x \in Y, \end{cases}$$

est une bijection.

Si X et Y sont dénombrables, il existe deux applications bijectives $f : X \rightarrow \mathbb{N}$ et $g : Y \rightarrow \mathbb{N}$. Définissons $h : X \cup Y \rightarrow \mathbb{N}$ par

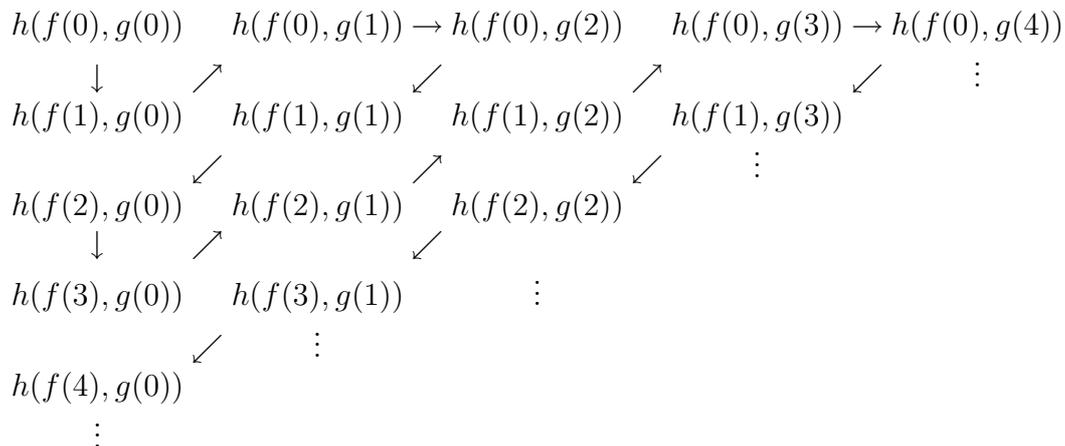
$$h(x) = \begin{cases} 2f(x) & \text{si } x \in X, \\ 2g(x) + 1 & \text{si } x \in Y. \end{cases}$$

L'application h est bijective.

(iii) Si X et Y sont dénombrables, il existe deux applications bijectives $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow Y$. Définissons $h : X \times Y \rightarrow \mathbb{N}$ par

$$\begin{array}{lll} h(f(0), g(0)) = 0 & h(f(1), g(0)) = 1 & h(f(0), g(1)) = 2 \\ h(f(0), g(2)) = 3 & h(f(1), g(1)) = 4 & h(f(2), g(0)) = 5 \\ h(f(3), g(0)) = 6 & h(f(2), g(1)) = 7 & h(f(1), g(2)) = 8 \\ h(f(0), g(3)) = 9 & h(f(0), g(4)) = 10 & \dots \end{array}$$

Cela revient à lister les éléments de $X \times Y$ dans un tableau à deux entrées, en ordonnant les éléments de X et de Y par les numéros attribués par les bijections f et g puis en numérotant les entrées en suivant les flèches :



Par construction, l'application h est bijective.

Si X est fini et Y est dénombrable, on argumente de la même façon. Schématiquement, on obtient un classement dans un tableau à deux entrées contenant un nombre infini de colonnes et un nombre fini de lignes.

Si X et Y sont finis, alors $X \times Y$ est fini. \square

Par induction, les propriétés (ii) et (iii) sont vraies pour une union finie ou un produit fini d'ensembles dénombrables. La propriété (ii) est encore vraie pour une union dénombrable.

Proposition 2.16. *Une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est un ensemble au plus dénombrable.*

Démonstration. On peut par exemple argumenter en utilisant les propriétés (i) et (iii) de la Proposition 2.15. Soit I un ensemble dénombrable d'indices. Notons $X = \cup_{i \in I} X_i$, où $\{X_i : i \in I\}$ est une famille d'ensembles dénombrables. Supposons dans un premier temps que les ensembles X_i sont disjoints 2 à 2. Dans ce cas, $x \in X$ s'il existe (un unique) $i \in I$ tel que $x \in X_i$. Définissons alors $g : X \rightarrow I \times \mathbb{N}$ par $g(x) = (i, f_i(x))$, où $f_i : X_i \rightarrow \text{im}(f_i) \subset \mathbb{N}$ est une bijection. Par construction, l'application g est une bijection entre X et un sous-ensemble (dénombrable par (i) et (ii)) de $I \times \mathbb{N}$.

Montrons à présent que nous pouvons, sans perte de généralité, supposer les ensembles disjoints. En effet, I étant dénombrable, on peut numéroter les éléments de $I = (i(0), i(1), i(2), \dots)$, où $i : \mathbb{N} \rightarrow I$ est une bijection. On définit alors récursivement $\tilde{X}_0 = X_{i(0)}$ et $\tilde{X}_n = X_{i(n)} \setminus (\tilde{X}_0 \cup \dots \cup \tilde{X}_{n-1})$ pour $n \geq 1$. Les ensembles \tilde{X}_n sont 2 à 2 disjoints et au plus dénombrables par la propriété (i) de la Proposition 2.15. On peut donc se ramener au cas précédent puisque $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{X}_n$. \square

La propriété (iii) ne s'étend pas au produit dénombrable même s'il s'agit d'un produit d'ensembles finis.

Exemples 6. *L'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots$ n'est pas dénombrable. Un élément de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est une séquence infinie x de 0 ou 1, c'est-à-dire $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$, où chaque x_i vaut 0 ou 1. Supposons par l'absurde que cet ensemble est dénombrable. Dans ce cas, il existe une bijection $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Regardons la liste des éléments $f(0) = (f(0)_0, f(0)_1, \dots)$, $f(1) = (f(1)_0, f(1)_1, \dots)$, $f(2) = (f(2)_0, f(2)_1, \dots)$, \dots et construisons l'élément $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de la façon suivante :*

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{si } f(i)_i = 1, \\ 1 & \text{si } f(i)_i = 0. \end{cases}$$

Puisque $x_i \neq f(i)_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a construit un élément de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ qui n'est pas dans l'image de \mathbb{N} par f . Ceci contredit la surjectivité de f et donc $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Il suit de la Proposition 2.15 que l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est dénombrable. Nous allons utiliser ce fait pour démontrer que \mathbb{Q} est dénombrable.

Proposition 2.17. *L'ensemble \mathbb{Q} est dénombrable.*

Démonstration. L'ensemble \mathbb{Q} est l'ensemble des fractions et nous pouvons supposer que les fractions ont été réduites. D'où

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, p \text{ et } q \text{ n'ont pas de facteurs communs et } q \neq 0 \right\}.$$

Soit $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0 : \frac{p}{q} \rightarrow (p, q)$. Il est évident que f est injective. Il existe donc une bijection entre \mathbb{Q} et $\text{im}(f) \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$, c'est-à-dire que \mathbb{Q} est équipotent à un sous-ensemble de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui est dénombrable. La conclusion se déduit à présent de la Proposition 2.15 et du fait que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ entraîne que \mathbb{Q} n'est pas fini. \square

2.7 Notations

Outre les notations déjà introduites dans les paragraphes précédents, nous utiliserons les symboles \sum et \prod pour la somme et le produit de plusieurs termes. En particulier, on utilisera

$$\sum_{n=0}^m a_n := a_0 + a_1 + \dots + a_{m-1} + a_m,$$

pour une somme sur les indices de 0 à m et

$$\sum_{i \in I} a_i,$$

pour indiquer que la somme est prise sur l'ensemble des indices dans I . On utilisera pour les produits de plusieurs termes les notations analogues :

$$\prod_{n=0}^m a_n := a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_{m-1} \cdot a_m,$$

pour un produit sur les indices de 0 à m et

$$\prod_{i \in I} a_i,$$

pour indiquer que le produit est pris sur l'ensemble des indices dans I .

Chapitre 3

Les nombres réels et les nombres complexes

Motivation

Les nombres entiers positifs sont appropriés pour compter les objets ou le nombre d'éléments d'un ensemble. Les nombres réels apparaissent dans la mesure des longueurs. Les rationnels, encore appelés les fractions, suffisent pour situer convenablement un point sur une droite ou partager un segment en plusieurs morceaux. Le rapport de la longueur de la diagonale d'un carré à celle de son côté nécessite d'introduire le nombre $\sqrt{2}$ qui n'est pas une fraction. Le nombre π est nécessaire pour calculer le rapport entre le périmètre d'un cercle et son diamètre. Les mathématiciens sont donc confrontés à un ensemble de nombres imposés par la nature. La plupart des traités d'analyse débutent par une discussion rigoureuse sur le concept de nombres. Nous supposons que le lecteur est familier avec les nombres naturels¹, les nombres entiers, les nombres rationnels ainsi qu'avec leurs propriétés liées aux opérations d'addition et de multiplication. Nous nous attardons par contre sur les nombres réels et leurs propriétés car l'analyse mathématique se base sur une définition rigoureuse de cet ensemble. Nous adoptons une approche axiomatique, c'est-à-dire que nous donnons une liste de propriétés que nous supposons être vraies et nous bâtissons le cours sur ces bases précises. Il est possible de suivre une démarche constructive de l'ensemble des réels, c'est-à-dire d'en donner une construction comme extension de l'ensemble des rationnels. Le lecteur intéressé par cette approche pourra consulter la construction de Dedekind présentée par exemple dans Amann et Escher [1, section I.10] ou la construction par complétion présentée dans Tao [7, Chapitre 5]. Ces deux ouvrages contiennent également une description détaillée (et constructive) des ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Z} et \mathbb{Q} .

L'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans le champ des réels (et dans aucun autre champ ordonné). Une nouvelle extension permet d'obtenir un champ, le champ des complexes \mathbb{C} , dans lequel toute équation du second degré a au moins une solution. Contrairement à l'extension de \mathbb{Q} vers \mathbb{R} qui demande une construction assez délicate, l'extension de \mathbb{R} à \mathbb{C} est relativement simple. Nous adoptons à nouveau une approche descriptive et nous n'insistons pas sur le fait que \mathbb{C} est la "bonne"

¹Voir les quelques rappels dans le Chapitre 2.

extension. Nous renvoyons le lecteur à Amann et Escher [1, section I.11] pour de plus amples détails.

3.1 Complétude pour l'ordre

L'ensemble $\mathbb{R}, +, \cdot$ est un champ ordonné. Rappelons que cela signifie que $\mathbb{R}, +$ est un groupe commutatif (dont l'élément neutre est noté 0), $\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot$ est un groupe commutatif (dont l'élément neutre est noté 1), que la multiplication est distributive pour l'addition et qu'il existe une relation d'ordre total \leq sur \mathbb{R} . Toutes ces notions sont rappelées dans le Chapitre 2.

Nous avons vu au Chapitre 2 que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Par conséquent l'ensemble

$$Q = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ et } x^2 < 2\}$$

ne possède pas de supremum. En effet, si s est le supremum de Q , on doit avoir $s^2 < 2$ ou bien $s^2 > 2$ (le cas $s^2 = 2$ est exclu puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). Dans le premier cas, on observe que

$$s^2 + \frac{2s}{k} + \frac{1}{k^2} = \left(s + \frac{1}{k}\right)^2 < 2$$

si $k \in \mathbb{N}$ est choisi assez grand. Ceci contredit le fait que s est un majorant de Q . Si $s^2 > 2$, on observe que

$$s^2 - \frac{2s}{k} + \frac{1}{k^2} = \left(s - \frac{1}{k}\right)^2 > 2$$

si $k \in \mathbb{N}$ est choisi assez grand. Cela contredit cette fois le fait que s est le plus petit des majorants.

Dans l'ensemble des nombres réels, un tel accident ne se produit pas : toute partie non vide bornée supérieurement possède un supremum. C'est l'**axiome de complétude**².

Définition 3.1. *Un ensemble X totalement ordonné est **complet pour l'ordre** si tout sous-ensemble de X non vide et borné supérieurement admet un supremum.*

Remarquons qu'il est équivalent de formuler l'axiome comme suit : tout ensemble non vide borné inférieurement possède un infimum, ou encore tout ensemble borné possède un infimum et un supremum. D'après l'exemple précédent, \mathbb{Q} n'est pas complet. L'ensemble \mathbb{R} des nombres réels est une extension de \mathbb{Q} qui satisfait l'axiome de complétude : **\mathbb{R} est un champ ordonné complet**³. Nous utiliserons souvent la caractérisation suivante du supremum d'une partie de \mathbb{R} .

Proposition 3.2. *Si $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ est le supremum de A si et seulement si*

- (i) x majore A ;
- (ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $a > x - \varepsilon$.

²On peut construire une extension de \mathbb{Q} par exemple par l'approche dite des coupures de Dedekind et démontrer que l'ensemble obtenu, noté \mathbb{R} , satisfait l'axiome de complétude. Voir Amann et Escher [1, section I.10].

³C'est le seul champ ordonné complet (à isomorphisme près) qui contient \mathbb{Q} .

Démonstration. Commençons par la condition nécessaire. Supposons que $x = \sup A$. La condition (i) est satisfaite par définition du supremum. Pour prouver (ii), supposons par l'absurde que (ii) n'a pas lieu. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $a \in A$, $a \leq x - \varepsilon$. Donc, $x - \varepsilon$ est un majorant de A , ce qui contredit le fait que x est le plus petit des majorants de A .

Passons à la condition suffisante. Supposons que x satisfait (i) et (ii). Argumentons de nouveau par contradiction et supposons que x n'est pas le plus petit des majorants, c'est-à-dire qu'il existe un majorant y de A tel que $y < x$. Notons $\varepsilon = x - y$. Par (ii), il existe $a \in A$ tel que $a > x - \varepsilon = x - (x - y) = y$. Ceci contredit le fait que y est un majorant. \square

Il est clair que l'infimum d'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ satisfait une caractérisation analogue : $x \in \mathbb{R}$ est l'infimum de A si et seulement si

- (i) x minore A ;
- (ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $a < x + \varepsilon$.

Nous avons motivé notre intérêt pour l'ensemble \mathbb{R} par le fait qu'il n'est pas possible de résoudre l'équation $x^2 = 2$ dans \mathbb{Q} . Il est équivalent de dire que nous ne pouvons pas définir dans \mathbb{Q} la racine carrée de n'importe quel nombre rationnel positif. Dans \mathbb{R} , nous pouvons non seulement définir la racine carrée de tout nombre réel, mais bien plus.

