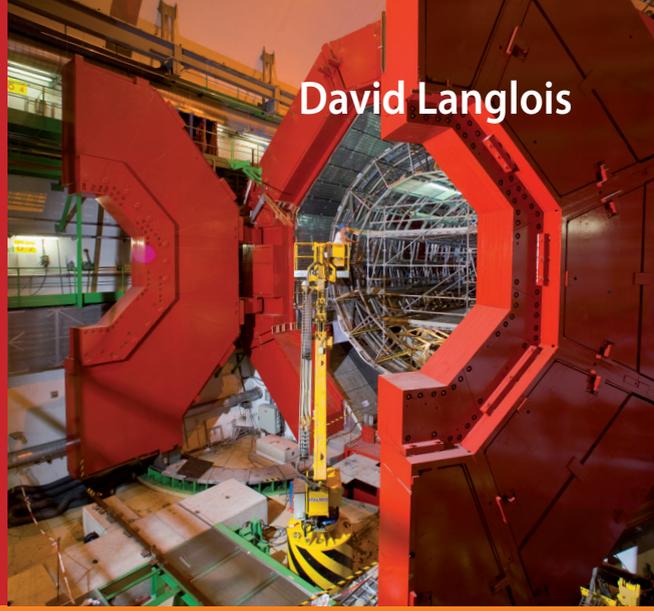


David Langlois

MASTER  
PHYSIQUE FONDAMENTALE  
& ASTROPHYSIQUE  
ÉCOLES D'INGÉNIEURS



# Relativité générale

Des fondements géométriques  
aux applications astrophysiques

- Cours complet
- Exercices d'application
- Tous les corrigés détaillés

Vuibert



# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>VII</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Éléments de géométrie</b>	<b>3</b>
1.1 Quelques notions d'algèbre linéaire . . . . .	3
1.2 Espaces courbes . . . . .	11
1.3 Dérivation covariante . . . . .	20
1.4 Courbes et trajectoires newtoniennes . . . . .	24
1.5 Exercices . . . . .	27
1.6 Corrigés . . . . .	30
<b>2 Relativité restreinte</b>	<b>39</b>
2.1 Espace-temps de Minkowski . . . . .	39
2.2 Électromagnétisme . . . . .	45
2.3 Trajectoires dans l'espace-temps . . . . .	48
2.4 Dynamique relativiste . . . . .	53
2.5 Coordonnées de Rindler . . . . .	57
2.6 Exercices . . . . .	64
2.7 Corrigés . . . . .	67
<b>3 Courbure et équations d'Einstein</b>	<b>79</b>
3.1 Tenseurs de courbure . . . . .	79
3.2 Gravitation relativiste et équations d'Einstein . . . . .	91
3.3 Solution de Schwarzschild . . . . .	97
3.4 Exercices . . . . .	100
3.5 Corrigés . . . . .	104
<b>4 Géométrie et symétries</b>	<b>111</b>
4.1 Dérivée de Lie . . . . .	111
4.2 Champ vectoriel de Killing . . . . .	113
4.3 Géodésiques de Schwarzschild . . . . .	115

4.4	Exercices . . . . .	124
4.5	Corrigés . . . . .	127
<b>5</b>	<b>Étoiles relativistes et trous noirs</b>	<b>135</b>
5.1	Étoiles relativistes . . . . .	135
5.2	Trou noir de Schwarzschild . . . . .	141
5.3	Autres trous noirs . . . . .	147
5.4	Exercices . . . . .	148
5.5	Corrigés . . . . .	153
<b>6</b>	<b>Cosmologie</b>	<b>165</b>
6.1	Géométries homogènes et isotropes . . . . .	165
6.2	Évolution cosmologique . . . . .	169
6.3	Paramètres cosmologiques . . . . .	174
6.4	Le modèle standard de la cosmologie . . . . .	177
6.5	Exercices . . . . .	179
6.6	Corrigés . . . . .	182
<b>7</b>	<b>Ondes gravitationnelles</b>	<b>187</b>
7.1	Équations d'Einstein linéarisées . . . . .	187
7.2	Choix de « jauge » . . . . .	189
7.3	Propagation des ondes gravitationnelles . . . . .	190
7.4	Détection des ondes gravitationnelles . . . . .	192
7.5	Émission d'ondes gravitationnelles . . . . .	194
7.6	Exemple d'un système binaire . . . . .	198
7.7	Exercices . . . . .	203
7.8	Corrigés . . . . .	205
<b>A</b>	<b>Compléments mathématiques</b>	<b>211</b>
1.1	Variétés différentielles . . . . .	211
1.2	Espace vectoriel tangent . . . . .	212
1.3	Intégration . . . . .	214
<b>B</b>	<b>Principes variationnels</b>	<b>217</b>
2.1	Formalisme lagrangien . . . . .	217
2.2	Principe variationnel en théorie des champs . . . . .	218
<b>C</b>	<b>Formulaire</b>	<b>223</b>
3.1	Notations compactes pour les indices . . . . .	223
3.2	Principales formules . . . . .	223
	<b>Index</b>	<b>225</b>

## Introduction

En 1905, avec son célèbre article « Sur l'électrodynamique des corps en mouvement », Einstein bouleversait les fondations de la physique classique. Dans ce nouveau cadre, il était nécessaire de repenser la gravitation, dont l'interprétation newtonienne était manifestement incompatible avec la relativité. En effet, la force de gravitation newtonienne est une force à *distance* et *instantanée* qu'exerce un corps massif sur tout autre corps massif, ce qui est inconciliable avec le monde relativiste où un signal ne peut se propager plus vite que la lumière.

