**Maîtrise de Mathématiques**

**Feuille d'exercices n$^o$ 1**
**Révisions de topologie et d'analyse fonctionnelle**

1. Quelle est la différence entre
$$\mathcal{C}(\Omega)\ ,\ \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \text{ et } \overline{\mathcal{C}(\Omega)}\ ?$$

2. Soit $H$ un espace préhilbertien (i.e. muni d'une forme bilinéaire, symétrique définie positive $(\ ,\ )$ **mais pas nécessairement complet**).
   (a) Montrer que le dual $H'$ de $H$ est complet.
   (b) Soit $\sigma$ l'application de $H$ dans $H'$ définie par
   $$\langle \sigma(u), v\rangle = (u, v)$$
   pour tous $u$ et $v$ de $H$.
   Montrer que $\sigma$ est une isométrie de $H$ sur $H'$ et que $R(\sigma)$ est dense dans $H'$ (on pourra "transporter" sur $R(\sigma)$ le produit scalaire de $H$, puis le prolonger à $\overline{R(\sigma)}$ et appliquer ensuite le théorème de représentation de Riesz.
   (c) En déduire que $H$ peut être identifié à un sous-espace dense d'un espace de Hilbert $\tilde{H}$.

3. Montrer que le dual $E'$ d'un espace vectoriel normé $E$, muni de la norme
$$\|x'\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E \geq 1} |x'(x)|\ ,$$
est toujours un Banach.

4. **Inégalités de Young et de Hölder.**
Démontrer l'inégalité de Young :
$$\forall a, b > 0\ \ ,\ \ \forall p, q \in \mathbb{N} \text{ tels que } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad ,\qquad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$
En déduire l'inégalité de Hölder :
$$\forall f \in L^p\ ,\ \forall g \in L^q \qquad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p\ \|g\|_q$$

5. On désigne par $E$ un espace de Banach, par $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et par $\mathcal{E}^p$ l'espace des applications de classe $\mathcal{C}^p$ de $[a, b]$ dans $E$, normé par
$$\|u\|_p = \sup_{a \leq t \leq b} \sum_{k=0}^{p} \|u^{(k)}(t)\|\ .$$
Pour chaque valeur de $p$ et chaque $t$ dans $[a, b]$, l'application de $\mathcal{E}^p$ dans $E$ définie par $u \mapsto u(t)$ sera désignée par $L_p(t)$.
   (a) Montrer que pour tout $p \geq 0$, $L_p(t)$ est un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{E}^p, E)$.

(b) Montrer que l'application $t \mapsto L_o(t)$ n'est continue en aucun point de $[a, b]$.

(c) Montrer que l'application $t \mapsto L_p(t)$ est continue pour $p \geq 1$.

6. On note $l^p$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes telles que la série $\sum_{n\geq 0} |x_n|^p$ soit convergente, pour $p \geq 1$. On note $l^\infty$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes bornées . On munit ces espaces des normes usuelles $\| \|_p$ et $\| \|_\infty$.

   Montrer que $l^1$ et $l^2$ sont des sous-espaces vectoriels de $l^\infty$ mais pas des sous-espaces vectoriels normés.

7. Sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ soient les deux normes :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \ .$$

(a) Montrer que $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ pour tout $f$ de $E$ et que toute suite de Cauchy (resp. convergente) pour $\| \|_\infty$ est de Cauchy (resp. convergente ) pour $\| \|_1$.

(b) Pour $n \geq 0$, soit $f_n : t \mapsto t^n, \ f_n \in E$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|f_n\|_\infty$ et en conclure qu'il n'existe pas de nombre $b \geq 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq b\|f\|_1$ pour tout $f$ de $E$.

(c) Montrer que $(E, \| \|_\infty)$ est un espace de Banach.

(d) Pour $n \geq 1$ soit $f_n(t) = \min\{n, \frac{1}{\sqrt{t}}\}$. Montrer que

$$\|f_{n+p} - f_n\|_1 \geq \frac{1}{n} \ ,$$

et que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy pour $\| \|_1$. Si elle convergeait vers une fonction $f \in E$ on aurait $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \ \forall t \in ]0, 1]$. Conclure à une absurdité.

8. $l^\infty$ muni de la norme $l^2$ est-il un Banach ?

