Exercices corrigés de calcul différentiel

Bernard Le Stum*
Université de Rennes 1

Version du 28 mars 2003

Introduction

J'ai eu l'occasion de participer pendant plusieurs années à l'enseignement de l'Unité d'Enseignement CDIF (calcul différentiel) de la Licence de Mathématiques de l'Université de Rennes 1. Lorsque j'ai commencé, le cours était fait par Jean-Claude Tougeron qui avait rédigé un polycopié contenant une liste importante d'exercice. En préparant mes travaux dirigés, j'ai pris la peine de rédiger des corrigés des différents exercices que j'ai pu faire avec les étudiants. J'ai aussi rédigé les rappels de cours que j'ai été amené à faire.

Ce document contient donc un certain nombre d'exercices corrigés avec les rappels de cours nécessaires. Il est possible de couvrir tout ceci avec des étudiants de troisième année d'université sur un semestre en trois heures de Travaux Dirigés par semaine.

1 Fonctions différentiables, formule de la moyenne

1.1 Rappel

Si E et F deux espaces vectoriels normés, on note $L(E, F)$ l'espace des applications linéaires *continues* de E dans F. C'est un espace vectoriel normé pour $\|\Phi\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|\Phi(u)\|}{\|u\|}$.

Remarquons que sii $\dim E < \infty$, la continuité est automatique.

On écrira tout simplement $L(E)$ lorsque $F = E$. On identifie $L(\mathbf{R}, F)$ avec F par $\Phi \mapsto \Phi(1)$. Lorsque $F = F_1 \times F_2$, on identifie $L(E, F)$ avec $L(E, F_1) \oplus L(E, F_2)$. Lorsque $E = \mathbf{R}^m$ et $F = \mathbf{R}^n$, on identifie $L(E, F)$ avec $M_{n \times m}$.

1.2 Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et U un ouvert de E. On dit qu'une application $f : U \to F$ est *différentiable* en $\alpha \in U$ s'il existe $\Phi \in L(E, F)$ tel que

$$\frac{\|f(\alpha + h) - f(\alpha) - \Phi(h)\|}{\|h\|} \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

Celle-ci est alors unique et on pose $f'(\alpha) = \Phi$. C'est la *différentielle* de f en α. L'application f est alors continue en α.

*lestum@univ-rennes1.fr

1.3 Remarques

Lorsque $E = \mathbf{R}$, on a donc $f'(\alpha) \in F$.

Si $F = F_1 \times F_2$, alors $f = (f_1, f_2)$ est différentiable en α si et seulement si f_1 et f_2 le sont et alors $f'(\alpha) = (f_1'(\alpha), f_2'(\alpha))$.

1.4 Proposition

Si $f : U \to V \subset F$ est différentiable en α et $g : V \to G$ est différentiable en $f(\alpha)$, alors $g \circ f$ est différentiable en α et $(g \circ f)'(\alpha) = g'(f(\alpha)) \circ f'(\alpha)$.

1.5 Définition

Si f est différentiable en tout point de U, on dit que l'application $f' : U \to L(E, F)$ est la *différentielle* de f. Dans ce cas, f est continue.

1.6 Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \to F$ (resp. $g : [a, b] \to \mathbf{R}$) une application continue sur $[a, b]$ et différentiable sur $]a, b[$. Si $\|f'\| \leq |g'|$ sur $]a, b[$, alors $\|f(b) - f(a)\| \leq |g(b) - g(a)|$.

1.7 Théorème de la moyenne

Soit f une application différentiable sur U convexe. Alors, pour tout $a, b \in U$, on a $\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_U \|f'(x)\| \|b - a\|$.

1.8 Corollaire

Si f est différentiable sur U et $f' = 0$, alors f est constante sur chaque composante connexe de U.

1.9 Définition

Si f est différentiable et f' continue, on dit que f est *continûment différentiable* et on écrit $f \in C^1(U, F)$. Si $E = \mathbf{R}$, on écrit $C^1(U)$. On définit par récurrence, la notion de fonction C^k, pour $k \in \mathbf{N} \cup \infty$.

1.10 Proposition

Si $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ est multillinéaire continue, f est C^1 et

$$f'(\alpha)(h) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, h_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m).$$

En particulier, si f est linéaire continue, $f(\alpha) = f$.

1.11 Définition

Soit $f : U \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$. Considérons la fonction

$$x_i \mapsto f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m).$$

Si celle-ci est dérivable en α_i, on note $\partial f_i / \partial x_j(\alpha)$ le nombre dérivé. On dit que $\partial f_i / \partial x_j$ est une *dérivée partielles* de f

1.12 Proposition

Si $f'(\alpha)$ existe, alors les $\partial f_i/\partial x_j(\alpha)$ aussi et $f'(\alpha) = [\partial f_i/\partial x_j(\alpha)]$.

Si toutes les dérivées partielles existent et sont continues en α, alors f est différentiable en α.

Enfin, f est C^1 ssi toutes les dérivées partielles existent et sont continues.

1.13 Remarque

En terme de matrices, la formule de dérivation d'une application composée s'écrit

$$[\partial(g \circ f)_i/\partial x_k(\alpha)] = [\partial g_i/\partial x_j(f(\alpha))][\partial f_j/\partial x_k(\alpha)].$$

Notations : On se donne $f : U \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ et $x : \mathbf{R}^{m'} \to \mathbf{R}^m$. On note x_i (resp. u_j) les coordonnées dans $\mathbf{R}^m$ (resp. $\mathbf{R}^{m'}$). On écrit $\partial f_i/\partial u_k$ au lieu de $\partial(f \circ x)_i/\partial u_k$, $(u_1, \ldots, u_{m'})$ au lieu de α et $(x_1, \ldots, x_m)$ au lieu de $f(\alpha)$. La formule devient alors

$$[\partial f_i/\partial u_k(u_1, \ldots, u_{m'})] = [\partial f_i/\partial x_j(x_1, \ldots, x_m)][\partial x_j/\partial u_k(u_1, \ldots, u_{m'})].$$

On rappelle que si $x = (x_i)_{i\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, alors $\|x\|_p := (\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \in \mathbf{R} \cup \infty$ pour $p \geq 1$ et $\|x\|_\infty := \sup_{i=0}^{\infty} |x_i| \in \mathbf{R} \cup \infty$. Enfin, pour $p \in [1, \infty[$, on pose $l_p(\mathbf{R}) := \{x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \|x\|_p < \infty\}$. Bien sûr, si $p \leq q$, on a $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ et donc $l_p(\mathbf{R}) \subset l_q(\mathbf{R})$.

Exercice 1 *Soit $f \in C^1(\mathbf{R})$ telle que $f(0) = 0$ et*

$$F : l_1(\mathbf{R}) \to l_1(\mathbf{R}), x \to F(x) := (f(x_i))_{i\in\mathbf{N}}.$$

Montrer que F est bien définie et partout différentiable et calculer F'.

Tout d'abord, F est bien définie grâce au théorème de la moyenne qui nous dit que, comme f est C^1, il existe k tel que $|f(x_i)| \leq k|x_i|$ (pour $i >> 0$) car $\|x\|_1 < \infty$ et donc $x_i \to 0$.

Maintenant, on montre que F est différentiable en $a \in l_1(\mathbf{R})$ et que $F'(a) = \Phi$ avec $\Phi(h) = (f'(a_i)(h_i))_{i\in\mathbf{N}}$. Soit $\epsilon > 0$. Comme f' est uniformément continue pour $|x| \leq \|a\|_\infty + 1$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x|, |y| \leq \|a\|_\infty + 1$ et $x - y \leq \delta$, alors $|f'(x) - f'(y)| \leq \epsilon$.

Si $h \in l_1(\mathbf{R})$, on a

$$f(a_i + h_i) - f(a_i) - f'(a_i)(h_i) = \int_0^{h_i} (f'(a_i + t) - f'(a_i))dt$$

et donc, si $\|h\| \leq \delta, 1$, $|f(a_i + h_i) - f(a_i) - f'(a_i)(h_i)| \leq \epsilon|h_i|$, ce qui donne bien $\|F(a + h) - F(a) - \Phi(h)\| \leq \epsilon|h|$.

Il reste a vérifier que Φ est bien définie, linéaire et continue : or on a $\|(f'(a_i)(h_i))\|_1 \leq \|(f'(a_i)_{i\in\mathbf{N}}\|_\infty \|h\|_1$ et la linéarité est claire. Remarquons que $\|(f'(a_i)_{i\in\mathbf{N}}\|_\infty < \infty$ car f' est continue et $a_i \to 0$.

Exercice 2 *Montrer que l'application $f := \| - \|_2^2 : l_1(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est bien définie et C^1, et calculer f'.*

On écrit $f = \psi \circ \delta$ avec $\delta(x) = (x, x)$ et $\psi(x, y) = \langle x, y\rangle := \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$.

Comme on a $\|\langle x, y\rangle\| \leq \|x\|_1 \|y\|_1$, on voit que l'application ψ est bien définie, et comme elle est bilinéaire (symétrique), qu'elle est continue.

Comme δ est évidemment linéaire continue, on voit que ces applications sont C^1 et par composition, f est C^1. De plus, on a

$$f'(x) = (\psi \circ \delta)'(x) = \psi'(x, x) \circ \delta$$

et donc $f'(x)(h) = \psi'(x, x)(h, h) = 2\langle x, h\rangle =:= \sum_{i=0}^{\infty} x_i h_i$

Dans la suite, on rappelle que si $f \in C^0([a, b])$, alors $\|f\|_p := (\int_a^b |f(t)|^p)^{\frac{1}{p}}$ pour $p \geq 1$ et $\|f\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

Exercice 3 *Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$ qui sont C^1 sur $]0, 1[$ et dont les composantes sont continûment dérivables à gauche en 0 et à droite en 1. On prolonge f' par continuité en 0 et en 1. On munit cet espace de la norme $\|f\| := \sup_{0\leq t\leq 1} \|f(t)\| + \|f'(t)\|$. Montrer que*

$$T : E \to \mathbf{R}, f \mapsto \int_0^1 det(f(t), f'(t))dt$$

est C^1 et calculer sa différentielle.

On munit $F = C^0([0, 1])$ de la norme $\| - \|_\infty$ et $F \times F$ de la norme sup. On écrit $T := I \circ \det \circ u$ avec

$$u : E \to F \times F, f \mapsto (f, f'),$$

$$\det : F \times F \to F, (f, g) \mapsto \det(f, g)$$

et

$$I : F \to \mathbf{R}, f \mapsto \int_0^1 f(t)dt.$$

L'application u est clairement linéaire car ses composantes le sont. Elle est continue, car si $f \in E$, alors $\sup(\|f\|_F, \|f'\|_F) \leq \|f\|_E$. De même, l'application det est bilinéaire continue car $\|\det(f, g)\|_F \leq 2 \sup \|f\|_F \|g\|_F$. Enfin, on sait que I est linéaire et continue car $|I(f)| \leq \|f\|_F$. Par composition, on voit que T est C^1 et on a

$$T'(f) = (I \circ \det \circ u)'(f) = (I \circ \det)'(f, f') \circ u = I \circ \det'(f, f') \circ u.$$

Il suit que

$$T'(f)(h) = I[\det'(f, f')(h, h')] = \int_0^1 [\det(f(t), h'(t)) + \det(h(t), f'(t))]dt.$$

Exercice 4 *Soit*

$$\varphi :]0, \infty[\to C^0([0, 1]), \alpha \mapsto (\varphi_\alpha : [0, 1] \to \mathbf{R}, t \mapsto t^\alpha).$$

On munit $C^0([0, 1])$ de la norme $\| - \|_1$. Montrer que φ est différentiable et calculer φ'. Déterminer une constante C telle que

$$\forall \alpha, \beta > 0, \|\varphi'(\beta) - \varphi'(\beta)\| \leq C|\beta - \alpha|.$$

On fixe $\alpha > 0$ et on montre que $\varphi'(\alpha)(t) = \ln(t)t^\alpha$ avec la convention que $\ln(t)t^\alpha$ est nul en $t = 0$. Pour cela, on va calculer

$$\int_0^1 |t^{\alpha+h} - t^\alpha - h\ln(t)t^\alpha|dt = \frac{h^2}{(\alpha+1)^2(\alpha+h+1)}.$$

On vérifie d'abord que $t^{\alpha+h} - t^\alpha - h\ln(t)t^\alpha \geq 0$. Comme $t^\alpha \geq 0$, il suffit de considérer $t^h - 1 - h\ln(t)$. Un changement de variable $x = h\ln(t)$ nous ramène à $e^x - 1 - x$ qui est toujours ≥ 0 (étudier la fonction).

Ensuite, on intègre par partie

$$\int_0^1 \ln(t)t^\alpha dt = [\ln(t)\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{t}\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}dt =$$

$$0 - [\frac{t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}]_0^1 = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}.$$

Et comme on a

$$\int_0^1 (t^{\alpha+h} - t^\alpha)dt = [\frac{t^{\alpha+h+1}}{\alpha+h+1} - \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}]_0^1 =$$

$$\frac{1}{\alpha+h+1} - \frac{1}{\alpha+1} = -\frac{h}{(\alpha+h+1)(\alpha+1)},$$

on voit que

$$\int_0^1 |t^{\alpha+h} - t^\alpha - h\ln(t)t^\alpha|dt = -\frac{h}{(\alpha+h+1)(\alpha+1)} + h\frac{1}{(\alpha+1)^2} =$$

$$\frac{h^2}{(\alpha+1)^2(\alpha+h+1)}$$

comme annoncé.

Par la même méthode, on montre que $\varphi"(\alpha)(t) = \ln(t)^2t^\alpha$. On calcule ensuite en intégrant par parties

$$\|\varphi"(\alpha)\| = \int_0^1 \ln(t)^2t^\alpha dt = [\ln(t)^2\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}]_0^1 - \int_0^1 2\frac{\ln(t)}{t}\frac{t^\alpha+1}{\alpha+1}dt =$$

$$0 - \frac{2}{\alpha+1}\int_0^1 \ln(t)t^\alpha dt = \frac{2}{(\alpha+1)^3} \leq 2.$$

Le théorème de la moyenne nous donne donc que

$$\|\varphi'(\beta) - \varphi'(\alpha)\| \leq 2|\beta - \alpha|.$$

Exercice 5 *Montrer que pour $k \in \mathbf{N}$, l'application $L(E) \to L(E), u \mapsto u^k$ est C^1 et calculer sa différentielle.*

Montrer que si E est un espace de Banach, alors l'application $L(E)^\times \to L(E), u \mapsto u^{-1}$ est C^1 et calculer sa différentielle.

Dans le premier cas, il suffit de remarquer que notre application est la composée de l'application diagonale qui est linéaire continue et de la multiplication qui est multilinéaire continue. L'application est donc bien C^1 et sa différentielle en u est donnée par

$$v \mapsto u^{k-1}v + u^{k-2}vu + \cdots + uvu^{k-2} + vu^{k-1}$$

Remarque : Si E est complet, $L(E)^\times$ est ouvert.

Ceci se démontre comme suit : si $\|h\| < 1$, alors $\mathrm{Id}_E + h \in L(E)^\times$ avec

$$(\mathrm{Id}_E + h)^{-1} := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n h^n.$$

Remarquons aussi au passage que

$$\|(\mathrm{Id}_E + h)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|h\|}.$$

Maintenant, par "translation", tout élément de $L(E)^\times$ a un voisinage ouvert contenu dans $L(E)^\times$: en fait, si $u \in L(E)^\times$ et $\|h\| < \frac{1}{\|u^{-1}\|}$, alors $u+h \in L(E)^\times$, et on vérifie que

$$\|(u+h)^{-1}\| \leq \frac{\|u^{-1}\|}{1 - \|hu^{-1}\|}.$$

Bien sûr, cela est faux si E n'est pas complet : prendre par exemple pour h la multiplication par ϵT dans $E := \mathbf{R}[T]$.

