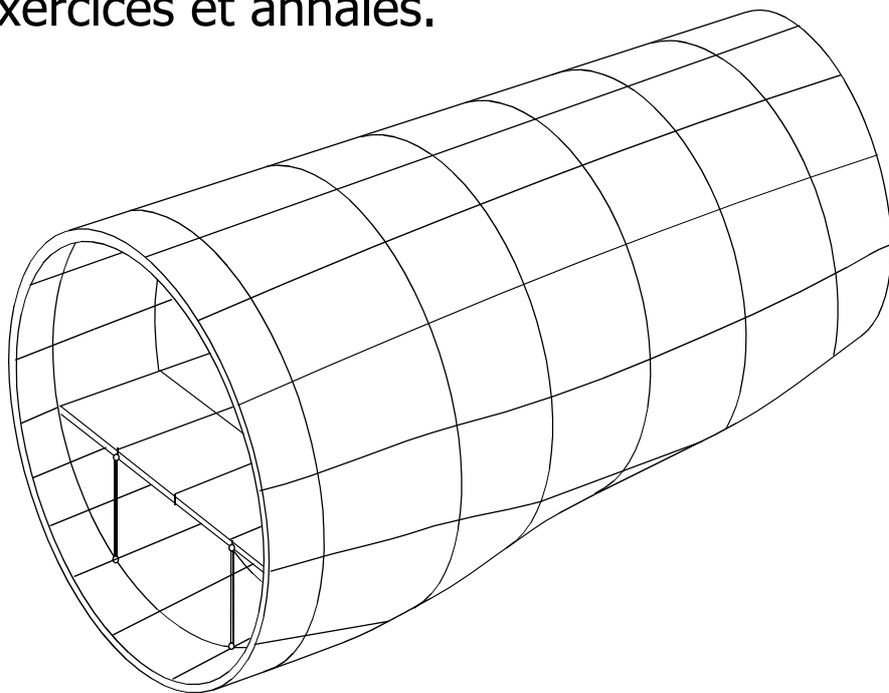


Méthode des Eléments Finis appliquée au calcul des Structures.

Michel SUDRE

http://www.mecaero.ups-tlse.fr/M1_CCS.html

- Introduction du Cours.
- Cas d'étude.
- Exercices et annales.



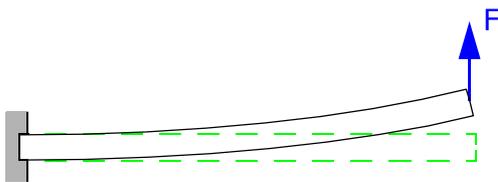
Jan 2013

Chap1: Présentation.

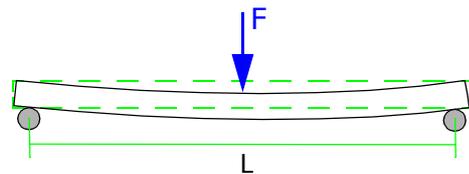
1 Méthode de Ritz

1.1 Principe des travaux virtuels

○ Une fonction arbitraire, choisie pour représenter la déformée, qui est continue sur le domaine et qui respecte les conditions limites cinématiques est dite "cinématiquement admissible". Deux exemples sont donnés ci-dessous:



$$(1) \quad v(x) = a.x^2 + b.x^3$$



$$(2) \quad v(x) = a. \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

○ Si on impose un champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible à un corps élastique à l'équilibre sous l'action de forces extérieures, l'accroissement de l'énergie élastique W est égal au travail des forces extérieures dans ce déplacement.

$$\delta W = \sum F_i \cdot \delta u_i$$

Si on admet que les forces F_i dérivent d'un potentiel U , alors le résultat précédent peut s'exprimer comme une condition d'extémum:

$$F_i = - \frac{\delta U}{\delta u_i} \quad , \quad \sum F_i \cdot \delta u_i = - \delta U \quad \text{d'où} \quad \delta (W+U) = 0$$

U est l'opposé de \mathcal{T} , travail des forces F_i calculé dans le déplacement virtuel (*en supposant les forces F_i constantes*).

$W-\mathcal{T}$ est l'énergie potentielle totale (EPT). On montre que, pour un corps en équilibre *stable*, cet extrémum de l'énergie potentielle totale est un *minimum absolu*.

○ On énonce le principe du minimum de l'énergie potentielle totale ainsi:

Parmi tous les champs cinématiquement admissibles, celui qui rend minimale l'énergie potentielle totale correspond à la solution.

1.2 Méthode de Ritz

○ La méthode de Ritz est une méthode de résolution des problèmes d'élasticité basée sur l'application de ce principe.

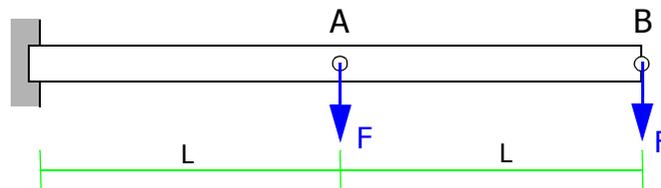
Elle consiste à exprimer le champ de déplacement dans une base de N fonctions φ_i cinématiquement admissibles:

$$\sum_1^N (a_i \cdot \varphi_i)$$

La meilleure approximation est celle qui rend extrémale l'énergie potentielle totale. Elle est donc obtenue par les N relations:

$$\frac{\delta(\text{EPT})}{\delta a_i} = 0 \quad i=1..N$$

La méthode peut être illustrée par le problème de flexion suivant:



Utilisons la méthode de Ritz pour calculer les déplacements des points A et B.

Choisissons de représenter la déformée sur le domaine $[0,2L]$ par:

$$v(x) = a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x^3$$

et exprimons l'énergie potentielle totale $W - \mathcal{T}$.

$$\square W \text{ est l'énergie de flexion: } \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2L} \frac{M_z^2}{EI_z} dx = \frac{1}{2EI_z} \cdot \int_0^{2L} \left(EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx$$

en remplaçant $v(x)$ par $a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x^3$, on obtient: $W = 4EI_z L \cdot (a_1^2 + 12a_2^2 L^2 + 6a_1 a_2 L)$

$$\square \mathcal{T} \text{ est le travail des 2 efforts extérieurs: } -F \cdot v(L) - F \cdot v(2L)$$

en remplaçant $v(x)$ par $a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x^3$, on obtient: $\mathcal{T} = -FL^2 \cdot (5a_1 + 9a_2 L)$

Il reste à minimiser $W - \mathcal{T}$ par rapport aux 2 coefficients a_1 et a_2 pour obtenir la 'meilleure solution' compatible avec la fonction $v(x)$ choisie,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a_1} (W-\mathcal{U}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_2} (W-\mathcal{U}) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{11FL}{8EI_z} \\ a_2 = \frac{F}{4EI_z} \end{cases}$$

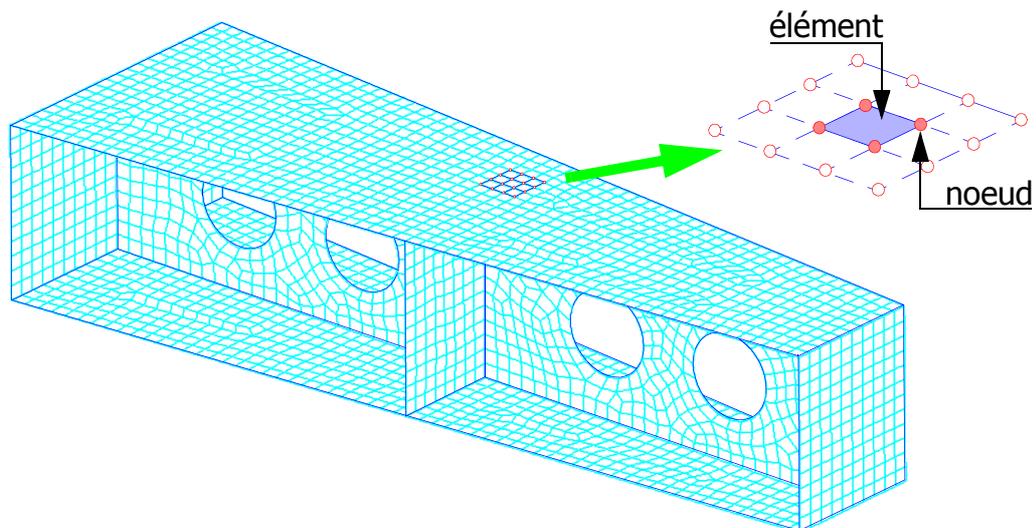
Les déplacements des points A et B sont donc :

$$\begin{cases} a_1 \cdot L^2 + a_2 \cdot L^3 = -\frac{9FL^3}{8EI_z} \\ a_1 \cdot (2L)^2 + a_2 \cdot (2L)^3 = -\frac{7FL^3}{2EI_z} \end{cases}$$

2 Méthode des Éléments Finis

2.1 Principe

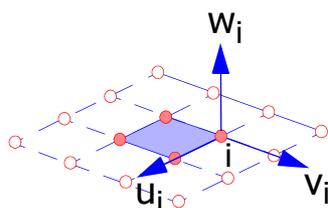
○ La **Méthode des Éléments Finis** consiste à découper la structure en éléments de forme simple et à choisir une approximation du déplacement sur chaque subdivision. C'est une méthode de Ritz 'par morceaux' qui s'adapte aux géométries les plus complexes.



Les subdivisions sont les '**éléments**' et les connexions entre éléments sont les '**noeuds**'.

Il est utile que les inconnues soient des paramètres physiques. C'est pourquoi on choisit les composantes de déplacements des noeuds (**déplacements nodaux**).

Par exemple: (u_i, v_i, w_i) pour le noeud i .



(u_i, v_i, w_i) sont les **déplacements nodaux**.
 $i=1 \dots n$

Les N déplacements nodaux sont rangés dans un vecteur: $\{q\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix}$

○ L'énergie potentielle totale ($W-\mathcal{T}$) est ensuite calculée en fonction des déplacements nodaux.

Il existe 3 grandes familles d'éléments. Les éléments uni-dimensionnels, bi-dimensionnels, tri-dimensionnels.

L'énergie élastique W est calculée en fonction des déplacements nodaux:

En 1D, grâce aux relations de la théorie des poutres.

Un modèle uni-dimensionnel s'appuie donc sur les hypothèses restrictives de la rdm.

En 2D, en utilisant, selon les cas, les théories des membranes, des plaques et des coques.

Un modèle bi-dimensionnel s'appuie sur les hypothèses restrictives de ces différentes théories.

En 3D, en exploitant les relations de l'élasticité sans aucune hypothèse restrictive.

Le travail des efforts extérieurs \mathcal{T} s'exprime simplement en fonction des déplacements des noeuds auxquels sont appliqués ces efforts.

○ La solution recherchée correspond à un minimum de l'énergie potentielle totale.

Elle est obtenue par les conditions:

$$\frac{\delta(\text{EPT})}{\delta q_i} = 0 \quad i=1..N$$

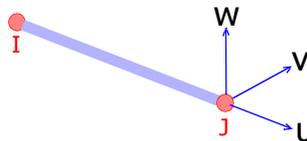
Si le comportement est linéaire, on obtient un système du type:

matrice de rigidité	→	$[K] \cdot \{q\} = \{F\}$	←	efforts appliqués
		↑		
		déplacements nodaux		

2.2 Bibliothèque d'éléments

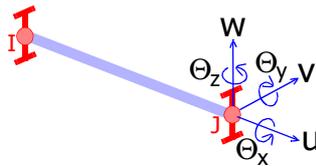
Dans le tableau qui suit, sont présentés les types d'éléments les plus courants qui constituent la bibliothèque de base de tout programme d'éléments finis.

○ **ROD**: Il schématise un composant [IJ] d'une structure qui travaille uniquement en traction-compression. Dans cet élément, il est supposé que seule la contrainte normale σ_x est différente de zéro et qu'elle est constante sur la section droite.



C'est généralement un élément à 2 noeuds. Chaque noeud admet 3 inconnues ou degrés de liberté (u, v, w).

○ **BEAM**: C'est un élément unidimensionnel [IJ] qui reprend toutes les hypothèses des poutres longues. Il intègre les énergies d'effort normal, d'effort tranchant, de flexion et de torsion.



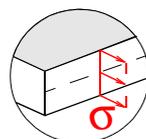
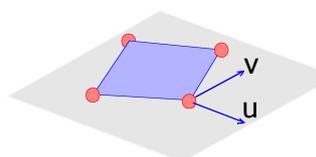
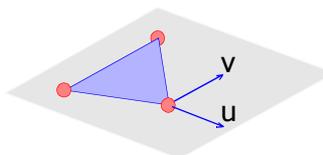
C'est un élément à 2 noeuds qui comporte 6 inconnues (DDL) par noeud : les 3 translations (u, v, w) et les 3 rotations ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$) des sections droites extrêmes.

○ **MEMBRANE**: C'est un élément bidimensionnel dans lequel on suppose que les contraintes sont uniformes dans l'épaisseur et que la contrainte σ_z est nulle (z est l'axe perpendiculaire au plan de l'élément).

Il est utilisé pour modéliser :

- des structures minces travaillant en membrane c'est-à-dire sans rigidité de flexion

- des structures plus épaisses quand on peut considérer que les composantes du tenseur des contraintes ne varient pas dans l'épaisseur.

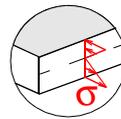
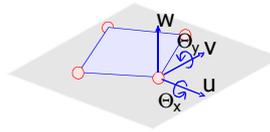
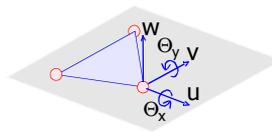


C'est généralement un élément triangulaire à 3 noeuds ou quadrangulaire à 4 noeuds qui comporte 2 inconnues par noeud : les 2 composantes du vecteur déplacement (u, v) dans le plan.

○ **SHELL**: Cet élément bidimensionnel permet d'analyser des plaques ou des coques soumises à de la flexion et repose sur les hypothèses suivantes:

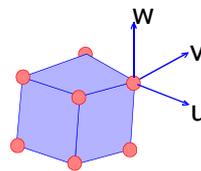
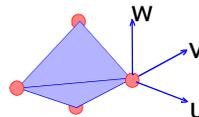
- la contrainte normale σ_z est négligeable,
- l'interaction entre les phénomènes de membrane et de flexion est négligée,
- les contraintes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ varient linéairement suivant l'épaisseur.

Il existe deux grandes catégories d'éléments suivant que l'on prend en compte ou pas les effets de cisaillement transverse.



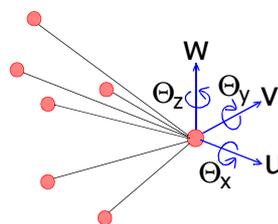
Les éléments classiques sont triangulaires à 3 noeuds ou quadrangulaires à 4 noeuds et comportent 5 inconnues (DDL) par noeud : les 3 translations (u, v, w) et les 2 rotations (θ_x, θ_y). (z est l'axe perpendiculaire au plan de l'élément)

○ **SOLID**: Dans cet élément volumique, aucune hypothèse restrictive n'est posée. Toutes les composantes de contrainte sont calculées.



Les éléments classiques sont tétraédriques à 4 noeuds ou hexaédriques à 8 noeuds et comportent 3 inconnues (DDL) par noeud : les 3 translations (u, v, w)

○ **RIGID BODY ELEMENT**: Cet élément est utilisé pour les composants de la structure qui ne se déforment pas et subissent un déplacement de corps solide. Dans ce cas, les déplacements des noeuds vérifient des relations de type 'torseur des petits déplacements'.

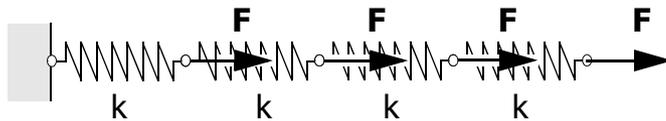


Les déplacements de tous les noeuds sont asservis au déplacement d'un noeud choisi arbitrairement et désigné comme 'maître'.

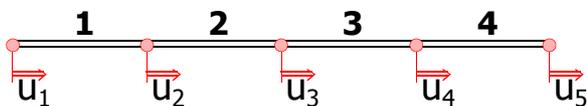
3 Exemple d'application

exemple

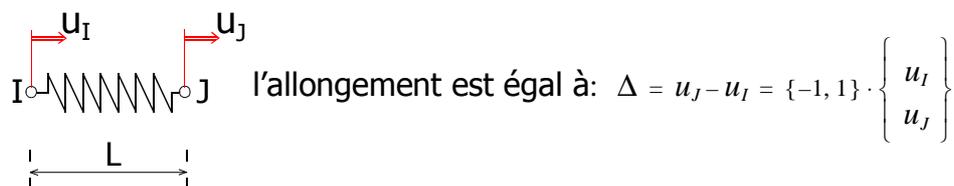
On considère un assemblage de 4 ressorts de raideur k liés au bâti et soumis à 4 efforts d'intensité F .



Le modèle fait intervenir 4 éléments, 5 noeuds et 5 degrés de liberté.



3.1 élément ressort



Donc l'énergie élastique de l'élément (i) vaut: $w_i = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta^2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{Bmatrix} u_I & u_J \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_I \\ u_J \end{Bmatrix}$

3.2 assemblage

L'énergie élastique totale s'obtient par addition des contributions de chaque éléments.

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = \frac{1}{2} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix}$$

3.3 énergie potentielle totale

Si X_1 est l'action de liaison exercée au noeud 1:

$$EPT = W - \left\{ \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} X_1 \\ F \\ F \\ F \\ F \end{matrix} \right\}$$

3.4 minimisation

La minimisation de l'énergie potentielle totale conduit à l'écriture du système:

$$\begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ F \\ F \\ F \\ F \end{Bmatrix}$$

Ce système ne peut être résolu car il n'existe pas de solution unique tant qu'un déplacement d'ensemble de la structure reste possible. La matrice $[K]$ obtenue par assemblage est singulière.

3.5 conditions limites

Il reste à imposer que $u_1=0$ en modifiant le système précédent.