En 1907, à l'occasion d'un article de revue sur la relativité restreinte, Einstein publia ses premières réflexions sur la gravitation relativiste. Mais il lui fallut encore huit ans pour achever la construction d'une théorie cohérente. Si cette tâche s'est révélée beaucoup plus ardue qu'on pouvait le penser au premier abord, c'est que le champ gravitationnel ne peut être traité comme les autres champs, tel le champ électromagnétique, qui « vivent » dans l'espace-temps quadri-dimensionnel de la relativité restreinte.

Comme l'a judicieusement remarqué Einstein, le caractère singulier du champ gravitationnel se manifeste déjà dans sa formulation newtonienne, à travers l'égalité des masses inertielle et gravitationnelle. Précisons les définitions de ces dernières en comparant force électrique et force gravitationnelle. Si l'on plonge une particule chargée dans un potentiel électrique  $\phi_e$ , la relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$m_i \vec{a} = -q_e \vec{\nabla} \phi_e, \quad (1)$$

où  $\vec{a}$  est l'accélération de la particule,  $q_e$  sa charge électrique, et  $m_i$  sa masse *inertielle*, qui caractérise la « réponse » de la particule à toute force exercée sur elle. La même particule, plongée cette fois dans un potentiel gravitationnel  $\phi_g$ , satisfait la relation

$$m_i \vec{a} = -m_g \vec{\nabla} \phi_g, \quad (2)$$

où la force gravitationnelle dépend de la masse *gravitationnelle*, qui exprime le *couplage* de la particule au champ  $\phi_g$ , de même que la charge électrique  $q_e$  représente son couplage au champ électrique.

L'égalité entre masse inertielle et masse gravitationnelle,

$$m_i = m_g, \quad (3)$$

singularise l'interaction gravitationnelle et apparaît comme une coïncidence remarquable, et inexplicable, du point de vue de la théorie classique. Cette propriété a conduit Einstein à formuler le principe d'équivalence, qui postule que les lois de la physique sont identiques dans un référentiel qui subit une accélération constante et dans un référentiel au repos dans un champ gravitationnel uniforme, et encore qu'un champ gravitationnel peut être *localement* effacé par une accélération.

Ce lien entre accélération et champ gravitationnel prend tout son sens en relativité générale, où l'espace, et même l'espace-temps, devient courbe. Dans la limite non relativiste, cette courbure fait apparaître un terme additionnel dans l'expression de l'accélération,

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_{\text{Newton}} + \vec{\nabla}\phi_g. \quad (4)$$

Ainsi, à la particule newtonienne subissant une force gravitationnelle se substitue l'idée d'une particule *libre* se déplaçant dans une espace-temps *déformé*. En relativité générale, le champ gravitationnel s'identifie à la géométrie de l'espace-temps, qui devient élastique.

Au-delà de cette équivalence entre champ gravitationnel et géométrie, le deuxième aspect de la relativité générale est le lien entre déformation de la géométrie et contenu en matière, incarné par les équations d'Einstein. Ces équations, obtenues par Einstein en 1915, généralisent au cadre relativiste l'équation de Poisson newtonienne,

$$\Delta\phi_g = 4\pi G\rho_m. \quad (5)$$

Elles expriment, de façon intrinsèque, que la déformation de l'espace-temps est d'autant plus grande que la matière, ou énergie, y est concentrée.

Pendant des dizaines d'années, la relativité générale est restée une théorie marginale dans le monde de la physique car, outre sa formulation très mathématique, son domaine d'application semblait extrêmement limité. Avec le développement de l'astrophysique relativiste et de la cosmologie, la relativité générale est devenue une théorie fondamentale incontournable en physique.

## Éléments de géométrie

La théorie de la relativité générale est fondée sur le principe suivant : *la géométrie qui nous entoure n'est pas euclidienne* (ni même pseudo-euclidienne comme en relativité restreinte) *mais « courbe » et les phénomènes gravitationnels que nous observons sont la manifestation du caractère non euclidien de l'espace-temps*. Comprendre l'essence de la relativité générale requiert donc une familiarisation avec la géométrie non euclidienne. Ce sera l'objet du présent chapitre.

Le formalisme que nous allons introduire permet de décrire de façon intrinsèque la géométrie de surfaces ou d'espaces qui sont « courbes ». Prenons l'exemple le plus simple de surface courbe : la sphère. Celle-ci est définie, en géométrie ordinaire, comme une surface plongée dans l'espace tri-dimensionnel habituel, qui est *euclidien*. Grâce aux outils de la géométrie non euclidienne, la géométrie sphérique peut être définie *intrinsèquement*, c'est-à-dire du point de vue d'un observateur bi-dimensionnel confiné à la sphère, indépendamment de l'espace euclidien sous-jacent. Dans cette description intrinsèque, la surface courbe devient un objet géométrique indépendant.

Ces outils peuvent être généralisés à trois dimensions ou plus. Ainsi, en relativité générale, on travaille avec quatre dimensions : trois dimensions spatiales plus une dimension temporelle. Dans ce chapitre, afin de faciliter l'assimilation progressive du formalisme, nous nous placerons principalement dans le cadre plus intuitif de dimensions uniquement spatiales. Mais la plupart des résultats obtenus s'appliqueront, sans changement, à la relativité générale, comme nous le verrons dans les chapitres suivants.

### 1.1 Quelques notions d'algèbre linéaire

Avant d'aborder les espaces courbes, il est indispensable d'introduire quelques notions essentielles d'algèbre linéaire. À l'exception des tenseurs, ces notions sont, en principe, déjà connues du lecteur.

### 1.1.1 Espace vectoriel euclidien

Un espace euclidien (ou pseudo-euclidien) est un espace vectoriel  $E$  muni d'un *produit scalaire*, c'est-à-dire d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée<sup>1</sup>, que nous noterons  $\mathbf{g}$ , qui associe un nombre réel à tout couple de vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  de  $E$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{g} : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Par définition,  $\mathbf{g}$  étant symétrique, on a  $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ . D'autre part,  $\mathbf{g}$  étant non dégénérée, si un vecteur  $\mathbf{u}$  vérifie  $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$  pour tout vecteur  $\mathbf{v}$ , alors  $\mathbf{u} = 0$  nécessairement.