On poursuit maintenant l'exercice. On note φ notre application et on montre que $\varphi'(u)(h) = -u^{-1}hu^{-1}$. Si $u \in L(E)^\times$ et $\|h\| < \|u\|$, alors

$$(u+h)^{-1} - u^{-1} + u^{-1}hu^{-1} = (hu^{-1})^2(u+h)^{-1}$$

et donc

$$\begin{aligned}\|(u+h)^{-1} - u^{-1} + u^{-1}hu^{-1}\| &\leq \|h\|^2\|u^{-1}\|^2\|(u+h)^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|h\|^2\|u^{-1}\|^3}{1 - \|hu^{-1}\|}.\end{aligned}$$

Il est clair que $\varphi'(u)$ est linéaire et cette application est continue car $\|\varphi'(u)(h)\| \leq \|u^{-1}\|^2\|h\|$.

Enfin, il faut montrer que φ' est continue. Or on a $\varphi' = \Phi \circ f$ où

$$f : L(E)^\times \to L(E) \times L(E), u \mapsto (u^{-1}, u^{-1})$$

est continue car chaque composante est différentiable, donc continue, et

$$\Phi : L(E) \times L(E) \to L(L(E)), (v, w) \mapsto (h \mapsto vhw)$$

est bilinéaire, et continue car $\|\Phi(v, w)\| \leq \|v\|\|w\|$.

Exercice 6 *Montrer que* $\det : M_n \to \mathbf{R}$ *est* C^1 *et que* $\det'(u)(h) = \mathrm{tr}(u^{ad}h)$ *ou* u^{ad} *est l'adjointe de* u*. En déduire que si* $u \in GL_n(\mathbf{R})$*, alors* $(\det' u)(h) = (\det u)\,\mathrm{tr}(u^{-1}h)$*.*

On sait que det est multilinéaire continu et donc C^∞. On pose $u = [x_{ij}]$ et $u^{ad} = [x_{ij}^{ad}]$. Comme $\det u = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{ij}$, on obtient bien

$$\partial \det / \partial x_{ij} = \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(i)=j} \epsilon(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots \hat{x}_{i\sigma(i)} \cdots x_{n\sigma(n)} = x_{ji}^{ad}.$$

Pour montrer que $(\det' u)(h) = \mathrm{tr}(u^{ad} h)$, il suffit, par linéarité, de montrer cette égalité pour $h = 1_{ij}$, et on a bien $\partial \det / \partial x_{ij} = \mathrm{tr}(u^{ad} 1_{ij}) = x_{ji}^{ad}$.

La dernière assertion résulte du fait que $u \circ u^{ad} = \det(u) \operatorname{Id}$ et que la trace est linéaire.

On peut aussi démontrer la formule directement. En effet, la formule donnant la différentielle d'une application continue nous donne immédiatement $\det'(\mathrm{Id}) = \mathrm{tr}$. On en déduit que

$$\frac{|\det u - \det(u+h) - (\det u) tr(u^{-1}h)|}{\|h\|}$$

$$= |\det u| \frac{|(\det \mathrm{Id} - \det(\mathrm{Id} + u^{-1}h) - tr(u^{-1}h))|}{\|h\|}$$

$$\leq \frac{|\det u|}{\|u^{-1}\|} \frac{|(\det \mathrm{Id} - \det(\mathrm{Id} + u^{-1}h) - tr(u^{-1}h))|}{\|u^{-1}h\|}$$

qui tend bien vers 0 avec h.

Exercice 7 *Sur un espace (vectoriel) euclidien, déterminer en quels points l'application $\varphi : M \mapsto AM^2$ est différentiable et calculer sa différentielle. Même question avec l'application $f : M \mapsto AM$.*

On sait que l'application bilinéaire continue $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle$ a pour différentielle en (u, v), l'application $(h, k) \mapsto \langle u, k\rangle + \langle h, v\rangle$. En composant à gauche avec l'application diagonale $u \mapsto (u, u)$ on trouve l'application $u \mapsto \|u\|^2$ qui a donc pour différentielle en u, l'application $h \mapsto 2\langle u, h\rangle$. Finalement, φ s'obtient en composant à gauche avec l'application $M \mapsto \vec{AM}$ qui est affine et dont la différentielle est l'identité. On trouve donc $\varphi'(M)(h) = 2\langle \vec{AM}, h\rangle$.

On peut décomposer l'application $M \mapsto AM$ en $M \mapsto AM^2$, suivie de $x \mapsto \sqrt{x}$. Il suit que cette application est différentiable en dehors de A et que sa différentielle est $h \mapsto \langle \frac{\vec{AM}}{AM}, h\rangle$. Cette application n'est pas différentiable en A car si on compose avec une application $t \mapsto A + tu$ avec $\|u\| = 1$, on trouve $t \mapsto |t|$ qui n'est pas différentiable en 0.

Exercice 8 *La fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}$, prolongée par 0 à l'origine, est elle continue, différentiable, C^1 ?*

Toute fonction rationnelle est C^1 sur son domaine de définition car cette propriété est stable par composition.

Notre fonction est continue à l'origine. En effet, comme on a toujours $a^2 + b^2 \geq 2ab$, on voit que

$$\left|\frac{x^3 y}{x^4 + y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3 y}{2x^2 y}\right| \leq |x/2|.$$

Soit $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, x \to (x, x^2)$. On a $(f \circ u)(x) = \frac{x}{2}$ et donc $(f \circ u)' = \frac{1}{2}$, D'autre part, f a des dérivées partielles nulles à l'origine car $f(x,0) = f(0,y) = 0$. Si f était différentiable, on aurait donc $f'(0,0) = 0$ et alors $(f \circ u)'(0) = f'(0,0) \circ u'(0) = 0$.

Donc la fonction est continue en 0 mais n'est pas différentiable (bien qu'elle admette partout des dérivées partielles).

Exercice 9 *La fonction* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto \frac{xy^3}{x^4+y^2}$*, prolongée par* 0 *à l'origine, est elle continue, différentiable,* C^1 *?*

On calcule les dérivées partielles $\partial f/\partial x = -\frac{y^3(3x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2}$ et $\partial f/\partial y = \frac{xy^2(3x^4+y^2)}{(x^4+y^2)^2}$ (et 0 à l'origine).

Celles-ci sont bien sûr continues en dehors de l'origine. Elles le sont en fait partout. En effet on a

$$|\partial f/\partial x| \leq |\frac{3x^4y^3}{(x^4+y^2)^2}|+|\frac{y^5}{(x^4+y^2)^2}| \leq |\frac{3x^4y^3}{(2x^2y)^2}|+|\frac{y^5}{(y^2)^2}| \leq |3y/4|+|y| = 7|y|/4$$

et

$$|\partial f/\partial y| = |\frac{3x^5y^2}{(x^4+y^2)^2}|+|\frac{xy^4}{(x^4+y^2)^2}| \leq |\frac{3x^5y^2}{(2x^2y)^2}|+|\frac{xy^4}{(y^2)^2}| \leq |3x/4|+|x| = 7|x|/4.$$

Notre fonction est donc C^1.

Exercice 10 *Déterminer la plus grande partie de* $\mathbf{R}^2$ *sur laquelle la fonction* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto \inf(x^2,y^2)$ *est continue, différentiable,* C^1.

Il est clair que cette fonction est partout continue. Il est tout aussi clair qu'elle est C^1 en dehors des diagonales $x = \pm y$. Aussi, f est différentiable a l'origine car

$$\frac{\inf(x^2,y^2)}{\sup(|x|,|y|)} \leq \sup(|x|,|y|) \to 0 \text{ quand } x,y \to 0.$$

Enfin, pour $y \neq 0$ fixé, la fonction $x \mapsto \inf(x^2,y^2)$ n'est pas différentiable en $x = \pm y$. La fonction n'a donc pas de dérivées partielles en ces points et n'est donc pas différentiable sur les diagonales en dehors de l'origine. Il reste a remarquer que la fonction ne peut pas être C^1 à l'origine car, cette propriété est une propriété ouverte.

Exercice 11 *Montrer que la fonction*

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto \arctan x + \arctan y - \arctan(\frac{x+y}{1-xy})$$

est C^1 *sur son domaine de définition et calculer* f'*. En déduire les valeurs de* f*.*

Bien sûr, cette fonction est définie en dehors de l'hyperbole $xy = 1$ et elle est C^1 car cette propriété est stable par composition. Comme $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$, un rapide calcul nous donne $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$. On en déduit que $f' = 0$ et donc que f est constante sur chaque composante connexe de son domaine de définition. On trouve donc que $f(x,y) = f(0,0) = 0$ entre les branches et que

$$f(x,y) = lim_{\pm\infty} f(x,x) = lim_{\pm\infty}(2\arctan x - \arctan\frac{2x}{1+x^2}) = \pm 2\pi/2 - 0 = \pm\pi$$

sur les cotés.

Exercice 12 *Déterminer les fonctions $f \in C^1(\mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{R})$ telles que*

$$x\partial f/\partial x(x,y) + y\partial f/\partial y(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

On fait le changement de variable $x = u$ et $y = uv$ avec $u > 0$ et on n'écrit pas les variables. On a alors

$$u\partial f/\partial u = u(\partial f/\partial x \partial x/\partial u + \partial f/\partial y \partial y/\partial u) =$$

$$u\partial f/\partial x + uv\partial f/\partial y = x\partial f/\partial x + y\partial f/\partial y.$$

Notre équation se réécrit donc $u\partial f/\partial u = u\sqrt{1+v^2}$, ou encore comme $u \neq 0$, $\partial f/\partial u = \sqrt{1+v^2}$, ce qui donne $f = u\sqrt{1+v^2} + \phi(v)$ avec $\phi \in C^1(\mathbf{R})$. On voit donc que les solutions sont les $f = \sqrt{x^2+y^2} + \phi(y/x)$ avec $\phi \in C^1(\mathbf{R})$.

Pour être tout à fait rigoureux, il faut s'assurer que f est bien solution (ou argumenter du fait que l'on a un C^1-difféomorphisme).

Exercice 13 *Déterminer les fonctions $f \in C^1(\mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{R})$ telles que*

$$x\partial f/\partial y(x,y) - y\partial f/\partial x(x,y) = kf(x,y).$$

On fait le changement de variable $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $r > 0$ et $|\theta| < \pi/2$. On a alors

$$\partial f/\partial\theta = \partial f/\partial x \partial x/\partial\theta + \partial f/\partial y \partial y/\partial\theta) =$$

$$-r\sin\theta\partial f/\partial x + r\cos\theta\partial f/\partial y = -y\partial f/\partial x + x\partial f/\partial y.$$

Notre équation se réécrit donc $\partial f/\partial\theta = kf$. On en déduit que $f = \phi(r)e^{k\theta}$ avec $\phi \in C^1(\mathbf{R})$. On voit donc que les solutions sont les $f = \phi(x^2+y^2)e^{k\arctan(y/x)}$ avec $\phi \in C^1(\mathbf{R})$.

Exercice 14 *Déterminer les fonctions $f \in C^2(\mathbf{R}^2)$ telles que*

$$\partial^2 f/\partial x^2 - 3\partial^2 f/\partial x\partial y + 2\partial^2 f/\partial y^2 = 0.$$

On fait le changement de variable $x = au + bv, y = cu + dv$. On a donc

$$\partial^2 f/\partial u\partial v = ab\partial^2 f/\partial x^2 + (ad+bc)\partial^2 f/\partial x\partial y + cd\partial^2 f/\partial y^2.$$

on choisit a, b, c, d tels que $ab = 1, ad + bc = -3, cd = 2$, par exemple $a = b = 1, c = -2, d = -1$. On s'assure que $ad - bc = 1 \neq 0$ pour pouvoir revenir. Notre équation devient donc $\partial^2 f/\partial u\partial v = 0$ qui donne $f = \varphi(u) + \psi(v)$ avec $\varphi, \psi \in C^1(\mathbf{R}^2)$. On trouve $u = -x-y$ et $v = 2x+y$, ce qui donne $f = \varphi(x+y)+\psi(2x+y)$ avec $\varphi, \psi \in C^1(\mathbf{R}^2)$

Exercice 15 *Déterminer les fonctions de $r := \|x\|_2$ qui sont harmoniques sur $R^n\backslash 0$.*

On rappelle qu'une fonction C^2 est *harmonique* si son laplacien est nul ; et que le *laplacien* de $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est $\Delta(f) = \sum_{i=0}^n \partial^2 f/\partial x_i^2$. Si $\rho := \sum x_i^2$, on a toujours $\partial f/\partial x_i = f'(\rho)\partial x_i/\partial\rho = 2x_i f'(\rho)$, et donc

$$\partial^2 f/\partial x_i^2 = 2f'(\rho) + 2x_i f''(\rho)\partial x_i/\partial\rho = 2f'(\rho) + 4x_i^2 f''(\rho).$$

Il suit que $\Delta(f) = 2nf'(\rho) + 4\rho f''(\rho)$. On voit donc que f est harmonique ssi $nf'(\rho) + 2\rho f''(\rho) = 0$, c'est à dire $f'(\rho) = K\rho^{-\frac{n}{2}}$ ou encore $f(\rho) = a\rho^{1-\frac{n}{2}} + b$ si $n \neq 2$ et $f(\rho) = a\log(\rho) + b$ si $n \neq 2$. En terme de r, on trouve $f(x) = ar^{2-n} + b$ si $n \neq 2$ et $f(x) = a\log(r) + b$ si $n \neq 2$.

Exercice 16 *Calculer le laplacien de $f \in C^2(\mathbf{C})$ en fonction de $z, \bar{z}$ et en déduire les fonctions de $|z|$ qui sont harmoniques sur $\mathbf{C}^*$.*

On a bien sûr $z = x + iy$ et $\bar{z} := x - iy$. On en déduit facilement que $\Delta(f) = 4\partial^2 f/\partial z\partial\bar{z}$. En posant $\rho = |z|^2$, on voit que $\partial f/\partial z = f'(\rho)\bar{z}$ et donc $\partial^2 f/\partial z\partial\bar{z} = f"(\rho)\rho + f'(\rho)$. On retrouve comme ça $f(z) = a\log|z| + b$.

Exercice 17 *Montrer que si $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est fonction de $u(x_1, \ldots, x_n)$, alors $\Delta(f) = f"(u)\|u'\|_2^2 + f'(u)\Delta(u)$. En déduire les fonctions de $\frac{x^2+y^2}{z^2}$ qui sont harmoniques.*

On rappelle la formule en une variable $f(u)' = f'(u)u'$ qui donne $f(u)'' = f'(u)'u' + f'(u)u'' = f''(u)u'^2 + f'(u)u''$. On peut appliquer ça aux fonctions qui donnent les dérivées partielles pour obtenir

$$\partial^2 f/\partial x_i^2 = f''(u)(\partial u/\partial x_i)^2 + f'(u)\partial^2 u/\partial x_i^2$$

et on fait la somme.