C'est la phase dite de 'pénalisation' qui consiste à modifier la ligne et la colonne relatives à u_1 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & -k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ F \\ F \\ F \end{Bmatrix}$$

3.6 résolution

La résolution peut s'effectuer et conduit à:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \frac{F}{k} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

3.7 calcul de l'action de liaison

Il suffit de reprendre la première ligne du système avant sa modification.

Les déplacements étant connus, il vient:

$$X_1 = \left\{ \begin{array}{ccccc} k & -k & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \cdot \frac{F}{k} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \end{array} \right\} = -4F$$

3.8 calcul des efforts intérieurs

L'effort Normal dans chaque ressort peut être calculé par:

$$N_i = k\Delta_i = k \cdot (u_J - u_I) = \{-k, k\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} u_I \\ u_J \end{array} \right\}$$

On trouve: $N_1 = k\Delta_1 = 4F$ $N_2 = k\Delta_2 = 3F$ $N_3 = k\Delta_3 = 2F$ $N_4 = k\Delta_4 = F$

Cas d'étude.

1 Eléments unidimensionnels

1.1 Cas d'étude N°1

L'étude N°1, *figure 1*, concerne une structure réalisée à partir de 2 tubes [AB] et [AC] de même section droite, rotulés entre eux et avec le bâti. Un effort F est appliqué en A.

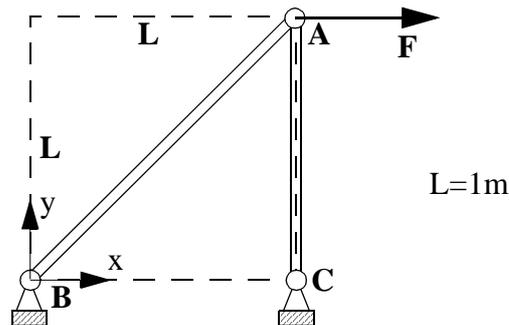


figure 1
Treillis

1.1.1 modélisation

Puisque les 2 composants [AB] et [AC] sont bi-articulés ils ne peuvent travailler qu'en traction-compression. Il est donc possible d'utiliser des éléments 'barre'.

1.1.2 maillage

Le maillage minimal consiste à positionner un noeud sur chacune des 3 articulations et à utiliser 2 éléments barre comme il est indiqué sur la *figure 2*:

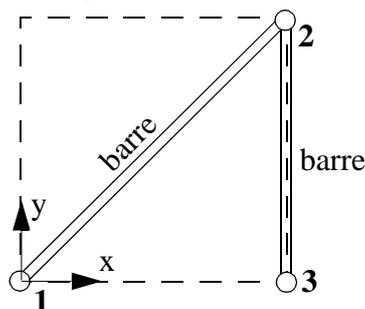


figure 2
Modélisation du treillis

1.1.3 caractérisation des éléments

La détermination de l'énergie élastique dans l'élément nécessite de connaître uniquement :

- le matériau par son module d'Young ($E = 210 \text{ GPa}$),
- l'aire S de la section droite ($S = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$).

1.1.4 conditions limites

L'élément barre possède 3 degrés de liberté par noeud : u, v, w (les rotations n'interviennent pas

dans le calcul de l'énergie d'effort normal).

Il faut indiquer au programme que les noeuds 1 et 3 sont fixes.

$$u(1)=u(3)=0$$

$$v(1)=v(3)=0$$

$$w(1)=w(3)=0$$

Ces conditions posées, le treillis conserve une possibilité de rotation autour de BC. Si ce déplacement d'ensemble n'est pas interdit, il est impossible de résoudre le système linéaire portant sur les déplacements des noeuds car il n'y a pas unicité de la solution. Il est donc impératif d'interdire ce déplacement ce qui peut être fait en bloquant le déplacement du noeud 2 dans la direction z ($w(2)=0$). Certains logiciels réalisent ce blocage de manière automatique.

L'effort F est entré sous la forme d'une force ponctuelle $F = 1000$ N appliquée au noeud 2.

1.1.5 résultats et remarques

Les résultats obtenus sont identiques à ceux fournis par une analyse RdM puisque dans ces éléments, aucune hypothèse n'est réalisée sur le déplacement.

On obtient pour le noeud 2 :

$$u(2) = 36.46 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

$$v(2) = 9.524 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

A partir du calcul de ces déplacements le problème est entièrement résolu et le logiciel peut fournir:

-la déformation relative dans la direction de la barre,

-la contrainte normale,

-l'effort normal dans la barre : N.

$$\begin{array}{ll} \text{On trouve :} & \sigma_{AB} = +2.83 \text{ MPa} & N_{AB} = + 1414 \text{ N} \\ & \sigma_{AC} = -2 \text{ MPa} & N_{AC} = - 1000 \text{ N} \end{array}$$

Attention: si on place un noeud supplémentaire sur la travée AB, la précision ne changera pas mais un problème de résolution apparaîtra puisqu'une mobilité supplémentaire sera créée (figure 3). Cette mobilité devra être interdite par des conditions aux limites appropriées.

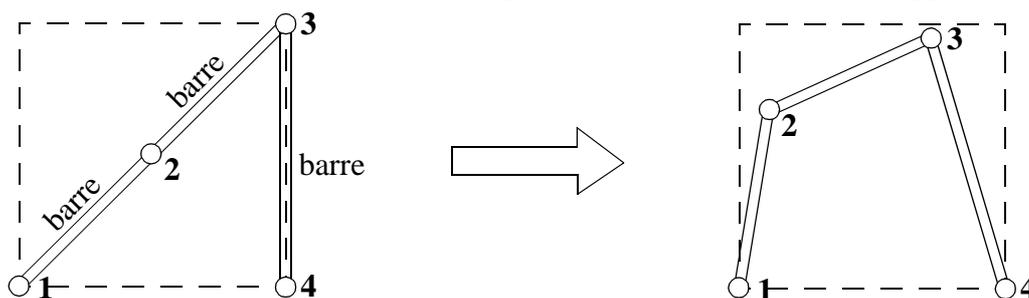


figure 3
Mouvement d'ensemble

1.2 Cas d'étude N°2

Dans l'étude N°2, *figure 4*, la structure proposée est la même que précédemment mais l'effort est appliqué au milieu de [AC].

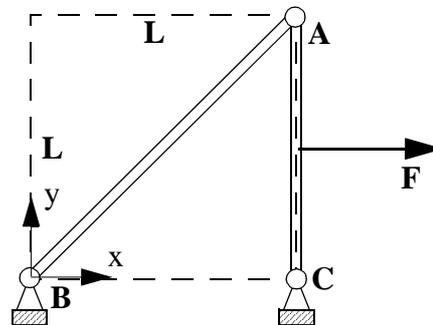


figure 4
Structure rotulée

1.2.1 modélisation

Du fait des liaisons, le tube [AB] n'est soumis qu'à des efforts appliqués à ses extrémités et il travaille donc uniquement en traction ou compression. Par contre, du fait de la position de l'effort F, le tube [AC] supporte des efforts de compression mais aussi des efforts de flexion. Si [AB] peut toujours être modélisé par une barre, [AC] doit être modélisé en poutre.

1.2.2 maillage

Le maillage minimal consiste à placer un noeud sur chaque articulation ainsi qu'un noeud au niveau du point d'application de l'effort (*figure 5*). Dans ce cas, il faut donc utiliser un élément barre pour modéliser [AB] et deux éléments poutre pour [AC].

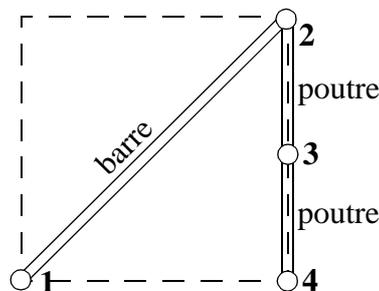


figure 5
Modélisation

1.2.3 caractérisation des éléments

Pour caractériser l'élément barre, il faut comme précédemment indiquer :

- le module d'Young $E = 210 \text{ GPa}$,
- l'aire de la section $S = 5 \text{ cm}^2$.

Pour l'élément poutre il est nécessaire de connaître en plus de E et S :

- pour le matériau : le coefficient de Poisson ν ou le module de cisaillement $G = E / 2(1 + \nu)$,
- pour caractériser la section :
 - la position des axes principaux de la section. En effet, si les deux noeuds définissent

la direction de la ligne moyenne (x), il reste à indiquer le calage angulaire de la section droite perpendiculairement à cette ligne moyenne. Ceci est généralement réalisé par l'indication d'un vecteur V appartenant à un plan principal (*figure 6*).

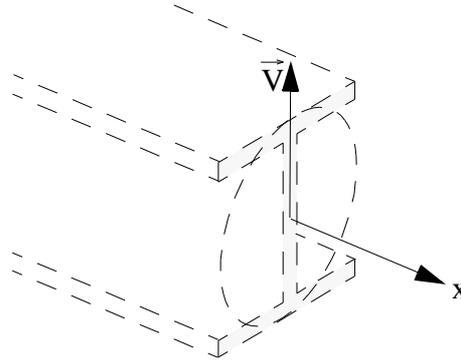


figure 6

Section droite d'une poutre / axes principaux

-les coefficients de section réduite qui permettent de calculer l'énergie d'effort tranchant. Si ces coefficients ne sont pas connus, on peut les poser égaux à 1 ce qui revient à supposer que la contrainte de cisaillement est répartie uniformément dans la section droite. L'erreur commise est faible si la déformée d'effort tranchant est négligeable ce qui est souvent le cas.

-les moments quadratiques associés aux axes principaux

-le coefficient J de rigidité en torsion de la section. Rappelons que J vaut le moment polaire s'il s'agit d'une section circulaire et uniquement dans ce cas.

Si la torsion n'intervient pas, il convient d'entrer une valeur fictive mais réaliste pour éviter des problèmes numériques (de l'ordre du moment quadratique par exemple).

Remarque: il est supposé généralement que le centre de torsion, le centre de gravité, le centre élastique et le noeud sont confondus. Si ce n'est pas le cas pour la section envisagée il faut soit utiliser un élément de poutre autorisant cette différenciation, soit décomposer la poutre en éléments de plaque, de coque ou de volume.

données :

$$L = 1 \text{ m}$$

$$S = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$I_z = 1 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.3$$

Les valeurs données à J et à I_y n'affectent pas le résultat dans ce cas puisque les composantes du moment de flexion (M_y) et du moment de torsion (M_t) sont nulles. Pour ne pas créer de problèmes numériques il est souhaitable de donner à ces coefficients des valeurs réalistes. On peut par exemple leur donner la même valeur que I_z .

1.2.4 conditions limites

L'élément de poutre standard possède 6 degrés de liberté par noeud : $u, v, w, \Theta_x, \Theta_y, \Theta_z$.

Compte tenu des liaisons avec le bâti, il faut imposer :

$$u(1)=u(4)=0$$

$$v(1)=v(4)=0$$

$$w(1)=w(4)=0$$

Comme dans l'exemple précédent la structure peut tourner librement autour de BC. Cette rotation peut être éliminée de plusieurs façons et par exemple en posant $\Theta_x(4)=0$. Il est aussi possible, comme précédemment, de poser $w(2)=0$.

D'autre part, la poutre AC peut tourner librement autour de son axe. Or, si un mouvement de solide reste possible pour l'ensemble ou une partie de la structure, la matrice de rigidité $[K]$ n'est pas inversible et le système linéaire sur les déplacements est sans solution. Il faut interdire ce mouvement en posant par exemple : $\Theta_y(4)=0$.

L'effort F est entré sous la forme d'une force ponctuelle $F = 1000 \text{ N}$ appliquée au noeud 3.

1.2.5 résultats et remarques

Les résultats en déplacement obtenus au noeud 3 sont : $u(3) = 9.94 \text{ mm}$

$$v(3) = -2.36 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Ils sont identiques à la solution RdM puisqu'aucune hypothèse sur les déplacements n'a été faite dans ces éléments. Le logiciel peut fournir également:

-les éléments de réduction (effort normal, efforts tranchants, moment de torsion et moments de flexion).

-la contrainte due à l'effort normal seul : $\sigma_x = N/S$ si le programme ne possède pas d'information sur les dimensions de la section.

-la contrainte due à l'effort normal et à la flexion: $\sigma_x = N/S - (M_z/I_z).y$ si le programme connaît les dimensions de la section.

Les autres contraintes ne peuvent pas être déterminées car leur calcul nécessite une connaissance plus complète de la section

Les résultats obtenus sont donnés *figure 7* :

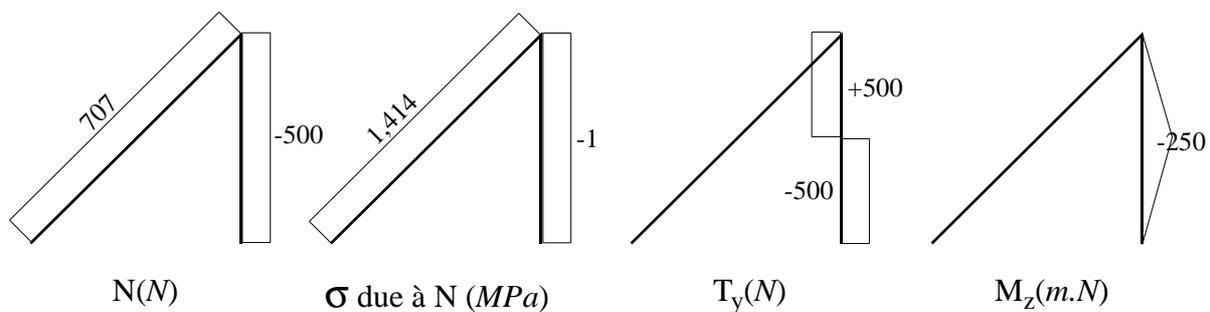


figure 7

Contraintes et éléments de réduction

Si la poutre est maillée plus finement le résultat sera bien évidemment inchangé puisque la solution obtenue précédemment est la solution exacte au sens de la RdM.

Remarque : Le maillage de l'élément AB par une poutre amène à une modélisation incorrecte puisqu'elle élimine la liaison pivot au point A. (Lorsque deux éléments ont un noeud en commun tous les degrés de libertés en ce noeud sont communs). Il est cependant généralement possible, après avoir modélisé tous les éléments par des poutres, d'imposer une liaison rotule en A en indiquant explicitement qu'en ce noeud seuls les degrés de liberté de translation doivent être mis en commun. Dans ce cas la modélisation est plus complexe mais redevient correcte.

1.3 Cas d'étude N°3

Dans l'étude N°3, *figure 8*, envisageons un régllet en acier encastré en O et sollicité par son propre poids.

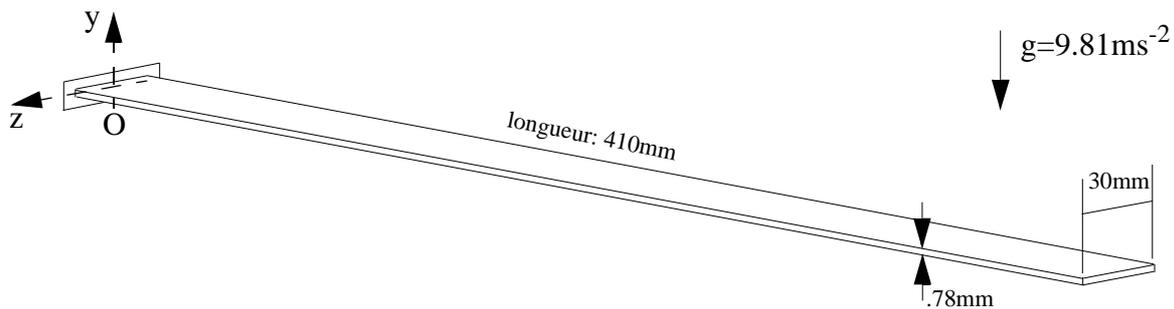


figure 8
Poutre encastrée

1.3.1 modélisation

Du fait du chargement réparti, le régllet travaille en flexion et à l'effort tranchant. Il doit être modélisé en poutre.

Rappelons que le champ de déplacement utilisé pour ce type d'élément est un polynôme de $^{\circ}3$ alors que la solution RdM de ce problème est un polynôme de $^{\circ}4$. Il n'y a donc plus identité des solutions MEF et RdM.

C'est pourquoi nous allons envisager différentes densités de maillage pour mesurer la précision de notre calcul par rapport à cette solution RdM.

1.3.2 maillage

La ligne OA est découpée en N éléments poutre I-J de section rectangulaire.

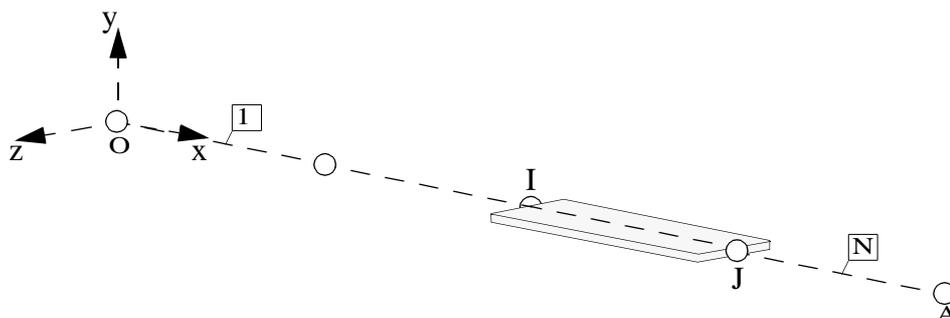


figure 9
Maillage du régllet

Plusieurs calculs sont exécutés avec différentes densités de maillage: $N=1, 2, 3, 4, 5, 10$.