En introduisant une base de vecteurs indépendants  $\mathbf{e}_i$ , avec  $i = 1, \dots, n$ ,  $n$  étant la dimension de l'espace vectoriel  $E$ , tout vecteur  $\mathbf{u}$  de  $E$  se décompose de façon unique comme

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u^i \mathbf{e}_i, \quad (1.2)$$

où les nombres  $u^i$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{u}$  dans cette base.

De plus, dans cette même base  $\{\mathbf{e}_i\}$ , le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  s'écrit

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g} \left( \sum_i u^i \mathbf{e}_i, \sum_j v^j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i,j} u^i v^j \mathbf{g}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j} g_{ij} u^i v^j, \quad (1.3)$$

où on a utilisé la bilinéarité de  $\mathbf{g}$  dans la deuxième égalité, et introduit les coefficients

$$g_{ij} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \quad (1.4)$$

qui sont les composantes de  $\mathbf{g}$  dans la base  $\{\mathbf{e}_i\}$ . Le produit scalaire étant *symétrique*, ces coefficients vérifient

$$g_{ij} = g_{ji}. \quad (1.5)$$

On dit que les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  forment une base orthonormale (ou pseudo-orthonormale) lorsque les vecteurs sont normalisés et orthogonaux entre eux, par rapport au produit scalaire  $\mathbf{g}$ , c'est-à-dire si

$$g_{ij} = \pm \delta_{ij}, \quad (1.6)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ). Le nombre de + et de - qui apparaissent dans les coefficients  $g_{ij}$  est indépendant du choix de la

<sup>1</sup> Un produit scalaire, au sens strict, correspond à une forme bilinéaire symétrique non dégénérée *définie positive*. Cependant, la géométrie relativiste est fondée sur une forme bilinéaire symétrique qui n'est pas positive, comme nous le verrons dans le chapitre suivant. Pour simplifier, nous parlerons également de produit scalaire dans ce cas.

base (pseudo-) orthonormale et définit la signature de  $\mathbf{g}$ . En géométrie euclidienne, la signature ne contient que des  $+$ ; en relativité, la signature est  $(-, +, +, +)^2$ .

Dorénavant, nous allons appliquer systématiquement la **convention d'Einstein** qui consiste à ne pas écrire explicitement le signe  $\sum$  mais à sommer *implicitement* en utilisant la répétition du même indice alternativement en position basse et haute. La décomposition (1.2) se réécrit donc

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i. \quad (1.7)$$

De même, l'expression (1.3) devient

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_{ij} u^i v^j. \quad (1.8)$$

Cette notation allège significativement les formules mais requiert un soin particulier dans le positionnement des indices.

Les composantes  $u^i$  du vecteur  $\mathbf{u}$  dépendent bien sûr du choix des vecteurs de base  $\mathbf{e}_i$ . Dans une autre base  $\{\mathbf{e}'_i\}$ , le vecteur  $\mathbf{u}$  aura des composantes différentes, notons-les  $u'^i$ , définies par la nouvelle décomposition

$$\mathbf{u} = u'^i \mathbf{e}'_i. \quad (1.9)$$

De même, les composantes du produit scalaire,  $g'_{ij} = \mathbf{g}(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j)$ , seront en général différentes.

### 1.1.2 Tenseurs

#### Formes linéaires ou covecteurs

Toutes les formes linéaires agissant sur un espace vectoriel  $E$ ,

$$\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{u} \rightarrow \lambda(\mathbf{u}), \quad (1.10)$$

définissent elles-mêmes un nouvel espace vectoriel, appelé espace vectoriel dual et noté  $E^*$ . De ce point de vue, les formes linéaires, qui sont les éléments de  $E^*$ , sont appelées **covecteurs**.

L'espace dual a la même dimension que  $E$ , et à tout choix d'une base  $\{\mathbf{e}_i\}$  dans  $E$  correspond une base duale dans  $E^*$ , constituée des covecteurs  $\mathbf{e}_*^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) définis par<sup>3</sup>

$$\mathbf{e}_*^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i. \quad (1.11)$$

<sup>2</sup> Nous suivons ici la convention la plus courante en relativité générale. On peut également rencontrer dans quelques ouvrages de relativité générale la signature  $(+, -, -, -)$ , qui est adoptée dans la plupart des livres de relativité restreinte.

<sup>3</sup> Noter la position supérieure de l'indice  $i$  dans  $\mathbf{e}_*^i$ , ce qui permet d'utiliser la notation d'Einstein dans l'espace dual également.

Tout élément  $\lambda$  de  $E^*$  se décompose de façon unique sur la base duale :

$$\lambda = \lambda_i e_i^* \quad \text{avec} \quad \lambda_i \equiv \lambda(e_i), \quad (1.12)$$

comme on peut le vérifier explicitement en faisant agir  $\lambda$  successivement sur les vecteurs de base  $e_i$  et en utilisant (1.11). L'action de  $\lambda$  sur un vecteur  $\mathbf{u}$  quelconque de  $E$ , s'écrit donc, en fonction des composantes,

$$\lambda(\mathbf{u}) = \lambda(u^i e_i) = u^i \lambda(e_i) = \lambda_i u^i. \quad (1.13)$$

En dimension finie, l'espace vectoriel  $E$  peut être identifié à l'espace vectoriel dual de  $E^*$ , c'est-à-dire au dual du dual<sup>4</sup> :

$$E \equiv (E^*)^*. \quad (1.14)$$

Un vecteur de  $E$  peut donc être vu comme une forme linéaire agissant sur  $E^*$ .