On prend maintenant $n = 3$ et $u = \frac{x^2+y^2}{z^2}$. On a

$$\|u'\|_2^2 = (\frac{2x}{z^2})^2 + (\frac{2y}{z^2})^2 + (-2\frac{x^2+y^2}{z^3})^2 = 4\frac{u+u^2}{z^2}$$

et

$$\Delta(u) = \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z^2} + 6\frac{x^2+y^2}{z^3} = \frac{4+6u}{z^2}$$

si bien que

$$\Delta(f) = 4\frac{u+u^2}{z^2}f''(u) + \frac{4+6u}{z^2}f'(u).$$

On voit donc que f est harmonique ssi $2(u^2+u)f''(u) + (3u+2)f'(u) = 0$. On décompose

$$\frac{-3u-2}{2u^2+2u} = -\frac{1}{u} - \frac{1}{2}\frac{1}{u+1}$$

et on en déduit que $f'(u) = K\frac{1}{u\sqrt{u+1}}$. On fait le changement de variable $u+1 = v^2$, ce qui donne $f'(v) = 2K\frac{1}{v^2-1}$ et donc finalement, $f(v) = a\ \mathrm{argth} v + b$, c'est à dire $f(x,y,z) = a\ \mathrm{argth}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{z^2} + 1} + b$.

Exercice 18 *Soit $\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, x \mapsto \|x\|^2$. Calculer ϕ' puis ϕ'' et enfin $\Delta(\Phi)$.*

On a déjà calculé $\phi'(x)(h) = 2\langle x, h\rangle$, soit en écriture vectorielle $\phi'(x) = 2x$ et on voit donc que ϕ' est linéaire. Il suit que $\phi''(x) = \phi'$, c'est à dire $\phi''(x)(h,k) = \phi'(h)(k) = 2\langle h, k\rangle = 2hIk$. En écriture matricielle, on a donc $\phi''(x) = 2I$ et il suit que $\Delta(\Phi) = \mathrm{tr}(2I) = 2n$.

Exercice 19 *Montrer que le système*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{4}\sin(x+y) \\ y & = & 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y) \end{array} \right.$$

admet une unique solution.

On va utiliser le théorème du point fixe qui dit qu'une application contractante sur un espace métrique complet possède un point fixe ; et le théorème de la moyenne qui dit qu'une application différentiable est contractante si $\|f'\| \leq k$ avec $k < 1$. On pose donc $f(x,y) = (\frac{1}{4}\sin(x+y), 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y))$ et on calcule

$$f'(x,y) = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{4}\cos(x+y) & \frac{1}{4}\cos(x+y) \\ \frac{2}{3}\frac{1}{1+(x-y)^2} & \frac{2}{3}\frac{-1}{1+(x-y)^2} \end{array} \right].$$

On a alors

$$f'(x,y)(h,k) = (\frac{1}{4}\cos(x+y)(h+k), \frac{2}{3}\frac{1}{1+(x-y)^2}(h-k)),$$

ce qui donne

$$\|f'(x,y)(h,k)\|_1 \leq \frac{1}{4}|h+k| + \frac{2}{3}|h-k| \leq \frac{11}{12}(|h|+|k|) = \frac{11}{12}\|(h,k)\|_1,$$

soit encore $\|f'(x,y)\| \leq \frac{11}{12}$ pour la norme $\|-\|_1$. Attention, le choix de la norme est important car, par exemple $\|f'(0,0)(1,-1)\|_\infty = \frac{4}{3}$.

2 Théorème des fonctions implicites, sous-variétés de $\mathbf{R}^n$

2.1 Définition

Soient E et F deux espaces de Banach, $U \subset E$ un ouvert et $f \in C^1(U,F)$.

On dit que f est un *difféomorphisme (sur son image)* si f est une bijection de U sur un ouvert $V \subset F$ et si $f^{-1} \in C^1(V,E)$.

On dit que f est un *difféomorphisme local* en $\alpha \in E$ s'il existe un voisinage ouvert U' de α dans U tel que la restriction de f à U' soit un difféomorphisme.

2.2 Remarque

Pour que f soit un difféomorphisme, il faut et suffit que f soit injective et que ce soit un difféomorphisme local en chaque point de U.

2.3 Théorème d'inversion locale

Pour que f soit un difféomorphisme local en α, il faut et suffit que $f'(\alpha)$ soit bijectif.

2.4 Théorème des fonctions implicites

Soient E, F, G trois espaces de Banach et $\Phi \in C^k(U \times V \subset E \times F, G)$ tel que $\Phi(a,b) = 0$ et $\Phi'_a(b)$ est bijectif. Alors, il existe $U' \ni a, V' \ni b$ et $\varphi \in C^k(U', V')$ tels que pour $(x,y) \in U' \times V'$, on ait $\Phi(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$.

2.5 Remarque

Alors, φ est unique et $\varphi(a) = b$. De plus, on a $\varphi'(a) = \Phi'_a(b)^{-1} \circ \Phi'_b(a)$.

2.6 Proposition

Soit X une partie de $\mathbf{R}^n$ et $\alpha \in X$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes

1. Il existe un C^1-difféomorphisme $\Psi : U \to \mathbf{R}^n$ tel que $\Psi(\alpha) = 0$ et $\Psi^{-1}(\mathbf{R}^k) = X \cap U$.
2. Il existe une application C^1, $f : U \to \mathbf{R}^{n-k}$ telle que $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha)$ est surjective et $X \cap U = f^{-1}(0)$.

2.7 Définition

On dit alors que X est une *sous-variété de classe C^1 et de dimension k au voisinage de α*. Si c'est le cas pour tout $\alpha \in X$ et si $X \neq \emptyset$, on dit que X est une *sous-variété de classe C^1 et de dimension k*. Enfin, on dit *courbe* (resp. *surface*, resp. *hypersurface*) si $k = 1$ (resp. 2, resp. $n-1$).

2.8 Remarque

Soit $f \in C^1(U, \mathbf{R}^{n-k})$ telle que $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x)$ surjective. Si $X := f^{-1}(0)$ est non-vide, c'est une sous-variété de classe C^1 et de dimension k.

2.9 Définition

Un vecteur $h \in \mathbf{R}^n$ est *tangent* en $\alpha \in X$ à une sous-variété $X \subset \mathbf{R}^n$ de classe C^1, s'il existe $\gamma \in C^1(I, \mathbf{R}^n)$ où I est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}$ tel que $\gamma(0) = \alpha$, $\gamma(I) \subset X$ et $\gamma'(0) = h$. Leur ensemble est l'*espace tangent* $T_\alpha(X)$.

2.10 Remarque

Soit $f \in C^1(U, \mathbf{R}^p)$ tel que $f(\alpha) = \beta$ et $f(U) \subset Y$ où Y est une sous-variété de classe C^1. Alors, $f'(\alpha)(T_\alpha(X)) \subset T_\beta(Y)$.

2.11 Proposition

Avec les notations de la dernière proposition, on a $T_\alpha(X) = \Psi'(\alpha)^{-1}(\mathbf{R}^k) = \ker f'(\alpha)$.

2.12 Définition

L'espace *normal* à X en α est $N_\alpha(X) := T_\alpha(X)^\perp$. Deux sous-variétés X et Y sont *orthogonales* (resp. *perpendiculaires*, resp. *tangentes*) en α si leurs espaces tangents sont orthogonaux (resp. perpendiculaires, resp. égaux (ou plus généralement, si l'un est contenu dans l'autre)). Enfin, on dit qu'elles se *coupent transversalement* en α si $N_\alpha(X) \cap N_\alpha(Y) = 0$.

2.13 Remarque

Si deux sous-variétés X et Y se coupent transversalement partout, alors $X \cap Y$ est une sous-variété et pour tout $\alpha \in X \cap Y$, on a $T_\alpha(X \cap Y) = T_\alpha(X) \cap T_\alpha(Y)$.

Exercice 20 *Montrer que l'application $z \mapsto z^2$ est un difféomorphisme local de $\mathbf{C}\backslash 0$ sur lui même mais n'est pas un difféomorphisme global.*

Il est clair que l'application est surjective mais n'est pas injective. De plus, f est holomorphe et $f'(z) = 2z$ est bijective pour $z \neq 0$.

Exercice 21 *On rappelle que si $z \in \mathbf{C}$, alors* $\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$. *Déterminer en quels points,* cosh *est un difféomorphisme local. Puis, montrer que* cosh *induit un difféomorphisme de l'ouvert U des $z \in \mathbf{C}$ tels que $\Re(z) > 0$ et $0 < \Im(z) < 2\pi$ sur un ouvert $V \subset \mathbf{C}$ que l'on déterminera.*

Il est clair que cosh est holomorphe et que $\cosh' = \sinh$ avec $\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$. De plus, $\sinh(z) = 0$ ssi $e^z = e^{-z}$, ou encore $e^{2z} = 1$, c'est à dire $z \in i\pi\mathbf{Z}$. On voit donc que cosh est un difféomorphisme local pour $z \notin i\pi\mathbf{Z}$.

Maintenant, l'application $z \mapsto e^z$ induit une bijection de U sur l'ouvert $W \subset \mathbf{C}$ des $z \in \mathbf{C}$ tels que $|z| > 1$ et $\Im(z) \neq 0$, la réciproque étant donnée par $re^{i\theta} \mapsto logr + i\theta$ avec $r > 1$ et $0 < \theta < 2\pi$.

On considère ensuite l'équation $\frac{z+z^{-1}}{2} = \alpha$, c'est à dire $z \neq 0$ et $z^2 - 2\alpha z + 1 = 0$. Comme le produit des racines vaut 1, cette équation a au plus une solution avec $|z| > 1$, ce qui montre que l'application $f : z \mapsto \frac{z+z^{-1}}{2}$ est injective sur W et cosh est donc bien un difféomorphisme global sur U.

Pour conclure, il reste à déterminer l'image de U par cosh, ou plus simplement l'image de W par f. Comme l'équation $z^2 - 2\alpha z + 1 = 0$ a toujours au moins une solution, il suffit de déterminer les valeurs de α pour lesquelles, il y a une solution z avec $|z| = 1$ ou bien avec $|z| > 1$ et $\mathrm{Im}(z) = 0$. Dans le premier cas, l'autre solution est z^{-1} et $\alpha = \Re(z)$. On trouve donc $\Im(\alpha) = 0$ et $\Re(\alpha) \leq 1$. Le second cas correspond clairement à $\Im(\alpha) = 0$ et $\Re(\alpha) > 1$. On voit donc que V est l'ouvert des $z \in \mathbf{C}$ tels que $\Im(\alpha) \neq 0$ ou $\Re(\alpha) < -1$.

Exercice 22 *Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbf{R}$, l'application*

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, (x, y) \mapsto (x + a \sin y, y + b \sin x)$$

est elle un difféomorphisme local en tout point ? Montrer qu'alors c'est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur lui même.

On calcule

$$\det f'(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & a\cos y \\ b\cos x & 1 \end{vmatrix} = 1 - ab\cos x \cos y.$$

On voit donc que f est un difféomorphisme local en tout point ssi $ab < 1$.

On montre qu'alors f est injective. Effectivement, supposons que $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, c'est à dire

$$\begin{cases} x_1 + a\sin y_1 &= x_2 + a\sin y_2 \\ y_1 + b\sin x_1 &= y_2 + b\sin x_2 \end{cases}.$$

Remarquons tout d'abord que si $x_2 = x_1$, alors $y_2 = y_1$. Supposons donc que $x_2 \neq x_1$ et $y_2 \neq y_1$. On peut écrire $\sin x_2 - \sin x_1 = (x_2 - x_1)\cos x$ et $\sin y_2 - \sin y_1 = (y_2 - y_1)\cos y$. Comme $x_2 \neq x_1$ et $y_2 \neq y_1$, on en déduit que $ab\cos x \cos y = 1$, contradiction.

On montre maintenant que f est surjective. Pour cela, on montre qu'elle est propre. En effet, si elle est propre, elle est fermée. Étant un difféomorphisme, elle est ouverte. Et on conclut en disant que $\mathbf{R}^2$ est connexe. Mais il est clair que si $|x + a\sin y| \leq M$ et $|y + b\sin x| \leq M$, alors $|x| \leq M + |a|$ et $|y| \leq M + |b|$.

Exercice 23 *Montrer que l'application*

$$\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, (x,y,z) \mapsto (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$$

est un difféomorphisme sur son image que l'on déterminera.

Montrer que l'application

$$F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, (x,y,z) \mapsto$$

$$(e^{x-y+2z} + e^{-x+y+2z}, e^{2x} + e^{2y} - 2\lambda e^{x-y}, e^{2x} + e^{2y} - 2e^{y-x})$$

est un difféomorphisme sur son image pour $\lambda \geq 0$ (on pourra écrire $F = G \circ \varphi$ avec G à déterminer).

On calcule d'abord

$$\det \varphi' = \begin{vmatrix} 0 & 2e^{2y} & 2e^{2z} \\ 2e^{2x} & 0 & -2e^{2z} \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4(e^{2(y+z)} + e^{2(x+z)}) < 0.$$

On a donc bien un difféomorphisme local. Pour poursuivre, on considère le système

$$\begin{cases} e^{2y} + e^{2z} &= u \\ e^{2x} - e^{2z} &= v \\ x - y &= w \end{cases}$$

Celui-ci est équivalent à

$$\begin{cases} e^{2y} &= \frac{u+v}{1+e^{2w}} \\ e^{2z} &= \frac{ue^{2w}-v}{1+e^{2w}} \\ x &= y + w \end{cases}$$

On trouve donc une unique solution pour $u + v > 0$ et $ue^{2w} - v > 0$. Autrement dit, on a un difféomorphisme sur l'ouvert de $\mathbf{R}^3$ défini par $xe^{2z} > y > -x$.

On pose $G(x,y,z) = (xe^z - ye^{-z}, x+y-2\lambda e^z, x+y-2e^{-z})$. Il est clair que $F = G\circ\varphi$ et on a

$$\det G' = \begin{vmatrix} e^z & -e^{-z} & xe^z + ye^{-z} \\ 1 & 1 & -2\lambda e^z \\ 1 & 1 & +2e^{-z} \end{vmatrix}.$$

Comme en général,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & d \\ 1 & 1 & e \end{vmatrix} = (a-b)(e-d),$$

on trouve $\det G' = 2(e^z + e^{-z})(e^{-z} + \lambda e^z) > 0$. Cela montre que G est un difféomorphisme local et il faut s'assurer que c'est une application injective. On considère donc le système

$$\left\{\begin{array}{ccc} xe^z - ye^{-z} & = & u \\ x+y-2\lambda e^z & = & v \\ x+y-2e^{-z} & = & w \end{array}\right.$$

S'il a une solution, alors nécessairement, $-2\lambda e^z + 2e^{-z} = v - w$, c'est à dire $2\lambda e^{2z} + (v-w)e^z - 2 = 0$. Or le polynôme $2\lambda T^2 + (v-w)T - 2 = 0$ a au plus une racine réelle positive. En effet, soit $\lambda = 0$ et là c'est clair, soit le produit des racines vaut $-\frac{2}{\lambda} < 0$. On en déduit que z, s'il existe, est unique. On considère alors le système de Cramer

$$\left\{\begin{array}{ccc} xe^z - ye^{-z} & = & u \\ x+y & = & w + 2e^{-z} \end{array}\right.$$

Son déterminant vaut $e^z + e^{-z} > 0$. Il possède donc une unique solution. Et on a gagné.

Exercice 24 *Montrer que si $f \in C^1(\mathbf{R})$ et s'il existe $k > 0$ tel que $f' \geq k$, alors f est un difféomorphisme de $\mathbf{R}$ sur lui même. Montrer que ce résultat est faux avec $k = 0$.*

Il est clair que f est un difféomorphisme local en tout point car f' ne s'annule pas. De plus, f étant continue et croissante est injective. Enfin, il reste à prouver la surjectivité. Pour cela, on montre que f est propre. Si $|f(x)| \leq M$, alors il existe $y \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) - f(0) = f'(y)x$ et donc $|f(x) - f(0)| = |f'(y)||x| \geq k|x|$, ce qui donne $|x| \leq \frac{M+|f(0)|}{k}$.

Enfin, la fonction $f(x) = e^x$ satisfait $f' \geq 0$ mais n'est pas surjective.

