

Méthode des éléments finis : flexion des poutres à plan moyen

Yves Debard

Institut Universitaire de Technologie du Mans
Département Génie Mécanique et Productique

<http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>

24 mars 2006 – 29 mars 2011

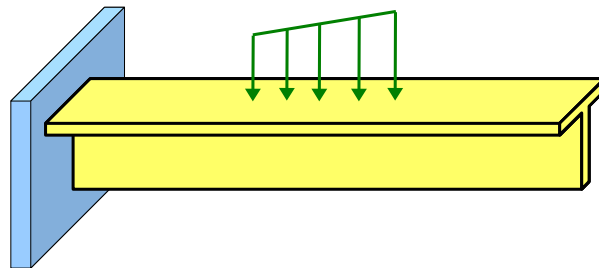


Table des matières

1	Rappels et hypothèses	1
1.1	Définitions	1
1.2	Hypothèses	1
1.3	Champ de déplacements, déformations, contraintes et efforts résultants dans une section droite	2
1.4	Équations d'équilibre	4
1.5	Modèle de Bernoulli	5
2	Modèle de Bernoulli	6
2.1	Matrices élémentaires	6
2.1.1	Introduction	6
2.1.2	Élément de poutre à section constante	8
2.1.3	Fonctions d'interpolation	11
2.1.4	Utilisation des fonctions d'interpolation	12
2.2	Exemples	15
2.2.1	Poutre soumise à une force nodale	15
2.2.2	Poutre soumise à une force répartie	18
2.2.3	Prise en compte d'un appui élastique	21
2.2.4	Poutre avec une rotule interne	22
2.2.5	Problème à déplacement imposé	25
2.3	Programmes Maple	28
2.3.1	ber_mat	28
2.3.2	ber_rot_rig	28
2.3.3	ber_rig_rot	29
2.3.4	ber_rot_rot	29
2.3.5	ber_int	29
2.3.6	ber_int_par	30
2.3.7	ber_interpolation	30
2.3.8	ber_int_mat	30
2.3.9	ber_ex1	31
2.3.10	ber_ex2	32
3	Modèle de Timoshenko	35
3.1	Matrices élémentaires	35
3.1.1	Introduction	35
3.1.2	Élément de poutre à section droite constante	36
3.1.3	Fonctions d'interpolation	37
3.1.4	Utilisation des fonctions d'interpolation	39
3.1.5	Partition du champ de déplacements en mouvement de corps rigide et mouvement de déformation pure : méthode de la tangente	41
3.2	Exercices	46

3.2.1	Influence de l'effort tranchant	46
3.2.2	Poutre à section variable : intégration numérique	47
3.2.3	Partition du champ de déplacements en mouvement de corps rigide et mouve- ment de déformation pure : méthode de la sécante	49
3.3	Programmes Maple	53
3.3.1	tim_mat	53
3.3.2	tim_int	55
3.3.3	tim_int_par	55
3.3.4	tim_int_rem	56
3.3.5	tim_interpolation	57
3.3.6	tim_int_mat	57
3.3.7	tim_rig_def_tan	58
3.3.8	tim_rig_def_sec	60

Références		64
-------------------	--	-----------

Chapitre 1

Rappels et hypothèses

1.1 Définitions

Une poutre droite (figure 1.1) est un solide engendré par une surface plane A , constante ou non, dont le centre de gravité G décrit le segment G_1G_2 , le plan qui contient A restant normal à G_1G_2 . De plus, les dimensions de A sont faibles (sans être négligeables) par rapport à G_1G_2 .

G_1G_2 est la **fibre moyenne** de la poutre.

A est la **section droite** de la poutre.

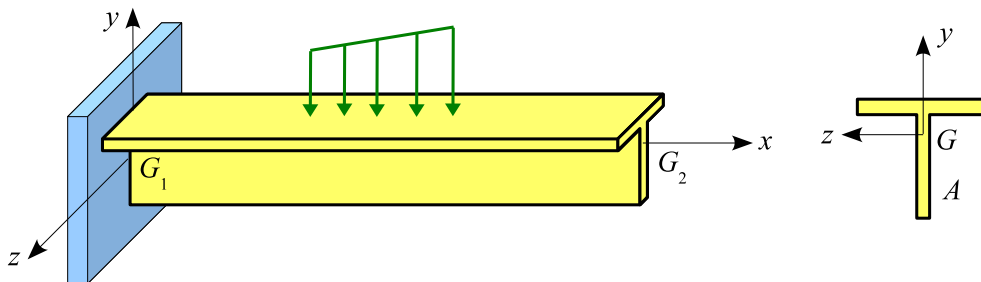


Figure 1.1 – Poutre droite

1.2 Hypothèses

Nous adopterons les conventions et les hypothèses suivantes :

- x est l'axe porté par le vecteur $\overrightarrow{G_1G_2}$.
- Le plan $\{x, y\}$ est un plan de symétrie de la poutre.
- L'axe z forme avec x et y un trièdre direct.
- \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} sont les vecteurs unitaires des axes.
- Les axes y et z sont les axes centraux principaux de la section droite :

$$\int_A y \, dA = \int_A z \, dA = \int_A yz \, dA = 0 \quad (1.2.1)$$

- Le matériau est homogène et isotrope ; son comportement est linéaire et élastique ; E , ν , et ρ sont respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique du matériau.
- Les déplacements et les déformations sont petits.
- Au cours de la mise en charge (figure 1.2) :
 1. les sections droites restent planes.
 2. chaque section droite subit :
 - une translation suivant y : $v(x)$.
 - une rotation autour de l'axe Gz : $\theta_z(x)$.

1.3 Champ de déplacements, déformations, contraintes et efforts résultants dans une section droite

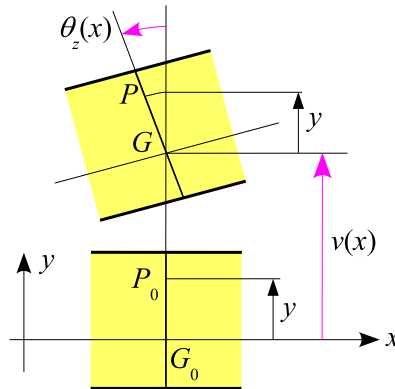


Figure 1.2 – Déplacement de la section droite d'abscisse x

Compte tenu des hypothèses précédentes, le champ de déplacements s'écrit (figure 1.2) :

$$\begin{cases} u(x, y) = -y \theta_z(x) \\ v(x, y) = v(x) \end{cases} \quad (1.3.1)$$

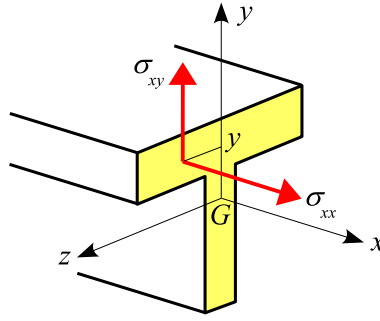
On en déduit :

- les déformations

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\theta_z + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.3.2)$$

- les contraintes (figure 1.3) :

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = -Ey \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \quad , \quad \sigma_{xy} = G k_y \gamma_{xy} = G k_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right) \quad (1.3.3)$$

Figure 1.3 – Contraintes dans la section droite d'abscisse x

– les efforts résultants :

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA = -E \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \int_A y dA = 0 \quad (\text{effort normal}) \quad (1.3.4a)$$

$$T_y = \int_A \sigma_{xy} dA = G A k_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right) \quad (\text{effort tranchant}) \quad (1.3.4b)$$

$$Mf_z \vec{k} = \int_A (y \vec{j}) \wedge (\sigma_{xx} dA \vec{i}) \quad \text{d'où} \quad (1.3.4c)$$

$$Mf_z = \int_A -y \sigma_{xx} dA = E \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \int_A y^2 dA = EI_z \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \quad (\text{moment fléchissant}) \quad (1.3.4d)$$

où :

– A est l'aire de la section droite.

– $I_z = \int_A y^2 dA$ est le moment quadratique de la section par rapport à Gz .

– $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ est le module d'élasticité transversal.

– le coefficient d'aire cisailée k_y traduit le fait que le cisaillement n'est pas uniforme dans la section ; il est défini par :

$$\frac{T_y^2}{A k_y} = \int_A \sigma_{xy}^2 dA \quad (1.3.5)$$

où $\sigma_{xy}(y, z)$ est le cisaillement dû à l'effort tranchant T_y déduit de la théorie de l'élasticité [6, 13, 24, 25, 27, 29, 31, 37, 38]. Ak_y est l'aire cisailée ou section réduite.

Remarque : la contrainte normale dans la section droite est égale à :

$$\sigma_{xx} = -\frac{y}{I_z} Mf_z \quad (1.3.6)$$

On en déduit la valeur maximale de $|\sigma_{xx}|$:

$$\sigma_{\max} = |\sigma_{xx}|_{\max} = \frac{|Mf_z|}{W_{\text{el.}z}} \quad (1.3.7)$$

où $W_{\text{el.}z} = \frac{I_z}{|y|_{\max}}$ est le module de flexion élastique par rapport à z .

1.4 Équations d'équilibre

La poutre porte une force et un couple répartis d'intensité linéique respectivement p_y et m_z .

L'équilibre du morceau de poutre (figure 1.4) compris entre les sections droites d'abscisses x et $x + dx$ s'écrit au premier ordre près :

$$-T_y + T_y + \frac{\partial T_y}{\partial x} dx + p_y dx = \left(\int_A \rho \ddot{v} dA \right) dx = \rho A \ddot{v} dx \quad (1.4.1a)$$

$$-Mf_z + Mf_z + \frac{\partial Mf_z}{\partial x} dx + dx T_y + m_z dx = \left(\int_A -y \rho \ddot{u} dA \right) dx = \rho I_z \ddot{\theta}_z dx \quad (1.4.1b)$$

où :

$$\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -y \ddot{\theta}_z \quad , \quad \ddot{v} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad , \quad \ddot{\theta}_z = \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} \quad (1.4.2)$$

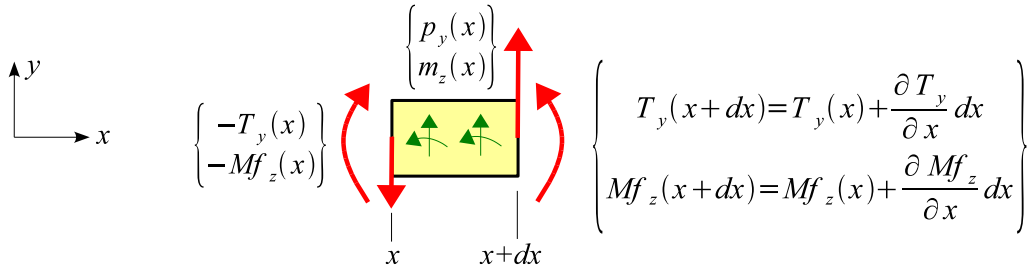


Figure 1.4 – Efforts sur le tronçon de poutre compris entre x et $x + dx$

Après simplification, on obtient les deux équations d'équilibre :

$$\frac{\partial T_y}{\partial x} + p_y = \rho A \ddot{v} \quad (1.4.3a)$$

$$\frac{\partial Mf_z}{\partial x} + T_y + m_z = \rho I_z \ddot{\theta}_z \quad (1.4.3b)$$

Ces équations s'écrivent en fonction des déplacements :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(GA k_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right) \right) + p_y = \rho A \ddot{v} \quad (1.4.4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI_z \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right) + GA k_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right) + m_z = \rho I_z \ddot{\theta}_z \quad (1.4.4b)$$

1.5 Modèle de Bernoulli

Le modèle ci-dessus est dit modèle de Timoshenko¹. Si la poutre est longue, on admet l'hypothèse de Navier²-Bernoulli³ : la section droite reste normale à la déformée de la fibre moyenne (figure 1.5) d'où la relation cinématique :

$$\theta_z = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.5.1)$$

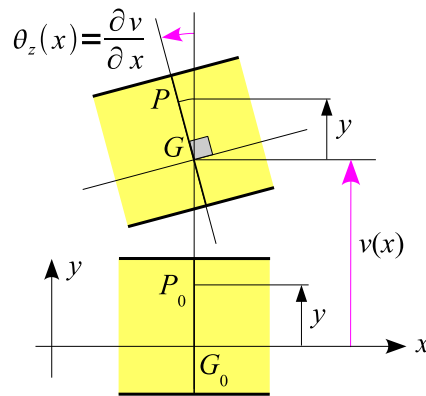


Figure 1.5 – *Modèle de Bernoulli*

Dans ce cas, la relation de comportement (1.3.4d) s'écrit :

$$Mf_z = EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1.5.2)$$

Remarque : si la problème est stationnaire, la flèche $v(x)$ est solution de l'équation :

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = p_y \quad (1.5.3)$$

1. Stephen P. Timoshenko (1878-1972).

2. Louis Navier (1785-1836).

3. Jacques Bernoulli (1654-1705).

Chapitre 2

Modèle de Bernoulli

2.1 Matrices élémentaires

2.1.1 Introduction

L'élément de poutre ($i - j$), de longueur L , de moment quadratique I_z et de module de Young E est soumis à une force et à un couple répartis d'intensité linéique p_y et m_z .

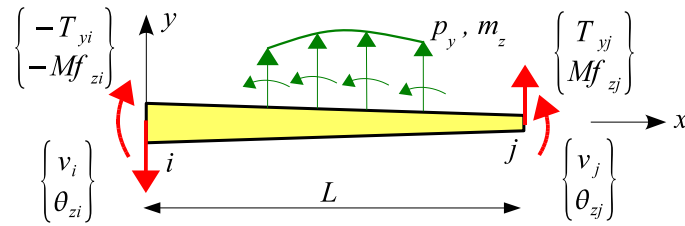


Figure 2.1 – Élément de poutre

(T_{yi}, Mf_{zi}) et (T_{yj}, Mf_{zj}) sont les efforts résultants dans les sections i et j .

(v_i, θ_{zi}) et (v_j, θ_{zj}) sont les déplacements nodaux.

En l'absence de forces d'inertie, les équations d'équilibre (1.4.3) se réduisent à :

$$\frac{dT_y}{dx} + p_y = 0 \quad , \quad \frac{dMf_z}{dx} + T_y + m_z = 0 \quad (2.1.1)$$

En intégrant ces deux équations entre 0 et x , il vient :

$$T_y(x) = T_{yi} - \int_0^x p_y(s) ds \quad (2.1.2)$$

$$Mf_z(x) = Mf_{zi} - \int_0^x T_y(s) ds - \int_0^x m_z(s) ds \quad (2.1.3)$$

Remarque : l'équilibre de l'élément s'écrit :

$$\begin{cases} -T_{yi} + T_{yj} + \int_0^L p_y(x) dx = 0 \\ -Mf_{zi} + Mf_{zj} + L T_{yj} + \int_0^L x p_y(x) dx + \int_0^L m_z(x) dx = 0 \end{cases} \quad (2.1.4)$$

L'intégration de la relation de comportement :

$$Mf_z = EI_z \frac{d\theta_z}{dx} \quad (2.1.5)$$

et de la relation cinématique (modèle de Bernoulli) :

$$\frac{dv}{dx} = \theta_z \quad (2.1.6)$$

entre 0 et x conduit à l'expression de la rotation des sections droites (pente) et du déplacement suivant y (flèche) :

$$\theta_z(x) = \theta_{zi} + \int_0^x \frac{Mf_z(s)}{EI_z} ds \quad , \quad v(x) = v_i + \int_0^x \theta_z(s) ds \quad (2.1.7)$$

Remarque : la flèche peut être obtenue à l'aide de la formule de Bresse¹ :

$$v(x) = v_i + \theta_{zi} x + \int_0^x \frac{Mf_z(s)}{EI_z} (x-s) ds \quad (2.1.8)$$

Des conditions aux limites :

$$v(L) = v_j \quad , \quad \theta_z(L) = \theta_{zj} \quad , \quad T_y(L) = T_{yj} \quad , \quad Mf_z(L) = Mf_{zj} \quad (2.1.9)$$

on déduit l'expression des efforts nodaux en fonction des déplacements nodaux :

$$\{f_{\text{nod}}\} = [k] \{u\} - \{f\} \quad (2.1.10a)$$

où :

$$\{f_{\text{nod}}\} = \begin{Bmatrix} -T_y(0) \\ -Mf_z(0) \\ T_y(L) \\ Mf_z(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -T_{yi} \\ -Mf_{zi} \\ T_{yj} \\ Mf_{zj} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \quad (2.1.10b)$$

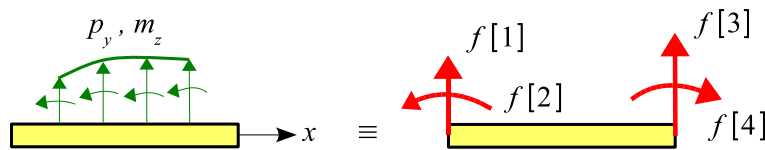


Figure 2.2 – Vecteur force équivalent aux charges réparties

$\{f_{\text{nod}}\}$ est le **vecteur des forces nodales**.

$[k]$ est la **matrice de rigidité élémentaire**.

$\{f\}$ est le **vecteur force équivalent aux charges réparties** (figure 2.2).

$\{u\}$ est le **vecteur déplacement élémentaire**.

1. Jacques Bresse (1822-1883).

2.1.2 Élément de poutre à section constante

Remarque : les éléments décrits dans ce paragraphe sont utilisés par le logiciel **RDM – Flexion**.

L'élément de poutre ($i - j$) (figure 2.3), de longueur L , de moment quadratique I_z et de module de Young E est soumis sur toute sa longueur à une force et à un couple d'intensité linéique :

$$p_y(x) = p_{yi} + (p_{yj} - p_{yi}) \frac{x}{L} \quad , \quad m_z(x) = m_{zi} + (m_{zj} - m_{zi}) \frac{x}{L} \quad (2.1.11)$$

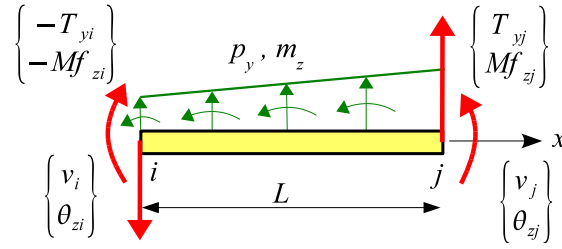


Figure 2.3 – Élément rigide-rigide

L'équilibre de l'élément s'écrit :

$$\begin{cases} -T_{yi} + T_{yj} + \frac{L}{2} (p_{yi} + p_{yj}) = 0 \\ -Mf_{zi} + Mf_{zj} + L T_{yj} + \frac{L^2}{6} (p_{yi} + 2p_{yj}) + \frac{L}{2} (m_{zi} + m_{zj}) = 0 \end{cases}$$

La relation $\{f_{\text{nod}}\} = [k]\{u\} - \{f\}$ s'écrit (programme **ber_mat**) :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} -T_{yi} \\ -Mf_{zi} \\ T_{yj} \\ Mf_{zj} \end{Bmatrix} &= \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \text{sym.} & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \\ &- \frac{L}{60} \begin{bmatrix} 21 & 9 \\ 3L & 2L \\ 9 & 21 \\ -2L & -3L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{yi} \\ p_{yj} \end{Bmatrix} - \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ L & -L \\ 6 & 6 \\ -L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_{zi} \\ m_{zj} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Remarque : si $p_{yi} = p_{yj} = p$ et $m_{zi} = m_{zj} = m$, le vecteur $\{f\}$ se réduit à :

$$\{f\} = \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ L \\ 6 \\ -L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -m \\ 0 \\ m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.1.13)$$

Élément rotule – rigide

L'origine de l'élément est une rotule d'où : $Mf_{zi} = 0$.

