F. Maisonneuve, *Mathématiques 2. Intégration, transformations intégrales et applications. Cours et exercices*, Paris : Presses des MINES, Collection Les cours, 2014.

ISBN : 978-2-35671-074-1

60, boulevard Saint-Michel - 75272 Paris Cedex 06 - France

presses@mines-paristech.fr

www.pressesdesmines.com

Dépôt légal : 2014

Achevé d'imprimer en 2014 (Paris)

Mathématiques 2

COLLECTION Les Cours

Dans la même Collection

Francis Maisonneuve
Mathématiques 1 Calcul différentiel, équations différentielles ordinaires et applications. Cours et exercices

Francis Maisonneuve
Mathématiques 3 Fonctions d'une variable complexe. Cours et exercices

Francis Maisonneuve
Mathématiques 4 Probabilités : variables aléatoires réelles et vectorielles. Cours et exercices

J. Adnot, D. Marchio, Ph. Rivière
Cycles de vie des systèmes énergétiques

Brigitte d'Andréa-Novel, Benoît Fabre, Pierre Jouvelot
Acoustique-Informatique-MusiquE

Jean-Claude Moisdon, Michel Nakhla
Recherche opérationnelle

Anne-Françoise Gourgues-Lorenzen, Jean-Marc Haudin, Jacques Besson
Matériaux pour l'ingénieur

Renaud Gicquel
Systèmes énergétiques Tome 3

Renaud Gicquel
Systèmes énergétiques Tome 2

Renaud Gicquel
Systèmes énergétiques Tome 1

Thierry Weil
Stratégie d'entreprise

François Cauneau
Mécanique des fluides

Pierre Chauvet
Aide-mémoire de géostatistique linéaire

Dominique Marchio, Paul Reboux
Introduction aux transferts thermiques

François Engel, Frédéric Kletz
Cours de comptabilité analytique

François Engel, Frédéric Kletz
Cours de comptabilité générale

Jacques Bouchard, Jean-Paul Deffain, Alain Gouchet
Introduction au génie atomique

Daniel Fargue
Abrégé de thermodynamique : principes et applications

Georges Pierron
Introduction au traitement de l'énergie électrique

Bernard Degrange
Introduction à la physique quantique

Michel Cohen de Lara, Brigitte d'Andréa-Novel
Cours d'automatique

Fixari Daniel
Les Imperfections des marchés

Jacques Lévy
Introduction à la métallurgie générale

Hugues Molet
Comment maîtriser sa productivité industrielle ?

Margaret Armstrong, Jacques Carignan
Géostatistique linéaire

Francis Maisonneuve

Mathématiques 2

Intégration, transformations intégrales et applications

Cours et exercices

MINES ParisTech

CALCUL INTÉGRAL

Sommaire

Préface

Être titulaire pendant plus de quinze ans des quatre chaires d'enseignement du tronc commun de mathématiques du cycle ingénieurs civils de l'Ecole des Mines de Paris est une gageure que peu auraient accepté de relever.

Bénéficier, dans l'exercice de ce travail, du respect et du soutien constant de ses élèves, qui, s'ils n'ont pas tous pu, su ou voulu apprécier la richesse du problème de Cauchy, ont toujours en revanche loué la rigueur scientifique et la qualité pédagogique des cours et supports de cours de mathématiques, bénéficier de ce soutien et de ce respect donc est certainement ce qui restera quand viendra le temps de saluer ce grand professeur qu'est Francis Maisonneuve.

Je sais que ces ouvrages resteront longtemps une référence, et espère que les promotions futures et autres lecteurs sauront apprécier la finesse et la qualité de ce qui leur est proposé ici.

Je souhaite à tous les établissements d'enseignement de disposer de tels cours.

Nicolas Cheimanoff
Directeur de l'Enseignement
MINES ParisTech

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance aux jeunes — et moins jeunes — mathématiciens professionnels et ingénieurs de recherche qui m'ont fait l'honneur d'animer une ou plusieurs années les séances d'exercices illustrant les éléments de cours, et qui m'ont suggéré à cette occasion de multiples améliorations touchant au fond comme à la forme. Je tiens aussi à remercier les nombreux étudiants « utilisateurs » qui, par la qualité de leurs questions, la rigueur de leurs critiques ou la logique apparente de certaines interprétations parfois fort éloignées de celles escomptées, ont contribué à faire évoluer la rédaction des documents vers plus de clarté.

De manière plus générale, je voudrais souligner la qualité des relations intellectuelles et humaines qui prévaut à tout niveau dans l'établissement où j'ai le plaisir d'exercer mon métier d'enseignant mathématicien depuis de nombreuses années, et où s'expriment des talents très divers. Que tous en soient remerciés !

Francis Maisonneuve

Introduction

Dans de nombreuses situations, et en particulier en probabilités, on a besoin d'étendre la notion d'intégrale à des fonctions définies sur des espaces "abstraits" E bien plus généraux que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^m$. Comme on ne dispose en général sur de tels espaces ni de structure d'ordre ni de topologie, on ne peut plus conserver le schéma banal de construction de l'intégrale, fondé sur des subdivisions de plus en plus fines de l'ensemble de définition E des fonctions considérées, suivi d'un passage à la limite.

L'idée fondamentale de la théorie de l'intégration par les mesures abstraites consiste à utiliser la structure d'ordre de l'**espace d'arrivée** $\mathbb{R}$ des fonctions à intégrer pour faire les découpages (coupes horizontales et non plus verticales du graphe).

Ceci conduit à considérer dans une première étape la classe des **fonctions indicatrices** de sous-ensembles de E, et à tenter de définir leur intégrale comme la *mesure* des sous-ensembles correspondants : à charge pour cette fonction de mesure de vérifier une propriété forte d'**additivité**, qui garantisse la linéarité de l'intégrale, ainsi qu'une forme convenable de "continuité" permettant son prolongement par passage à la limite.

L'intérêt de cette démarche nouvelle, fondée sur un jeu d'hypothèses minimum, est sa grande généralité : la liberté du choix de la fonction de mesure permettra de définir une intégrale "sur mesure" adaptée à chaque contexte, et ce déjà dans le cas $E = \mathbb{R}$ où la nature commune des séries et des intégrales usuelles sera enfin élucidée. De plus on verra que la classe des fonctions *intégrables* relativement à une mesure est un espace vectoriel **complet**, caractéristique d'une théorie mathématique achevée.

Il reste d'abord à identifier la classe des sous-ensembles de E qu'une mesure peut effectivement prendre en compte, car ils ne pourront être tous mesurés que dans des cas très particuliers (si on accepte l'axiome du choix) : une telle classe, qui vérifie certaines propriétés de stabilité (notion de *tribu*), doit impérativement être assez vaste pour que l'ensemble des fonctions *mesurables* (c'est-à-dire candidates à être intégrées) qu'elle détermine contienne toutes les fonctions courantes !

Cette présentation élémentaire de l'*intégrale de Lebesgue*, qui répond très précisément aux besoins des probabilistes, constitue la première partie de ce cours.

La seconde partie du cours est consacrée à l'étude de la *transformation de Fourier* (et *de Laplace*), encore appelée *analyse harmonique* ou *fréquentielle* : il s'agit de la théorie mathématique de la décomposition d'une fonction en modes propres, selon la variable d'espace ou de temps.

Cette transformation intégrale joue un rôle majeur en sciences physiques et en mathématiques appliquées, par exemple lors de l'étude :

– du rayonnement électromagnétique et des transferts thermiques en physique ;

– de la diffraction en cristallographie ;

– de la sismique en géophysique ;

– des fonctions de transfert des systèmes dynamiques linéaires et du traitement du signal en automatique ;

– du filtrage en analyse d'images.

Elles sert également d'outil de référence en électronique (fondement du *calcul opérationnel* d'Heaviside) et en probabilités (*transformées* des variables aléatoires).

L'opération de *convolution* se présente de manière naturelle dans des contextes divers : *régularisation* des fonctions, (c'est-à-dire approximation des fonctions localement intégrables par des fonctions C^∞), équations intégro-différentielles *de Volterra*, *solutions élémentaires* d'équations différentielles ou aux dérivées partielles linéaires en Analyse ; mais aussi loi de la *somme* de deux *variables aléatoires indépendantes* en Probabilités, relation d'entrée / sortie d'un *système linéaire stationnaire* en Automatique, ... Le fait que l'opération "duale" qui lui correspond par transformation de Fourier — ou de Laplace — soit la **multiplication** ordinaire des fonctions numériques explique, pour une bonne part, l'usage intensif de ces transformations intégrales.

Transformation de Fourier – Laplace et convolution s'étendent de manière féconde aux espaces de distributions. La *théorie des distributions*, synthèse du calcul différentiel et du calcul intégral, s'est rapidement imposée pour l'étude des équations aux dérivées partielles dans le cadre hilbertien des *espaces de Sobolev*, et comme un langage obligé en physique mathématique. Nous donnerons un simple aperçu du sujet au dernier chapitre en se restreignant aux distributions d'ordre fini.

Chapitre 1

Tribus et applications mesurables

1.1 Tribus et tribus engendrées

Définition 1.1.1 *On appelle* tribu de parties *d'un ensemble E tout sous-ensemble $\mathcal{T}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des* parties *de E (c-à-d. des sous-ensembles de E), vérifiant les trois propriétés :*

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T} \quad (\,^c \text{ pour complémentaire}) \\ (2) & E \in \mathcal{T} \text{ et } \emptyset \in \mathcal{T} \\ (3) & (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}} \implies \bigcup_n A_n \in \mathcal{T} \text{ et } \bigcap_n A_n \in \mathcal{T} \end{array}}$$

où on remarque que, grâce à (1), *on peut remplacer* et *par* ou *dans* (2) *et* (3).

Ainsi $\underline{A \in \mathcal{T} \implies A \subset E}$: un élément A de $\mathcal{T}$ est un sous-ensemble (une *partie*) de E ; d'autre part une tribu est *a fortiori* stable par **réunion et intersection finies**, comme on le déduit des propriétés de stabilité dénombrable (3), en choisissant tous les A_n sauf un nombre fini d'entre eux égaux à $\emptyset$ (resp. à E).

Définition 1.1.2

- *On appelle* espace mesurable *le couple* $\underline{(E, \mathcal{T})}$*, où $\mathcal{T}$ est une tribu de parties de l'ensemble E.*
- *Toute* partie *(cf. ci-dessus) A de E telle que $A \in \mathcal{T}$ est dite ($\mathcal{T}$-)*mesurable.