Définition 3.3. Soient $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 0$. La **racine $n^{\text{ième}}$** de x est le nombre

$$x^{1/n} := \sup\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \text{ et } y^n \leq x\}.$$

Nous ne démontrons pas ici l'existence de la racine $n^{\text{ième}}$. Cette preuve⁴ consiste à démontrer que l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \text{ et } y^n \leq x\}$ est non vide et majoré.

Si $q \in \mathbb{Q}$, on définit l'**exponentielle rationnelle** par

$$x^q = (x^{1/n})^m,$$

où $q = m/n$ est sous forme irréductible. Les règles usuelles des exposants entiers s'étendent aux exposants rationnels :

$$(x^p)^q = x^{pq} \text{ et } x^p x^q = x^{p+q},$$

où $x > 0$ et $p, q \in \mathbb{Q}$.

L'extension $\overline{\mathbb{R}}$

Il est commode d'adjoindre à \mathbb{R} deux éléments, notés $-\infty$ et $+\infty$, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-\infty < x < +\infty. \tag{3.1}$$

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se note $\overline{\mathbb{R}}$. Avec la convention (3.1), $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ est totalement ordonné.

L'intérêt premier d'introduire $\pm\infty$ réside dans l'extension de la propriété de complétude à toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$, bornée ou non.

⁴Voir Amann et Escher [1, Proposition 10.9] ou Tao [7, Lemma 5.6.5].

Proposition 3.4. *Tout ensemble $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ possède un supremum et un infimum dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. Si $A \subset \mathbb{R}$ est non vide et borné, la conclusion découle de l'axiome de complétude.

Si $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ n'est pas borné supérieurement ou contient $+\infty$, alors $+\infty$ est le seul majorant et donc $\sup A = +\infty$.

Si $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ est vide ou égal à $\{-\infty\}$, alors tout élément de $\overline{\mathbb{R}}$ majore A . Le plus petit élément de $\overline{\mathbb{R}}$ est $-\infty$ et donc $\sup A = -\infty$.

On raisonne de même pour montrer l'existence d'un infimum. En particulier, si A n'est pas bornée inférieurement, $\inf A = -\infty$ tandis que $\inf \emptyset = +\infty$. \square

Il convient de faire très attention avec les règles de l'arithmétique dans $\overline{\mathbb{R}}$. Nous insistons sur le fait que $\pm\infty$ **ne sont pas des nombres réels**. Les opérations $+$ et \cdot s'étendent partiellement à $\overline{\mathbb{R}}$ de la façon suivante :

(i) si $x \in \overline{\mathbb{R}}$, alors

$$\begin{aligned}x + \infty &= +\infty \text{ pour tout } x > -\infty, \\x - \infty &= -\infty \text{ pour tout } x < +\infty,\end{aligned}$$

(ii) la multiplication par $\pm\infty$ donne

$$x \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{pour tout } x > 0, \\ -\infty & \text{pour tout } x < 0, \end{cases}$$

et

$$x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{pour tout } x > 0, \\ +\infty & \text{pour tout } x < 0, \end{cases}$$

(iii) pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0 \text{ et } \frac{x}{0} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0, \\ -\infty & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Nous supposons aussi que les opérations $+$ et \cdot sont commutatives. Il suit de ces définitions que

$$\begin{aligned}\infty + \infty &= +\infty, & -\infty - \infty &= -\infty, & \infty \cdot \infty &= +\infty, \\(-\infty) \cdot \infty &= \infty \cdot (-\infty) &= -\infty, & (-\infty) \cdot (-\infty) &= +\infty,\end{aligned}$$

mais par contre les expressions

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{0}$$

ne sont pas définies. En particulier, $\overline{\mathbb{R}}$ n'est pas un champ.

3.2 Quelques notations et propriétés de \mathbb{R}

Nous présentons dans cette section des notations courantes et des propriétés importantes de l'ensemble \mathbb{R} .

Intervalles

Un **intervalle** est un sous-ensemble I de \mathbb{R} qui satisfait la propriété suivante : si $x, y \in I$ et $x < z < y$, alors $z \in I$. L'ensemble des réels tout entier satisfait cette propriété. On utilise souvent la notation $] - \infty, +\infty[$ pour le désigner. L'ensemble $\mathbb{R}_0 := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas un intervalle.

Plus généralement, on note pour $-\infty \leq a < b \leq +\infty$,

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

et pour $-\infty < a < b < +\infty$,

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Dans le premier cas, on dit que l'intervalle est **ouvert**, dans le second on dit qu'il est **fermé**. On définit également les notations

$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

pour $-\infty \leq a < b < +\infty$, et

$$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

pour $-\infty < a < b \leq +\infty$. On dit dans ces deux derniers cas que l'intervalle est **semi-ouvert** (ou **semi-fermé**) respectivement à gauche et à droite (ou respectivement à droite et à gauche).

L'intervalle I est dit borné si ces deux extrémités sont des nombres réels. Il est dit non borné dans le cas contraire.

Les ensembles $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty[$ et $\mathbb{R}_0^+ :=]0, +\infty[$ sont des intervalles non bornés respectivement semi-ouvert et ouvert.

Propriété d'Archimède

Notre première proposition affirme que \mathbb{N} n'est pas majoré dans \mathbb{R} .

Proposition 3.5. *Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe un réel x qui majore \mathbb{N} , c'est-à-dire $n \leq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, étant donné que \mathbb{R} satisfait l'axiome de complétude, \mathbb{N} possède un supremum dans \mathbb{R} . Notons le x_0 . Considérons $n \in \mathbb{N}$. Comme $n + 1 \in \mathbb{N}$ et x_0 majore \mathbb{N} , on a $n + 1 \leq x_0$ ou encore $n \leq x_0 - 1$. Ce raisonnement ne dépend pas du choix de n donc $x_0 - 1$ est encore un majorant de \mathbb{N} , ce qui contredit le fait que x_0 est le plus petit des majorants. \square

Corollaire 3.6. *Pour tout $x \in \mathbb{R}_0^+$, il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $\frac{1}{n} < x$.*

Démonstration. C'est une réécriture de la Propriété d'Archimède. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}_0^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $\frac{1}{n} \geq x$. Alors $n \leq \frac{1}{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\frac{1}{x}$ est un majorant de \mathbb{N} , ce qui est impossible. \square

Nous utiliserons ce corollaire de la façon suivante : si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, alors $x = 0$.

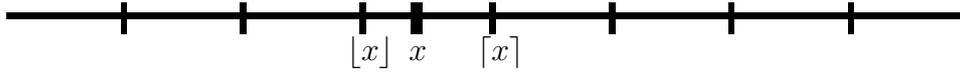


FIG. 3.1 – Illustrations du plancher et du plafond d'un nombre réel positif.

Densité de \mathbb{Q} et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Soit $X \subset \mathbb{R}$. On dit que X est **dense** dans \mathbb{R} si tout intervalle ouvert contient un élément de X , c'est-à-dire pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, il existe $x \in X$ tel que $a < x < b$.

Nous utilisons le lemme suivant pour démontrer la densité des rationnels.

Lemme 3.7. *Si $x \in \mathbb{R}^+$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m = \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$.*

Démonstration. Par la Propriété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$. On en déduit que $m = \max\{k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \mid k \leq x\}$. \square

Ce lemme montre l'existence de la **partie entière** des nombres réels positifs. On peut étendre cette définition à \mathbb{R} tout entier en démontrant l'existence du plus grand nombre entier inférieur à x . On note souvent la partie entière de x par $[x]$ qu'on appelle aussi le plancher de x . On peut définir de même le plafond de x , noté $]x]$ comme étant le plus petit nombre entier supérieur à x .

Proposition 3.8. *L'ensemble \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .*

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrons qu'il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $a < q < b$.

Par le corollaire de la Propriété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\frac{1}{n} < \frac{b-a}{2}. \quad (3.2)$$

Soit $m = \left\lfloor \frac{n(a+b)}{2} \right\rfloor$. Par définition du plancher, on a

$$m \leq \frac{n(a+b)}{2} < m+1$$

ou encore

$$\frac{m}{n} \leq \frac{a+b}{2} < \frac{m+1}{n}. \quad (3.3)$$

On déduit à présent des inégalités (3.2) et (3.3) que

$$a < \frac{a+b}{2} < \frac{m+1}{n} < \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} = b.$$

Le nombre rationnel $q = \frac{m+1}{n}$ a la propriété recherchée. \square



En construction...

FIG. 3.2 – Densité des rationnels

En itérant la construction précédente, on démontre qu'il existe une infinité de nombres rationnels entre deux nombres réels quelconques. Il suit également de la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} que tout nombre réel peut-être approximé d'aussi près que l'on désire par un nombre rationnel, c'est-à-dire que pour tout réel x , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $q - \varepsilon < x < q + \varepsilon$.

L'ensemble des nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés les nombres **irrationnels**. Cet ensemble est aussi dense dans \mathbb{R} .

Proposition 3.9. *L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} .*

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrons qu'il existe $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $a < \xi < b$.

Par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , il existe $p, q \in \mathbb{Q}$ tels que $a < p < b$ et $p < q < b$. Posons

$$\xi = p + \frac{q - p}{\sqrt{2}} > p.$$

On observe que

$$\xi - q = (p - q) \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \right) < 0$$

et que $\xi \notin \mathbb{Q}$. En effet, si $\xi \in \mathbb{Q}$, alors

$$\sqrt{2} = \frac{q - p}{\xi - p} \in \mathbb{Q},$$

ce qui est absurde. □

3.3 Les nombres complexes

Notre point de départ pour définir l'ensemble des complexes est l'hypothèse de l'existence d'un nouvel élément, que nous notons i , tel que $i^2 = -1$. Bien entendu, $i \notin \mathbb{R}$. À partir de cette hypothèse, nous définissons \mathbb{C} par $\mathbb{R} + i\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Tout complexe z s'écrit donc $x + iy$ et cette représentation est unique. En effet, si z peut s'écrire de deux façons différentes $z = x + iy$ et $z = u + iv$ avec $x \neq u$ et $y \neq v$, alors on observe que $i = \frac{x-u}{v-y} \in \mathbb{R}$ ce qui est impossible. Puisque la représentation $z = x + iy$ est unique, on peut définir la **partie réelle** de z par $\operatorname{Re} z := x$ et la **partie imaginaire** de z par $\operatorname{Im} z := y$.

Les opérations $+$ et \cdot s'étendent simplement en utilisant la règle $i^2 = -1$:

$$(x + iy) + (u + iv) = x + u + i(y + v)$$

$$(x + iy) \cdot (u + iv) = xu + ixv + iyu + i^2yv = xu - yv + i(xv + yu).$$

En particulier, on observe que $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}^+$. Cette observation permet de calculer l'inverse du nombre z si $\operatorname{Re} z \neq 0$ et $\operatorname{Im} z \neq 0$,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad (3.4)$$

Définitions 3.10. Le *conjugué* complexe de $z = x + iy$ est le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$. Le *module* de $z = x + iy$ est le nombre réel positif $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Comme chaque nombre complexe z possède une représentation unique $a + bi$, on peut représenter graphiquement \mathbb{C} dans le plan (voir FIG. 3.3) en repérant la partie réelle de z sur l'axe horizontal et la partie imaginaire de z sur l'axe vertical.

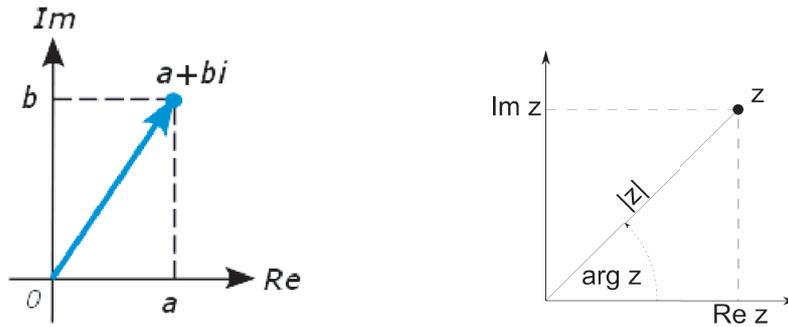


FIG. 3.3 – Plan complexe souvent appelé plan de Gauss

Les propriétés suivantes se déduisent de calculs élémentaires et s'interprètent géométriquement : pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, on a

- (i) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$;
- (ii) $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \bar{z}$;
- (iii) $\overline{\bar{z}} = z$;
- (iv) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ et $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$.

On s'aperçoit aussi que le module de z est la longueur euclidienne du vecteur (x, y) et possède des propriétés semblables à la valeur absolue. De plus, si $\operatorname{Im} z = 0$, on a $|z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}}$, ce qui justifie d'utiliser la même notation pour le module et la valeur absolue.

Proposition 3.11. Soient $z, w \in \mathbb{C}$. Alors

- (i) $|zw| = |z||w|$;
- (ii) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ et $|z| = |\bar{z}|$;
- (iii) $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$;

- (iv) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (*inégalité triangulaire*);
 (v) $|z - w| \geq ||z| - |w||$;
 (vi) si $z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Démonstration. (i) Calculons $|zw| = \sqrt{zw\bar{z}\bar{w}} = \sqrt{z\bar{z}w\bar{w}} = \sqrt{z\bar{z}}\sqrt{w\bar{w}} = |z||w|$.

(ii) Soit $z = x + iy$. On observe que $|\operatorname{Re} z| = |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ et de même pour le module de la partie imaginaire. Enfin, l'identité $\bar{\bar{z}} = z$ implique que $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\bar{\bar{z}}\bar{z}} = |\bar{z}|$.

La propriété (iii) se déduit directement de la propriété équivalente pour la valeur absolue compte tenu du fait que $|z| = 0$ si et seulement si $|\operatorname{Re} z| = |\operatorname{Im} z| = 0$.

(iv) Calculons

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re} z\bar{w} + |w|^2. \end{aligned}$$

La propriété (ii) et les égalités précédentes entraînent à présent que

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|zw| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2,$$

ce qui conclut la preuve de cette affirmation.

L'inégalité (v) se déduit de l'inégalité triangulaire comme dans la preuve de la Proposition 2.12.