### Composantes covariantes et contravariantes

Le produit scalaire  $\mathbf{g}$  permet d'établir une correspondance naturelle entre les éléments de  $E$  et ceux de  $E^*$ . En effet, à tout vecteur  $\mathbf{u}$  de  $E$ , on peut associer une forme linéaire  $\tilde{\mathbf{u}}$  dont l'action sur les vecteurs  $\mathbf{v}$  de  $E$  est définie par

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (1.15)$$

Dans une base  $\{e_i\}$  de  $E$  et la base duale associée, la définition ci-dessus correspond à la relation entre composantes

$$\tilde{u}_i = g_{ij} u^j. \quad (1.16)$$

Réciproquement, l'action de toute forme linéaire  $\tilde{\mathbf{u}}$  peut s'exprimer comme le produit scalaire avec un vecteur  $\mathbf{u}$  (obtenu en inversant la relation ci-dessus pour exprimer les  $u^i$  en fonction des  $\tilde{u}_j$ ).

Dans la suite, on utilisera le *même symbole* pour désigner les composantes de ces deux objets mathématiquement distincts,  $\mathbf{u}$  et  $\tilde{\mathbf{u}}$ , la position de l'indice permettant de les distinguer : les composantes du vecteur  $\mathbf{u}$ , appelées composantes **contravariantes**, seront ainsi notées  $u^i$  et celles du covecteur associé  $\tilde{\mathbf{u}}$ , appelées composantes **covariantes**,  $u_i$ . On a donc les relations

$$u_i = g_{ij} u^j, \quad u^i = g^{ij} u_j, \quad (1.17)$$

où les  $g^{ij}$  représentent les coefficients de l'inverse de la matrice constituée des  $g_{ij}$  :

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i. \quad (1.18)$$

<sup>4</sup> En effet, on peut associer à tout vecteur  $\mathbf{u}$  de  $E$  une forme linéaire  $\mu_{\mathbf{u}}$  agissant sur l'espace vectoriel  $E^*$ , définie par  $\mu_{\mathbf{u}}(\lambda) \equiv \lambda(\mathbf{u})$ . Réciproquement, à toute forme linéaire  $\mu$  sur  $E^*$ , on peut associer un vecteur  $\mathbf{u}$  tel que  $\mu = \mu_{\mathbf{u}}$  : dans une base  $\{e_i\}$ , et la base duale associée  $\{e_i^*\}$ , on a  $\mu(\lambda) = \mu(\lambda_i e_i^*) = \lambda_i \mu(e_i^*)$  et les composantes de  $\mathbf{u}$  sont  $u^i = \mu(e_i^*)$ .

## Tenseurs

Une forme multilinéaire sur  $E$  est une application de  $E \times \cdots \times E$  dans  $\mathbb{R}$  qui, à tout multiplet de vecteurs de  $E$ , associe un nombre réel et qui vérifie la propriété de linéarité par rapport à chacun de ses arguments.

Plus généralement, on appelle **tenseur** une forme *multilinéaire* définie sur le produit  $E \times \cdots \times E \times E^* \times \cdots \times E^*$ , qui à  $p$  vecteurs de  $E$  et à  $q$  covecteurs de  $E^*$  associe un nombre réel :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \quad E \times \cdots \times E \times E^* \times \cdots \times E^* &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_q) &\rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_q). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Dans ce cas, on parle, plus précisément, d'un tenseur  $p$  fois **covariant** et  $q$  fois **contravariant**, ou encore de type  $(p, q)$ .

Remarquons immédiatement qu'un covecteur est un tenseur une fois covariant. De même, un vecteur de  $E$ , assimilé à une forme linéaire sur  $E^*$ , est un tenseur une fois contravariant. Enfin, le produit scalaire  $\mathbf{g}$  est un exemple de tenseur deux fois covariant.

Une base  $\{\mathbf{e}_i\}$  de  $E$  étant choisie, on obtient les composantes d'un tenseur quelconque  $\mathbf{T}$  en évaluant ce tenseur sur les vecteurs de la base et les covecteurs de la base duale :

$$T_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} \equiv \mathbf{T}(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_p}, \mathbf{e}_*^{j_1}, \dots, \mathbf{e}_*^{j_q}). \quad (1.20)$$

Tous les indices covariants sont en position basse et les indices contravariants en position haute. Il est immédiat de vérifier que cette définition générale des composantes d'un tenseur est compatible avec nos définitions précédentes des composantes d'un vecteur, d'un covecteur ou d'un produit scalaire.

Comme pour les vecteurs et covecteurs, on peut utiliser la métrique ou la métrique inverse pour modifier le degré de covariance (et de contravariance) d'un tenseur. En partant d'un tenseur  $\mathbf{T}$  de type  $(p, q)$ , on peut ainsi définir les composantes totalement covariantes

$$T_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} \equiv g_{j_1 l_1} \cdots g_{j_q l_q} T_{i_1 \dots i_p}{}^{l_1 \dots l_q}, \quad (1.21)$$

ou les composantes totalement contravariantes

$$T^{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} \equiv g^{i_1 k_1} \cdots g^{i_p k_p} T_{k_1 \dots k_p}{}^{j_1 \dots j_q}, \quad (1.22)$$

ou toute version hybride avec des indices à la fois covariants et contravariants. Par abus de langage, ces diverses composantes seront considérées comme des variantes du même tenseur et désignées par la même lettre. Pour tous les tenseurs, la « montée » ou la « descente » des indices s'effectuera par l'intermédiaire, respectivement, de la métrique inverse ou de la métrique <sup>5</sup>.

<sup>5</sup> Cette prescription est compatible avec la définition des  $g^{ij}$  comme les coefficients de l'inverse de la matrice des  $g_{ij}$  (voir (1.18)), car on a bien  $g^{ik} g^{jl} g_{kl} = g^{ik} \delta_k^j = g^{ij}$ .