Proposition 1.1.3 (tribu engendrée)

Etant donné un sous-ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(E)$ de l'ensemble des parties de E, il existe une **plus petite tribu** *(au sens de l'inclusion) contenant $\mathcal{S}$, notée $\underline{T_E(\mathcal{S})}$ et appelée* tribu engendrée *par $\mathcal{S}$.*

Preuve On vérifie immédiatement que l'intersection de toute famille non vide de tribus de parties de E est encore une tribu ; de sorte que $T_E(\mathcal{S})$ est simplement l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{S}$, famille dont fait partie $\mathcal{P}(E)$. □

Remarque **1.1.4** La notion de tribu engendrée constitue le mode principal de définition d'une tribu, du fait de l'absence fréquente de caractérisation explicite de ses éléments ; ceci conduit à des raisonnements indirects, du type suivant : pour établir qu'une propriété $\mathcal{P}_r$ est vérifiée sur une tribu donnée, on montre que c'est le cas sur un de ses sous-ensembles *générateurs* $\mathcal{S}$, puis que le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ où $\mathcal{P}_r$ est vérifiée est structurellement une tribu.

Définition 1.1.5

- *On appelle* tribu de Borel *d'un espace métrique E la tribu $\underline{\mathcal{B}(E) = T_E(O)}$ engendrée par l'ensemble $O \subset \mathcal{P}(E)$ des ouverts de E.*
- *Toute partie $A \in \mathcal{B}(E)$ est dite* partie borélienne *ou* borélien *de E.*

Ainsi les **ouverts**, les **fermés** — en particulier les **singletons** — de E sont des boréliens.

De multiples sous-ensembles de parties peuvent engendrer la même tribu :

Proposition 1.1.6

- *La tribu de Borel de $\mathbb{R}$ est engendrée par l'une quelconque des familles d'intervalles*

$$\boxed{\begin{array}{c}\{\,]a,b[\,\}_{a<b}\,;\{[a,b]\}_{a<b}\,;\{[a,b[\,\}_{a<b}\,;\{\,]a,b]\}_{a<b}\,;\\ \{\,]-\infty,a[\,\}_{a\in\mathbb{R}}\,;\{\,]-\infty,a]\}_{a\in\mathbb{R}}\,;\{\,]a,+\infty[\,\}_{a\in\mathbb{R}}\,;\{[a,+\infty[\,\}_{a\in\mathbb{R}}\end{array}}\,.$$

- *La tribu de Borel de $\overline{\mathbb{R}}$ est engendrée par l'une quelconque des familles d'intervalles*

$$\underline{\{[-\infty,a[\,\}_{a\in\mathbb{R}}\,;\{[-\infty,a]\}_{a\in\mathbb{R}}\,;\{\,]a,+\infty]\}_{a\in\mathbb{R}}\,;\{[a,+\infty]\}_{a\in\mathbb{R}}}\,.$$

Preuve

• Un ouvert de $\mathbb{R}$ est par définition une réunion d'intervalles ouverts, dont on peut imposer que les extrémités soient rationnelles ; ainsi tout ouvert s'exprime comme une réunion finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{S} = \{\,]a,b[\,\}_{a<b}$, de sorte que $O \subset T_{\mathbb{R}}(\mathcal{S})$ et donc $T_{\mathbb{R}}(O) \subset T_{\mathbb{R}}(\mathcal{S})$ (cf. le complément ci-dessous, corollaire 1.1.10) ; comme d'autre part $\mathcal{S} \subset O$, donc $T_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}) \subset T_{\mathbb{R}}(O)$, on conclut $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \overset{\text{déf}}{=} T_{\mathbb{R}}(O) = T_{\mathbb{R}}(\mathcal{S})$.

L'égalité avec les tribus engendrées par les autres familles d'intervalles découle alors des points suivants :

- $[a,b], [a,b[\,,]a,b],]-\infty,a[\,,]-\infty,a],]a,+\infty[\,, [a,+\infty[\, \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
  (chacun de ces intervalles est soit ouvert, soit réunion d'un ouvert et de 1 ou 2 singletons) ;
- $]a,b[\,= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [a+\frac{1}{n}, b[\,= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]a, b-\frac{1}{n}]$;
- $[a,b[\,=\,]-\infty,b[\,\cap\,]-\infty,a[^{\,c} = [a,+\infty[\,\cap\,[b,+\infty[^{\,c}$
  et $]a,b] = \,]-\infty,b] \,\cap\,]-\infty,a]^{\,c} = \,]a,+\infty[\,\cap\,]b,+\infty[^{\,c}$.

• Raisonnement voisin laissé au soin du lecteur. □

Complément : indications sur les cardinaux d'ensembles

Définition 1.1.7 *Un ensemble E est dit* (de cardinal) dénombrable (au sens strict) *s'il existe une* <u>bijection</u> $n \mapsto a_n$ *de* $\mathbb{N}^*$ *sur E, qui constitue une* numérotation *et qui fournit une énumération exhaustive des éléments de E :*

$$E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

Exemples **1.1.8**

- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables : considérer les numérotations respectives
  $$n \in \mathbb{N}^* \longmapsto n-1 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^* \longmapsto (-1)^n\, E\big(\frac{n}{2}\big) \in \mathbb{Z}$$
  où E désigne la fonction partie entière ; ce qui détermine les énumérations
  $$\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\} \quad \text{et} \quad \mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,\ldots\}.$$

Proposition 1.1.9

- *Soit F un ensemble dénombrable et soit E un ensemble en bijection avec F (E est dit* équipotent *à F) ; alors E est aussi* <u>*dénombrable*</u>*.*
- *Soit E un ensemble dénombrable ; tout sous-ensemble infini (c'est-à-dire non fini) $F \subset E$ est aussi* <u>*dénombrable*</u>*.*

- *Soit $(E_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ensembles dénombrables ; leur réunion $\bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} E_m$ est aussi dénombrable.*
- *Soient E et F deux ensembles dénombrables ; l'ensemble produit*
$$E\times F \overset{\text{déf}}{=} \{(x,y) : x\in E \text{ et } y\in F\}$$
est aussi dénombrable.

Preuve

- Soit $n\in\mathbb{N}^* \longmapsto a_n \in F$ une numérotation de F et soit $\varphi : F\to E$ une bijection de F sur E ; alors $n\in\mathbb{N}^*\longmapsto \varphi(a_n)$ est une numérotation de E.

- Soit $n\in\mathbb{N}^*\longmapsto a_n\in E$ une numérotation de E. On pose
$$\varphi(1)=n_1 \overset{\text{déf}}{=} \min\{n\in\mathbb{N}^* : a_n\in F\}$$
et par récurrence, $\forall\, k\geq 2$, $\varphi(k)=n_k \overset{\text{déf}}{=} \min\{n>n_{k-1} : a_n\in F\}$.

  Comme F n'est pas un ensemble fini, l'application φ est bien définie sur $\mathbb{N}^*$ et c'est une injection croissante de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. De plus, $\forall\, k\in\mathbb{N}^*$, on a $a_{\varphi(k)}\in F$ et tous les éléments de F sont de cette forme ; de sorte que $k\in\mathbb{N}^*\longmapsto a_{\varphi(k)}$ est une numérotation de F ($\left(a_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est la suite extraite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ constituée des points de cette suite qui sont dans F).

- Soit pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, $E_m=\{a_1^{(m)},a_2^{(m)},\ldots\}$ une énumération de l'ensemble E_m ; on a l'énumération de $\bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} E_m$:
$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} E_m = \{a_1^{(1)},a_2^{(1)},a_1^{(2)},a_3^{(1)},a_2^{(2)},a_1^{(3)},\ldots\}$$
obtenue en balayant en diagonale le matrice infinie $A=\left(a_n^{(m)}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ qui contient tous les points de $\bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} E_m$.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*\longmapsto a_n\in E$ une numérotation de E. On a $E\times F=\bigcup_{m\in\mathbb{N}^*}\{a_m\}\times F$, où $\forall\, m\in\mathbb{N}^*$, $E_m \overset{\text{déf}}{=} \{a_m\}\times F$ est en bijection évidente avec F : on applique les points 1 et 3 précédents. □

Corollaire 1.1.10 *$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^2$ sont des ensembles dénombrables.*

Preuve En effet l'ensemble produit $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ est dénombrable d'après ci-dessus, et l'application
$$r\in\mathbb{Q}\mapsto(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \quad \text{où } \frac{p}{q} \text{ est la forme irréductible de } r$$
est injective. $\mathbb{Q}$ est donc en bijection avec un sous-ensemble infini de $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, qui est dénombrable d'après le deuxième point de la proposition précédente ; donc $\mathbb{Q}$ est aussi dénombrable d'après le premier point de cette proposition, ainsi que $\mathbb{Q}^2$ d'après son quatrième point. □

A contrario, il importe de savoir que

Proposition 1.1.11 $\mathbb{R}$*, et plus généralement tout sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *qui contient un intervalle non trivial (c'est-à-dire ni vide, ni réduit à un point) est infini non dénombrable.*

Preuve On raisonne par l'absurde : S'il existait un tel sous-ensemble dénombrable, l'intervalle non trivial qu'il contient serait aussi dénombrable, puisqu'il n'est pas fini, de même que l'intervalle $]0,1[$ qui est en bijection avec son intérieur (cf. la proposition précédente).

Soit alors $n \in \mathbb{N}^* \longmapsto a_n \in]0,1[$ une numérotation de $]0,1[$; chaque a_n admettrait un développement décimal illimité de la forme :

$$a_n = 0, a_n^{(1)} a_n^{(2)} \dots a_n^{(m)} \dots \quad \text{où } \forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ a_n^{(m)} \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

Alors l'élément $b \in \mathbb{R}$ défini par son développement décimal illimité :

$$b = 0, b^{(1)} b^{(2)} \dots b^{(m)} \dots \quad \text{où } \forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ b^{(m)} \in \{1, \dots, 8\} \text{ est tel que } \left| b^{(m)} - a_m^{(m)} \right| \geq 2$$

vérifierait $b \in]0,1[$ et $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, $|b - a_m| \geq 10^{-m}$, de sorte que $b \neq a_m$: contradiction avec $n \in \mathbb{N}^* \longmapsto a_n \in]0,1[$ numérotation de $]0,1[$. $\square$

Remarques **1.1.12**

- Le raisonnement ci-dessus, appelé *procédé diagonal*, a été élaboré par le grand mathématicien Cantor, fondateur de la *théorie des ensembles.*
- La *conjecture de Cantor*, également dite *hypothèse du continu*, est que tout ensemble infini non dénombrable contient nécessairement une partie équipotente à $\mathbb{R}$, ou aussi bien à l'intervalle $]0,1[$. On sait à présent qu'il s'agit d'un énoncé *indécidable* dans le cadre des axiomes habituels.

1.2 Applications mesurables

Etant donné une application f d'un ensemble E dans un ensemble E', on désigne comme l'*image réciproque de* $A' \subset E'$ *par* f le sous-ensemble de E

$$\underline{f^{-1}(A') = \{x \in E : f(x) \in A'\}} \subset E\,;$$

ceci revient à considérer une "application ensembliste" $f^{-1} : \mathcal{P}(E') \to \mathcal{P}(E)$, dont on rappelle qu'elle **commute** avec les opérations ensemblistes $^c, \cup$ et $\cap$ [†1].