1.3.3 caractérisation des éléments

Il est nécessaire de connaître:

- le matériau :

- de module élastique E,
- de coefficient de Poisson ν (ou de module de cisaillement $G=E/2(1+\nu)$),
- de masse volumique: ρ ,

- les caractéristiques de la section :
 - aire de la section,
 - position des axes principaux de la section,
 - coefficient de cisaillement k_y ,
 - moment quadratique I_z .

données :

$L = 410 \text{ mm}$
 $S = 23.4 \text{ mm}^2$
 $I_z = 1.18638 \text{ mm}^4$
 $k_y = .8333$
 $E = 210\,000 \text{ MPa}$
 $\nu = 0.3$
 $\rho = 7.8 \cdot 10^{-6} \text{ Kg.mm}^{-3}$

La plupart des programmes possèdent une bibliothèque de sections. Dans ce cas, seuls les paramètres de la section sont à entrer, le programme se chargeant du calcul de tous les coefficients. A titre d'exemple, voici la fenêtre obtenue dans le logiciel Patran pour la section du réglet. Notons que dans ce cas, les positions des points extrêmes C, D, E, F sont transmises au programme de calcul pour calculer en sortie la contrainte σ_x maxi due à la flexion:

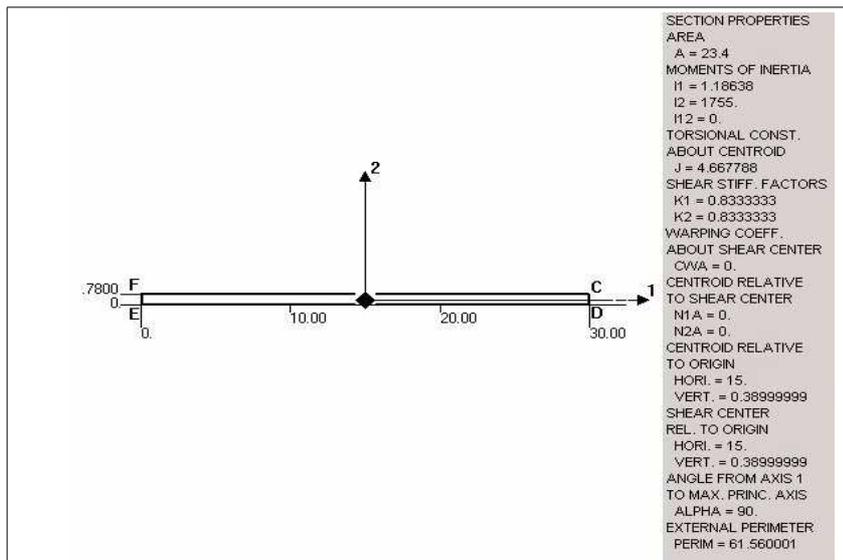


figure 10
Paramètres de la Section

1.3.4 conditions limites

L'élément de poutre standard possède 6 degrés de liberté par noeud : u , v , w , Θ_x , Θ_y , Θ_z .

Il faut imposer au niveau de l'encastrement:

$$u(1)=v(1)=w(1)=0$$

$$\Theta_x(1)=\Theta_y(1)=\Theta_z(1)=0$$

Pour ce qui concerne l'effort, deux options sont à envisager:

-définir le poids comme une charge distribuée le long de l'élément. Il convient alors de calculer une charge linéique p sur chaque élément = $\rho.g.S = 7.8 \cdot 10^{-6} \times 9.81 \times 23.4 \text{ N.mm}^{-1}$ soit: 1.79

$10^{-3} \text{ N.mm}^{-1}$ suivant(-z).

-définir le poids comme un chargement inertiel. Il convient alors d'entrer l'accélération de la pesanteur soit: 9.81 m.s^{-2} suivant(-z).

Sinon, il reste possible de calculer pour chacun des éléments, à partir des fonctions de forme de l'élément poutre, le chargement nodal équivalent à la charge répartie puis d'imposer ces efforts sur chaque noeud.

1.3.5 résultats et remarques

Le traitement de ce problème par la RdM en ne considérant que la flexion conduit à trouver pour la déformée un polynôme de degré 4 et une flèche en bout de: $\frac{p \cdot L^4}{8 \cdot EI_z} = 25.4 \text{ mm}$.

Notons que l'effet de l'effort tranchant (qui est pris en compte par le calcul MEF) est tout à fait négligeable.

La précision de la solution MEF est liée au nombre N d'éléments utilisés:

flèche en bout (mm)

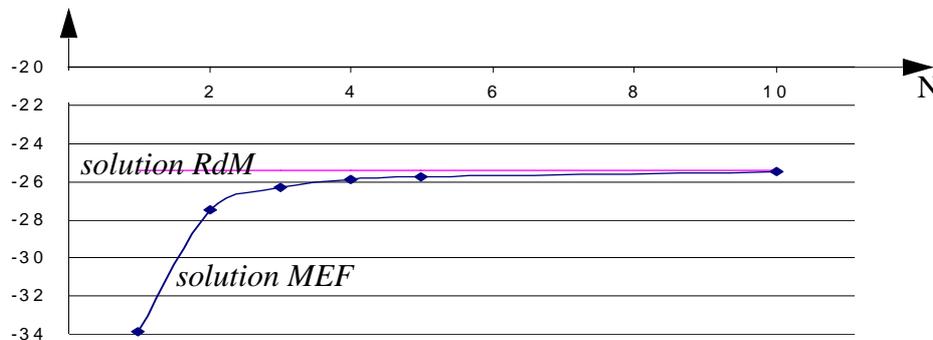


figure 11

Convergence de la solution

2 Eléments bidimensionnels

2.1 Cas d'étude N°4

L'étude N°4 concerne (figure 12) une tôle encastrée et soumise dans son plan à un effort F appliqué à l'extrémité libre.

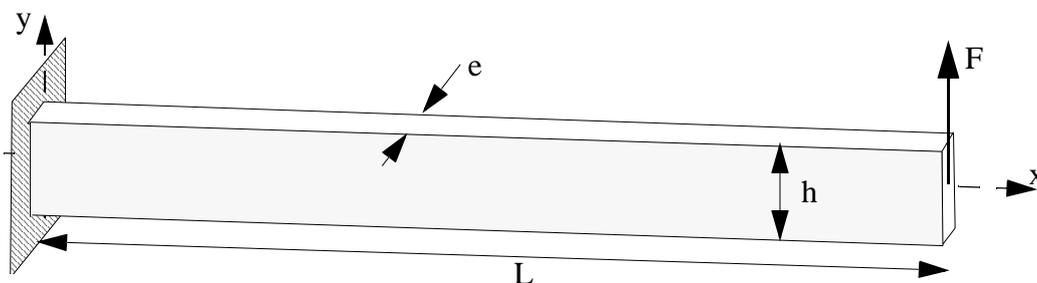


figure 12

Plaque encastrée

2.1.1 modélisation

La tôle travaille en flexion dans son plan. Compte tenu de la sollicitation, on peut considérer que les contraintes sont constantes dans l'épaisseur. Il est donc possible de modéliser cette structure à partir d'éléments de membrane.

2.1.2 maillage

Dans ces éléments une hypothèse est toujours faite sur le champ de déplacement. On obtient donc une solution approchée qui sera d'autant plus précise que le maillage sera fin. Appelons NH le nombre d'éléments dans la hauteur et NL le nombre d'éléments dans la longueur.

La détermination de la contrainte s'effectuant à l'intérieur de l'élément, il peut être difficile d'accéder à une valeur correcte des contraintes sur les frontières. Cette difficulté peut être contournée en plaçant sur le bord considéré des éléments barre de faible section (*figure 13*) qui perturbent peu la rigidité tout en jouant le rôle d'une jauge de déformation sur une structure réelle. La lecture de la contrainte dans ces éléments permet d'accéder à la valeur prise au niveau du bord libre.

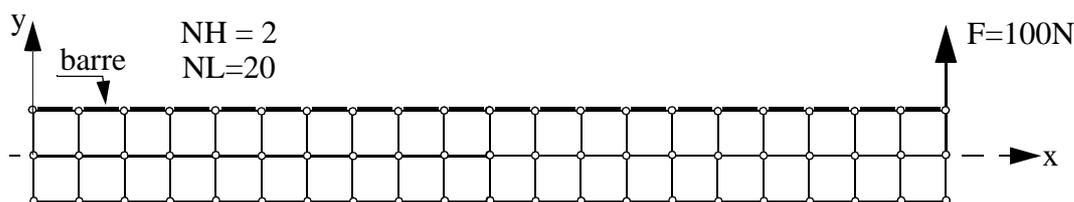


figure 13
Modélisation

2.1.3 caractérisation des éléments

données :

- épaisseur = 1 mm
- longueur = 500 mm
- hauteur = 50 mm
- $E = 70 \text{ GPa}$
- coefficient de Poisson $\nu = 0.3$

2.1.4 conditions limites

La section placée à l'abscisse $x=0$ est encastree. Il convient donc de poser $u=0$ et $v=0$ pour les noeuds situés à $x=0$. De plus, pour tous les noeuds, le déplacement a lieu dans le plan de la tôle donc $w=0$.

Nous supposons que l'effort F est réparti uniformément à l'extrémité. Si N est le nombre de noeuds sur le bord, cette opération se traduit par l'application de :

$$\frac{F}{2(N-1)} \text{ sur les noeuds extrêmes,}$$

et $\frac{F}{N-1}$ sur les autres.

2.1.5 résultats et remarques

Les sorties possibles à partir du calcul des déplacements des noeuds sont :

- les contraintes dans le plan XY. Ces contraintes sont données aux points de Gauss (points intérieurs à l'élément utilisés lors de l'intégration) ou bien moyennées sur l'élément ou bien encore extrapolées aux noeuds.

-les contraintes équivalentes de Von Mises, les directions principales du tenseur des contraintes ainsi que les valeurs des contraintes principales.

La flèche à l'extrémité a été calculée par la RdM avec un coefficient de cisaillement de $5/6$ et vaut : 5.7589 mm.

Les éléments à champ bilinéaire convergent très lentement pour cette sollicitation. Ceci vient du fait que l'hypothèse sur le champ de déplacement induit une énergie de cisaillement parasite. Sous une sollicitation de flexion pure (*figure 14*) les angles A B C D restent droits (1) tandis que dans l'élément, ils changent de valeur (2).

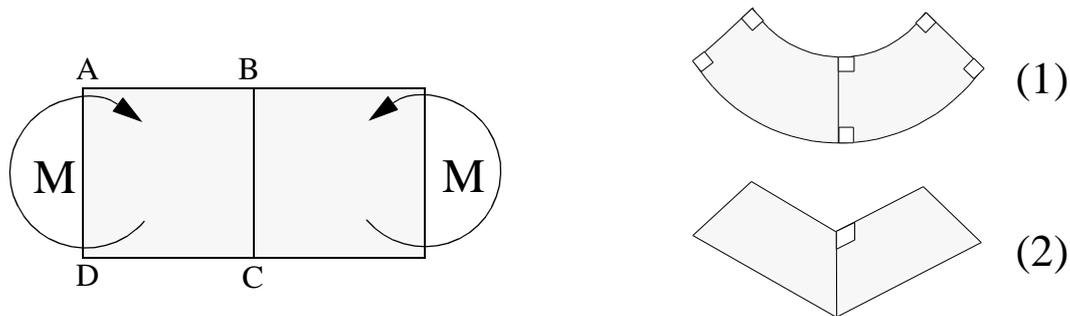


figure 14
Déformées en flexion

Il a ainsi été développé des éléments particuliers qui permettent d'améliorer le comportement du quadrangle à quatre noeuds pour ce type de problème. Citons par exemple les éléments dans lesquels l'énergie de cisaillement est déterminée uniquement à partir de la valeur de la distorsion angulaire du point situé au centre de l'élément.

Les utilisateurs préfèrent en général les éléments à quatre noeuds pour des raisons de facilité de maillage.

Il est important de remarquer que:

-les éléments standards sont inadaptés aux problèmes de flexion (on retrouve d'ailleurs les mêmes difficultés lors d'un maillage volumique). Il est donc nécessaire: soit de réaliser un maillage fin, soit d'utiliser des éléments spécifiques.

-l'étude linéaire ne prend pas en compte les problèmes de stabilité qui dans cette étude sont primordiaux.

-les éléments triangulaires sont les moins performants.

2.2 Cas d'étude N°5

L'étude N°4 concerne une plaque carrée trouée sollicitée en traction (*figure 15*). On s'intéresse tout particulièrement au phénomène de concentration de contraintes au bord du trou.

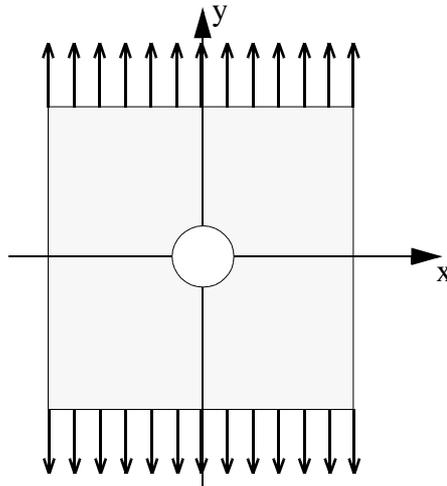


figure 15
Plaque trouée en traction

2.2.1 modélisation

La plaque travaille dans son plan. On peut considérer les contraintes comme constantes dans l'épaisseur. Comme dans le cas précédent, cette structure peut être modélisée par des éléments membrane.

Le problème étant 2 fois symétrique, il suffit de mailler 1/4 de la plaque.

2.2.2 maillage

Pour étudier la contrainte au voisinage du trou, il est nécessaire de resserrer le maillage dans cette zone (*figure 16*) car la variation des contraintes y est importante alors que dans l'élément, on suppose des variations linéaires. L'utilisation d'éléments barres est possible pour une meilleure lecture au niveau du bord libre:

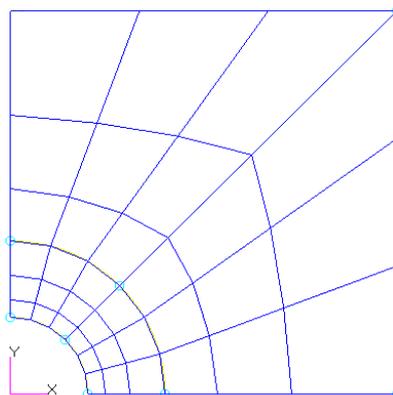


figure 16
Modélisation du 1/4 de la plaque

2.2.3 caractérisation des éléments

données : épaisseur = 5 mm
 côté: 100 mm & rayon du trou: 10mm
 $E = 70 \text{ GPa}$
 coefficient de Poisson $\nu = 0.3$

pour l'élément barre : même matériau et section $S=0.01 \text{ mm}^2$

2.2.4 conditions limites

Pour traduire la symétrie il faut indiquer que tous les noeuds situés sur un axe de symétrie doivent rester sur cet axe. Ceci se fait en indiquant $v=0$ pour tous les noeuds appartenant à l'axe X et $u=0$ pour les noeuds appartenant à l'axe Y

De plus, puisque le déplacement a lieu dans le plan de la tôle, il peut être nécessaire d'indiquer pour tous les noeuds: $w=0$.

La résultante de l'effort de traction vaut : 10 000 N.

Le chargement étant uniforme, il existe en général une option permettant d'appliquer une répartition d'effort sur une ligne. En fait si N est le nombre de noeuds sur le bord de la demi structure, cette opération se traduit par l'application de :

$$\frac{F}{4(N-1)} \text{ sur les noeuds extrêmes et } \frac{F}{2(N-1)} \text{ sur les autres.}$$

2.2.5 résultats et remarques

La déformée et la carte de variation de la composante σ_y sont données figure 17.