Exercice 25 *Soient $f, g \in C^1(\mathbf{R})$. Montrer que si $\forall x, y \in \mathbf{R}, f'(x) \neq g'(y)$, alors l'application*

$$F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, (x,y) \mapsto (x+y, f(x)+g(y))$$

est un difféomorphisme sur son image.

Montrer que si, de plus, il existe $K, k > 0$ tel que $f' \geq k$ et $|g| \leq K$, alors F est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur lui même.

On a $\det F'(x,y) = g'(y) - f'(x)$, ce qui montre que F est un difféomorphisme local. On montre maintenant que F est injective. Supposons que $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$, c'est à dire

$$\begin{cases} x_1 + y_1 & = & x_2 + y_2 \\ f(x_1) + g(y_1) & = & f(x_2) + g(y_2) \end{cases}.$$

Il est clair que si $x_1 = x_2$, alors $y_1 = y_2$. Sinon, on écrit $f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1)$ et $g(y_2) - g(y_1) = g'(y)(y_2 - y_1)$ et on obtient immédiatement $f'(x) = g'(y)$, ce qui contredit notre hypothèse.

Il reste à montrer que sous les hypothèses supplémentaires, F est surjective. Comme d'habitude, on montre que c'est une application propre. On suppose donc que $|x+y|, |f(x) + g(y)| \leq M$.Il suit que $|f(x)| \leq M + K$ et comme f est propre (c'est un difféomorphisme de $\mathbf{R}$ sur lui même), il existe N tel que $|x| \leq N$. Il suit que $|y| \leq N + M$ et on a gagné.

Exercice 26 *Montrer que si E est un espace de Banach, alors l'application $\varphi : L(E)^\times \to L(E), u \mapsto u^{-1}$ est un difféomorphisme de $L(E)^\times$ sur lui même.*

On sait que cette application est C^1 et elle est son propre inverse.

Exercice 27 *Montrer que si E est un espace de Banach, l'équation $u^3 - 2u^2 - uv + \mathrm{Id}_E = 0$ admet une solution $u \in L(E)^\times$ pour v proche de 0.*

On pose $\varphi(u) = u^2 - 2u + u^{-1}$. On a $\varphi(\mathrm{Id}_E) = 0$ et $\varphi'(u)(h) = uh + hu - 2h - u^{-1}hu^{-1}$ si bien que $\varphi'(\mathrm{Id}_E)(h) = -h$, c'est à dire $\varphi'(\mathrm{Id}_E) = -\mathrm{Id}_E$. Il résulte donc du théorème d'inversion locale que pour v proche de 0, il existe u proche de Id_E, et donc inversible, telle que $\varphi(u) = v$, c'est à dire $u^3 - 2u^2 - uv + \mathrm{Id}_E = 0$.

Exercice 28 *Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$ avec $|t| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, l'équation $\sin(tx) + \cos(tx) = x$ a une unique solution $x = \varphi(t)$. Montrer que φ est C^∞ et en donner un d.l. à l'ordre 2 en 0.*

On fixe t et on considère la fonction $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto \sin(tx) + \cos(tx)$. On a $u'(x) = t(\cos(tx) - \sin(tx))$. On rappelle que $(\cos a - \sin a)^2 = 1 + \cos(a+b) \leq 2$. On a donc $|u'(t)| \leq 2|t| < 1$. Il suit que u est contractante et a donc un point fixe $x = \varphi(t)$.

Il résulte du théorème des fonctions implicites que φ est C^∞. En fait, on applique ce théorème à l'application $\Phi : (t,x) \to x - \sin(tx) - \cos(tx)$ en $(t_0, x_0 = \varphi(t_0))$. On a alors l'existence d'une fonction C^∞ au voisinage de t_0 qui est caractérisée par la même propriété que φ.

En pratique, on écrit $x = \varphi$. On considère l'égalité $\sin(tx) + \cos(tx) = x$. En faisant $t = 0$, on trouve $1 = x(0)$. En dérivant, on trouve $(x + tx')(\cos(tx) - \sin(tx)) = x'$, et en faisant à nouveau $t = 0$, on obtient $1 = x'(0)$. On dérive à nouveau pour obtenir

$$(2x' + tx'')(\cos(tx) - \sin(tx)) - (x + tx')^2(\sin(tx) + \cos(tx)) = x''$$

et en faisant $t = 0$, on obtient $1 = x''(0)$. On trouve donc comme d.l. en 0 pour $x : 1 + t + \frac{t^2}{2}$.

Exercice 29 *Montrer que l'équation* $z^3+2z+e^{z-x-y^2}=\cos(x-y+z)$ *définit implicitement* z *comme fonction* C^∞ *de* x *et* y *au voisinage de* 0 *qui s'annule en* 0. *Calculer les dérivées partielles de* z *à l'ordre* 2 *en* 0.

On pose $f(x,y,z) = z^3+2z+e^{z-x-y^2}-\cos(x-y+z)$. On s'assure que $f(0,0,0)=0$ et on calcule $\partial f/\partial z$ à l'origine. On a $f(0,0,z)=z^3+2z+e^z-\cos z$ et donc $\partial f/\partial z(0,0,z) = 3z^2+2+e^z+\sin z$, si bien que $\partial f/\partial z(0,0,0)=3\neq 0$.

Maintenant, on dérive notre équation par rapport à x. On obtient

$$3z^2\partial z/\partial x+2\partial z/\partial x+(\partial z/\partial x-1)e^{z-x-y^2} = -(1+\partial z/\partial x)\sin(x-y+z)$$

puis on fait $x=y=z=0$, ce qui donne $\partial z/\partial x(0,0)=\frac{1}{3}$. On fait la même chose par rapport à y, ce qui donne

$$3z^2\partial z/\partial y+2\partial z/\partial y+(\partial z/\partial y-2y)e^{z-x-y^2} = -(-1+\partial z/\partial y)\sin(x-y+z)$$

et donc $\partial z/\partial y(0,0)=0$. On poursuit aux ordres supérieurs. On obtient

$$6z(\partial z/\partial x)^2+3z^2\partial^2z/\partial x^2+2\partial^2z/\partial x^2+(\partial^2z/\partial x^2+(\partial z/\partial x-1)^2)e^{z-x-y^2}$$
$$= -\partial^2z/\partial x^2\sin(x-y+z)-(1+\partial z/\partial x)^2\cos(x-y+z)$$

et donc $\partial^2z/\partial x^2(0,0)=-\frac{20}{27}$, puis

$$6z(\partial z/\partial y)^2+3z^2\partial^2z/\partial y^2+2\partial^2z/\partial y^2+(\partial^2z/\partial y^2-2+(\partial z/\partial y-2y)^2)e^{z-x-y^2}$$
$$= -\partial^2z/\partial y^2\sin(x-y+z)+(-1+\partial z/\partial y)^2\cos(x-y+z)$$

si bien que $\partial^2z/\partial y^2(0,0)=\frac{4}{9}$ et finalement,

$$6z(\partial z/\partial x)(\partial z/\partial y)+3z^2\partial^2z/\partial x\partial y+2\partial^2z/\partial x\partial y+$$
$$(\partial^2z/\partial x\partial y+(\partial z/\partial y-2y)(\partial z/\partial x-1))e^{z-x-y^2}$$
$$= -\partial^2z/\partial x\partial y\sin(x-y+z)-(-1+\partial z/\partial y)(1+\partial z/\partial x)\cos(x-y+z)$$

qui donne $\partial^2z/\partial x\partial y(0,0)=\frac{1}{3}$.

Exercice 30 *Déterminer deux fonctions* C^∞ y_1 *et* y_2 *de* x *au voisinage de* 0 *telle que* $x^3+xy+y^2e^{x+y}=0$ *(on pourra poser* $y=xz$*). Calculer des d.l. à l'ordre 2 dans chacun des cas.*

Posons $f(x,y)=x^3+xy+y^2e^{x+y}$. On cherche donc des solutions y de $f(x,y)=0$ au voisinage de $x=0$. On va faire un éclatement de l'origine, c'est à dire poser $y=xz$, ce qui donne $f(x,xz)=x^3+x^2z+x^2z^2e^{x(1+z)}=x^2g(x,z)=0$ avec $g(x,z)=x+z+z^2e^{x(1+z)}$. On va donc chercher des solutions z de $g(x,z)=0$ au voisinage de $x=0$. Il suffira alors de prendre $y=xz$. De plus, comme $y'=z+xz'$ et $y''=2z'+xz$", on voit que l'on aura $y(0)=0, y'(0)=z(0)$ et $y''(0)=2z'(0)$.

On a $g(0,z)=0$ ssi $z=0$ ou $z=-1$. On calcule ensuite $\partial g/\partial z(0,z)=1+2z$ et on voit donc que $\partial g/\partial z(0,0)=1$ et $\partial g/\partial z(0,-1)=-1$. Dans les deux cas, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites qui nous donne l'existence de deux fonctions z_1 et z_2 de x satisfaisant $g(x,z)=0$ au voisinage de $x=0$ avec $z_1(0)=0$ ou $z_2(0)=-1$. En dérivant l'équation $g(x,z)=0$ par rapport à

x, on trouve $1+z'+(2zz'+z^2(1+z+xz')e^{x(1+z)}=0$. On fait ensuite $x=0$, ce qui donne $1+z'+2zz'+z^2(1+z)=0$. On trouve donc $z_1'(0)=-1$ et $z_2'(0)=1$.

On a donc bien trouvé deux fonctions C^∞ $y_1=xz_1$ et $y_2=xz_2$ qui satisfont notre équation au voisinage de $x=0$. De plus, on a $y_1(0)=y_2(0)=0, y_1'(0)=0, y_2'(0)=-1, y_1''(0)=-2, y_2''(0)=2$. On a donc les d.l. à l'ordre 2, $y=-x^2$ et $y=-x+x^2$.

Exercice 31 *Déterminer une solution y de l'équation $x=y+\frac{y}{\ln y}$ en x pour $x,y>0$ proches de 0, de la forme $y(x)=x(1+u(\frac{1}{\ln x}))$ avec u C^∞ au voisinage de 0 et $u(0)=0$. Calculer $u'(0)$ et $u''(0)$.*

On pose $y=x(1+u)$. L'équation devient $u\ln x+u\ln(1+u)+1+u=0$. Puis on pose $v=\frac{1}{\ln x}$ et l'équation devient $u+uv\ln(1+u)+v+uv=0$. On dérive le premier membre par rapport à u et on fait $u=v=0$. On trouve 1 et, comme l'équation est trivialement satisfaite pour $u=v=0$, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites : il existe une solution u de l'équation au voisinage de $v=0$ telle que $u(0)=0$. La première partie de l'exercice est donc résolue.

On a

$$u'+(u'v+u)\ln(1+u)+\frac{uvu'}{1+u}+1+u'v+u=0$$

et on trouve donc $u=v=0$, on trouve $u'(0)=-1$. On a

$$u''+(u''v+2u')\ln(1+u)+\frac{(2u'v+2u)u'}{1+u}+\frac{uv(u''(1+u)-u'^2)}{(1+u)^2}+u''v+2u'=0,$$

ce qui donne $u''(0)=2$.

Exercice 32 *Démontrer que la "courbe" définie par les équations $x^2+y^2+z^2=14$ et $x^3+y^3+z^3=36$ est une variété de classe C^1. Préciser la tangente en chaque point.*

On peut remarquer que $(1,2,3)$ est sur la courbe qui est donc non-vide. On peut aussi ne pas le remarquer. Dans ce cas, on peut procèder autrement. On considère la droite D d'équations $y=-x, z=36^{\frac{1}{3}}$. Celle-ci est contenue dans la surface d'équation $x^3+y^3+z^3=36$. De plus, elle rencontre la sphère $x^2+y^2+z^2=14$: en effet, on a $36^{\frac{2}{3}}\leq 14$..

On pose ensuite $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2-14, x^3+y^3+z^3-36)$ et on calcule

$$f' := \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{bmatrix}.$$

Avant de poursuivre, on rappelle que si $\varphi:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ a pour matrice $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, alors φ est surjective ssi $u\wedge v\neq 0$. Dans ce cas, alors $u\wedge v$ est une base de $\ker\varphi$.

Il suffit donc maintenant de montrer que le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+z^2 & = & 14 \\ x^3+y^3+z^3 & = & 36 \\ 6xy(y-x) & = & 0 \\ 6xz(z-x) & = & 0 \\ 6yz(z-y) & = & 0 \end{array}\right.$$

n'a pas de solution. Supposons d'abord que 2 des variables sont nulles, disons $x = y = 0$. On doit alors avoir $z^2 = 14$ et $z^3 = 36$ or $36^2 \neq 14^3$. Supposons maintenant que les 3 variables sont non-nulles, on a alors $x = y = z$ et les deux premières équations deviennent $3x^2 = 14$ et $3x^3 = 36$. Or $14^3 3^2 \neq 36^2 3^3$. Finalement, il reste le cas ou 2 des variables, disons $x, y \neq 0$ sont non nulles et $z = 0$. On a alors, $y = x$ et les deux premières équations deviennent $2x^2 = 14$ et $2x^3 = 36$ et on a $14^3 2^2 \neq 36^2 2^3$.

On sait maintenant que l'espace tangent en un point (a, b, c) a pour base $(bc(c-b), -ac(c-a), ab(b-a))$.

Exercice 33 *Soient a, b, c non tous ≤ 0. Montrer que les "surfaces" d'équations $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ et $xyz = 1$ sont des sous-variétés de classes C^1. En quels points sont elles perpendiculaires, tangentes, transversales ?*

On vérifie aisément que ces surfaces sont bien des sous-variétés de classes C^1 avec espaces normaux en (x, y, z) engendrés par (ax, by, cz) et (yz, xz, xy) respectivement. On a alors

$$\langle (ax, by, cz), (yz, xz, xy) \rangle = a + b + c,$$

ce qui montre que nos surfaces sont perpendiculaires en tout point si $a+b+c = 0$, et nulle part sinon.

Elles sont tangentes si les vecteurs normaux sont colinéaires, c'est à dire

$$\left\{ \begin{array}{ccc} ax^2 + by^2 + cz^2 & = & 1 \\ xyz & = & 1 \\ z(ax^2 - by^2) & = & 0 \\ y(ax^2 - cz^2) & = & 0 \\ x(by^2 - cz^2) & = & 0 \end{array} \right. ,$$

ce qui est équivalent à $xyz = 1$ et $ax^2 = by^2 = cz^2 = \frac{1}{3}$. On trouve donc les conditions $a, b, c > 0$ et $27abc = 1$ auquel cas les surfaces sont donc tangentes en les 4 points de coordonnées

$$(3\sqrt{bc}, 3\sqrt{ac}, 3\sqrt{ab}), (-3\sqrt{bc}, -3\sqrt{ac}, 3\sqrt{ab}),$$

$$(-3\sqrt{bc}, 3\sqrt{ac}, -3\sqrt{ab}), (3\sqrt{bc}, -3\sqrt{ac}, -3\sqrt{ab}).$$

Sinon, elles se coupent transversalement.

Exercice 34 *On note A, B, C les extrémités de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on pose $S_\lambda := \{M \in \mathbf{R}^3, MA^2 + MB^2 + MC^2 = \lambda\}$. Pour quelles valeurs de λ est-ce une surface de classe C^1 ? Montrer qu'alors, c'est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon. Pour quelles valeurs de λ, les sphères S_λ et S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sont elles tangentes ? En déduire la nature de l'intersection de S_λ et S en fonction de λ.*

On note $G := \frac{1}{3}(A + B + C)$. On a alors $GA^2 = GB^2 = GC^2 = \frac{2}{3}$. D'autre part, $MA^2 = MG^2 + GA^2 + \langle \vec{MG}, \vec{GA} \rangle$. Comme $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$, il suit que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + 2$. On voit donc que $S_\lambda = \{M \in \mathbf{R}^3, MG^2 = \frac{\lambda-2}{3}\}$ est une surface de classe C^1 ssi $\lambda > 2$ et qu'alors, c'est une sphère de centre G et de rayon $\sqrt{\frac{\lambda-2}{3}}$.