Dans la suite, il sera parfois utile d'utiliser les notations compactes suivantes :

$$T_{(ij)} \equiv \frac{1}{2!} (T_{ij} + T_{ji}), \quad T_{(ijk)} \equiv \frac{1}{3!} (T_{ijk} + T_{jik} + T_{jki} + T_{kji} + T_{kij} + T_{ikj}), \quad (1.23)$$

ainsi que

$$T_{[ij]} \equiv \frac{1}{2!} (T_{ij} - T_{ji}), \quad T_{[ijk]} \equiv \frac{1}{3!} (T_{ijk} - T_{jik} + T_{jki} - T_{kji} + T_{kij} - T_{ikj}), \quad (1.24)$$

et leurs extensions à un nombre quelconque d'indices.

### Produit tensoriel

Le produit tensoriel, noté  $\otimes$ , permet de construire des tenseurs en combinant des tenseurs d'ordre inférieur. Par exemple, à partir de deux covecteurs  $\lambda$  et  $\mu$  éléments de  $E^*$ , on peut constituer le tenseur deux fois covariant  $\mathbf{T} \equiv \lambda \otimes \mu$ , défini par

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \lambda \otimes \mu(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \lambda(\mathbf{u}) \mu(\mathbf{v}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^*. \quad (1.25)$$

On voit facilement que les composantes du tenseur  $\mathbf{T}$  sont simplement données par le produit des composantes de  $\lambda$  et de  $\mu$ ,

$$T_{ij} = \lambda_i \mu_j. \quad (1.26)$$

La définition ci-dessus se généralise immédiatement au produit tensoriel de deux tenseurs quelconques. Ainsi, le produit d'un tenseur de type  $(p_1, q_1)$  et d'un tenseur de type  $(p_2, q_2)$  est un tenseur  $(p_1 + p_2)$  fois covariant et  $(q_1 + q_2)$  fois contravariant. Les composantes du produit tensoriel sont également données par les produits des composantes des deux tenseurs.

Une application très utile du produit tensoriel est la construction d'une base généralisée, obtenue en combinant les vecteurs  $e_i$  d'une base de  $E$  et les covecteurs  $e_*^j$  de la base duale, qui permet de décomposer un tenseur quelconque :

$$\mathbf{T} = T_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} e_*^{i_1} \otimes \dots \otimes e_*^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}. \quad (1.27)$$

Les coefficients qui apparaissent dans cette décomposition correspondent aux composantes définies dans (1.20), comme on peut le vérifier explicitement<sup>6</sup>. Remarquons que le produit scalaire  $\mathbf{g}$ , qui est un tenseur deux fois covariant, a pour décomposition

$$\mathbf{g} = g_{ij} e_*^i \otimes e_*^j. \quad (1.28)$$

<sup>6</sup> D'après (1.27),

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}, e_*^{l_1}, \dots, e_*^{l_q}) &= T_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} e_*^{i_1} \otimes \dots \otimes e_*^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}, e_*^{l_1}, \dots, e_*^{l_q}) \\ &= T_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} e_*^{i_1}(e_{k_1}) \dots e_*^{i_p}(e_{k_p}) e_{j_1}(e_*^{l_1}) \dots e_{j_q}(e_*^{l_q}) \\ &= T_{k_1 \dots k_p}{}^{l_1 \dots l_q}, \end{aligned}$$

où on a utilisé  $e_*^i(e_k) = \delta_k^i$  et  $e_j(e_*^l) = \delta_j^l$ . On retrouve donc bien (1.20).

### Contraction des tenseurs

À l'inverse du produit tensoriel, on peut réduire le degré de covariance d'un tenseur en effectuant une **contraction**. Il est plus simple de définir celle-ci en utilisant les composantes des tenseurs : à partir d'un tenseur  $\mathbf{T}$ ,  $p$  fois covariant et  $q$  fois contravariant, on construit un tenseur  $\hat{\mathbf{T}}$ ,  $(p-1)$  fois covariant et  $(q-1)$  fois contravariant, dont les composantes sont

$$\hat{T}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = T_{i_1 \dots k \dots i_p}^{j_1 \dots k \dots j_q}, \quad (1.29)$$

avec sommation implicite sur l'indice  $k$ .

Le résultat ne dépend pas du choix de la base, comme on peut le vérifier facilement, et cette définition est donc bien intrinsèque. En revanche, le tenseur  $\hat{\mathbf{T}}$  dépend du choix des positions de l'indice covariant et de l'indice contravariant qui sont sommés. Pour un tenseur de type  $(p, q)$ , il y a donc  $p \times q$  contractions possibles (certaines pouvant être identiques si le tenseur initial possède des propriétés de symétrie).

En combinant produit tensoriel et contractions, on peut « contracter » partiellement, ou totalement, des tenseurs entre eux (éventuellement en utilisant la métrique). On peut définir par exemple

$$T = U^{ij} V_{ij}, \quad T_j^i = U^{ik} V_{kj}. \quad (1.30)$$

### Tenseurs totalement antisymétriques

Parmi les tenseurs uniquement covariants, on distingue les tenseurs *totalement antisymétriques*, qui vérifient la propriété suivante : l'action d'un tel tenseur  $\omega$ ,  $p$  fois covariant (aussi appelé  $p$ -forme), sur  $p$  vecteurs arbitraires change de signe si on échange deux vecteurs quelconques :

$$\omega(\dots, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{v}, \dots) = -\omega(\dots, \mathbf{v}, \dots, \mathbf{u}, \dots), \quad (1.31)$$

les points représentant les autres vecteurs, dont la position reste inchangée.

Une conséquence immédiate de cette propriété est que la valeur de  $\omega$  pour  $p$  vecteurs dont deux sont identiques, est nécessairement nulle. Le nombre de composantes indépendantes de  $\omega$  correspond donc au nombre de choix différents de  $p$  vecteurs parmi les  $n$  vecteurs d'une base  $\{\mathbf{e}_k\}$  de  $E$ , c'est-à-dire  $n!/(n-p)!p!$ .

