ENIM 2008-2009

$1^{ère}$ Année T.C Mathématiques appliquées

Feuille de TD n° 1 : corrigé

Distributions

Exercice 2. On pose : $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, $\left\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$

1. $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution.

On a : si $K = supp\varphi \subset [-M, M]$

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$$

où

$$\sup_{[-M,M]} |\psi(x)| \leq \sup_{[-M,M]} |\varphi'(x)|$$

$$\begin{aligned} \left\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\varphi(0) \left(\int_{-M}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{M} \frac{dx}{x} dx \right) + \int_{-M}^{-\varepsilon} \psi(x) dx + \int_{\varepsilon}^{M} \psi(x) dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-M}^{-\varepsilon} \psi(x) dx + \int_{\varepsilon}^{M} \psi(x) dx \right) = \int_{-M}^{M} \psi(x) dx \leq 2M \sup_K |\varphi'(x)| \end{aligned}$$

Donc $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution. On a :

$$\left\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\ dx$$

2. On rappelle que $f(x) = ln|x|$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$, montrons que $T'_{Ln|x|} = vp\left(\frac{1}{x}\right)$.

On a :

$$\begin{aligned} < T'_f, \varphi > &= - < T_f, \varphi' > = - \int \varphi'(x) ln|x| = - \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi'(x) ln|x| dx \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi'(x) ln(-x) dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi'(x) ln(x) dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(ln(\varepsilon)[\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)] + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big(ln(\varepsilon)[\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)] \Big) + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \end{aligned}$$

Or

$$ln(\varepsilon)[\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)] \leq 2\varepsilon|ln(\varepsilon)|\sup_x|\varphi'(x)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0$$

Donc

$$< T'_f, \varphi >= \Big\langle vp\Big(\frac{1}{x}\Big), \varphi\Big\rangle$$

3. En calculant de deux maniéres différentes la dérivée de $h(x) = xln|x|$, montrons que $xvp\Big(\frac{1}{x}\Big) = 1$ (au sens des distributions).

On a :

$$h'(x) = 1 + ln|x|$$

d'une part

$$\begin{aligned} < T'_h, \varphi > &= - < T_h, \varphi' >= -[h(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} + \int(1+ln|x|)\varphi(x)dx \\ &=< T_1, \varphi > + < T_f, \varphi > \end{aligned}$$

et

$$T'_h = T_1 + T_f$$

D'autre part

$$T'_h = xT'_{ln|x|} + T_f = xvp\Big(\frac{1}{x}\Big) + T_f$$

et donc

$$xvp\Big(\frac{1}{x}\Big) = 1$$

car

$$\begin{aligned} < (uT)', \varphi > &= - < T, u\varphi' >= - < T, (u\varphi)' - u'\varphi > \\ &=< uT', \varphi > + < u'T, \varphi >=< uT' + u'T, \varphi > \end{aligned}$$

et donc

$$(uT)' = uT' + u'T$$

où u est $\mathcal{C}^\infty$. Dans notre cas particulier $u(x) = x$. Bien sûr une démostration directe de $xvp\Big(\frac{1}{x}\Big) = 1$ est possible car

$$\Big\langle xvp\Big(\frac{1}{x}\Big), \varphi\Big\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|\geq\varepsilon}\varphi(x)dx = \int\varphi =< T_1, \varphi > .$$

Exercice 3. Soit H la distribution d'Heaviside,

$$H(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ x > 0, \\ 0 & si\ \ x < 0. \end{cases}$$

Montrons que : $T'_H = \delta$.

On a : $\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad < T'_H, \varphi >= - < T_H, \varphi' >= - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) =< \delta_0, \varphi >$