[1] Voir par exemple [1], paragraphe A.1

Si $E' = \mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$, on notera en abrégé pour $a \in \mathbb{R}$:

$$\{f < a\} = \{x \in E : f(x) < a\} = f^{-1}(]-\infty, a[) \text{ ou } f^{-1}([-\infty, a[)$$

et, de manière analogue, $\{f \leq a\}, \{f > a\}$ et $\{f \geq a\}$.

Etant donné un sous-ensemble $\mathcal{S}' \subset \mathcal{P}(E')$, on désigne encore (abusivement) comme l'*image réciproque de* $\mathcal{S}'$ *par* f le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$

$$f^{-1}(\mathcal{S}') \overset{\text{déf}}{=} \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{S}'\}.$$

D'après les propriétés de commutation rappelées ci-dessus, on vérifie immédiatement que

- si $\mathcal{T}'$ est une tribu de parties de E', $f^{-1}(\mathcal{T}')$ est une tribu de parties de E appelée *tribu réciproque de* $\mathcal{T}'$ *par* f.
- si $\mathcal{T}$ est une tribu de parties de E, $\mathcal{T}_f = \{A' \subset E' : f^{-1}(A') \in \mathcal{T}\}$ est une tribu de parties de E' appelée *tribu induite de* $\mathcal{T}$ *par* f.

Définition 1.2.1 *Soient* $(E, \mathcal{T})$ *et* $(E', \mathcal{T}')$ *deux espaces mesurables.*

- *Une application* $f : E \to E'$ *est dite* mesurable *pour* $\mathcal{T}$ *et* $\mathcal{T}'$*, ce qu'on notera souvent*

  $$f : (E, \mathcal{T}) \to (E', \mathcal{T}') \textit{ mesurable}$$

  si $\boxed{f^{-1}(\mathcal{T}') \subset \mathcal{T}}$*, c'est-à-dire* $\forall A' \in \mathcal{T}', f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$.
- *Si* $\mathcal{T}$ *et* $\mathcal{T}'$ *sont les tribus de Borel respectives de* E *et* E' *espaces métriques, on dit encore que* f *est* **borélienne**.

Remarque **1.2.2** Au sens de l'inclusion, la tribu réciproque $f^{-1}(\mathcal{T}')$ (resp. la tribu induite $\mathcal{T}_f$) est donc la **plus petite tribu** de parties de E (resp. la **plus grande tribu** de parties de E') telle que $f : (E, \mathcal{T}) \to (E', \mathcal{T}')$ soit mesurable.

Exemples **1.2.3**

- L'*application identique* de E $\mathrm{id}_E : (E, \mathcal{T}) \to (E, \mathcal{T})$ est mesurable pour toute tribu $\mathcal{T}$ de parties de E puisque ${\mathrm{id}_E}^{-1}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.
- Les applications **constantes** $f : (E, \mathcal{T}) \to (E', \mathcal{T}')$ sont mesurables pour toutes tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, car l'image réciproque par f de toute partie de E' est E ou $\emptyset$.
- Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, l'*indicatrice* (dite aussi *fonction caractéristique*) de A :

$$\boxed{\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}}$$

est <u>mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{T}$</u>, car $\mathbb{1}_A^{-1}\big(\mathcal{B}(\mathbb{R})\big) = \{\emptyset, E, A, A^c\}$.

Théorème 1.2.4 (image réciproque d'un sous-ensemble générateur) *Soit une application $f : E \to E'$.*

- *Pour tout sous-ensemble $\mathcal{S}' \subset \mathcal{P}(E')$, on a*

$$\boxed{T_E\left[f^{-1}(\mathcal{S}')\right] = f^{-1}\left[T_{E'}(\mathcal{S}')\right]}\,.$$

- *$f : (E, \mathcal{T}) \to (E', \mathcal{T}')$ est* **mesurable** *si (et seulement si)*

$$\boxed{\exists\, \mathcal{S}' \text{ sous-ensemble générateur de } \mathcal{T}' \text{ tel que } f^{-1}(\mathcal{S}') \subset \mathcal{T}}\,.$$

Preuve

• $\mathcal{S}' \subset T_{E'}(\mathcal{S}') \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{S}') \subset f^{-1}\left[T_{E'}(\mathcal{S}')\right] \Rightarrow T_E\left[f^{-1}(S')\right] \subset f^{-1}\left[T_{E'}(\mathcal{S}')\right]$ puisque $f^{-1}\left[T_{E'}(\mathcal{S}')\right]$ est une tribu (réciproque).

Inversement, $S' \subset \left(T_E\left[f^{-1}(\mathcal{S}')\right]\right)_f$ puisque $\forall\, A' \in \mathcal{S}'$, on a $f^{-1}(A') \in f^{-1}(\mathcal{S}') \subset T_E\left[f^{-1}(\mathcal{S}')\right]$; donc $T_{E'}(\mathcal{S}') \subset \left(T_E\left[f^{-1}(\mathcal{S}')\right]\right)_f$, ce qui veut dire que $\forall\, A' \in T_{E'}(\mathcal{S}')$, $f^{-1}(A') \in T_E\left[f^{-1}(\mathcal{S}')\right]$: ceci établit l'autre inclusion $f^{-1}\left[T_{E'}(\mathcal{S}')\right] \subset T_E\left[f^{-1}(S')\right]$.

• D'après le point précédent, $f^{-1}(\mathcal{S}') \subset \mathcal{T} \Rightarrow f^{-1}\left[T_{E'}(\mathcal{S}')\right] = T_E\left[f^{-1}(\mathcal{S}')\right] \subset \mathcal{T}$; inversement, il suffit de prendre $\mathcal{S}' = \mathcal{T}'$. □

Corollaire 1.2.5 *Soient $(E, \mathcal{T})$ et $(E', \mathcal{T}')$ deux espaces mesurables et soit $f : E \to E'$; f est* **mesurable** *si :*

- *$\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont les* **tribus de Borel** *respectives de E et E' espaces métriques et f est* **continue** *;*

- *$E' = \mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$, muni de sa tribu de Borel, et f vérifie l'une des quatre conditions suivantes :*

$$\boxed{\begin{array}{rlcl} & (1)\ \forall\, a \in \mathbb{R}, \{f < a\} \in \mathcal{T} & \text{ou} & (2)\ \forall\, a \in \mathbb{R}, \{f \leq a\} \in \mathcal{T} \\ \text{ou} & (3)\ \forall\, a \in \mathbb{R}, \{f > a\} \in \mathcal{T} & \text{ou} & (4)\ \forall\, a \in \mathbb{R}, \{f \geq a\} \in \mathcal{T} \end{array}}\,.$$

Preuve

• f continue vérifie $f^{-1}(O') \subset O$, où O et O' désignent l'ensemble des ouverts de E et E' respectivement ; donc $f^{-1}(O') \subset T_E(O) = \mathcal{T}$ avec $T_{E'}(O') = \mathcal{T}'$.

• Montrons par exemple la suffisance de la première condition dans le cas de $\overline{\mathbb{R}}$:
$\forall\, a \in \mathbb{R}$, on a $\{f < a\} = f^{-1}([-\infty, a[\,)$, donc si on note $\mathcal{S}' = \{[-\infty, a[\,\}_{a\in\mathbb{R}}$, on a $f^{-1}(\mathcal{S}') \subset \mathcal{T}$ avec $T_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{S}') = \mathcal{T}'$ (proposition 1.1.6). □

Voici une application importante de ce corollaire dans le cas où $(E', \mathcal{T}') = \big(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big)$:

Théorème 1.2.6 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable et soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications* **mesurables** *de $(E, \mathcal{T})$ dans $\big(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big)$.*

- *Pour tout sous-ensemble $I \subset \mathbb{N}$ non vide, les applications*

$$\boxed{\inf_{n\in I} f_n \text{ et } \sup_{n\in I} f_n \text{ sont mesurables}}\ ;$$

- *les applications* $\boxed{\liminf_{n\to\infty} f_n \text{ et } \limsup_{n\to\infty} f_n \text{ sont mesurables}}$ [†2] *;*

- *en particulier, si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement dans $\overline{\mathbb{R}}$,*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f_n \text{ est mesurable}}\,.$$

Preuve

• $\forall\, a \in \mathbb{R}, \{\inf_{n\in I} f_n \geq a\} = \bigcap_{n\in I} \{f_n \geq a\} \in \mathcal{T}$ et $\{\sup_{n\in I} f_n \leq a\} = \bigcap_{n\in I} \{f_n \leq a\} \in \mathcal{T}$ puisque les f_n sont mesurables et que $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie ou dénombrable.

• Par définition, $\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} (\inf_{p\in\mathbb{N}} f_{n+p})$ et $\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{p\in\mathbb{N}} f_{n+p})$; d'après le point précédent, $g_n = \inf_{p\in\mathbb{N}} f_{n+p}$ est mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n$ est aussi mesurable ; et on obtient le même résultat pour $\limsup_{n\to\infty} f_n$ en considérant la suite $h_n = \sup_{p\in\mathbb{N}} f_{n+p}$.

• On sait que $\forall\, x \in E$, $\liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ (resp. $\limsup_{n\to\infty} f_n(x)$) est la plus petite (resp. la plus grande) valeur d'adhérence de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$; de sorte que

[2] Pour des précisions sur $\liminf_{n\to\infty}$ et $\limsup_{n\to\infty}$, voir par exemple [1], paragraphe B.2

$$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x),$$

auquel cas la limite est la valeur commune ci-dessus.

En conséquence, si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement, on a

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n, \text{ mesurable.}$$

□

Proposition 1.2.7 *La* **composée** *$g \circ f$ de deux applications mesurables $f : (E,\mathcal{T}) \to (E',\mathcal{T}')$ et $g : (E',\mathcal{T}') \to (E'',\mathcal{T}'')$ est encore* **mesurable**.

Preuve On a $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$, égalité entre applications de $\mathcal{P}(E'')$ dans $\mathcal{P}(E)$; donc $(g\circ f)^{-1}(\mathcal{T}'') = f^{-1}\left[g^{-1}(\mathcal{T}'')\right] \subset f^{-1}(\mathcal{T}') \subset \mathcal{T}$. □

1.3 Sous espaces mesurables

Proposition 1.3.1 *Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace mesurable et soit F un sous-ensemble de E.*

- *Le sous-ensemble de $\mathcal{P}(F)$ noté (abusivement)*

$$\boxed{\mathcal{T}\cap F \overset{\text{déf}}{=} \{A\cap F : A\in\mathcal{T}\}}$$

est une tribu de parties de F dite tribu trace *de $\mathcal{T}$ sur F.*

- *On a* $\underline{F\in\mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{T}\cap F = \{A\in\mathcal{T} : A\subset F\}} \subset \mathcal{T}$.