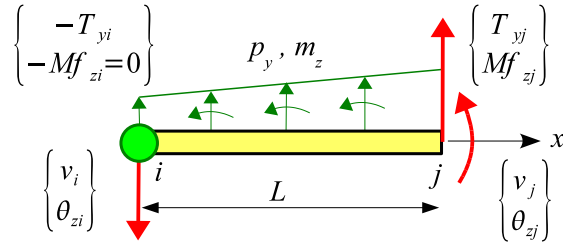


Figure 2.4 – Élément rotule-rigide

Avec cette condition, la relation $\{f_{nod}\} = [k]\{u\} - \{f\}$ se réduit à (programme **ber_rot_rig**) :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} -T_{yi} \\ 0 \\ T_{yj} \\ Mf_{zj} \end{Bmatrix} &= \frac{3EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & L \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & -L \\ \text{sym.} & & & L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ 0 \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \\ &- \frac{L}{120} \begin{bmatrix} 33 & 12 \\ 0 & 0 \\ 27 & 48 \\ -7L & -8L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{yi} \\ p_{yj} \end{Bmatrix} - \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 0 & 0 \\ 5 & 3 \\ -L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_{zi} \\ m_{zj} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1.14a)$$

avec :

$$\theta_{zi} = \frac{1}{2L}(-3v_i + 3v_j - L\theta_{zj}) + \frac{L^3}{240EI_z}(3p_{yi} + 2p_{yj}) + \frac{L^2}{48EI_z}(m_{zi} - m_{zj}) \quad (2.1.14b)$$

Élément rigide – rotule

L'extrémité de l'élément est une rotule d'où : $Mf_{zj} = 0$.

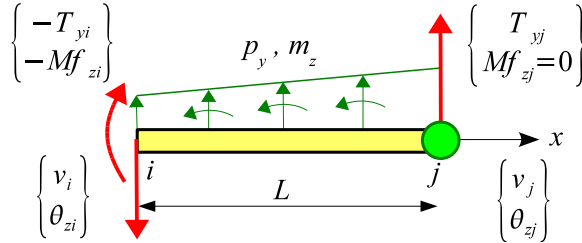


Figure 2.5 – Élément rigide-rotule

Avec cette condition, la relation $\{f_{nod}\} = [k]\{u\} - \{f\}$ se réduit à (programme **ber_rig_rot**) :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} -T_{yi} \\ -Mf_{zi} \\ T_{yj} \\ 0 \end{Bmatrix} &= \frac{3EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & L & -1 & 0 \\ & L^2 & -L & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &- \frac{L}{120} \begin{bmatrix} 48 & 27 \\ 8L & 7L \\ 12 & 33 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{yi} \\ p_{yj} \end{Bmatrix} - \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ L & -L \\ 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_{zi} \\ m_{zj} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1.15a)$$

avec :

$$\theta_{zj} = \frac{1}{2L}(-3v_i + 3v_j - L\theta_{zi}) - \frac{L^3}{240EI_z}(2p_{yi} + 3p_{yj}) - \frac{L^2}{48EI_z}(m_{zi} - m_{zj}) \quad (2.1.15b)$$

Élément rotule – rotule

Les deux extrémités de l'élément sont des rotules d'où : $Mf_{zi} = 0$ et $Mf_{zj} = 0$.

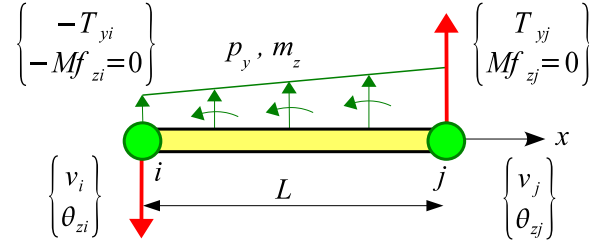


Figure 2.6 – Élément rotule-rotule

Avec ces conditions, la relation $\{f_{nod}\} = [k]\{u\} - \{f\}$ se réduit à (programme **ber_rot_rot**) :

$$\begin{Bmatrix} -T_{yi} \\ 0 \\ T_{yj} \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{yi} \\ p_{yj} \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_{zi} \\ m_{zj} \end{Bmatrix} \quad (2.1.16a)$$

avec :

$$\begin{aligned} \theta_{zi} &= \frac{1}{L}(v_j - v_i) + \frac{L^3}{360EI_z}(8p_{yi} + 7p_{yj}) + \frac{L^2}{24EI_z}(m_{zi} - m_{zj}) \\ \theta_{zj} &= \frac{1}{L}(v_j - v_i) - \frac{L^3}{360EI_z}(7p_{yi} + 8p_{yj}) - \frac{L^2}{24EI_z}(m_{zi} - m_{zj}) \end{aligned} \quad (2.1.16b)$$

Remarque : la matrice de rigidité est nulle.

Contraintes et déplacements

L'effort tranchant et le moment fléchissant sont donnés par :

$$T_y(x) = T_{yi} - \int_0^x p_y(s) ds = T_{yi} - p_{yi}x - (p_{yj} - p_{yi}) \frac{x^2}{2L} \quad (2.1.17a)$$

$$\begin{aligned} Mf_z(x) &= Mf_{zi} - \int_0^x T_y(s) ds - \int_0^x m_z(s) ds \\ &= Mf_{zi} - T_{yi}x + p_{yi} \frac{x^2}{2} + (p_{yj} - p_{yi}) \frac{x^3}{6L} - m_{zi}x - (m_{zj} - m_{zi}) \frac{x^2}{2L} \end{aligned} \quad (2.1.17b)$$

La **contrainte normale** dans la poutre est égale à :

$$\sigma_{xx}(x, y) = -\frac{y}{I_z} Mf_z(x) \quad (2.1.18)$$

La **rotation des sections droites** et la **déformée** sont données par :

$$\begin{aligned} \theta_z(x) &= \theta_{zi} + \frac{1}{EI_z} \int_0^x Mf_z(s) ds \\ &= \theta_{zi} + \frac{1}{EI_z} \left(Mf_{zi}x - T_{yi} \frac{x^2}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{EI_z} \left(p_{yi} \frac{x^3}{6} + (p_{yj} - p_{yi}) \frac{x^4}{24L} - m_{zi} \frac{x^2}{2} - (m_{zj} - m_{zi}) \frac{x^3}{6L} \right) \end{aligned} \quad (2.1.19a)$$

$$\begin{aligned}
v(x) &= v_i + \int_0^x \theta_z(s) ds \\
&= v_i + \theta_{zi} x + \frac{1}{EI_z} \left(Mf_{zi} \frac{x^2}{2} - T_{yi} \frac{x^3}{6} \right) \\
&\quad + \frac{1}{EI_z} \left(p_{yi} \frac{x^4}{24} + (p_{yj} - p_{yi}) \frac{x^5}{120L} - m_{zi} \frac{x^3}{6} - (m_{zj} - m_{zi}) \frac{x^4}{24L} \right)
\end{aligned} \tag{2.1.19b}$$

Cas particulier : si le chargement se réduit à une force uniformément répartie

$$p_{yi} = p_{yj} = p \quad , \quad m_{zi} = m_{zj} = 0$$

les relations ci-dessus deviennent :

$$\begin{aligned}
T_y(x) &= T_{yi} - p x \\
Mf_z(x) &= Mf_{zi} - T_{yi} x + p \frac{x^2}{2} \\
\theta_z(x) &= \theta_{zi} + \frac{1}{EI_z} \left(Mf_{zi} x - T_{yi} \frac{x^2}{2} + p \frac{x^3}{6} \right) \\
v(x) &= v_i + \theta_{zi} x + \frac{1}{EI_z} \left(Mf_{zi} \frac{x^2}{2} - T_{yi} \frac{x^3}{6} + p \frac{x^4}{24} \right)
\end{aligned}$$

Si $p \neq 0$, l'effort tranchant s'annule pour $x = x_m$ défini par $T_y(x_m) = 0$ soit $x_m = \frac{T_{yi}}{p}$. Si x_m est compris entre 0 et L , le moment fléchissant passe par une valeur extrême :

$$Mf_z(x_m) = Mf_{zi} - \frac{T_{yi}^2}{2p}$$

2.1.3 Fonctions d'interpolation

Le déplacement suivant y est représenté par le polynôme du 3^e degré :

$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \tag{2.1.20}$$

d'où la rotation des sections droites :

$$\theta_z(x) = \frac{\partial v}{\partial x} = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 \tag{2.1.21}$$

avec les conditions aux limites :

$$v(0) = v_i \quad , \quad v(L) = v_j \quad , \quad \theta_z(0) = \theta_{zi} \quad , \quad \theta_z(L) = \theta_{zj} \tag{2.1.22}$$

On en déduit l'expression de $v(x)$ en fonction des déplacements nodaux :

$$v(x) = [N_v(x)]\{u\} \tag{2.1.23}$$

d'où :

$$\theta_z(x) = \left[\frac{dN_v(x)}{dx} \right] \{u\} = [N_{\theta_z}(x)]\{u\} \tag{2.1.24}$$

avec les fonctions d'interpolation (programme : **ber_int**) (figure 2.7) :

$$\begin{aligned}
[N_v]^T &= \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ L(\xi^3 - \xi^2) \end{bmatrix} \quad , \quad [N_{\theta_z}]^T = \left[\frac{dN_v}{dx} \right]^T = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 6(\xi^2 - \xi) \\ L(1 - 4\xi + 3\xi^2) \\ 6(\xi - \xi^2) \\ L(3\xi^2 - 2\xi) \end{bmatrix} \\
\left[\frac{dN_{\theta_z}}{dx} \right]^T &= \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right]^T = \frac{2}{L^2} \begin{bmatrix} 6\xi - 3 \\ L(3\xi - 2) \\ 3 - 6\xi \\ L(3\xi - 1) \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \xi = \frac{x}{L}
\end{aligned} \tag{2.1.25}$$

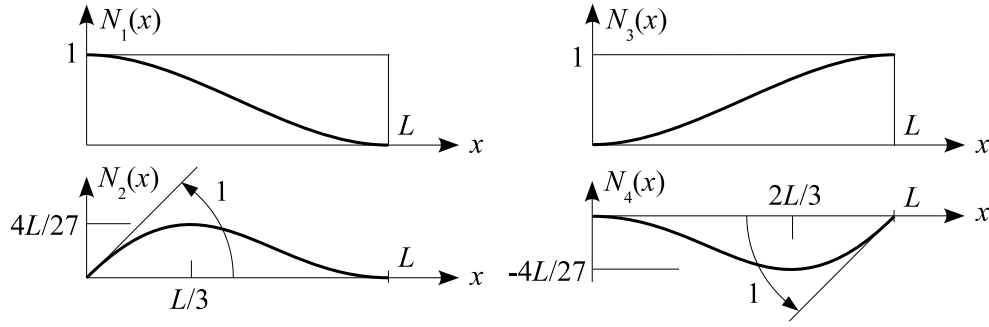


Figure 2.7 – Fonctions d'interpolation

– *Remarque 1* : le champ de déplacements :

$$v(x) = [N_v(x)]\{u\}$$

est le champ de déplacements exact pour un élément de poutre à section constante et non chargé :

$$EI_z \frac{d^4 v}{dx^4} = p_y = 0 \quad (2.1.26)$$

– *Remarque 2* : le champ de déplacements s'écrit sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} x(\xi) = \frac{1+\xi}{2} L & (-1 \leq \xi \leq 1) \\ v(\xi) = [N_v(\xi)]\{u\} & , \quad \theta_z(\xi) = [N_{\theta_z}(\xi)]\{u\} \end{cases} \quad (2.1.27a)$$

avec les fonctions d'interpolation (programme **ber_int_par**) :

$$[N_v]^T = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2(2+\xi)(\xi-1)^2 \\ L(\xi+1)(\xi-1)^2 \\ 2(2-\xi)(\xi+1)^2 \\ L(\xi-1)(\xi+1)^2 \end{bmatrix}$$

$$[N_{\theta_z}]^T = \left[\frac{dN_v}{dx} \right]^T = \frac{1}{4L} \begin{bmatrix} 6(\xi^2-1) \\ L(\xi-1)(3\xi+1) \\ 6(1-\xi^2) \\ L(\xi+1)(3\xi-1) \end{bmatrix} \quad (2.1.27b)$$

$$\left[\frac{dN_{\theta_z}}{dx} \right]^T = \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right]^T = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} 6\xi \\ L(3\xi-1) \\ -6\xi \\ L(3\xi+1) \end{bmatrix}$$

et les relations :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi = J d\xi = \frac{L}{2} d\xi \quad \text{d'où} \quad J = \frac{L}{2} \quad (2.1.27c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{J^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \quad , \quad \int_0^L f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x(\xi)) J d\xi \quad (2.1.27d)$$

J est le jacobien de la transformation géométrique $x(\xi)$.

2.1.4 Utilisation des fonctions d'interpolation

En utilisant l'expression du champ de déplacements :

$$\begin{cases} u(x, y) = -y \theta_z(x) \\ v(x, y) = v(x) \end{cases} \quad (2.1.28)$$

et les relations :

$$\begin{cases} v(x) = [N_v]\{u\} \\ \theta_z(x) = [N_{\theta_z}]\{u\} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \dot{v}(x) = [N_v]\{\dot{u}\} \\ \dot{\theta}_z(x) = [N_{\theta_z}]\{\dot{u}\} \end{cases}, \quad \{\dot{u}\} = \frac{d}{dt}\{u\} \quad (2.1.29)$$

on déduit l'expression de l'énergie de déformation et de l'énergie cinétique en fonction des déplacements nodaux.

L'énergie de déformation est égale à :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dV \quad (2.1.30)$$

avec

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial \theta_z}{\partial x}, \quad \sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad (2.1.31)$$

d'où :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \int_0^L EI_z \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.1.32)$$

En utilisant la relation :

$$\frac{\partial \theta_z(x)}{\partial x} = \left[\frac{dN_{\theta_z}}{dx} \right] \{u\} = [B]\{u\} \quad (2.1.33)$$

il vient :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} \quad (2.1.34)$$

où la **matrice de rigidité** $[k]$ est égale à :

$$[k] = \int_0^L EI_z [B]^T [B] dx \quad (2.1.35)$$

Le **travail des forces extérieures** pour le déplacement $v(x)$ et la rotation $\theta_z(x)$ est égal à :

$$W_{\text{ext}} = \int_0^L v(x) p_y(x) dx + \int_0^L \theta_z(x) m_z(x) dx + \{u\}^T \{f_{\text{nod}}\} = \{u\}^T (\{f\} + \{f_{\text{nod}}\}) \quad (2.1.36)$$

où le **vecteur force** est égal à :

$$\{f\} = \int_0^L [N_v]^T p_y(x) dx + \int_0^L [N_{\theta_z}]^T m_z(x) dx \quad (2.1.37)$$

L'énergie cinétique est égale à :

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}} &= \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{v}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_z \dot{\theta}_z^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [m_v] \{\dot{u}\} + \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [m_{\theta_z}] \{\dot{u}\} = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [m] \{\dot{u}\} \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

où la **matrice de masse** $[m]$ est égale à :

$$[m] = [m_v] + [m_{\theta_z}] \quad (2.1.39)$$

avec

$$[m_v] = \int_0^L \rho A [N_v]^T [N_v] dx, \quad [m_{\theta_z}] = \int_0^L \rho I_z [N_{\theta_z}]^T [N_{\theta_z}] dx \quad (2.1.40)$$

Le principe de Hamilton :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_{\text{cin}} - \underbrace{(E_{\text{def}} - W_{\text{ext}})}_{\text{énergie potentielle}}) dt = 0 \quad \forall \{\delta u\} \quad \text{avec} \quad \{\delta u\}|_{t=t_1} = \{\delta u\}|_{t=t_2} = \{0\} \quad (2.1.41)$$

conduit aux **équations de Lagrange** :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{cin}}}{\partial \dot{u}_i} \right) + \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial u_i} - \frac{\partial W_{\text{ext}}}{\partial u_i} = 0 \quad i = 1, \dots, 4 \quad (2.1.42)$$

soit sous forme matricielle :

$$\{f_{\text{nod}}\} = [m] \{\ddot{u}\} + [k] \{u\} - \{f\} \quad (2.1.43)$$

Cas particulier : la section droite est constante

Si la section droite est constante, on obtient pour la matrice de rigidité et le vecteur force le même résultat qu'avec la méthode précédente (programme **ber_int_mat**). On obtient de plus la matrice de masse :

$$[m_v] = \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22 L & 54 & -13 L \\ & 4 L^2 & 13 L & -3 L^2 \\ & & 156 & -22 L \\ \text{sym.} & & & 4 L^2 \end{bmatrix} \quad (2.1.44a)$$

$$[m_{\theta_z}] = \frac{\rho I_z}{30 L} \begin{bmatrix} 36 & 3 L & -36 & 3 L \\ & 4 L^2 & -3 L & L^2 \\ & & 36 & -3 L \\ \text{sym.} & & & 4 L^2 \end{bmatrix} \quad (2.1.44b)$$

Si l'élanement de l'élément $\lambda = \frac{I_z}{A L^2}$ est petit, la contribution de la matrice $[m_{\theta_z}]$ à la matrice de masse est négligeable. Pour un rond plein de diamètre D : $\lambda = \frac{1}{16} \left(\frac{D}{L} \right)^2$.

Intégration numérique par la méthode de Gauss

Dans la pratique les matrices $[k]$ et $[m]$ et le vecteur $\{f\}$ sont évalués numériquement par la **méthode de Gauss** [5, 15, 17, 26] :

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^{npi} f(\xi_i) w_i \quad (2.1.45)$$

où npi , w_i et ξ_i sont respectivement le nombre de points d'intégration, le poids et l'abscisse du i^{e} point d'intégration (table 2.1).

npi	ξ_i	w_i
1	0	2
2	$\pm 0.57735026918962576 \left(\pm \sqrt{1/3} \right)$	1
3	0 $\pm 0.77459666924148338 \left(\pm \sqrt{3/5} \right)$	0.8888888888888889 (8/9) 0.5555555555555556 (5/9)
4	$\pm 0.33998104358485626 \left(\pm \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{6/5}}{7}} \right)$ $\pm 0.86113631159405258 \left(\pm \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{6/5}}{7}} \right)$	$0.65214515486254614 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6\sqrt{6/5}} \right)$ $0.34785484513745386 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{6/5}} \right)$
5	0 $\pm 0.53846931010568309 \left(\pm \frac{1}{3} \sqrt{5 - 4\sqrt{5/14}} \right)$ $\pm 0.90617984593866399 \left(\pm \frac{1}{3} \sqrt{5 + 4\sqrt{5/14}} \right)$	0.5688888888888889 (128/225) $0.47862867049936647 \left(\frac{161}{450} + \frac{13}{180\sqrt{5/14}} \right)$ $0.23692688505618909 \left(\frac{161}{450} - \frac{13}{180\sqrt{5/14}} \right)$

TABLE 2.1 – Points d'intégration et coefficients de pondération pour la méthode de Gauss

Remarque 1 : un polynôme de degré inférieur ou égal à $2npi - 1$ est intégré exactement par la méthode de Gauss à npi points.

Remarque 2 :

$$\int_0^L g(x) dx = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 g\left(\frac{1+\xi}{2}L\right) d\xi \approx \frac{L}{2} \sum_{i=1}^{npi} w_i g\left(\frac{1+\xi_i}{2}L\right) \tag{2.1.46}$$

2.2 Exemples

2.2.1 Poutre soumise à une force nodale

Une poutre droite (1,2,3) de section droite constante est encastree en 1 et repose en 2 sur un appui simple. Soit EI_z la rigidité linéique de flexion.