Les sphères S_λ et S sont tangentes en un point M ssi les vecteurs normaux $\vec{GM}$ et $\vec{OM}$, où O est l'origine de $\mathbf{R}^3$, sont colinéaires. Cela signifie que les points sont alignés ou encore que $M = (a, a, a)$. On doit alors avoir $3a^2 = 1$ et $3(a - \frac{1}{3})^2 = \frac{\lambda - 2}{3}$. Ca correspond à $\lambda = 6 \pm 2\sqrt{3}$. Dans ces deux cas, les sphères se coupent en point. On en déduit que si si $6 - 2\sqrt{3} < \lambda < 6 + 2\sqrt{3}$, les sphères se coupent en un cercle. Et qu'elles ne se rencontrent pas sinon.

Exercice 35 *Etude des tangentes à une courbe $\mathcal{C}$ d'équation $f(x, y) = 0$ en un point P. Si $f'(P) \neq 0$, on a une unique tangente dirigée par un vecteur normal à $f'(P)$. Sinon, on translate P à l'origine et on éclate, c'est à dire, on pose $y = xz$ (ou le contraire) et on obtient $f(x, xz) = x^k g(x, z)$. On considère alors la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation $g(x, z) = 0$ et l'application $p : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}, (x, z) \mapsto (x, xz)$. Soit Q tel que $p(Q) = P$. Si $g'(Q) \neq 0$, on a une tangente dirigée par u en Q et donc une tangente dirigée par $p'(Q)(u)$ en P. Sinon, on translate et on éclate a nouveau.*

Application $f(x, y) = x^2 - y^2 + x^4 + x^3 y + y^5$ et $P = (0, 0)$.

On a $\partial f/\partial x = 2x + 4x^3 + 3x^2 y$ et $\partial f/\partial y = -2y + x^3 + 5y^4$ si bien que $f'(0, 0) = 0$. On calcule donc $f(x, xz) = x^2 - x^2 z^2 + x^4 + x^4 z + x^5 z^5 = x^2 g(x, z)$ avec $g(x, z) = 1 - z^2 + x^2(1 + z) + x^3 z^5$ et on considère la courbe d'équation $g(x, z) = 0$. Pour $x = 0$, on trouve $z = \pm 1$. D'autre part, on a $\partial g/\partial x = 2x(1 + z) + 3x^2 z^5$ et $\partial g/\partial z = -2z + x^2 + 5x^3 z^4$. On voit donc que la courbe est de classe C^1 aux points $(0, \pm 1)$ avec, dans les deux cas, vecteur normal $(0, 1)$ et donc vecteur tangent $(1, 0)$. On considère maintenant l'application $p : (x, z) \mapsto (x, zx)$. On a

$$p'(x, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & x \end{bmatrix} \text{ et donc } p'(x, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On voit donc que $p'(0, \pm 1)(1, 0) = (1, \pm 1)$. On a donc deux tangentes à l'origine dirigées par ces vecteurs.

Exercice 36 *Montrer que $SL_n(\mathbf{R})$ est une hypersurface de classe C^1 de $M_n(\mathbf{R})$ et déterminer l'hyperplan tangent en* Id.

On a $\det'(u)(u) = n \neq 0$, ce qui montre que $SL_n(\mathbf{R})$ est une sous-variété de classe C^1. Et l'espace tangent en Id est l'hyperplan diagonal d'équation $\sum_{i=1}^n x_{ii} = 0$, c'est à dire $\{M \in M_n(\mathbf{R}), \operatorname{tr} M = 0\}$.

Exercice 37 *Montrer que $O(n)$ est une sous-variété de classe C^1 de $M_n(\mathbf{R})$ dont on déterminera la dimension et l'espace tangent en Id.*

On rappelle que la transposition est une symétrie sur $M_n(\mathbf{R})$. Il lui est associé une décomposition en somme directe

$$M_n(\mathbf{R}) = Sym_n(\mathbf{R}) \oplus Anti_n(\mathbf{R})$$

ou

$$Sym_n(\mathbf{R}) = \{u \in M_n(\mathbf{R}), {}^t u = u\}$$

et

$$Anti_n(\mathbf{R}) = \{u \in M_n(\mathbf{R}), {}^t u = -u\}$$

ainsi que des projections

$$p : M_n(\mathbf{R}) \to Sym_n(\mathbf{R}), h \mapsto \frac{h + {}^t h}{2}$$

et

$$q : M_n(\mathbf{R}) \to Anti_n(\mathbf{R}), h \mapsto \frac{h - {}^t h}{2}.$$

Enfin, on a

$$\dim Sym_n(\mathbf{R}) = \frac{n^2 + n}{2}$$

et

$$\dim Anti_n(\mathbf{R}) = \frac{n^2 - n}{2}.$$

On regarde maintenant l'application

$$\Phi : M_n(\mathbf{R}) \to Sym_n(\mathbf{R}), u \mapsto u^t u - Id.$$

Par définition,

$$O(n) = \{u \in M_n(\mathbf{R}), \Phi(u) = 0\}.$$

D'autre part, on a

$$\Phi'(u)(h) = h^t u + u^t h = h^t u + {}^t(h^t u).$$

On voit donc que $\Phi'(u)$ est la composée de la multiplication à droite par ${}^t u$ sur $M_n(\mathbf{R})$ et de l'application $2p$ qui est bien sûr surjective. De plus, si $u \in O(n)$, alors ${}^t u$ est inversible. On voit donc que $\Phi'(u)$ est surjective. Il suit que $O(n)$ est bien une sous-variété de classe C^1. L'hyperplan tangent en l'identité est $\ker p = Anti_n(\mathbf{R})$ des matrices anti-symétriques. On a donc

$$\dim O(n) = \dim Anti_n(\mathbf{R}) = \frac{n^2 - n}{2}.$$

3 Formule de Taylor

3.1 Définition

On dit que $f : U \subset E \to F$ est *k fois différentiable* en α si f est $k-1$ fois différentiable au voisinage de α et $f^{(k-1)}$ est différentiable en α. On note alors $f^{(k)}(\alpha) = {f^{(k-1)}}'(\alpha)$.

3.2 Remarque

On utilise souvent l'isomorphisme $L(E, L(E, F)) \simeq Bil(E \times E, F)$ pour voir $f"(\alpha)$ comme une application bilinéaire continue.

3.3 Théorème de Schwartz

Si $f"(\alpha)$ existe, c'est une application bilinéaire symétrique.

3.4 Remarque

Comme corollaire, on a le théorème de Schwartz classique qui dit que si $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ et si $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ et $\partial^2 f/\partial x_j \partial x_i$ existent et sont continues en α, alors

$$\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j(\alpha) = \partial^2 f/\partial x_j \partial x_i(\alpha).$$

3.5 Définition

Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction k fois dérivable en α. On définit la *puissance symbolique*

$$(\sum_{i=1}^{n} \partial f/\partial x_i(\alpha) h_i)^{(k)}$$

$$:= \sum_{i_1+\cdots i_n=k} \binom{n}{i_1 \cdots i_n} (\partial^k f/\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n})(\alpha) h_1^{i_1} \cdots h_n^{i_n}$$

puis le *polynôme de Taylor*

$$\mathcal{T}_\alpha^k f(h) := \sum \frac{1}{j!} (\sum_{i=1}^{n} \partial f/\partial x_i(\alpha) h_i)^{(j)}$$

et le reste de Taylor $\mathcal{R}_\alpha^k f(h) := f(\alpha + h) - \mathcal{T}_\alpha^k f(h)$

3.6 Théorème (Formule de Taylor)

On a toujours

$$\frac{|\mathcal{R}_\alpha^k f(h)|}{\|h\|^k} \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

Si f est $k+1$ fois différentiable sur U et si

$$|(\sum_{i=1}^{n} \partial f/\partial x_i(x) h_i)^{(k+1)}| \leq C$$

sur U, alors

$$|\mathcal{R}_\alpha^k f(h)| \leq \frac{C}{(k+1)!} \|h\|^{k+1}.$$

Enfin, si f est C^{k+1}, alors

$$\mathcal{R}_\alpha^k f(h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} (\sum_{i=1}^{n} \partial f/\partial x_i(\alpha + th) h_i)^{(k+1)} dt.$$

3.7 Rappel

On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbf{R}$ admet un *maximum absolu* en α si $\forall x \in U, f(x) \leq f(\alpha)$. On dit que f admet un *maximum (local)* en α si f admet un maximum absolu sur un voisinage de α.

On précise *strict* si l'inégalité est stricte (pour $x \neq \alpha$) et on dit *minimum* si on renverse les inégalité. Enfin, on dit *extremum* pour minimum ou maximum.

3.8 Proposition

Si f est différentiable en α et admet un extremum en α, alors $f'(\alpha) = 0$.

3.9 Rappel

Une forme quadratique $H : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est *positive* (resp. *définie positive*) et on écrit $H \geq 0$ (resp. $H > 0$)) si ses valeurs propres sont ≥ 0 (resp. > 0). C'est équivalent à dire que $\forall u, |H(u)| \geq 0$ (resp. $\exists C > 0, \forall u, |H(u)| \geq C\|u\|^2$). La notion de forme *négative* est obtenue en renversant les inégalités.

3.10 Proposition

Soit f une fonction 2 fois différentiable en α. Si f admet un minimum en α, alors $f'(\alpha) = 0$ et $f''(\alpha) \geq 0$. Réciproquement, si $f'(\alpha) = 0$ et $f''(\alpha) > 0$, alors f admet un minimum strict en α.

3.11 Proposition

Soit $X \subset U \subset \mathbf{R}^n$ une sous-variété de classe C^1 et $g \in C^1(U, \mathbf{R})$. Si $g_{|X}$ admet un extremum en α, alors $g'(\alpha) \in N_\alpha(X)$.

3.12 Définition

Si $X := f^{-1}(0)$ avec $f \in C^1(U, \mathbf{R}^{n-k})$ telle que $f'(x)$ surjective pour $x \in X$, on dit que les extrema de $g_{|X}$ sont les *extrema de g liés par les conditions $f_i(\alpha) = 0$*. Si $g'(\alpha) = \sum \lambda_i f_i'(\alpha)$, on dit que les λ_i sont les *multiplicateurs de Lagrange*.

Exercice 38 *Déterminer les extrema de $f : (x, y) \mapsto (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$ et préciser leur nature.*

On calcule $\partial f/\partial x(x, y) = 2x(1+x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$ et on voit que $\partial f/\partial x(x, y) = 0$ ssi $x = 0$. On a $f(0, y) = y^2 e^{-y^2}$ et donc $\partial f/\partial y(0, y) = 2y(1 - y^2)e^{-y^2}$ et on voit que $\partial f/\partial y(0, y) = 0$ ssi $2y(1 - y^2) = 0$, c'est à dire $y = 0, \pm 1$.

On calcule maintenant

$$\partial^2 f/\partial x^2(x, y) = 2[1 + x^2 + y^2 + 2x^2 + 2x^2(1 + x^2 + y^2)]e^{x^2-y^2},$$

ce qui donne $\partial^2 f/\partial x^2(0, y) = 2[1 + y^2]e^{-y^2}$. Comme $\partial f/\partial x(0, y) = 0$, on a $\partial^2 f/\partial x \partial y(0, y) = 0$. Enfin,

$$\partial^2 f/\partial y^2(0, y) = [2(1 - y^2) - 4y^2 - 4y^2(1 - y^2)]e^{-y^2} = 2(1 - 5y^2 + 2y^4)e^{-y^2}.$$

On trouve donc

$$f''(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } f''(0, \pm 1) = \begin{bmatrix} \frac{4}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{e} \end{bmatrix},$$

ce qui montre que l'on a un unique minimum à l'origine. C'est bien sûr un minimum absolu strict.

Exercice 39 *Déterminer les extrema de* $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ *et préciser leur nature.*

On calcule $\partial f/\partial x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y)$ et $\partial f/\partial x(x, y) = 4y^3 + 4(x - y)$. On voit donc que $f'(x, y) = 0$ ssi $4x^3 - 4(x - y) = 4y^3 + 4(x - y) = 0$, c'est à dire $y = -x$ et $x(x^2 - 2) = 0$. On trouve donc les trois points $(0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

On calcule $\partial^2 f/\partial x^2(x, y) = 12x^2 - 4$, $\partial^2 f/\partial x\partial y(x, y) = 4$ et $\partial^2 f/\partial y^2(x, y) = 12y^2 - 4$, ce qui donne

$$f''(0, 0) = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \text{ et } f''(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f''(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}.$$

Dans le second cas, on a det > 0 et tr > 0, ce qui montre que les valeurs propres sont > 0 et on a un minimum strict.

A l'origine, on a det $= 0$ et on ne peut donc pas conclure immédiatement. On trouve les valeurs propres $0, -8$ puis les sous espaces propres d'équations $y = x$ et $y = -x$. On a $f(x, x) = x^4 + y^4 \geq 0$ et $f(x, -x) = 2x^4 - 8x^2 \leq 0$ pour $|x| \leq 2$. On voit donc qu'il n'y a pas d'extremum à l'origine.

Enfin, il est clair que les minima obtenus sont des minima absolus.

Exercice 40 *Déterminer les extrema de* $f : (x, y) \mapsto \sin x + \sin y + \cos(x + y)$ *et préciser leur nature.*

On travaille modulo 2π. On calcule $\partial f/\partial x = \cos x - \sin(x + y)$ et $\partial f/\partial y = \cos y - \sin(x+y)$ et on voit donc que $f' = 0$ ssi $\cos x - \sin(x+y) = \cos y - \sin(x+y)$. On voit donc que, soit $y = x$ et alors $\cos x = \sin(2x)$ ou bien $y = -x$ et alors $\cos x = 0$. Comme $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, on trouve $y = x = \pi/6, 5\pi/6$ ou $|y| = |x| = \pi/2$. Maintenant, on a

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} -\sin x - \cos(x + y) & -\cos(x + y) \\ -\cos(x + y) & -\sin y - \cos(x + y) \end{bmatrix}.$$

On étudie donc les différents cas.

$$f'(\pi/6, \pi/6) = f'(5\pi/6, 5\pi/6) = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{bmatrix} :$$

déterminant positif et trace négative. Maxima stricts en ces points.

$$f'(\pi/2, \pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} :$$

déterminant négatif. Pas d'extremum.

$$f'(-\pi/2, -\pi/2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} :$$

déterminant et traces positifs. Un minimum strict.

$$f'(\pi/2, -\pi/2) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$f'(-\pi/2, \pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} :$$

déterminant négatif. Pas d'extremum.

Tous ces extrema sont absolus.

Exercice 41 *Montrer que l'application $\varphi : M \mapsto \sum_{i=1}^n A_iM^2$ possède un minimum absolu que l'on déterminera.*

Comme $\varphi \to \infty$ quand $M \to \infty$, φ possède un minimum absolu. Cette assertion mérite une petite explication. Dire que $\varphi(M) \to +\infty$ quand $M \to \infty$ signifie que $\forall c \in \mathbf{R}, \exists K$ compact $, M \notin K \Rightarrow \varphi(M) \geq c$. On fixe alors Ω quelconque et on prend $c \geq \varphi(\Omega)$. On a donc en particulier $\Omega \in K$. Comme φ est continue sur K compact, elle admet un minimum absolu en un point P sur K. Et si $M \notin K$, alors $\varphi(P) \leq \varphi(\Omega) \leq c \leq \varphi(M)$. On voit donc que φ a un minimum absolu en P.