**Feuille d'exercices n° 2**

1. Parmi les applications $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, déterminer celles qui définissent des distributions sur $\mathbb{R}$:

   (a) $T(\varphi) = (\varphi(0))^2$

   (b) $T(\varphi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| \, dt$

   (c) $T(\varphi) = \displaystyle\int_0^1 \varphi^{(k)}(t)| \, dt$, où $k \in \mathbb{N}$

   (d) $T(\varphi) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \varphi(t)$

   (e) $T(\varphi) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left\{ \displaystyle\sum_{\mu=1}^{n} \varphi(\frac{1}{\mu}) - n\varphi(0) - \varphi'(0) \ \mathrm{ln} n \right\}$

   (f) $T(\varphi) = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{+\infty} \varphi^{(\nu)}(0)$ et $T(\varphi) = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{+\infty} \varphi^{(\nu)}(\nu)$

2. Montrer que l'application $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, définie par, $T(\varphi) = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{+\infty} \varphi(n)$ est une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{R}$.

   Montrer que $T(\varphi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,x) \, dx$ est une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que l'application $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, définie par, $T(\varphi) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(\varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(0))$ est une distribution d'ordre $\leq 1$ sur $\mathbb{R}$.

   Montrer que l' application $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, définie par

   $$T(\varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\varphi(\frac{1}{n}) + \varphi(-\frac{1}{n}) - 2\varphi(0))$$

   est une distribution d'ordre $\leq 2$ sur $\mathbb{R}$.

4. **Distributions parties finies**

   Montrer que les applications $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ suivantes définissent des distributions:

   (a) $\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx$ ( **Valeur principale de CAUCHY**)

   (b) $\mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \left[ \displaystyle\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} \, dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right]$ (**Partie finie de HADAMARD**)

   (c) $\mathrm{Pf}(\frac{H}{x^2}) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \left[ \displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} \, dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0) \ \mathrm{ln} \ \varepsilon \right]$ où $H$ est la fonctionde HEAVISIDE.

5. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que $\varphi(x) = \varphi(0) + x \displaystyle\int_0^1 \varphi'(tx)\ dt$.

   En déduire que si $\varphi(0) = 0$, alors la fonction

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \varphi'(0) & \text{sinon} \end{cases}$$

   est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Dans la suite $\psi$ désignera toujours ce prolongement de la fonction $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ à $\mathbb{R}$.

   Montrer que si $(\varphi_n)_n$ est une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et si $\varphi_n(0) = 0$ pour tout $n$, alors son prolongement $(\psi_n)_n)$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

6. On pose, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $T(\varphi) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$;

   (a) Montrer que $T$ est une distribution sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(O) = 0,\ \varphi^{(p)}(O) = 1\ .$$

   (c) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset ]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}[$ et $\varphi^{(p)}(O) = 1$ . Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on pose, $\varphi_k(x) = k^{-p+\frac{1}{2}}\varphi(kx)$. Etudier la convergence uniforme de ( $\varphi_k^{(j)})_k$ pour $0 \leq j \leq p$.

   (d) Montrer que $T$ n'est pas une distribution d'ordre fini.

7. (a) Montrer que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors la suite $(\varphi_n)_n$ définie par

$$\varphi_n(x) = \exp(-n)\varphi(nx)$$

   tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_n)_n$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et telle que pout tout $n$, $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subset \mathbb{R}^*$ et

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp(\frac{1}{x^2})\varphi_n(x)\ dx = +\infty\ .$$

   (c) Existe-t'il une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dont la restriction à $\mathbb{R}^*$ soit égale à la distribution régulière $\exp(\dfrac{1}{x^2})$?

**Feuille d'exercices n° 3**
**Dérivation et Primitives de distributions**

1. Soit $T$ une distribution sur $\Omega$ (ouvert de $\mathbb{R}^n$). On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que pour toute fonction $\varphi$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ on ait

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq c \left( \int_\Omega |\varphi(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} .$$

   Montrer que $T$ est définie par une fonction $f$ de $L^2(\Omega)$.

2. Calculer les dérivées premières des distributions $T$ suivantes:

   (a) $T = \mathrm{vp}(\frac{1}{x})$, $T = \mathrm{sgn}(x)$, $T = H(x)\ \mathrm{sgn}(x)$

   (b) $T = E(x)$, $T = (1 - x^2)\ \chi_{[-1,1]}$.

3. Calculer la dérivée première de la distribution $T = H(x) \ln(|x|)$ : voir sujet de partiel.

4. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, la distribution donnée par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \qquad T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x)\ dx$$

   Déterminer $\dfrac{\partial T}{\partial x} + \dfrac{\partial T}{\partial y}$.