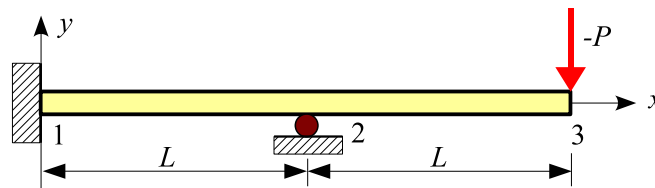


Figure 2.8 – Poutre soumise à une force nodale

Elle porte en 3 une charge ponctuelle de composantes $(0, -P, 0)$ avec $P > 0$.

Partition des degrés de liberté

Effectuons une partition des degrés de liberté en déplacements connus et inconnus ([1], [26]) :

$$\{U_L\} = \begin{Bmatrix} \theta_{z2} = ? \\ v_3 = ? \\ \theta_{z3} = ? \end{Bmatrix}, \quad \{U_S\} = \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{z2} = ? \\ v_3 = ? \\ \theta_{z3} = ? \\ v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

On en déduit la localisation des degrés de liberté dans les matrices globales :

$$\{DDL\} = \begin{Bmatrix} v_1 \rightarrow 0 \\ \theta_{z1} \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 0 \\ \theta_{z2} \rightarrow 1 \\ v_3 \rightarrow 2 \\ \theta_{z3} \rightarrow 3 \end{Bmatrix}$$

Étude élémentaire

Les matrices élémentaires sont :

$$\{ddl_{1-2}\} = \begin{Bmatrix} v_1 \rightarrow 0 \\ \theta_{z1} \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 0 \\ \theta_{z2} \rightarrow 1 \end{Bmatrix}, \quad \{ddl_{2-3}\} = \begin{Bmatrix} v_2 \rightarrow 0 \\ \theta_{z2} \rightarrow 1 \\ v_3 \rightarrow 2 \\ \theta_{z3} \rightarrow 3 \end{Bmatrix}$$

$$[k_{1-2}] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad [k_{2-3}] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Assemblage et calcul des déplacements inconnus

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_{nod,L}\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ -6L & 12 & -6L \\ 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ v_3 \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d'où (ber_ex1) :

$$\theta_{z2} = -\frac{PL^2}{4EI_z}, \quad v_3 = -\frac{7PL^3}{12EI_z}, \quad \theta_{z3} = -\frac{3PL^2}{4EI_z}$$

Efforts et déplacements élémentaires

Les efforts nodaux sont calculés à l'aide de l'équation $\{f_{nod}\} = [k]\{u\}$ (ber_ex1) :

– élément 1 – 2 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y1} \\ -Mf_{z1} \\ T_{y2} \\ Mf_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L \\ 2L^2 \\ -6L \\ 4L^2 \end{bmatrix} \{\theta_{z2}\} = \frac{P}{2} \begin{Bmatrix} -3 \\ -L \\ 3 \\ -2L \end{Bmatrix}$$

$$T_y(x) = \frac{3P}{2} \quad , \quad Mf_z(x) = \frac{P}{2}(L - 3x)$$

$$\theta_z(x) = \frac{Px}{4EI_z}(2L - 3x) \quad , \quad v(x) = \frac{Px^2}{4EI_z}(L - x)$$

– élément 2 – 3 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y2} \\ -Mf_{z2} \\ T_{y3} \\ Mf_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -6L & 12 & -6L \\ 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ v_3 \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 1 \\ L \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$T_y(x) = -P \quad , \quad Mf_z(x) = P(x - L)$$

$$\theta_z(x) = \frac{Px}{4EI_z}(-L^2 - 4Lx + 2x^2) \quad , \quad v(x) = \frac{Px}{12EI_z}(-3L^2 - 6xL + 2x^2)$$

Actions de liaison

Elles sont déduites des efforts élémentaires :

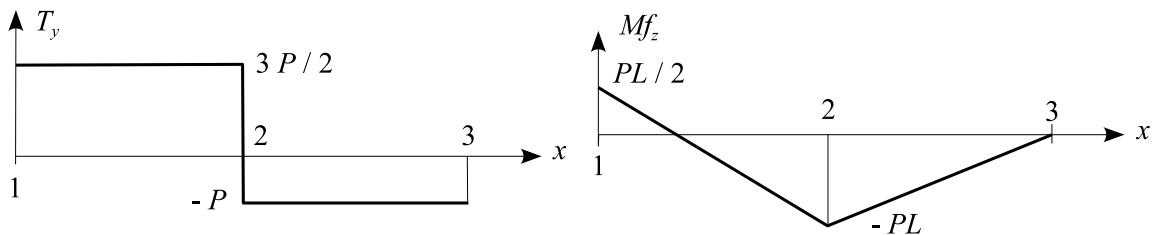
$$F_{1y} = -T_{y1} = \frac{-3P}{2} \quad , \quad M_{1z} = -Mf_{z1} = \frac{-PL}{2} \quad , \quad F_{2y} = T_{y2,[1-2]} - T_{y2,[2-3]} = \frac{5P}{2}$$

L'équilibre de la structure est vérifié :

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 \quad , \quad M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} + L F_{2y} + 2L F_{3y} = 0$$

Représentations graphiques

L'effort tranchant $T_y(x)$ et le moment fléchissant $Mf_z(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



Application numérique

On donne : $L = 90$ cm, $E = 200000$ MPa, $\sigma_E = 300$ MPa , $P = 1500$ daN.

Le moment fléchissant maximal est $Mf_{\max} = PL$. Le dimensionnement en contrainte s'écrit :

$$\sigma_{\max} = \frac{Mf_{\max}}{W_{el.z}} = \frac{PL}{W_{el.z}} < \sigma_E$$

d'où :

$$W_{el.z} > \frac{PL}{\sigma_E} = \frac{15000 \times 900}{300} = 45 \text{ cm}^2$$

2.2.2 Poutre soumise à une force répartie

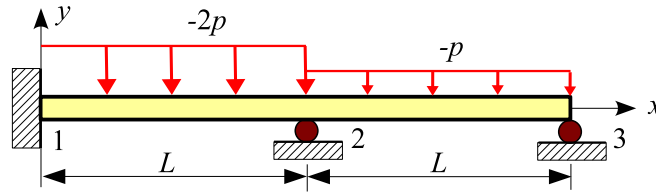


Figure 2.9 – Poutre soumise à une force uniformément répartie

La poutre droite représentée sur la figure 2.9 est encastree en 1 et repose sur un appui simple en 2 et 3. Soit EI_z la rigidité de flexion linéique de la poutre. La poutre porte une force répartie d'intensité linéique $-2p$ entre les noeuds 1 et 2 et $-p$ entre les noeuds 2 et 3 avec $p > 0$.

Partition des degrés de liberté

Effectuons une partition des degrés de liberté en déplacements connus et inconnus ([1], [26]) :

$$\{U_L\} = \begin{cases} \theta_{z2} = ? \\ \theta_{z3} = ? \end{cases}, \quad \{U_S\} = \begin{cases} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\{U\} = \begin{cases} \{U_L\} \\ \{U_S\} \end{cases} = \begin{cases} \theta_{z2} = ? \\ \theta_{z3} = ? \\ v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

On en déduit la localisation des degrés de liberté dans les matrices globales :

$$\{DDL\} = \begin{cases} v_1 \rightarrow 0 \\ \theta_{z1} \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 0 \\ \theta_{z2} \rightarrow 1 \\ v_3 \rightarrow 0 \\ \theta_{z3} \rightarrow 2 \end{cases}$$

Étude élémentaire

Localisation des degrés de liberté :

$$\{ddl_{1-2}\} = \begin{cases} v_1 \rightarrow 0 \\ \theta_{z1} \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 0 \\ \theta_{z2} \rightarrow 1 \end{cases}, \quad \{ddl_{2-3}\} = \begin{cases} v_2 \rightarrow 0 \\ \theta_{z2} \rightarrow 1 \\ v_3 \rightarrow 0 \\ \theta_{z3} \rightarrow 2 \end{cases}$$

Matrices de rigidité :

$$[k_{1-2}] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad [k_{2-3}] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Vecteurs force :

$$\{f_{1-2}\} = \frac{pL}{6} \begin{Bmatrix} -6 \\ -L \\ -6 \\ L \end{Bmatrix}, \quad \{f_{2-3}\} = \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} -6 \\ -L \\ -6 \\ L \end{Bmatrix}$$

Assemblage et calcul des déplacements inconnus

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_L\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{pL^2}{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

d'où (programme **ber_ex2**)

$$\theta_{z2} = \frac{pL^3}{168EI_z}, \quad \theta_{z3} = \frac{pL^3}{56EI_z}$$

Efforts et déplacements élémentaires

Les efforts nodaux sont calculés à l'aide de l'équation $\{f_{nod}\} = [k]\{u\} - \{f\}$ (programme **ber_ex2**) :

– élément 1 – 2 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y1} \\ -Mf_{z1} \\ T_{y2} \\ Mf_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L \\ 2L^2 \\ -6L \\ 4L^2 \end{bmatrix} \{\theta_{z2}\} - \frac{pL}{6} \begin{Bmatrix} -6 \\ -L \\ -6 \\ L \end{Bmatrix} = \frac{pL}{28} \begin{Bmatrix} 29 \\ 5L \\ 27 \\ -4L \end{Bmatrix}$$

$$T_y(x) = \frac{p}{28}(-29L - 56x), \quad Mf_z(x) = \frac{p}{28}(-5L^2 + 29Lx - 28x^2)$$

L'effort tranchant s'annule pour $x_m = \frac{29}{56}L$: $Mf_z(x_m) = \frac{281}{3136}pL^2 = 0.090pL^2$.

$$\theta_z(x) = \frac{px}{168EI_z}(-30L^2 + 87Lx - 56x^2), \quad v(x) = \frac{px^2}{168EI_z}(-15L^2 + 29Lx - 14x^2)$$

– élément 2 – 3 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y2} \\ -Mf_{z2} \\ T_{y3} \\ Mf_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & 6L \\ 4L^2 & 2L^2 \\ -6L & -6L \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} - \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} -6 \\ -L \\ -6 \\ L \end{Bmatrix} = \frac{pL}{14} \begin{Bmatrix} 9 \\ 2L \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$T_y(x) = \frac{p}{14}(-9L + 14x), \quad Mf_z(x) = \frac{p}{14}(-2L^2 + 9Lx - 7x^2)$$

L'effort tranchant s'annule pour $x_m = \frac{9}{14}L$: $Mf_z(x_m) = \frac{25}{392}pL^2 = 0.064pL^2$.

$$\theta_z(x) = \frac{p}{168EI_z}(L^3 - 24L^2x + 54Lx^2 - 28x^3)$$

$$v(x) = \frac{px}{168EI_z}(L^3 - 12L^2x + 18Lx^2 - 7x^3)$$

Actions de liaison

Elles sont déduites des efforts élémentaires :

$$F_{1y} = -T_{y1} = \frac{29pL}{28} \quad , \quad M_{1z} = -Mf_{z1} = \frac{5pL^2}{28}$$

$$F_{2y} = T_{y2} \text{ (élément 1-2)} - T_{y2} \text{ (élément 2-3)} = \frac{45pL}{28}$$

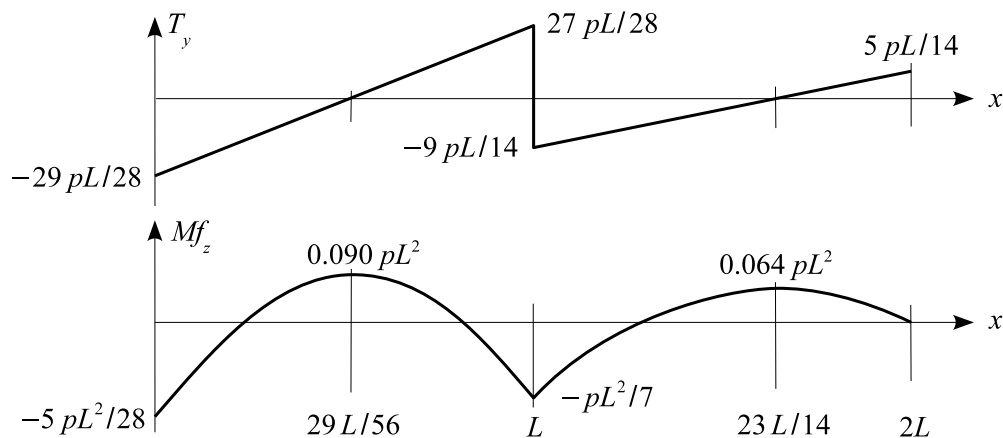
$$F_{3y} = T_{y3} = \frac{5pL}{14}$$

L'équilibre de la structure est vérifié :

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} - 3pL = 0 \quad , \quad M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} + LF_{2y} + 2LF_{3y} - \frac{pL^2}{2} - \frac{3pL^2}{2} = 0$$

Représentations graphiques

L'effort tranchant $T_y(x)$ et le moment fléchissant $Mf_z(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



Application numérique

On donne : $L = 1.4$ m, $\sigma_E = 230$ MPa , $P = 2000$ daN/m.

Le moment fléchissant maximal est :

$$Mf_{\max} = \frac{5pL^2}{28}$$

Le dimensionnement en contrainte s'écrit :

$$\sigma_{\max} = \frac{Mf_{\max}}{W_{el.z}} = \frac{5pL^2}{28W_{el.z}} < \sigma_E$$

d'où :

$$W_{el.z} > \frac{5pL^2}{28\sigma_E} = \frac{5 \times 20 \times 1400^2}{28 \times 230} = 30.44 \text{ cm}^2$$

2.2.3 Prise en compte d'un appui élastique

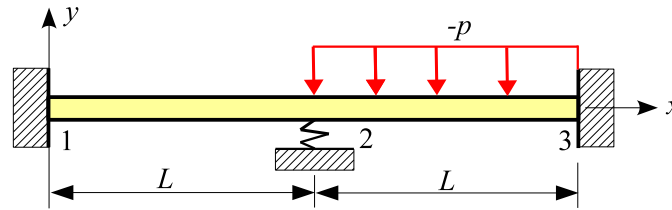


Figure 2.10 – Poutre soumise à une force uniformément répartie

La poutre droite représentée sur la figure 2.10 est encastree en 1 et 3. Le noeud 2 repose sur un appui élastique de raideur k . Soit EI_z la rigidité de flexion linéique de la poutre. La poutre porte entre les noeuds 2 et 3 une force uniformément répartie d'intensité linéique $-p$ avec $p > 0$.

Partition des degrés de liberté

Effectuons une partition des degrés de liberté en déplacements connus et inconnus ([1], [26]) :

$$\{U_L\} = \begin{Bmatrix} v_2 = ? \\ \theta_{z2} = ? \end{Bmatrix}, \quad \{U_S\} = \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_{z3} = 0 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_2 = ? \\ \theta_{z2} = ? \\ v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_{z3} = 0 \end{Bmatrix}$$

On en déduit la localisation des degrés de liberté dans les matrices globales :

$$\{DDL\} = \begin{Bmatrix} v_1 \rightarrow 0 \\ \theta_{z1} \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 1 \\ \theta_{z2} \rightarrow 2 \\ v_3 \rightarrow 0 \\ \theta_{z3} \rightarrow 0 \end{Bmatrix}$$

Étude élémentaire

Localisation des degrés de liberté :

$$\{ddl_{1-2}\} = \begin{Bmatrix} v_1 \rightarrow 0 \\ \theta_{z1} \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 1 \\ \theta_{z2} \rightarrow 2 \end{Bmatrix}, \quad \{ddl_{2-3}\} = \begin{Bmatrix} v_2 \rightarrow 1 \\ \theta_{z2} \rightarrow 2 \\ v_3 \rightarrow 0 \\ \theta_{z3} \rightarrow 0 \end{Bmatrix}$$

Matrices de rigidité :

$$[k_{1-2}] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad [k_{2-3}] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Vecteur force :

$$\{f_{2-3}\} = \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} -6 \\ -L \\ -6 \\ L \end{Bmatrix}$$

Assemblage et calcul des déplacements inconnus

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_{nod,L}\} + \{F_L\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k v_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} -6 \\ -L \end{Bmatrix}$$

d'où

$$v_2 = -\frac{pL^4}{48EI_z} \frac{1}{1+C} \quad , \quad \theta_{z2} = -\frac{pL^3}{96EI_z} \quad , \quad C = \frac{kL^3}{24EI_z}$$

et :

$$F_{2y} = -k v_2 = \frac{pL}{2} \frac{C}{1+C}$$

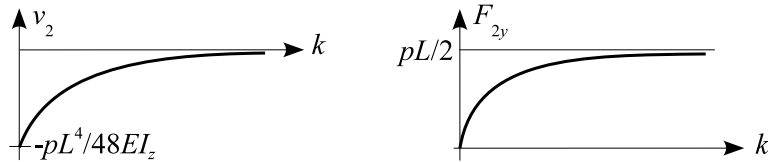


Figure 2.11 – Déplacement v_2 et action de liaison F_{2y} en fonction de la raideur k du ressort

Les autres réactions d'appui sont données par l'équation $\{F_{nod,P}\} = [K_{PL}] \{U_L\} - \{F_P\}$:

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L \\ 6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -pL/2 \\ pL^2/12 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$F_{1y} = \frac{pL}{16} \frac{3-C}{1+C} \quad , \quad M_{1z} = \frac{pL^2}{48} \frac{5-C}{1+C} \quad , \quad F_{3y} = \frac{pL}{16} \frac{13+9C}{1+C} \quad , \quad M_{3z} = -\frac{pL^2}{48} \frac{11+5C}{1+C}$$

L'équilibre de la structure est vérifié :

$$\begin{cases} F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} - pL = 0 \\ M_{1z} + M_{3z} + LF_{2y} + 2LF_{3y} - 3pL^2/2 = 0 \end{cases}$$

2.2.4 Poutre avec une rotule interne

La poutre représentée sur la figure 2.12 a une section droite constante de moment quadratique I_z .

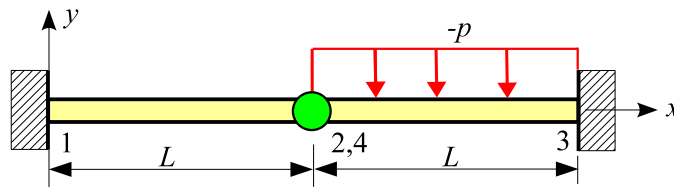


Figure 2.12 – Poutre avec une rotule interne

Soit E le module de Young du matériau. Les deux éléments (1 – 2) et (2 – 3) sont liés entre eux par une rotule. L'ensemble est encasté en 1 et 3. L'élément (2 – 3) est soumis à une force uniformément répartie d'intensité linéique $-p$ avec $p > 0$.

Partition des degrés de liberté

La structure est représentée par un élément rigide–rotule (1 – 2) et un élément rotule–rigide (2 – 3).