On a donc $\varphi'(P) = 0$ et comme $\varphi'(M)(h) = 2\langle \sum_{i=1}^n A_i\vec{M}, h\rangle$, on trouve $\sum_{i=1}^n A_i\vec{P} = 0$ et P est le centre de gravité du polygone $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Exercice 42 *Déterminer le minimum absolu de $f(M) = AM + BM + CM$ lorsque le triangle $\{A, B, C\}$ n'a que des angles aigus.*

On sait que que f est différentiable en dehors des sommets du triangle et que $f'(M)(h) = \langle \frac{A\vec{M}}{AM} + \frac{B\vec{M}}{BM} + \frac{C\vec{M}}{CM}, h\rangle$. Si f a un minimum local en un point M distinct des sommets, il doit donc satisfaire $\frac{A\vec{M}}{AM} + \frac{B\vec{M}}{BM} + \frac{C\vec{M}}{CM} = 0$.

Si u, v, w, de norme 1, satisfont $u + v + w = 0$, on a nécessairement $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = -\frac{1}{2}$. On a donc $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = \widehat{BMC} = \pm 2\frac{\pi}{3}$ (c'est le point de Toricelli du triangle).

Maintenant, comme f est continue et $\to \infty$ quand $M \to \infty$, φ possède un minimum absolu. Si celui-ci n'est pas un des sommets, c'est un minimum local et c'est donc le point de Toricelli. Or, si $H \in]A, B[$ est le pied de la hauteur (issue de C), on a $f(H) = AB + HC < AB + AC = f(A)$ car l'angle en A est aigu. Et de même pour les autres sommets.

Exercice 43 *Soit B une boule fermée de $\mathbf{R}^n$ et $f \in C^0(B)$ harmonique dans $\mathring{B}$. Montrer que f atteint son maximum sur ∂B (on pourra considérer $g(x) = f(x) + \epsilon\|x\|^2$ et passer à la limite).*

Pour $\epsilon > 0$, on pose $g(x) = f(x) + \epsilon\|x\|^2$. On a $g'(x) = f'(x) + 2\epsilon x$ et donc $g''(x) = f''(x) + 2\epsilon I$. Comme par hypothèse, $\Delta(f) = 0$, on a $\operatorname{tr} g'' := \Delta(g) = 2\epsilon n > 0$. Il suit que g a au moins une valeur propre > 0 et n'a donc pas de maximum sur $\mathring{B}$. On sait que g admet un maximum sur B, disons en x_0. On a nécessairement $x_0 \in \partial B$ et la restriction de g à ∂B, qui ne dépend pas de ϵ, admet un maximum en x_0. En conclusion, il existe $x_0 \in \partial B$, tel que pour tout $\epsilon > 0$ et $x \in B$, $f(x) + \epsilon\|x\|^2 \leq f(x_0) + \epsilon\|x_0\|^2$. On passe à la limite sur ϵ, ce qui donne $f(x) \leq f(x_0)$.

Exercice 44 *Determiner parmi tous les parallélépipèdes rectangles de volume fixé (resp. surface fixée) celui qui a la plus petite surface (resp. le plus grand volume).*

Il s'agit donc de minimiser $S = 2(xy + xz + yz)$ a $V = xyz$ fixé et de maximiser V à S fixé avec $x, y, z > 0$. On a $S' = 2(y + z, x + z, x + y)$ et $V' = (yz, xz, xy)$. Dans les 2 cas, les vecteurs seront liés et on aura donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} xz(y+z) & = & yz(x+z) \\ xy(y+z) & = & yz(x+y) \\ xy(x+z) & = & xz(x+y) \end{array}\right. ,$$

ce que l'on peut réécrire

$$\left\{\begin{array}{lcl}(x-y)z^2 & = & 0\\(x-z)y^2 & = & 0\\(y-z)x^2 & = & 0\end{array}\right. .$$

Comme nos variables ne sont pas nulles, on trouve $x = y = z$. On voit donc que la seule solution possible à l'un et l'autre problème est le carré.

Comme toute fonction continue sur un compact admet un maximum et un minimum, il suffit pour conclure de montrer que si l'un des cotés $\to \infty$, alors, à V fixé on a $S \to \infty$ et, à S fixé on a $V \to 0$. Bien sûr, il faut aussi remarquer que si l'un des cotés est nul, alors $V = 0$, si bien que le problème ne se pose plus dans le premier cas et est trivial dans le second.

Pour conclure, il suffit de alors de remarquer que

$$S^2 = 4(xy + (x + y)z)^2 \geq 4(x + y)^2 z^2 \geq 8xyz^2 = 8Vz.$$

Si on fixe V, on voit donc que $S \to \infty$ quand $z \to \infty$ et si on fixe S, on voit que $V \to 0$ quand $z \to \infty$.

Exercice 45 *Déterminer les extrema de la fonction* $f(x) = \sum_i x_i \ln x_i$ *sur l'hyperplan diagonal* $\sum_i x_i = a$ *avec* $a > 0$.

On calcule les différentielles $(1+\ln x_1, \ldots, 1+\ln x_n)$ et $(1, \ldots, 1)$. Un extrema doit donc satisfaire $1 + \ln x_1 = \cdots = 1 + \ln x_n$, c'est à dire $x_1 = \cdots = x_n = \frac{a}{n}$.

On peut utiliser la formule de Taylor pour f en $(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n})$ sur notre hyperplan. Tout d'abord, on a

$$f'(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n}) = (1 + \ln \frac{a}{n})(1, \ldots, 1)$$

et donc, si $\sum_i x_i = 0$,

$$f'(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n})(x_1, \ldots, x_n) = (1 + \ln \frac{a}{n}) \sum_i x_i = 0.$$

On voit ensuite que f'' est la matrice diagonale $(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n})$ et il suit que $f''(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n}) = \frac{n}{a} I$ si bien que

$$f''(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n})(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n}{a} \sum_i x_i^2.$$

la formule de Taylor sur notre hyperplan s'écrit donc

$$f(\frac{a}{n} + x_1, \ldots, \frac{a}{n} + x_n) - f(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n}) = \frac{n}{2a} \sum_i x_i^2 + \cdots .$$

qui est positive lorsqu'on s'approche de $(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n})$. Il suit que l'on a un minimum strict.

Pour montrer que c'est un minimum absolu, on peut procéder par récurrence sur n. Comme $f \to \infty$ quand l'une des variables $\to \infty$. Il reste à considérer ce qui se passe sur les bords. On prolonge f par continuité et on annule une des variables, disons x_n. Par récurrence, sur ce bord, f admet un minimum absolu en $(\frac{a}{n-1}, \ldots, \frac{a}{n-1}, 0)$. Et il est clair que

$$f(\frac{a}{n-1}, \ldots, \frac{a}{n-1}, 0) = a \ln \frac{a}{n-1} \geq a \ln \frac{a}{n} = f(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n}).$$

Exercice 46 *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ avec $\sum_i \alpha_i = 1$. Quel est le maximum de $f(x) = \prod_i x_i^{\alpha_i}$ sur le compact K défini par $\sum_i \alpha_i x_i = 1, x_i \geq 0$? En déduire que $\prod_i x_i^{\alpha_i} \leq \sum_i \alpha_i x_i$ pour $x_1, \ldots, x_n \geq 0$.*

On calcule les différentielles $(\frac{\alpha_1}{x_1}, \ldots, \frac{\alpha_n}{x_n})f(x)$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Si les vecteurs sont liés, on a $x_1 = \cdots = x_n$ et donc $f(x) = 1$. Comme f s'annule sur le bord, on a bien un maximum absolu.

En général, on pose $\lambda = \sum_i \alpha_i x_i$ si bien que $\frac{1}{\lambda}x \in K$. Et on a $f(\frac{1}{\lambda}x) \leq 1$. Il reste à calculer

$$f(\frac{1}{\lambda}x) = \prod_i (\frac{x_i}{\lambda})^{\alpha_i} = \frac{f(x)}{\lambda^{\sum_i \alpha_i}} = \frac{f(x)}{\lambda}.$$

On a donc $\prod_i x_i^{\alpha_i} = f(x) \leq \lambda = \sum_i \alpha_i x_i$.

4 Systèmes différentiels, champs de vecteurs

4.1 Définition

Soit $U \subset \mathbf{R}^{n+1}$ un ouvert et $X : U \to \mathbf{R}^n$ une application. *Résoudre le système différentiel $x' = X(t, x)$ avec condition initiale $x(t_0) = x_0$* consiste à trouver toutes les fonctions différentiables $x : I \to \mathbf{R}^n$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, satisfaisant $x' = X(t, x)$ et $x(t_0) = x_0$.

4.2 Définition

On dit que X est *k-lipschitzienne en x* si

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in U, \|X(t, x_2) - X(t, x_1)\| \leq k\|x_2 - x_1\|.$$

4.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Si X est continue et localement lipschitzienne en x le système différentiel avec condition initiale admet une solution sur un intervalle I. Et celle-ci est unique. En particulier, il existe une unique solution maximale.

4.4 Proposition (majorations a priori)

Supposons X est continue et localement lipschitzienne en x. Si toute solution x sur J relativement compact dans I a son graphe relativement compact dans U, alors il existe une solution sur I.

4.5 Lemme de Gronwall

Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ continue. Supposons que pour tout $t \in [a, b]$, on ait

$$\|f(t)\| \leq C + \int_a^t \|f(u)\| |\theta(u)| du$$

avec $C \geq 0$ et $\theta : [a, b] \to \mathbf{R}$ continue. Alors,

$$\|f(t)\| \leq C e^{\int_a^t |\theta(u)| du}$$

4.6 Corollaire

Soit I un intervalle ouvert et $f \in C^1(I, \mathbf{R}^n)$. Supposons que $\|f'\| \leq A\|f\|+B$ avec $A > 0, B \geq 0$. Alors pour tous $t_0, t \in I$, on a

$$\|f(t)\| \leq \|f(t_0)\|e^{A|t-t_0|} + \frac{B}{A}(e^{A|t-t_0|} - 1).$$

4.7 Définition

Une *intégrale première* d'un système différentiel $x' = X(t,x)$ est une fonction $\varphi \in C^1(U, \mathbf{R})$ constante sur le graphe de toute solution (si $x : I \to \mathbf{R}^n$ est solution alors $\varphi(t, x(t)) = c$ pour tout $t \in I$).

4.8 Proposition

Une fonction $\varphi \in C^1(U, \mathbf{R})$ est une intégrale première du système ssi

$$\partial\varphi/\partial t + \sum_{i=1}^{n}(\partial\varphi/\partial x_i)X_i = 0.$$

4.9 Définition

Un *champ de vecteurs* sur $U \subset \mathbf{R}^n$ est une application $X : U \to R^n$. Une *courbe intégrale* de X est une solution de $x' = X(x)$. Une *intégrale première* de X est une fonction $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$ qui est une intégrale première du système. Le champ est *complet* si toutes les courbes intégrales maximales sont définies sur $\mathbf{R}$.

4.10 Remarque

Une fonction $\varphi \in C^1(U, \mathbf{R})$ est une intégrale première du champ ssi $\langle X, \varphi' \rangle = 0$.

Exercice 47 *Quelles sont les solutions maximales de* $y' = e^{x+y}$.

Notre équation est équivalente à $-y'e^{-y} = -e^x$, ce qui donne $e^{-y} = c - e^x$ et donc $y = \ln \frac{1}{c-e^x}$ avec $c > e^x$. On a nécessairement $c > 0$ et on peut poser $c = e^K$. On voit donc que les solutions maximales sont les

$$y = \ln \frac{1}{e^K - e^x} \text{ sur }]-\infty, K[.$$

Exercice 48 *Quelles sont les solutions maximales de* $4xy'^2 = y^2 - 1$.

Soit y une solution sur I. On remarque tout de suite que y est solution ssi $-y$ l'est, que $y = 1$ est solution et que y ne peut pas s'annuler sur un intervalle.

Si $y > 1$ sur I, on pose $z = \cosh^{-1}(y)$. On a donc $y = \cosh z$, ce qui donne $y' = (\sinh z)z'$ puis

$$y'^2 = \sinh^2(z)z'^2 = (cosh^2(z) - 1)z'^2 = (y^2 - 1)z'^2.$$

Il suit que $y^2 - 1 = 4xy'^2 = 4x(y^2-1)z'^2$ et donc $1 = 4xz'^2$. On voit donc que $I \subset \mathbf{R}_{>0}$ et que $z' = \pm\frac{1}{2\sqrt{x}}$ si bien que $z = \pm(\sqrt{x} - c)$ et comme on doit avoir $z > 0$, on a donc $z = |\sqrt{x} - c|$ et finalement, $y = \cosh|\sqrt{x} - c|$.

Si $-1 < y < 1$ sur I, on pose $z = \cos^{-1}(y)$. On a donc $y = \cos z$, ce qui donne $y' = (-\sin z)z'$ puis

$$y'^2 = \sin^2(z)z'^2 = (1 - cos^2(z))z'^2 = (1 - y^2)z'^2.$$

Il suit que $1 - y^2 = 4xy'^2 = 4x(y^2-1)z'^2$ et donc $-1 = 4xz'^2$. On voit donc que $I \subset \mathbf{R}_{<0}$ et que $z' = \pm\frac{1}{2\sqrt{-x}}$ si bien que $z = \pm(\sqrt{-x} - c)$ et comme on doit avoir $z > 0$, on a donc $z = |\sqrt{-x} - c|$ et finalement, $y = \cos|\sqrt{-x} - c|$.

On trouve donc comme candidats, des solutions $y = \pm 1$ sur $I \subset \mathbf{R}$, $y = \pm\cosh|\sqrt{x} - c|$ sur $I \subset \mathbf{R}_{>0}$ et $y = \cos|\sqrt{-x} - c|$ sur $I \subset \mathbf{R}_{<0}$. On vérifie aisément que ce sont bien des solutions. On peut bien sûr prolonger $y = \pm 1$ sur $\mathbf{R}$, et les deux autres sur $\mathbf{R}_{>0}$ et $\mathbf{R}_{<0}$, respectivement si $c \leq 0$. Aussi, si $c > 0$ on peut prolonger nos fonctions sur $]0, c^2[$ ou $]c^2, \infty[$ pour la seconde et sur $]-\infty, -c^2[$ ou $]c^2, 0[$ pour la troisième. Peut-on faire mieux ?

Effectivement, on trouve comme solutions toute fonction (avec les bons signes) qui vaut ± 1 jusqu'à $-(c_1 + k_1\pi)^2$ puis $\cos|\sqrt{-x} - c_1|$ jusqu'a $-(c_1 + l_1\pi)^2$, puis ± 1 jsuqu'à $-(c_2 + k_2\pi)^2$, puis $\cos|\sqrt{-x} - c_2|$ jusqu'a $-(c_2 + l_2\pi)^2$, puis etc. puis ± 1 jusqu'à 0 et ensuite $\pm\cosh\sqrt{x}|$.

Exercice 49 *Déterminer toutes les solutions maximales de $y'^2 = 4y$. On montrera d'abord que les zéros de y forment un intervalle.*

On suppose que y s'annule en a et en $b > a$ et on veut montrer que y est nulle sur $[a, b]$. Comme toute fonction continue sur un compact admet un minimum et un maximum, il suffit de montrer que si y possède un extremum en c sur $[a, b]$, alors $y(c) = 0$. supposons le contraire. Alors $c \neq a, b$, c'est à dire $c \in]a, b[$ et on a donc $y'(c) = 0$. Comme $y'^2 = 4y$, il suit que $y(c) = 0$. Contradiction.