- *Si $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble générateur de $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}\cap F$ est un sous-ensemble générateur de $\mathcal{T}\cap F$: $\underline{T_E(\mathcal{S})\cap F = T_F(\mathcal{S}\cap F)}$;*

- *en particulier, si E est un espace métrique, on a*

$$\boxed{\mathcal{B}(E)\cap F = \mathcal{B}(F)}$$

et $\underline{F\in\mathcal{B}(E) \Leftrightarrow \mathcal{B}(F) = \{A\in\mathcal{B}(E) : A\subset F\}} \subset \mathcal{B}(E)$.

Preuve

• Soit i l'injection canonique de F dans E ; on a $\mathcal{T}\cap F = i^{-1}(\mathcal{T})$, tribu réciproque.

• $\forall A\in\mathcal{T}$ tel que $A\subset F$, on a $A = A\cap F\in\mathcal{T}\cap F$; si on suppose $F\in\mathcal{T}$, alors $\forall A\in\mathcal{T}$, $A' = A\cap F$ vérifie $A'\in\mathcal{T}$ et $A'\subset F$, donc $\mathcal{T}\cap F = \{A\in\mathcal{T} : A\subset F\}$.

Inversement, si cette dernière égalité est vérifiée, on a $F = E \cap F \in \mathcal{T} \cap F \subset \mathcal{T}$.

• On a $\mathcal{S} \cap F = i^{-1}(\mathcal{S})$, donc d'après le théorème 1.2.4 $T_F(\mathcal{S} \cap F) = i^{-1}\left[T_E(\mathcal{S})\right] = T_E(\mathcal{S}) \cap F$.

• Ce dernier point se déduit immédiatement des deux précédents, compte tenu du fait que si O désigne l'ensemble des ouverts de E, alors $O \cap F = \{\Omega \cap F : \Omega \in O\}$ est l'ensemble des ouverts de $F^{\dagger 3}$. □

Application **1.3.2**

• $E = \overline{\mathbb{R}}, F = \overline{\mathbb{R}}_+$: la tribu de Borel de $\overline{\mathbb{R}}_+$ est engendrée par l'une quelconque des quatre familles d'intervalles :

$$\{[0, a[\,\}_{a\in\mathbb{R}_+} ; \{[0, a]\}_{a\in\mathbb{R}_+} ; \{\,]a, +\infty]\}_{a\in\mathbb{R}_+} ; \{[a, +\infty]\}_{a\in\mathbb{R}_+}$$

et on peut même dans tous les cas restreindre a à varier dans $\mathbb{R}_+^*$.

• Comme $\mathbb{R}_+$ est un borélien de $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \subset \mathbb{R}_+\}$.

• Comme $\mathbb{R}$ est un (intervalle) ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}$ ainsi que son complémentaire $\{-\infty, +\infty\}$ sont des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$; donc

$$A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \Leftrightarrow A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ et } A \cap \{-\infty, +\infty\} \in \mathcal{B}(\{-\infty, +\infty\}),$$

autrement dit un borélien de $\overline{\mathbb{R}}$ est un borélien de $\mathbb{R}$ ou la réunion d'un borélien de $\mathbb{R}$ avec $\{-\infty\}$, $\{+\infty\}$ ou $\{-\infty, +\infty\}$.

Proposition 1.3.3 *Soient $(E, \mathcal{T})$ et $(E', \mathcal{T}')$ deux espaces mesurables et soit une application $f : E \to E'$.*

- *Etant donné un sous-ensemble $F \subset E$, soit $f_{|F} : (F, \mathcal{T} \cap F) \to (E', \mathcal{T}')$ la restriction de f à la source F ; on a* f mesurable $\Rightarrow f_{|F}$ mesurable.
- *Etant donné un sous-ensemble $F' \subset E'$ tel que $f(E) \subset F'$, on note de manière analogue $f|^{F'} : (E, \mathcal{T}) \to (F', \mathcal{T}' \cap F')$ la restriction de f au but ; on a l'équivalence* f mesurable $\Leftrightarrow f|^{F'}$ mesurable.

Preuve

• $f_{|F} = f \circ i$ où l'injection canonique i de F dans E est mesurable puisque $i^{-1}(\mathcal{T}) = \mathcal{T} \cap F$.

• $\forall A' \in \mathcal{T}'$, on a $f^{-1}(A') = f^{-1}(A' \cap F')$, donc $f^{-1}(\mathcal{T}') = f^{-1}(\mathcal{T}' \cap F')$. □

[3] Voir par exemple [1], paragraphe B.1

1.4 Produit d'espaces mesurables

Etant donné $m \geq 2$ espaces mesurables $(E_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (E_m, \mathcal{T}_m)$, on veut définir sur l'ensemble produit $E_1 \times \cdots \times E_m$ une *tribu produit* à partir des tribus $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_m$.

Dans la suite, lorsqu'on considère m sous-ensembles $1 \leq i \leq m, \mathcal{S}_i \subset \mathcal{P}(E_i)$, l'écriture $\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$ désignera (abusivement) l'ensemble :

$$\underline{\left\{A_1 \times \cdots \times A_m : \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, A_i \in \mathcal{S}_i\right\}}$$

(au lieu du produit cartésien $\{(A_1, \ldots, A_m) : \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, A_i \in \mathcal{S}_i\}$).

Comme l'ensemble $\mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_m$ des *pavés mesurables* ne forme pas en général une tribu de parties de $E_1 \times \cdots \times E_m$ (ensemble non stable par passage au complémentaire ou par réunion finie), on va naturellement considérer la tribu **engendrée** par $\mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_m$:

Théorème 1.4.1 *Soient $(E_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (E_m, \mathcal{T}_m)$ m espaces mesurables et soit*

$$\boxed{\underset{1 \leq i \leq m}{\otimes} \mathcal{T}_i = T_{E_1 \times \cdots \times E_m}(\mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_m)}$$

la tribu de parties de $E_1 \times \cdots \times E_m$ engendrée par $\mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_m$, appelée tribu produit *(*tensoriel*) des tribus $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_m$.*

- *Etant donné un espace mesurable $(E, \mathcal{T})$ et une application*

$$f = (f_1, \ldots, f_m) : E \to E_1 \times \cdots \times E_m,$$

on a l'équivalence :

$$\boxed{\begin{array}{l} f : (E, \mathcal{T}) \to \left(E_1 \times \cdots \times E_m, \underset{1 \leq i \leq m}{\otimes} \mathcal{T}_i\right) \text{ mesurable} \\ \Updownarrow \\ \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, f_i : (E, \mathcal{T}) \to (E_i, \mathcal{T}_i) \text{ mesurable} \end{array}}$$

- *En particulier, $\underset{1 \leq i \leq m}{\otimes} \mathcal{T}_i$ est la* **plus petite tribu** *de $E_1 \times \cdots \times E_m$ (au sens de l'inclusion) rendant* **mesurables** *les m projections canoniques :*

$$1 \leq i \leq m,\ \underline{\pi_i : E_1 \times \cdots \times E_m \to E_i}.$$

Preuve

• $\forall\, A_1 \times \cdots \times A_m \in \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_m$, on a $f^{-1}(A_1 \times \cdots \times A_m) = \bigcap_{i=1}^{m} {f_i}^{-1}(A_i)$ puisque $\forall\, x \in E$, on a $f(x) \in A_1 \times \cdots \times A_m \Leftrightarrow \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, f_i(x) \in A_i$; donc si les f_i sont mesurables, f l'est aussi d'après le théorème 1.2.4 et la définition de la tribu produit.

Inversement, $\forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$ et $\forall\, A_i \in \mathcal{T}_i, {f_i}^{-1}(A_i) = f^{-1}(E_1 \times \cdots \times A_i \times \cdots \times E_m)$, donc les f_i sont mesurables si f l'est.

• En particulier si $E = E_1 \times \cdots \times E_m$ et $f = \mathrm{id}_E$, application identique de E, on a donc

$$\begin{aligned}
&\forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, f_i = \pi_i : (E, \mathcal{T}) \to (E_i, \mathcal{T}_i) \text{ mesurable}\\
&\Updownarrow\\
&id_E : (E, \mathcal{T}) \to \Big(E, \underset{1 \le i \le m}{\otimes} \mathcal{T}_i\Big) \text{ mesurable} \Leftrightarrow \underset{1 \le i \le m}{\otimes} \mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}.
\end{aligned}$$

□

Remarque **1.4.2** Le couple $\Big(E_1 \times \cdots \times E_m, \underset{1 \le i \le m}{\otimes} \mathcal{T}_i\Big)$ est appelé *espace mesurable produit* des $(E_i, \mathcal{T}_i)$.

En ce qui concerne les sous-ensembles générateurs, on a :

Proposition 1.4.3 *Soient $(E_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (E_m, \mathcal{T}_m)$ m espaces mesurables.*

Si $\forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, \mathcal{S}_i$ est un sous-ensemble générateur de $\mathcal{T}_i$ tel que $\underline{E_i \in \mathcal{S}_i}$, alors $\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$ est un **sous-ensemble générateur** *de $\underset{1 \le i \le m}{\otimes} \mathcal{T}_i$.*

Preuve Comme $\forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, \mathcal{S}_i \subset \mathcal{T}_i$, on a $\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m \subset \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_m$ et donc $T_{E_1 \times \cdots \times E_m}(\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m) \subset \underset{1 \le i \le m}{\otimes} \mathcal{T}_i$.

Inversement, on a $\forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, {\pi_i}^{-1}(\mathcal{T}_i) = {\pi_i}^{-1}\left[T_{E_i}(\mathcal{S}_i)\right] = T_{E_1 \times \cdots \times E_m}\left[{\pi_i}^{-1}(\mathcal{S}_i)\right]$ d'après le théorème 1.2.4, et comme

$${\pi_i}^{-1}(\mathcal{S}_i) = \{E_1 \times \cdots \times A_i \times \cdots \times E_m : A_i \in \mathcal{S}_i\} \subset \mathcal{S}_1 \times \cdots \times S_m$$

puisque $\forall\, j, E_j \in \mathcal{S}_j$, on obtient $\forall\, i, {\pi_i}^{-1}(\mathcal{T}_i) \subset T_{E_1 \times \cdots \times E_m}(\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m)$; donc cette dernière tribu rend mesurables les π_i, ce qui assure l'autre inclusion $\underset{1 \le i \le m}{\otimes} \mathcal{T}_i \subset T_{E_1 \times \cdots \times E_m}(\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m)$ d'après le théorème 1.4.1. □

Corollaire 1.4.4 *Soient $F_1, \ldots, F_m$ m* **sous-ensembles** *de $\mathbb{R}$. On a :*

$$\boxed{\mathcal{B}(F_1 \times \cdots \times F_m) = \underset{1 \le i \le m}{\otimes} \mathcal{B}(F_i)}$$

Preuve Soit $S = \{]a,b[: (a,b) \in \mathbb{Q}^2, a < b\} \cup \{\mathbb{R}\}$ et $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$, soit $\mathcal{S}_i = \mathcal{S} \cap F_i$; comme tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion d'éléments de $\mathcal{S}$, finie ou dénombrable puisque $\mathcal{S}$ est dénombrable, on a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = T_{\mathbb{R}}(\mathcal{S})$ et $\mathcal{B}(F_i) = T_{F_i}(\mathcal{S}_i)$ d'après la proposition 1.3.1 ; de sorte que $T_{F_1\times\cdots\times F_m}(\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m) = \bigotimes\limits_{1\le i\le m} \mathcal{B}(F_i)$ d'après la proposition précédente.