La propriété (vi) est une réécriture de (3.4). \square

Nous terminons cette section en définissant les coordonnées polaires dans le plan, qui mènent à la **représentation sous forme trigonométrique** des nombres complexes dans le **plan de Gauss**. Si $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, nous notons $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et θ l'angle, compté positivement, entre l'axe horizontal $y = 0$ et le vecteur (x, y) . Le couple (r, θ) donne les **coordonnées polaires** du point (x, y) . Il est courant de noter les coordonnées polaires d'un nombre complexe par $(|z|, \arg z)$ où $\arg z$ est appelé l'**argument** de z (voir FIG. 3.3).

On calcule aisément que $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Tout nombre complexe z peut alors s'écrire

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

On observe qu'avec cette écriture, le produit de deux nombres complexes z_1, z_2 se réduit à multiplier les modules et additionner les angles :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

En particulier, on obtient la formule suivante pour les puissances :

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

valable également pour la racine $n^{\text{ième}}$. Comme θ est déterminé à 2π près, on déduit de cette formule qu'un nombre complexe possède n racines $n^{\text{ièmes}}$:

$$z_k = |z|^{1/n} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right),$$

où $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Chapitre 4

Suites et séries

Motivation

Dans ce chapitre, nous rentrons dans le vif du sujet. Nous abordons la notion de convergence (ou limite) qui est au coeur de l'analyse mathématique. En particulier, les concepts fondamentaux de continuité, de dérivée et d'intégrale se basent sur la notion de limite.

Nous étudions la convergence des suites et des séries. Nous définissons dans un premier temps une notion générale de convergence des suites dans les espaces métriques puis nous particularisons aux suites de nombres réels ou complexes que nous étudions plus en profondeur. Nous analysons les règles de calcul des limites, des critères de convergence et le Théorème fondamental de Bolzano-Weierstrass (dans \mathbb{R}).

Nous étudions ensuite les séries de nombres réels ou complexes. La notion la plus importante concernant les séries est celle de convergence absolue. Nous analysons tout d'abord les propriétés de base et les critères de convergence. Ensuite nous étudions en détail le cas particulier des séries de puissances qui sont très importantes en pratique. Nous faisons finalement un retour aux propriétés de l'ensemble des nombres réels en montrant, à l'aide des développements décimaux, que \mathbb{R} est non dénombrable.

4.1 Suites

Une suite est une séquence infinie d'éléments (ou d'objets), c'est-à-dire une famille d'éléments (ou d'objets) indexée par \mathbb{N} .

Définition 4.1. *Soit un ensemble X . Une **suite** est une fonction de \mathbb{N} dans X .*

Si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$ est une suite qui prend la valeur x_n en n , c'est-à-dire $\varphi(n) = x_n$, on la note tout simplement (x_n) ou $(x_n)_n$ ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou encore $\varphi = (x_0, x_1, \dots)$. On dit que x_n est le $n^{\text{ième}}$ **terme** ou le **terme d'indice** n de la suite (x_n) .

Pour rappeler que la suite (x_0, x_1, \dots) est une suite d'éléments de l'ensemble X , on note souvent $(x_n)_n \subseteq X$. Pour une suite de nombres réels $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, on parle de **suite réelle** et pour une suite de nombres complexes $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$, on parle de **suite complexe**.



En construction...

FIG. 4.1 – vision intuitive de convergence

Remarquons que les éléments x_n d'une suite ne sont pas forcément distincts. En particulier, il convient de distinguer la suite (x_0, x_1, \dots) qui est un élément de $X^{\mathbb{N}}$ (produit cartésien $X \times X \times \dots$) de son image $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ qui est un sous-ensemble de X . Si φ est une suite constante, c'est-à-dire qu'il existe $x \in X$ tel que $x_n = x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(x_n) = (x, x, x, \dots) \in X^{\mathbb{N}}$ tandis que $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est le singleton $\{x\}$.

Exemples 7. 1. $(0, 1, 2, 3, \dots)$ est la suite $(n)_n \subseteq \mathbb{N}$.

2. $(-1, 1, -1, 1, \dots)$ est la suite $\left((-1)^{n+1}\right)_n \subseteq \mathbb{Z}$.

3. $(1, i, -1, -i, 1, i, \dots)$ est la suite $(i^n)_n \subseteq \mathbb{C}$.

Sous-suites

Nous serons souvent amenés à "extraire" une partie d'une suite (x_k) . Si (k_0, k_1, \dots) est une suite croissante de naturels, c'est-à-dire $k_0 < k_1 < \dots$, on dit que la suite $(x_{k_0}, x_{k_1}, \dots)$ est une **sous-suite** (ou encore une **suite partielle**) de la suite $(x_n)_n$. On la note couramment par $(x_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ ou simplement par $(x_{k_\ell})_\ell$ ou (x_{k_ℓ}) ou encore par $(x_{k_\ell})_\ell \subseteq (x_k)_k$ pour rappeler qu'il s'agit d'une sous-suite de la suite originale (x_k) .

Exemples 8. Soit $(x_n)_n \subseteq X$.

1. La suite $(x_{2n})_n$ est une suite partielle. C'est la suite des éléments d'indices pairs : (x_0, x_2, x_4, \dots) .

2. La suite $(x_{n+m})_n$ est une suite partielle. Il s'agit de la suite originale privée des m premiers termes. On note couramment $(x_j)_{j \geq m}$.

3. La suite $(x_1, x_0, x_2, x_4, x_3, x_6, x_5, \dots)$ n'est pas une sous-suite de la suite $(x_n)_n$.

4.2 Convergence dans un espace métrique

Nous présentons dans cette section un cadre assez général d'espaces dans lesquels la notion naturelle de convergence d'une suite $(x_n)_n$ exprime le fait que les termes x_n se rapprochent d'un élément x par le fait que la distance entre x_n et x est arbitrairement petite pourvu que n soit suffisamment grand.

Distance et espace métrique

Définition 4.2. Soit X un ensemble. Une **métrique** ou **distance** définie sur X est une application

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow d(x, y)$$

telle que, pour tout $x, y, z \in X$,

- (i) $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
- (ii) $d(x, y) \geq 0$;
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

L'axiome (iii) est appelé *axiome de symétrie*, tandis que la dernière condition porte communément le nom d'*inégalité triangulaire*.

Définition 4.3. Un ensemble X muni d'une distance d est appelé un espace métrique. On le note (X, d) .

Exemples 9. 1. Soit X un ensemble non vide. L'application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} d(x, x) &= 0, \\ d(x, y) &= 1 \text{ si } x \neq y, \end{aligned}$$

est une distance (appelée *distance discrète*) sur X .

2. Dans \mathbb{R} , l'application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$d(x, y) = |x - y|$$

est une distance. Les conditions (i) à (iv) se déduisent des propriétés de la valeur absolue.

3. Dans \mathbb{C} , l'application $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$d(z, w) = |z - w|$$

est une distance. Les conditions (i) à (iv) se déduisent des propriétés du module.

4. L'échiquier muni de la distance aux échecs. Cette distance s'étend naturellement dans le plan.

5. Le plan muni de la distance de Manhattan (*city-block distance*).

6. Le plan muni de la distance du métro parisien.

7. Si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont des espaces métriques, alors la fonction définie par

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)),$$

est une distance sur $X \times Y$. L'application $d_2 : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2},$$

est une autre distance sur $X \times Y$.

Suites bornées et suites convergentes

Nous dirons que la suite $(x_n)_n$ est bornée si son image $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble borné au sens suivant.

Définitions 4.4. Soit (X, d) un espace métrique. Un ensemble $A \subseteq X$ est dit **borné** (au sens de la distance d) s'il existe $M > 0$ tel que $d(x, y) \leq M$ pour tout $x, y \in A$. Le **diamètre** de $A \subseteq X$ est défini par

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Le nom "diamètre" est choisi par analogie avec le cas d'un disque ou d'une sphère où la distance maximale entre deux points est bien donnée par le diamètre. Si A n'est pas borné, $\text{diam}(A) = +\infty$. On peut donc reformuler la définition d'un ensemble borné en écrivant A est borné si $\text{diam}(A) < +\infty$.

À une distance est associée naturellement une notion de **convergence** ou **limite**.

Définition 4.5. Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_k)_k \subseteq X$ **converge** vers x (au sens de la distance d) si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall k \geq k(\varepsilon)) : d(x_k, x) < \varepsilon.$$

On dit que x est la **limite** de la suite $(x_k)_k$.

La condition se lit "pour tout ε strictement positif, il existe un entier positif $k(\varepsilon)$ tel que pour tout $k \geq k(\varepsilon)$ la distance de x_k à x est strictement inférieure à ε ." On note souvent de façon abrégée

$$x_k \rightarrow x \quad \text{lorsque } k \rightarrow \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$$

pour indiquer que la suite $(x_k)_k$ converge vers x .

La suite $(x_k)_k$ est **convergente** s'il existe un élément x tel que $x_k \rightarrow x$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Dans le cas contraire, la suite est dite **divergente**.

Par ailleurs, sauf indication contraire, lorsque nous parlons de la convergence d'une suite d'éléments d'un espace métrique, il est sous-entendu que la convergence a lieu au sens de la distance que l'on a choisie pour définir l'espace.

Exemples 10. 1. Dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} muni de la distance usuelle $|x - y|$ (valeur absolue ou module), la condition s'écrit

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall k \geq k(\varepsilon)) : |x_k - x| < \varepsilon,$$

et peut s'écrire $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ ou de façon équivalente $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k - x) = 0$. Dans \mathbb{R} , cela signifie que chaque fois que l'on fixe un intervalle de longueur 2ε autour de x , il existe un indice $k(\varepsilon)$ (qui dépend en général de ε) au delà duquel tous les termes de la suite se trouvent dans cet intervalle. Dans \mathbb{C} la condition exprime le fait que chaque fois que l'on fixe un disque de rayon ε autour de x , il existe un indice $k(\varepsilon)$ (qui dépend en général de ε) au delà duquel tous les termes de la suite se trouvent dans ce disque.

2. Si on muni un ensemble X de la métrique discrète, la convergence de $x_k \rightarrow x$ signifie qu'il existe un indice k_0 au delà duquel $x_k = x$ pour tout $k \geq k_0$.

Nous avons écrit que si la suite x_n converge vers x , alors x est la limite de cette suite, ce qui sous-entend qu'il y a unicité de la limite, c'est-à-dire qu'une suite ne peut pas converger en même temps vers deux limites différentes. Avant de justifier notre affirmation, nous introduisons la définition d'un **point d'accumulation**.

Définition 4.6. Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_n \subseteq X$. On dit que $a \in X$ est un **point d'accumulation** de la suite $(x_n)_n$ si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m(\varepsilon, n) \geq n) : d(x_{m(\varepsilon, n)}, a) < \varepsilon.$$

Un point d'accumulation est un élément “près” duquel la suite passe arbitrairement proche une infinité de fois.

Exemples 11. 1. La suite $\left((-1)^n \frac{n}{n+1}\right)_n$ possède deux points d'accumulations : -1 et 1 .

2. La suite $\left(n^{(-1)^n}\right)_n$ possède un seul point d'accumulation mais n'est pas convergente.

Si une suite $(x_n)_n \subseteq X$ possède plus d'un point d'accumulation, alors elle diverge. En effet, c'est la contraposée de la proposition suivante.

Proposition 4.7. Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite convergente. Alors la suite $(x_n)_n$ possède un et un seul point d'accumulation. En particulier, la limite est unique.

Démonstration. Observons tout d'abord que si $(x_n)_n$ converge vers $x \in X$, alors x est un point d'accumulation. En effet, par définition de limite, on a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq n(\varepsilon)) : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $m \in \mathbb{N}$, on a $d(x_n, x) < \varepsilon$ dès que $n \geq n(\varepsilon, m) = \max(n(\varepsilon), m)$, d'où x est un point d'accumulation.

L'existence d'un point d'accumulation se déduit directement de l'observation précédente. Tournons-nous vers l'unicité. Supposons par l'absurde qu'il existe au moins deux points d'accumulations distincts que nous notons x et y . Puisque la suite est convergente, nous pouvons supposer, en vertu de l'observation précédente, qu'elle converge vers l'un d'entre eux. Comme $x \neq y$, la distance de x à y est strictement positive. Supposons que $(x_n)_n$ converge vers x et posons $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$. Pour ce choix de ε , il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x) < \varepsilon$ dès que $n \geq n(\varepsilon)$. Par ailleurs, par définition d'un point d'accumulation, il existe $m(\varepsilon) \geq n(\varepsilon)$ tel que

$$d(x_{m(\varepsilon)}, y) < \varepsilon.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit que

$$d(x, y) \leq d(x, x_{m(\varepsilon)}) + d(x_{m(\varepsilon)}, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

ce qui est impossible vu notre choix initial de ε .

Finalement, l'unicité de la limite se déduit de l'unicité du point d'accumulation. \square

Montrons que la réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie. Il suffit pour cela de considérer la suite réelle $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ définie par $x_{2k} = 1/k$ et $x_{2k+1} = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cette suite possède 0 comme unique point d'accumulation bien qu'on soit tenté de dire que $+\infty$ est un autre point d'accumulation (mais $+\infty$ n'est pas un réel). D'autre part, elle n'est pas convergente. Ceci se déduit par exemple de la proposition qui suit.

Proposition 4.8. Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite convergente. Alors la suite $(x_n)_n$ est bornée.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $x \in X$ tel que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq n(\varepsilon)) : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Choisissons $\varepsilon = 1/2$. L'inégalité triangulaire entraîne que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < 1$$

dès que $m, n \geq n(1/2)$. Notons $d = \max\{d(x_i, x_j) \mid i, j \leq n(1/2)\}$. En utilisant à nouveau l'inégalité triangulaire, on conclut que

$$d(x_n, x_m) \leq 1 + d,$$

pour tout $n, m \in \mathbb{N}$. □

Critère d'existence de sous-suites convergentes

Nous avons observé précédemment que si une suite $(x_n)_n$ converge, alors sa limite est un point d'accumulation. Nous démontrons à présent que l'existence d'une sous-suite convergente implique nécessairement l'existence d'un point d'accumulation et vice versa.

Proposition 4.9. Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_n \subseteq X$. Alors, $a \in X$ est un point d'accumulation de $(x_n)_n$ si et seulement si il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge vers a .