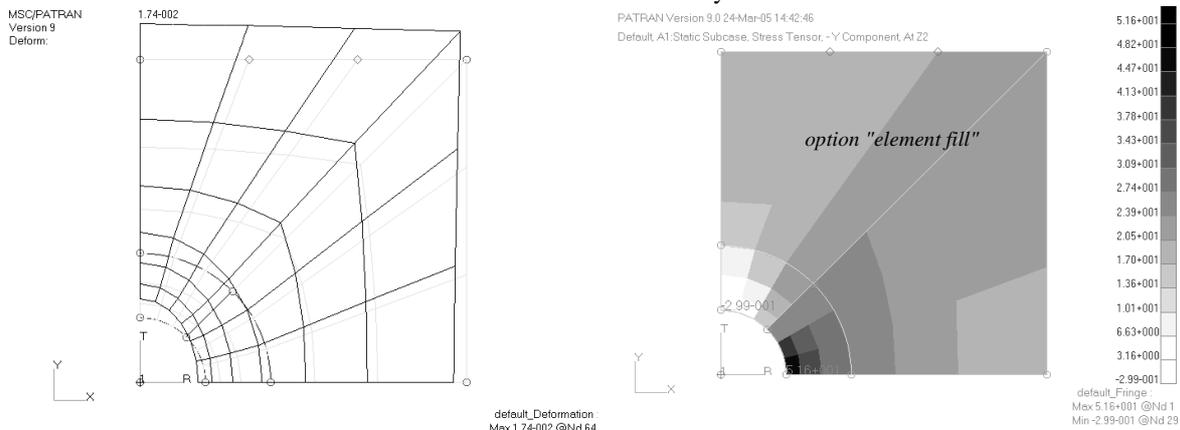


figure 17

Déformée (dép. maxi = $1.74 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$)

σ_y (σ_y maxi = 51.6 MPa)

La *figure 18* représente la variation de σ_y dans les éléments disposés le long de AB:

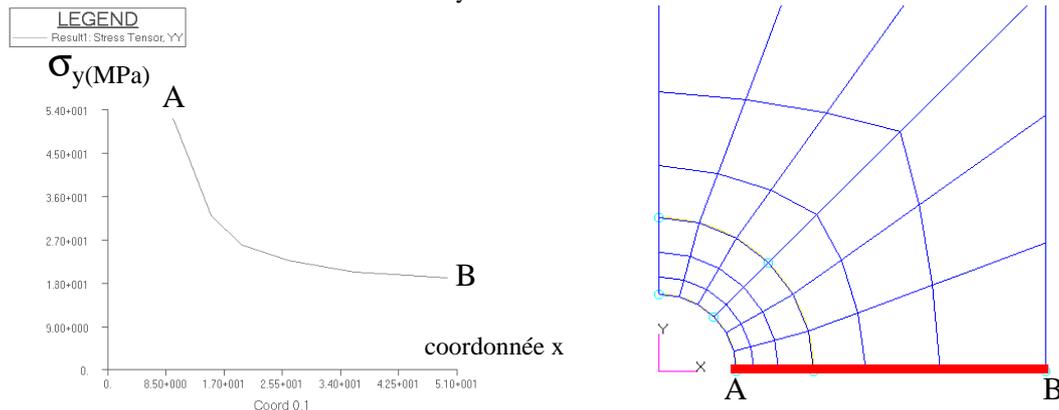


figure 18

σ_y en fonction de x (σ_y maxi = 52 MPa)

La *figure 19* représente la variation de σ_θ le long des éléments barre en bord de trou:

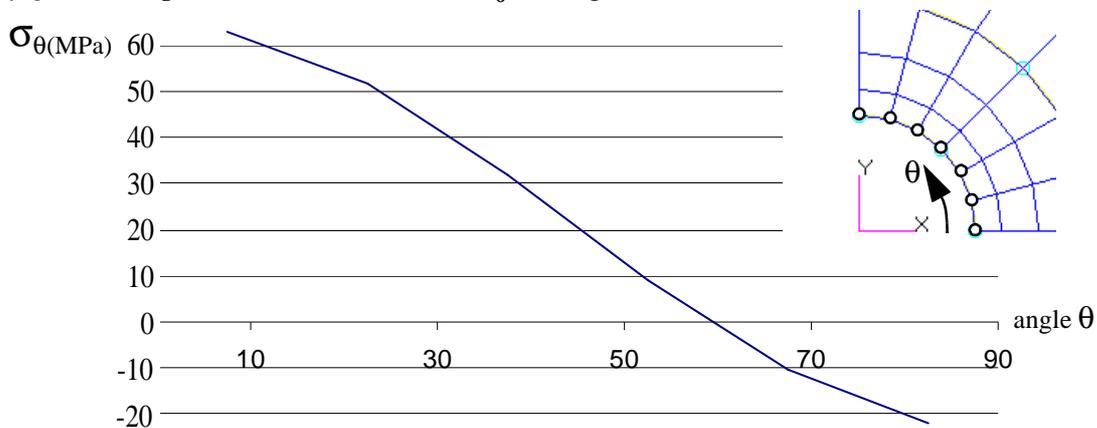


figure 19

σ_θ en bord de trou en fonction de θ

La contrainte maxi pour $x=10$ sur la *figure 18* et la contrainte maxi pour $\theta=0$ sur la *figure 19* caractérisent la même tension d'une fibre de direction y située en bord de trou. Elle est plus importante sur la *figure 19* (63 MPa) que sur la *figure 18* (52 MPa) car la valeur est lue plus près du trou grâce à l'utilisation des 'barres visualisatrices'.

L'analyse des résultats montre:

- que 6 éléments disposés sur 1/4 de trou suffisent pour obtenir une bonne représentation.
- que le moyen choisi pour lire les contraintes près du bord est essentiel. L'utilisation des 'barres visualisatrices' est une méthode efficace. La valeur donnée au point de Gauss le plus proche du bord libre n'est correcte que si l'élément est petit.

Remarque: si l'étude est réalisée non pas sur le quart mais sur la totalité de la plaque, il est nécessaire d'interdire tout déplacement d'ensemble à la structure. Pour ne pas induire des contraintes parasites, les liaisons utilisées doivent être impérativement de type isostatique. Il existe évidemment plusieurs situations de liaisons admissibles. La solution en déplacement dépendra de la situation choisie mais les solutions en déformations et en contraintes en seront indépen-

dantes. Un exemple de blocage admissible est donné sur la *figure 20*.

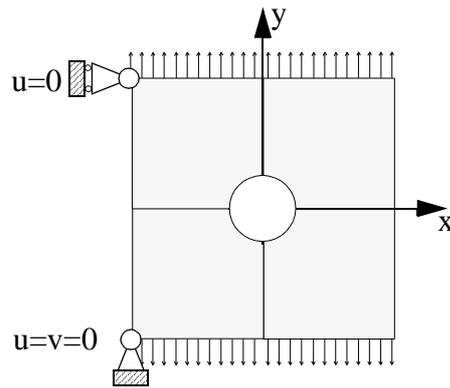


figure 20

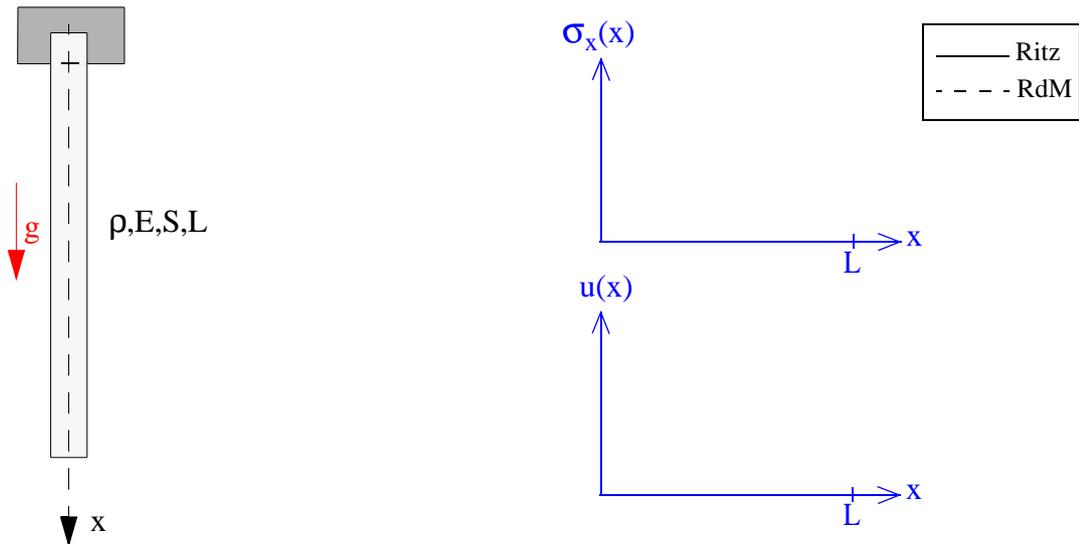
Conditions de liaison de type isostatique

Exercices.

1 Méthode de RITZ avec un chargement distribué:

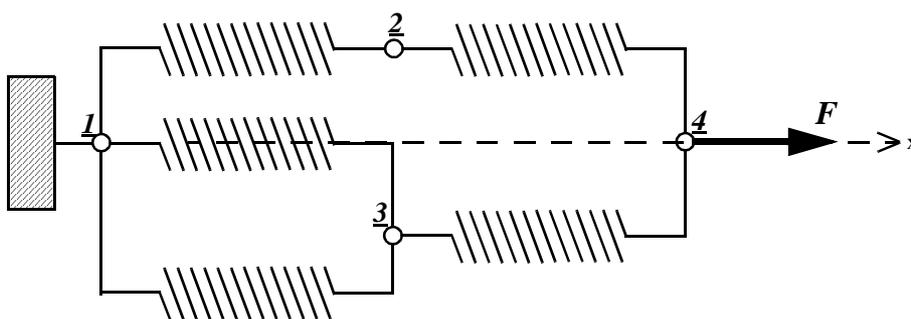
Soit la colonne de longueur L , section S , module E et masse volumique ρ représentée ci-dessous, soumise à son propre poids. On propose de traiter le problème par la méthode de Ritz en utilisant la fonction cinématiquement admissible:

$$u(x) = a \cdot x$$



- Calculer le déplacement de l'extrémité $u(L)$.
- Comparer la solution Ritz à la solution RdM en traçant les graphes $\sigma_x(x)$ et $u(x)$.

2 Assemblage de ressorts:



Toutes les raideurs sont égales à k .

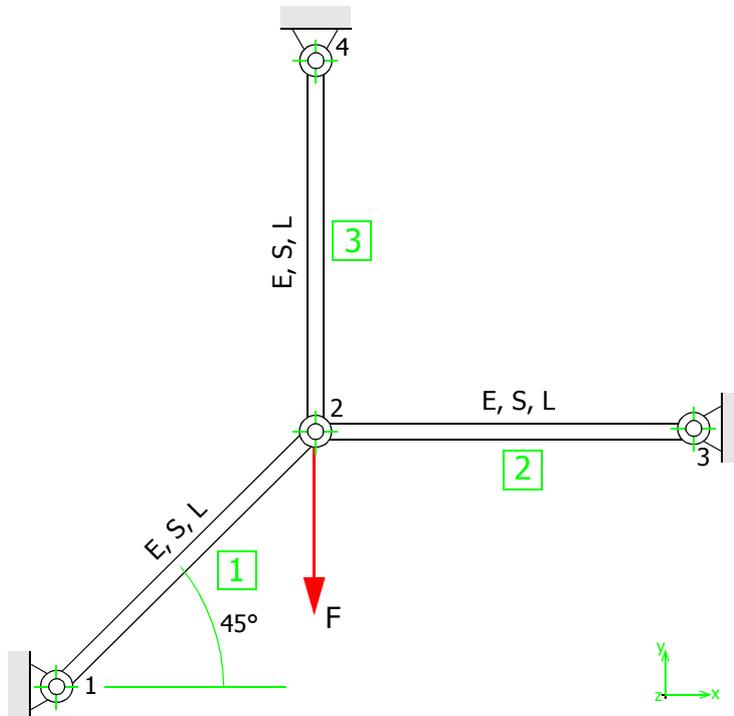
Les déplacements sont dirigés suivant x . $\{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$

Calculer U_2 et U_3 en utilisant la technique d'assemblage.

3 Structure de barres articulées:

Une structure est constituée de 3 barres articulées de masse négligeable, longueur L , section S et module élastique E .

Un effort vertical d'intensité F est appliqué au noeud 2.

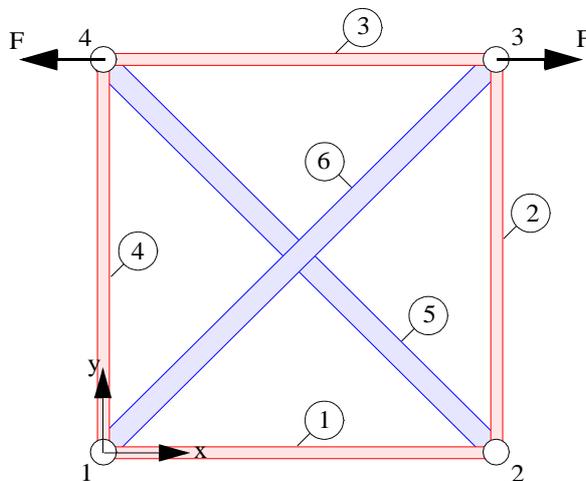


Exprimer:

- les 2 composantes de déplacement du noeud 2
- les contraintes dans les barres
- les actions de liaison.

4 Treillis libre:

Soit le treillis soumis à un chargement équilibré:



module E

$$L_1=L_2=L_3=L_4=L$$

$$S_1=S_2=S_3=S_4=S$$

$$S_5=S_6=\sqrt{2}.S$$

Calculer la matrice de rigidité $[K]$ du treillis.

Définir les conditions aux limites.

Calculer les déplacements nodaux et dessiner la déformée.

Calculer les contraintes dans les barres.

A.N.

$$E=200 \text{ GPa}$$

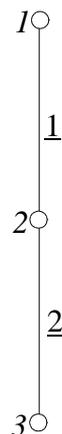
$$L=1\text{m}$$

$$S=10\text{mm}^2$$

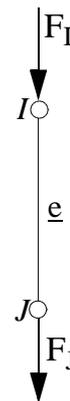
$$F=1000\text{N}$$

5 Chargement réparti uniforme:

Reprendre l'exercice 2 de la colonne. On propose un modèle avec 2 éléments 'barres' 1 et 2 de longueur $L/2$:



pour un élément e :



-Exprimer les efforts nodaux F_I et F_J équivalents à la charge répartie constituée par le poids de l'élément.

-Assembler la matrice de rigidité.

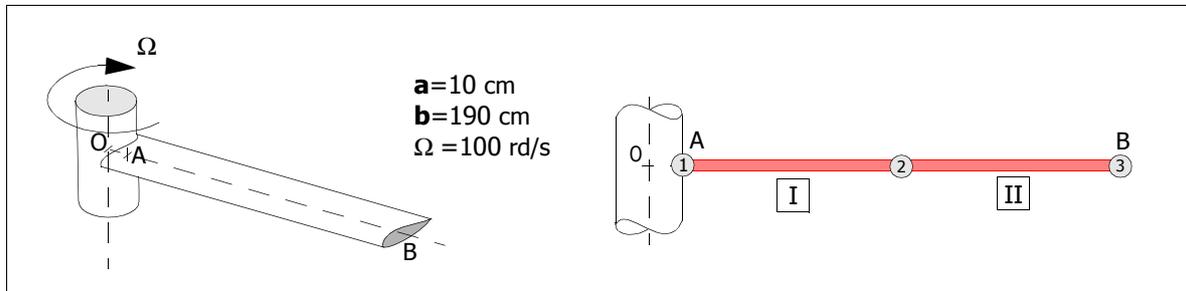
-Préciser le vecteur $\{U\}$ des déplacements inconnus.

-Constituer le second membre $\{F\}$ du système à résoudre.

-Calculer les déplacements et comparer à la solution RdM.

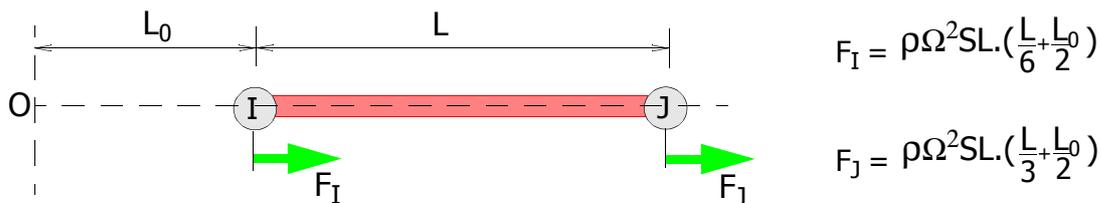
6 Chargement réparti variable:

□ Soit une poutre AB de section $S=30 \text{ cm}^2$ en rotation à vitesse Ω constante. Elle est supposée encastree dans le moyeu indéformable de rayon $OA=a$ et libre à l'extrémité B ($OB=b$). Le module élastique $E=72 \text{ GPa}$. La masse volumique $\rho=2700 \text{ Kg.m}^{-3}$.



□ On adopte le modèle avec 2 éléments 'barre' I et II de même longueur L.

□ 1° question: Les effets d'inertie pour un élément 'barre' I-J de longueur L situé à une distance L_0 de l'axe de rotation, se traduisent par des efforts nodaux équivalents F_I et F_J .



Expliquer comment ces efforts sont calculés.

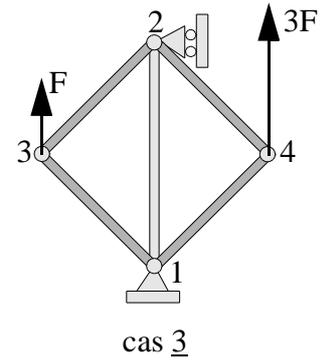
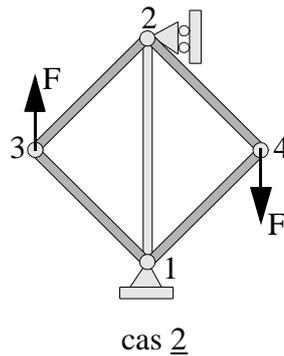
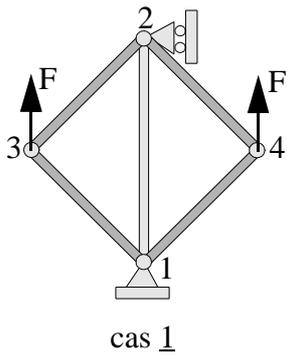
□ 2° question: Ecrire sous forme littérale (en fonction de E, S, ρ, Ω, a et b) le système 2x2 qui fournit les déplacements u_2 et u_3 .

□ 3° question: On donne le système sous forme numérique (en m et N):

$$\begin{bmatrix} 4.8 \cdot 10^8 & -2.4 \cdot 10^8 \\ -2.4 \cdot 10^8 & 2.4 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.290 \cdot 10^4 \\ 5.832 \cdot 10^4 \end{Bmatrix}$$

Calculer les déplacements u_2 et u_3 . Tracer la variation de la contrainte σ_x telle qu'elle est fournie par le calcul MEF.

7 Symétrie/Antisymétrie et Superposition:



On donne les résultats suivants (exprimés en mètres) pour les cas de charges 1 et 2 en fonction de l'effort F (exprimé en newtons):

$$\text{cas } \mathbf{1} \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{v}_2 = 3.57 \cdot 10^{-5} \cdot F \\ \mathbf{u}_3 = 1.79 \cdot 10^{-5} \cdot F \\ \mathbf{v}_3 = 4.31 \cdot 10^{-5} \cdot F \end{array} \right.$$

$$\text{cas } \mathbf{2} \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{v}_2 = 0 \\ \mathbf{u}_3 = 0 \\ \mathbf{v}_3 = 2.53 \cdot 10^{-5} \cdot F \end{array} \right.$$

Que valent \mathbf{u}_4 et \mathbf{v}_4 dans ces 2 cas ? En déduire tous les déplacements du cas de charge 3 en fonction de F .