Effectuons une partition des degrés de liberté en déplacements connus et inconnus ([1], [26]) :

$$\{U_L\} = \{v_2 = ?\} \quad , \quad \{U_S\} = \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ \theta_{z2} = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_{z3} = 0 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_2 = ? \\ v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ \theta_{z2} = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_{z3} = 0 \end{Bmatrix}$$

On en déduit la localisation des degrés de liberté dans les matrices globales :

$$\{DDL\} = \begin{Bmatrix} v_1 \rightarrow 0 \\ \theta_{z1} \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 1 \\ \theta_{z2} \rightarrow 0 \\ v_3 \rightarrow 0 \\ \theta_{z3} \rightarrow 0 \end{Bmatrix}$$

Étude élémentaire

$$\{ddl_{1-2}\} = \begin{Bmatrix} v_1 \rightarrow 0 \\ \theta_{z1} \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 1 \\ \theta_{z2} \rightarrow 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad [k_{1-2}] = \frac{3EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & L & -1 & 0 \\ L & L^2 & -L & 0 \\ -1 & -L & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\theta_{z2} = \frac{1}{2L}(-3v_1 + 3v_2 - L\theta_{z1})$$

$$\{ddl_{2-3}\} = \begin{Bmatrix} v_2 \rightarrow 1 \\ \theta_{z2} \rightarrow 0 \\ v_3 \rightarrow 0 \\ \theta_{z3} \rightarrow 0 \end{Bmatrix} \quad [k_{2-3}] = \frac{3EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -L \\ L & 0 & -L & L^2 \end{bmatrix} \quad , \quad \{f_{2-3}\} = \frac{pL}{8} \begin{Bmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \\ L \end{Bmatrix}$$

$$\theta_{z2} = \frac{1}{2L}(-3v_2 + 3v_3 - L\theta_{z3}) - \frac{pL^3}{48EI_z}$$

Assemblage et calcul du déplacement inconnu

Le déplacement inconnu v_2 est solution de l'équation :

$$\frac{6EI_z}{L^3} v_2 = \frac{-3pL}{8} \quad \text{d'où} \quad v_2 = \frac{-pL^4}{16EI_z}$$

On en déduit la valeur de la pente au noeud 2 :

$$\theta_{z2} = \frac{-3pL^3}{32EI_z} \quad \text{sur l'élément (1-2)} \quad \text{et} \quad \theta_{z2} = \frac{7pL^3}{96EI_z} \quad \text{sur l'élément (2-3)}$$

Efforts et déplacements élémentaires

Les efforts nodaux sont calculés à l'aide de l'équation $\{f_{\text{nod}}\} = [k] \{u\} - \{f\}$:

- élément 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y1} \\ -Mf_{z1} \\ T_{y2} \\ Mf_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \\ 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{pL}{16} \begin{Bmatrix} 3 \\ 3L \\ -3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$T_y(x) = \frac{-3pL}{16} \quad , \quad Mf_z(x) = \frac{3pL}{16}(x-L)$$

$$\theta_z(x) = \frac{3pLx}{32EI_z}(x-2L) \quad , \quad v(x) = \frac{pLx^2}{32EI_z}(x-3L)$$

- élément 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y2} \\ -Mf_{z2} \\ T_{y3} \\ Mf_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{3EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ L \end{bmatrix} \{v_2\} - \frac{pL}{8} \begin{Bmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \\ L \end{Bmatrix} = \frac{pL}{16} \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ 13 \\ -5L \end{Bmatrix}$$

$$T_y(x) = \frac{p}{16}(16x-3L) \quad , \quad Mf_z(x) = \frac{p}{16}(3Lx-8x^2)$$

$$\theta_z(x) = \frac{p}{96EI_z}(7L^3+9Lx^2-16x^3) \quad , \quad v(x) = \frac{p}{96EI_z}(-6L^4+7L^3x+3Lx^3-4x^4)$$

Remarque : on obtient le même résultat en utilisant la relation $\{f_{\text{nod}}\} = [k] \{u\} - \{f\}$ de l'élément rigide-rigide.

Actions de liaison

Elles sont déduites des efforts élémentaires :

$$F_{1y} = -T_{y1} = \frac{3pL}{16} \quad , \quad M_{1z} = -Mf_{z1} = -\frac{3pL^2}{16}$$

$$F_{3y} = T_{y3} = \frac{13pL}{16} \quad , \quad M_{3z} = Mf_{z3} = -\frac{5pL^2}{16}$$

L'équilibre de l'ensemble est vérifié :

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} - pL = 0 \quad , \quad M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} + LF_{2y} + 2LF_{3y} - \frac{3pL}{2} = 0$$

Remarque : autre modélisation

La poutre est représentée par deux éléments « rigide – rigide » 1 – 2 et 4 – 3 avec la condition $v_2 = v_4$ (cette méthode est utilisée dans le logiciel « **RDM–Ossatures** »).

La localisation des degrés de liberté dans les matrices globales s'écrit :

$$\{DDL\} = \begin{Bmatrix} v_1 \rightarrow 0 \\ \theta_{z1} \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 1 \\ \theta_{z2} \rightarrow 2 \\ v_3 \rightarrow 0 \\ \theta_{z3} \rightarrow 0 \\ v_4 \rightarrow 1 \\ \theta_{z4} \rightarrow 3 \end{Bmatrix}$$

Les matrices élémentaires sont :

$$\{ddl_{1-2}\} = \begin{Bmatrix} v_1 \rightarrow 0 \\ \theta_{z1} \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 1 \\ \theta_{z2} \rightarrow 2 \end{Bmatrix} \quad [k_{1-2}] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$\{ddl_{4-3}\} = \begin{Bmatrix} v_4 \rightarrow 1 \\ \theta_{z4} \rightarrow 3 \\ v_3 \rightarrow 0 \\ \theta_{z3} \rightarrow 0 \end{Bmatrix} \quad [k_{4-3}] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \{f_{4-3}\} = \frac{-pL}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ L \\ 6 \\ -L \end{Bmatrix}$$

L'assemblage conduit à l'équation :

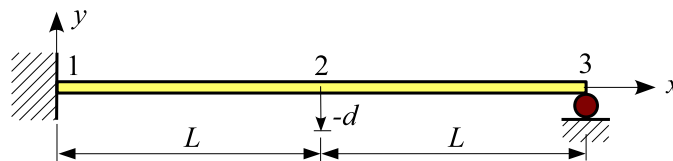
$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & -6L & 6L \\ -6L & 4L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z4} \end{Bmatrix} = -\frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \\ L \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$v_2 = \frac{-pL^4}{16EI_z} \quad , \quad \theta_{z2} = \frac{-3pL^3}{32EI_z} \quad , \quad \theta_{z4} = \frac{7pL^3}{96EI_z}$$

2.2.5 Problème à déplacement imposé**Énoncé**

La poutre droite représentée sur la figure ci-dessous est en acier de module de Young E et de limite élastique σ_E ; elle a une section constante de moment quadratique I_z .



La section 1 est encadrée et la section 3 repose sur un appui simple ; la section 2 subit un déplacement vertical $v_2 = -d$ avec $d > 0$.

Partition des degrés de liberté

Effectuons une partition des degrés de liberté en déplacements connus (nuls $\{U_S\}$, non nuls $\{U_P\}$) et inconnus $\{U_L\}$ ([1], [26]) :

$$\{U_L\} = \begin{cases} \theta_{z2} = ? \\ \theta_{z3} = ? \end{cases} , \quad \{U_P\} = \{v_2 = -d\} , \quad \{U_S\} = \begin{cases} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\{U\} = \begin{cases} \{U_L\} \\ \{U_P\} \\ \{U_S\} \end{cases} = \begin{cases} \theta_{z2} = ? \\ \theta_{z3} = ? \\ v_2 = -d \\ v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

On en déduit la localisation des degrés de liberté dans les matrices globales :

$$\{DDL\} = \begin{cases} v_1 \rightarrow 0 \\ \theta_{z1} \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 3 \\ \theta_{z2} \rightarrow 1 \\ v_3 \rightarrow 0 \\ \theta_{z3} \rightarrow 2 \end{cases}$$

Étude élémentaire

Localisation des degrés de liberté :

$$\{ddl_{1-2}\} = \begin{cases} v_1 \rightarrow 0 \\ \theta_{z1} \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 3 \\ \theta_{z2} \rightarrow 1 \end{cases} , \quad \{ddl_{2-3}\} = \begin{cases} v_2 \rightarrow 3 \\ \theta_{z2} \rightarrow 1 \\ v_3 \rightarrow 0 \\ \theta_{z3} \rightarrow 2 \end{cases}$$

Matrices de rigidité :

$$[k_{1-2}] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} , \quad [k_{2-3}] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Assemblage et calcul des déplacements inconnus

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_L\} - [K_{LP}]\{U_P\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{cases} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} - \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 0 \\ 6L \end{bmatrix} \{-d\}$$

d'où :

$$\theta_{z2} = -\frac{3}{7} \frac{d}{L} , \quad \theta_{z3} = \frac{12}{7} \frac{d}{L}$$

Efforts et déplacements élémentaires

Les efforts nodaux sont calculés à l'aide de l'équation $\{f_{\text{nod}}\} = [k] \{u\}$:

– élément 1 – 2 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y1} \\ -Mf_{z1} \\ T_{y2} \\ Mf_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \\ 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 = -d \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z d}{7L^3} \begin{Bmatrix} 66 \\ 36L \\ -66 \\ 30L \end{Bmatrix}$$

– élément 2 – 3 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y2} \\ -Mf_{z2} \\ T_{y3} \\ Mf_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & 6L \\ 6L & 4L^2 & 2L^2 \\ -12 & -6L & -6L \\ 6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 = -d \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z d}{7L^3} \begin{Bmatrix} -30 \\ 30L \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Actions de liaison

Elles sont déduites des efforts élémentaires :

$$F_{1y} = -T_{y1} = \frac{66}{7} \frac{EI_z d}{L^3} \quad , \quad M_{1z} = -Mf_{z1} = \frac{36}{7} \frac{EI_z d}{L^2}$$

$$F_{2y} = T_{y2} \text{ (élément 1-2)} - T_{y2} \text{ (élément 2-3)} = -\frac{96}{7} \frac{EI_z d}{L^3}$$

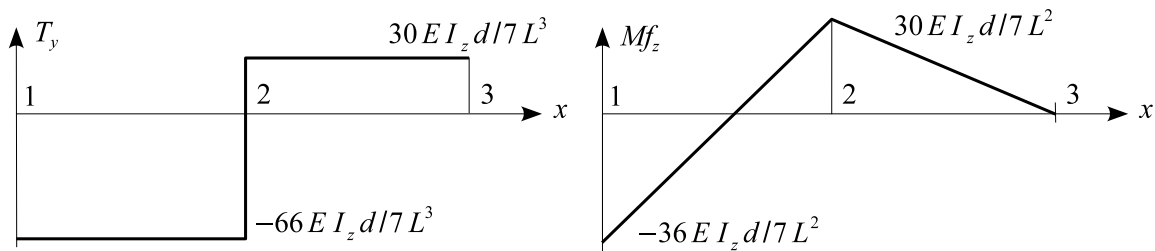
$$F_{3y} = T_{y3} = \frac{30}{7} \frac{EI_z d}{L^3}$$

L'équilibre de la structure est vérifié :

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 \quad , \quad M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} + LF_{2y} + 2LF_{3y} = 0$$

Représentations graphiques

L'effort tranchant $T_y(x)$ et le moment fléchissant $Mf_z(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



Application numérique

On donne : $L = 0.2$ m, $E = 200000$ MPa, $\sigma_E = 300$ MPa , $d = 3$ mm. La section droite est un rectangle plein de hauteur h .

Le module de flexion élastique étant égal à $W_{\text{el.z}} = 2 I_z / h$, on a :

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{Mf_{\text{max}}}{W_{\text{el.z}}} = \frac{18 Edh}{7 L^2} < \sigma_E$$

d'où :

$$h < \frac{7 L^2 \sigma_E}{18 Ed} = 7.77 \text{ mm}$$

2.3 Programmes Maple

Les programmes suivants sont dans le fichier **bernoulli_xy.txt**.

2.3.1 ber_mat

```
# calcul de la matrice de rigidité et du vecteur force
# d'un élément de poutre à section constante

restart;with(linalg):

# charges
py:=x->pyi+(pyj-pyi)*x/L;
mz:=x->mzi+(mzj-mzi)*x/L;

# effort tranchant et moment fléchissant
Ty:=x->Tyi-int(py(s),s=0..x);
Mfz:=x->Mfzi-int(Ty(s),s=0..x)-int(mz(s),s=0..x);

# pente et flèche
rotz:=x->rotzi+int(Mfz(s)/EIz,s=0..x);
v:=x->vi+int(rotz(s),s=0..x);

# calcul des efforts nodaux en fonction des déplacements nodaux
solve({rotzj=rotz(L),vj=v(L)},{Tyi,Mfzi}):assign(%):
Tyj:=Ty(L):Mfzj:=Mfz(L);

# matrice de rigidité et vecteur force
unod:=[vi,rotzi,vj,rotzj]:
fnod:=[-Tyi,-Mfzi,Tyj,Mfzj]:
k:=jacobian(fnod,unod);
f:=jacobian(-fnod,[pyi,pyj,mzi,mzj]);

# remarque : fonctions d'interpolation
Nv:=grad(v(x),unod);
Nrotz:=grad(rotz(x),unod);
```

2.3.2 ber_rot_rig

Ajouter les lignes suivantes au programme ber_mat :

```
# élément rotule-rigide
solve({Mfzi},{rotzi}):assign(%):
k:=jacobian([-Tyi,Tyj,Mfzj],[vi,vj,rotzj]);
f:=jacobian([Tyi,-Tyj,-Mfzj],[pyi,pyj,mzi,mzj]);
simplify(rotzi);
```


2.3.3 ber_rig_rot

Ajouter les lignes suivantes au programme ber_mat :

```
# élément rigide-rotule
solve({Mfzj},{rotzj}):assign(%):
k:=jacobian([-Tyi,-Mfzi,Tyj],[vi,rotzi,vj]);
f:=jacobian([Tyi,Mfzi,-Tyj],[pyi,pyj,mzi,mzj]);
rotzj;
```

2.3.4 ber_rot_rot

Ajouter les lignes suivantes au programme ber_mat :

```
# élément rotule-rotule
solve({Mfzi,Mfzj},{rotzi,rotzj}):assign(%):
k:=jacobian([-Tyi,Tyj],[vi,vj]);
f:=jacobian([Tyi,-Tyj],[pyi,pyj,mzi,mzj]);
rotzi;rotzj;
```

2.3.5 ber_int

```
# calcul des fonctions d'interpolation

restart:with(linalg):

# champ de déplacements
v:=a0+a1*x+a2*x^2+a3*x^3;
rotz:=diff(v,x);
drotz:=diff(rotz,x):

# calcul des coefficients du polynôme d'interpolation
eq1:=vi=subs(x=0,v):eq2:=vj=subs(x=L,v):
eq3:=rotzi=subs(x=0,rotz):eq4:=rotzj=subs(x=L,rotz):
solve({eq1,eq2,eq3,eq4},{a0,a1,a2,a3}):assign(%):

# fonctions d'interpolation et dérivées
unod:=[vi,rotzi,vj,rotzj]:
Nv:=grad(v,unod);
Nrotz:=grad(rotz,unod);
dNrotz:=grad(drotz,unod);

# représentation graphique pour L=1
plot([subs(L=1,Nv[1]),subs(L=1,Nv[2]),subs(L=1,Nv[3]),subs(L=1,Nv[4])],
x=0..1,legend=[N1,N2,N3,N4],color=[red,blue,green,cyan],thickness=2,
title="Poutre de Bernoulli : fonctions d'interpolation");
```

2.3.6 ber_int_par

```
# calcul des fonctions d'interpolation sous forme paramétrique

restart:with(linalg):

# représentation de la géométrie et jacobien
x:=(1+xi)*L/2;J:=L/2;

# représentation du champ de déplacements
v:=a0+a1*xi+a2*xi^2+a3*xi^3;
rotz:=diff(v,xi)/J;
drotz:=diff(rotz,xi)/J:

# calcul des coefficients du polynôme d'interpolation
eq1:=vi=subs(xi=-1,v):eq2:=vj=subs(xi=1,v):
eq3:=rotzi=subs(xi=-1,rotz):eq4:=rotzj=subs(xi=1,rotz):
solve({eq1,eq2,eq3,eq4},{a0,a1,a2,a3}):assign(%):

# fonctions d'interpolation et dérivées
unod:=[vi,rotzi,vj,rotzj]:
Nv:=grad(v,unod):
Nrotz:=grad(rotz,unod):
dNrotz:=grad(drotz,unod):
Nv:=simplify(map(factor,Nv));
Nrotz:=simplify(map(factor,Nrotz));
dNrotz:=simplify(map(factor,dNrotz));

# représentation graphique pour L=1
plot([Nv[1],subs(L=1,Nv[2]),Nv[3],subs(L=1,Nv[4])],xi=-1..1,
legend=[N1,N2,N3,N4],color=[red,blue,green,cyan],thickness=2,
title="Poutre de Bernoulli : fonctions d'interpolation");
```

2.3.7 ber_interpolation

```
# fonctions d'interpolation sous forme paramétrique

# représentation de la géométrie et jacobien
x:=(1+xi)*L/2:J:=L/2:

# fonctions d'interpolation
Nv:=[(xi+2)*(xi-1)^2/4,L*(xi+1)*(xi-1)^2/8,
      -(xi-2)*(xi+1)^2/4,L*(xi-1)*(xi+1)^2/8]:
Nrotz:=[3/2*(xi^2-1)/L,(3*xi+1)*(xi-1)/4,
        -3/2*(xi^2-1)/L,(xi+1)*(3*xi-1)/4]:
dNrotz:=[6/L^2*xi,1/L*(3*xi-1),-6/L^2*xi,1/L*(3*xi+1)]:
```

2.3.8 ber_int_mat

```
# calcul des matrices élémentaires d'un élément à section constante
```

```

# à l'aide des fonctions d'interpolation

restart:with(linalg):

# représentation de la géométrie et jacobien
x:=(1+xi)*L/2:J:=L/2:

# fonctions d'interpolation
Nv:=[(xi+2)*(xi-1)^2/4,L*(xi+1)*(xi-1)^2/8,
      -(xi-2)*(xi+1)^2/4,L*(xi-1)*(xi+1)^2/8]:
Nrotz:=[3/2*(xi^2-1)/L,(3*xi+1)*(xi-1)/4,
        -3/2*(xi^2-1)/L,(xi+1)*(3*xi-1)/4]:
dNrotz:=[6/L^2*xi,1/L*(3*xi-1),-6/L^2*xi,1/L*(3*xi+1)]:

# matrice de rigidité
k:=Matrix(4,4,(i,j)->int(dNrotz[i]*dNrotz[j]*EIz*J,xi=-1..1),shape=symmetric);

# matrice de masse
mv:=Matrix(4,4,(i,j)->int(Nv[i]*Nv[j]*rho*A*J,xi=-1..1),shape=symmetric);
mrotz:=Matrix(4,4,(i,j)->int(Nrotz[i]*Nrotz[j]*rho*Iz*J,xi=-1..1),shape=symmetric);

# vecteur force
py:=pyi+(pyj-pyi)*x/L:
fpy:=vector(4,i->int(Nv[i]*py*J,xi=-1..1)):
fpy:=simplify(jacobian(fpy,[pyi,pyj]));
mz:=mzi+(mzj-mzi)*x/L:
fmz:=vector(4,i->int(Nrotz[i]*mz*J,xi=-1..1)):
fmz:=simplify(jacobian(fmz,[mzi,mzj]));

```

2.3.9 ber_ex1

```

restart: # initialisation

with(linalg): # calcul matriciel

# calcul des déplacements inconnus

KLL:=matrix([[8*L^2,-6*L,2*L^2],[-6*L,12,-6*L],[2*L^2,-6*L,4*L^2]]):
c:=E*Iz/L^3: KLL:=scalarmul(KLL,c);
FL:=vector([0,-P,0]);
UL:=linsolve(KLL,FL);

# efforts et déplacements élémentaires

element:=1;

# vecteur déplacement

if element=1
then unod:=vector([0,0,0,UL[1]]); # élément 1-2