D'autre part, $\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$ est une famille dénombrable d'ouverts de l'espace métrique $F_1 \times \cdots \times F_m \subset \mathbb{R}^m$, telle que tout ouvert de $F_1 \times \cdots \times F_m$ est une réunion d'éléments de cette famille ; donc on a aussi $T_{F_1\times\cdots\times F_m}(\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m) = \mathcal{B}(F_1 \times \cdots \times F_m)$. □

Exemple **1.4.5** $\underline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \big(\mathcal{B}(\mathbb{R})\big)^{m\otimes}}$, $\underline{\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^m) = \big(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\big)^{m\otimes}}$.

Application **1.4.6** En identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ au moyen de l'isométrie canonique

$$(x,y) \mapsto x + i\,y,$$

les ouverts de $\mathbb{R}^2$ s'identifient à ceux de $\mathbb{C}$, de sorte que $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ s'identifie à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$; ainsi, une application $f : (E,\mathcal{T}) \to \big(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C})\big)$ est mesurable si et seulement si ses parties réelle $\underline{\Re f}$ et imaginaire $\underline{\Im f}$ le sont.

Lemme 1.4.7 *Soit $(E_i)_{i\in I}, I \subset \mathbb{N}$, une* **partition** *finie ou dénombrable d'un espace mesurable $(E,\mathcal{T})$ en sous-ensembles mesurables, et soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications mesurables de $(E,\mathcal{T})$ dans un autre espace mesurable $(E',\mathcal{T}')$.*

Alors l'application $f : (E,\mathcal{T}) \to (E',\mathcal{T}')$ définie sur E par

$$\underline{f(x) = f_i(x) \text{ si } x \in E_i}$$

est **mesurable***.*

Preuve $\forall A \in \mathcal{T}', f^{-1}(A) = \bigcup\limits_{i\in I} \big[E_i \cap f_i^{-1}(A)\big] \in \mathcal{T}$. □

Corollaire 1.4.8 *Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace mesurable.*

- *L'ensemble* $\big\{f : (E,\mathcal{T}) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ mesurable$\big\}$ *est une* **sous algèbre** *de $\mathbb{R}^E$.*
- *Plus généralement, soient $f, g : (E,\mathcal{T}) \to \big(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big)$ mesurables ;*

  – si on convient de poser $\boxed{0 \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times 0 = 0}$ *dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors le* **produit** $f\,g : (E,\mathcal{T}) \to \big(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big)$ *de f et g est bien défini et* **mesurable** *;*

– *si on suppose que f et g ne prennent* **en aucun point des valeurs infinies de signe opposé**, *alors la* **somme** $f+g : (E,\mathcal{T}) \to \big(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big)$ *de f et g est bien définie et* **mesurable**.

- *L'ensemble* $\big\{f : (E,\mathcal{T}) \to \big(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C})\big) \text{ mesurable}\big\}$ *est une* **sous algèbre** *de* $\mathbb{C}^E$.

Preuve

• Soient f et g deux applications mesurables de E dans $\mathbb{R}$; d'après le théorème 1.4.1 et le fait que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, l'application $(f,g) : (E,\mathcal{T}) \to \big(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\big)$ est mesurable. Comme l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont des applications continues, donc boréliennes, les composées $f+g$ et $f\,g$ sont aussi mesurables (proposition 1.2.7).

En particulier en prenant g constante (donc mesurable), on obtient que $\forall\, a \in \mathbb{R}, a\,f$ est mesurable.

• Montrons le résultat par exemple pour la somme $f+g$: d'après le lemme 1.4.7, les applications $\tilde{f} = \begin{cases} f \text{ sur } \{|f| < \infty\} \\ 0 \text{ sur } \{|f| = \infty\} \end{cases}$ et $\tilde{g} = \begin{cases} g \text{ sur } \{|g| < \infty\} \\ 0 \text{ sur } \{|g| = \infty\} \end{cases}$ sont mesurables, et

il en est de même de $f+g = \begin{cases} \tilde{f}+\tilde{g} \text{ sur } \{|f| < \infty\} \cap \{|g| < \infty\} \\ +\infty \text{ sur } \{f = +\infty\} \cup \{g = +\infty\}, \\ -\infty \text{ sur } \{f = -\infty\} \cup \{g = -\infty\} \end{cases}$

puisque $\tilde{f}+\tilde{g}$ est mesurable d'après le premier point.

• On obtient le résultat analogue à celui du premier point avec $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$, par exemple en se référant à l'application 1.4.6. □

Corollaire 1.4.9 *Soient $(E_1,\mathcal{T}_1), \dots, (E_m,\mathcal{T}_m)$ m espaces mesurables ; soient m applications mesurables $1 \le i \le m, f_i : (E_i,\mathcal{T}_i) \to \big(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big)$.*

Alors l'application produit tensoriel *des f_i :*

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_m : \Big(E_1 \times \cdots \times E_m, \underset{1\le i\le m}{\otimes} \mathcal{T}_i\Big) \to \big(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big)$$

définie par : $\underline{(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m)(x_1,\dots,x_m) = f_1(x_1) \times \cdots \times f_m(x_m)}$

est **mesurable**.

Preuve $f_1 \otimes \cdots \otimes f_m$ est le produit des m applications

$$1 \le i \le m, f_i \circ \pi_i : \Big(E_1 \times \cdots \times E_m, \underset{1\le i\le m}{\otimes} \mathcal{T}_i\Big) \to \big(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big)$$

qui sont mesurables comme composées d'applications mesurables ; on applique le corollaire 1.4.8. □

1.5 Exercices corrigés

1. Soit $\Delta \overset{\text{déf}}{=} \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ la diagonale de $\mathbb{R}^2$ et soit $i : x \longmapsto (x,x)$ la bijection naturelle de $\mathbb{R}$ sur Δ.
   Etablir : $i^{-1}(\mathcal{B}(\Delta)) = i^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) = \mathcal{T}_{\mathbb{R}}\big[i^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}))\big] = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   .... **Solution** ....

   On a $\mathcal{B}(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \cap \Delta$ d'après la proposition 1.3.1, de sorte que
   $$i^{-1}(\mathcal{B}(\Delta)) = i^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$$
   (puisque $\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $i^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : (x,x) \in B\} = i^{-1}(B \cap \Delta)$).

   D'autre part on a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (cf. l'exemple 1.4.5), donc
   $$i^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) = \mathcal{T}_{\mathbb{R}}\big[i^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}))\big]$$
   d'après le théorème 1.2.4. Or
   $$\forall\, A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ i^{-1}(A \times B) = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ et } x \in B\} = A \cap B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$
   et en particulier $\forall\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i^{-1}(A \times A) = A$; on en déduit
   $$i^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ et donc } \mathcal{T}_{\mathbb{R}}\big[i^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}))\big] = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$
   On conclut en définitive $\underline{i^{-1}(\mathcal{B}(\Delta)) = \mathcal{B}(\mathbb{R})}$.

   ---

2. Montrer, en considérant la diagonale de $\mathbb{R}^2$ $\Delta \overset{\text{déf}}{=} \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$, que la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *ne coïncide pas* avec l'ensemble
   $$\mathcal{D} \overset{\text{déf}}{=} \Big\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \times B_n : A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ et } B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\Big\}.$$

   .... **Solution** ....

   On a $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ est stable par réunion dénombrable (car $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable), et $\mathcal{D}$ *paraît à première vue* stable par complémentation, en observant que
   $$\forall\, A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ (A \times B)^c = (A^c \times B) \cup (A \times B^c), \text{ avec } A^c, B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ ;$$
   de sorte que $\mathcal{T}$ *serait* une tribu.

   On a de plus les inclusions évidentes
   $$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}\big(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})\big),$$

puisque une tribu est stable par réunion dénombrable ; donc *on aurait* $\mathcal{D} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par définition de la tribu produit tensoriel, et on sait (cf. l'exemple 1.4.5) que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Or considérons la diagonale de $\mathbb{R}^2$ $\Delta = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$.

- Dune part, Δ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque de $\{0\}$ par l'application continue $(x,y) \mapsto x - y$; donc Δ est un élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

- D'autre part Δ est en bijection avec $\mathbb{R}$ par l'application $x \mapsto (x,x)$, donc Δ est de cardinal infini non dénombrable ; et on a :

$$\forall\, A, B \subset \mathbb{R} \text{ non vides, } A \times B \subset \Delta \Longrightarrow A = B \text{ est un singleton,}$$

puisque sinon $\exists\, a \neq b$ dans $\mathbb{R}$ tels que $a \in A$ et $b \in B$, qui vérifient $(a,b) \in (A \times B) \cap \Delta^c$.

On en déduit que Δ n'admet pas d'écriture de la forme $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \times B_n$, c'est-à-dire que $\Delta \notin \mathcal{D}$. Ceci prouve que $\underline{\mathcal{D} \neq \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)}$ (inclusion stricte).

---

3. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable quelconque et soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E. On note $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ l'ensemble des classes de $\sim$-équivalence et $\mathcal{T}_\sim$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ constitué des éléments de $\mathcal{T}$ qui sont des réunions (quelconques) d'éléments de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{T}_\sim \overset{\text{déf}}{=} \Big\{A \in \mathcal{T} : A = \bigcup_{C \in \mathcal{C}, C \subset A} C\Big\}.$$

a) Montrer que $\mathcal{T}_\sim$ est une sous-tribu de $\mathcal{T}$, dite *compatible avec la relation d'équivalence.*

b) Caractériser les applications $f : E \to \mathbb{R}$ qui sont $(\mathcal{T}_\sim, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables.

c) On considère la relation d'équivalence sur $E = \mathbb{R}$:

$$y \sim x \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} |y| = |x|.$$

Identifier $\mathcal{B}(\mathbb{R})_\sim$ et caractériser les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont $(\mathcal{B}(\mathbb{R})_\sim, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables.

d) On considère la relation d'équivalence sur $E = \mathbb{R}$:

$$y \sim x \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} y - x \in \mathbb{Q}.$$

Identifier $\mathcal{B}(\mathbb{R})_\sim$ et caractériser les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont $(\mathcal{B}(\mathbb{R})_\sim, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables et continues en au moins un point.