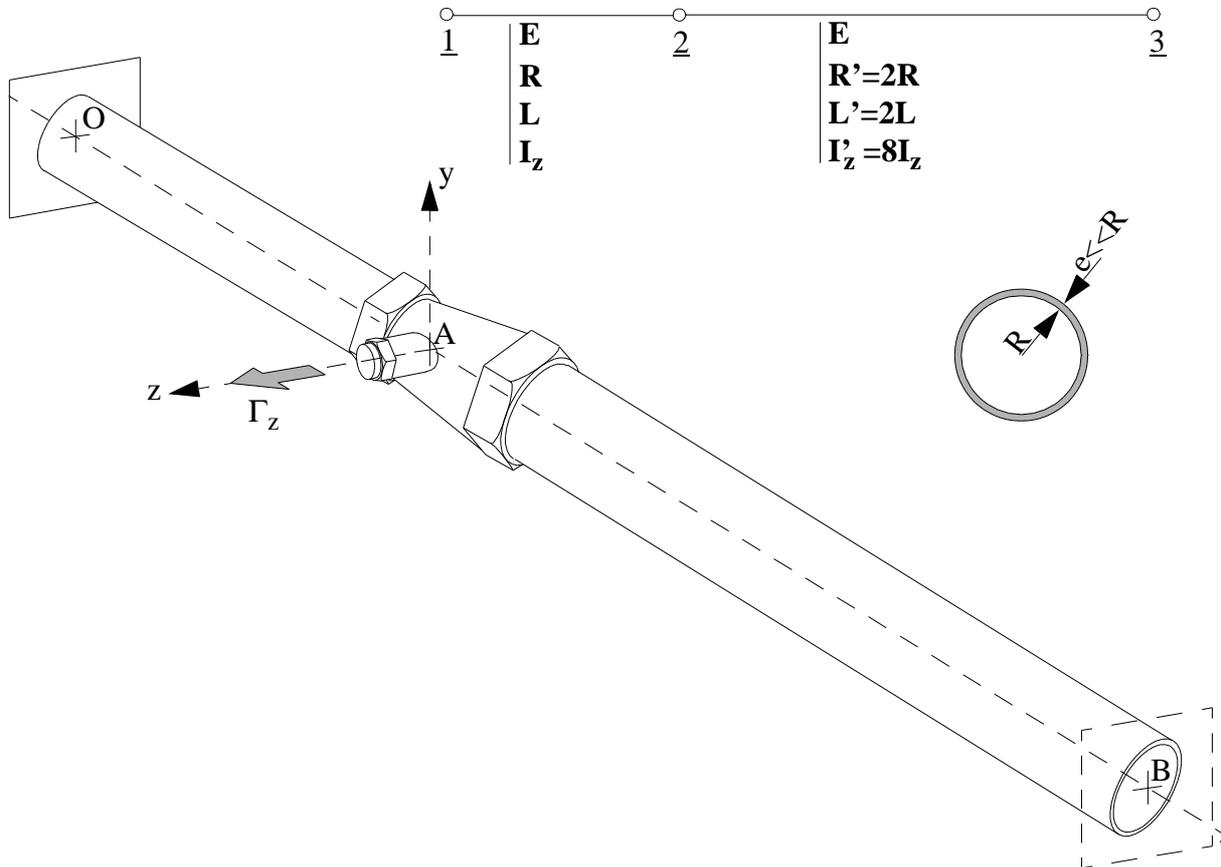
8 Conduite encadrée:

Une conduite **OAB** est encadrée en **O** et **B**.

Le tronçon **OA** a pour caractéristiques **E**, **R**, **L** et **I_z** et le tronçon **AB** : **E**, **R'**, **L'** et **I'_z**.

La liaison est assurée par un manchon réducteur sur lequel on exerce un couple Γ_z en **A**.

On adopte un modèle Eléments Finis avec 2 éléments de type **poutre** et 3 noeuds.



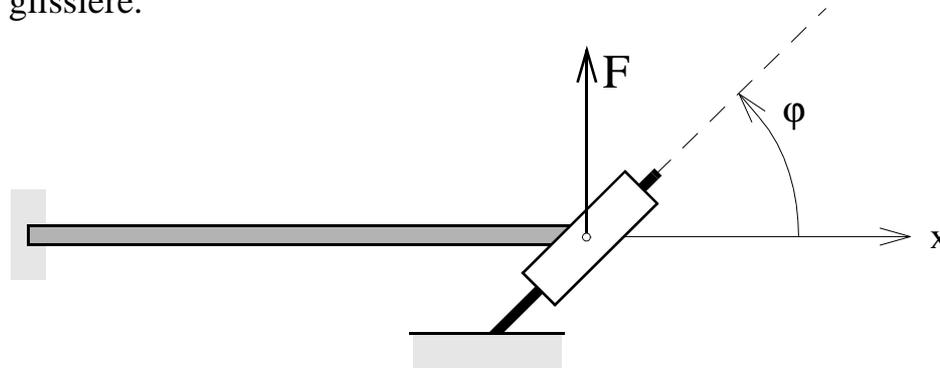
-1-Exprimer la matrice de rigidité de la conduite en flexion dans le plan **xy**.

-2-Déterminer le déplacement vertical et la rotation de **A** sous l'effet du couple Γ_z en fonction de **E**, **L**, **I_z** et Γ_z .

-3-Calculer les moments d'encastrement en **O** et en **B** en fonction de Γ_z .

9 Poutre sur glissière:

Soit une poutre de longueur L encastrée à l'origine et liée au bâti par une glissière inclinée de φ .
Déterminer le déplacement de l'extrémité et les efforts dans la glissière.



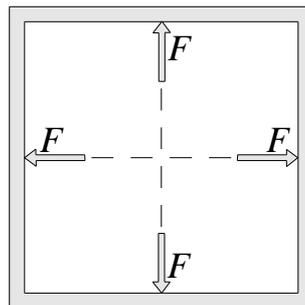
On pose: $\alpha = \frac{ES}{L}$ / $\beta = \frac{EI}{L^3}$

10 Cadre carré:

On considère un cadre carré schématisé ci-après:

Caractéristiques:

- ligne moyenne: carré de côté $2L$,
- section droite: carré plein de côté $2a$,
- module élastique: E .



Le chargement est constitué par 4 forces de même intensité F , disposées comme l'indique la figure.

On pose: $\alpha = \frac{ES}{L}$ et $\beta = \frac{EI}{L^3}$

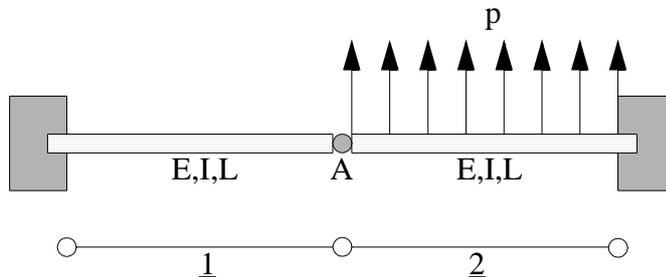
1- en exploitant les symétries, proposer un domaine d'étude.

Utiliser le maillage minimal conduisant à la solution exacte (RdM).

2- Résoudre.

11 Poutres articulées:

Soit la structure définie ci-dessous constituée de 2 poutres identiques articulées entre elles en A et encastées dans le bâti. La travée de droite est soumise à une charge répartie uniforme d'intensité linéique p :



On pose:

$$\beta = \frac{EI}{L^3}$$

1° Partie

On propose un modèle avec 2 éléments 1 et 2 ne tenant pas compte de la symétrie de la structure:

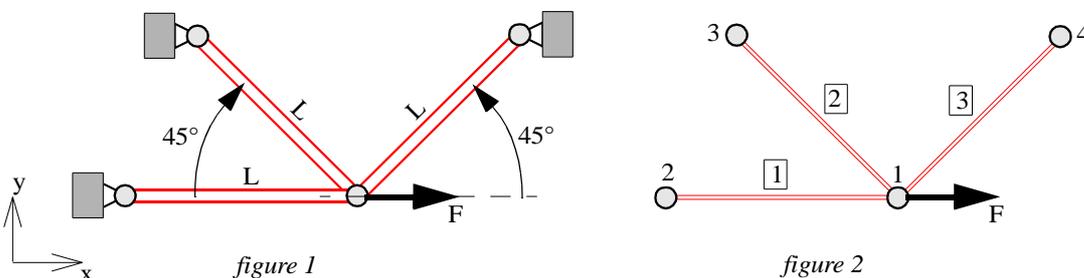
- Préciser le vecteur $\{U\}$ des déplacements inconnus.
- Assembler la matrice de rigidité.
- Constituer le second membre $\{F\}$ du système à résoudre.
- Calculer le déplacement vertical de A ainsi que les rotations des 2 sections à gauche et à droite de A.

2° Partie

- Proposer un modèle tenant compte de la symétrie de la structure.
- Expliquer avec précision la démarche à suivre.
- Retrouver les résultats de la 1° Partie.

12 Elément Rigide:

Soit la structure plane définie *fig1* constituée de 2 barres articulées entre elles et au bâti. On adopte *fig2* un modèle plan avec 3 éléments [1], [2] et [3] de traction-compression et 4 noeuds. L'effort F de 500 kN est appliqué horizontalement au noeud 1. Le module des barres est noté $E= 200$ GPa. Leur section est circulaire de rayon $R= 3$ cm. Leur longueur est $L= 80$ cm.



- 1- Ecrire le système 2×2 dont la solution est la déformée de la structure.
- 2- Résoudre et calculer les déplacements.
- 3- Calculer les contraintes et vérifier l'équilibre du noeud 1.
- 4- On change les propriétés de l'élément [2] qui a maintenant un comportement infiniment rigide. Calculer les déplacements dans ce cas.

13 Plaque trouée:

Soit une plaque carrée, de côté $L=100\text{ mm}$ et d'épaisseur $h=5\text{ mm}$, percée en son centre d'un trou de rayon $r=10\text{ mm}$, et sollicitée en tension par un effort réparti $p=1000\text{ N/mm}$.

Le matériau est caractérisé par: $E=70\text{ GPa}$ et $\nu=0,3$.

Ce problème a été traité sur le logiciel NASTRAN. Exploitant les symétries, 1/4 de la plaque a été maillée, avec des éléments de membrane triangulaires.

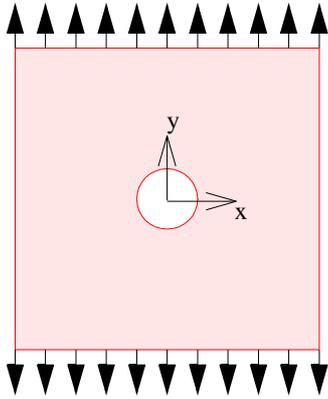


figure 1

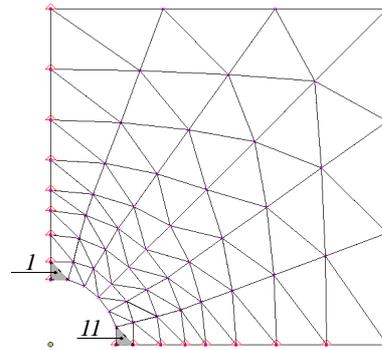
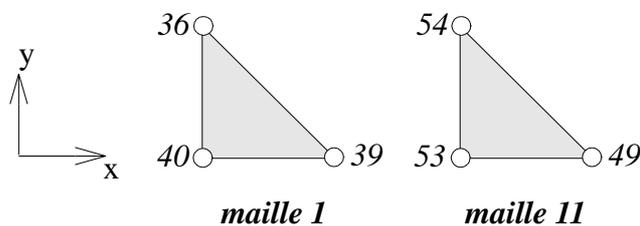


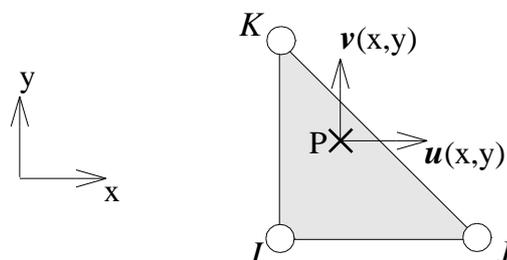
figure 2

On s'intéresse aux mailles $N^{\circ}1$ et 11 en bord de trou qui ont la forme de triangles isocèles rectangles de côté 2.6 mm . NASTRAN fournit les déplacements suivants (mm):



Noeud	déplacem ^t /x	déplacem ^t /y
36	+0.000E+0	+8.875E-2
39	-7.100E-3	+8.438E-2
40	+0.000E+0	+8.604E-2
49	-3.248E-2	+0.000E+0
53	-2.667E-2	+0.000E+0
54	-2.845E-2	+2.143E-2

Sachant que sur chaque triangle, le déplacement d'un point $P(x,y)$ est caractérisé par les fonctions:



$$u(x,y)=a.x+b.y+c$$

$$v(x,y)=d.x+e.y+f$$

Calculer les déformations ϵ_x , ϵ_y , $2\epsilon_{xy}$ sur les mailles $N^{\circ}1$ et 11 .

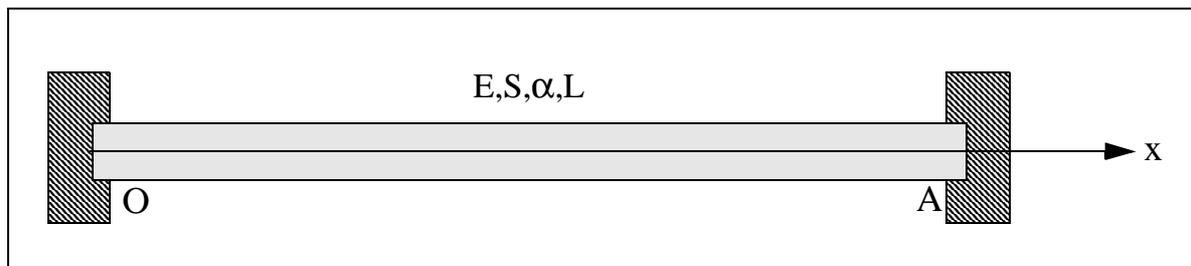
Calculer les contraintes σ_x , σ_y , τ_{xy} sur les mailles $N^{\circ}1$ et 11 .

Comparer la contrainte σ_y dans la maille $N^{\circ}11$ à sa valeur calculée loin du trou. Conclusion?

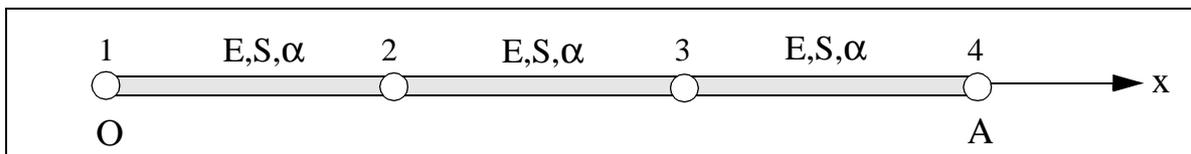
14 Poutre Bi-encastée en Thermo-Elasticité:

Soit la poutre bi-encastée ci-dessous montée sans contrainte à $T=T_0$. La section (O) est maintenue à T_0 . La section (A) est maintenue à $T_1=T_0+\Delta T$.

-1- En intégrant l'équation de la chaleur en régime permanent ($\frac{d^2 T(x)}{dx^2} = 0$) déterminer la variation de température le long de la poutre.



-2- La poutre est modélisée par 3 éléments 'barre' identiques. Justifier le choix de l'élément barre.



Calculer la température qui règne au milieu de chacun des éléments. Cette température sera ensuite affectée uniformément sur l'élément.

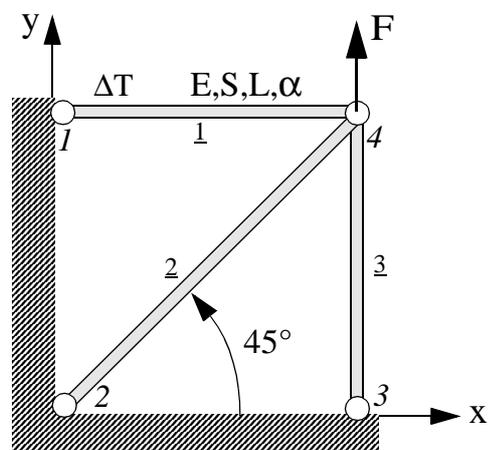
Assembler la matrice de rigidité, constituer le second membre.

Résoudre le système, calculer les actions de liaison et la contrainte dans chaque élément.

15 Système de barres avec chargement Thermo-mécanique:

Soit la structure plane ci-contre constituée de 3 barres bi-articulées montées sans contrainte à $T=T_0$. Les barres 2 et 3 sont maintenues à T_0 . La température de la barre 1 est élevée à $T_0+\Delta T$. De plus, un effort F vertical est appliqué au noeud 4.

Calculer les composantes de déplacement du noeud 4 et la contrainte dans la barre 1.

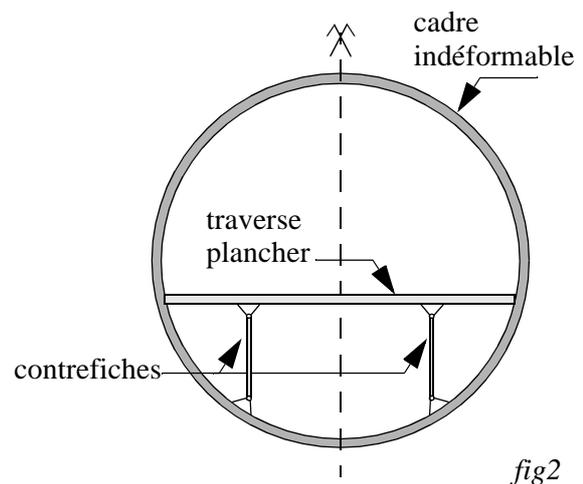
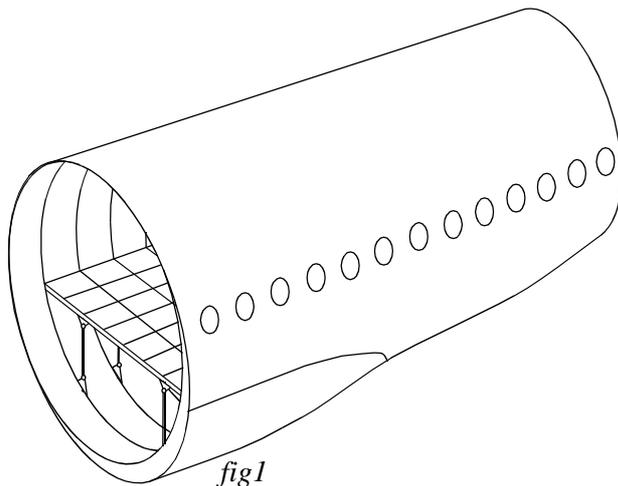


16 Plancher d'Avion en dynamique:

L'étude porte sur une structure de plancher d'avion *fig1*.