En particulier, un tenseur totalement antisymétrique  $n$  fois covariant ne possède qu'une seule composante indépendante, par exemple

$$\omega_{1\dots n} = \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n), \quad (1.32)$$

toutes les autres composantes non nulles s'en déduisant par permutation des indices ( $\omega_{213\dots n} = -\omega_{123\dots n}$ , etc). Tous les tenseurs  $n$  fois covariants et totalement antisymétriques sont donc proportionnels entre eux. Lorsqu'un produit scalaire  $\mathbf{g}$  est défini, il est commode de sélectionner parmi ces tenseurs, le tenseur particulier, appelé **tenseur de Levi-Civita** et noté  $\epsilon$ , qui vérifie la condition de normalisation

$$g^{i_1 k_1} \dots g^{i_n k_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} \epsilon_{k_1 \dots k_n} = (-1)^s n!, \quad (1.33)$$

où  $s$  est le nombre de moins dans la signature de la métrique  $g$  ( $s = 0$  en géométrie euclidienne;  $s = 1$  en relativité). Dans une base orthonormale (ou pseudo-orthonormale), on a donc  $\epsilon_{1\dots n} = 1$ . Plus généralement, le terme de gauche dans (1.33) correspond au déterminant de la matrice  $[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}$  multiplié par  $n!$ , et par conséquent

$$\epsilon_{1\dots n} = \sqrt{(-1)^s g} \quad (1.34)$$

où  $g$  est le déterminant de la matrice  $[g_{ij}]$  des composantes de la métrique.

Une identité très utile est

$$\epsilon^{i_1\dots i_n} \epsilon_{k_1\dots k_n} = (-1)^s n! \delta_{k_1}^{[i_1} \dots \delta_{k_n}^{i_n]}, \quad (1.35)$$

où la version covariante de  $\epsilon$  est obtenue, comme d'habitude, en contractant  $n$  fois avec la métrique inverse,

$$\epsilon^{i_1\dots i_n} \equiv g^{i_1 j_1} \dots g^{i_n j_n} \epsilon_{j_1\dots j_n}. \quad (1.36)$$

Il est facile de vérifier l'identité (1.35) : le résultat est non nul seulement si les indices  $i_p$  et les indices  $k_p$  sont des permutations de  $\{1, \dots, n\}$ ; de plus, le coefficient de proportionnalité s'obtient en contractant tous les indices  $i_p$  avec les indices  $k_p$ , c'est-à-dire en multipliant l'expression par  $\delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{i_n}^{k_n}$  et en comparant avec (1.33).

Enfin, une contraction partielle de (1.35) conduit à

$$\epsilon^{i_1\dots i_p i_{p+1}\dots i_n} \epsilon_{i_1\dots i_p k_{p+1}\dots k_n} = (-1)^s p!(n-p)! \delta_{k_{p+1}}^{[i_{p+1}} \dots \delta_{k_n}^{i_n]}. \quad (1.37)$$

### Notation abstraite indicée pour les tenseurs

Dans la suite, nous utiliserons souvent pour les tenseurs une notation hybride, à mi-chemin entre notation intrinsèque et notation en composantes, et qui combine les avantages de ces deux notations. L'avantage de la notation intrinsèque est de désigner directement les objets mathématiques, indépendamment du choix d'une base de vecteurs. Cependant, contrairement à la mécanique classique où seuls les vecteurs sont utilisés (à l'exception de la mécanique des milieux continus qui utilise la notion de tenseur des contraintes), la relativité, et surtout la relativité générale, a recours à de nombreux tenseurs. Dans ce cas, la notation en composantes est très utile car le nombre et la position des indices permet d'identifier immédiatement le type de tenseur.

Nous allons donc introduire une notation qui représente les objets *intrinsèques* en leur ajoutant des indices *formels*, ou *abstraites*, pour indiquer leur type tensoriel. Afin de distinguer ces indices abstraits des indices habituels pour les composantes, nous leur réserverons les premières lettres de l'alphabet latin ( $a, b, \dots$ ). Pour les indices ordinaires des *composantes*, nous utiliserons la deuxième moitié de l'alphabet latin ( $i, j, \dots$ ) pour les indices *spatiaux* et l'alphabet grec pour les indices *spatio-temporels* de la relativité.

Ainsi, un vecteur en géométrie euclidienne, noté ordinairement  $\vec{u}$ , sera noté  $u^a$ , et ses composantes (par rapport à une base spécifique) seront notées  $u^i$ . Le tenseur métrique sera noté intrinsèquement  $g_{ab}$  et ses composantes  $g_{ij}$ . On aura donc équivalence entre les notations *intrinsèques* suivantes

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv g_{ab} u^a v^b, \quad (1.38)$$

alors que l'écriture en composantes, qui dépend du système de la base choisie, sera  $g_{ij}u^i v^j$ . Cette notation hybride « imite » donc la notation en composantes mais ne concerne que les objets intrinsèques. En pratique, toute relation tensorielle avec des indices abstraits implique la même relation entre composantes.

La souplesse de cette notation permet de simplifier les notations intrinsèques habituelles. Par exemple, le produit tensoriel de deux formes linéaires  $\mathbf{T} = \boldsymbol{\lambda} \otimes \boldsymbol{\mu}$  s'écrit simplement

$$T_{ab} = \lambda_a \mu_b. \quad (1.39)$$

## 1.2 Espaces courbes

Nous allons maintenant nous intéresser aux espaces affines et aux espaces courbes. Dans ces espaces, les points sont repérés grâce à des systèmes de coordonnées. Seuls les espaces affines possèdent des systèmes de coordonnées cartésiennes, particulièrement commodes. Dans ce qui suit, nous allons nous inspirer du passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées curvilignes dans les espaces affines pour étudier le cas des espaces courbes. Nous verrons ainsi comment construire un espace vectoriel en tout point d'un espace courbe en définissant les vecteurs comme des opérateurs de dérivation.