```

```

else unod:=vector([0,UL[1],UL[2],UL[3]]); # élément 2-3
fi:

# matrice de rigidité

k:=matrix([[12,6*L,-12,6*L],[6*L,4*L^2,-6*L,2*L^2],
[-12,-6*L,12,-6*L],[6*L,2*L^2,-6*L,4*L^2]]):
k:=scalarmul(k,E*Iz/L^3);

# vecteur force nodal

fnod:=multiply(k,unod);

# effort tranchant

Ty:=x->-fnod[1]; Ty(x);Ty(L);
# moment fléchissant

Mfz:=x->-fnod[2]-int(Ty(s),s=0..x); Mfz(x);Mfz(L);

# rotation des sections droites : pente

rotz:=x->unod[2]+int(Mfz(s)/E/Iz,s=0..x);simplify(rotz(x));rotz(L);

# déplacement suivant y : flèche

v:=x->unod[1]+int(rotz(s),s=0..x);simplify(v(x));v(L);

# représentations graphiques

assign(E=1,Iz=1,L=1,P=1);

plot(Ty(x),x=0..L,title="Effort tranchant",
thickness=2,color=blue,labels=["x","Ty"]);
plot(Mfz(x),x=0..L,title="Moment fléchissant",
thickness=2,color=blue,labels=["x","Mfz"]);
plot(rotz(x),x=0..L,title="Rotation des sections droites : pente",
thickness=2,color=blue,labels=["x","rotz"]);
plot(v(x),x=0..L,title="Déplacement suivant y : flèche",
thickness=2,color=blue,labels=["x","v"]);

```

2.3.10 ber_ex2

```

restart: # initialisation

with(linalg): # calcul matriciel

# calcul des déplacements inconnus

c:=E*Iz/L: KLL:=matrix([[8*c,2*c],[2*c,4*c]]);
c:=p*L^2/12: FL:=vector([c,c]);

```

```

UL:=linsolve(KLL,FL);

# efforts et déplacements élémentaires

element:=1;

if element=1 then py:=-2*p; else py:=-p;fi:

# vecteur déplacement

if element=1
then unod:=vector([0,0,0,UL[1]]); # élément 1-2
else unod:=vector([0,UL[1],0,UL[2]]); # élément 2-3
fi:

# matrice de rigidité

k:=matrix([[12,6*L,-12,6*L],[6*L,4*L^2,-6*L,2*L^2],
[-12,-6*L,12,-6*L],[6*L,2*L^2,-6*L,4*L^2]]):
k:=scalarmul(k,E*Iz/L^3);

# vecteur force dû à la force répartie

c:=py*L/12:f:=vector([6*c,L*c,6*c,-L*c]);

# vecteur force nodale

fnod:=matadd(multiply(k,unod),f,1,-1);

# effort tranchant

Ty:=x->-fnod[1]-int(py,s=0..x);simplify(Ty(x));Ty(L);

# moment fléchissant

Mfz:=x->-fnod[2]-int(Ty(s),s=0..x);simplify(Mfz(x));Mfz(L);
xmax:=-fnod[1]/py;
if (xmax/L>0) and (xmax/L<1) then Mfmax:=Mfz(xmax):fi;

# rotation des sections droites : pente

rotz:=x->unod[2]+int(Mfz(s)/E/Iz,s=0..x);simplify(rotz(x));rotz(L);

# déplacement suivant y : flèche

v:=x->unod[1]+int(rotz(s),s=0..x);simplify(v(x));v(L);

# représentations graphiques

assign(E=1,Iz=1,L=1,p=1);

```

```
plot(Ty(x),x=0..L,title="Effort tranchant");
plot(Mfz(x),x=0..L,title="Moment fléchissant");
plot([Ty(x),Mfz(x)],x=0..L,title="Effort tranchant et moment
fléchissant",color=[red,blue],legend=["Ty","Mfz"]);
plot(rotz(x),x=0..L,title="Rotation des sections droites :pente");
plot(v(x),x=0..L,title="Déplacement suivant y :
flèche");
```

Chapitre 3

Modèle de Timoshenko

3.1 Matrices élémentaires

3.1.1 Introduction

L'élément de poutre ($i - j$) (figure 3.1), de longueur L , est soumis à une force et à un couple répartis d'intensité linéique p_y et m_z .

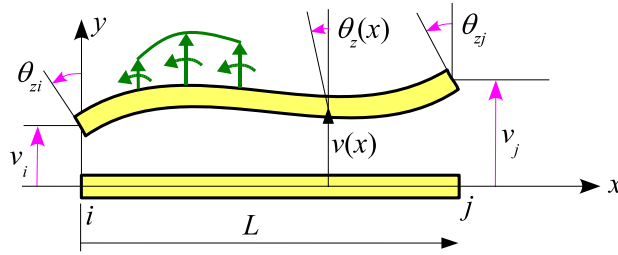


Figure 3.1 – Élément de poutre

(T_{yi}, Mf_{zi}) et (T_{yj}, Mf_{zj}) sont les efforts résultants dans les sections i et j .

(v_i, θ_{zi}) et (v_j, θ_{zj}) sont les déplacements nodaux.

En l'absence de forces d'inertie, les équations d'équilibre (1.4.3) se réduisent à :

$$\frac{dT_y}{dx} + p_y = 0 \quad , \quad \frac{dMf_z}{dx} + T_y + m_z = 0 \quad (3.1.1)$$

Les efforts résultants dans la section d'abscisse x sont :

$$T_y(x) = T_{yi} - \int_0^x p_y(s) ds \quad (3.1.2a)$$

$$Mf_z(x) = Mf_{zi} - \int_0^x T_y(s) ds - \int_0^x m_z(s) ds \quad (3.1.2b)$$

Le déplacement sur y et la rotation des sections droites autour de l'axe z sont donnés par les formules de Bresse ([10, 28, 36]) :

$$\theta_z(x) = \theta_{zi} + \int_0^x \frac{Mf_z(s)}{EI_z} ds \quad (3.1.3a)$$

$$v(x) = v_i + \theta_{zi} x + \int_0^x \frac{Mf_z(s)}{EI_z} (x - s) ds + \int_0^x \frac{T_y(s)}{G k_y A} ds \quad (3.1.3b)$$

Des conditions aux limites :

$$T_{yj} = T_y(L) \quad , \quad Mf_{zj} = Mf_z(L) \quad , \quad v_j = v(L) \quad , \quad \theta_{zj} = \theta_z(L) \quad (3.1.4)$$

on déduit l'expression des efforts nodaux en fonction des déplacements nodaux :

$$\{f_{\text{nod}}\} = [k] \{u\} - \{f\} \quad (3.1.5a)$$

où :

$$\{f_{\text{nod}}\} = \begin{Bmatrix} -T_y(0) \\ -Mf_z(0) \\ T_y(L) \\ Mf_z(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -T_{yi} \\ -Mf_{zi} \\ T_{yj} \\ Mf_{zj} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \quad (3.1.5b)$$

$\{f_{\text{nod}}\}$ est le **vecteur des forces nodales**.

$[k]$ est la **matrice de rigidité élémentaire**.

$\{f\}$ est le **vecteur force équivalent aux charges réparties**.

$\{u\}$ est le **vecteur déplacement élémentaire**.

3.1.2 Élément de poutre à section droite constante

Pour un élément de poutre de section droite constante, soumis sur toute sa longueur à une force et à un couple d'intensité linéique :

$$p_y(x) = p_{yi} + (p_{yj} - p_{yi}) \frac{x}{L} \quad , \quad m_z(x) = m_{zi} + (m_{zj} - m_{zi}) \frac{x}{L} \quad (3.1.6)$$

il vient (programme : tim_mat) :

$$[k] = \frac{EI_z}{L^3 (1 + \phi_y)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & L^2 (4 + \phi_y) & -6L & L^2 (2 - \phi_y) \\ \text{sym.} & & 12 & -6L \\ & & & L^2 (4 + \phi_y) \end{bmatrix} \quad (3.1.7a)$$

$$\begin{aligned} \{f\} &= \frac{L}{120 (1 + \phi_y)} \begin{bmatrix} 42 + 40 \phi_y & 18 + 20 \phi_y \\ L (6 + 5 \phi_y) & L (4 + 5 \phi_y) \\ 18 + 20 \phi_y & 42 + 40 \phi_y \\ -L (4 + 5 \phi_y) & -L (6 + 5 \phi_y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{yi} \\ p_{yj} \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{1}{12 (1 + \phi_y)} \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ L (1 + 4 \phi_y) & L (-1 + 2 \phi_y) \\ 6 & 6 \\ (-1 + 2 \phi_y) & L (1 + 4 \phi_y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_{zi} \\ m_{zj} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1.7b)$$

où

$$\phi_y = \frac{12 EI_z}{L^2 G k_y A} = \frac{24 (1 + \nu) I_z}{L^2 k_y A} \quad (3.1.7c)$$

3.1.3 Fonctions d'interpolation

Pour un élément de poutre à section constante et non chargé, les deux équations d'équilibre (1.4.4) se réduisent à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right) = 0 \quad (3.1.8)$$

$$EI_z \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial x^2} + GA k_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right) = 0 \quad (3.1.9)$$

d'où

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \quad (3.1.10)$$

ce qui implique

$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (3.1.11)$$

où a_0 , a_1 , a_2 et a_3 sont des constantes. De l'équation (3.1.8), on déduit :

$$\theta_z(x) = \frac{\partial v}{\partial x} + c \quad \text{où } c \text{ est une constante} \quad (3.1.12)$$

et l'équation (3.1.9) devient :

$$\frac{\partial^2 \theta_z}{\partial x^2} = \frac{12c}{\phi_y L^2} \quad \text{avec} \quad \phi_y = \frac{12 EI_z}{L^2 GA k_y} \quad (3.1.13)$$

Cette équation et les quatre conditions aux limites :

$$v(0) = v_i \quad , \quad v(L) = v_j \quad , \quad \theta_z(0) = \theta_{zi} \quad , \quad \theta_z(L) = \theta_{zj} \quad (3.1.14)$$

permettent le calcul des cinq coefficients a_0 , a_1 , a_2 , a_3 et c en fonction des déplacements nodaux puis les fonctions d'interpolation :

$$v(x) = [N_v(x)] \{u\} \quad , \quad \theta_z(x) = [N_{\theta_z}(x)] \{u\} \quad (3.1.15)$$

On obtient (programme `tim_int`) :

$$[N_v]^T = \frac{1}{2(1 + \phi_y)} \begin{bmatrix} 2(2\xi^2 - \xi - \phi_y - 1)(\xi - 1) \\ L\xi(2\xi - 2 - \phi_y)(\xi - 1) \\ -2\xi(2\xi^2 - 3\xi - \phi_y) \\ L\xi(2\xi + \phi_y)(-1 + \xi) \end{bmatrix} \quad (3.1.16a)$$

$$\left[\frac{dN_v}{dx} \right]^T = \frac{1}{2L(1 + \phi_y)} \begin{bmatrix} 12\xi^2 - 12\xi - 2\phi_y \\ L(2 + \phi_y + 6\xi^2 - 8\xi - 2\xi\phi_y) \\ -12\xi^2 + 12\xi + 2\phi_y \\ L(6\xi^2 - 4\xi + 2\xi\phi_y - \phi_y) \end{bmatrix} \quad (3.1.16b)$$

$$[N_{\theta_z}]^T = \frac{1}{L(1 + \phi_y)} \begin{bmatrix} 6\xi(\xi - 1) \\ L(\xi - 1)(3\xi - 1 - \phi_y) \\ -6\xi(\xi - 1) \\ L\xi(-2 + \phi_y + 3\xi) \end{bmatrix} \quad (3.1.16c)$$

$$\left[\frac{dN_{\theta_z}}{dx} \right]^T = \frac{1}{L^2(1 + \phi_y)} \begin{bmatrix} -6 + 12\xi \\ L(-4 - \phi_y + 6\xi) \\ 6 - 12\xi \\ L(-2 + \phi_y + 6\xi) \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \xi = \frac{x}{L} \quad (3.1.16d)$$

Le champ de déplacements s'écrit sous forme paramétrique (programme : tim_int_par) :

$$\begin{cases} x(\xi) = \frac{1+\xi}{2} L & (-1 \leq \xi \leq 1) \\ v(\xi) = [N_v(\xi)] \{u\} & , \quad \theta_z(\xi) = [N_{\theta_z}(\xi)] \{u\} \end{cases} \quad (3.1.17a)$$

avec les fonctions d'interpolation :

$$[N_v]^T = \frac{1}{8(1+\phi_y)} \begin{bmatrix} 2(\xi-1)(\xi^2+\xi-2-2\phi_y) \\ L(\xi^2-1)(\xi-1-\phi_y) \\ -2(\xi+1)(\xi^2-\xi-2-2\phi_y) \\ L(\xi^2-1)(\xi+1+\phi_y) \end{bmatrix} \quad (3.1.17b)$$

$$\left[\frac{dN_v}{dx} \right]^T = \frac{1}{4L(1+\phi_y)} \begin{bmatrix} 6\xi^2-6-4\phi_y \\ L(3\xi^2-2\xi-2\phi_y\xi-1) \\ -6\xi^2+6+4\phi_y \\ L(3\xi^2+2\xi+2\phi_y\xi-1) \end{bmatrix} \quad (3.1.17c)$$

$$[N_{\theta_z}]^T = \frac{1}{4L(1+\phi_y)} \begin{bmatrix} 6(\xi^2-1) \\ L(\xi-1)(3\xi+1-2\phi_y) \\ 6(1-\xi^2) \\ L(\xi+1)(3\xi-1+2\phi_y) \end{bmatrix} \quad (3.1.17d)$$

$$\left[\frac{dN_{\theta_z}}{dx} \right]^T = \frac{1}{L^2(1+\phi_y)} \begin{bmatrix} 6\xi \\ L(3\xi-1-\phi_y) \\ -6\xi \\ L(3\xi+1+\phi_y) \end{bmatrix} \quad (3.1.17e)$$

et les relations :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi = J d\xi \quad , \quad J = \frac{L}{2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{J^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \quad (3.1.17f)$$

$$\int_0^L f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x(\xi)) J d\xi \quad (3.1.17g)$$

J est le jacobien de la transformation géométrique $x(\xi)$.

Remarque : autre méthode.

Le champ de déplacements est donné par les formules de Bresse (3.1.3) :

$$\theta_z(x) = \theta_{zi} + \frac{1}{EI_z} \int_0^x Mf_z(s) ds \quad (3.1.18a)$$

$$v(x) = v_i + \theta_{zi} x + \frac{1}{EI_z} \int_0^x Mf_z(s)(x-s) ds + \frac{L^2 \phi_y}{12 EI_z} \int_0^x T_y(s) ds \quad (3.1.18b)$$

avec :

$$T_y(x) = T_{yi} \quad , \quad Mf_z(x) = Mf_{zi} - T_{yi} x \quad (3.1.18c)$$

Des conditions aux limites :

$$v(L) = v_j \quad , \quad \theta_z(L) = \theta_{zj}$$

on déduit l'expression de T_{yi} et Mf_{zi} en fonction des déplacements nodaux, puis les fonctions d'interpolation (programme tim_int_rem).

3.1.4 Utilisation des fonctions d'interpolation

De l'expression du **champ de déplacements** :

$$\begin{cases} u(x, y) = -y \theta_z(x) \\ v(x, y) = v(x) \end{cases} \quad (3.1.19)$$

on déduit les déformations et les contraintes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\theta_z + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \sigma_{xx} &= E \varepsilon_{xx} \quad , \quad \sigma_{xy} = G k_y \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

puis l'**énergie de déformation** :

$$\begin{aligned} E_{\text{def}} &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{xy} \gamma_{xy}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L EI_z \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L G A k_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right)^2 dx \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

En utilisant les relations :

$$\frac{\partial \theta_z(x)}{\partial x} = \left[\frac{dN_{\theta_z}}{dx} \right] \{u\} \quad , \quad \frac{\partial v(x)}{\partial x} = \left[\frac{dN_v}{dx} \right] \{u\} \quad , \quad \theta_z(x) = [N_{\theta_z}] \{u\} \quad (3.1.22)$$

il vient :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} \quad (3.1.23)$$

où la **matrice de rigidité** $[k]$ est égale à :

$$[k] = [k_f] + [k_c] = \int_0^L EI_z [B_f]^T [B_f] dx + \int_0^L G A k_y [B_c]^T [B_c] dx \quad (3.1.24)$$

avec :

$$[B_f] = \left[\frac{dN_{\theta_z}}{dx} \right] \quad , \quad [B_c] = \left[\frac{dN_v}{dx} \right] - [N_{\theta_z}] = \frac{\phi_y}{2L(1+\phi_y)} [-2 \quad -L \quad 2 \quad -L] \quad (3.1.25)$$

Le **travail des forces extérieures** pour le déplacement $v(x)$ et la rotation $\theta_z(x)$ est égal à :

$$W_{\text{ext}} = \int_0^L v(x) p_y(x) dx + \int_0^L \theta_z(x) m_z(x) dx + \{u\}^T \{f_{\text{nod}}\} = \{u\}^T (\{f\} + \{f_{\text{nod}}\}) \quad (3.1.26)$$

où le vecteur force est :

$$\{f\} = \int_0^L [N_v]^T p_y(x) dx + \int_0^L [N_{\theta_z}]^T m_z(x) dx \quad (3.1.27)$$

L'**énergie cinétique** est égale à :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dV \quad (3.1.28)$$

En utilisant les relations :

$$\begin{cases} \dot{u}(x, y) = -y \dot{\theta}_z(x) = -y [N_{\theta_z}] \{\dot{u}\} \\ \dot{v}(x, y) = \dot{v}(x) = [N_v] \{\dot{u}\} \end{cases} \quad , \quad \{\dot{u}\} = \frac{d}{dt} \{u\} \quad (3.1.29)$$

il vient :

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}} &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{v}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_z \dot{\theta}_z^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [m_v] \{\dot{u}\} + \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [m_{\theta_z}] \{\dot{u}\} = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [m] \{\dot{u}\} \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

où la **matrice de masse** est égale à :

$$[m] = [m_v] + [m_{\theta_z}] \quad (3.1.31)$$

avec

$$[m_v] = \int_0^L \rho A [N_v]^T [N_v] dx \quad , \quad [m_{\theta_z}] = \int_0^L \rho I_z [N_{\theta_z}]^T [N_{\theta_z}] dx \quad (3.1.32)$$

Le **principe de Hamilton** s'écrit pour un système conservatif :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_{\text{cin}} - \underbrace{(E_{\text{def}} - W_{\text{ext}})}_{\text{énergie potentielle}}) dt = 0 \quad \forall \{\delta u\} \quad \text{avec} \quad \{\delta u\}|_{t=t_1} = \{\delta u\}|_{t=t_2} = \{0\} \quad (3.1.33)$$

et conduit aux **équations de Lagrange** :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{cin}}}{\partial \dot{u}_i} \right) + \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial u_i} - \frac{\partial W_{\text{ext}}}{\partial u_i} = 0 \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.1.34)$$

soit sous forme matricielle :

$$\{f_{\text{nod}}\} = [m] \{\ddot{u}\} + [k] \{u\} - \{f\} \quad (3.1.35)$$

Cas particulier : la section droite est constante

Si la section droite est constante, on obtient pour la matrice de rigidité et le vecteur force le même résultat qu'avec la méthode précédente (programme : **tim_int_mat**). On obtient de plus la **matrice de masse** :

$$\begin{aligned} [m_v] &= \frac{\rho AL}{420(1+\phi_y)} \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ & m_5 & -m_4 & m_6 \\ & & m_1 & -m_2 \\ \text{sym.} & & & m_5 \end{bmatrix} \\ [m_{\theta_z}] &= \frac{\rho I_z}{30L(1+\phi_y)^2} \begin{bmatrix} m_7 & m_8 & -m_7 & m_8 \\ & m_9 & -m_8 & m_{10} \\ & & m_7 & -m_8 \\ \text{sym.} & & & m_9 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

où :

$$\begin{aligned} m_1 &= 156 + 294 \phi_y + 140 \phi_y^2 & m_7 &= 36 \\ m_2 &= \frac{L}{2} (44 + 77 \phi_y + 35 \phi_y^2) & m_8 &= L (3 - 15 \phi_y) \\ m_3 &= 54 + 126 \phi_y + 70 \phi_y^2 & m_9 &= L^2 (4 + 5 \phi_y + 10 \phi_y^2) \\ m_4 &= -\frac{L}{2} (26 + 63 \phi_y + 35 \phi_y^2) & m_{10} &= L^2 (-1 - 5 \phi_y + 5 \phi_y^2) \\ m_5 &= \frac{L^2}{2} (8 + 14 \phi_y + 7 \phi_y^2) \\ m_6 &= -\frac{L^2}{2} (6 + 14 \phi_y + 7 \phi_y^2) \end{aligned}$$

Remarque : dans la pratique les matrices $[k]$, $[m]$ et le vecteur $\{f\}$ sont évaluées numériquement par la **méthode de Gauss** (page 14).