On se propose d'étudier de manière simplifiée le comportement dynamique d'une tranche de fuselage *fig2* composée :

- d'un cadre supposé indéformable,
- d'une traverse plancher,
- de 2 contrefiches.



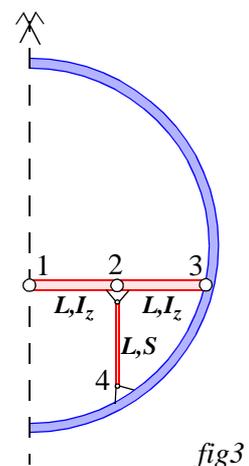
On modélise le demi-plancher par 2 éléments poutres de moment I_z et la contrefiche par un élément barre de section S voir *fig3*.

Le noeud 3 est encasté dans le cadre indéformable.

On utilisera la méthode des masses concentrées.

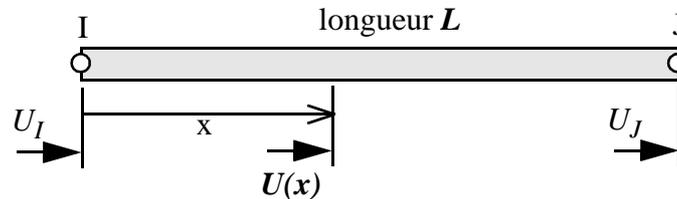
Le matériau a pour module E . La masse d'une poutre plancher de longueur L est M . La masse de la contrefiche de même longueur L est $m \ll M$.

Rechercher les pulsations propres des modes symétriques. On utilisera la méthode de condensation de Guyan en considérant les DDL de rotation comme secondaires.



Annexes.

1 Fonctions de forme d'un élément 1D en traction:



La fonction déplacement $U(x)$ est représentée par un polynôme de degré 1:

$$U(x) = a_0 + a_1 \cdot x$$

Appliquons les conditions:
$$\begin{cases} U(0) = a_0 = U_I \\ U(L) = a_0 + a_1 \cdot L = U_J \end{cases}$$

Il vient:
$$U(x) = U_I + \left(\frac{U_J - U_I}{L}\right) \cdot x = \left(\frac{L-x}{L}\right) \cdot U_I + \frac{x}{L} \cdot U_J$$

$$U(x) = N_1(x) \cdot U_I + N_2(x) \cdot U_J$$

Les fonctions:
$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{L-x}{L} \\ N_2(x) = \frac{x}{L} \end{cases}$$
 sont les fonctions de forme de l'élément barre.

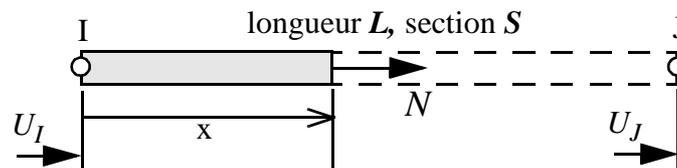
Le déplacement, la déformation $\boldsymbol{\epsilon}_x$ et la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_x$ s'expriment en tout x en fonction des déplacements nodaux sous la forme:

$$\begin{cases} U(x) = N_1(x) \cdot U_I + N_2(x) \cdot U_J \\ \boldsymbol{\epsilon}_x = \dot{N}_1(x) \cdot U_I + \dot{N}_2(x) \cdot U_J \\ \boldsymbol{\sigma}_x = E \cdot (\dot{N}_1(x) \cdot U_I + \dot{N}_2(x) \cdot U_J) \end{cases}$$

Notons que pour cet élément, $\boldsymbol{\epsilon}_x$ et $\boldsymbol{\sigma}_x$ sont constants.

2 Matrice de rigidité d'un élément 1D en traction:

2.1 en axes locaux



L'effort normal N s'exprime en fonction des déplacements nodaux sous la forme:

$$N = ES \cdot \dot{N}_1(x) \cdot U_I + \dot{N}_2(x) \cdot U_J$$

avec:

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{L-x}{L} \\ N_2(x) = \frac{x}{L} \end{cases}$$

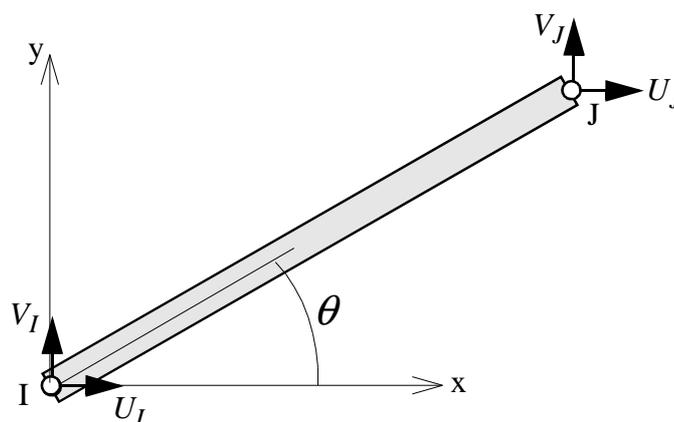
L'énergie élastique s'écrit:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{N^2}{ES} dx$$

En remplaçant N par son expression en fonction des déplacements nodaux:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \begin{Bmatrix} U_I & U_J \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & -\frac{ES}{L} \\ -\frac{ES}{L} & \frac{ES}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_I \\ U_J \end{Bmatrix}$$

2.2 en axes globaux (cas plan)



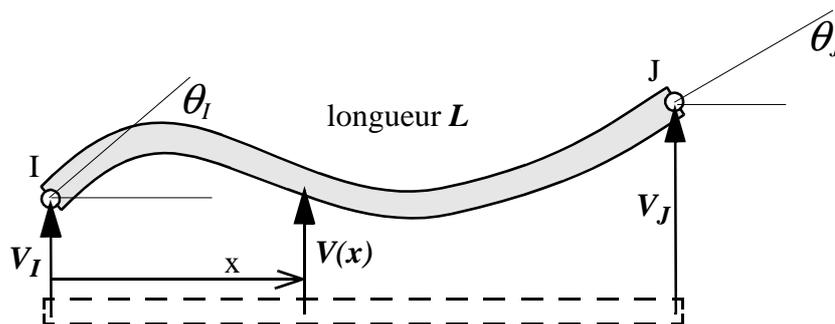
L'énergie élastique s'écrit en fonction de l'effort normal N :

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \left(\frac{N^2}{ES} \right) dx$$

En remplaçant N par son expression en fonction des déplacements nodaux:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \left\{ U_I \ V_I \ U_J \ V_J \right\} \frac{ES}{L} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \cos(\theta)^2 & \cos(\theta) \sin(\theta) & -\cos(\theta)^2 & -\cos(\theta) \sin(\theta) \\ \hline \cos(\theta) \sin(\theta) & \sin(\theta)^2 & -\cos(\theta) \sin(\theta) & -\sin(\theta)^2 \\ \hline -\cos(\theta)^2 & -\cos(\theta) \sin(\theta) & \cos(\theta)^2 & \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \hline -\cos(\theta) \sin(\theta) & -\sin(\theta)^2 & \cos(\theta) \sin(\theta) & \sin(\theta)^2 \\ \hline \end{array} \left\{ \begin{array}{l} U_I \\ V_I \\ U_J \\ V_J \end{array} \right\}$$

3 Fonctions de forme d'un élément 1D en flexion:



La fonction déplacement $V(x)$ est représentée par un polynôme de degré 3:

$$V(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$$

Appliquons les conditions:
$$\left\{ \begin{array}{l} V(0) = a_0 = V_I \\ V(L) = a_0 + a_1 \cdot L + a_2 \cdot L^2 + a_3 \cdot L^3 = V_J \\ V'(0) = a_1 = \theta_I \\ V'(L) = a_1 + 2a_2 \cdot L + 3a_3 \cdot L^2 = \theta_J \end{array} \right.$$

Il vient:
$$V(x) = N_1(x) \cdot V_I + N_2(x) \cdot \theta_I + N_3(x) \cdot V_J + N_4(x) \cdot \theta_J$$

Les fonctions:
$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} N_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{array} \right.$$

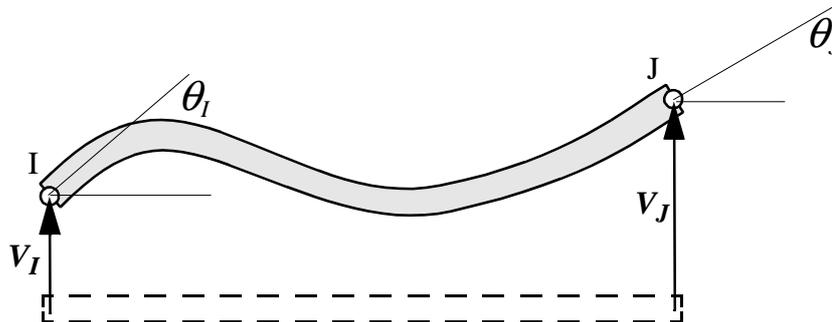
sont les fonctions de forme de l'élément poutre.

Le déplacement et le moment fléchissant s'expriment en tout x en fonction des déplacements nodaux sous la forme:

$$\begin{cases} V(x) = N_1(x) \cdot V_I + N_2(x) \cdot \theta_I + N_3(x) \cdot V_J + N_4(x) \cdot \theta_J \\ Mf_z = EI_z \cdot (\ddot{N}_1(x) \cdot V_I + \ddot{N}_2(x) \cdot \theta_I + \ddot{N}_3(x) \cdot V_J + \ddot{N}_4(x) \cdot \theta_J) \end{cases}$$

Notons que pour cet élément, Mf_z est une fonction linéaire de x .

4 Matrice de rigidité d'un élément 1D en flexion:



Le moment fléchissant Mf_z s'exprime en fonction des déplacements nodaux sous la forme:

$$Mf_z = EI_z \cdot (\ddot{N}_1(x) \cdot V_I + \ddot{N}_2(x) \cdot \theta_I + \ddot{N}_3(x) \cdot V_J + \ddot{N}_4(x) \cdot \theta_J)$$

avec:

$$\begin{cases} N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \end{cases} \quad \begin{cases} N_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{cases}$$

L'énergie élastique s'écrit:

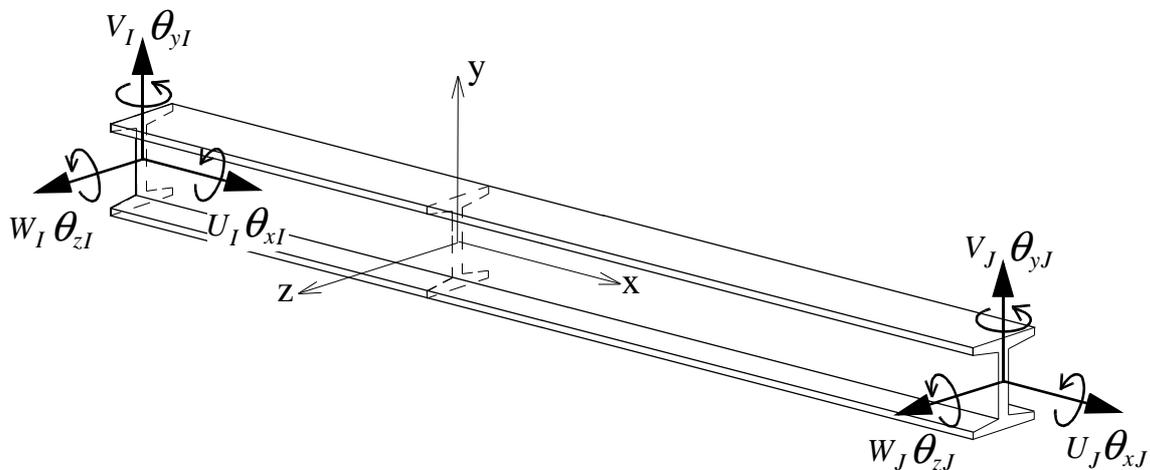
$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{Mf_z^2}{EI_z} dx$$

En remplaçant Mf_z par son expression en fonction des déplacements nodaux:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{matrix} V_I & \theta_I & V_J & \theta_J \end{matrix} \right\} \frac{EI_z}{L^3} \begin{matrix} \begin{matrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{matrix} \\ \left. \begin{matrix} V_I \\ \theta_I \\ V_J \\ \theta_J \end{matrix} \right\}$$

5 Matrice de rigidité d'un élément poutre:

5.1 en axes locaux



L'énergie élastique s'écrit:
$$W = \frac{1}{2} \cdot \left\{ U \right\}^t \cdot [K] \cdot \left\{ U \right\}$$

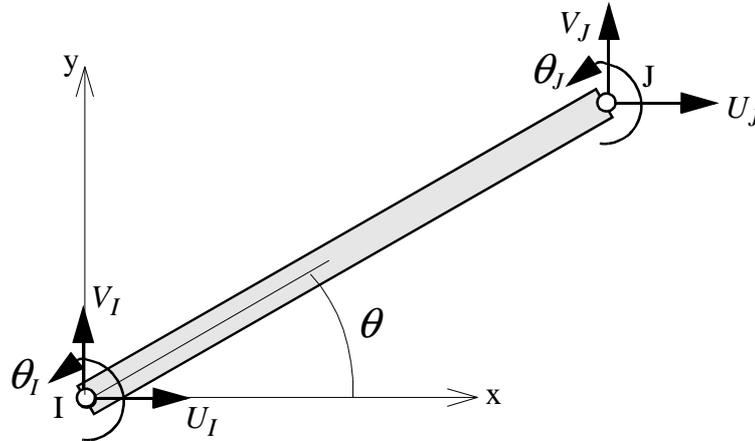
avec
$$\left\{ U \right\}^t = \left\{ U_I \ V_I \ W_I \ \theta_{xI} \ \theta_{yI} \ \theta_{zI} \ U_J \ V_J \ W_J \ \theta_{xJ} \ \theta_{yJ} \ \theta_{zJ} \right\}$$

La matrice de rigidité s'écrit (en négligeant l'énergie d'effort tranchant):

$$[K] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline ES/L & & & & & & -ES/L & & & & & \\ \hline & \frac{12EI_z}{L^3} & & & & \frac{6EI_z}{L^2} & & \frac{-12EI_z}{L^3} & & & \frac{6EI_z}{L^2} & \\ \hline & & \frac{12EI_y}{L^3} & & \frac{-6EI_y}{L^2} & & & & \frac{-12EI_y}{L^3} & & \frac{-6EI_y}{L^2} & \\ \hline & & & GJ/L & & & & & & -GJ/L & & \\ \hline & & \frac{-6EI_y}{L^2} & & \frac{4EI_y}{L} & & & & \frac{6EI_y}{L^2} & & \frac{2EI_y}{L} & \\ \hline & \frac{6EI_z}{L^2} & & & \frac{4EI_z}{L} & & \frac{-6EI_z}{L^2} & & & & \frac{2EI_z}{L} & \\ \hline -ES/L & & & & & & ES/L & & & & & \\ \hline & \frac{-12EI_z}{L^3} & & & \frac{-6EI_z}{L^2} & & \frac{12EI_z}{L^3} & & & & \frac{-6EI_z}{L^2} & \\ \hline & & \frac{-12EI_y}{L^3} & & \frac{6EI_y}{L^2} & & & & \frac{12EI_y}{L^3} & & \frac{6EI_y}{L^2} & \\ \hline & & & -GJ/L & & & & & & GJ/L & & \\ \hline & & \frac{-6EI_y}{L^2} & & \frac{2EI_y}{L} & & & & \frac{6EI_y}{L^2} & & \frac{4EI_y}{L} & \\ \hline & \frac{6EI_z}{L^2} & & & \frac{2EI_z}{L} & & \frac{-6EI_z}{L^2} & & & & \frac{4EI_z}{L} & \\ \hline \end{array}$$

5.2 en axes globaux (cas plan)

Pour un élément faisant un angle initial θ avec l'horizontale:



L'énergie élastique s'écrit:
$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{N^2}{ES} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{Mf_z^2}{EI_z} dx$$

En remplaçant N et Mf_z par leur expression en fonction des déplacements nodaux:

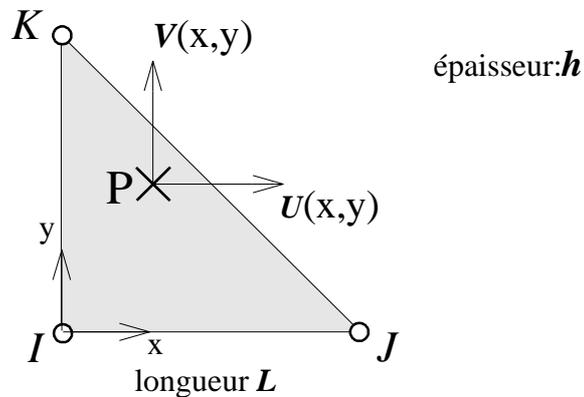
$$W = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{matrix} U_I & V_I & \theta_I & U_J & V_J & \theta_J \end{matrix} \right\} \cdot [K] \cdot \left\{ \begin{matrix} U_I \\ V_I \\ \theta_I \\ U_J \\ V_J \\ \theta_J \end{matrix} \right\}$$

La matrice de rigidité s'écrit en posant: $\alpha = \frac{ES}{L}$ $\beta = \frac{EI}{L^3}$ $\left. \begin{array}{l} c = \cos(\theta) \\ s = \sin(\theta) \end{array} \right\}$

$$[K] = \begin{bmatrix} c^2\alpha + 12s^2\beta & cs(\alpha - 12\beta) & -6s\beta L & -c^2\alpha - 12s^2\beta & -cs(\alpha - 12\beta) & -6s\beta L \\ cs(\alpha - 12\beta) & s^2\alpha + 12c^2\beta & 6c\beta L & cs(-\alpha + 12\beta) & -s^2\alpha - 12c^2\beta & 6c\beta L \\ -6s\beta L & 6c\beta L & 4\beta L^2 & 6s\beta L & -6c\beta L & 2\beta L^2 \\ -c^2\alpha - 12s^2\beta & cs(-\alpha + 12\beta) & 6s\beta L & c^2\alpha + 12s^2\beta & cs(\alpha - 12\beta) & 6s\beta L \\ -cs(\alpha - 12\beta) & -s^2\alpha - 12c^2\beta & -6c\beta L & cs(\alpha - 12\beta) & s^2\alpha + 12c^2\beta & -6c\beta L \\ -6s\beta L & 6c\beta L & 2\beta L^2 & 6s\beta L & -6c\beta L & 4\beta L^2 \end{bmatrix}$$

6 Élément isocèle rectangle en membrane:

6.1 Fonctions de forme



Les fonctions déplacement $U(x,y)$ et $V(x,y)$ sont représentées par des fonctions linéaires:

$$\begin{cases} U(x, y) = a \cdot x + b \cdot y + c \\ V(x, y) = d \cdot x + e \cdot y + f \end{cases}$$

Appliquons les conditions:

$$\begin{cases} U(0, 0) = c = U_I \\ U(L, 0) = a \cdot L + c = U_J \\ U(0, L) = b \cdot L + c = U_K \\ V(0, 0) = f = V_I \\ V(L, 0) = d \cdot L + f = V_J \\ V(0, L) = e \cdot L + f = V_K \end{cases}$$

Il vient:

$$\begin{cases} U(x, y) \\ V(x, y) \end{cases} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_I \\ V_I \\ U_J \\ V_J \\ U_K \\ V_K \end{Bmatrix}$$

Les fonctions: $\begin{cases} N_1(x, y) = 1 - \frac{x}{L} - \frac{y}{L} \\ N_2(x, y) = \frac{x}{L} \\ N_3(x, y) = \frac{y}{L} \end{cases}$ sont les fonctions de forme de l'élément membrane.