Solution

a) On a bien $E \in \mathcal{T}_\sim$ ($E \in \mathcal{T}$ est la réunion de toutes les classes d'équivalence), et $\mathcal{T}_\sim$ est évidemment stable par réunion dénombrable comme $\mathcal{T}$; de plus $\mathcal{T}_\sim$ est stable par complémentation, car $\mathcal{C}$ partitionne E :

$$\forall\, A \in \mathcal{T}_\sim,\ A = \bigcup_{C\in\mathcal{C}, C\subset A} C\,, \text{ donc }\ A^c = \bigcup_{C\in\mathcal{C}, C\subset A^c} C,$$

et comme $A \in \mathcal{T}_\sim \subset \mathcal{T}$, on a a aussi $A^c \in \mathcal{T}$, donc $A^c \in \mathcal{T}_\sim$.

Ainsi $\underline{\mathcal{T}_\sim \text{ est une sous-tribu de } \mathcal{T}}$.

b) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application $(\mathcal{T}_\sim, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable ; $\forall\, x \in E$, on a $\{f(x)\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (un singleton est un fermé de $\mathbb{R}$), donc $f^{-1}(\{f(x)\}) \in \mathcal{T}_\sim$. Ainsi $f^{-1}(\{f(x)\})$ qui contient x contient toute la classe de $\sim$-équivalence de x, autrement dit f garde la valeur constante $f(x)$ sur cette classe d'équivalence ; et comme $\mathcal{T}_\sim \subset \mathcal{T}$, f est *a fortiori* $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

Inversement, si $f : E \to \mathbb{R}$ est une application $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable qui est constante sur chaque élément de $\mathcal{C}$, on a pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\forall\, y \in B \cap f(E),\ f^{-1}(\{y\}) \text{ est une réunion d'éléments de } \mathcal{C},$$

donc $f^{-1}(B) = \bigcup_{y\in B\cap f(E)} f^{-1}(\{y\})$ l'est aussi ; et comme $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$, on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_\sim$.

En conclusion, pour une application $f : E \to \mathbb{R}$:

$$\underline{f \text{ est } (\mathcal{T}_\sim, \mathcal{B}(\mathbb{R}))\text{-mesurable} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est } (\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))\text{-mesurable} \\ f \text{ est constante sur les éléments de } \mathcal{C} \end{cases}}.$$

c) $\sim$ est évidemment une relation d'équivalence, dont les classes d'équivalence sont le singleton $\{0\}$ et les doublons $\{x, -x\}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$\mathcal{B}(\mathbb{R})_\sim$ est donc constituée des boréliens B tels que $\forall\, x \in B$, $-x \in B$; autrement dit

$$\underline{\mathcal{B}(\mathbb{R})_\sim = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : B = -B\}} \quad \text{où} \quad -B = \{-x : x \in B\}.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application ; comme f constante sur les éléments de $\mathcal{C}$ signifie ici

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(-x) = f(x),$$

on a d'après la question b l'équivalence

$$\underline{f \text{ est } (\mathcal{B}(\mathbb{R})_\sim, \mathcal{B}(\mathbb{R}))\text{-mesurable} \Longleftrightarrow f \text{ est borélienne et paire.}}$$

d) Comme $(\mathbb{Q}, +)$ est un groupe, $\sim$ est bien une relation d'équivalence, dont les classes d'équivalence sont de la forme $\mathbb{Q} + x$, $x \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{B}(\mathbb{R})_\sim$ est donc constituée des boréliens B tels que $\forall\, x \in B$, $\mathbb{Q} + x \subset B$, soit $\mathbb{Q} + B = \{q + x : q \in \mathbb{Q} \text{ et } x \in B\} \subset B$; comme $\supset$ est évident, on obtient

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})_\sim = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : B = \mathbb{Q} + B\}.$$

On en déduit $\mathcal{B}(\mathbb{R})_\sim \subset \{\mathbb{Q} + B : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$; inversement, $\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

- d'une part $\mathbb{Q} + B = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q + B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car $\mathbb{Q}$ est de cardinal dénombrable et car $\forall\, q \in \mathbb{Q}$, $q + B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (les translations sont continues, donc boréliennes) ;

- d'autre part $\mathbb{Q} + (\mathbb{Q} + B) = (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}) + B = \mathbb{Q} + B$.

Ainsi $$\underline{\mathcal{B}(\mathbb{R})_\sim = \{\mathbb{Q} + B : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}}.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(\mathcal{B}(\mathbb{R})_\sim, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$.

On a $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \alpha > 0$ tel que $\forall\, x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Comme $\bigcup_{x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[} (\mathbb{Q} + x) = \mathbb{R}$ (car $\forall\, y \in \mathbb{R}$, $-\mathbb{Q} + y = \mathbb{Q} + y$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc $(\mathbb{Q} + y) \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\neq \emptyset$) et comme f est constante sur les sous-ensembles $\mathbb{Q} + x$ d'après la question b, on a $|f - f(x_0)| < \varepsilon$; $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on conclut que $f \equiv f(x_0)$ est une <u>fonction constante</u>.

Inversement, toute fonction constante est continue sur $\mathbb{R}$, donc borélienne, et constante en particulier sur les classes d'équivalence ; donc elle est $(\mathcal{B}(\mathbb{R})_\sim, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable d'après la question b.

Remarque : on retrouvera au chapitre suivant cette relation d'équivalence "modulo $\mathbb{Q}$" pour établir que tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ n'est pas un borélien et que la restriction à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ s'impose (cf. l'exercice 2 du paragraphe 2.6).

1.6 Exercices

Exercice 1

Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux tribus sur un ensemble E, engendrées respectivement par deux sous-ensembles $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ de $\mathcal{P}(E)$.

1) La tribu $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ est-elle nécessairement engendrée par $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$?

2) Comparer $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ avec les tribus engendrées :

$$\mathcal{I} = T_E(\{A_1 \cap A_2 : A_1 \in \mathcal{T}_1 \text{ et } A_2 \in \mathcal{T}_2\})$$

$$\mathcal{U} = T_E(\{A_1 \cup A_2 : A_1 \in \mathcal{T}_1 \text{ et } A_2 \in \mathcal{T}_2\}).$$

Exercice 2

1) $\mathbb{Q}$ est-il un borélien de $\mathbb{R}$? Qu'est-ce que la tribu de Borel de $\mathbb{Q}$?

2) Soient $\mathcal{A} = \big\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\big\}$ et $\mathcal{K} = \{K \subset \mathbb{R} : K \text{ compact}\}$.

Comparer $T_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$, $T_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3) Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ n'est pas l'ensemble des réunions dénombrables d'intervalles.

Exercice 3

Soient A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de A dans $\mathbb{R}$, supposée **monotone**. Montrer que f est borélienne.

Exercice 4

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables d'un espace mesurable $(E, \mathcal{T})$ dans $\big(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big)$.

1) Montrer que $F = \Big\{x \in E : \big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \overline{\mathbb{R}}\Big\} \in \mathcal{T}$.

2) Montrer que $G = \Big\{x \in E : \big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \mathbb{R}\Big\} \in \mathcal{T}$.

Chapitre 2

Mesures positives

2.1 Généralités

Définition 2.1.1 *Soit* $(E, \mathcal{T})$ *un espace mesurable.*

On appelle mesure positive *sur* $(E, \mathcal{T})$ *une application* $\underline{\mu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+}$ *vérifiant*

- $$\boxed{\mu(\emptyset) = 0}$$
- *La propriété dite de* σ-additivité *:*
  pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ *telle que les* A_n *sont* **2 à 2 disjoints**,
  $$\boxed{\boxed{\mu\Big(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)}} \quad (\uplus \textit{ pour union disjointe}),$$
  où $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$ *désigne* $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i) \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

On dit alors que $(E, \mathcal{T}, \mu)$ *est un* espace mesuré*.*

On peut remarquer que si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions indiquées ci-dessus, il en est de même de la suite $\big(A_{\sigma(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ pour toute **permutation** σ de $\mathbb{N}$; et comme $\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_{\sigma(n)} = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$, on a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu\big(A_{\sigma(n)}\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu\big(A_n\big) \text{ dans } \overline{\mathbb{R}}_+.$$

En fait, ceci ne constitue pas une condition supplémentaire sur la suite numérique $\big(\mu(A_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, puisque cette propriété de “commutativité” est satisfaite pour toute série à termes positifs.

On a les propriétés élémentaires :

Proposition 2.1.2 *Soit $(E,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré ; alors*

- μ *est* additive *: $\forall\, n\in\mathbb{N}$ et $\forall\, A_0,\ldots,A_n\in\mathcal{T}$, 2 à 2 disjoints,*
$$\underline{\mu\Big(\biguplus_{0\le i\le n} A_i\Big) = \sum_{i=0}^{n}\mu(A_i).}$$
- μ *est* croissante *sur $\mathcal{T}$: $\forall\, A,B\in\mathcal{T}$,*
$$\boxed{A\subset B \Rightarrow \mu(A)\le\mu(B)} \text{ et si } \mu(A)<+\infty\,,\ \underline{\mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(A)}.$$
- μ *vérifie l'*inégalité de Boole *:*
$$\forall\, n\in\mathbb{N} \text{ et } \forall\, A_0,\ldots,A_n\in\mathcal{T},\underline{\mu\Big(\bigcup_{0\le i\le n} A_i\Big)\le\sum_{i=0}^{n}\mu(A_i).}$$

Preuve

• Posons $\forall\, p\ge n+1, A_p=\emptyset$; les éléments de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont 2 à 2 disjoints, donc par σ- additivité de μ, on a $\mu\Big(\biguplus_{0\le i\le n} A_i\Big)=\sum_{i=0}^{n}\mu(A_i)+\lim_{\substack{p\to\infty\\ p\ge n}}[(p-n)\,\mu(\emptyset)]=\sum_{i=0}^{n}\mu(A_i)$.

• $B\supset A$ s'écrit $B=A\uplus(B\setminus A)$, où $B\setminus A=B\cap A^c\in\mathcal{T}$ est disjoint de A ; on a donc $\mu(B)=\mu(A)+\mu(B\setminus A)\ge\mu(A)$ puisque μ est positive.

Si $\mu(A)<+\infty$, on en déduit la relation $\mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(A)$ en soustrayant $\mu(A)$ des deux membres de l'égalité précédente.