3.1.5 Partition du champ de déplacements en mouvement de corps rigide et mouvement de déformation pure : méthode de la tangente

Partition du champ de déplacements

Considérons un élément $i - j$ de longueur L .

v_i , θ_{zi} , v_j et θ_{zj} sont les déplacements nodaux.

Le passage de l'état initial à l'état déformé peut être décomposé en un mouvement de corps rigide (R) et un mouvement de déformation pure (D) [3] (figure 3.2).

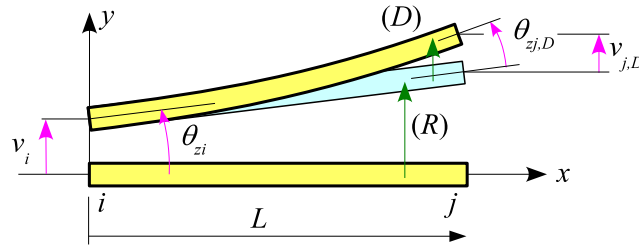


Figure 3.2 – Décomposition du champ de déplacements : méthode de la tangente

Le champ de déplacements s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta_z(x) \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} v_i + \theta_{zi} x \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix}}_{\text{mouvement de corps rigide (R)}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} v_D(x) \\ \theta_{z,D}(x) \end{Bmatrix}}_{\text{mouvement de déformation pure (D)}} \quad (3.1.37)$$

Remarques :

- Le système (D) est isostatique.
- La décomposition n'est pas unique (§ 3.2.3).

Les déplacements nodaux sont :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_{j,D} \\ \theta_{zj,D} \end{Bmatrix} \quad (3.1.38)$$

où

$$v_{j,D} = v_D(L) \quad , \quad \theta_{zj,D} = \theta_{z,D}(L)$$

On en déduit par inversion :

$$\{u_R\} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} = [a_R]\{u\} \quad (3.1.39)$$

$$\{u_D\} = \begin{Bmatrix} v_{j,D} \\ \theta_{zj,D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -L & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} = [a_D]\{u\} \quad (3.1.40)$$

Remarque :

$$[a_R] = [[I] \quad [0]] \quad , \quad [a_D] = [[h] \quad [I]] \quad (3.1.41)$$

avec

$$[h] = \begin{bmatrix} -1 & -L \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad [0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fonctions d'interpolation

À l'aide des fonctions d'interpolation (3.1.17), le champ de déplacements (3.2.1) s'écrit sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} x(\xi) = \frac{1+\xi}{2} L \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad , \quad J = \frac{L}{2} \\ \begin{Bmatrix} v(\xi) \\ \theta_z(\xi) \end{Bmatrix} = [N_R] \{u_R\} + [N_D] \{u_D\} = ([N_R][a_R] + [N_D][a_D]) \{u\} \end{cases} \quad (3.1.42a)$$

avec :

$$[N_R] = \begin{bmatrix} N_{Rv} \\ N_{R\theta_z} \end{bmatrix} \quad (3.1.42b)$$

où

$$[N_{Rv}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+\xi}{2} L \end{bmatrix} \quad , \quad [N_{R\theta_z}] = [0 \quad 1] \quad (3.1.42c)$$

et

$$[N_D] = \begin{bmatrix} N_{Dv} \\ N_{D\theta_z} \end{bmatrix} \quad (3.1.42d)$$

où

$$\begin{aligned} [N_{Dv}] &= \frac{1}{8(1+\phi_y)} \begin{bmatrix} -2(\xi+1)(\xi^2 - \xi - 2 - 2\phi_y) & L(\xi^2 - 1)(\xi + 1 + \phi_y) \end{bmatrix} \\ \left[\frac{dN_{Dv}}{dx} \right] &= \frac{1}{4L(1+\phi_y)} \begin{bmatrix} -6\xi^2 + 6 + 4\phi_y & L(3\xi^2 + 2\xi + 2\phi_y\xi - 1) \end{bmatrix} \\ [N_{D\theta_z}] &= \frac{1}{4L(1+\phi_y)} \begin{bmatrix} 6(1-\xi^2) & L(\xi+1)(3\xi - 1 + 2\phi_y) \end{bmatrix} \\ \left[\frac{dN_{D\theta_z}}{dx} \right] &= \frac{1}{L^2(1+\phi_y)} \begin{bmatrix} -6\xi & L(3\xi + 1 + \phi_y) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1.42e)$$

Calcul de la matrice de rigidité

L'énergie de déformation de l'élément est égale à l'énergie de déformation du système (D) :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} = E_{\text{def},D} = \frac{1}{2} \{u_D\}^T [k_D] \{u_D\} = \frac{1}{2} \{u\}^T [a_D]^T [k_D] [a_D] \{u\} \quad (3.1.43)$$

d'où l'expression de la matrice de rigidité de l'élément :

$$[k] = [a_D]^T [k_D] [a_D] = \begin{bmatrix} [h]^T \\ [I] \end{bmatrix} [k_D] \begin{bmatrix} [h] & [I] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [h]^T [k_D] [h] & [h]^T [k_D] \\ [k_D] [h] & [k_D] \end{bmatrix} \quad (3.1.44)$$

où la matrice $[k_D]$ est égale à :

$$[k_D] = [k_f] + [k_c] = \int_0^L EI_z [B_f]^T [B_f] dx + \int_0^L GA k_y [B_c]^T [B_c] dx \quad (3.1.45)$$

avec :

$$[B_f] = \left[\frac{dN_{D\theta_z}}{dx} \right] , \quad [B_c] = \left[\frac{dN_{Dv}}{dx} \right] - [N_{D\theta_z}] = \frac{\phi_y}{2L(1+\phi_y)} [2 \quad -L] \quad (3.1.46)$$

Remarque : les coefficients de la matrice de rigidité s'écrivent en fonction des coefficients de la matrice $[k_D]$:

$$\begin{cases} k_{33} = k_{D11} & k_{34} = k_{D12} & k_{44} = k_{D22} \\ k_{11} = k_{33} & k_{12} = L k_{D11} + k_{D12} & k_{13} = -k_{33} \\ k_{14} = -k_{34} & k_{22} = L^2 k_{D11} + 2L k_{D12} + k_{D22} \\ k_{23} = -k_{12} & k_{24} = -L k_{D12} - k_{D22} \\ + \text{symétrie} \end{cases} \quad (3.1.47)$$

Calcul du vecteur force

Le travail de $p_y(x)$ et $m_z(x)$ pour le déplacement $v(x)$ et la rotation $\theta_z(x)$ est égal à :

$$\begin{aligned} & \int_0^L (p_y(x) v(x) + m_z(x) \theta_z(x)) dx \\ &= \int_0^L (\{u_R\}^T [N_R]^T + \{u_D\}^T [N_D]^T) \begin{Bmatrix} p_y(x) \\ m_z(x) \end{Bmatrix} dx \\ &= \{u\}^T ([a_R]^T \{f_R\} + [a_D]^T \{f_D\}) \end{aligned} \quad (3.1.48)$$

avec

$$\{f_R\} = \int_0^L [N_R]^T \begin{Bmatrix} p_y(x) \\ m_z(x) \end{Bmatrix} dx = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^L p_y(x) dx \\ \int_0^L x p_y(x) dx + \int_0^L m_z(x) dx \end{array} \right\} \quad (3.1.49)$$

et

$$\{f_D\} = \int_0^L [N_D]^T \begin{Bmatrix} p_y(x) \\ m_z(x) \end{Bmatrix} dx \quad (3.1.50)$$

On en déduit l'expression du vecteur force :

$$\{f\} = [a_R]^T \{f_R\} + [a_D]^T \{f_D\} = \begin{Bmatrix} \{f_R\} + [h]^T \{f_D\} \\ \{f_D\} \end{Bmatrix} \quad (3.1.51)$$

Calcul de la matrice de masse

L'énergie cinétique est égale à :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{v}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_z \dot{\theta}_z^2 dx = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [m] \{\dot{u}\} \quad (3.1.52)$$

En utilisant le champ de déplacements (3.1.42), il vient pour la matrice de masse :

$$\begin{aligned} [m] &= [a_R]^T [m_R] [a_R] + [a_D]^T [m_D] [a_D] + [a_R]^T [m_{RD}] [a_D] + [a_D]^T [m_{DR}] [a_R] \\ &= \begin{bmatrix} [m_R] + [m_{RD}] [h] + [h]^T [m_{DR}] + [h]^T [m_D] [h] & [m_{RD}] + [m_D] [h] \\ [m_{DR}] + [h]^T [m_D] & [m_D] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1.53a)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 [m_R] &= \int_0^L \rho [N_R]^T \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} [N_R] dx \\
 [m_D] &= \int_0^L \rho [N_D]^T \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} [N_D] dx \\
 [m_{RD}] &= [m_{DR}]^T = \int_0^L \rho [N_R]^T \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} [N_D] dx
 \end{aligned} \tag{3.1.53b}$$

Calcul de $[k_D]$ et $\{f_D\}$ à l'aide du théorème de Castigliano

Considérons le système isostatique (D) (figure 3.3) :

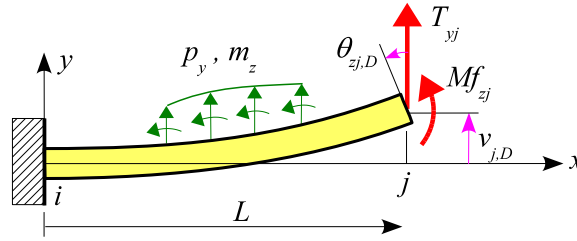


Figure 3.3 – Système isostatique (D)

En intégrant les équations d'équilibre :

$$\frac{dT_y}{dx} + p_y = 0 \quad , \quad \frac{dMf_z}{dx} + T_y + m_z = 0 \tag{3.1.54}$$

entre x et L , il vient pour l'effort tranchant et le moment fléchissant :

$$T_y(x) = T_{yj} + F_y^p(x) \tag{3.1.55a}$$

$$Mf_z(x) = Mf_{zj} + T_{yj}(L - x) + M_z^p(x) \tag{3.1.55b}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 F_y^p(x) &= \int_x^L p_y(s) ds \\
 M_z^p(x) &= \int_x^L F_y^p(s) ds + \int_x^L m_z(s) ds = \int_x^L (s - x) p_y(s) ds + \int_x^L m_z(s) ds
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial T_y}{\partial T_{yj}} = 1 \quad , \quad \frac{\partial T_y}{\partial Mf_{zj}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Mf_z}{\partial T_{yj}} = L - x \quad , \quad \frac{\partial Mf_z}{\partial Mf_{zj}} = 1 \tag{3.1.56}$$

L'énergie de déformation complémentaire est égale à :

$$E_{\text{def}}^c = \int_0^L \frac{Mf_z^2(x)}{2EI_z} dx + \int_0^L \frac{T_y^2(x)}{2GAK_y} dx \tag{3.1.57}$$

En appliquant le deuxième théorème de Castigliano, on obtient les déplacements du nœud j :

$$\begin{aligned}
 v_{j,D} &= \frac{\partial E_{\text{def}}^c}{\partial T_{yj}} = T_{yj} \int_0^L \frac{(L - x)^2}{EI_z} dx + Mf_{zj} \int_0^L \frac{(L - x)}{EI_z} dx + \int_0^L \frac{M_z^p(L - x)}{EI_z} dx \\
 &\quad + T_{yj} \int_0^L \frac{1}{GAK_y} dx + \int_0^L \frac{F_y^p}{GAK_y} dx
 \end{aligned} \tag{3.1.58a}$$

$$\theta_{zj,D} = \frac{\partial E c_{\text{def}}}{\partial M f_{zj}} = T_{yj} \int_0^L \frac{(L-x)}{EI_z} dx + M f_{zj} \int_0^L \frac{1}{EI_z} dx + \int_0^L \frac{M_z^p}{EI_z} dx \quad (3.1.58b)$$

soit sous forme matricielle :

$$\{u_D\} = [c] \{f_{nod,D}\} + \{u_D^p\} \quad (3.1.59)$$

avec

$$\{u_D\} = \begin{Bmatrix} v_{j,D} \\ \theta_{zj,D} \end{Bmatrix}, \quad [c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \quad \{f_{nod,D}\} = \begin{Bmatrix} T_{yj} \\ M f_{zj} \end{Bmatrix}, \quad \{u_D^p\} = \begin{Bmatrix} u_{D,1}^p \\ u_{D,2}^p \end{Bmatrix} \quad (3.1.60)$$

où :

$$\begin{aligned} c_{11} &= \int_0^L \frac{(L-x)^2}{EI_z} dx + \int_0^L \frac{1}{GA k_y} dx, & c_{22} &= \int_0^L \frac{1}{EI_z} dx \\ c_{12} = c_{21} &= \int_0^L \frac{(L-x)}{EI_z} dx \\ u_{D,1}^p &= \int_0^L \frac{M_z^p (L-x)}{EI_z} dx + \int_0^L \frac{F_y^p}{GA k_y} dx, & u_{D,2}^p &= \int_0^L \frac{M_z^p}{EI_z} dx \end{aligned} \quad (3.1.61)$$

$[c]$ est la **matrice de souplesse** ou **matrice de flexibilité** du système isostatique.

On en déduit par inversion :

$$\{f_{nod,D}\} = [c]^{-1} (\{u_D\} - \{u_D^p\}) = [k_D] \{u_D\} - \{f_D\} \quad (3.1.62)$$

où :

$$[k_D] = [c]^{-1} = \begin{bmatrix} k_{D11} & k_{D12} \\ k_{D21} & k_{D22} \end{bmatrix}, \quad \{f_D\} = [k_D] \{u_D^p\}$$

avec

$$k_{D11} = \frac{c_{22}}{\Delta}, \quad k_{D22} = \frac{c_{11}}{\Delta}, \quad k_{D12} = k_{D21} = \frac{-c_{12}}{\Delta}, \quad \Delta = c_{11} c_{22} - c_{12}^2$$

Remarques

- En utilisant la représentation paramétrique, les coefficients de la matrice de flexibilité s'écrivent :

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{L^3}{8E} \int_{-1}^1 \frac{(1-\xi)^2}{I_z} d\xi + \frac{L(1+\nu)}{E} \int_{-1}^1 \frac{1}{A k_y} d\xi, & c_{22} &= \frac{L}{2E} \int_{-1}^1 \frac{1}{I_z} d\xi \\ c_{12} = c_{21} &= \frac{L^2}{4E} \int_{-1}^1 \frac{1-\xi}{I_z} d\xi \end{aligned} \quad (3.1.63)$$

- Dans la pratique, les intégrales (3.1.61) ou (3.1.63) sont évaluées numériquement par la méthode de Gauss (page 14) et le résultat dépend du nombre de points d'intégration.

- Le vecteur $\{f_R\}$ est égal à :

$$\{f_R\} = \begin{Bmatrix} F_y^p(0) \\ M_z^p(0) \end{Bmatrix}$$

- En l'absence de forces d'inertie, l'équilibre de l'élément s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} -T_{yi} \\ -M f_{zi} \end{Bmatrix} = [h]^T \begin{Bmatrix} T_{yj} \\ M f_{zj} \end{Bmatrix} - \{f_R\} \quad (3.1.64)$$

– la matrice

$$[V_R] = \begin{bmatrix} [I] \\ -[h] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.65)$$

vérifie la relation :

$$[k][V_R] = [0] \quad (3.1.66)$$

$[V_R]$ est la matrice des modes rigides de l'élément : modes de déplacements non nuls à énergie de déformation nulle [2, 22, 26].

– Pour une poutre à section constante, on a :

$$[c] = \frac{L}{6EI_z} \begin{bmatrix} 2L^2 \left(1 + \frac{\phi_y}{4}\right) & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix}, \quad [k_D] = \frac{EI_z}{L^3(1 + \phi_y)} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & L^2(4 + \phi_y) \end{bmatrix} \quad (3.1.67)$$

3.2 Exercices

3.2.1 Influence de l'effort tranchant

La poutre (1 → 2) (figure 3.4) de longueur L et de section droite constante est encastree en 1. Soient A et I_z les caractéristiques de la section. E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau. La poutre porte sur toute sa longueur une force uniformément répartie d'intensité linéique p .

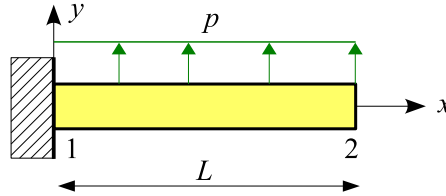


Figure 3.4 – Influence de l'effort tranchant

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_L\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3(1 + \phi_y)} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & L^2(4 + \phi_y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -L \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$v_2 = \frac{(3 + \phi_y)pL^4}{24EI_z} = \left(1 + \frac{\phi_y}{3}\right) \frac{pL^4}{8EI_z}, \quad \theta_{z2} = \frac{pL^3}{6EI_z}$$

La contribution de l'effort tranchant à la flèche v_2 est égale à :

$$f = \frac{v_2 - v_2(\phi_y = 0)}{v_2} = \frac{\phi_y}{3 + \phi_y}$$

La section droite est rectangulaire :

$$A = bh, \quad I_z = \frac{bh^3}{12}, \quad k_y = \frac{5}{6}$$

d'où :

$$\phi_y = \frac{12}{5}(1 + \nu) \left(\frac{h}{L} \right)^2$$

et

$$f(L/h, \nu) = \frac{4(1 + \nu)}{5x^2 + 4 + 4\nu} \quad \text{où } x = \frac{L}{h}$$

On obtient :

$f(L/h, \nu)$				
L/h	$\nu = 0$	$\nu = 0.2$	$\nu = 0.4$	$\nu = 0.5$
3	0.082	0.096	0.111	0.118
4	0.048	0.057	0.065	0.070
5	0.031	0.037	0.043	0.046
6	0.022	0.026	0.030	0.032
8	0.012	0.015	0.017	0.018
10	0.008	0.010	0.011	0.012
20	0.002	0.002	0.003	0.003

Remarque : si on adopte pour le coefficient de cisaillement la valeur proposée par Cowper [13] :

$$k_y = \frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu}$$

d'où

$$\phi_y = \frac{12 + 11\nu}{5} \left(\frac{h}{L} \right)^2$$

et

$$f(L/h, \nu) = \frac{12 + 11\nu}{15x^2 + 12 + 11\nu} \quad \text{où } x = \frac{L}{h}$$

on obtient :

$f(L/h, \nu)$				
L/h	$\nu = 0$	$\nu = 0.2$	$\nu = 0.4$	$\nu = 0.5$
3	0.082	0.095	0.108	0.115
4	0.048	0.056	0.064	0.068
5	0.031	0.036	0.042	0.045
6	0.022	0.026	0.029	0.031
8	0.012	0.015	0.017	0.018
10	0.008	0.009	0.011	0.012
20	0.002	0.002	0.003	0.003

3.2.2 Poutre à section variable : intégration numérique

Dans la pratique, les intégrales (3.1.61) ou (3.1.63) sont évaluées numériquement par la méthode de Gauss (page 14) et le résultat dépend du nombre de points d'intégration.

Considérons, par exemple, la poutre représentée sur la figure 3.5. La section 1 est encastree. E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau.