Maintenant, soit y une solution qui ne s'annule pas. Alors, $y > 0$ et on a $\frac{y'}{2\sqrt{y}} = \pm 1$, ce qui donne $\sqrt{y} = x \pm c$ et donc $y = (x - c)^2$. Les solutions maximales sont donc données par $y = (x - c)^2$ pour $x \leq c$, $y = 0$ pour $c \leq x \leq d$ et $y = (x - d)^2$ pour $x \geq d$. On vérifie bien sûr que ce sont des solutions.

Exercice 50 *Montrer que l'équation $xy'' = x + y^2$ admet une solution entière sur $]-1, 1[$.*

Soit y une solution de la forme $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. On a donc

$$xy'' = x\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)k a_{k+1} x^k.$$

Bien sûr, on a $y^2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ avec $b_k = \sum_{i+j=k} a_i a_j$. On aura donc $a_0 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$ et pour $k \geq 2$,

$$a_{k+1} = \frac{\sum_{i+j=k} a_i a_j}{(k+1)k}.$$

On peut prendre $a_1 = 0$. Le rayon de convergence de notre série est donné par $R^{-1} = \overline{\lim}|a_k|^{\frac{1}{n}} = \lim\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$. Ici, on veut montrer que $R \geq 1$. Il suffit donc de montrer que $|a_k| < 1$. C'est clair pour $k \leq 2$ et on a par récurrence, pour $k \geq 2$,

$$|a_{k+1}| \leq \frac{\sum_{i+j=k} |a_i||a_j|}{(k+1)k} \leq \frac{k+1}{(k+1)k} \leq \frac{1}{k} < 1.$$

Exercice 51 *Montrer que si f est bornée de classe C^1 alors, toute solution maximale de $y' = yf(x,y)$ est définie sur $\mathbf{R}$.*

Par hypothèse, il existe M tel que $\|f\| \leq M$. Soit y une solution sur un intervalle borné de longueur L avec $y(x_0) = y_0$. On aura alors $|y'| = |y|\|f(x,y)\| \leq M|y|$ et il résulte du lemme de Gronwall que $|y| \leq |y_0|e^{M|x-x_0|} \leq |y_0|e^{ML}$. On applique alors le théorème des majorations a priori.

Exercice 52 *Soient x_1 et x_2 deux solutions de $x' = t + \sin x$ avec $x_1(0) = 0$ et $x_2(0) = 0,01$. Montrer que $|x_2 - x_1| \leq 0,1$ sur $[-2,2]$.*

On utilise le Lemme de Gronwall. On a $|x_2' - x_1'| = |\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1|$ et donc $|(x_2 - x_1)(t)| \leq |(x_2 - x_1)(0)|e^{|t|} \leq 0,01 \times e^2 \leq 0,1$.

Exercice 53 *Soit x la solution maximale de $x' = \lambda + \frac{x^2}{1+t^2}$ passant par l'origine. Montrer que x est impaire.*

Posons $y(t) = -x(-t)$. On a alors

$$y'(t) = x'(-t) = \lambda + \frac{x^2(-t)}{1+t^2} = \lambda + \frac{y^2(t)}{1+t^2}.$$

et $y(0) = 0$. Il suit que $y = x$ et donc pour tout t, $x(t) = -x(-t)$, c'est à dire x est impaire.

Exercice 54 *Montrer que toute solution maximale de $x' = \sin(tx)$ est définie sur $\mathbf{R}$ et paire. Établir la relation*

$$\int_0^t ux'^2(u)du + \frac{1}{2}x^2(t) = \frac{1}{2}x^2(0) - \cos(tx(t)) + 1.$$

On pose $y(t) = x(-t)$. On a alors $y'(t) = -x'(-t) = -\sin(-tx(-t)) = \sin(ty(t))$. Il suit que y est aussi solution et comme on a $y(0) = x(0)$, on voit que $y = x$. Donc x est paire. Comme x' est bornée, x est définie sur $\mathbf{R}$.

Ensuite, on dérive $y := \cos(tx) + \frac{1}{2}x^2$, ce qui donne $y' = -(x + tx')\sin(tx) + xx' = -(x + tx')x' + xx' = -tx'^2$. Il suit que $y(t) - y(0) = \int_0^t ux'^2(u)du$ et on obtient ainsi la formule.

Exercice 55 *Déterminer les courbes intégrales maximales du champ de vecteur x^2.*

Soit x une courbe intégrale définie sur un intervalle I. Si x s'annule sur I, alors $x = 0$ par unicité de la solution. Sinon, l'équation est équivalente à $\frac{x'}{x^2} = 1$ qui donne $-\frac{1}{x} = t - c$ et donc $x = \frac{1}{c-t}$ défini sur $]-\infty, c[$ ou sur $]c, \infty[$. On vérifie aisément que ce sont bien des solutions maximales.

Exercice 56 *Montrer que le champ de vecteurs $x^2 \sin^2 x$ est complet.*

Il est clair que $x = \frac{\pi}{2}$ est solution. Comme les graphes de 2 solutions distinctes ne se coupent pas, toute autre solution est bornée (par 2 solutions horizontales). Il résulte du théorème des majorations à priori que celle-ci se prolonge sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Exercice 57 *Soient pour $i, j, k = 1, \dots n$, $c_{kji} \in \mathbf{R}$ avec $c_{kji} = -c_{ijk}$. Déterminer une intégrale première du champ de vecteurs $(\sum_{j,k=1}^{n} c_{ijk} x_j x_k)_{i=1,\dots,n}$ sur $\mathbf{R}^n$ et montrer que celui-ci est complet.*

On cherche $f \in C^1(I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ tel que

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} c_{ijk} (\partial\varphi/\partial x_i) x_j x_k = 0.$$

Comme $c_{kji} = -c_{ijk}$, il suffit que $(\partial f/\partial x_i) x_j x_k = x_i x_j (\partial f/\partial x_k)$, et donc que $\partial f/\partial x_i = x_i$. On prend alors $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2$. Maintenant, comme la norme est constante sur le graphe d'une solution, celui-ci est borné sur un intervalle borné. Donc toute solution est définie sur $\mathbf{R}$.

Exercice 58 *Trouver deux intégrales premières affinement indépendantes non constantes du champ de vecteurs $(y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$.*

On cherche donc f telle que

$$(y^2 - z^2)\partial f/\partial x + (z^2 - x^2)\partial f/\partial y + (x^2 - y^2)\partial f/\partial z = 0,$$

c'est à dire

$$x^2(\partial f/\partial z - \partial f/\partial y) + y^2(\partial f/\partial x - \partial f/\partial z) + z^2(\partial f/\partial y - \partial f/\partial x) = 0.$$

Il est clair que $\partial f/\partial x = \partial f/y = \partial f/\partial z = 1$ fournit une solution, c'est à dire $f = x + y + z$. En cherchant un peu, on trouve aussi $x^3 + y^3 + z^3$.

Exercice 59 *Considérons une courbe intégrale maximale du champ de vecteurs $(xy - 2x^2, -xy - y^2)$ avec $x(0), y(0) > 0$. Montrer que celle-ci est définie pour tout $t > 0$ et tend vers 0 quand $t \to +\infty$.*

Tout d'abord, on remarque que seule la solution nulle peut passer par l'origine. Maintenant, il est clair que si on fait $x = 0$ dans le système différentiel, on trouve $y' = -y^2$ qui donne $y = \frac{1}{t-c}$. On trouve ainsi une famille de courbes intégrales supportée par l'axe des y et pouvant prendre n'importe quelle valeur à un instant t donné. Il suit qu'une autre courbe intégrale ne peut couper l'axe des y. De même, $y = 0$ donne $x' = -2x^2$ puis $x = \frac{1}{2t-c}$ et on voit qu'une autre courbe intégrale ne peut couper l'axe des x. De ceci, on déduit que si $x(0), y(0) > 0$, alors pout tout t, on a $x(t), y(t) > 0$.

On remarque maintenant que $x' + y' = -2x^2 - y^2 > 0$. Il suit que $x + y$ est décroissante. En particulier, avec nos conditions initiales, la courbe est contenue dans un triangle pour $t \geq 0$. Le principe des majorations a priori nous dit que celle-ci est définie sur pour tout $t > 0$.

Pour conclure, il suffit de montrer que $x + y \to 0$ quand $t \to +\infty$. Sinon, on pourrait trouver $c > 0$ tel que $x + y > c$. On a alors $c^2 < (x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \leq 2(2x^2 + y^2) = -2(x' + y')$, c'est à dire $(x+y)' \leq -\frac{c^2}{2}$. On applique le théorème des accroissements finis qui donne $(x+y)(t) \leq x(0) + y(0) - \frac{c^2}{2} t \to -\infty$. Contradiction.

5 Systèmes différentiels linéaires

5.1 Définition

Un système différentiel $x' = X(t,x)$ est *linéaire* si $X(t,x) = A(t)x + B(t)$ avec $A : I \to L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n), B : I \to \mathbf{R}^n$ continues et $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle. Le *système homogène associé* est le système $x' = A(t)x$. Enfin, le système est dit *homogène* si $B = 0$.

5.2 Proposition

Les solutions du système différentiel linéaire forment un espace affine de dimension n. L'espace vectoriel assocé est l'espace des solutions du système homogène associé. Finalement, pour tout t_0, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme affine de l'espace des solutions sur $\mathbf{R}^n$.

5.3 Proposition (Variation de la constante)

Soit $x' = A(t)x + B(t)$ un système différentiel linéaire et $x_1, \ldots, x_n$ une base de solutions de l'équation homogène associée. Alors B s'écrit de manière unique sous la forme $\sum v_i x_i$ avec $v_i \in C^0(I)$ et les solutions du système sont les $\sum u_i x_i$ avec $u_i' = v_i$.

5.4 Corollaire

Les solutions de $x' + ax = b$ sont les fonctions de la forme ux où x une solution de l'équation homogène associée et $u \in C^1(I)$.

Les solutions de $x' + ax + bx = c$ sont les fonctions de la forme $u_1x_1 + u_2x_2$ avec $u_1'x_1 + u_2'x_2 = 0$, où x_1 et x_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée et $u_1, u_2 \in C^1(I)$.

Exercice 60 *Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle* $y' \sin(x) - 3y\cos(x) - \cos(x) = 0$ *sur un intervalle* I *forment un espace affine. Déterminer sa dimension lorsque* $I =]0, \pi[$, *lorsque* $I =]0, 2\pi[$ *et lorsque* $I = \mathbf{R}$.

On voit tout de suite que $y = -\frac{1}{3}$ est solution évidente de l'équation. De plus, la différence entre deux solutions est solution de l'équation "homogène" $y' \sin(x) - 3y\cos(x) = 0$. Enfin, les solutions de l'équation "homogène" forment clairement un espace vectoriel. On a donc bien un espace affine.

Maintenant, on cherche les solutions de l'équation "homogène" (on aurait pû commencer par là et en déduire la solution particulière en faisant varier la constante). Sur un intervalle ou sin ne s'annule pas, on intègre et on trouve $y = a\sin^3(x)$. Par continuité, on a $y = 0$ si $\sin x = 0$. On voit donc que l'espace des solutions est de dimension 1 si $I =]0, \pi[$ (mais ça, on le savait déjà grâce à la théorie des systèmes linéaires). Si $I =]0, 2\pi[$, on trouve un espace de dimension 2 engendré par $1_{]0,\pi[}\sin^3(x)$ et $1_{]\pi,2\pi[}\sin^3(x)$. Enfin, si $I = \mathbf{R}$, on trouve un espace de dimension infinie : en effet, les fonctions $1_{]k\pi,(k+1)\pi[}\sin^3(x)$ sont clairement des solutions linéairent indépendantes. Bien sûr, il faut s'assurer que ce sont bien des fonctions C^1 et que ce sont des solutions même en $x = k\pi$. Par périodicité et symétrie, il suffit de considérer le cas $1_{]0,\pi[}\sin^3(x)$ en $x = 0$. Or $\frac{3\sin^2(x)\cos(x)}{x} \to 0$

quand $x \to 0$ et $1_{]0,\pi[}3\sin^2(x)\cos(x)$ est bien continue (en 0). Et on a bien l'identité attendue en $x = 0$.

Si on ne voit pas la solution particulière, on peut faire varier la constante, i.e. on pose $y = z\sin^3 x$, ce qui donne $y' = z'\sin^3 x + 3z\sin^2 x\cos x$ et l'équation devient

$$(z'\sin^3 x + 3z\sin^2 x\cos x)\sin(x) - 3z\sin^3\cos(x) - \cos(x) = 0,$$

c'est à dire $z'\sin^4 x = \cos(x)$. On intègre pour trouver $z = -\frac{1}{3\sin^3(x)}$ et donc $y = -\frac{1}{3}$.

Exercice 61 *Résoudre $y' + |y| = 1$.*

Si y est une solution ≥ 0 sur un intervalle I, on a $y' + y = 1$. On a la solution évidente $y = 1$ et on résoud ensuite l'équation homogène $y' + y = 0$ qui donne $y = ae^{-x}$. On trouve donc la solution $1 + ae^{-x}$. Comme on cherche des solutions ≥ 0, on trouve 1 et $1 + e^{K-x}$ sur $\mathbf{R}$ ainsi que $1 - e^{K-x}$ sur $]K, \infty[$.

De même, si y est une solution ≤ 0 sur un intervalle I, on a $y' - y = 1$. On a la solution évidente $y = -1$ et on résoud ensuite l'équation homogène $y' - y = 0$ qui donne $y = be^x$. On trouve donc la solution $-1 + be^x$. Comme on cherche des solutions ≤ 0, on trouve -1 et $-1 - e^{x-K}$ sur $\mathbf{R}$ ainsi que $-1 + e^{x-K}$ sur $]-\infty, K[$.

Maintenant, on essaie de recoller. Le seul candidat est la fonction qui vaut $-1 + e^{K-x}$ si $x \leq K$ et $1 - e^{x-K}$ si $x \geq K$. On aura donc $|y| = 1 - e^{|x-K|}$ et $y' = e^{|x-K|}$. cette dernière fonction est continue et en intégrant, on trouve bien y qui est donc C^1 et satisfait notre équation.

Exercice 62 *Déterminer toutes les fonctions $f \in C^2(\mathbf{R})$ telles que $f''(x) + f(-x) = x + e^x$.*

On écrit $f = g + h$ avec g paire et h impaire. On aura donc $g''(x) + h''(x) + g(x) - h(x) = x + e^x$. Comme la dérivation inverse la parité et qu'une fonction s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, on voit que g est solution de $y" + y = \cosh(x)$ et que h est solution de $y" - y = x + \sinh(x)$. Pour la première on a les solutions évidentes $\frac{1}{2}\cosh x + a\cos x + b\sin x$ et comme on veut g paire, on doit avoir $g = \frac{1}{2}\cosh x + a\cos x$. Pour la seconde, on trouve $a\cosh x + b\sinh x$ comme solution de l'équation homogène et on fait varier la constante pour tourver une solution particulière. En fait, comme $-x$ est solution évidente de $y" - y = x$, il suffit de trouver une solution particulière de $y" - y = \sinh(x)$. On cherche donc une solution de la forme $y = u\cosh x + v\sinh x$ avec $u'\cosh x + v'\sinh x = 0$. On trouve donc

$$y' = u'\cosh x + u\sinh x + v'\sinh x + v\cosh x = u\sinh x + v\cosh x$$

si bien que

$$y'' - y = u'\sinh x + u\cosh x + v'\cosh x + v\sinh x - u\cosh x - v\sinh x = u'\sinh x + v'\cosh x.$$

On est donc amenés à résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'\sinh x + v'\cosh x & = & \sinh x \\ u'\cosh x + v'\sinh x & = & 0 \end{array}\right.,$$

ce qui donne $u' = -\sinh^2 x$ et $v' = \sinh x \cosh x$. On a donc $u' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cosh 2x$ et on peut prendre $u = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sinh 2x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sinh x \cosh x$. Pour v, c'est plus simple, on peut prendre $v = \frac{1}{2}\cosh^2 x$. On trouve donc finalement $y = u\cosh x + v\sinh x = (\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sinh x \cosh x)\cosh x + \frac{1}{2}\cosh^2 x \sinh x = \frac{x}{2}\cosh x$.