Les déformations $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ et les contraintes $[\boldsymbol{\sigma}]$ s'expriment en tout (x,y) en fonction des déplacements

$$\text{cements nodaux sous la forme: } \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_x \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_I \\ V_I \\ U_J \\ V_J \\ U_K \\ V_K \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_x \\ \boldsymbol{\sigma}_y \\ \boldsymbol{\sigma}_{xy} \end{cases} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{xy} \end{Bmatrix}$$

Notons que pour cet élément, déformations et contraintes sont constantes sur le triangle.

6.2 Matrice de rigidité d'un élément membrane isocèle rectangle:

L'énergie élastique s'écrit: $W = \frac{1}{2} \cdot \int_{\text{element}} (\boldsymbol{\varepsilon}_x \cdot \boldsymbol{\sigma}_x + \boldsymbol{\varepsilon}_y \cdot \boldsymbol{\sigma}_y + 2\boldsymbol{\varepsilon}_{xy} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{xy}) \cdot dv$.

En remplaçant déformations et contraintes par leur expression en fonction des déplacements nodaux:

l'énergie élastique prend la forme: $W = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \mathbf{U} \right\}^t \cdot [\mathbf{K}] \cdot \left\{ \mathbf{U} \right\}$

avec: $\left\{ \mathbf{U} \right\}^t = \left\{ U_I \ V_I \ U_J \ V_J \ U_K \ V_K \right\}$

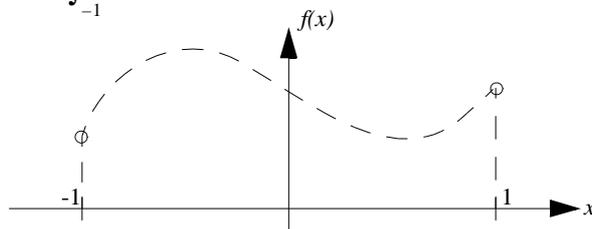
E et ν caractérisent le matériau. h représente l'épaisseur de la membrane.

$$[\mathbf{K}] = \frac{Eh}{4(1-\nu^2)} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 3-\nu & 1+\nu & -2 & -1+\nu & -1+\nu & -2\nu \\ \hline 1+\nu & 3-\nu & -2\nu & -1+\nu & -1+\nu & -2 \\ \hline -2 & -2\nu & 2 & 0 & 0 & 2\nu \\ \hline -1+\nu & -1+\nu & 0 & 1-\nu & 1-\nu & 0 \\ \hline -1+\nu & -1+\nu & 0 & 1-\nu & 1-\nu & 0 \\ \hline -2\nu & -2 & 2\nu & 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array}$$

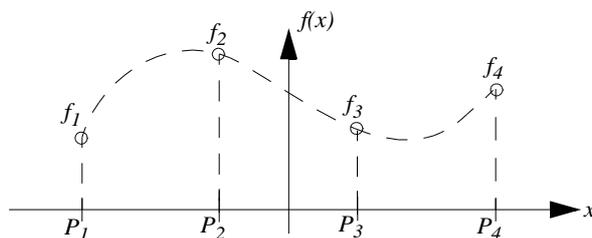
7 Méthode d'intégration de GAUSS :

7.1 Méthode de Newton

Soit par exemple à calculer: $\int_{-1}^1 f(x) dx$



Idée: considérons 4 points P_1, P_2, P_3, P_4 uniformément distribués. La fonction $f(x)$ prend respectivement en ces points les valeurs f_1, f_2, f_3, f_4 .



Par ces 4 points, il est possible de faire passer un polynôme de °3 du type:

$$a_0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$$

et de calculer $\int_{-1}^1 f(x) dx$ de façon approchée par:

$$\int_{-1}^1 (a_0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3) dx = 2 \cdot a_0 + \frac{2}{3} \cdot a_2 \quad (*)$$

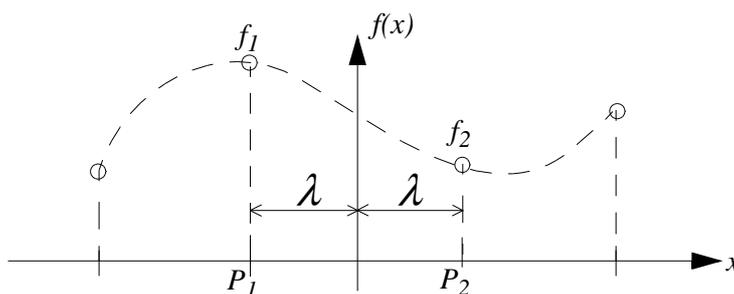
Sachant que: $a_0 = \frac{1}{16} \cdot (-f_1 + 9f_2 + 9f_3 - f_4)$

et $a_2 = \frac{9}{16} \cdot (f_1 - f_2 - f_3 + f_4)$,

on obtient finalement: $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{4} \cdot (f_1 + 3f_2 + 3f_3 + f_4)$

7.2 Méthode de Gauss

Idée: considérons 2 points P_1, P_2 distribués symétriquement, leur position étant repérée par λ . P_1, P_2 sont nommés *points de GAUSS*.



Faisons passer par ces 2 points un polynome de °3 du type:

$$a_0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$$

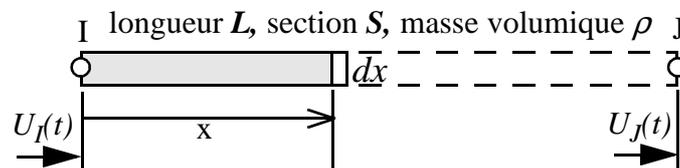
Il vient:

$$f_1 + f_2 = 2 \cdot (a_0 + a_2 \cdot \lambda^2) .$$

Donc d'après (*), il suffit de poser $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$ pour obtenir: $\int_{-1}^1 f(x) dx$ de façon approchée sous la forme:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f_1 + f_2 = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

8 Matrice de masse d'un élément barre :



La vitesse de la tranche dx d'abscisse x s'écrit:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = N_1(x) \cdot \dot{U}_I(t) + N_2(x) \cdot \dot{U}_J(t)$$

avec:

$$\begin{cases} N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \\ N_2(x) = \frac{x}{L} \end{cases}$$

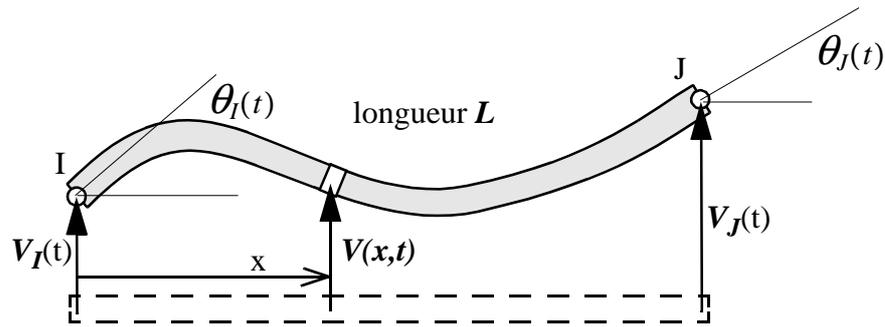
L'énergie cinétique s'écrit:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L (\rho S \cdot \dot{U}^2) dx$$

En remplaçant $\frac{\partial U}{\partial t}$ par son expression en fonction des vitesses des noeuds:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{matrix} \dot{U}_I \\ \dot{U}_J \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} \frac{\rho S L}{3} & \frac{\rho S L}{6} \\ \frac{\rho S L}{6} & \frac{\rho S L}{3} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \dot{U}_I \\ \dot{U}_J \end{matrix} \right\}$$

9 Matrice de masse d'un élément poutre :



La vitesse de la tranche dx d'abscisse x s'écrit:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = N_1(x) \cdot \dot{V}_I + N_2(x) \cdot \dot{\theta}_I + N_3(x) \cdot \dot{V}_J + N_4(x) \cdot \dot{\theta}_J$$

avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} N_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{array} \right.$$

L'énergie cinétique s'écrit (si on néglige la contribution de la rotation):

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \left(\rho S \cdot \frac{\partial V^2}{\partial t} \right) dx$$

En remplaçant $\frac{\partial V}{\partial t}$ par son expression en fonction des vitesses des noeuds:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \dot{V}_I \quad \dot{\theta}_I \quad \dot{V}_J \quad \dot{\theta}_J \right\} \frac{\rho S L}{420} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 156 & 22L & 54 & -13L \\ \hline 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ \hline 54 & 13L & 156 & -22L \\ \hline -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \\ \hline \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \dot{V}_I \\ \dot{\theta}_I \\ \dot{V}_J \\ \dot{\theta}_J \end{array} \right\}$$

Annales.

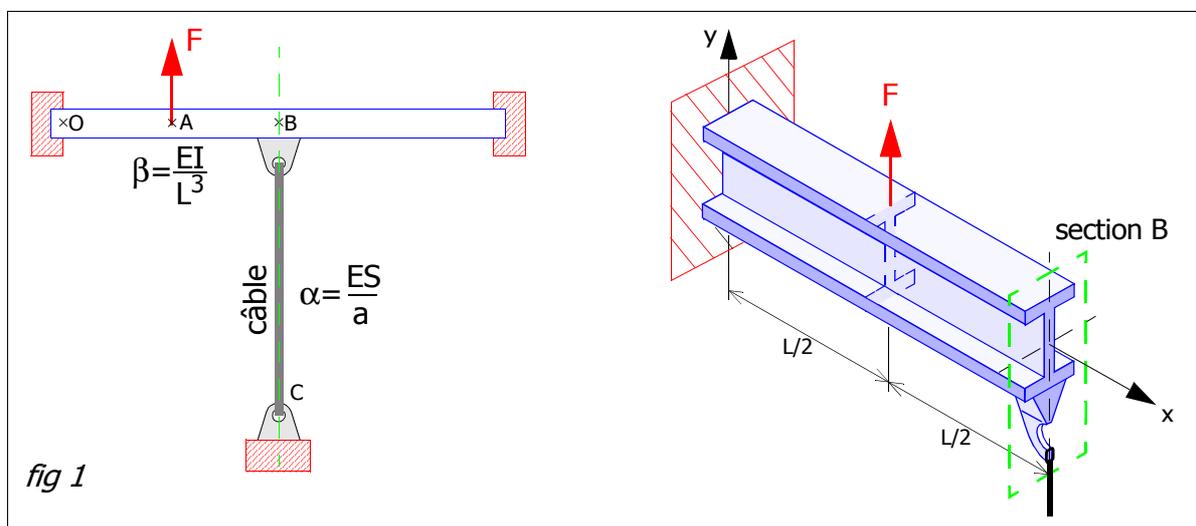
Examen 2012

Exercice 1:

○ Soit la structure *fig 1* constituée d'une poutre bi-encastée de longueur $2L$ et d'un câble non précontraint de longueur a reliant le point B au bâti en C. L'effort F est appliqué dans la section A située au quart de la longueur.

On adopte *par symétrie* un modèle avec un élément 'beam' [OB] de caractéristique β et un élément 'rod' [BC] de de caractéristique α .

L'effort F sera remplacé par des efforts équivalents appliqués en O et B conformément au formulaire joint.



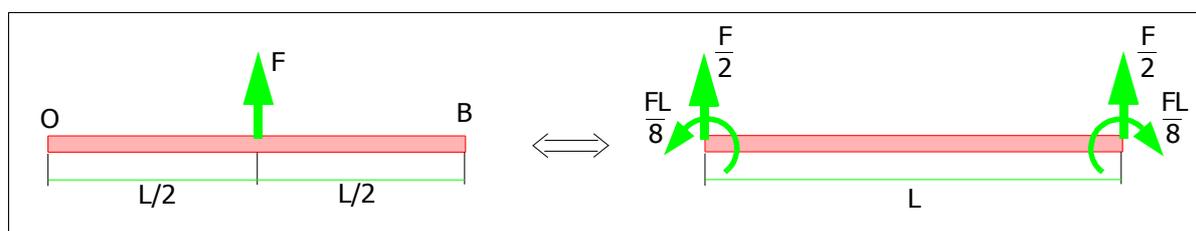
Formuler le problème comme la superposition d'un cas symétrique ① et d'un cas antisymétrique ②.

En travaillant sur la demi-structure, pour un effort $F < 0$ puis pour un effort $F > 0$:

Calculer les déplacements de la section B:

- dus au cas ①,
- dus au cas ②,
- dus à la superposition ① + ②.

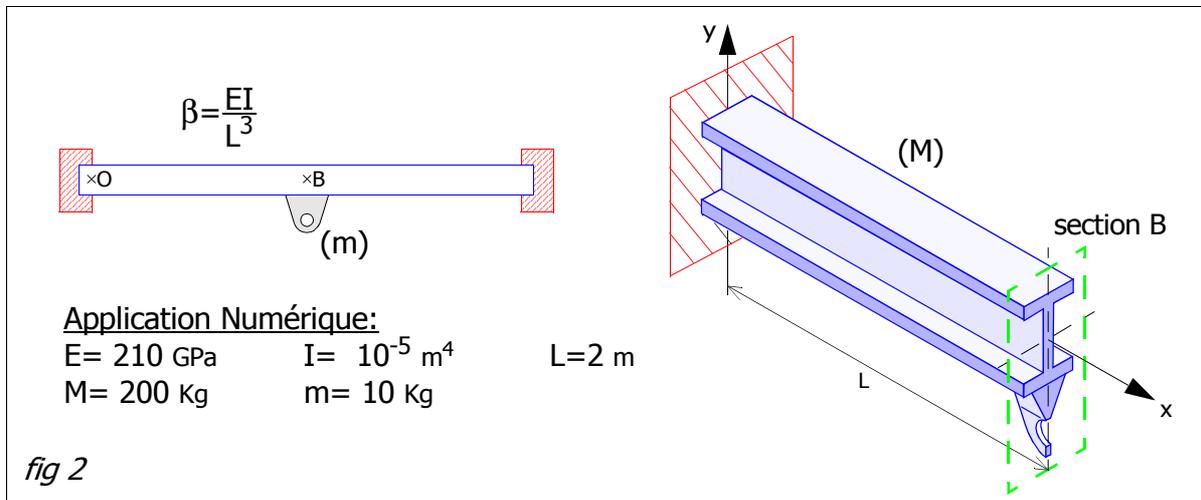
Formulaire:



Exercice 2:

○ On considère la poutre de l'exercice 1 sans le câble. On désigne par $(2M)$ la masse de toute la poutre et par (m) la masse de la chape considérée comme une masse ponctuelle en B. On cherche la pulsation du 1^o mode symétrique.

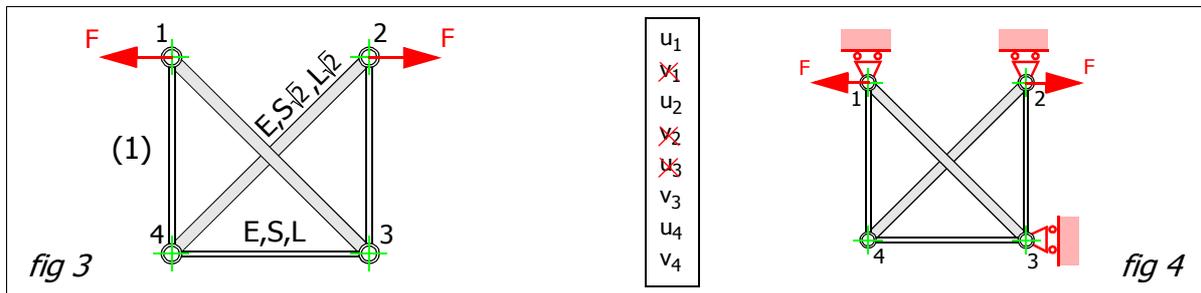
On adopte *par symétrie* un modèle avec 1 élément 'beam' [OB] de caractéristique β .