5. Soit $H_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$H(x_1, \cdots, x_n) = H(x_1) \cdots H(x_n) .$$

   Montrer que si $\alpha$ est le multi-indice $\alpha = (1, \cdots, 1)$, alors $D^\alpha(H_n) = \delta$.

6. Soient $\mathcal{U}$ la partie du plan $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\mathcal{U} = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq |x|\ \}$$

   et $F(x, y) = \chi_\mathcal{U}(x, y)$. Calculer, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, l'expression $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

7. On rappelle que toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $\varphi(x) = \varphi(0)\theta_o(x) + x\psi(x)$ où $\psi$ et $\theta_o$ sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et où $\theta_o(0) = 1$.

   Montrer que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est telle que $x.T = 0$, alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $T = C.\delta$. En déduire l'ensemble de toutes les distributions $T$ solutions de l'équation $x.T = a$ où $a$ est une constante donnée. Traiter le cas $x.T = \delta_\alpha$.

   Comment peut-on, à l'aide de ce qui précède, déterminer les distributions $T$ telles que $(x - \alpha).T = 0$ où $\alpha$ est une constante réelle donnée?

   Trouver toutes les solutions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $(x - \alpha).T = \delta_\beta$ où $\beta$ est une constante.

   Même question pour l'équation $(x - \alpha).T = \delta'_\beta$.

8. Pour $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, calculer $x^n.\delta^{(m)}$.

   Déterminer toutes les distributions $T$ telles $x^n.T = 0$.

   En déduire la solution générale de $x^n.T = \delta$.

9. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ la solution de l'équation différentielle $f" + af' + bf = 0$ qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

   Calculer $(Hf)" + a(Hf)' + b(Hf)$.

   Trouver toutes les solutions des équations différentielles dans $\mathcal{D}'$ suivantes :

$$T' - T = \delta$$
$$T" - 3T' + 2T = \delta + \delta' \ .$$

10. Soit $\mathcal{D}_1 = \{ \ \psi \in \mathcal{D} \mid \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi(t) \ dt = 0\}$.

    (a) Montrer que $\psi \in \mathcal{D}_1$ si et seulement s'il existe $\varphi \in \mathcal{D}$ telle que $\varphi' = \psi$.

    (b) Soit $\theta_o \in \mathcal{D}$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \theta_o(t) \ dt = 1$; montrer que tout $\varphi$ dans $\mathcal{D}$ peut s'écrire d'une manière unique sous la forme $\varphi = a \ \theta_o + \psi$ où $a$ est une constante et $\psi \in \mathcal{D}_1$.

    (c) Montrer que l'application $S : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ définie par $S(\varphi) = -T(x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \psi(t) \ dt)$ où $\varphi = a \ \theta_o + \psi$ comme à la question précédente et $T \in \mathcal{D}'$ est une primitive de $T$.

    (d) Chercher les primitives des distributions suivantes

       i. $T = \delta$

       ii. $T = H$

       iii. $T = x \ H$

       iv. $T = \text{vp}(\dfrac{1}{x})$

11. La fonction *cosinus intégrale* désignée par $ci(x)$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$, paire et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^{*-}$ on ait

$$ci(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\cos(t)}{t} \ dt \ .$$

    (a) Montrer que la fonction $x \mapsto ci(x)$ est dérivable au sens des fonctions, sur $\mathbb{R}^*$.

    (b) Montrer que $ci$ est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et déterminer sa dérivée au sens des distributions.

**Feuille d'exercices n° 4**

## I. Formule de Green

1. Soit $D$ le disque unité de $\mathbb{R}^2$ et $T$ la distribution sur $\mathbb{R}^2$ définie par la fonction caractéristique de $D$. Montrer que

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x}, \varphi \right\rangle = -\int_0^{2\pi} \varphi(\cos\ \theta, \sin\ \theta)\ \cos\ \theta\ d\theta\ .$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) on pose,

$$E_n(x) = \begin{cases} |x|^{-1} & \text{si } n = 3 \\ \log|x| & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

   (a) Montrer que $E_n$ définit une distribution sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Calculer $\Delta E_n$ sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

   (b) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que

$$\langle \Delta E_n, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\|x\| > \varepsilon} E_n \Delta\varphi\ dx\ .$$

   (c) En transformant l'intégrale $\int_{\|x\|>\varepsilon} E_n \Delta\varphi\ dx$, à l'aide de la formule de Green, en déduire $\Delta E_n$ au sens des distributions.

