Université de Paris XI **M1 – Distributions**
Mathématiques **1er semestre 10/11**

Corrigé du Devoir D3

Exercice D3.1.— Soit $f : x \mapsto e^x e^{ie^x}$. Cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ mais $|f(x)| = e^x$, ce qui montre qu'il ne s'agit pas d'une fonction à croissance polynomiale.
D'autre part, la fonction $x \mapsto e^{ie^x}$ est bornée, donc définit une distribution T de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. La dérivation étant une opération continue sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a $T' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Or pour $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle T', \phi\rangle = -\langle T, \phi'\rangle = -\int e^{ie^x}\phi(x)dx = \int e^x e^{ie^x}\phi(x)dx$$

Donc T' coïncide sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ avec la fonction f, qui définit donc bien une distribution tempérée.

Exercice D3.2.— 1. Je note $C_p = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^p}$. Pour $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ on a

$$|\langle T, \phi\rangle| = |\int f(x)\phi(x)dx| \leq \int \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^p}(1+|x|)^p|\phi(x)|dx \leq C_p \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq p} \sup_{\mathbb{R}} |x^\alpha \partial_x^\beta \phi(x)|,$$

où la constante $C_p > 0$ ne dépend pas de ϕ. Donc $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
2.a. Pour $m \geq 1$, on a $g'(x) = mx^{m-1}\sin(\exp x) + x^m \exp(x)\cos(\exp(x))$.
2.b. Les distributions associées aux fonctions g' et $x \mapsto mx^{m-1}\sin(\exp x)$ sont tempérées : la première est la dérivée d'une distribution qui vérifie le critère de la question (1), et est donc tempérée, et la deuxième vérifie aussi le critère de la question (1). Donc la distribution associée à $f : x \mapsto x^m \exp(x)\cos(\exp(x))$ est une différence de distributions tempérées : elle est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
Pourtant, elle ne vérifie le critère du (1) pour aucune valeur de p. En effet, si x est dans $[\ln(-\pi/4 + 2n\pi), \ln(\pi/4 + 2n\pi)]$, avec $n \geq 1$ (de sorte que $-\pi/4 + 2n\pi \geq 1$), on a $f(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(2n\pi - \pi/4)$. Si p est n'importe quel entier, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^p}dx &\geq \int_0^{+\infty} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^p}dx \geq \sum_{n\geq 1}\int_{\ln(-\frac{\pi}{4}+2n\pi)}^{\ln(\frac{\pi}{4}+2n\pi)} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^p}dx \\ &\geq \sum_{n\geq 1}(\ln(\frac{\pi}{4}+2n\pi) - \ln(-\frac{\pi}{4}+2n\pi))\frac{\sqrt{2}}{2}(2n\pi - \pi/4)(1+\ln(\frac{\pi}{4}+2n\pi))^{-p}\end{aligned}$$

Le terme général u_n de cette série positive vérifie $u_n \sim \dfrac{C}{(\ln n)^p}$, donc la série diverge pour tout p.
3.a. On a bien sûr $\phi_r^{(\alpha)}(x) = r^{-\alpha}\psi^{(\alpha)}(\frac{x}{r})$. Le support de ψ étant inclus dans $[-2, 2]$, la quantité $\phi_r^{(\alpha)}(x)$ est nulle dès que $|x| \geq 2r$. On a donc, pour $r \geq 1$,

$$(1+|x|)^k|\phi_r^{(\alpha)}(x)| \leq (1+2r)^k\frac{1}{r^\alpha}\|\psi^{(\alpha)}\|_\infty \leq 2^k\|\psi^{(\alpha)}\|_\infty(1+r)^k.$$

3.b. Si $T = T_f$ est une distribution tempérée, la question précédente montre qu'il existe $C > 0$ et $m \geq 0$ tels que, pour $r \geq 1$,

$$\int_0^r f(x)dx \leq \langle T_f, \phi_r \rangle \leq C_0 p_{k,\alpha}(\phi_r) \leq C(1+r)^m,$$

où $p_{k,\alpha}(\phi_r)$ désigne la semi-norme habituelle de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Puisque $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, cette inégalité reste vraie pour $r \in [0,1]$ quitte à ajuster la valeur de la constante C.
On intègre par parties :

$$\int_0^r \frac{f(x)}{(1+x)^p}dx = \frac{\int_0^r f(t)dt}{(1+r)^p} + p\int_0^r \frac{\int_0^x f(t)dt}{(1+x)^{p+1}}dx \leq C(1+r)^{m-p} + Cp\int_0^r (1+x)^{m-p-1}dx,$$

et l'on voit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{(1+x)^p}dx$ converge dès que $p > m$. On obtient la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{f(x)}{(1-x)^p}dx$ de la même manière.