Démonstration. Commençons par démontrer la condition nécessaire. Si a est un point d'accumulation, alors il existe $m(1) \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_{m(1)}, a) < 1$, $m(2) \geq m(1) + 1$ tel que $d(x_{m(2)}, a) < 1/2$, $m(3) \geq m(2) + 1$ tel que $d(x_{m(3)}, a) < 1/3$ et ainsi de suite. On peut donc définir une suite croissante d'indices $(m(j))_j \subseteq \mathbb{N}$ telle que $d(x_{m(j)}, a) < 1/j$ pour tout $j \geq 1$. Montrons que la sous-suite $(x_{m(j)})_j$ converge vers a . Soit $\varepsilon > 0$. Par le Corollaire 3.6, il existe $k \in \mathbb{N}_0$ tel que $1/k < \varepsilon$. Dès lors, pour tout $j \geq k$, on a

$$d(x_{m(j)}, a) < \frac{1}{j} \leq \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

D'où $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{m(j)} = a$.

La preuve de la condition suffisante est immédiate. En effet, s'il existe une suite partielle $(x_{n_k})_k$ qui converge vers a , alors, par la Proposition 4.7, a est l'unique point d'accumulation de la suite $(x_{n_k})_k$. En particulier, a est un point d'accumulation de la suite originale $(x_n)_n$. □

La proposition précédente a pour conséquence que toutes les suites partielles convergentes d'une suite convergente, convergent vers la limite de la suite originale. Montrons à présent que si une suite est convergente, toutes les suites partielles le sont.

Proposition 4.10. Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_n \subseteq X$ une suite qui converge vers $x \in X$. Alors toute sous-suite $(x_{n_k})_k \subseteq (x_n)_n$ converge vers x .

Démonstration. Soit $(x_{n_k})_k \subseteq (x_n)_n$. Il faut montrer que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall k \geq k(\varepsilon)) : d(x_{n_k}, x) < \varepsilon. \quad (4.1)$$

Comme la suite $(x_n)_n$ converge vers x , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x) < \varepsilon$ dès que $n \geq n(\varepsilon)$. Dès lors, on a $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$ dès que $n_k \geq n(\varepsilon)$. Comme $n_k \geq k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, la condition (4.1) est satisfaite en prenant $k(\varepsilon) = n(\varepsilon)$. \square

Suites de Cauchy

Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_n \subseteq X$. Si $(x_n)_n$ est convergente, alors il existe $x \in X$ tel que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq n(\varepsilon)) : d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous en déduisons que si $m, n \geq n(\varepsilon)$ alors

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cette observation est tout à fait intuitive : si une suite converge, les éléments de celle-ci doivent être arbitrairement proches deux à deux lorsque n tend vers l'infini.

Définition 4.11. Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_n \subseteq X$. La suite $(x_n)_n$ est une **suite de Cauchy** si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n(\varepsilon)) : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Nous avons déjà démontré la proposition suivante.

Proposition 4.12. Soient (X, d) un espace métrique. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

La réciproque n'est pas vraie en général. Mais par contre, si une suite de Cauchy possède une sous-suite convergente, alors elle est elle-même convergente.

Proposition 4.13. Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_n \subseteq X$ une suite de Cauchy. Supposons qu'il existe une suite partielle $(x_{n_k})_k \subseteq (x_n)_n$ qui converge. Alors la suite complète $(x_n)_n$ est convergente.

Démonstration. Vu que la suite partielle $(x_{n_k})_k$ est convergente, il existe $x \in X$ tel que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall k \geq k(\varepsilon)) : d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy, il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq n(\varepsilon)$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$. Posons $m(\varepsilon) = \max(n(\varepsilon), k(\varepsilon))$. On observe que

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_{m(\varepsilon)}}) + d(x_{n_{m(\varepsilon)}}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

dès que $n \geq m(\varepsilon)$. \square

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de la Proposition 4.13.

Corollaire 4.14. *Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_n \subseteq X$ une suite de Cauchy. La suite $(x_n)_n$ possède au plus un point d'accumulation.*

Proposition 4.15. *Soit (X, d) un espace métrique. Si $(x_n)_n \subseteq X$ est une suite de Cauchy, alors elle est bornée.*

Démonstration. Puisque $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_m, x_n) < 1$ dès que $m, n \geq N$. Notons $M = \max_{1 \leq n \leq N} d(x_n, x_N)$. On observe que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, $d(x_m, x_n) < 1 + M$. En effet, si $m, n \leq N$, on a $d(x_m, x_n) \leq M$, si $m, n \geq N$, on a $d(x_m, x_n) < 1$ et si $m < N < n$, on a $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_N) + d(x_N, x_n) < M + 1$. \square

4.3 Suites réelles ou complexes

Nous avons défini une notion générale de convergence dans les espaces métriques. Nous particularisons à présent cette notion aux suites de nombres (réels ou complexes).

Dans la suite, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et nous munissons \mathbb{K} de la distance naturelle $d : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$d(x, y) = |x - y|,$$

où $|\cdot|$ désigne respectivement la valeur absolue dans \mathbb{R} ou le module dans \mathbb{C} .

Il suit de la Définition 4.4 qu'un ensemble $A \subseteq \mathbb{K}$ est **borné** s'il existe $M > 0$ tel que $|x - y| \leq M$ pour tout $x, y \in A$. Fixons $x_0 \in A$. Si A est borné, alors, $|x| - |x_0| \leq |x - x_0| \leq M$ pour tout $x \in A$. On en déduit que $|x| \leq |x_0| + M = M'$. Réciproquement, s'il existe $M' > 0$ tel que $|x| \leq M'$ pour tout $x \in A$, alors $|y - z| \leq |y| + |z| \leq 2M'$ pour tout $x, y \in X$. Nous venons d'observer qu'un ensemble $A \subseteq \mathbb{K}$ est borné si et seulement si il existe $M > 0$ tel que $|x| \leq M$ pour tout $x \in A$ ¹. En particulier, une suite $(x_k)_k \subseteq \mathbb{K}$ est bornée si et seulement si il existe $M > 0$ tel que $|x_k| \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Convergence

Nous choisissons² la définition suivante de convergence dans \mathbb{K} .

Définition 4.16. *La suite $(x_k)_k \subseteq \mathbb{K}$ converge vers x si et seulement si*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall k \geq k(\varepsilon)) : |x_k - x| < \varepsilon.$$

¹Comparer cette dernière condition avec la Définition 2.9 dans \mathbb{R} .

²La distance naturelle est un choix possible (et naturel) de distance sur \mathbb{K} mais ce n'est pas le seul. On peut démontrer (voir par exemple [4]) que toutes les distances induites par une norme (voir la définition dans le Chapitre 7) mènent à des définitions équivalentes de convergence, c'est-à-dire que la définition de convergence ne dépend pas du choix d'une telle distance.

Exemples 12. 1. La suite $(1/n^p)_n \subseteq \mathbb{R}$ converge vers 0 pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, pour $\varepsilon > 0$, on observe que

$$\frac{1}{n^p} < \varepsilon$$

dès que

$$n > \frac{1}{\varepsilon^{1/p}}.$$

On peut donc choisir $n(\varepsilon) = \lfloor 1/\varepsilon^{1/p} \rfloor + 1$.

2. La suite $((-1)^n)_n$ ne converge pas. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que la suite ne converge pas vers x c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $m \geq n$ tel que $|(-1)^m - x| \geq \varepsilon$. Si $x = 1$ ou $x = -1$, on observe que la valeur $\varepsilon = 1$ convient. Faisons le raisonnement complet pour $x = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Prenons $m = 2n+1$. Il est clair que $m \geq n$ et $|(-1)^m - 1| = 2 \geq 1$. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, il suffit de choisir $\varepsilon = \min(|-1 - x|, |1 - x|)$. Remarquons qu'un argument bien plus rapide consiste à observer que la suite possède deux points d'accumulation et ne peut donc pas converger.

Les observations suivantes sont élémentaires mais fort utiles.

Proposition 4.17. Soit $(x_k)_k \subseteq \mathbb{K}$. Nous avons les propriétés suivantes :

- (i) $(x_k)_k$ converge vers a si et seulement si $(x_k - a)_k$ converge vers 0 ;
- (ii) si $(x_k)_k$ converge vers a , alors $(|x_k|)_k \subseteq \mathbb{R}$ converge vers $|a|$;
- (iii) $(x_k)_k$ converge vers 0 si et seulement si $(|x_k|)_k \subseteq \mathbb{R}$ converge vers 0 ;
- (iv) s'il existe $a \in \mathbb{K}$, $K \in \mathbb{N}$ et $(r_k)_k \subseteq \mathbb{R}^+$ tels que $|x_k - a| \leq r_k$ pour tout $k \geq K$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$.

Démonstration. La propriété (i) est évidente. Pour démontrer (ii), observons qu'en utilisant la propriété (vii) de la Proposition 2.12 ou la propriété (v) de la Proposition 3.11, il vient

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall k \geq k(\varepsilon)) : ||x_k| - |a|| \leq |x_k - a| < \varepsilon.$$

La propriété (iii) se déduit directement de la définition. Démontrons (iv). Par hypothèse, nous savons que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall k \geq k(\varepsilon)) : r_k < \varepsilon.$$

Il s'ensuit que

$$|x_k - a| \leq r_k < \varepsilon$$

dès que $k \geq \max(K, k(\varepsilon))$. □

Proposition 4.18. La suite $(x_k)_k \subseteq \mathbb{C}$ converge si et seulement si les suites $(\operatorname{Re} x_k)_k \subseteq \mathbb{R}$ et $(\operatorname{Im} x_k)_k \subseteq \mathbb{R}$ convergent. Dans ces conditions, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re} x_k + i \lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Im} x_k.$$

Nous laissons la preuve de cette proposition en guise d'exercice.

Règles de calcul

Les règles de calcul des limites sont fondamentales et extrêmement utiles en pratique. Nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 4.19. *Soit $(x_k)_k \subseteq \mathbb{K}$ et $(y_k)_k \subseteq \mathbb{K}$ telles que $(x_k)_k$ est bornée et $(y_k)_k$ converge vers 0. Alors la suite $(x_k y_k)_k$ converge vers 0.*

Démonstration. Comme $(x_k)_k$ est bornée, il existe $M > 0$ tel que $|x_k| \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on observe que

$$|x_k y_k| \leq M |y_k| \quad (4.2)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$, il existe $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$|y_k| < \frac{\varepsilon}{M} \quad (4.3)$$

dès que $k \geq k(\varepsilon)$. La conclusion se déduit à présent de (4.2) et (4.3) :

$$|x_k y_k| \leq M |y_k| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

dès que $k \geq k(\varepsilon)$. □

Remarque 4.20. *Il suit de ce lemme que si $(x_n)_n \subseteq \mathbb{K}$ converge vers 0, alors $(\alpha x_n)_n \subseteq \mathbb{K}$ converge encore vers 0 quel que soit $\alpha \in \mathbb{K}$.*

Théorème 4.21 (Règles de calcul des limites). *Soient $(x_k)_k \subseteq \mathbb{K}$ et $(y_k)_k \subseteq \mathbb{K}$ des suites convergentes telles que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$.*

- (i) *la suite $(x_k + y_k)_k$ converge et sa limite vaut $x + y$;*
- (ii) *la suite $(x_k y_k)_k$ converge et sa limite vaut xy ;*
- (iii) *si $y \neq 0$ alors il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $y_k \neq 0$ pour $k \geq K$ et la suite $(x_k / y_k)_{k \geq K}$ converge vers x / y .*

Démonstration. (i) Fixons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $k_1 = k_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ et $k_2 = k_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tels que $|x_k - x| < \varepsilon/2$ pour tout $k \geq k_1$ et $|y_k - y| < \varepsilon/2$ pour tout $k \geq k_2$. Il s'ensuit que

$$|x_k + y_k - (x + y)| \leq |x_k - x| + |y_k - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

dès que $k \geq \max(k_1, k_2)$.

(ii) Par la Proposition 4.8, la suite $(x_k)_k$ est bornée. Il s'ensuit que

$$x_k y_k - xy = x_k (y_k - y) + y (x_k - x)$$

est la somme de deux suites convergentes. En effet, la Proposition 4.17 entraîne que $(x_k - x)_k$ et $(y_k - y)_k$ convergent vers 0 et le Lemme 4.19 entraîne la convergence vers 0 des suites $(x_k (y_k - y))_k$ et $(y (x_k - x))_k$. Nous pouvons donc appliquer la propriété (i) qui implique que $(x_k y_k - xy)_k$ converge vers 0. La conclusion se déduit de la Proposition 4.17.

(iii) D'après (ii), il suffit de démontrer qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $y_k \neq 0$ pour $k \geq K$ et que $(1/y_k)_{k \geq K}$ converge vers $1/y$. Choisissons $\varepsilon \in]0, |y|/2]$. Comme $(y_k)_k$ converge vers y , il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $|y| - |y_k| \leq |y - y_k| < \varepsilon$ dès que $k \geq K$. Notre choix de ε implique que $|y_k| > |y| - \varepsilon \geq |y|/2 > 0$ pour tout $k \geq K$. Calculons, pour $k \geq K$,

$$\left| \frac{1}{y_k} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{y - y_k}{y_k y} \right| \leq \frac{2|y - y_k|}{|y|^2}.$$

La conclusion se déduit à présent de la Proposition 4.17 et de la Remarque 4.20. Par la Proposition 4.17, la suite réelle $(|y - y_k|)_k$ converge vers 0; la Remarque 4.20 montre qu'il en est de même pour la suite $(\frac{2|y - y_k|}{|y|^2})_k$ et finalement l'affirmation (iv) de la Proposition 4.17 permet de conclure. \square

On déduit en particulier de ce théorème que si $(x_n)_n \subseteq \mathbb{K}$ converge vers x , alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, la suite $(\alpha x_n)_n \subseteq \mathbb{K}$ converge vers αx .



Exemples 13.

Comparaison des suites réelles

Nous venons de voir sous quelles conditions il est permis de passer à la limite dans une somme, un produit ou un quotient. Nous considérons à présent le problème du passage à la limite dans les inégalités entre suites réelles.

Proposition 4.22. Soient $(x_k)_k \subseteq \mathbb{R}$ et $(y_k)_k \subseteq \mathbb{R}$ des suites convergentes telles que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$. S'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $x_k \leq y_k$ pour tout $k \geq K$, alors $x \leq y$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $x > y$. Dans ce cas nous pouvons choisir $\varepsilon = x - y > 0$ et il suit de la définition de limite qu'il existe $k(\varepsilon) \geq K$ tel que $|x_k - x| < \varepsilon/4$ et $|y_k - y| < \varepsilon/4$ dès que $k \geq k(\varepsilon)$. En particulier, nous avons

$$x - \frac{\varepsilon}{4} < x_k \leq y_k < y + \frac{\varepsilon}{4},$$

ou encore $\varepsilon = x - y < \varepsilon/2$, ce qui est absurde. \square

Attention, ce résultat n'est pas vrai si on remplace l'inégalité non stricte par l'inégalité stricte. Même si $x_k < y_k$ pour tout $k \geq K$, il se peut que $x = y$. C'est le cas pour les suites $(1/k^2)_{k \geq 1}$ et $(1/k)_{k \geq 1}$.