• Montrons l'inégalité de Boole par récurrence sur n : c'est trivial pour $n=0$, et si on suppose la propriété vraie pour $n-1$ $(n\ge1)$, on a par additivité de μ, en notant $B=A_0\cup\ldots\cup A_{n-1}$:
$$\mu(A_0\cup\ldots\cup A_n)=\mu\big(B\uplus(A_n\cap B^c)\big)=\mu(B)+\mu(A_n\cap B^c).$$

On en déduit $\mu(A_0\cup\ldots\cup A_n)\le\mu(B)+\mu(A_n)$ par croissance de μ, et donc d'après l'hypothèse de récurrence $\mu(A_0\cup\ldots\cup A_n)\le\sum_{i=0}^{n-1}\mu(A_i)+\mu(A_n)=\sum_{i=0}^{n}\mu(A_i)$. □

Les propriétés suivantes concernent les suites d'éléments de $\mathcal{T}$:

Théorème 2.1.3 *Soit $(E,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{T}^{\mathbb{N}}$.*

- *μ vérifie la propriété de* continuité croissante *: si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **croissante** *(au sens de l'inclusion), c'est-à-dire $\forall\, n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$, on a*
$$\boxed{\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)}.$$
- *μ vérifie la propriété de* continuité décroissante *: si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, c'est-à-dire $\forall\, n \in \mathbb{N}, A_n \supset A_{n+1}$, et* **si les $\mu(A_n)$ ne sont pas tous infinis***, on a*
$$\boxed{\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)} < +\infty.$$
- *μ vérifie l'*inégalité de Boole généralisée *:* $\boxed{\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \le \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)}$.

Preuve

• Si on pose $B_0 = A_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments 2 à 2 disjoints de $\mathcal{T}$, d'où par σ-additivité de μ :
$$\mu\Big(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \mu(B_i).$$
Or $\forall\, n \in \mathbb{N}, A_n = \biguplus_{0\le i\le n} B_i$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} B_n$, donc $\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

• Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$; comme les deux membres de l'égalité à établir ne changent pas si on remplace la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la suite $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}, A'_n = A_{n+n_0}$, qui est encore décroissante, on peut supposer $\mu(A_0) < +\infty$, auquel cas $\forall\, n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) \le \mu(A_0) < +\infty$.

Si on pose $\forall\, n \in \mathbb{N}, B_n = A_0 \setminus A_n$, la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ est croissante et vérifie $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = A_0 \setminus \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$; on a donc d'après la propriété de continuité croissante $\mu(A_0) - \mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mu\Big[A_0 \setminus \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)\Big] = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} [\mu(A_0) - \mu(A_n)]$ car $\mu(A_0) < +\infty$; d'où $\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ en simplifiant par $\mu(A_0) < +\infty$.

• Posons pour tout $n \in \mathbb{N}, B_n = \bigcup_{0\le i\le n} A_i$; la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ est croissante et on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

On a donc par continuité croissante $\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$; or, d'après l'inégalité de Boole, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}, \mu(B_n) = \mu\Big(\bigcup_{0\le i\le n} A_i\Big) \le \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i) \le \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$, d'où le résultat. $\square$

Corollaire 2.1.4 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable et soit $\mu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une application telle que $\mu(\emptyset) = 0$.*

μ est une mesure positive si et seulement si μ est **additive** *et vérifie la propriété de* **continuité croissante***.*

Preuve D'après le théorème 2.1.3, il suffit de montrer la suffisance de la condition.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments 2 à 2 disjoints de $\mathcal{T}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, soit $B_n = \biguplus_{0\le i\le n} A_i$; la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ est croissante et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$; donc $\mu\Big(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$ avec $\forall\, n \in \mathbb{N}, \mu(B_n) = \mu\Big(\biguplus_{0\le i\le n} A_i\Big) = \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i)$, d'où le résultat. $\square$

Exemples **2.1.5** de mesures positives sur un espace mesurable

- Etant donné un point $a \in E$, on définit la *mesure de Dirac* δ_a par :

$$\forall\, A \in \mathcal{T}, \boxed{\delta_a(A) = \mathbb{1}_A(a) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in A \\ 0 \text{ si } a \notin A \end{cases}}.$$

  Cette mesure permet de modéliser une **masse ponctuelle** dans un système mécanique.

- Plus généralement, étant donné un sous-ensemble $F \subset E$, on définit la *mesure de comptage* δ_F associée à F par :

$$\forall\, A \in \mathcal{T}, \boxed{\delta_F(A) = \begin{cases} \operatorname{card}(A \cap F) \text{ si } A \cap F \text{ est fini} \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}}$$

  (la vérification qu'il s'agit bien d'une mesure positive est laissée au soin du lecteur).

Les mesures positives réellement intéressantes sont celles qui ne prennent pas la valeur $+\infty$ sur trop d'ensembles mesurables ; cette remarque éclaire les définitions suivantes :

Définition 2.1.6 *Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.*

- *On dit que μ est* finie *si μ est* **à valeurs dans** $\mathbb{R}_+$ *(auquel cas μ est à valeurs dans l'intervalle fermé $\underline{[0, \mu(E)]} \subset \mathbb{R}_+$ d'après la propriété de croissance, de sorte que μ finie est même* **bornée***).*

- *On dit que μ est* σ-finie *s'il* **existe** *une suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ *telle que*

$$\boxed{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) < +\infty}.$$

- *Dans le cas où* $(E, \mathcal{T}) = \big(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\big)$ $(m \geq 1)$, *on dit que μ est* de Radon *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ *(ou sur* $\mathbb{R}^m$*) si*

$$\boxed{\forall\, K \subset \mathbb{R}^m \text{ compact}, \mu(K) < +\infty}$$

  (auquel cas μ est à valeurs **finies** *sur tous les* **boréliens bornés** *d'après la propriété de croissance).*

- *Dans le cas où $\mathcal{T}$ contient les singletons de E, on dit que μ est* diffuse *si la mesure par μ de chaque singleton est* **nulle**.

Remarques **2.1.7**

- On a les implications :

  $\underline{\mu \text{ finie} \Rightarrow \mu\ \sigma\text{-finie}}$ et pour $E = \mathbb{R}^m$, $\underline{\mu \text{ finie} \Rightarrow \mu \text{ de Radon} \Rightarrow \mu\ \sigma\text{-finie}}$

  (σ-finie se vérifie en posant $\forall\, n \in \mathbb{N}, A_n = E$, respectivement $A_n = [-n, n]^m$).

- La mesure de comptage δ_F définie dans l'exemple précédent est telle que :
  - δ_F finie $\Leftrightarrow$ F fini (en particulier une mesure de Dirac est finie) ;
  - δ_F σ-finie $\Leftrightarrow$ F fini ou dénombrable (si $\mathcal{T}$ contient les singletons de E), et pour $E = \mathbb{R}^m, \delta_F$ de Radon $\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, F \cap [-n, n]^m$ est fini.

2.2 Mesures positives de Radon sur $\mathbb{R}$

Selon la définition 2.1.6 avec $m = 1$, une mesure positive sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est **de Radon** si la valeur qu'elle attribue à tout borélien borné ou, ce qui est suffisant grâce à la propriété de croissance, à tout **intervalle borné** est **finie**.

La restriction aux intervalles bornés va permettre d'associer à chaque mesure positive de Radon une fonction caractéristique, sa *fonction de répartition*, unique à une constante près. Cette représentation élémentaire d'une mesure de Radon, attachée à la structure d'ordre de $\mathbb{R}$, est très utilisée lorsqu'on a affaire à une *probabilité* μ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire à une mesure positive finie (donc de Radon) de *masse* $\mu(\mathbb{R}) = 1$.

Définition 2.2.1 *Soit μ une mesure positive de Radon sur $\mathbb{R}$. On appelle* fonction de répartition *de μ toute application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant*

$$\boxed{\forall\, x \leq y\,,\ F(y) - F(x) = \mu([x, y[\,)}\,.$$

La proposition suivante établit l'existence et les propriétés principales des fonctions de répartition :

Proposition 2.2.2 *Soit μ une mesure positive de Radon sur $\mathbb{R}$.*

- *Il existe une infinité de fonctions de répartition de la mesure μ, chacune de ces fonctions F étant égale, à la constante additive $F(0)$ près, à la* **fonction de répartition F_0 nulle en 0** *définie par :*

$$\begin{cases} \forall\, x \leq 0, F_0(x) = -\mu([x, 0[\,) \\ \forall\, x > 0, F_0(x) = \mu([0, x[\,) \end{cases}.$$

Soit F une fonction de répartition de μ.

- *F est* **croissante** *et* **continue à gauche***.*

- *Si on prolonge F sur $\overline{\mathbb{R}}$ en posant*

$$\begin{cases} F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) & \geq -\infty \\ F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) & \leq +\infty \end{cases},$$

  on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\underline{\mu(\,]-\infty, x[\,) = F(x) - F(-\infty)}\,,\ \underline{\mu([x, +\infty[\,) = F(+\infty) - F(x)}$$

  et $$\underline{\mu(\mathbb{R}) = F(+\infty) - F(-\infty)}.$$

- *Si on note, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_d(x)$ la* **limite à droite** *de F en x (de sorte que F_d est* **croissante** *et* **continue à droite***), on a :*

  - *$\forall\, x \in \mathbb{R}$, le* saut *de F en x est* $\boxed{F_d(x) - F(x) = \mu(\{x\})}$ *;*

  - *$\forall\, x \leq y$,* $\underline{\mu([x, y]) = F_d(y) - F(x)}\,,\ \underline{\mu(\,]x, y]) = F_d(y) - F_d(x)}$

    et $\underline{\mu(\,]x, y[\,) = F(y) - F_d(x)}$.

Preuve

• F_0 est bien nulle en 0 et vérifie par additivité de μ, pour tous $x \leq y$:

$$F_0(y) - F_0(x) = \begin{cases} -\mu([y,0[\,) + \mu([x,0[\,) = \mu([x,0[\setminus[y,0[\,) = \mu([x,y[\,) \text{ si } x \leq y \leq 0 \\ \mu([0,y[\,) + \mu([x,0[\,) = \mu([x,0[\cup[0,y[\,) = \mu([x,y[\,) \text{ si } x \leq 0 < y \\ \mu([0,y[\,) - \mu([0,x[\,) = \mu([0,y[\setminus[0,x[\,) = \mu([x,y[\,) \text{ si } 0 < x \leq y \end{cases}$$

donc F_0 est bien une fonction de répartition de μ.

Si F en est une autre, on a

$$\begin{cases} \forall\, x \leq 0, F(0) - F(x) = \mu([x,0[\,), \text{ donc } F(x) = F(0) - \mu([x,0[\,) = F(0) + F_0(x) \\ \forall\, y > 0, F(y) - F(0) = \mu([0,y[\,), \text{ donc } F(y) = F(0) + \mu([0,y[\,) = F(0) + F_0(y) \end{cases}$$

de sorte que $F = F_0 + F(0)$; inversement, $F = F_0 + C$ vérifie bien $\forall\, x \leq y$, $F(y) - F(x) = \mu([x,y[\,)$ pour tout $C \in \mathbb{R}$ puisque F_0 est une fonction de répartition de μ.