Exercice D3.3.—

1. On note $D = \dfrac{1}{i}\partial$. Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\mathcal{F}(P(T)) = \mathcal{F}(\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha i^{|\alpha|} D^\alpha T) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha i^{|\alpha|}\mathcal{F}(D^\alpha T) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha (i\xi)^\alpha \mathcal{F}T = p(\xi)\mathcal{F}(T).$$

2. (a) – Pour $P = \Delta$, on obtient $p(\xi) = -\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = -\|\xi\|^2$, qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, donc Δ est elliptique.
   – On peut écrire $\mathcal{F}(\Delta^k T) = p(\xi)\mathcal{F}(\Delta^{k-1}T)$, donc $p_{\Delta^k}(\xi) = (p_\Delta(\xi))^k = (-1)^k\|\xi\|^{2k}$, et l'opérateur Δ^k est également elliptique.
   – Pour $P = \frac{1}{i}(\partial_x + \partial_y)$, on trouve $p(\xi) = \dfrac{1}{2}(i\xi_x - \xi_y) \neq 0$ pour $\xi = (\xi_x, \xi_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. L'opérateur $\partial_{\overline{z}}$ est donc elliptique.
   Pour l'opérateur des ondes $Q = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x$ agissant dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$, on a $p_Q(\xi_t, \xi_x) = -\xi_t^2 + \|\xi_x\|^2$ qui s'annule sur le cône $\xi_t = \|\xi_x\|^2$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Q n'est donc pas elliptique.
   L'opérateur de la chaleur $C = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$ agissant dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$ satisfait $p_C(\xi_t, \xi_x) = i\xi_t + \|\xi_x\|^2$. Mais son symbole principal est ici la partie de degré deux $p_2(\xi_t, \xi_x) = \|\xi_x\|^2$. Comme p_2 s'annule sur la droite $(\xi_t, \xi_x = 0)$, C n'est pas elliptique.

   (b) Pour l'opérateur de degré deux P, on a sur $\mathbb{R}^n$, $p_2(\xi) = -\displaystyle\sum_{i,j} \xi_i\xi_j = -(A\xi, \xi)$. P est donc elliptique si et seulement si la forme quadratique réelle $Q(\xi) = (A\xi, \xi)$ n'a pas de vecteurs isotropes non nuls, c'est-à-dire si et seulement si Q est définie positive ou négative.

3. Par homogénéité de p_m, on a pour $\xi \neq 0$, $\left|\dfrac{p_m(\xi)}{\|\xi\|^m}\right| = \left|p_m(\dfrac{\xi}{\|\xi\|})\right|$. Or, par hypothèse d'ellipticité, la fonction continue $|p_m|$ ne s'annule pas sur la sphère unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$. Par compacité, on a donc pour tout $\xi \neq 0$,

$$\left|\frac{p_m(\xi)}{\|\xi\|^m}\right| \geq C_0 = \min_{S^{n-1}} |p_m| > 0,$$

c'est-à-dire $|p_m(\xi)| \geq C_0\|\xi\|^m$, inégalité aussi vérifiée en $\xi = 0$. On a de plus

$$\begin{aligned}|(p-p_m)(\xi)| = \Big|\sum_{|\alpha|\leq m-1} a_\alpha (i\xi)^\alpha\Big| &\leq \sum_{|\alpha|\leq m-1} |a_\alpha| \|\xi\|_\infty^{|\alpha|} \\ &= o(\|\xi\|_\infty^m) = o(\|\xi\|^m) \quad \text{lorsque} \quad \|\xi\| \to +\infty.\end{aligned}$$

D'où, pour $\|\xi\| \geq R$ assez grand, on a $|(p-p_m)(\xi)| \leq \frac{C_0}{2}\|\xi\|^m$, et finalement,

$$\begin{aligned}|p(\xi)| &\geq |p_m(\xi)| - |(p-p_m)(\xi)| \\ &\geq C_0\|\xi\|^m - \frac{C_0}{2}\|\xi\|^m = \frac{C_0}{2}\|\xi\|^m.\end{aligned}$$

4. On a $|p(\xi)| \geq C_1 R^m$ pour $\xi \notin B(0,R) \subset (1-\chi)^{-1}(\{0\})$, d'où sur tout $\mathbb{R}^n$, on obtient

$$|q| = \Big|\frac{1-\chi}{p}\Big| \leq \frac{1+\|\chi\|_\infty}{C_1 R^m}.$$

En particulier q est bornée sur $\mathbb{R}^n$, et définit donc une distribution tempérée.
En posant $E = \mathcal{F}^{-1}(q) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}(\check{q}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on obtient

$$\mathcal{F}(PE) = p\mathcal{F}(E) = pq = 1-\chi,$$

d'où $PE = \mathcal{F}^{-1}(1-\chi) = \delta_0 + r$ avec $r = -\mathcal{F}^{-1}(\chi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ car $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