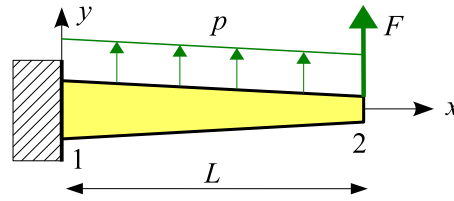


Figure 3.5 – Poutre à section variable

La section droite est un carré plein dont le côté varie linéairement entre $2c$ et c . Les caractéristiques de la section sont :

$$A = c^2 \left(2 - \frac{x}{L}\right)^2, \quad I_z = \frac{c^4}{12} \left(2 - \frac{x}{L}\right)^4, \quad k_y = \frac{5}{6}$$

La poutre porte à son extrémité libre une force d'intensité F

– **Solution analytique** : les déplacements du nœud 2 sont :

$$v_2(F) = C_1 \frac{FL^3}{Ec^4} + C_2 \frac{FL}{Ec^2} (1 + \nu), \quad \theta_{z2}(F) = C_3 \frac{FL^2}{Ec^4}$$

où

$$C_1 = 24 \int_{-1}^1 \frac{(1-\xi)^2}{(3-\xi)^4} d\xi = \frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{24}{5} \int_{-1}^1 \frac{1}{(3-\xi)^2} d\xi = \frac{6}{5}$$

$$C_3 = 48 \int_{-1}^1 \frac{1-\xi}{(3-\xi)^4} d\xi = 1$$

– **Intégration numérique** :

Influence du nombre de points d'intégration			
npi	$(C_1 - C_{1 \text{ exact}})/C_{1 \text{ exact}}$	$(C_2 - C_{2 \text{ exact}})/C_{2 \text{ exact}}$	$(C_3 - C_{3 \text{ exact}})/C_{3 \text{ exact}}$
2	-0.021882987290	-0.005917159763	0.051223696649
3	-0.004310618175	-0.000251952633	0.004944784666
4	-0.000373724563	-0.000009704875	0.000335564545
5	-0.000023973740	-0.000000353046	0.000018895818
6	-0.000001303189	-0.000000012376	0.000000946326
7	-0.000000063699	-0.000000000423	0.000000043710
8	-0.000000002890	-0.000000000014	0.000000001903
9	-0.000000000124	-0.000000000000	0.000000000079
10	-0.000000000005	-0.000000000000	0.000000000003

La poutre porte sur toute sa longueur une force uniformément répartie d'intensité linéique p

– **Solution analytique** : les déplacements du nœud 2 sont :

$$v_2(p) = C_4 \frac{pL^4}{Ec^4} + C_5 \frac{pL^2}{Ec^2} (1 + \nu), \quad \theta_{z2}(p) = C_6 \frac{pL^3}{Ec^4}$$

où

$$C_4 = 6 \int_{-1}^1 \frac{(1-\xi)^3}{(3-\xi)^4} d\xi = 6 \ln(2) - 4, \quad C_5 = \frac{12}{5} \int_{-1}^1 \frac{1-\xi}{(3-\xi)^2} d\xi = \frac{6}{5} (2 \ln(2) - 1)$$

$$C_6 = 12 \int_{-1}^1 \frac{(1-\xi)^2}{(3-\xi)^4} d\xi = \frac{1}{4}$$

– Intégration numérique :

Influence du nombre de points d'intégration			
npi	$(C_4 - C_{4 \text{ exact}})/C_{4 \text{ exact}}$	$(C_5 - C_{5 \text{ exact}})/C_{5 \text{ exact}}$	$(C_6 - C_{6 \text{ exact}})/C_{6 \text{ exact}}$
2	-0.01230971140	0.01097138267	-0.02188298729
3	0.00179912183	0.00052027101	-0.00431061818
4	0.00027451599	0.00002117206	-0.00037372456
5	0.00002178872	0.00000079637	-0.00002397374
6	0.00000133129	0.00000002855	-0.00000130319
7	0.00000007013	0.00000000099	-0.00000006370
8	0.00000000335	0.00000000003	-0.00000000289
9	0.00000000015	0.00000000000	-0.00000000012
10	0.00000000001	0.00000000000	-0.00000000001

3.2.3 Partition du champ de déplacements en mouvement de corps rigide et mouvement de déformation pure : méthode de la sécante

Partition du champ de déplacements

Considérons un élément $i - j$ de longueur L .

v_i, θ_{zi}, v_j et θ_{zj} sont les déplacements nodaux.

Le passage de l'état initial à l'état déformé peut être décomposé en un mouvement de corps rigide (R) et un mouvement de déformation pure (D) [3] figure (3.6).

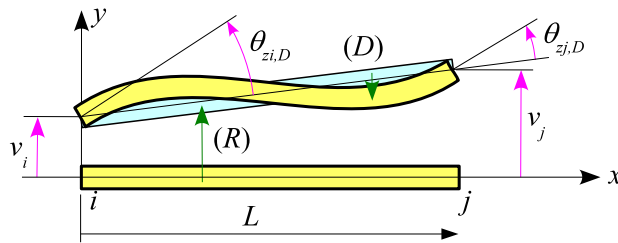


Figure 3.6 – Décomposition du champ de déplacements : méthode de la sécante

Le champ de déplacements s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta_z(x) \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{L} \begin{Bmatrix} v_i(L-x) + v_j x \\ v_j - v_i \end{Bmatrix}}_{\text{mouvement de corps rigide (R)}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} v_D(x) \\ \theta_{z,D}(x) \end{Bmatrix}}_{\text{mouvement de déformation pure (D)}} \quad (3.2.1)$$

Les déplacements nodaux sont :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & L & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ \theta_{zi,D} \\ \theta_{zj,D} \end{Bmatrix} \quad (3.2.2)$$

où

$$\theta_{zi,D} = \theta_{z,D}(0) \quad , \quad \theta_{zj,D} = \theta_{z,D}(L)$$

On en déduit par inversion :

$$\{u_R\} = \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} = [a_R]\{u\} \quad (3.2.3)$$

$$\{u_D\} = \begin{Bmatrix} \theta_{zi,D} \\ \theta_{zj,D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 1 & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} = [a_D]\{u\} \quad (3.2.4)$$

Fonctions d'interpolation

À l'aide des fonctions d'interpolation (3.1.17), le champ de déplacements (3.2.1) s'écrit sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} x(\xi) = \frac{1+\xi}{2}L \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad , \quad J = \frac{L}{2} \\ \begin{Bmatrix} v(\xi) \\ \theta_z(\xi) \end{Bmatrix} = [N_R]\{u_R\} + [N_D]\{u_D\} = ([N_R][a_R] + [N_D][a_D])\{u\} \end{cases} \quad (3.2.5a)$$

avec :

$$[N_R] = \begin{bmatrix} N_{Rv} \\ N_{R\theta_z} \end{bmatrix} \quad (3.2.5b)$$

où

$$[N_{Rv}] = \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} \quad , \quad [N_{R\theta_z}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.5c)$$

et

$$[N_D] = \begin{bmatrix} N_{Dv} \\ N_{D\theta_z} \end{bmatrix} \quad (3.2.5d)$$

où

$$\begin{aligned} [N_{Dv}] &= \frac{L(\xi^2 - 1)}{8(1 + \phi_y)} [\xi - 1 - \phi_y \quad \xi + 1 + \phi_y] \\ \left[\frac{dN_{Dv}}{dx} \right] &= \frac{1}{4(1 + \phi_y)} [3\xi^2 - 2\xi - 2\phi_y\xi - 1 \quad 3\xi^2 + 2\xi + 2\phi_y\xi - 1] \\ [N_{D\theta_z}] &= \frac{1}{4(1 + \phi_y)} [(\xi - 1)(3\xi + 1 - 2\phi_y) \quad (\xi + 1)(3\xi - 1 + 2\phi_y)] \\ \left[\frac{dN_{D\theta_z}}{dx} \right] &= \frac{1}{L(1 + \phi_y)} [3\xi - 1 - \phi_y \quad 3\xi + 1 + \phi_y] \end{aligned} \quad (3.2.5e)$$

Calcul de la matrice de rigidité

L'énergie de déformation de l'élément est égale à l'énergie de déformation du système (D) :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} = E_{\text{def},D} = \frac{1}{2} \{u_D\}^T [k_D] \{u_D\} = \frac{1}{2} \{u\}^T [a_D]^T [k_D] [a_D] \{u\} \quad (3.2.6)$$

d'où l'expression de la matrice de rigidité de l'élément :

$$[k] = [a_D]^T [k_D] [a_D] \quad (3.2.7)$$

où la matrice $[k_D]$ est égale à :

$$[k_D] = [k_f] + [k_c] = \int_0^L EI_z [B_f]^T [B_f] dx + \int_0^L GAk_y [B_c]^T [B_c] dx \quad (3.2.8)$$

avec :

$$[B_f] = \left[\frac{dN_{D\theta_z}}{dx} \right] \quad , \quad [B_c] = \left[\frac{dN_{Dv}}{dx} \right] - [N_{D\theta_z}] = \frac{-\phi_y}{2(1+\phi_y)} [1 \quad 1] \quad (3.2.9)$$

Remarque : les coefficients de la matrice de rigidité s'écrivent en fonction des coefficients de la matrice $[k_D]$:

$$\left\{ \begin{array}{lll} k_{22} = k_{D11} & k_{24} = k_{D12} & k_{44} = k_{D22} \\ k_{11} = \frac{1}{L^2} (k_{D11} + 2k_{D12} + k_{D22}) & k_{12} = \frac{1}{L} (k_{D11} + k_{D12}) & \\ k_{13} = -k_{11} & k_{14} = \frac{1}{L} (k_{D12} + k_{D22}) & \\ k_{23} = -k_{12} & k_{33} = k_{11} & k_{34} = -k_{14} \\ + \text{symétrie} & & \end{array} \right. \quad (3.2.10)$$

Calcul du vecteur force

Le travail de $p_y(x)$ et $m_z(x)$ pour le déplacement $v(x)$ et la rotation $\theta_z(x)$ est égal à :

$$\begin{aligned} & \int_0^L (p_y(x)v(x) + m_z(x)\theta_z(x)) dx \\ &= \int_0^L (\{u_R\}^T [N_R]^T + \{u_D\}^T [N_D]^T) \left\{ \begin{array}{l} p_y(x) \\ m_z(x) \end{array} \right\} dx \\ &= \{u\}^T ([a_R]^T \{f_R\} + [a_D]^T \{f_D\}) = \{u\}^T \{f\} \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

avec

$$\{f_R\} = \int_0^L [N_R]^T \left\{ \begin{array}{l} p_y(x) \\ m_z(x) \end{array} \right\} dx \quad , \quad \{f_D\} = \int_0^L [N_D]^T \left\{ \begin{array}{l} p_y(x) \\ m_z(x) \end{array} \right\} dx \quad (3.2.12)$$

et

$$\{f\} = [a_R]^T \{f_R\} + [a_D]^T \{f_D\} \quad (3.2.13)$$

Calcul de la matrice de masse

L'énergie cinétique est égale à :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{v}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_z \dot{\theta}_z^2 dx = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [m] \{\dot{u}\} \quad (3.2.14)$$

En utilisant le champ de déplacements (3.2.5), il vient pour la matrice de masse :

$$[m] = [a_R]^T [m_R] [a_R] + [a_D]^T [m_D] [a_D] + [a_R]^T [m_{RD}] [a_D] + [a_D]^T [m_{DR}] [a_R] \quad (3.2.15a)$$

avec :

$$\begin{aligned} [m_R] &= \int_0^L \rho [N_R]^T \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} [N_R] dx \\ [m_D] &= \int_0^L \rho [N_D]^T \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} [N_D] dx \\ [m_{RD}] &= [m_{DR}]^T = \int_0^L \rho [N_R]^T \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} [N_D] dx \end{aligned} \quad (3.2.15b)$$

Calcul de $[k_D]$ à l'aide du théorème de Castigliano

Considérons le système isostatique (D) (figure 3.7) :

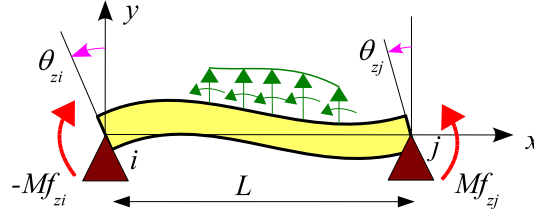


Figure 3.7 – Système isostatique (D)

En l'absence de charges réparties, les efforts résultants sont :

$$T_y(x) = \frac{1}{L}(Mf_{zi} - Mf_{zj}) \quad , \quad Mf_z(x) = Mf_{zi} \left(1 - \frac{x}{L}\right) + Mf_{zj} \frac{x}{L} \quad (3.2.16)$$

d'où :

$$\frac{\partial T_y}{\partial Mf_{zi}} = -\frac{\partial T_y}{\partial Mf_{zj}} = \frac{1}{L} \quad , \quad \frac{\partial Mf_z}{\partial Mf_{zi}} = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad , \quad \frac{\partial Mf_z}{\partial Mf_{zj}} = \frac{x}{L} \quad (3.2.17)$$

L'énergie de déformation complémentaire est égale à :

$$E_{\text{def}}^c = \int_0^L \frac{Mf_z^2(x)}{2 EI_z} dx + \int_0^L \frac{T_y^2(x)}{2 GAk_y} dx \quad (3.2.18)$$

En appliquant le deuxième théorème de Castigliano, on obtient les déplacements nodaux :

$$\theta_{zi,D} = \frac{\partial E_{\text{def}}^c}{\partial (-Mf_{zi})} \quad , \quad \theta_{zj,D} = \frac{\partial E_{\text{def}}^c}{\partial Mf_{zj}} \quad (3.2.19)$$

soit sous forme matricielle :

$$\{u_D\} = [c] \{f_{\text{nod},D}\} \quad (3.2.20)$$

avec

$$\{u_D\} = \begin{Bmatrix} \theta_{zi,D} \\ \theta_{zj,D} \end{Bmatrix} \quad , \quad [c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad \{f_{\text{nod},D}\} = \begin{Bmatrix} -Mf_{zi} \\ Mf_{zj} \end{Bmatrix} \quad (3.2.21)$$

où :

$$\begin{aligned} c_{11} &= \int_0^L \frac{1}{EI_z} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx + c_T \quad , \quad c_{22} = \int_0^L \frac{1}{EI_z} \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx + c_T \\ c_{12} = c_{21} &= - \int_0^L \frac{1}{EI_z} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} dx + c_T \quad , \quad c_T = \int_0^L \frac{1}{GAk_y L^2} dx \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

On en déduit par inversion :

$$\{f_{\text{nod},D}\} = [c]^{-1} \{u_D\} = [k_D] \{u_D\} \quad (3.2.23)$$

où :

$$[k_D] = [c]^{-1} = \begin{bmatrix} k_{D11} & k_{D12} \\ k_{D21} & k_{D22} \end{bmatrix}$$

avec

$$k_{D11} = \frac{c_{22}}{\Delta} \quad , \quad k_{D22} = \frac{c_{11}}{\Delta} \quad , \quad k_{D12} = k_{D21} = \frac{-c_{12}}{\Delta} \quad , \quad \Delta = c_{11} c_{22} - c_{12}^2$$

Remarques

- En utilisant la représentation paramétrique, les coefficients de la matrice de flexibilité s'écrivent :

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{L}{8E} \int_{-1}^1 \frac{(1-\xi)^2}{I_z} d\xi + c_T, & c_{22} &= \frac{L}{8E} \int_{-1}^1 \frac{(1+\xi)^2}{I_z} d\xi + c_T \\ c_{12} = c_{21} &= -\frac{L}{8E} \int_{-1}^1 \frac{1-\xi^2}{I_z} d\xi + c_T, & c_T &= \frac{1+\nu}{EL} \int_{-1}^1 \frac{1}{Ak_y} d\xi \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Dans la pratique, ces intégrales sont évaluées numériquement par la méthode de Gauss (page 14).

- Pour une poutre à section constante, on a :

$$[c] = \frac{L}{6EI_z} \begin{bmatrix} 2 + \frac{\phi_y}{2} & -1 + \frac{\phi_y}{2} \\ -1 + \frac{\phi_y}{2} & 2 + \frac{\phi_y}{2} \end{bmatrix}, \quad [k_D] = \frac{EI_z}{L(1+\phi_y)} \begin{bmatrix} 4 + \phi_y & 2 - \phi_y \\ 2 - \phi_y & 4 + \phi_y \end{bmatrix} \quad (3.2.25)$$

3.3 Programmes Maple

Les programmes suivants sont dans le fichier **timoshenko_xy.txt**.

3.3.1 tim_mat

```
# calcul de la matrice de rigidité et du vecteur force
# d'un élément de poutre à section constante

restart;with(linalg):

# charges

py:=x->pyi+(pyj-pyi)*x/L;
mz:=x->mzi+(mzj-mzi)*x/L;

# effort tranchant et moment fléchissant

Ty:=x->Tyi-int(py(s),s=0..x);
Mfz:=x->Mfzi-int(Ty(s),s=0..x)-int(mz(s),s=0..x);

# formules de Bresse

rotz:=x->rotzi+int(Mfz(s),s=0..x)/EIz;
v:=x->vi+rotzi*x+int(Mfz(s)*(x-s),s=0..x)/EIz
+int(Ty(s),s=0..x)*L*L*fy/12/EIz;

# calcul des efforts nodaux en fonction des déplacements nodaux

solve({rotzj=rotz(L),vj=v(L)},{Tyi,Mfzi}):assign(%):
Tyj:=Ty(L):Mfzj:=Mfz(L):
```

```
# matrice de rigidité

unod=[vi,rotzi,vj,rotzj]:
fnod=[-Tyi,-Mfzi,Tyj,Mfzj]:
k=jacobian(fnod,unod):
simplify(scalarmul(k,L^3*(1+fy)/EIz));

# vecteur force

fpy=jacobian(-fnod,[pyi,pyj]):
simplify(scalarmul(fpy,(1+fy)*120/L));
fmz=jacobian(-fnod,[mzi,mzj]):
simplify(scalarmul(fmz,(1+fy)*12));
```

3.3.2 tim_int

```
# calcul des fonctions d'interpolation et de leurs dérivées

restart:with(linalg):

# champ de déplacements

v:=a0+a1*x+a2*x^2+a3*x^3;
rotz:=diff(v,x)+c;

# calcul des coefficients en fonction des déplacements nodaux

eq1:=subs(x=0,v)=vi;
eq2:=subs(x=L,v)=vj;
eq3:=subs(x=0,rotz)=rotzi;
eq4:=subs(x=L,rotz)=rotzj;
eq5:=fy*L^2*diff(rotz,x$2)=12*c;
solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5},{a0,a1,a2,a3,c}):assign(%);

# fonctions d'interpolation

unod:=[vi,rotzi,vj,rotzj]:
Nv:=grad(v,unod):Nv:=simplify(Nv);
Nrotz:=simplify(grad(rotz,unod));
dNv:=simplify(map(diff,Nv,x));
dNrotz:=simplify(map(diff,Nrotz,x));
Bc:=simplify(matadd(dNv,Nrotz,1,-1));

# factorisation

Nv:=simplify(map(factor,Nv));
dNv:=simplify(map(factor,dNv));
Nrotz:=simplify(map(factor,Nrotz));
dNrotz:=simplify(map(factor,dNrotz));
```