Il suit de la Proposition 4.22 que si $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ sont des suites convergentes telles que

$$x_n \leq y_n \leq z_n,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

En particulier, si $(x_n)_n$ et $(z_n)_n$ ont même limite a , alors la suite $(y_n)_n$ converge vers a également. Nous montrons dans le théorème qui suit qu'il est inutile dans ce cas de supposer que la suite $(y_n)_n$ est convergente. En effet, si $(x_n)_n$ et $(z_n)_n$ ont même limite a , la suite $(y_n)_n$ est prise en sandwich et ne peut faire que converger vers a .

Théorème 4.23 (Test de comparaison). *Soient $(x_k)_k \subseteq \mathbb{R}$, $(y_k)_k \subseteq \mathbb{R}$ et $(z_k)_k \subseteq \mathbb{R}$ telles que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = a$ et $x_k \leq y_k \leq z_k$ pour tout $k \geq K \in \mathbb{N}$. Alors $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = a$.*

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. Il nous faut montrer qu'il existe $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $|y_k - a| < \varepsilon$ pour tout $k \geq k(\varepsilon)$. Nous savons qu'il existe $k_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ et $k_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tels que $|x_k - a| < \varepsilon$ pour tout $k \geq k_1(\varepsilon)$ et $|z_k - a| < \varepsilon$ pour tout $k \geq k_2(\varepsilon)$. Dès lors, nous en déduisons que

$$-\varepsilon < x_k - a \leq y_k - a \leq z_k - a < \varepsilon$$

dès que $k \geq k(\varepsilon) = \max(k_1(\varepsilon), k_2(\varepsilon))$. □

Observons que le test de comparaison généralise, pour les suites réelles, la propriété (iv) de la Proposition 4.17. Il s'agit d'un résultat très utile pour les calculs explicites.

Limites infinies

Certaines suites réelles non bornées peuvent être considérées comme convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définitions 4.24. *La suite $(x_k)_k \subseteq \mathbb{R}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $+\infty$ si*

$$(\forall R > 0)(\exists k(R) \in \mathbb{N})(\forall k \geq k(R)) : x_k > R.$$

Elle converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $-\infty$ si

$$(\forall R > 0)(\exists k(R) \in \mathbb{N})(\forall k \geq k(R)) : x_k < -R.$$

Il est clair que si $(x_k)_k$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $+\infty$ ou $-\infty$, alors $(|x_k|)_k$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $+\infty$. Il existe des suites réelles non bornées qui ne convergent ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$. Dans ce cas, $+\infty$ ou $-\infty$ sont des points d'accumulation dans $\overline{\mathbb{R}}$. On dira que $-\infty$ est un point d'accumulation de $(x_k)_k$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ si

$$(\forall R > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k(R, n) \geq n) : x_{k(R, n)} < -R$$

tandis que $+\infty$ est un point d'accumulation de $(x_k)_k$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ si

$$(\forall R > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k(R, n) \geq n) : x_{k(R, n)} > R.$$

On peut étendre la Proposition 4.9 aux suites non bornées : $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est un point d'accumulation de la suite $(x_k)_k$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si il existe une suite partielle qui converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Exemples 14. 1. La suite $(n^2 - n)_n \subseteq \mathbb{R}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $+\infty$.

2. La suite $(-2^n)_n \subseteq \mathbb{R}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $-\infty$.

3. La suite $\left((-n)^n\right)_n \subseteq \mathbb{R}$ diverge dans $\overline{\mathbb{R}}$. Elle a deux points d'accumulation dans $\overline{\mathbb{R}} : \pm\infty$.

Il convient de manier les limites infinies avec précaution. Les règles du calcul des limites dans \mathbb{R} ne s'appliquent pas toujours dans $\overline{\mathbb{R}}$. En particulier, il y a des règles propres aux limites infinies.

Proposition 4.25. Soit $(x_k)_k \subseteq \mathbb{R}_0$. Alors

- (i) la suite $(1/x_k)_k$ converge vers 0 si $x_k \rightarrow +\infty$ ou $x_k \rightarrow -\infty$;
- (ii) la suite $(1/x_k)_k$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $+\infty$ si $x_k \rightarrow 0$ et s'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $x_k > 0$ pour tout $k \geq K$;
- (iii) la suite $(1/x_k)_k$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $-\infty$ si $x_k \rightarrow 0$ et s'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $x_k < 0$ pour tout $k \geq K$.

Démonstration. (i) Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $(|x_k|)_k$ converge vers $+\infty$, il existe $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $|x_k| > 1/\varepsilon$ dès que $k \geq k(\varepsilon)$. Il s'ensuit que $|1/x_k| < \varepsilon$ dès que $k \geq k(\varepsilon)$.

(ii) Fixons $R > 0$. Vu que $(x_k)_k$ converge vers 0, il existe $k(R) \in \mathbb{N}$ tel que $|x_k| < 1/R$ dès que $k \geq k(R)$. On en déduit que $1/x_k > R$ dès que $k \geq \max(k(R), K)$.

On argumente de la même façon pour démontrer l'affirmation (iii). \square

Suites monotones, \liminf et \limsup

Rappelons qu'une suite est une fonction de \mathbb{N} dans X . Si cette fonction est monotone, on dit que la suite est monotone. Ceci peut se formuler de la façon suivante.

Définitions 4.26. Une suite réelle $(x_k)_k$ est dite **croissante** si $x_k \leq x_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; **décroissante** si $x_k \geq x_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On dit que $(x_k)_k$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Nous allons démontrer que la monotonie est une condition suffisante de convergence. Pour ce faire, nous introduisons les notions de supremum et infimum d'une suite.

Définitions 4.27. Soit $(x_k)_k \subseteq \mathbb{R}$. Les **supremum** et **infimum** de la suite partielle $(x_k)_{k \geq m}$ sont définis par

$$\begin{aligned} \sup(x_k)_{k \geq m} &:= \sup\{x_k \mid k \geq m\} \\ \inf(x_k)_{k \geq m} &:= \inf\{x_k \mid k \geq m\}. \end{aligned}$$

Pour la suite complète, nous utilisons simplement les notations $\sup(x_k)$ et $\inf(x_k)$. La Proposition 3.4 nous apprend que $\sup(x_k), \inf(x_k) \in \overline{\mathbb{R}}$ sont bien définis. Si la suite est bornée, alors $\sup(x_k), \inf(x_k) \in \mathbb{R}$.

Si une suite monotone est bornée, elle converge dans \mathbb{R} vers $\sup(x_k)$ ou $\inf(x_k)$. Si elle est non bornée, elle converge vers $+\infty$ ou $-\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. C'est une conséquence de l'axiome de complétude et des définitions de $\pm\infty$.

Proposition 4.28. *Toute suite monotone $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ et*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} \sup(x_n) & \text{si } (x_n)_n \text{ est croissante,} \\ \inf(x_n) & \text{si } (x_n)_n \text{ est décroissante.} \end{cases}$$

Démonstration. Nous considérons le cas d'une suite croissante, celui d'une suite décroissante pouvant être traité de façon identique. Nous devons distinguer deux cas.

(i) $x = \sup(x_n) \in \mathbb{R}$. Par la caractérisation du supremum (Proposition 3.2), quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n(\varepsilon)} > x - \varepsilon$. Comme la suite est croissante, on en déduit que

$$x - \varepsilon < x_{n(\varepsilon)} \leq x_n \leq x,$$

dès que $n \geq n(\varepsilon)$.

(ii) $\sup(x_n) = +\infty$. Dans ce cas, la suite est non bornée et pour tout $R > 0$, il existe $n(R)$ tel que $x_{n(R)} > R$. Il suit de la monotonie de la suite que $x_n > R$ dès que $n \geq n(R)$. \square

Comme application de la proposition précédente, nous introduisons deux nombres particulièrement importants associés à toute suite réelle. À cette fin, nous définissons deux suites auxiliaires associées à toute suite réelle $(x_n)_n$:

$$\begin{aligned} a_n &= \sup(x_k)_{k \geq n} \\ b_n &= \inf(x_k)_{k \geq n}. \end{aligned}$$

Observons que ces nouvelles suites sont monotones. En effet, comme on a l'inclusion $\{x_k \mid k \geq n+1\} \subseteq \{x_k \mid k \geq n\}$, on a nécessairement $a_{n+1} \leq a_n$ et $b_{n+1} \geq b_n$. Il s'ensuit que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup(x_k)_{k \geq n})$$

est appelé la **limite supérieure** de la suite $(x_n)_n$ et est notée

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ ou } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

et

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf(x_k)_{k \geq n})$$

est appelé la **limite inférieure** de la suite $(x_n)_n$ et est notée

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ ou } \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Remarquons que pour toute suite réelle $(x_n)_n$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Nous pouvons donner un critère de convergence à partir du calcul des limites supérieure et inférieure.

Proposition 4.29. Soient $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$,

$$x_* = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ et } x^* = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Alors

- (i) x_* et x^* sont des points d'accumulation dans $\overline{\mathbb{R}}$;
- (ii) si x est un point d'accumulation dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a $x_* \leq x \leq x^*$;
- (iii) la suite $(x_n)_n$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $x_* = x^*$. Dans ce cas, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Démonstration. Pour démontrer (i), il suffit de construire une sous-suite qui converge vers x_* et une sous-suite qui converge vers x^* . En effet, la Proposition 4.9 (et son extension dans $\overline{\mathbb{R}}$) permet alors de conclure. Construisons une sous-suite qui converge vers x^* . L'existence d'une suite partielle qui converge vers x_* se déduit d'une construction semblable. Rappelons que $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup(x_k)_{k \geq n})$, i.e. x^* est la limite de la suite $(a_n)_n$ où $a_n = \sup(x_k)_{k \geq n}$. Comme la suite $(a_n)_n$ est décroissante, $x^* = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Nous distinguons trois cas.

1er cas : $x^* = -\infty$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $n(m) \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n(m)} < -m$. Comme $x_k \leq a_{n(m)}$ pour tout $k \geq n(m)$, on a $x_{n(m)} < -m$. La suite partielle $(x_{n(m)})_m$ converge vers $-\infty$.

2ème cas : $x^* \in \mathbb{R}$. En utilisant la caractérisation du supremum (Proposition 3.2), nous construisons une suite partielle $(x_{n(m)})_m$ de la façon suivante. Il existe $n(0) \in \mathbb{N}$ tel que $|x_{n(0)} - a_0| < 1$, puis de façon récursive $n(m) > n(m-1)$ tel que $|x_{n(m)} - a_{n(m-1)+1}| < 1/2^m$ pour tout $m \geq 1$. Comme la suite $(a_n)_n$ converge vers x^* , il en est de même pour sa sous-suite $(a_{n(m-1)+1})_{m \geq 1}$. Par construction, on en déduit que $(x_{n(m)})_m$ converge vers x^* .

3ème cas : $x^* = +\infty$. Dans ce cas, $a_m = +\infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que pour tout $R > 0$ et tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $n(R, m) \geq m$ tel que $x_{n(R, m)} > R$. Donc $+\infty$ est un point d'accumulation de la suite $(x_n)_n$.

(ii) Montrons que si x est un point d'accumulation de la suite $(x_n)_n$, alors $x \leq x^*$. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $x^* \neq +\infty$ sinon la conclusion est trivialement satisfaite. Par la Proposition 4.9, il suffit de démontrer que si $x > x^*$, alors il n'existe aucune suite partielle de $(x_n)_n$ qui converge vers x^* . Fixons $\varepsilon = (x - x^*)/2 > 0$. Comme (a_n) converge vers x^* , il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n(\varepsilon)$, $a_n - x^* < \varepsilon$. Par définition de la suite $(a_n)_n$, il vient

$$x_n \leq a_n < x^* + \varepsilon < x - \frac{x - x^*}{2} = x - \varepsilon$$

pour tout $n \geq n(\varepsilon)$. On en conclut que x ne peut pas être la limite d'une suite partielle de $(x_n)_n$.

On argumente de manière analogue pour démontrer que si x est un point d'accumulation de la suite $(x_n)_n$, alors $x \geq x_*$.

(iii) Commençons par examiner la condition nécessaire. Si $(x_n)_n$ converge, alors la Proposition 4.7 (et son extension dans $\overline{\mathbb{R}}$) entraîne l'existence d'un unique point d'accumulation. Il s'ensuit que $x_* = x^*$.

Si $x_* = x^*$, alors les assertions (i) et (ii) entraînent que l'unique point d'accumulation de la suite est $x = x_* = x^*$. Si $x = -\infty$, alors pour tout $R > 0$, il existe $n(R) \in \mathbb{R}$ tel que

$$x_n \leq \sup(x_k)_{k \geq n} < -R$$

dès que $n \geq n(R)$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$. Si $x = +\infty$, alors pour tout $R > 0$, il existe $n(R) \in \mathbb{R}$ tel que

$$x_n \geq \inf(x_k)_{k \geq n} > R$$

dès que $n \geq n(R)$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Considérons finalement le cas où $x \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par la caractérisation du supremum (Proposition 3.2), il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$x - \varepsilon < \inf(x_k)_{k \geq n} \leq x_n \leq \sup(x_k)_{k \geq n} < x + \varepsilon,$$

dès que $n \geq n(\varepsilon)$, ce qui implique la convergence de $(x_n)_n$ vers x . □

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la Proposition 4.29.

Théorème 4.30 (Théorème de Bolzano-Weierstrass). *Toute suite réelle bornée possède au moins un point d'accumulation (dans \mathbb{R}).*

Par la Proposition 4.9, cet énoncé est équivalent à “toute suite réelle bornée possède au moins une suite partielle convergente (dans \mathbb{R})”.