Exercice 4. Résoudre, dans $\mathcal{D}'$, les équations pour $a \neq b$

$$(x-a)(x-b)T_1 = 0,$$
$$(x-a)(x-b)T_2 = 1.$$

Réponse : On a :

$$< (x-a)\delta_a, \varphi >=< \delta_a, (x-a)\varphi >= 0$$

et

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)\psi(x)$$

et donc

$$< T, \varphi >= \varphi(a) < T, 1 > + < (x-a)T, \psi >=< T, 1 >< \delta_a, \varphi >$$

et ainsi

$$(x-a)T = 0 \Leftrightarrow T \in \mathbb{R}\delta_a$$

Alors

$$(x-a)(x-b)T = 0 \Leftrightarrow (x-b)T \in \mathbb{R}\delta_a$$

et on regarde

$$(x-b)T = \delta_a$$

Or

$$< (x-b)\delta_a, \varphi >=< \delta_a, (x-b)\varphi >= (a-b)\varphi(a)$$

et donc

$$(x-b)\frac{\delta_a}{(a-b)} = \delta_a$$

et donc

$$< (x-b)\left(T - \frac{\delta_a}{(a-b)}\right), \varphi >= 0$$

et donc

$$T - \frac{\delta_a}{(a-b)} = \lambda \delta_b$$

et donc

$$(x-a)(x-b)T = 0 \Rightarrow T \in CL(\delta_a, \delta_b)$$

et comme la réciproque est triviale et

$$(x-a)(x-b)T = 0 \Leftrightarrow T \in CL(\delta_a, \delta_b)$$

Si $a = b$ on a

$$(x-a)^2 T = 0 \Rightarrow (x-a)T \in \mathbb{R}\delta_a$$

et on cherche une solution particuliére de

$$(x-a)T = \delta_a$$

et on regarde

$$< (x-a)\delta'_a, \varphi >=< \delta_a, (x-a)\varphi' + \varphi >=< \delta_a, \varphi >$$

et donc

$$(x-a)\delta'_a = \delta_a$$

et

$$(x-a)(T - \delta'_a) = 0$$

et

$$T - \delta'_a \in \mathbb{R}\delta_a$$

et donc

$$(x-a)^2 T = 0 \Rightarrow T \in CL(\delta_a, \delta'_a)$$

et comme la réciproque est triviale et on a :

$$(x-a)^2 T = 0 \Leftrightarrow T \in CL(\delta_a, \delta'_a)$$

Pour terminer l'exercice proposée il faut trouver une solution particuliére de $(x-a)(x-b)T = 1$
On teste $vp\Big(\frac{1}{x-a}\Big)$ définie par

$$\Big\langle vp\Big(\frac{1}{x-a}\Big), \varphi \Big\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x-a| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x-a} dx.$$

vérifie

$$\Big\langle (x-a) vp\Big(\frac{1}{x-a}\Big), \varphi \Big\rangle = 1$$

Alors comme

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right)$$

et posons

$$T_0 = \frac{1}{b-a}\left(vp\Big(\frac{1}{x-b}\Big) - vp\Big(\frac{1}{x-a}\Big)\right)$$

On a

$$\begin{aligned} < (x-a)(x-b)T_0, \varphi > &= \frac{1}{b-a}\Big\langle (x-a)(x-b)\left(vp\Big(\frac{1}{x-b}\Big) - vp\Big(\frac{1}{x-a}\Big)\right), \varphi \Big\rangle \\ &= \frac{1}{b-a} < (x-a) - (x-b), \varphi >=< T_1, \varphi > \end{aligned}$$

et on a :

$$(x-a)(x-b)T_0 = 1$$

et on a :

$$T = T_0 + CL(\delta_a, \delta_b).$$

Exercice 5. Résoudre, dans $\mathcal{D}'$, les équations différentielles suivantes :

1. $2xT' - T = \delta_0$,
2. $xT' + T = 0$.

1. On copie la démarche de résolution des équations différentielles linéaires réelles. Résolvons donc d'abord l'équation sans second membre $2xT_0 - T = 0$. L'idée est de rechercher d'abord les solutions localement intégrables de l'équation $2xu_0 - u = 0$. Maintenant, l'équation est singulière en 0, et on l'étudie donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Sur chacun de ces intervalles, on trouve que $u(x) = C\sqrt{|x|}$. On note $x_+ = max(x,0)$ et $x_- = max(-x,0)$. Les distributions associées aux la fonctions localement intégrables $C_1\sqrt{|x|}_+ + C_2\sqrt{|x|}_-$ sont donc solution sur $\mathbb{R}^*$. On vérifie aussi qu'elles sont solutions sur $\mathbb{R}$. D'autre part, soit T une distribution solution de l'équation différentielle (appartenant à $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$). On note T_1 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$). Soit $S_1 = \frac{T_1}{\sqrt{x}}$. La formule de Leibniz donne

$$S_1' = \frac{T_1'}{\sqrt{x}} - \frac{T_1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2xT_1' - T_1}{2x\sqrt{x}} = 0$$