3.3.3 tim_int_par

```
# fonctions d'interpolation sous forme paramétrique

restart:with(linalg):

# jacobien de la transformation

J:=L/2;

# champ de déplacements

v:=a0+a1*xi+a2*xi*xi+a3*xi^3;
rotz:=diff(v,xi)/J+c;
```

```

# calcul des coefficients en fonction des déplacements nodaux

eq1:=subs(xi=-1,v)=vi;
eq2:=subs(xi=1,v)=vj;
eq3:=subs(xi=-1,rotz)=rotzi;
eq4:=subs(xi=1,rotz)=rotzj;
eq5:=diff(rotz,xi$2)/J^2=12*c/fy/L^2;
solve(eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,a0,a1,a2,a3,c):assign(%):

# fonctions d'interpolation

unod:=[vi,rotzi,vj,rotzj]:
Nv:=simplify(grad(v,unod)):
Nrotz:=simplify(grad(rotz,unod)):
dv:=diff(v,xi)/J:
dNv:=simplify(grad(dv,unod)):
drotz:=diff(rotz,xi)/J:
dNrotz:=simplify(grad(drotz,unod)):
Bc:=simplify(matadd(dNv,Nrotz,1,-1));

# factorisation

Nv:=simplify(map(factor,Nv));
dNv:=simplify(map(factor,dNv));
Nrotz:=simplify(map(factor,Nrotz));
dNrotz:=simplify(map(factor,dNrotz));

simplify(scalarmul(Nv,(1+fy)*8));
simplify(scalarmul(dNv,(1+fy)*L*4));
simplify(scalarmul(Nrotz,(1+fy)*L*4));
simplify(scalarmul(dNrotz,(1+fy)*L^2));

```

3.3.4 tim_int_rem

```

# calcul des fonctions d'interpolation et de leurs dérivées (remarque)

restart:with(linalg):

# formules de Bresse

rotz:=rotzi+int(Mfzi-Tyi*s,s=0..x):
v:=vi+rotzi*x+int((Mfzi-Tyi*s)*(x-s),s=0..x)+Tyi*x*fy*L^2/12:

solve(rotzj=subs(x=L,rotz),vj=subs(x=L,v),Tyi,Mfzi):assign(%):

# fonctions d'interpolation en fonction de x

unod:=[vi,rotzi,vj,rotzj]:
unod:=[vi,rotzi,vj,rotzj]:
Nv:=simplify(grad(v,unod)):
Nrotz:=simplify(grad(rotz,unod)):

```

```

dv:=diff(v,x): dNv:=simplify(grad(dv,unod));
drotz:=diff(rotz,x): dNrotz:=simplify(grad(drotz,unod));
Bc:=simplify(matadd(dNv,Nrotz,1,-1));

```

3.3.5 tim_interpolation

```

# fonctions d'interpolation sous forme paramétrique

restart:with(linalg):

# représentation de la géométrie et jacobien

x:=(1+xi)*L/2:J:=L/2:

# fonctions d'interpolation

c:=1/8/(1+fy):
Nv:=[2*(xi*xi+xi-2-2*fy)*(-1+xi)*c,(-1+xi*xi)*(xi-1-fy)*L*c,
     -2*(-2-xi+xi*xi-2*fy)*(1+xi)*c,(-1+xi*xi)*(xi+1+fy)*L*c]:
c:=1/4/L/(1+fy):
dNv:=[(6*xi*xi-6-4*fy)*c,-L*(1-3*xi*xi+2*xi+2*fy*xi)*c,
      (-6*xi*xi+6+4*fy)*c,L*(-1+3*xi*xi+2*xi+2*fy*xi)*c]:
Nrotz:=[(-6+6*xi*xi)*c,L*(-1+xi)*(3*xi+1-2*fy)*c,
        (6-6*xi*xi)*c,(1+xi)*L*(-1+2*fy+3*xi)*c]:
c:=1/L^2/(1+fy):
dNrotz:=[6*xi*c,-L*(-3*xi+1+fy)*c,-6*xi*c,L*(1+fy+3*xi)*c]:
c:=fy/2/L/(1+fy):
Bc:=[-2*c,-L*c,2*c,-L*c]:

```

3.3.6 tim_int_mat

```

# calcul des matrices élémentaires d'un élément de poutre à section constante
# à l'aide des fonctions d'interpolation sous forme paramétrique

```

```

restart:with(linalg):

# représentation de la géométrie et jacobien

x:=(1+xi)*L/2:J:=L/2:

# fonctions d'interpolation

c:=1/8/(1+fy):
Nv:=[2*(xi*xi+xi-2-2*fy)*(-1+xi)*c,(-1+xi*xi)*(xi-1-fy)*L*c,
     -2*(-2-xi+xi*xi-2*fy)*(1+xi)*c,(-1+xi*xi)*(xi+1+fy)*L*c]:
c:=1/4/L/(1+fy):
dNv:=[(6*xi*xi-6-4*fy)*c,-L*(1-3*xi*xi+2*xi+2*fy*xi)*c,
      (-6*xi*xi+6+4*fy)*c,L*(-1+3*xi*xi+2*xi+2*fy*xi)*c]:
Nrotz:=[(-6+6*xi*xi)*c,L*(-1+xi)*(3*xi+1-2*fy)*c,
        (6-6*xi*xi)*c,(1+xi)*L*(-1+2*fy+3*xi)*c]:
c:=1/L^2/(1+fy):
dNrotz:=[6*xi*c,-L*(-3*xi+1+fy)*c,-6*xi*c,L*(1+fy+3*xi)*c]:

```

```

c:=fy/2/L/(1+fy):
Bc:=[-2*c,-L*c,2*c,-L*c]:

# matrice de rigidité

Bf:=dNrotz:
kf:=Matrix(4,4,(i,j)->int(Bf[i]*Bf[j]*EIz*J,xi=-1..1),shape=symmetric):
GAky:=12*EIz/L^2/fy:
kc:=Matrix(4,4,(i,j)->int(Bc[i]*Bc[j]*GAky*J,xi=-1..1),shape=symmetric):
k:=matadd(kf,kc):k:=simplify(k);
simplify(scalarmul(k,L^3*(1+fy)/EIz));

# matrice de masse

mv:=Matrix(4,4,(i,j)->int(Nv[i]*Nv[j]*rho*A*J,xi=-1..1),shape=symmetric):
mv:=simplify(mv);
simplify(scalarmul(mv,210*(1+fy)^2/rho/A/L));
mrotz:=Matrix(4,4,(i,j)->int(Nrotz[i]*Nrotz[j]*rho*Iz*J,xi=-1..1),shape=symmetric):
mrotz:=simplify(mrotz);
simplify(scalarmul(mrotz,30*(1+fy)^2*L/rho/Iz));

# force linéairement répartie sur toute la longueur de l'élément

py:=pyi+(pyj-pyi)*x/L:
fpy:=vector(4,i->int(Nv[i]*py*J,xi=-1..1)):
fpy:=jacobian(fpy,[pyi,pyj]):fpy:=simplify(fpy);
simplify(scalarmul(fpy,(1+fy)*120));

# couple linéairement réparti sur toute la longueur de l'élément

mz:=mzi+(mzj-mzi)*x/L:
fmz:=vector(4,i->int(Nrotz[i]*mz*J,xi=-1..1)):
fmz:=jacobian(fmz,[mzi,mzj]):fmz:=simplify(fmz);
simplify(scalarmul(fmz,(1+fy)*12));

```

3.3.7 tim_rig_def_tan

```

# partition du champ de déplacements en mouvement de corps rigide
# et mouvement de déformation pure : méthode de la tangente
# calcul des matrices élémentaires à l'aide des fonctions d'interpolation
# section droite constante

restart:with(linalg):

# matrice cinématique

h:=matrix([[ -1,-L],[0,-1]]): ht:=transpose(h):

# représentation de la géométrie et jacobien

```

```

x:=(1+xi)*L/2:J:=L/2:

# fonctions d'interpolation

NRv:=[1,(1+xi)*L/2]:
NRrotz:=[0,1]:
c:=1/8/(1+fy):
NDv:=[-2*(-2-xi+xi*xi-2*fy)*(1+xi)*c,(-1+xi*xi)*(xi+1+fy)*L*c]:
c:=1/4/L/(1+fy):
dNDv:=[(-6*xi*xi+6+4*fy)*c,L*(-1+3*xi*xi+2*xi+2*fy*xi)*c]:
NDrotz:=[(6-6*xi*xi)*c,(1+xi)*L*(-1+2*fy+3*xi)*c]:
c:=1/L^2/(1+fy):
dNDrotz:=[-6*xi*c,L*(1+fy+3*xi)*c]:
c:=fy/2/L/(1+fy):
Bc:=[2*c,-L*c]:

# matrice de rigidité

Bf:=dNDrotz:
kf:=Matrix(2,2,(i,j)->int(Bf[i]*Bf[j]*EIz*J,xi=-1..1),shape=symmetric):
GAky:=12*EIz/L^2/fy:
kc:=Matrix(2,2,(i,j)->int(Bc[i]*Bc[j]*GAky*J,xi=-1..1),shape=symmetric):
kD:=matadd(kf,kc):kD:=simplify(kD):
k12:=multiply(ht,kD): k11:=multiply(k12,h):
k:=blockmatrix(2,2,[k11,k12,transpose(k12),kD]):simplify(k):

# matrice de masse

mR:=Matrix(2,2,(i,j)->int(NRv[i]*NRv[j]*rho*A*J
+NRrotz[i]*NRrotz[j]*rho*Iz*J,xi=-1..1),shape=symmetric):
mR:=simplify(mR):
mD:=Matrix(2,2,(i,j)->int(NDv[i]*NDv[j]*rho*A*J
+NDrotz[i]*NDrotz[j]*rho*Iz*J,xi=-1..1),shape=symmetric):
mD:=simplify(mD):
mRD:=Matrix(2,2,(i,j)->int(NRv[i]*NDv[j]*rho*A*J
+NRrotz[i]*NDrotz[j]*rho*Iz*J,xi=-1..1),shape=symmetric):
mRD:=simplify(mRD):
mDR:=transpose(mRD):
m11:=evalm(mR+mRD*h+ht*mDR+ht*mD*h):
m12:=evalm(mRD+mD*h):
m:=blockmatrix(2,2,[m11,m12,transpose(m12),mD]):
m:=simplify(m):

# vecteur force

py:=pyi+(pyj-pyi)*x/L: mz:=mzi+(mzj-mzi)*x/L:
fR:=vector(2,i->int(NRv[i]*py*J+NRrotz[i]*mz*J,xi=-1..1)):
fD:=vector(2,i->int(NDv[i]*py*J+NDrotz[i]*mz*J,xi=-1..1)):
f1:=evalm(fR+ht*fD): f:=blockmatrix(2,1,[f1,fD]):simplify(f):
jacobian(f,[pyi,pyj,mzi,mzj]):

```

3.3.8 tim_rig_def_sec

```

# partition du champ de déplacements
# en mouvement de corps rigide et mouvement de déformation pure
# méthode de la sécante
# calcul des matrices élémentaires à l'aide des fonctions d'interpolation
# section droite constante

restart:with(linalg):

# matrices cinématiques

aR:=matrix([[1,0,0,0],[0,0,1,0]]):
aD:=matrix([[1/L,1,-1/L,0],[1/L,0,-1/L,1]]):

# représentation de la géométrie et jacobien

x:=(1+xi)*L/2:J:=L/2:

# fonctions d'interpolation

NRv:=[(1-xi)/2,(1+xi)/2]:
NRrotz:=[-1/l,1/L]:
c:=L*(xi*xi-1)/8/(1+fy):
NDv:=[(xi-1-fy)*c,(xi+1+fy)*c]:
c:=1/4/(1+fy):
dNDv:=[(3*xi*xi-2*xi-2*fy*xi-1)*c,(3*xi*xi+2*xi+2*fy*xi-1)*c]:
NDrotz:=[(xi-1)*(3*xi+1-2*fy)*c,(xi+1)*(3*xi-1+2*fy)*c]:
c:=1/L/(1+fy):
dNDrotz:=[(3*xi-1-fy)*c,(3*xi+1+fy)*c]:
c:=-fy/2/(1+fy):
Bc:=[c,c]:
# matrice de rigidité

Bf:=dNDrotz:
kf:=Matrix(2,2,(i,j)->int(Bf[i]*Bf[j]*EIz*J,xi=-1..1),shape=symmetric):
GAky:=12*EIz/L^2/fy:
kc:=Matrix(2,2,(i,j)->int(Bc[i]*Bc[j]*GAky*J,xi=-1..1),shape=symmetric):
kD:=matadd(kf,kc):kD:=simplify(kD):
k:=multiply(transpose(aD),kD,aD):simplify(k):

# matrice de masse

mR:=Matrix(2,2,(i,j)->int(NRv[i]*NRv[j]*rho*A*J
+NRrotz[i]*NRrotz[j]*rho*Iz*J,xi=-1..1),shape=symmetric):
mR:=simplify(mR):
mD:=Matrix(2,2,(i,j)->int(NDv[i]*NDv[j]*rho*A*J
+NDrotz[i]*NDrotz[j]*rho*Iz*J,xi=-1..1),shape=symmetric):
mD:=simplify(mD):
mRD:=Matrix(2,2,(i,j)->int(NRv[i]*NDv[j]*rho*A*J
+NRrotz[i]*NDrotz[j]*rho*Iz*J,xi=-1..1),shape=symmetric):

```



```

mRD:=simplify(mRD);
mDR:=transpose(mRD):
m1:=multiply(transpose(aR),mR,aR):
m2:=multiply(transpose(aD),mD,aD):
m3:=multiply(transpose(aR),mRD,aD):
m4:=transpose(m3):
m:=evalm(m1+m2+m3+m4):m:=simplify(m);

# vecteur force

py:=pyi+(pyj-pyi)*x/L:
mz:=mzi+(mzj-mzi)*x/L:
fR:=vector(2,i->int(NRv[i]*py*J+NRrotz[i]*mz*J,xi=-1..1)):
fD:=vector(2,i->int(NDv[i]*py*J+NDrotz[i]*mz*J,xi=-1..1)):
f:=evalm(transpose(aR)*fR+transpose(aD)*fD):f:=simplify(f);

# calcul de kD à l'aide du théorème de Castigliano

cT:=int(1/GAky/L*J,xi=-1..1);
c11:=int((1-x/L)^2/EIz*J,xi=-1..1)+cT;
c22:=int((x/L)^2/EIz*J,xi=-1..1)+cT;
c12:=int((1-x/L)*x/L/EIz*J,xi=-1..1)-cT;
c:=matrix([[c11,c12],[c12,c22]]):
kD:=inverse(c);

```


Bibliographie

- [1] J. H. ARGYRIS et H.-P. MLEJNEK – *Die methode der finiten elemente, Band I. Verschiebungsmethode in der statik*, Vieweg, 1986.
- [2] — , *Dynamics of structures*, North Holland, 1991.
- [3] J. H. ARGYRIS et D. SCHARPF – « Some general considerations on the natural mode technique. Part I, Small displacements, Part II, Large displacements », *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society* **73** (1969), p. 218–226, 361–368.
- [4] J.-F. AUBOUIN – *Calcul des structures et informatique*, Eyrolles, 1983.
- [5] J.-L. BATOZ et G. DHATT – *Modélisation des structures par éléments finis, Volume 1. Solides élastiques*, Hermès, 1990.
- [6] — , *Modélisation des structures par éléments finis, Volume 2. Poutres et plaques*, Hermès, 1990.
- [7] A. BAZERGUI, T. BUI-QUOC, A. BIRON, G. MCINTYRE et C. LABERGE – *Résistance des matériaux*, 3 éd., Éditions de l'École Polytechnique de Montréal, 2002.
- [8] L. CHEVALIER – *Mécanique des systèmes et des milieux déformables. Cours, exercices et problèmes corrigés*, Ellipses, 2004.
- [9] R. D. COOK, D. S. MALKUS et M. E. PLESHA – *Concepts and applications of finite element analysis*, 3 éd., Wiley, 1989.
- [10] J. COURBON – *Résistance des matériaux, Tome 1*, 2 éd., Dunod, 1964.
- [11] — , *Résistance des matériaux, Tome 2*, Dunod, 1965.
- [12] — , *Éléments de résistance des matériaux*, Dunod, 1970.
- [13] G. COWPER – « The shear coefficient in Timoshenko's beam theory », *Journal of Applied Mechanics, ASME* **33** (1966), p. 335–340.
- [14] G. DHATT et G. TOUZOT – *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine, 1984.
- [15] G. DHATT, G. TOUZOT et E. LEFRANÇOIS – *Méthode des éléments finis*, Hermès, 2005.
- [16] F. FREY – *Traité du génie civil, Volume 2. Analyse des structures et milieux continus. Mécanique des structures*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2000.
- [17] F. FREY et J. JIROUSEK – *Traité du génie civil, Volume 6. Méthode des éléments finis*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2001.
- [18] Z. FRIEDMAN et J. KOSMATKA – « An improved two-node Timoshenko beam finite element », *Computers & Structures* **47** (1993), no. 3, p. 473–481.
- [19] R. H. GALLAGHER – *Introduction aux éléments finis*, Pluralis, 1976.
- [20] D. GAY et J. GAMBELIN – *Une approche simple du calcul des structures par la méthode des éléments finis*, Hermès, 1989.
- [21] — , *Dimensionnement des structures. Une introduction*, Hermès, 1999.
- [22] M. GÉRADIN et D. RIXEN – *Théorie des vibrations. Application à la dynamique des structures*, 2 éd., Masson, 1996.

- [23] Y. GOURINAT – *Introduction à la dynamique des structures. Éléments de Mécanique des Solides pour l'ingénieur*, Cépaduès, 2001.
- [24] F. GRUTTMAN, R. SAUER et W. WAGNER – « Shear stresses in prismatic beams with arbitrary cross-sections », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **45** (1999), p. 865–889.
- [25] J. HUTCHISON – « Shear coefficients for Timoshenko beam theory », *Journal of Applied Mechanics, ASME* **68** (2001), p. 87–92.
- [26] J.-F. IMBERT – *Analyse des structures par éléments finis*, 3 éd., Cépaduès, 1995.
- [27] T. KANEKO – « On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams », *J. Phys. D : Appl. Phys.* **8** (1975), p. 1927–1936.
- [28] S. LAROZE – *Mécanique des structures, Tome 2. Théorie des poutres*, 2 éd., Eyrolles/Masson, 1988.
- [29] W. MASON et L. HERMANN – « Elastic shear analysis of general prismatic beams », *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE* **91** (1968), p. 965–982.
- [30] M. PETYT – *Introduction to finite element vibration analysis*, Cambridge University Press, 1990.
- [31] W. D. PILKEY – *Analysis and Design of Elastic Beams. Computational Methods*, Wiley, 2002.
- [32] A. PORTELA et A. CHARAFI – *Finite elements using Maple. A Symbolic Programming Approach*, Springer, 2002.
- [33] J. S. PRZEMIENIECKI – *Theory of matrix structural analysis*, Dover, 1986.
- [34] J. SALENÇON – *Mécanique des milieux continus, Tome 1. Concepts généraux*, Éditions de l'École polytechnique, 2001.
- [35] — , *Mécanique des milieux continus, Tome 2. Thermoélasticité*, Éditions de l'École polytechnique, 2001.
- [36] — , *Mécanique des milieux continus, Tome 3. Milieux curvilignes*, Éditions de l'École polytechnique, 2001.
- [37] U. SCHRAMM, L. KITIS, W. KANG et W. PILKEY – « On the shear deformation coefficient in beam theory », *Finite Elements in Analysis and Design* **16** (1994), p. 141–162.
- [38] K. SURANA – « Isoparametric elements for cross-sectional properties and stress analysis of beams », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **14** (1979), p. 475–497.
- [39] S. P. TIMOSHENKO – *Résistance des matériaux, Tome 1. Théorie élémentaire et problèmes*, Dunod, 1968.
- [40] W. WEAVER et J. M. GERE – *Matrix analysis of framed structures*, 3 éd., Van Nostrand Reinhold, 1990.
- [41] C. WIELGOZ – *Cours et exercices de résistance des matériaux : élasticité, plasticité, éléments finis*, Ellipses, 1999.
- [42] W. WUNDERLICH et W. D. PILKEY – *Mechanics of structures. Variational and computational methods*, 2 éd., CRC PRESS, 2003.