### 1.2.1 Coordonnées curvilignes

#### Espace affine

Un espace affine  $\mathcal{E}$  est caractérisé par un point de référence, l'origine  $O$ , et un espace vectoriel sous-jacent  $E$ . En choisissant une base orthonormale  $\{\mathbf{e}_i\}$  de  $E$ , tout point de  $\mathcal{E}$  peut être repéré par ses coordonnées, dites **cartésiennes**, qui sont les composantes du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  dans la base  $\{\mathbf{e}_i\}$  :

$$\overrightarrow{OM} = x^i \mathbf{e}_i. \quad (1.40)$$

Bien que les coordonnées cartésiennes soient particulièrement simples à manipuler, il est parfois utile d'avoir recours à d'autres systèmes de coordonnées, appelées en général **curvilignes** et que l'on notera pour le moment  $y^\alpha$ . La correspondance entre les deux systèmes de coordonnées peut être définie en exprimant les coordonnées  $y^\alpha$

en fonction des  $x^i$ , ou, inversement, sous la forme<sup>7</sup>

$$x^i = x^i(y^\alpha), \quad (1.41)$$

donnant les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles.

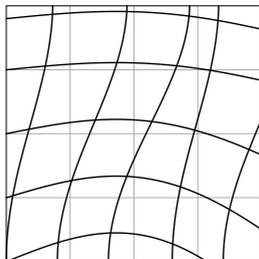


FIGURE 1.1. Système de coordonnées curvilignes superposé à un système de coordonnées cartésiennes dans le plan euclidien.

*Exemples :* Dans le plan euclidien, les coordonnées curvilignes les plus couramment utilisées sont les coordonnées **polaires**,  $r$  et  $\theta$ , définies par

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (1.42)$$

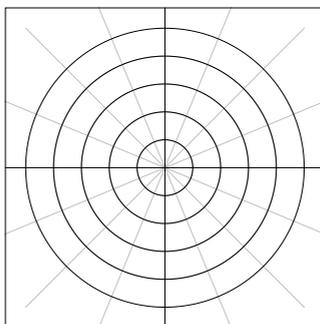


FIGURE 1.2. Exemple de coordonnées curvilignes : système de coordonnées polaires dans le plan euclidien.

<sup>7</sup> Plus rigoureusement, il faudrait écrire  $x^i = f^i(y^\alpha)$ , où les  $f^i$  sont des fonctions des variables  $y^\alpha$ . Mais nous suivrons la notation usuelle (1.41), où le symbole «  $x^i$  » a un sens différent de chaque côté de l'égalité : coordonnées à gauche, fonctions des  $y^\alpha$  à droite.

Dans l'espace euclidien, on rencontre souvent les **coordonnées sphériques**  $r$ ,  $\theta$  et  $\phi$ , définies par

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta, \quad (1.43)$$

ou les **coordonnées cylindriques** définies par

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z. \quad (1.44)$$

### Métrie : introduction heuristique

En géométrie, la notion de métrique, qui permet de calculer la distance entre deux points, joue un rôle fondamental. Avant de donner plus loin une définition mathématique plus rigoureuse, mais aussi plus abstraite, nous présentons ici la métrique de manière intuitive.

Dans un espace euclidien, muni de coordonnées cartésiennes  $x^i$ , le carré de la distance entre deux points s'obtient en écrivant la relation de Pythagore

$$\delta \ell^2 = \delta_{ij} \delta x^i \delta x^j, \quad (1.45)$$

où les  $\delta x^i$  représentent les différences des coordonnées des deux points. Comment exprimer cette distance en fonction de coordonnées curvilignes ? Si les deux points sont infiniment proches, on peut substituer dans l'expression ci-dessus les relations

$$\delta x^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \delta y^\alpha, \quad (1.46)$$

obtenues en différenciant (1.41). On obtient ainsi

$$\delta \ell^2 = g_{\alpha\beta} \delta y^\alpha \delta y^\beta, \quad g_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} \delta_{ij}, \quad (1.47)$$

ce qui permet de calculer directement la distance infinitésimale entre deux points repérés par leurs coordonnées curvilignes. Les coefficients  $g_{\alpha\beta}$  représentent les composantes de la métrique euclidienne dans les coordonnées  $y^\alpha$ .

*Exemples :*

En insérant les relations (1.42) dans (1.47), on trouve l'expression de la métrique euclidienne en coordonnées polaires :

$$\delta \ell^2 = \delta r^2 + r^2 \delta \theta^2. \quad (1.48)$$

En procédant de manière similaire avec (1.43), on obtient la métrique euclidienne en coordonnées sphériques :

$$\delta \ell^2 = \delta r^2 + r^2 \delta \theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \delta \phi^2. \quad (1.49)$$

De plus, en restreignant cette métrique au sous-espace correspondant à une sphère de rayon  $a$  (avec  $r = a$  et  $\delta r = 0$ ), on en déduit immédiatement la métrique de la sphère,

$$\delta\ell^2 = a^2 \delta\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta \delta\phi^2, \quad (1.50)$$

qui constitue notre premier exemple de métrique pour un espace courbe, ici à deux dimensions.

### 1.2.2 Espace vectoriel tangent

Contrairement au cas des espaces affines, il n'existe pas d'espace vectoriel sous-jacent donné *a priori* dans un espace courbe. Dans ce dernier cas, il est néanmoins possible de construire une structure vectorielle, en chaque point de l'espace, en introduisant la notion de vecteurs tangents, qui représentent des opérateurs de dérivation.