Maintenant, comme on veut que h soit impaire, on doit prendre $h = \frac{x}{2}\cosh x + b\sinh x$. Finalement, on trouve $f = -x + \frac{1}{2}\cosh x + \frac{x}{2}\cosh x + a\cos x + b\sinh x$.

Exercice 63 *Déterminer toutes les fonctions $f \in C^1(]0,\infty[)$ telles que $f'(x) = f(\frac{1}{x})$.*

Il y a deux manipulations à faire, dériver et effectuer le changement de variable $x = e^t$. On est ainsi ramenés à résoudre $u'' - u' + u = 0$ avec $u(t) = f(x)$, ce qui donne

$$u = ae^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + be^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

et donc

$$f(x) = a\sqrt{x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)) + b\sqrt{x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}ln(x)).$$

En fait, comme on a dérivé, on a rajouté une dimension à notre espace de solutions. Lorsqu'on vérifie que $f'(x) = f(\frac{1}{x})$, on trouve la condition $a = b\sqrt{3}$ et les solutions sont donc les multiples de

$$f(x) = \sqrt{3x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)) + \sqrt{x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}ln(x))).$$

Exercice 64 *Montrer que toutes les solutions de l'équation $y'' + y = f$ sont périodiques de période 2π ssi f est continue de période 2π et*

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx = 0 \text{ et } \int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx = 0.$$

On sait que les solutions sont les fonctions $y = u\cos x + v\sin x$ avec $u'\cos x + v'\sin x = 0$ et $u, v \in C^1(\mathbf{R})$. On a alors $y' = -u\sin x + v\cos x$. Il suit que $u = -y'\sin x + y\cos x$ et que $v = y'\cos x + y\sin x$. En particulier, on voit donc que y est 2π périodique ssi u et v le sont. Ensuite, on calcule $y'' = -u'\sin x - u\cos x + v'\cos x - v\sin x$, ce qui donne $f = y'' + y = -u'\sin x + v'\cos x$. On en déduit que $u' = f\sin x$ et $v' = f\cos x$. De cela, on déduit que f est 2π-périodique ssi u' et v' le sont. Finalement, on sait que u (resp. v) est 2π-périodique ssi u' (resp. v') est 2π-périodique et $u(2\pi) = u(0)$ (resp $v(2\pi) = v(0)$). Ces dernières conditions s'écrivent justement

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx = 0 \text{ et } \int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx = 0.$$

Exercice 65 *Déterminer les solutions de l'équation différentielle*

$$(x-1)y'' + (1-2x)y' + xy = 0$$

(On remarquera que e^x est solution).

On fait varier la constante et on pose donc $y = ze^x$, ce qui donne $y' = (z'+z)e^x$ puis $y'' = (z''+2z'+z)e^x$. On a donc

$$(x-1)(z''+2z'+z)e^x + (1-2x)(z'+z)e^x + xze^x = 0$$

et en simplifiant, $(x-1)(z''+2z')+(1-2x)z' = 0$, c'est à dire $(x-1)z''-z' = 0$. On trouve donc $z' = a(x-1)$ et en intégrant $z = \frac{a}{2}(x-1)^2 + b$. Il suit que $y = \frac{a}{2}(x-1)^2e^x + be^x$ et en multipliant a par 2, $y = a(x-1)^2e^x + be^x$

Exercice 66 *Déterminer les solutions de l'équation différentielle*

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x).$$

On cherche une solution de la forme x^α de l'équation homogène associée car l'expression $x^2y''+4xy'+2y$ est"homogène". On veut donc $x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + 4x\alpha x^{\alpha-1}+2x^\alpha = 0$, c'est à dire $\alpha(\alpha-1)+4\alpha+2 = 0$ et on trouve $\alpha = -1$ ou -2. On a donc tout de suite une base de solution pour l'équation homogène : $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$.

On cherche alors une solution de la forme $y = \frac{u}{x} + \frac{v}{x^2}$ avec $\frac{u'}{x} + \frac{v'}{x^2} = 0$. On calcule $y' = -\frac{u}{x^2} - 2\frac{v}{x^3}$ et $y'' = -\frac{u'}{x^2} + 2\frac{u}{x^3} - 2\frac{v'}{x^3} + 6\frac{v}{x^4}$. On veut donc

$$x^2(-\frac{u'}{x^2} + 2\frac{u}{x^3} - 2\frac{v'}{x^3} + 6\frac{v}{x^4}) + 4x(-\frac{u}{x^2} - 2\frac{v}{x^3}) + 2\frac{u}{x} + \frac{v}{x^2} = \ln(1+x),$$

ce qui se simplifie en $-u' - 2\frac{v'}{x} = \ln(1+x)$. On trouve donc $u' = \ln(1+x)$ et $v' = -x\ln(1+x)$. On rappelle que

$$\int u^\alpha \ln u du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln u - \int \frac{u^\alpha}{\alpha+1}du = \frac{u^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}((\alpha+1)\ln u - 1) + c.$$

On en déduit tout de suite que $u = (1+x)(\ln(1+x)-1) + a$ et comme $v' = -x\ln(1+x) = -(1+x)\ln(1+x) + \ln(1+x)$, que

$$v = -\frac{(1+x)^2}{4}(2\ln(1+x)-1) + (1+x)(\ln(1+x)-1) + b.$$

Finalement, on voit que

$$\begin{aligned} y &= \frac{(1+x)(\ln(1+x)-1)+a}{x} \\ &+ \frac{-\frac{(1+x)^2}{4}(2\ln(1+x)-1) + (1+x)(\ln(1+x)-1) + b}{x^2} \\ &= \frac{(x+1)^2\ln(1+x)}{2x^2} - \frac{3(x+1)^2}{4x^2} + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}. \end{aligned}$$

Et en changeant les constantes, on trouve

$$y = \frac{(x+1)^2\ln(1+x)}{2x^2} - \frac{3}{4} + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}.$$

Bien sûr, on trouve ainsi les solutions en dehors de l'origine. Pour prolonger une solution à tout l'ensemble de définition $]-1,--\infty[$, on réduit au méme dénominateur $4x^2$, ce qui donne pour le numérateur

$$2(x+1)^2\ln(1+x) - 3x^2 + 4ax + 4b.$$

On fait un d.l. à l'ordre 1 pour trouver $2x + 4ax + 4b$. On doit donc prendre $b = 0$ et $a = -\frac{1}{2}$, ce qui donne

$$y = \frac{(x+1)^2 \ln(1+x)}{2x^2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2x}.$$

C'est une fonction analytique à l'origine et solution sur un voisinage donc solution partout.

Exercice 67 *Déterminer les solutions de l'équation différentielle*

$$t^2(1-t)x'' + 2t(2-t)x' + 2(1+t)x = t^2$$

(On remarquera que t^{-2} est solution de l'équation homogène).

On cherche une solution de la forme $x = \frac{y}{t^2}$. On a donc $x' = \frac{y'}{t^2} - \frac{2y}{t^3}$ et $x'' = \frac{y''}{t^2} - \frac{4y'}{t^3} + \frac{6y}{t^4}$. On trouve donc

$$t^2(1-t)(\frac{y''}{t^2} - \frac{4y'}{t^3} + \frac{6y}{t^4}) + 2t(2-t)(\frac{y'}{t^2} - \frac{2y}{t^3}) + 2(1+t)\frac{y}{t^2} = t^2.$$

On simplifie pour trouver $(1-t)y'' + 2y' = t^2$. L'équation homogène associée à pour solution $a(1-t)^2$. On fait à nouveau varier la constante et on pose donc $y' = z(1-t)^2$. On a alors $y'' = z'(1-t)^2 - 2z(1-t)$ et l'équation devient $(1-t)(z'(1-t)^2 - 2z(1-t)) + 2z(1-t)^2 = t^2$, soit après simplification, $(1-t)^3 z' = t^2$ qui donne

$$z' = \frac{t^2}{(1-t)^3} = \frac{1}{(1-t)^3} - \frac{2}{(1-t)^2} + \frac{1}{(1-t)}.$$

On intègre pour trouver

$$z = \frac{1}{2(1-t)^2} - \frac{2}{(1-t)} - \ln|1-t| + c,$$

ce qui donne

$$y' = z(1-t)^2 = \frac{1}{2} + 2(t-1) - (t-1)^2 \ln|t-1| + c(t-1)^2.$$

Il faut intégrer à nouveau et on commence par $(t-1)^2 \ln|t-1|$. On fait le changement de variable $t - 1 = \pm e^v$, ce qui donne $(t-1)^2 \ln|t-1|dt = \pm e^{3v} v dv$ et on intègre par partie pour trouver

$$\int e^{3v} v dv = \frac{1}{3}(e^{3v} v - \int e^{3v} v dv) = e^{3v}(\frac{1}{3}v - \frac{1}{9}),$$

ce qui donne donc $(t-1)^3(\frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{9}) + c$. On obtient ainsi

$$y = t^2 - \frac{3}{2}t - \frac{1}{3}(t-1)^3 \ln|t-1| + a(t-1)^3 + b$$

et on divise par t^2 pour obtenir

$$y = 1 - \frac{3}{2t} - \frac{(t-1)^3 \ln|t-1|}{3t^2} + a\frac{(t-1)^3}{t^2} + \frac{b}{t^2}.$$

Bien sûr, ces calculs sont valables sur tout intervalle ne contenant pas 0 ou 1. Il est clair que toutes nos solutions se prolongent en $t = 1$ car la fonction $u^3 \ln |u|$ se prolonge en une fonction C^2 sur $\mathbf{R}$. Pour prolonger une solution sur $\mathbf{R}$, il faut réduire au même dénominateur et faire un d.l. du numérateur en 0 à l'ordre 1. On trouve

$$y = \frac{6t^2 - 9t - 2(t-1)^3 \ln(1-t) + 6a(t-1)^3 + 6b}{6t^2}$$

et comme d.l. pour le dénominateur, $-11t + 18at - 6a + 6b$. Celui-ci doit s'annuler et on trouve donc $a = b = \frac{11}{18}$. Le candidat à la solution sur $\mathbf{R}$ est donc la fonction

$$y = \frac{11t^2 - 15t + 10}{18t} - \frac{(t-1)^3 \ln |1-t|}{3t^2}.$$

Comme celle-ci est analytique en 0 et solution à droite et à gauche, par continuité, c'est une solution en 0.

Exercice 68 *Montrer que l'on peut ramener toute équation $y'' + ay' + by = 0$ avec $a, b \in C^0(\mathbf{R})$ a la forme canonique $2y" + py = 0$ en faisant un changement de variable sur x.*

Si u est fonction de x, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \text{ et } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}(\frac{du}{dx})^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}.$$

On en déduit l'équation

$$\frac{d^2y}{du^2}(\frac{du}{dx})^2 + \frac{dy}{du}(\frac{d^2u}{dx^2} + a\frac{du}{dx}) + by = 0.$$

Pour obtenir la forme canonique, on a donc besoin de $u'' + au' = 0$ et on posera alors $p = \frac{2b}{u'^2}$. Soit alors A une primitive de a et u une primitive de e^{-A}. Comme $u' > 0$, u est un difféomorphisme et p est bien défini.

Exercice 69 *Soit T l'espace des solutions de $2y" + py = 0$ et S l'espace des solutions de $y''' + 2py' + p'y = 0$. Montrer que si $u, v \in T$, alors $uv \in S$. En déduire que si (u, v) est une base de T alors, (u^2, uv, v^2) est une base de S.*

Si $u \in T$, on a $2u'' + pu = 0$ si bien que $2u''' + p'u + pu' = 0$ et donc pour tout v, on obtient $6u''v' + 3puv' = 0$ et $2u'''v + p'uv + pu'v = 0$. Par symétrie, si $v \in T$, on a aussi $6u'v'' + 3pu'v = 0$ et $2uv''' + p'uv + puv' = 0$. On additionne tout ça pour trouver

$$6(u''v' + u'v'') + 3p(u'v + uv') + 2(u'''v + uv''') + 2p'uv + p(u'v + uv') = 0.$$

Maintenant, on divise par 2 et on simplifie, ce qui donne $(uv)''' + 2p(uv)' + p'(uv) = 0$ comme annoncé.

Avant de poursuivre, remarquons que si u, v sont deux solutions d'une équation linéaire homogène du second ordre telle que $uv = 0$, alors $u = 0$ ou $v = 0$. En effet, supposons que $v \neq 0$. Il existe donc x_0 tel que $v(x_0) \neq 0$ et on a donc $u(x_0) = 0$. Mais on a aussi $(uv)' = 0$, c'est à dire $u'v + v'u = 0$ et comme $u(x_0) = 0$ et $v(x_0) = 0$, on a nécessairement $u'(x_0) = 0$. Il suit que $u = 0$.

Supposons maintenant que $u, v \in T$ et que u^2, uv, v^2 sont linéairement dépendants. On a donc une relation $\alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2 = 0$. Si $\alpha = 0$, l'équation devient $(\beta u + \gamma v)v = 0$. Si $v = 0$, alors u et v sont dépendants et sinon $\beta u + \gamma v = 0$. Si $\alpha = 0$, on peut supposer $\alpha = 1$ et notre équation devient $(u + \frac{\beta}{2}v)^2 + (\gamma - \frac{\beta^2}{4})v^2 = 0$. Si $\gamma \geq \frac{\beta^2}{4}$, on trouve encore $v = 0$. Sinon, on pose $\lambda^2 = \frac{\beta^2}{4} - \gamma$ et notre équation devient $(u + (\frac{\beta}{2} - \lambda)v)(u + (\frac{\beta}{2} - \lambda)v) = 0$. Il suit que $u + (\frac{\beta}{2} \pm \lambda)v = 0$.

Exercice 70 *Soit $f \in C^2(\mathbf{R})$ telle que $f'' \geq f$ et $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer que $f \geq 0$.*

On pose $g = f'' - f \geq 0$ si bien que f est la solution de $y'' - y = g$ avec conditions initiales triviales. On utilise la variation de la constante qui nous dit que $f = ue^x + ve^{-x}$ avec $u'e^x + v'e^{-x} = 0$. On a donc $f' = ue^x - ve^{-x}$ et $g = f'' - f = u'e^x - v'e^{-x}$. On en tire $u' = ge^{-x} \geq 0$ et $v' = -ge^x \leq 0$ si bien que u est croissante et v décroissante. D'autre part, les conditions initiales nous donnent $0 = f(0) = u(0) + v(0)$ et $0 = f'(0) = u(0) - v(0)$. On en tire $u(0) = v(0) = 0$. On voit donc que $u \geq 0$ sur $\mathbf{R}_{\geq 0}$ et $u \leq 0$ sur $\mathbf{R}_{\leq 0}$. Et le contraire pour v. Il suit que $f' \geq 0$ sur $\mathbf{R}_{\geq 0}$ et $f' \leq 0$ sur $\mathbf{R}_{\leq 0}$. On voit donc que f est croissante sur $\mathbf{R}_{\geq 0}$ et décroissante sur $\mathbf{R}_{\leq 0}$. Comme $f(0) = 0$, il en résulte que $f \geq 0$.