## II. Convergence dans $\mathcal{D}'$

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ; pour $h \in \mathbb{R}$, on définit $T_h$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \langle T_h, \varphi \rangle = \langle T, \varphi_h \rangle\ ,$$

   où $\varphi_h(x) = \varphi(x + h)$.

   Montrer que $T_h$ est une distribution. On pose $S_h = \dfrac{T - T_h}{h}$. Montrer que $S_h$ converge vers $T'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(\varphi_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{E}(\Omega)$ qui converge vers $\varphi$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Montrer que la suite $T_n = \varphi_n\ T$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers $\varphi T$.

3. Soit $a > 0$. Etudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n \delta_n$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

4. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\displaystyle\int f(x)\ dx = 1$. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $f_k(x) = k^n f(kx)$. Montrer que $(f_k)_k$ converge vers $\delta$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

5. Etudier la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de

   (a) $n\ (\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}})$

   (b) $n^2\ (\delta_{\frac{1}{n}} - 2\delta + \delta_{-\frac{1}{n}})$

   (c) $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$

6. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}^n$ qui converge presque partout vers une fonction $f$. On suppose qu'il existe une fonction positive $g$ de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ telle que pour tout $n$, on ait $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour presque tout $x$ de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Vérifier que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et montrer que la suite de distributions $(T_{f_n})$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ vers $T_f$.
   En déuire que si une suite $(\varphi_n)$ converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vers la fonction $\varphi$, alors la suite de distributions $(T_{\varphi_n})$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ vers $T_\varphi$.
   (b) Chercher les limites des distributions suivantes :
   $$T_n = \frac{n}{2}\ \chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} \quad \text{et} \quad T_n = n^2\ \chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}\ .$$
   (c) Si $\rho_n$ est une suite régularisante de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , déterminer la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de la suite de distributions $(T_{\rho_n})$.

**III. Supports**

1. Déterminer les supports des distributions $T\ : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ suivantes:
   (a) $T(\varphi) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)$ où $\Omega = \mathbb{R}$.
   (b) $T(\varphi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x)\ dx$ où $\Omega = \mathbb{R}^2$.
   (c) $T(\varphi) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(\cos\theta, \sin\theta)\ d\theta$ où $\Omega = \mathbb{R}^2$.
   (d) $T(\varphi) = \displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)\ dx$ où $\Omega = \mathbb{R}$.
   (e) $T(\varphi) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \text{sign}(x)\varphi'(x)\ dx$ où $\Omega = \mathbb{R}$.
2. Trouver un exemple de suite de distributions $T_n$ de $\mathcal{E}'$ qui converge dans $\mathcal{D}'$ mais dont la limite $T$ n'est pas à support compact.

**Feuille d'exercices n° 5 : Convolution**

1. Déterminer, explicitement, les convolutions suivantes dans $\mathbb{R}$, après avoir justifié leurs existences :
   - $\delta_a * H$
   - $\delta' * 1$
   - $(x^m \delta^{(n)}) * (x^p \delta^{(q)})$
   - $T * 1$ où $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$.
   - $T * \exp(x)$ où $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$.
2. Soient $f_1 = \chi_{[a,b]}$ et $f_2 = \chi_{[c,d]}$. Calculer $(f_1 * f_2)$"
3. Représenter par un produit de convolution l'opérateur différentiel linéaire et à coefficients constants :
$$D(\varphi) = a_o\varphi + a_1\frac{d\varphi}{dx} + \cdots + a_n\frac{d^n\varphi}{dx^n} .$$
4. Calculer les convolutions suivantes dans $\mathbb{R}$ :
   - $H * Pf(\frac{H}{x})$
   - $\delta' * vp(\frac{1}{x})$
   - $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n^{(n)}\right) * \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n\right)$
5. Ecrire les opérateurs aux différences finies suivants sous la forme de produit de convolution et calculer leurs limites lorsque $h \to 0$ :
   (a) $A_h(f)(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$
   (b) $B_h(f)(x) = \dfrac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$
6. Pour $\alpha > 0$, on pose $f_\alpha(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}H(x)}{\Gamma(\alpha)}$.
   (a) Vérifier que $f_\alpha \in \mathcal{D}'_+$ pour tout $\alpha > 0$.
   (b) Démontrer que $\dfrac{df_\alpha}{dx} = f_{\alpha-1}$ pour tout $\alpha > 1$.
   (c) Déterminer $\lim_{\alpha\to 0} f_\alpha$ dans $\mathcal{D}'_+$.
7. Trouver dans $\mathcal{D}'_+$ les inverses de convolution des distributions suivantes :
   (a)$T = \delta' - a\delta$ (b) $T = \sin(x)H$ (c) $T = \cos(x)H$ (d) $T = \exp(-x)H$.