• D'après la relation de définition, F est croissante et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, F(x) - F(x - \frac{1}{n}) = \mu\big([x - \frac{1}{n}, x[\big)$ où $\big([x - \frac{1}{n}, x[\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de boréliens de mesure μ finie et d'intersection $[x,x[= \emptyset$.

On a donc $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \big[F(x) - F\big(x - \frac{1}{n}\big)\big] = \lim\limits_{n\to\infty} \mu\big([x - \frac{1}{n}, x[\big) = \mu(\emptyset) = 0$
par continuité décroissante de μ, de sorte que $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} F\big(x - \frac{1}{n}\big)$ et F est continue à gauche en x.

• $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $([-n,x[\,)_{n\in\mathbb{N}}$ et $([x,n[\,)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites croissantes de boréliens, de réunions respectives $]-\infty, x[$ et $[x, +\infty[$; on a donc par continuité croissante de μ,

$$\begin{cases} \mu(\,]-\infty,x[\,) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu([-n,x[\,) = \lim\limits_{n\to\infty} [F(x) - F(-n)] = F(x) - F(-\infty) \\ \mu([x,+\infty[\,) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu([x,n[\,) = \lim\limits_{n\to\infty} [F(n) - F(x)] = F(+\infty) - F(x) \end{cases},$$

et par additivité, $\mu(\mathbb{R}) = \mu(\,]-\infty,x[\,) + \mu([x,+\infty[\,) = F(+\infty) - F(-\infty)$.

• $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\big([x, x + \frac{1}{n}[\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de boréliens de mesure μ finie et d'intersection $[x,x] = \{x\}$; on a donc, par continuité décroissante de μ :

$$\mu(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} \mu\big([x, x + \tfrac{1}{n}[\big) = \lim_{n\to\infty} \big[F\big(x + \tfrac{1}{n}\big) - F(x)\big] = F_d(x) - F(x)$$

qui est bien le saut de F en x puisque F est continue à gauche.

On en déduit, pour tous $x \leq y$:

$$\begin{cases} \mu([x,y]) = \mu([x,y[\,) + \mu(\{y\}) = (F(y) - F(x)) + (F_d(y) - F(y)) = F_d(y) - F(x) \\ \mu(\,]x,y]) = \mu([x,y]) - \mu(\{x\}) = (F_d(y) - F(x)) - (F_d(x) - F(x)) = F_d(y) - F_d(x) \\ \mu(\,]x,y[\,) = \mu([x,y[\,) - \mu(\{x\}) = (F(y) - F(x)) - (F_d(x) - F(x)) = F(y) - F_d(x) \end{cases}$$

□

Corollaire 2.2.3 *Soit F une fonction de répartition de μ. On a les équivalences :*

$$\boxed{\begin{array}{c} \mu \text{ diffuse} \Leftrightarrow F \text{ continue sur } \mathbb{R} \\ \mu \text{ finie} \Leftrightarrow F \text{ bornée sur } \mathbb{R} \end{array}}.$$

Théorème 2.2.4 (admis) *Soit une application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$* **croissante** *et* **continue à gauche***. Il* **existe une unique mesure positive de Radon** *μ sur $\mathbb{R}$ dont F est fonction de répartition.*

Ce théorème est **fondamental**, puisqu'il donne une caractérisation élémentaire des mesures positives de Radon sur $\mathbb{R}$ et fournit un mode de construction général de ces mesures ; en voici une application essentielle :

Définition 2.2.5 *On appelle* mesure de Lebesgue *sur $\mathbb{R}$, notée $\underline{\lambda}$, la mesure positive de Radon sur $\mathbb{R}$ dont la fonction de répartition nulle en 0 est l'***application identique** *de $\mathbb{R}$.*

Comme l'application identique est continue, λ est **diffuse** ; elle vérifie donc :

$$\forall\, x \leq y, \underline{\lambda([x,y[\,) = \lambda([x,y]) = \lambda(\,]x,y]) = \lambda(\,]x,y[\,) = y - x},$$

autrement dit elle constitue un **prolongement** de la notion de **longueur** des intervalles, ce qui explique son importance toute particulière.

2.3 Ensembles négligeables

Définition 2.3.1 *Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et soit un sous-ensemble $A \subset E$.*

On dit que A est μ-négligeable *(ou simplement* négligeable*) si*

$$\boxed{\exists\, B \in \mathcal{T} \text{ tel que } A \subset B \text{ et } \mu(B) = 0}$$

et on note $$\underline{\mathcal{N} = \{A \subset E : A \text{ est } \mu\text{-négligeable}\}}.$$

Remarquons que $\emptyset \in \mathcal{N}$ et que $\mathcal{N}$ est stable par réunion finie ou dénombrable d'après les inégalités de Boole ; de plus :

$$A \in \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{N} \quad \text{et } \textbf{si } A \in \mathcal{T}, \text{ on a } A \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \mu(A) = 0.$$

Définition 2.3.2 *Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.*

- *On dit qu'une propriété $\mathcal{P}_r$, relative aux points x de E, est vérifiée μ-*presque partout *(ou simplement* presque partout*, en abrégé* μ pp *ou simplement* pp*) si*

$$\{x \in E : \mathcal{P}_r \text{ non vérifiée en } x\} \in \mathcal{N}.$$

- *En particulier, on dit qu'une fonction f est définie* (μ-)presque partout *sur E si*

$$\{x \in E : f \text{ non définie en } x\} \in \mathcal{N}.$$

- *On dit que deux fonctions f et g, définies partout ou (μ-)presque partout sur E, sont* (μ-)presque partout égales *(en abrégé $f \overset{\mu\,\text{pp}}{=} g$) si*

$$\{x \in E : f \text{ ou } g \text{ non définie en } x, \text{ ou bien } f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{N}.$$

Comme $\emptyset \in \mathcal{N}$ et comme $\mathcal{N}$ est stable par réunion finie, on vérifie immédiatement que l'égalité presque partout est une **relation d'équivalence**.

Etant donné un espace mesuré $(E, \mathcal{T}, \mu)$, un espace mesurable $(E', \mathcal{T}')$ et deux applications f et g de E dans E', il est possible d'enrichir la tribu $\mathcal{T}$ afin de rendre vraie l'implication : $(*)$

$$(f \text{ mesurable et } g \overset{\mu\,\text{pp}}{=} f) \Longrightarrow g \text{ est mesurable.}$$

Remarquons d'abord que, si on note $N = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{N}$, on a

$$\forall\, A' \in \mathcal{T}',\ g^{-1}(A') = (g^{-1}(A') \cap N) \uplus (g^{-1}(A') \cap N^c)\,;$$

donc si $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$, on a d'une part $g^{-1}(A') \cap N \in \mathcal{T}$ car $g^{-1}(A') \cap N \subset N$ est un élément de $\mathcal{N}$; d'autre part $g^{-1}(A') \cap N^c = f^{-1}(A') \cap N^c \in \mathcal{T}$ car f est mesurable et $N^c = E \setminus N \in \mathcal{T}$. Ainsi $\forall\, A' \in \mathcal{T}'$, $g^{-1}(A') \in \mathcal{T}$, c'est-à-dire que g est effectivement mesurable, sous la condition $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$.

On démontre (sans difficulté majeure) :

Théorème 2.3.3 (admis) *Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.*

La tribu de parties de E $\widehat{\mathcal{T}} = T_E(\mathcal{T} \cup \mathcal{N})$ engendrée par $\mathcal{T}$ et $\mathcal{N}$, appelée tribu μ-complétée *de $\mathcal{T}$, vérifie les propriétés suivantes :*

- *Il existe une unique mesure positive* $\widehat{\mu}$ *sur* $\widehat{\mathcal{T}}$*, appelée* mesure complétée *de* μ*, telle que* $\underline{\widehat{\mu}_{|\mathcal{T}} = \mu}$.

- $\mathcal{N}$ *coïncide avec l'ensemble* $\widehat{\mathcal{N}}$ *des* $\widehat{\mu}$*-négligeables, de sorte que* $\boxed{\widehat{\mathcal{N}} \subset \widehat{\mathcal{T}}}$.

D'après la définition de $\widehat{\mathcal{T}}$, on a bien sûr l'équivalence $\underline{\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{N} \subset \mathcal{T}}$, auquel cas on dit que la tribu $\mathcal{T}$ est *μ-complète* et que la mesure μ est *complète.*

Dans le cas $(E, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (λ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$), $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ n'est pas λ-complète ; la tribu λ-complétée $\widehat{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ est appelée *tribu de Lebesgue* de $\mathbb{R}$ et la mesure complétée $\widehat{\lambda}$ est encore appelée *mesure de Lebesgue.*

2.4 Image d'une mesure par une application

Proposition 2.4.1 *Soient* $(E, \mathcal{T})$ *et* $(E', \mathcal{T}')$ *deux espaces mesurables et soit* $h : (E, \mathcal{T}) \to (E', \mathcal{T}')$ *une application* **mesurable**.

Etant donné une mesure positive μ *sur* $(E, \mathcal{T})$*, l'application* $h(\mu)$ *définie sur la tribu* $\mathcal{T}'$ *par :*

$$\forall\, A' \in \mathcal{T}', \ \boxed{h(\mu)(A') = \mu\big[h^{-1}(A')\big]}$$

est une **mesure positive**, *appelée* image de μ par h.

De plus $h(\mu)$ *est* **finie** *si et seulement si* μ *est finie.*

Preuve $h(\mu)$ est bien définie et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ comme μ, et on a $h(\mu)(\emptyset) = \mu\big[h^{-1}(\emptyset)\big] = \mu(\emptyset) = 0$.

Soit $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}'$ 2 à 2 disjoints ; alors $\big(h^{-1}(A'_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ 2 à 2 disjoints et on a, par σ-additivité de μ :

$$\mu\Big[h^{-1}\Big(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A'_n\Big)\Big] = \mu\Big[\biguplus_{n\in\mathbb{N}} h^{-1}(A'_n)\Big] = \sum_{n=0}^{\infty} \mu\big[h^{-1}(A'_n)\big]\ ;$$

ceci montre que $h(\mu)$ est aussi σ-additive.

Enfin $h(\mu)(E') = \mu\big[h^{-1}(E')\big] = \mu(E)$, donc $h(\mu)$ finie $\Leftrightarrow$ μ finie. □

Remarque **2.4.2** La notion d'image d'une mesure joue un rôle essentiel dans la théorie des probabilités (loi d'une variable aléatoire). On reprendra son étude au paragraphe 4.6.