5. a) $\partial_\beta(x^\alpha E)$ est continue si $\mathcal{F}(\partial_\beta x^\alpha E) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On a

$$\mathcal{F}(\partial_\beta x^\alpha E) = i^{|\beta|}\xi^\beta \partial_\alpha \mathcal{F}(E) = i^{|\alpha|+|\beta|}\xi_\beta \partial_\alpha q,$$

avec $q = \dfrac{1-\chi}{p} \in C^\infty$, car $p \neq 0$ sur $\operatorname{supp}(1-\chi) \subset \mathbb{R}^n \setminus B(0,R)$. En particulier, $\xi^\beta \partial^\alpha q$ est toujours localement intégrable.
De plus, on a $q = \dfrac{1}{p}$ pour $\|\xi\| \geq R_1$, avec R_1 tel que $\operatorname{supp}\chi \subset B(0,R_1)$. Par récurrence sur $|\alpha|$, on obtient que pour $\|\xi\| \geq R_1$, il existe un polynôme Q_α sur $\mathbb{R}^n$ de degré $\leq (m-1)|\alpha|$ tel que $\partial^\alpha q = \frac{Q_\alpha}{p^{|\alpha|+1}}$. D'où, pour $\|\xi\| \geq R_1$,

$$\begin{aligned}|\xi^\beta \partial^\alpha q| &\leq \frac{C_2\|\xi\|^{|\beta|+(m-1)|\alpha|}}{C_1\|\xi\|^{m+(|\alpha|+1)}} \quad \text{d'après} \quad 3, \\ &\leq C\|\xi\|^{|\beta|-|\alpha|-m}.\end{aligned}$$

En particulier, $\xi^\beta\partial^\alpha q \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour $|\beta|-|\alpha|-m < -n$, c'est-à-dire $|\alpha| \geq n-m+1+|\beta|$, et finalement $\partial_\beta(x^\alpha E)$ est continue dans ce cas.
b) Étant donné un entier k, on a obtenu que toutes les dérivées partielles d'ordre $|\beta| \leq k$ de $\|x\|^{2p}E$ sont continues pour p entier choisi tel que $2p \geq n-m+1+k$ (car $\|x\|^{2p} = (\sum x_i^2)^p$ est une somme de monômes x^α avec $|\alpha| = 2p$).
On en déduit, en appliquant k fois le théorème suivant du cours :

$$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \text{ avec } \partial_{x_i}T \text{ continues pour } 1 \leq i \leq n \Rightarrow T \in C^1,$$

que $\|x\|^{2p}E$ est de classe C^k dans $\mathbb{R}^n$. D'où $E = \dfrac{1}{\|x\|^{2p}}(\|x\|^{2p}E)$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a bien $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

6. Dans cette question, on reprend la démonstration du cours concernant les opérateurs différentiels possédant une solution élémentaire C^∞ en dehors de l'origine.

   Soit $x_0 \in U$. On va montrer que T est C^∞ dans un voisinage de x_0. Soit χ une fonction plateau de classe C^∞ telle que $\chi = 1$ sur $V_{x_0} = B(x_0, \varepsilon)$ et $\operatorname{supp} \chi \subset U$. Alors χT et χf sont prolongeables sur $\mathbb{R}^n$, comme distribution à support compact, et respectivement fonction C^∞ à support compact. On considère la distribution à support compact

$$S = P(\chi T) - \chi PT = P(\chi T) - \chi f.$$

   On a $S = 0$ sur V_{x_0} car $\chi T = T$, $\chi f = f$ et $PT = f$ sur V_{x_0}. Les supports de S, χT et χf étant compacts, on peut calculer

$$\begin{aligned} E * S &= E * P(\chi T) - E * \chi f = P(E * \chi T) - E * \chi f \\ &= PE * \chi T - E * \chi f = (\delta_0 + r) * \chi T - E * \chi f \quad \text{d'après} \quad 4, \\ &= \chi T + r * \chi T - E * \chi f, \end{aligned}$$

   avec $r * \chi T$ et $E * \chi f$ de classe C^∞ car $r \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ par 4 et $\chi f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Comme $\chi T = T$ sur V_{x_0}, il ne reste plus qu'à montrer que $E * S$ est C^∞ sur un voisinage de x_0.

   Pour cela, on utilise une seconde fonction plateau ρ, à support compact dans $B(x_0, \varepsilon/2)$, et telle que $\rho = 1$ au voisinage de 0. Alors, on peut décomposer

$$E * S = (\rho E) * S + ((1 - \rho)E) * S$$

   avec $(1 - \rho)E \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ car d'après 5b, $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et $1 - \rho = 0$ au voisinage de 0. Reste à étudier $((1 - \rho)E) * S$. On a vu que $S = 0$ sur $V_{x_0} = B(x_0, \varepsilon)$, d'où

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}((\rho E) * S) &\subset \operatorname{supp}(\rho E) + \operatorname{supp} S \subset B(0, \varepsilon/2) + {}^c B(x_0, \varepsilon) \\ &\subset {}^c B(x_0, \varepsilon/2) \quad \text{par inégalité triangulaire.} \end{aligned}$$

   En particulier, $(\rho E) * S = 0$ sur $B(x_0, \varepsilon/2)$ est bien C^∞ dans un voisinage de x_0, ce qu'il fallait démontrer.