Critère de Cauchy

Pour vérifier qu'une suite réelle converge, nous avons vu jusqu'à présent deux alternatives. La première consiste simplement à vérifier la définition ce qui suppose de connaître a priori la limite de la suite. La seconde consiste à calculer les limites inférieure et supérieure et à vérifier que ces dernières sont égales. Pour calculer les limites inférieure et supérieure, nous sommes ramené à la première alternative. Nous présentons dans ce paragraphe un critère qui permet de reconnaître si une suite réelle converge sans connaître sa limite. Rappelons qu'une suite $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ est dite de Cauchy si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n(\varepsilon)) : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Théorème 4.31 (Critère de Cauchy dans \mathbb{R}). *Une suite réelle converge (dans \mathbb{R}) si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration. La condition nécessaire est vraie dans tout espace métrique (voir Proposition 4.12). La condition suffisante est une conséquence du Théorème de Bolzano-Weierstrass. En effet, la Proposition 4.15 nous apprend que toute suite de Cauchy est bornée. Le Théorème de Bolzano-Weierstrass assure alors l'existence d'une sous-suite partielle convergente. La conclusion se déduit ensuite de la Proposition 4.13. □

Le critère de Cauchy est également valable pour les suites complexes. Une suite $(x_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ est de Cauchy si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n(\varepsilon)) : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Il suit des propriétés du module que

$$|\operatorname{Re} x_n - \operatorname{Re} x_m| \leq |x_n - x_m| \text{ et } |\operatorname{Im} x_n - \operatorname{Im} x_m| \leq |x_n - x_m|,$$

si bien que $(\operatorname{Re} x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ et $(\operatorname{Im} x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ sont des suites de Cauchy. Nous pouvons donc étendre le Théorème 4.31 à \mathbb{C}

Théorème 4.32 (Critère de Cauchy dans \mathbb{C}). *Une suite complexe converge si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration. Comme nous l'avons déjà mentionné, la condition nécessaire est vraie dans tout espace métrique (voir Proposition 4.12).

Nous avons observé que si $(x_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ est de Cauchy alors $(\operatorname{Re} x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ et $(\operatorname{Im} x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ sont des suites de Cauchy dans \mathbb{R} . Il suit du Théorème 4.31 que cette condition est suffisante pour que $(\operatorname{Re} x_n)_n$ et $(\operatorname{Im} x_n)_n$ convergent. La conclusion se déduit à présent de la Proposition 4.18. \square

Exemples importants

Les limites suivantes interviennent fréquemment. Les justifications sont laissées en guise d'exercices.

(i) Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1, \\ 1 & \text{si } a = 1, \\ \text{n'existe pas} & \text{si } |a| \geq 1 \text{ et } a \neq 1. \end{cases}$$

(ii) Soient $a \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$. Si $|a| > 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

(iii) Pour tout $a \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

(iv) Pour tout $a \in \mathbb{R}_0^+$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (an)^{1/n} = 1.$$

4.4 Séries

Nous avons vu jusqu'à présent deux façons de vérifier qu'une suite réelle ou complexe converge. On peut soit "deviner" la limite et vérifier que la définition est satisfaite ou bien vérifier le critère de Cauchy. Nous allons utiliser ces deux approches pour étudier les **séries**, c'est-à-dire les sommes infinies du type

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$

où le **terme général** a_k est un nombre réel ou complexe. La question essentielle que nous nous posons est de savoir sous quelles conditions une telle somme infinie converge, c'est-à-dire donne un nombre réel ou complexe, lorsque l'on regarde la limite des **sommes partielles**

$$s_0 := a_0, \quad s_1 := a_0 + a_1, \quad s_2 := a_0 + a_1 + a_2, \dots$$

Dans la suite, nous reprenons la notation \mathbb{K} pour désigner \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définitions 4.33. Soit $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$. La série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **converge** si la suite des sommes partielles $(s_n)_n \subseteq \mathbb{K}$ définie par

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k$$

est convergente dans \mathbb{K} . La limite s de la suite $(s_n)_n$ est appelée la **somme** de la série et se note

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ou plus simplement } \sum_k a_k \text{ ou } \sum a_k.$$

Si la suite des sommes partielles ne converge pas, la série est dite **divergente**.

Il est important de remarquer que tous les résultats relatifs aux séries seront construits sur l'étude de la convergence d'une suite puisque, par définition, la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge si et seulement si la suite $(\sum_{k=0}^n a_k)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ converge. Réciproquement, observons qu'une suite $(x_k)_k \subseteq \mathbb{K}$ converge si et seulement si la série

$$x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (x_{k+1} - x_k) = x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots$$

converge.

Exemples 15. 1. La série $\sum_{k \geq 1} 1/k^2$ est convergente. Observons tout d'abord que la suite des sommes partielles $(s_n)_n$ est monotone croissante. La Proposition 4.28 nous apprend que la limite de la suite $(s_n)_n$ existe dans \mathbb{R} et pour s'assurer qu'il s'agit d'un nombre réel, il suffit de montrer que la suite $(s_n)_n$ est bornée. Calculons

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2.$$

2. La série $\sum_k 1/2^k$ est convergente. En effet, la suite des sommes partielles étant de nouveau croissante, il suffit de vérifier qu'elle est bornée. Or

$$s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k} = s_n + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{2}s_n,$$

ce qui montre que

$$s_n \leq 2 - \frac{1}{2^n} < 2.$$

Comme la convergence d'une série se base sur la convergence d'une suite, la linéarité du calcul des limites s'applique directement aux séries. Si $\sum_k a_k$ et $\sum_k b_k$ sont deux séries convergentes et si $\alpha \in \mathbb{K}$, alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Les observations suivantes sont élémentaires.

- (i) La série $\sum_k a_k$ converge si et seulement si la série $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ converge (mais la somme de la première série n'est bien entendu pas la même que la somme de la seconde).
- (ii) Si $(z_k)_k \subseteq \mathbb{C}$, la série $\sum_k z_k$ converge si et seulement si les deux séries $\sum_k \operatorname{Re} z_k$ et $\sum_k \operatorname{Im} z_k$ convergent, et dans ce cas, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} z_k + i \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} z_k.$$

- (iii) Soit $(x_k)_k \subseteq \mathbb{R}^+$. S'il existe $K \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $x_k \geq \varepsilon$ pour tout $k \geq K$, alors la série $\sum_k x_k$ diverge.
- (iv) Si la série $\sum_k a_k$ converge, alors le **reste** $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

L'observation (iii) correspond à l'idée intuitive qu'une série ne peut converger que si le terme général tend vers 0. Cette observation est élémentaire lorsque la série est à termes positifs mais l'est nettement moins en toute généralité.

Proposition 4.34. Soit $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$. Si la série $\sum_k a_k$ converge, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Démonstration. Par définition, si la série converge, alors la suite des sommes partielles converge et est donc une suite de Cauchy, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$$

pour tout $m > n \geq n(\varepsilon)$. En particulier, en prenant $m = n + 1$, on conclut que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| < \varepsilon$$

pour tout $n \geq n(\varepsilon)$, c'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. □

La proposition précédente donne une condition nécessaire de convergence fort utile mais elle n'est cependant pas suffisante comme le montre l'exemple de la **série harmonique**. Il s'agit de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

qui diverge. En effet, observons que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$|s_{2n} - s_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Il s'ensuit que la suite des sommes partielles $(s_n)_n$ n'est pas une suite de Cauchy et donc elle ne peut pas converger. Dès lors la série harmonique diverge.

La Proposition 4.34 permet également de donner une description complète du comportement des **séries géométriques**. Il s'agit des séries $\sum_k z^k$, où $z \in \mathbb{C}$. D'une part, on observe que

$$\sum_{k=0}^{n+1} z^k = s_n + z^{n+1} = 1 + z + \dots + z^{n+1} = 1 + z(1 + z + \dots + z^n) = 1 + z s_n,$$

ce qui entraîne que

$$s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Si $|z| < 1$, alors $(z^{n+1})_n$ converge vers 0 et on peut conclure que

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}.$$

Si $|z| \geq 1$, alors le terme général ne tend pas vers 0 et on déduit de la Proposition 4.34 que la série géométrique diverge.

Critères de convergence

Nous pouvons directement déduire, des résultats que nous connaissons pour les suites, des critères de convergence pour les séries. Nous avons anticipé dans les Exemples 15 le critère suivant pour les séries réelles à termes positifs.

Théorème 4.35 (Convergence des séries à termes positifs). *Soit $(a_k)_k \subseteq \mathbb{R}$ telle que $a_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La série $\sum_k a_k$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles est bornée.*

Démonstration. Puisque chaque a_k est un nombre réel positif, la suite $(s_n)_n$ des sommes partielles est croissante. Elle converge donc dans $\overline{\mathbb{R}}$ (Proposition 4.28) et la limite est réelle si et seulement si la suite $(s_n)_n$ est bornée. Dans ce cas la limite vaut $\sup(s_n)$. \square

Le **critère de Leibniz** concerne les séries **alternées**. Une série réelle $\sum_k a_k$ est dite alternée si a_k et a_{k+1} sont de signes opposés pour tout $k \in \mathbb{N}$. Toute série alternée peut s'écrire sous la forme $\pm \sum_k (-1)^k a_k$, où $(a_k)_k$ est une suite de nombres réels positifs. Le critère se base indirectement sur la convergence des suites monotones.

Théorème 4.36 (Critère de Leibniz). *Si $(a_k)_k \subseteq \mathbb{R}$ est telle que $a_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(a_k)_k$ est décroissante et $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, alors la série $\sum_k (-1)^k a_k$ converge.*

Démonstration. Calculons

$$s_{2n+2} - s_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} a_k - \sum_{k=0}^{2n} a_k = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$$

et

$$s_{2n+3} - s_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} a_k - \sum_{k=0}^{2n+1} a_k = -a_{2n+3} + a_{2n+1} \geq 0.$$

La suite $(s_{2n})_n$ des sommes partielles d'indices pairs est donc décroissante tandis que la suite $(s_{2n+1})_n$ des sommes partielles d'indices impairs est croissante. Nous pourrions donc déduire de la Proposition 4.28 que ces suites convergent dans \mathbb{R} à condition que la première soit minorée et que la deuxième soit majorée. Pour vérifier ces conditions, observons que

$$s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n}.$$

Dès lors, $(s_{2n})_n$ étant décroissante, nous en déduisons que $s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_0$ tandis que la croissance de la suite $(s_{2n+1})_n$ implique $s_{2n} \geq s_{2n+1} \geq s_1$. Il s'ensuit que $s = \inf(s_{2n})$ et $t = \sup(s_{2n+1})$ sont des nombres réels.

Afin de démontrer la convergence de la suite des sommes partielles $(s_n)_n$, remarquons que $t = s$. En effet, ceci se déduit du fait que

$$t - s = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0.$$

Il est maintenant aisé de conclure que $(s_n)_n$ converge vers t puisque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $|s_{2n+1} - t| < \varepsilon$ dès que $n \geq n_1(\varepsilon)$ et $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $|s_{2n} - t| < \varepsilon$ dès que $n \geq n_2(\varepsilon)$. Il s'ensuit que $|s_n - t| < \varepsilon$ dès que $n \geq \max(2n_1(\varepsilon) + 1, 2n_2(\varepsilon))$. \square

Le critère de Leibniz s'applique par exemple à la série harmonique alternée

$$\sum_k \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Nous avons utilisé dans la Proposition 4.34 le fait que si la série converge alors la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy. Il suit du critère de Cauchy pour les suites (Théorème 4.31 et Théorème 4.32) que la suite des sommes partielles converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Théorème 4.37 (Critère de Cauchy pour les séries). Soit $(a_k)_k \subset \mathbb{K}$. La série $\sum_k a_k$ converge si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall m > n \geq n(\varepsilon)) : \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon.$$

Démonstration. La preuve se déduit directement du fait que la suite des sommes partielles converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$$

pour tout $m > n \geq n(\varepsilon)$. □

Convergence absolue

Nous savons que si une suite réelle ou complexe $(a_k)_k$ converge, alors la suite réelle $(|a_k|)_k$ converge également (la réciproque n'est pas vraie). Il est donc naturel d'analyser les liens entre la convergence de la série $\sum_k |a_k|$ et la convergence de la série $\sum_k a_k$. La convergence de la première implique la convergence de la seconde mais l'inverse n'est pas vrai. De plus, une série convergente $\sum_k a_k$ qui est telle que $\sum_k |a_k|$ converge également a de bien meilleures propriétés qu'une série convergente quelconque. Ceci motive donc la définition suivante.

Définition 4.38. Soit $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$. La série $\sum_k a_k$ **converge absolument** si $\sum_k |a_k|$ converge.

Nous avons vu que la série géométrique $\sum_k z^k$ converge si et seulement si $|z| < 1$. Le même raisonnement montre que la convergence est absolue. Pour une série réelle à termes positifs, la convergence absolue est bien entendu équivalente à la convergence.

La proposition suivante justifie d'autant plus la présence du mot "convergence" dans la Définition 4.38.

Proposition 4.39. Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration. Soit $\sum_k a_k$ une série absolument convergente. Étant donné que la série $\sum_k |a_k|$ converge, elle satisfait le critère de Cauchy (Théorème 4.37), c'est-à-dire que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall m > n \geq n(\varepsilon)) : \left| \sum_{k=n+1}^m |a_k| \right| = \sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon.$$

Comme pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k|,$$

on en déduit que

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$$

dès que $m > n \geq n(\varepsilon)$, c'est-à-dire que $\sum_k a_k$ satisfait également le critère de Cauchy. Le Théorème 4.37 permet de conclure. \square

La réciproque n'est pas vraie (sinon pourquoi définir deux notions différentes). En effet, nous avons vu que la série harmonique ne converge pas malgré que la série harmonique alternée converge. Remarquons aussi que les séries absolument convergentes satisfont une inégalité du triangle généralisée puisqu'on observe par passage à la limite dans l'inégalité triangulaire que

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

Critères de convergence absolue

Le critère le plus simple et le plus important est le **critère de comparaison** encore appelé le **critère du majorant**. Si $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$ et $(b_k)_k \subseteq \mathbb{R}^+$ sont telles que $|a_k| \leq b_k$ au delà d'un indice $K \in \mathbb{N}$, la série $\sum_k b_k$ est appelé un **majorant** de la série $\sum_k a_k$.