□ Calculer la pulsation puis la fréquence du 1^o mode symétrique.

Exercice 3:

○ On considère le treillis (1) soumis fig 3 à un chargement équilibré.



□ Expliquer pourquoi il convient d'imposer les liaisons proposées fig 4.

□ La matrice $[K]$ a été inversée après pénalisation: $[K]^{-1} = \frac{L}{ES} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Calculer les déplacements u_1 et u_2 .

□ K_e est la rigidité équivalente du treillis (1) dans la direction 1-2. Calculer K_e .

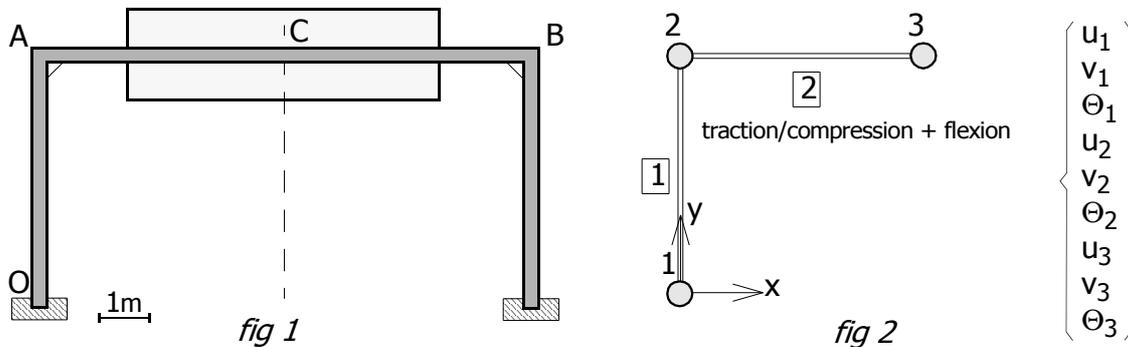


□ En déduire la rigidité équivalente du treillis (2) fig 6.

Examen 2011

Exercice 1 :

○ Le portique autoroutier défini *fig 1* est soumis à un chargement symétrique. On adopte un modèle *fig 2* avec 2 éléments [1] et [2] identiques, de longueur $L=5\text{m}$, travaillant en traction/compression + flexion. Les DDLs sont précisés ci-dessous:



□ 1- Justifier le modèle éléments finis proposé *fig 2* et montrer que 4 DDLs (sur les 9 présentés ci-dessus) sont inconnus.

Le système $[K].\{u\}=\{F\}$ à résoudre est donc de dimension 4. La matrice inverse de $[K]$ est donnée ci-dessous:

$4.28 \text{ E-}9$	0	$-1.02 \text{ E-}9$	$-2.55 \text{ E-}9$	<i>efforts en N longueurs en m</i>
0	$4.28 \text{ E-}9$	0	$4.28 \text{ E-}9$	
$-1.02 \text{ E-}9$	0	$3.31 \text{ E-}8$	$8.28 \text{ E-}8$	
$-2.55 \text{ E-}9$	$4.28 \text{ E-}9$	$8.28 \text{ E-}8$	$5.54 \text{ E-}7$	

□ 2- On considère que le poids du panneau se traduit par un effort $\vec{F} = -480 \vec{y}$ (daN) concentré en C. Calculer les déplacements.

□ 3- On considère que le poids du panneau se traduit par un effort distribué d'intensité $\vec{p} = -48 \vec{y}$ (daN/m) appliqué de A à B. Utiliser les efforts équivalents donnés en Td. Calculer les déplacements.

□ 4- Quelle est dans ce type d'étude la(es) composante(s) de contrainte fournie par la MEF? Expliquer comment elle est calculée.

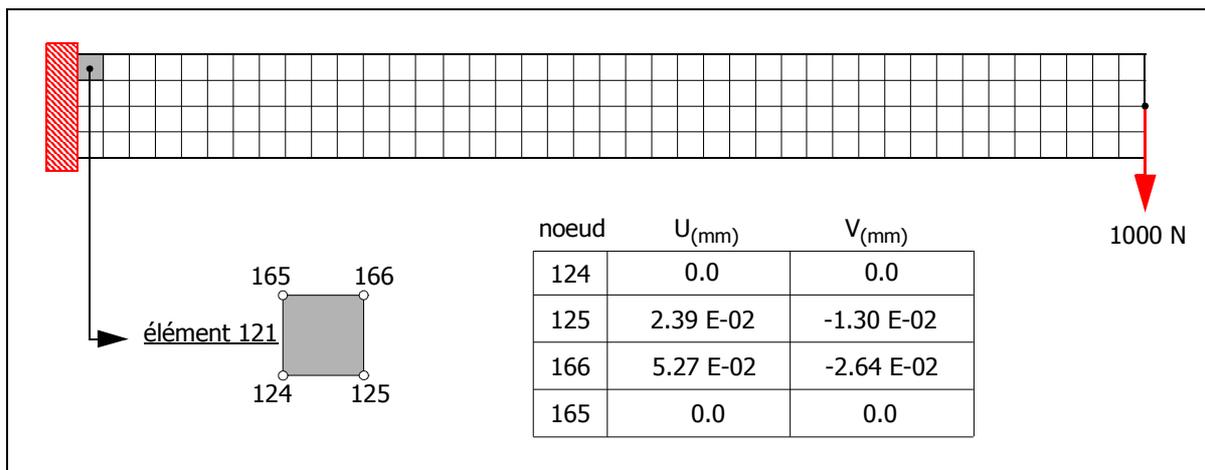
Exercice 2 :

○ Une plaque de dimensions 400mm x 40mm et d'épaisseur 4mm est encadrée sur le bord latéral gauche et soumise à un effort transverse de 1000N appliqué au milieu du bord latéral droit.

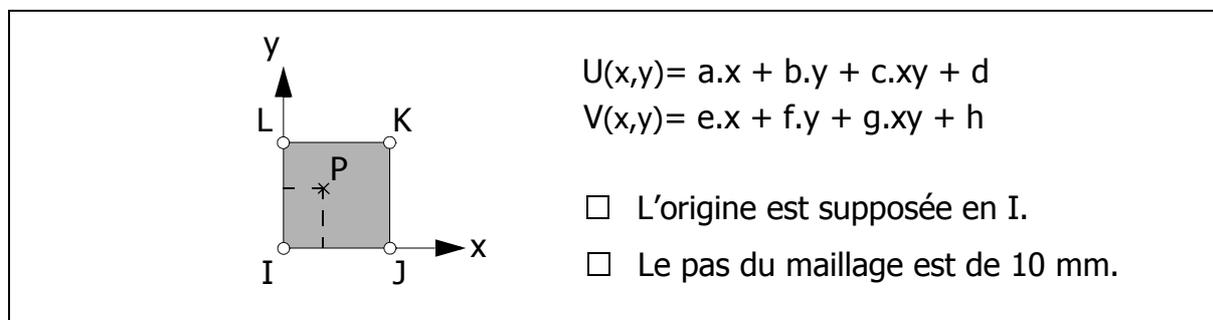
Le matériau est un alliage léger ($E=70\,000\text{MPa}$ et $\nu=0.3$)

Elle a été étudiée par la MEF avec un maillage en quadrangles de 40x4 éléments.

On s'intéresse à la maille N°121 située près de l'encastrement. Les déplacements des noeuds I=124 J=125 K=166 L=165 sont donnés en mm dans le tableau ci-dessous:



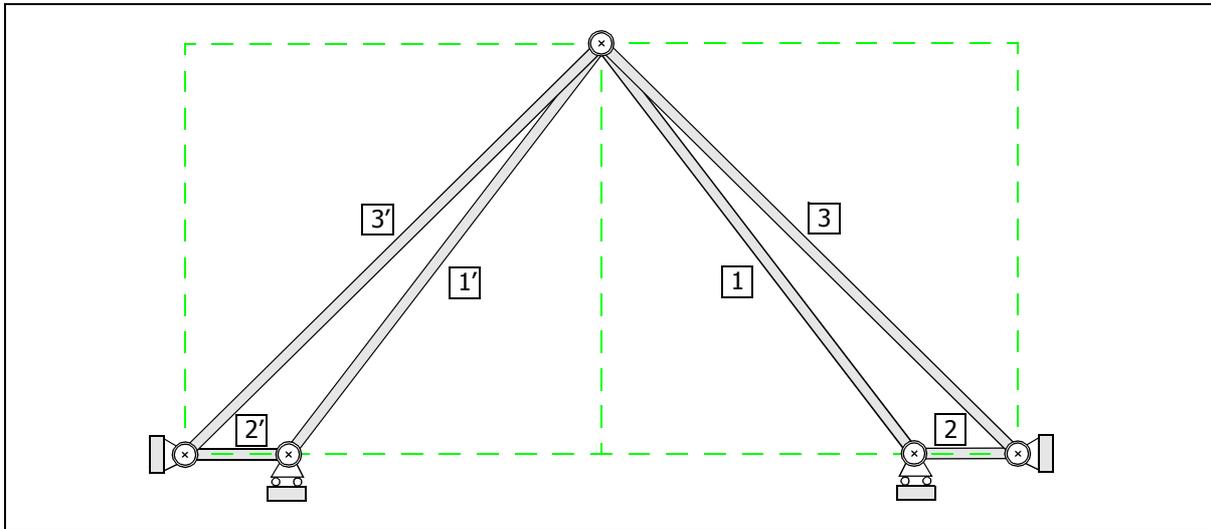
On rappelle que dans une maille quadrangulaire, le déplacement d'un point $P(x,y)$ est représenté par les fonctions $U(x,y)$ et $V(x,y)$ précisées ci-dessous:



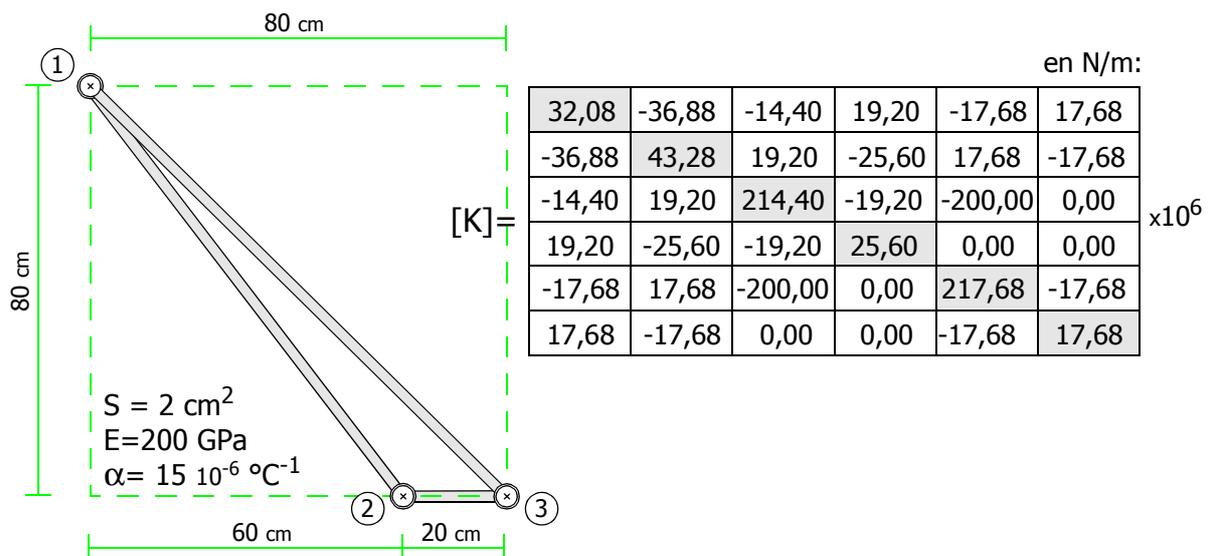
- 1- Calculer les coefficients a, b, c, d, e, f, g et h .
- 2- En déduire les variations de ϵ_x et ϵ_y dans l'élément.
- 3- Le programme Nastran fournit les contraintes calculées au centre de l'élément. Calculer σ_x au centre.
- Pouvez-vous retrouver ce résultat par un calcul RdM en considérant la plaque comme une poutre de section rectangulaire 40mm x 4mm.

Examen 2009**Exercice 1 :**

Soit la structure constituée de barres articulées définie ci-dessous:



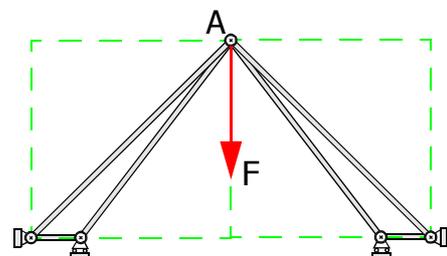
On donne la matrice de rigidité $[K]$ en N/m de la demi-structure constituée des barres $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ et relative aux noeuds $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ $\textcircled{3}$:



Un effort F vertical de 10 000 N est appliqué en A.

Calculer les déplacements ainsi que la contrainte dans la barre $\boxed{1}$.

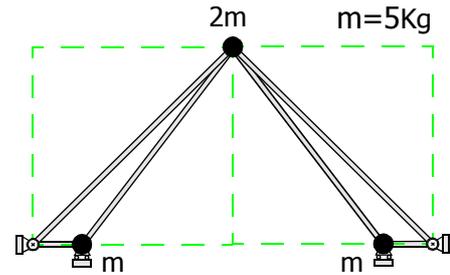
Que deviennent ces résultats si les barres $\boxed{2}$, $\boxed{2'}$ ont un comportement rigide?



Les barres $\boxed{2}$ et $\boxed{2'}$ sont soumises à une élévation de température $\Delta T = 100^\circ$.

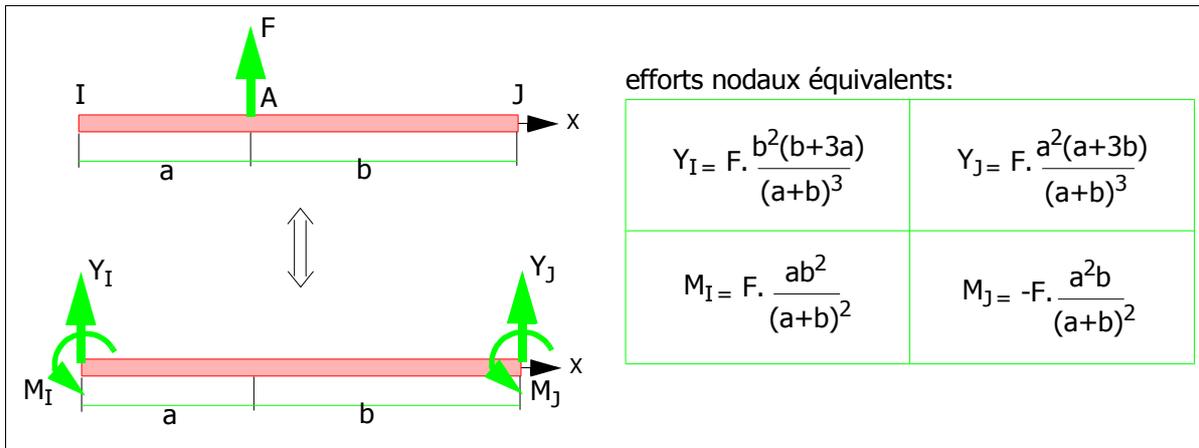
Calculer les déplacements, la contrainte dans la barre $\boxed{2}$ et l'action du bâti sur le noeud $\textcircled{3}$.

- Des masses ponctuelles sont installées sur les noeuds ①, ② et ③. La masse des barres est supposée négligeable devant m .
Calculer les 2 pulsations correspondant aux modes symétriques.



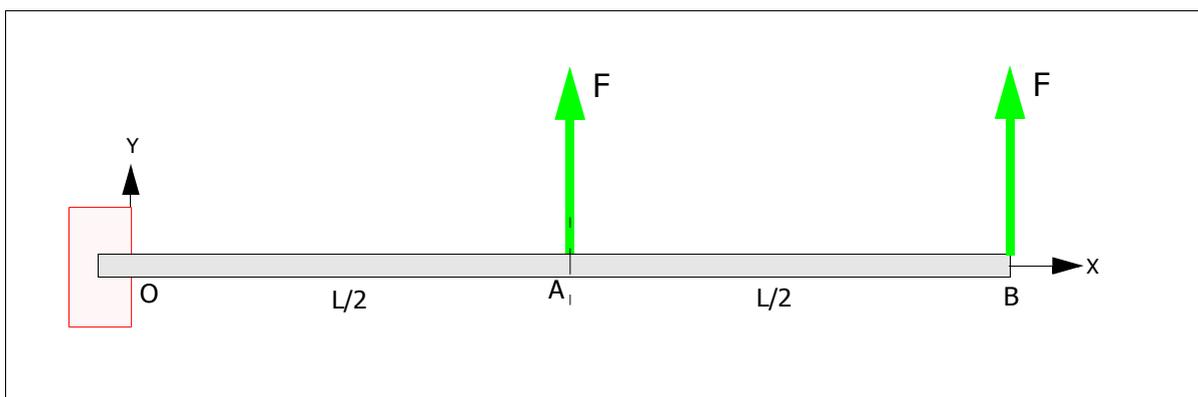
Exercice 2 :

- Un effort F appliqué sur un élément 'beam' [I-J] peut être remplacé par les efforts nodaux équivalents Y_I, M_I, Y_J et M_J . Pour cela, on utilise le formulaire suivant :



Expliquer comment sont calculés ces efforts équivalents.

- La structure suivante est constituée d'une poutre de longueur L , dont la section est caractérisée par I_z , encastée à l'origine et soumise en A et B à 2 efforts ponctuels d'intensité F . Le module élastique est désigné par E .



On décide de modéliser la travée OB par un seul élément 'beam' en remplaçant l'effort F appliqué en A par les efforts nodaux équivalents.

- Mettre en place le système 2x2 à résoudre.
 Résoudre pour trouver V_B et Θ_B .