#### Espaces affines

Remarquons tout d'abord que, dans un espace affine  $\mathcal{E}$ , tout vecteur  $\vec{v}$  permet de définir, en un point donné  $p$ , une dérivée directionnelle : pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathbb{R}$ , la dérivée directionnelle suivant  $\vec{v}$  de  $f$  (en  $p$ ) est le nombre  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} f)_p$ . Formellement, on peut donc identifier tout vecteur avec la dérivée directionnelle associée, et définir l'action de  $\mathbf{v}$  sur  $f$  par

$$\mathbf{v}(f) \equiv (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} f)_p. \quad (1.51)$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes  $x^i$ , cette identification s'écrit

$$\mathbf{v}(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (1.52)$$

Cette expression étant valide pour toute fonction  $f$  définie sur  $\mathcal{E}$ , on peut écrire le vecteur  $\mathbf{v}$  comme une combinaison linéaire d'opérateurs de dérivation,

$$\mathbf{v} \equiv v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (1.53)$$

qui s'interprète également comme la décomposition du vecteur  $\mathbf{v}$  dans la base constituée des  $n$  vecteurs élémentaires  $\partial/\partial x^i$ .

Dans un système de coordonnées curvilignes  $y^\alpha$ , une fonction  $f$  sur  $\mathcal{E}$  s'exprime en fonction des nouvelles coordonnées  $y^\alpha$  et l'expression (1.52) devient

$$\mathbf{v}(f) = v^i \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial y^\alpha}. \quad (1.54)$$

Il est alors naturel de réécrire le vecteur  $\mathbf{v}$  sous la forme

$$\mathbf{v} = v^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \quad v^\alpha \equiv v^i \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \quad (1.55)$$

où les coefficients  $v^\alpha$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{v}$  dans la nouvelle base constituée des vecteurs élémentaires  $\partial/\partial y^\alpha$ .

*Exemple* : tout vecteur du plan peut donc s'écrire sous la forme

$$\mathbf{v} = v^r \frac{\partial}{\partial r} + v^\theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (1.56)$$

lorsqu'on travaille en coordonnées polaires (1.42). Les relations entre les composantes  $v^r$  et  $v^\theta$  et les composantes cartésiennes,  $v^x$  et  $v^y$ , se déduisent de (1.55) ou de la relation inverse :

$$v^x = \frac{\partial x}{\partial r} v^r + \frac{\partial x}{\partial \theta} v^\theta = \cos \theta v^r - r \sin \theta v^\theta, \quad (1.57)$$

$$v^y = \frac{\partial y}{\partial r} v^r + \frac{\partial y}{\partial \theta} v^\theta = \sin \theta v^r + r \cos \theta v^\theta. \quad (1.58)$$

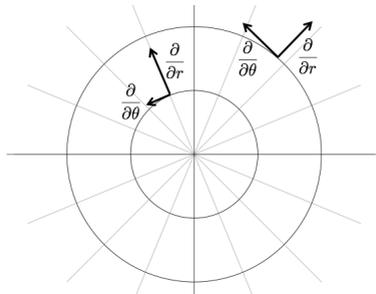


FIGURE 1.3. Vecteurs élémentaires  $\frac{\partial}{\partial r}$  et  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  associés aux coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ .

### Cas général

Ce qui précède se généralise facilement à un espace courbe  $\mathcal{M}$ , sur lequel est défini un système de coordonnées  $x^i$  quelconques<sup>8</sup>. En un point  $p$  de  $\mathcal{M}$ , on peut en effet assimiler les opérateurs de dérivation  $\partial/\partial x^i$  (agissant sur les fonctions  $f$  de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathbb{R}$ ) à des vecteurs. Les combinaisons linéaires de ces vecteurs élémentaires, engendrent un espace vectoriel, appelé espace vectoriel tangent en  $p$  et que l'on notera  $V_p$ .

<sup>8</sup> Noter l'utilisation de symboles légèrement différents pour distinguer les coordonnées cartésiennes notées  $x^i$  (pour lesquelles les composantes de la métrique sont  $g_{ij} = \delta_{ij}$  par définition) de coordonnées quelconques  $x^i$ .

David Langlois

# Relativité générale

## Des fondements géométriques aux applications astrophysiques

La relativité générale, théorie relativiste de la gravitation, est un des piliers de la physique théorique moderne. Elle est aujourd'hui indispensable en astrophysique et en cosmologie.

Destiné aux étudiants en master de physique fondamentale et d'astrophysique ainsi qu'aux élèves des écoles d'ingénieurs, ce manuel comprend un **cours complet** et de nombreux **exercices d'application corrigés**. Il introduit progressivement les outils conceptuels essentiels à la théorie de la relativité générale avant d'en présenter les aspects fondamentaux puis ses principales applications astrophysiques (étoiles relativistes, trous noirs, ondes gravitationnelles et cosmologie).

### Sommaire

#### Introduction

1. Éléments de géométrie
2. Relativité restreinte
3. Courbure et équations d'Einstein
4. Géométrie et symétries
5. Étoiles relativistes et trous noirs
6. Cosmologie

#### 7. Ondes gravitationnelles

- Annexe A. Compléments mathématiques
- Annexe B. Principes variationnels
- Annexe C. Formulaire

À la fin de chaque chapitre, on trouvera des exercices suivis de leurs corrigés

David Langlois est directeur de recherche au CNRS et effectue ses recherches au laboratoire AstroParticule et Cosmologie (CNRS/Université Paris-Diderot/CEA et Observatoire de Paris), dans les domaines de l'astrophysique relativiste et de la cosmologie primordiale. Il enseigne actuellement la cosmologie à l'École polytechnique, après y avoir été responsable des cours de relativité restreinte et de relativité générale pendant sept ans.

ISBN 978-2-311-00719-0



9 782311 007190

[WWW.VUIBERT.FR](http://WWW.VUIBERT.FR)