Théorème 4.40 (critère de comparaison). *Soit $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$. Si la série $\sum_k a_k$ possède un majorant qui converge, alors elle est absolument convergente.*

Démonstration. Soit un majorant $\sum_k b_k$ qui converge. Il suit du critère de Cauchy que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall m > n \geq n(\varepsilon)) : \sum_{k=n+1}^m b_k < \varepsilon.$$

Comme $\sum_k b_k$ est un majorant, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $|a_k| \leq b_k$ pour tout $k \geq K$. Dès lors, on en déduit que

$$\sum_{k=n+1}^m |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^m b_k < \varepsilon,$$

dès que $m > n \geq \max(n(\varepsilon), K)$. Le Théorème 4.37 permet à nouveau de conclure. \square

La contraposée du critère de comparaison nous apprend que si $\sum_k b_k$ est un majorant de $\sum_k a_k$ et que cette dernière série ne converge pas absolument, alors $\sum_k b_k$ diverge. En particulier, si $\sum_k a_k$ est une série à termes positifs, sa divergence implique la divergence de tous ses majorants.

Exemples 16. 1. Si $m \geq 2$, la série $\sum_{k \geq 1} 1/k^m$ est convergente. Nous avons vu dans les Exemples 15 que la série $\sum_{k \geq 1} 1/k^2$ est convergente. Comme $k^{-m} \leq k^{-2}$ pour tout $k \geq 1$, la série $\sum_{k \geq 1} 1/k^2$ est un majorant et la conclusion se déduit du critère de comparaison.

2. Si $m \leq 1$, la série $\sum_k 1/k^m$ diverge. Comparons cette série à la série harmonique. Puisque $m \leq 1$, on a $k^{-m} \geq k^{-1}$ pour tout $k \geq 1$. La divergence de la série harmonique entraîne dès lors la divergence de la série $\sum_k 1/k^m$.

Exercice 4.1. Montrez que la série $\sum_{k \geq 1} 1/k^m$ converge si et seulement si $m > 1$.

Le critère de comparaison permet également d'obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 4.41 (Critère d'équivalence). Soient $\sum_k a_k$ et $\sum_k b_k$ deux séries réelles à termes positifs. Supposons que $b_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \alpha \in [0, +\infty]. \quad (4.4)$$

- (i) Si $\alpha \in]0, \infty[$, alors $\sum_k a_k$ converge (respectivement diverge) si et seulement si $\sum_k b_k$ converge (respectivement diverge).
- (ii) Si $\alpha = 0$ et $\sum_k b_k$ converge, alors $\sum_k a_k$ converge.
- (iii) Si $\alpha = +\infty$ et $\sum_k b_k$ diverge, alors $\sum_k a_k$ diverge.

Démonstration. Considérons l'affirmation (i). Soient $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \beta < \alpha < \gamma < +\infty$. En vertu de (4.4), il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \geq K$, $a_k \leq \gamma b_k$ et $b_k \leq a_k/\beta$. Il s'ensuit que $\sum_k (\gamma b_k)$ est un majorant pour $\sum_k a_k$ tandis que $\sum_k (a_k/\beta)$ est un majorant pour $\sum_k b_k$. La conclusion se déduit à présent du critère de comparaison. Les affirmations (ii) et (iii) se démontrent de façon similaire. \square

D'autres critères importants se basent sur l'existence d'un majorant convergent. Nous démontrons successivement le **critère de la racine** et le **critère du quotient** qui se basent sur une comparaison avec les séries géométriques.

Théorème 4.42 (Critère de la racine). Soient $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$ et

$$\alpha = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in [0, +\infty].$$

- (i) Si $\alpha < 1$, alors $\sum_k a_k$ converge absolument.
- (ii) Si $\alpha > 1$, alors $\sum_k a_k$ diverge.

Démonstration. (i) Soit $\alpha < a < 1$. La Proposition 4.29 nous apprend que α est le plus grand point d'accumulation de la suite $(\sqrt[k]{|a_k|})_k$ et par conséquent, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt[k]{|a_k|} < a$ pour tout $k \geq K$ ou encore tel que $|a_k| < a^k$ pour tout $k \geq K$. Comme la série géométrique $\sum_k a^k$ converge, le critère de comparaison entraîne la convergence absolue de la série $\sum_k a_k$.

(ii) Vu que α est un point d'accumulation de la suite $(\sqrt[k]{|a_k|})_k$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \geq n$ tel que $|a_k| \geq 1$. Il s'ensuit que $\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k| \geq 1$, ce qui, en vertu de la Proposition 4.29, montre que le terme général a_k ne tend pas vers 0. La condition nécessaire de la Proposition 4.34 n'étant pas satisfaite, la série $\sum_k a_k$ diverge. \square

Le théorème ne dit rien lorsque $\alpha = 1$ car il n'est pas possible de tirer de conclusion dans ce cas. En effet, la série harmonique $\sum_k 1/k$ diverge, la série harmonique alternée $\sum_k ((-1)^k(1/k))$ converge mais ne converge pas absolument et la série $\sum_k 1/k^2$ converge (absolument). Pour ces trois séries, on observe que $\alpha = 1$.

Théorème 4.43 (Critère du quotient). Soient $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$ et $K_0 \in \mathbb{N}$ tels que $a_k \neq 0$ pour tout $k \geq K_0$.

(i) Supposons qu'il existe $K \geq K_0$ et $a < 1$ tels que

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq a \text{ pour tout } k \geq K.$$

Alors la série $\sum_k a_k$ converge absolument.

(ii) Supposons qu'il existe $K \geq K_0$ tel que

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1 \text{ pour tout } k \geq K.$$

Alors $\sum_k a_k$ diverge.

Démonstration. (i) Par hypothèse, $|a_{k+1}| \leq a|a_k|$ pour tout $k \geq K$. Montrons par induction que pour tout $k > K$, on a

$$|a_k| \leq a^{k-K}|a_K| = \frac{|a_K|}{a^K} a^k.$$

Pour $k = K + 1$, c'est vrai par hypothèse. Supposons que l'affirmation est vraie pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq K + 1$, c'est-à-dire que

$$|a_k| \leq \frac{|a_K|}{a^K} a^k.$$

Dès lors, on observe que

$$|a_{k+1}| \leq a|a_k| \leq a \frac{|a_K|}{a^K} a^k = \frac{|a_K|}{a^K} a^{k+1}.$$

La série géométrique $\frac{|a_K|}{a^K} \sum_k a^k$ est donc un majorant de la série $\sum_k a_k$. Comme $a < 1$, la conclusion se déduit du critère de comparaison.

(ii) L'hypothèse entraîne que $|a_{k+1}| \geq |a_K| > 0$ si bien que la condition nécessaire de la Proposition 4.34 n'étant pas satisfaite, la série $\sum_k a_k$ diverge. \square

Exemples 17. 1. La série $\sum_k k^2 2^{-k}$ converge. Appliquons le critère du quotient. Il suffit d'observer que

$$\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}.$$

2. La série $\sum_k 2^{-(k+(-1)^k)}$ converge. Le critère du quotient ne permet pas de conclure (le vérifier). Par contre le critère de la racine s'applique car

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2^{k+(-1)^k}}} = \frac{1}{2} \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2^{(-1)^k}}} = \frac{1}{2}.$$

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_k z^k/k!$ converge absolument. Appliquons le critère du quotient. On vérifie que pour $z \neq 0$,

$$\frac{|z^{k+1}|}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|z|^k} = \frac{|z|}{k+1} \leq \frac{1}{2},$$

dès que $k \geq 2|z|$. La série $\sum_k z^k/k!$ définit la fonction $\exp z$.

Critères de Dirichlet et d'Abel

Les critères de comparaison, d'équivalence, de la racine ou du quotient concernent la convergence absolue (ou la convergence des séries à termes positifs). Le critère de comparaison permet aussi de déduire des critères de convergence non nécessairement absolue. Dans les deux critères suivants, on écrit la série sous la forme $\sum_k a_k b_k$, où $(a_k)_k \subseteq \mathbb{R}$ et $(b_k)_k \subseteq \mathbb{C}$.

Théorème 4.44 (Critère de Dirichlet). *Soient $(a_k)_k \subseteq \mathbb{R}$ et $(b_k)_k \subseteq \mathbb{C}$ telles que*

- (i) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$,
- (ii) $\sum_k |a_{k+1} - a_k|$ converge,
- (iii) la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^n b_k)_n$ est bornée dans \mathbb{C} .

Alors la série $\sum_k a_k b_k$ converge.

Démonstration. Notons $(B_n)_n$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_k b_k$ et $(s_n)_n$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_k a_k b_k$ dont nous devons montrer la convergence. Observons que

$$s_n = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = a_0 B_0 + a_1 (B_1 - B_0) + \dots + a_n (B_n - B_{n-1})$$

où nous pouvons regrouper les termes de la façon suivante

$$s_n = (a_0 - a_1)B_0 + (a_1 - a_2)B_1 + \dots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_n B_n.$$

Nous allons montrer que (s_n) converge en étudiant séparément les termes

$$(a_0 - a_1)B_0 + (a_1 - a_2)B_1 + \dots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} \quad \text{et} \quad a_n B_n.$$

Comme la suite $(B_n)_n$ est bornée, il existe $M > 0$ tel que

$$|(a_j - a_{j+1})B_j| \leq M|a_j - a_{j+1}|,$$

et puisque par hypothèse, $\sum_j |a_j - a_{j+1}|$ converge, le critère de comparaison entraîne la convergence absolue de la série $\sum_j (a_j - a_{j+1})B_j$. En particulier, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((a_0 - a_1)B_0 + (a_1 - a_2)B_1 + \dots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1}) \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, comme $(a_n)_n$ converge vers 0 et $(B_n)_n$ est bornée, le Lemme 4.19 nous apprend que $(a_n B_n)_n$ converge vers 0. On peut à présent conclure en utilisant les règles de calcul. \square

Si la suite $(a_k)_k$ est décroissante, le critère de Dirichlet peut s'énoncer de façon plus simple.

Corollaire 4.45 (Critère d'Abel). *Soient $(a_k)_k \subseteq \mathbb{R}$ et $(b_k)_k \subseteq \mathbb{C}$ telles que*

- (i) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$,
- (ii) $a_{k+1} \leq a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$,
- (iii) la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^n b_k)_n$ est bornée dans \mathbb{C} .

Alors la série $\sum_k a_k b_k$ converge.

Démonstration. Comme $(a_k)_k$ est décroissante, on observe que

$$\sum_{k=0}^n |a_{k+1} - a_k| = \sum_{k=0}^n a_k - a_{k+1} = a_0 - a_{n+1}.$$

Il s'ensuit que $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| = a_0$ puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0$. Les hypothèses du critère de Dirichlet sont donc satisfaites, ce qui permet de conclure la démonstration. \square

Il est facile de vérifier que le critère de Leibniz peut être obtenu comme corollaire immédiat du critère d'Abel.

Exercice 4.2. *Montrer que la série*

$$\sum_{k \geq 1} \frac{\sin(k\theta)}{k^p}, \quad \theta \neq n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

converge pour tout $p > 0$. La convergence est absolue si $p > 1$. Utiliser le critère de comparaison pour $p > 1$ et le critère de Dirichlet ou d'Abel pour le cas $0 < p \leq 1$.

Opérations sur les séries

Comme annoncé précédemment, les séries absolument convergentes se comportent bien mieux que les séries convergentes mais non absolument convergentes. L'exemple suivant est quelque peu surprenant. Il montre que l'addition n'est pas commutative lorsqu'on considère des séries non absolument convergentes. Considérons la série harmonique alternée $\sum_k (-1)^{k+1}/k$. Réorganisons les termes de la série de la façon suivante :

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

Cela revient à numérotter les éléments $a_k = (-1)^{k+1}/k$ dans un autre ordre, à savoir $b_k = a_{\sigma(k)}$, où $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 2$ et pour $k \geq 3$,

$$\sigma(k) = \begin{cases} k + k/3 & \text{si } k \text{ est divisible par } 3, \\ k - \frac{k-1}{3} & \text{si } k-1 \text{ est divisible par } 3, \\ k + \frac{k-2}{3} & \text{si } k-2 \text{ est divisible par } 3. \end{cases}$$

Observons que si $n \neq 0$, $\sigma(3n) = 4n$, $\sigma(3n-1) = 4n-2$ et $\sigma(3n-2) = 2n-1$. Dès lors, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3n} b_k &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} a_k. \end{aligned}$$

Si $(t_n)_n$ désigne la suite des sommes partielles de la série $\sum_k b_k$ et $(s_n)_n$ celle de la série $\sum_k a_k$, on peut réécrire l'égalité précédente $t_{3n} = s_{2n}/2$. Nous savons que la suite s_{2n} converge. Si la suite t_n converge, alors nous obtenons le résultat surprenant

$$\sum_k a_{\sigma(k)} = \sum_k b_k = \frac{1}{2} \sum_k a_k = \frac{s}{2},$$

c'est-à-dire qu'en réarrangeant les termes de la série, nous avons modifié sa somme. Montrons que $(t_n)_n$ converge. Nous savons déjà que la sous-suite $(t_{3n})_n$ converge vers $s/2$. Observons aussi que

$$|t_{3n+1} - t_{3n}| \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad |t_{3n+2} - t_{3n}| \rightarrow 0.$$

Dès lors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n(\varepsilon)$, on a

$$|t_{3n} - \frac{s}{2}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |t_{3n+1} - t_{3n}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |t_{3n+2} - t_{3n}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en conclut que si $n \geq n(\varepsilon)$, on a

$$|t_{3n} - \frac{s}{2}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|t_{3n+1} - \frac{s}{2}| \leq |t_{3n+1} - t_{3n}| + |t_{3n} - \frac{s}{2}| < \varepsilon$$

et

$$|t_{3n+2} - \frac{s}{2}| < |t_{3n+2} - t_{3n}| + |t_{3n} - \frac{s}{2}| < \varepsilon,$$

ce qui démontre la convergence de la suite $(t_n)_n$ vers $s/2$.

Définition 4.46. Soit $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$. Si $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une bijection, la série $\sum_k a_{\sigma(k)}$ s'appelle un **réarrangement** de la série $\sum_k a_k$.