**Feuille d'exercices n$^o$ 6 : Transformation de Fourier**

1. Déterminer les transformées de Fourier des distributions suivantes :
   (a) $T = 1$
   (b) $T = H$
   (c) $T = vp(\dfrac{1}{x})$
   (d) $T = Pf(\dfrac{1}{x^2})$
   (e) $T = T_{|x|}$
   (f) $T = T_{xH}$

2. Montrer que la fonction $f(x) = (1 - x^2)\ \chi_{[0,1]}(x)$ définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$ et calculer ses trois premières dérivées. En déduire sa transformée de Fourier.

3. Déterminer la transformée de Fourier de la distribution régulière ( tempérée) associée la fonction $x \mapsto \sin(x)$.

   En déduire la transformée de Fourier de la fonction $\dfrac{\sin x}{x}$.

4. (a) Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ , $f_\xi : x \mapsto \dfrac{1 - \cos \xi x}{x}$ définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que $f_\xi \to vp(\dfrac{1}{x})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ quand $\xi \to +\infty$
   ( On pourra montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
$$\left\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi \right\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\ dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx\ .)$$

   (c) Pour tout $x \neq 0$ on pose $\text{sgn}(x) = \dfrac{x}{|x|}$) et pour $n \in \mathbb{N}$ , $g_n =$ sgn $(x)\chi_{[-n,n]}$. Calculer $\hat{g}_n$ et chercher la limite de $\hat{g}_n$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$. En déduire $\widehat{\text{sgn}}$. Retrouver $\hat{H}$.

**Feuille d'exercices complémentaire**

**I. Convergence dans $\mathcal{D}'$**

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ; pour $h \in \mathbb{R}$, on définit $T_h$ par
$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \langle T_h, \varphi \rangle = \langle T, \varphi_h \rangle \ ,$$
où $\varphi_h(x) = \varphi(x+h)$.
Montrer que $T_h$ est une distribution. On pose $S_h = \dfrac{T - T_h}{h}$. Montrer que $S_h$ converge vers $T'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(\varphi_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{E}(\Omega)$ qui converge vers $\varphi$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Montrer que la suite $T_n = \varphi_n\, T$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers $\varphi T$.

3. Soit $a > 0$. Etudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n \delta_n$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

4. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\displaystyle\int f(x)\, dx = 1$. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $f_k(x) = k^n f(kx)$. Montrer que $(f_k)_k$ converge vers $\delta$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

5. Etudier la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de
   (a) $n\ (\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}})$
   (b) $n^2\ (\delta_{\frac{1}{n}} - 2\delta + \delta_{-\frac{1}{n}})$
   (c) $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$

6. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}^n$ qui converge presque partout vers une fonction $f$. On suppose qu'il existe une fonction positive $g$ de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ telle que pour tout $n$, on ait $|f_n(x)| \le g(x)$ pour presque tout $x$ de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Vérifier que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et montrer que la suite de distributions $(T_{f_n})$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ vers $T_f$.
   En déuire que si une suite $(\varphi_n)$ converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vers la fonction $\varphi$, alors la suite de distributions $(T_{\varphi_n})$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ vers $T_\varphi$.
   (b) Chercher les limites des distributions suivantes :
   $$T_n = \frac{n}{2}\ \chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} \quad \text{et} \quad T_n = n^2\ \chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}\ .$$
   (c) Si $\rho_n$ est une suite régularisante de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , déterminer la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de la suite de distributions $(T_{\rho_n})$.

**II. Supports**

1. Déterminer les supports des distributions $T\ : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ suivantes:
   (a) $T(\varphi) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)$ où $\Omega = \mathbb{R}$.

(b) $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x)\ dx$ où $\Omega = \mathbb{R}^2$.

(c) $T(\varphi) = \int_0^{2\pi} \varphi(\cos\theta, \sin\theta)\ d\theta$ où $\Omega = \mathbb{R}^2$.

(d) $T(\varphi) = \int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)\ dx$ où $\Omega = \mathbb{R}$.

(e) $T(\varphi) = \int_{-1}^{1} \mathrm{sign}(x)\varphi'(x)\ dx$ où $\Omega = \mathbb{R}$.

2. Trouver un exemple de suite de distributions $T_n$ de $\mathcal{E}'$ qui converge dans $\mathcal{D}'$ mais dont la limite $T$ n'est pas à support compact.