Puisque S_1 est définie sur un intervalle (à savoir $\mathbb{R}_+^*$), il existe une constante C_1 telle que $S_1 = C_1$, ce qui entraîne $T_1 = C_1\sqrt{x_+}$. De même, en notant T_2 la restriction de T à $\mathbb{R}_-^*$, il existe une constante C_2 telle que $T_2 = C_2\sqrt{x_-}$. On note enfin S la distribution $T - C_1\sqrt{x_+} - C_2\sqrt{x_-}$. On vérifie aisément que le support de S est contenu dans 0. S est donc une combinaison linéaire de dérivées de masses de Dirac en 0. Posons donc $R = \sum_{k=0}^p a_k\delta^{(k)}$, qui doit vérifier $2xR' - R = 0$. Un calcul facile montre que, si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\langle 2x(\delta^{(k)}), \phi\rangle &= -\langle(\delta^{(k)}), (2x\phi)'\rangle \\
&= -\langle(\delta^{(k)}), 2\phi\rangle - -\langle(\delta^{(k)}), 2x\phi'\rangle \\
&= 2(-1)^{k+1}(2\phi^{(k)}(0) + (2x\phi')^{(k)}(0) \\
&= 2(-1)^{k+1}(k+1)\phi^{(k)}(0).
\end{aligned}$$

En particulier, ceci prouve que $2xR' - R = 0 = \sum_{k=0}^p (2(-1)^{k+1}(k+1) - 1)a_k\delta^{(k)}$, et donc $2xR' - R = 0$ si et seulement si $R = 0$. Reste à traiter maintenant l'équation avec second membre. La forme de ce second membre nous pousse à rechercher une solution qui soit combinaison linéaire de dérivées de masses de Dirac en 0, et le calcul précédent nous montre que l'on peut en fait se contenter d'une masse de Dirac simplement. Plus précisément, on doit avoir $(2 \times (-1) \times (-1) - 1)a_0 = 1$, ce qui donne $a_0 = -1/3$. Finalement, on a prouvé que les solutions de l'équation de départ sont

$$C_1\sqrt{x_+} + C_2\sqrt{x_-} - \frac{1}{3}\delta_0.$$

2. Le plus facile est ici de remarquer que $(xT)' = xT' + T$. L'équation se transforme donc en $(xT)' = 0$. Ceci entraîne l'existence d'une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $xT = Cvp(1/x)$ étant solution de cette équation, celle-ci est équivalente à $x(T - Cvp(1/x)) = 0$, et l'on obtient l'existence de telle que T s'écrive

$$T = Cvp(1/x) + \gamma\delta_0.$$

Réciproquement, toute distribution de cette forme est solution de l'équation différentielle.
Exercice 6. Soit $n > 0$ on définit

$$w_n(x) = \begin{cases} n & si \ |x| \leq \dfrac{1}{2n}, \\ 0 & si \ |x| > \dfrac{1}{2n}. \end{cases}$$

1. On a

$$\int_{\mathbb{R}} w_n(x)dx = \int_{-1/2n}^{1/2n} ndx = 1.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $\exists N \in \mathbb{N}$ telque

$$\forall n > N, \quad \frac{1}{2n} < \frac{1}{2N} \leq |x|$$

et $\forall \ n > N, \quad w_n(x) = 0$
donc

$$\lim_{n\to+\infty} w_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

2. Montrons que $w_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$
Soit $A_n =< w_n, \varphi > -\varphi(0) = \displaystyle\int_{-1/2n}^{1/2n} n(\varphi(x) - \varphi(0))dx$
posons $y = nx$,
donc

$$A_n = \int_{-1/2}^{1/2} (\varphi(\frac{y}{n}) - \varphi(0))dy$$

et donc

$$|A_n| \leq \sup_t |\varphi(\frac{t}{n}) - \varphi(0)| \leq \frac{1}{2n} \sup_t |\varphi'(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$