Il est évident que si $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une bijection telle que $\sigma(k) = k$ sauf pour un nombre fini d'indices, la série $\sum_k a_{\sigma(k)}$ converge si et seulement si la série $\sum_k a_k$ converge et leurs sommes sont égales. L'exemple de la série harmonique alternée montre qu'il en est tout autrement lorsque la bijection σ permute une infinité d'indices. Le théorème qui suit est donné sans démonstration. Celle-ci se base sur l'observation suivante où nous utilisons la notation $a^+ = \max(a, 0)$ et $a^- = \max(-a, 0)$. Si $a_k \subseteq \mathbb{R}$ est telle que $\sum_k a_k$ converge sans converger absolument, alors les séries $\sum_k a_k^+$ et $\sum_k a_k^-$ divergent toutes les deux. En effet, si les deux séries $\sum_k a_k^\pm$ convergent, alors la série $\sum_k a_k$ converge absolument. Par contre si une seule de ces séries diverge, alors la série $\sum_k a_k$ diverge également.

Théorème 4.47 (Théorème de réarrangement de Riemann). *Soit $(a_k)_k \subseteq \mathbb{R}$. Si $\sum_k a_k$ converge mais ne converge pas absolument, alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe un réarrangement de la série dont la somme vaut s . De plus, il existe un réarrangement divergeant.*

Ce théorème justifie la terminologie suivante : si une série $\sum_k a_k$ converge sans converger absolument, on dit que la convergence de cette série est **conditionnelle**.

La situation est beaucoup plus satisfaisante pour les séries absolument convergentes. Notre prochaine préoccupation est de montrer que la somme d'une série absolument convergente est indépendante du réarrangement. On parle dans ce cas de **convergence inconditionnelle**.

Théorème 4.48. *Si $\sum_k a_k$ converge absolument et $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une bijection, alors $\sum_k a_{\sigma(k)}$ est absolument convergente et la somme est indépendante de σ .*

Démonstration. Soit une bijection $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n)\} \subseteq \{0, 1, \dots, \tilde{n}\}.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{k=0}^n |a_{\sigma(k)}| \leq \sum_{k=0}^{\tilde{n}} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|,$$

c'est-à-dire que la suite des sommes partielles de $\sum_k |a_{\sigma(k)}|$ est bornée supérieurement, et donc la convergence absolue est assurée. Montrons à présent que la somme ne dépend pas de σ . Notons respectivement $(\tilde{s}_n)_n$ et $(s_n)_n$ les suites des sommes partielles des séries $\sum_k |a_{\sigma(k)}|$ et $\sum_k |a_k|$. Fixons $\varepsilon > 0$. Le critère de Cauchy entraîne l'existence de $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=n+1}^m |a_k| < \frac{\varepsilon}{2},$$

dès que $m > n \geq n(\varepsilon)$. Prenons $\tilde{n}(\varepsilon) \geq n(\varepsilon)$ tel que

$$\{0, 1, \dots, n(\varepsilon)\} \subseteq \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(\tilde{n}(\varepsilon))\}.$$

Pour $n \geq \tilde{n}(\varepsilon)$, on obtient

$$|s_n - \tilde{s}_n| = \left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} \right| = \left| \sum_{k=n(\varepsilon)+1}^n a_k - \sum_{k \in A_n} a_k \right| \leq \sum_{k=n(\varepsilon)+1}^n |a_k| + \sum_{k \in A_n} |a_k|,$$

où $A_n = \sigma(\{0, \dots, n\}) \setminus \{0, \dots, n(\varepsilon)\}$. Notons $N = \max\{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\}$. Observons à présent que

$$|s_n - \tilde{s}_n| \leq \sum_{k=n(\varepsilon)+1}^n |a_k| + \sum_{k \in A_n} |a_k| \leq \sum_{k=n(\varepsilon)+1}^n |a_k| + \sum_{k=n(\varepsilon)+1}^N |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

dès que $n \geq \tilde{n}(\varepsilon)$. Il est maintenant aisé de conclure que la suite $(\tilde{s}_n)_n$ converge vers la limite de la suite $(s_n)_n$. \square

Comme application du théorème précédent, considérons les **séries doubles**, c'est-à-dire les sommes infinies où la sommation est prise sur deux familles d'indices. Une série double s'écrit donc $\sum_{i,j} a_{ij}$. Il est naturel de considérer de telles séries car le produit de deux séries $\sum_k a_k$ et $\sum_k b_k$ nous amène à considérer tous les produits possibles $a_k b_\ell$, où $k, \ell \in \mathbb{N}$, puis à en faire la somme.

Une question essentielle se pose pour les séries doubles : dans quel ordre sommer. Cette question est importante car nous avons vu que si la convergence est conditionnelle, elle dépend crucialement de l'ordre dans lequel la somme est calculée. Rappelons que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. Si $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est une bijection, elle définit un ordre sur \mathbb{N} et la question précédente revient donc à se demander si la double somme $\sum_{i,j} a_{i,j}$ peut se calculer $\sum_n a_{\alpha(n)}$ et surtout si le résultat dépend du choix de α .

Définition 4.49. Soit $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$. La série double $\sum_{i,j} a_{ij}$ est **sommable** si

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i,j=0}^n |a_{ij}| < \infty.$$

La preuve de la proposition suivante est laissée à titre d'exercice.

Proposition 4.50. Si $\sum_k a_k$ et $\sum_k b_k$ sont deux séries absolument convergentes, alors la série double $\sum_{i,j} a_i b_j$ est sommable.

Il résulte du théorème suivant que pour des séries absolument convergentes $\sum_k a_k$ et $\sum_k b_k$, on a

$$\sum_{i,j} a_i b_j = \left(\sum_i a_i \right) \cdot \left(\sum_j b_j \right).$$

Théorème 4.51 (Théorème de Fubini pour les séries). Soit $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$. Si la série double $\sum_{i,j} a_{ij}$ est sommable, alors $\sum_n a_{\alpha(n)}$ converge absolument pour toute bijection $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et la limite s est indépendante de α . De plus, pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, les séries $\sum_k a_{ik}$ et $\sum_k a_{kj}$ sont absolument convergentes et

$$\sum_i \left(\sum_k a_{ik} \right) = \sum_j \left(\sum_k a_{kj} \right) = s.$$

Nous omettons la démonstration de ce résultat. La conséquence importante à retenir de ce théorème est que lorsqu'une série double est sommable, la double somme peut se calculer comme deux sommes simples répétées et que l'on peut choisir l'indice sur lequel on somme en premier.

Lorsque les termes a_{ij} d'une série double sont les produits des termes a_i et b_j de deux séries absolument convergentes, la série produit $\sum_{i,j} a_i b_j$ peut se calculer en ordonnant $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de la façon que l'on désire. Un ordre bien adapté au produit consiste à sommer sur le premier indice dans l'ordre croissant et sur le second dans l'ordre inverse.

Définition 4.52. *Le produit de Cauchy de deux séries $\sum_k a_k$ et $\sum_k b_k$ est la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right).$$

Le Théorème de Fubini a pour conséquence que si $\sum_k a_k$ et $\sum_k b_k$ convergent absolument, alors leur produit de Cauchy est une série absolument convergente qui a pour somme $\sum_i a_i \cdot \sum_j b_j$. Nous attirons l'attention (sans justification) sur le fait que le produit de Cauchy de deux séries conditionnellement convergentes peut ne pas converger.

Considérons à nouveau la série $\sum_k z^k/k!$ qui définit la fonction $\exp z$. Nous avons vu que le critère du quotient montre que cette série converge absolument. Nous pouvons donc appliquer les résultats précédents pour calculer $\exp y \cdot \exp z$. Effectuons le produit de Cauchy des deux séries. En utilisant la formule du binôme de Newton, nous obtenons

$$\begin{aligned} \exp y \cdot \exp z &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{y^k}{k!} \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^k z^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y+z)^n}{n!} = \exp(y+z). \end{aligned}$$

Cette formule d'additivité justifie la notation $\exp z = e^z$. En effet, définissons e par $\exp 1$. La formule donne

$$\exp 2 = \exp(1+1) = \exp 1 \cdot \exp 1 = (\exp 1)^2.$$

Exercice 4.3. *Montrez que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $\exp(q) = e^q$.*

Séries de puissances

Si $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$ et $z_0 \in \mathbb{K}$, la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \text{ où } z \in \mathbb{K}$$

est appelée une **série de puissances**. Nous allons voir que la convergence d'une telle série dépend de la valeur de z . En $z = z_0$, la série est nulle. Dans certains cas, c'est le seul point pour lequel la série converge dans d'autres, la série converge absolument pour tout $z \in z_0$.

Théorème 4.53. Soit $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$. Il existe $\rho_a \in [0, +\infty]$, appelé **rayon de convergence**, tel que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ converge absolument si $|z - z_0| < \rho_a$ et diverge si $|z - z_0| > \rho_a$. De plus, on a la **formule de Hadamard**

$$\rho_a = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Démonstration. La preuve consiste à appliquer le critère de la racine :

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k(z - z_0)^k|} = |z - z_0| \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{|z - z_0|}{\rho_a}.$$

□

L'intérieur³ du disque de rayon ρ_a centré en z_0 est appelé le **disque de convergence** de la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$. La proposition qui suit donne bien souvent une formule alternative pour calculer le rayon de convergence.

Proposition 4.54. Soit $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k/a_{k+1}|$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors le rayon de convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ est donné par

$$\rho_a = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$

Démonstration. Calculons

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}(z - z_0)^{k+1}}{a_k(z - z_0)^k} \right| = \frac{|z - z_0|}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|}.$$

Si $|z - z_0| < \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$, alors le critère du quotient entraîne la convergence absolue de la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$. Si $|z - z_0| > \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$, alors le même critère montre que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ diverge. En vertu du Théorème 4.53, nous en déduisons que

$$\rho_a = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$

□

Exemples 18. 1. Le rayon de convergence de la série $\sum_k (z - z_0)^k/k!$ est infini. En effet, on observe que

$$\left| \frac{1/k!}{1/(k+1)!} \right| = k+1 \rightarrow +\infty.$$

2. Le rayon de convergence de la série $\sum_k z^{k^2}/k!$ est 1.

³Dans ce contexte, l'intérieur d'un disque de rayon R centré en p est l'ensemble $\{x \in \mathbb{K} \mid |x-p| < R\}$. La notion précise d'intérieur d'un ensemble sera abordée dans le chapitre sur la topologie.

\mathbb{R} n'est pas dénombrable

La théorie des séries permet de justifier la représentation des nombres réels à l'aide des développements décimaux. Par exemple, le nombre rationnel

$$2 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{10000}$$

s'écrit de façon unique sous la forme 2,1507. Pour donner un sens aux développements décimaux illimités, il faut recourir aux séries. Par exemple, l'écriture 1,9999... désigne le nombre 2 car

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 1 + \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} = 1 + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 2$$

et le développement 0,6666... désigne la fraction 2/3 car

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{10^k} = \frac{6}{10} \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{2}{3}.$$

Nous avons utilisé les développements décimaux, c'est-à-dire en **base 10**. Nous pouvons utiliser d'autres bases (toujours entières). Ainsi un nombre réel $x \in [0, 1]$ peut se développer dans une base $b \geq 2$ en écrivant

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k b^{-k},$$

où $x_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$. Comme $x_k \leq b-1$, on a

$$0 \leq \sum_{k=1}^n x_k b^{-k} \leq (b-1) \sum_{k=1}^n b^{-k} = 1,$$

ce qui assure la convergence de la série.

Exercice 4.4. *Montrer que $x \in [0, 1]$ est rationnel si et seulement si son développement en base $b \geq 2$ est périodique, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $x_{k+p} = x_k$ pour tout $k \geq n$.*

Exercice 4.5. *Écrire le développement de 1/7 et 1/11 en base 2, 3 et 10.*

Exercice 4.6. *Dans la base de l'alphabet (base 26), en le supposant ordonné par les relations $A = 1, B = 2, \dots, Y = 25$ et $Z = 0$, montrer que 1/2 s'écrit Z, M , 1/10 s'écrit $Z, BOO \dots$ et 1/9 s'écrit $Z, BWBW \dots$.*

L'utilisation des développements décimaux fournit une démonstration aisée du résultat suivant en se basant sur la construction faite dans l'Exemple 6. Nous admettons sans justification que le développement décimal d'un nombre réel est unique si on exclut les développements tels que $x_k = g-1$ pour tout k au delà d'un certain indice K .

Théorème 4.55. *L'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable.*

Démonstration. Notons qu'il est suffisant de montrer que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable. Argumentons par contradiction et supposons qu'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1[$. Cette bijection ordonne $[0, 1[$ dans une suite $f(0), f(1), f(2), \dots$. Chacun de ces nombres possède un développement décimal unique (on exclut les développements se terminant par une infinité de 9) :

$$f(0) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{0k}10^{-k}, \quad f(1) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{1k}10^{-k}, \quad \dots, \quad f(n) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}10^{-k}, \quad \dots$$

Considérons le nombre réel $a \in [0, 1[$ défini par $\sum_{k=1}^{\infty} a_k10^{-k}$ où

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } x_{k-1k} \neq 0, \\ 1 & \text{si } x_{k-1k} = 0. \end{cases}$$

Par construction, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $a \neq f(k)$ puisqu'au moins un coefficient dans le développement décimal diffère. Le nombre a n'appartient donc pas à l'image de \mathbb{N} par f ce qui contredit la surjectivité de f . \square

Corollaire 4.56. *L'ensemble des nombres irrationnels n'est pas dénombrable.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la dénombrabilité de \mathbb{Q} et du théorème précédent. En effet, si $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ était dénombrable, alors $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ serait dénombrable comme union d'ensembles dénombrables. \square

Tout intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ contient donc "plus" de nombres irrationnels que de nombres rationnels, mais rappelons que $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ et $[a, b] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ sont tous les deux des sous-ensembles denses de $[a, b]$.

Bibliographie

- [1] Amann, Herbert ; Escher, Joachim. Analysis I. Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. [22](#), [27](#), [28](#), [29](#)
- [2] Amann, Herbert ; Escher, Joachim. Analysis II. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
- [3] Amann, Herbert ; Escher, Joachim. Analysis III. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [4] Choquet, Gustave. Cours d'analyse. Tome II, Masson et C^{ie}, 1964. [44](#)
- [5] Mawhin, Jean. Analyse : Fondements, techniques et évolution, 2^e édition, De Boeck Université, 1997.
- [6] Protter, Murray H. A first course in real analysis, Springer, 1991.
- [7] Tao, Terence. Analysis I. Texts and Readings in Mathematics, 37. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2006. [22](#), [27](#), [29](#)
- [8] Tao, Terence. Analysis II. Texts and Readings in Mathematics, 38. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2006.