TD2

Exercice 1 (fonctions discontinues). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, de classe C^1 dans $(-\infty, a) \cup (a, \infty)$, mais présentant une discontinuité de première espèce en $t = a$. Donc les limites

$$f(a+0) = \lim_{t \to a, t > a} f(t), \qquad f(a-0) = \lim_{t \to a, t < a} f(t)$$

existent mais sont distinctes. Le saut de f en a est

$$\sigma(f, a) = f(a+0) - f(a-0).$$

- Démontrer la formule
$$(T_f)' = T_{f'} + \sigma(f, a)\delta_{(a)}.$$
- Que devient-elle si f a plusieurs sauts aux points $a_1, a_2, \ldots, a_n$?

Exercice 2 (fonction de Heaviside). La fonction de Heaviside $\Theta(x)$ est définie de la façon suivante:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ 1 & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

- $\Theta(x)$ appartient-elle à $\mathcal{D}$? Déterminer $\operatorname{supp} \Theta(x)$.
- Calculer au sens des distributions:

$$\begin{aligned} T &= \left\{ \frac{d}{dx} - \lambda \right\} \Theta(x) e^{\lambda x}, \\ U &= \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right\} \Theta(x) \frac{\sin \omega x}{\omega}, \\ V &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \Theta(x) x^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

Exercice 3. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on pose

$$\langle T, \varphi \rangle = \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \varphi(\sin(xy))\, dx\, dy.$$

- Montrer que T est une distribution.
- Quel est le support de T?

Exercice 4 (changement de variables dans $\mathcal{D}^*$). Soit θ une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même. On suppose que l'application θ est indéfiniment dérivable et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\theta'(x) \neq 0$. On désigne par σ l'application réciproque de θ.

Soit T une distribution. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ on pose

$$\langle T \circ \theta, \varphi \rangle = \langle T, \sigma' \cdot \varphi \circ \sigma \rangle.$$

- Expliquez le bien-fondé de cette définition. Montrer que $T \circ \theta \in \mathcal{D}^*$.
- Vérifier que $(T \circ \theta)' = \theta'(T' \circ \theta)$.
- Calculer $\delta'(6x^5 + 10x^3 + 30x + 46)$.

Corrigé

Exercice 1. Calculons la dérivée de T_f:

$$\langle (T_f)', \varphi\rangle = -\langle T_f, \varphi'\rangle = -\int_{-R}^{a} f(t)\varphi'(t)dt - \int_{a}^{R} f(t)\varphi'(t)dt,$$

où $\varphi \in \mathcal{D}$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R, R]$. Intégrons par parties, compte tenu des égalités $\varphi(R) = \varphi(-R) = 0$, il vient:

$$\langle (T_f)', \varphi\rangle = \varphi(a)[f(a+0) - f(a-0)] + \int_{-R}^{R} f'(t)\varphi(t)dt = \sigma(f,a)\langle \delta_{(a)}, \varphi\rangle + \langle T_{f'}, \varphi\rangle,$$

où nous avons supposé f' continue à gauche et à droite en a. Ainsi

$$(T_f)' = T_{f'} + \sigma(f,a)\delta_{(a)}.$$

Si maintenant f a plusieurs sauts aux points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nous aurons

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{j=1}^{n} \sigma(f, a_j)\delta_{(a_j)}.$$

Exercice 2.

- Nous avons $\forall \varphi \in \mathcal{D}$:

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle \left\{\frac{d}{dx} - \lambda\right\}\Theta(x)e^{\lambda x}, \varphi(x)\rangle = \langle \frac{d}{dx}\left\{\Theta(x)e^{\lambda x}\right\}, \varphi(x)\rangle - \lambda\langle \Theta(x)e^{\lambda x}, \varphi(x)\rangle =$$

$$= -\langle \Theta(x)e^{\lambda x}, \varphi'(x)\rangle - \lambda\langle \Theta(x)e^{\lambda x}, \varphi(x)\rangle =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)e^{\lambda x}\varphi'(x)dx - \lambda\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)e^{\lambda x}\varphi(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{\lambda x}\varphi'(x)dx - \lambda\int_{0}^{\infty} e^{\lambda x}\varphi(x)dx.$$

Dans la première intégrale, effectuons une intégration par parties en posant:

$$u = e^{\lambda x}, \qquad du = \lambda e^{\lambda x}dx,$$

$$dv = \varphi'(x)dx, \qquad v = \varphi(x).$$

Il vient

$$\langle T, \varphi\rangle = -\left[e^{\lambda x}\varphi(x)\right]_0^{\infty} + \lambda\int_{0}^{\infty} e^{\lambda x}\varphi(x)dx - \lambda\int_{0}^{\infty} e^{\lambda x}\varphi(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle.$$

On en déduit $T = \delta$.

- On a

$$\langle U,\varphi\rangle=\langle\left\{\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right\}\Theta(x)\frac{\sin\omega x}{\omega},\varphi(x)\rangle=$$

$$=\langle\frac{d^2}{dx^2}\left\{\Theta(x)\frac{\sin\omega x}{\omega}\right\},\varphi(x)\rangle+\omega\langle\Theta(x)\sin\omega x,\varphi(x)\rangle=$$

$$=\langle\Theta(x)\frac{\sin\omega x}{\omega},\varphi''(x)\rangle+\omega\langle\Theta(x)\sin\omega x,\varphi(x)\rangle=$$

$$=\int_0^\infty\frac{\sin\omega x}{x}\varphi''(x)dx+\omega\int_0^\infty\sin\omega x\;\varphi(x)dx.$$

Dans la première intégrale, effectuons une intégration par parties en posant

$$u=\frac{\sin\omega x}{\omega},\qquad du=\cos\omega x,$$

$$dv=\varphi''(x),\qquad v=\varphi'(x).$$

Il vient:

$$\langle U,\varphi\rangle=\left[\frac{\sin\omega x}{\omega}\;\varphi'(x)\right]_0^\infty-\int_0^\infty\cos\omega x\;\varphi'(x)dx+\omega\int_0^\infty\sin\omega x\;\varphi(x)dx=$$

$$=-\int_0^\infty\cos\omega x\;\varphi'(x)dx+\omega\int_0^\infty\sin\omega x\;\varphi(x)dx.$$

Effectuons à nouveau une intégration par parties en posant:

$$u=\cos\omega x,\qquad du=-\omega\sin\omega x dx,$$

$$dv=\varphi'(x)dx,\qquad v=\varphi(x).$$

Alors

$$\langle U,\varphi\rangle=-\left[\cos\omega x\;\varphi(x)\right]_0^\infty-\omega\int_0^\infty\sin\omega x\;\varphi(x)dx+\omega\int_0^\infty\sin\omega x\;\varphi(x)dx=$$

$$=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle.$$

On obtient donc: $U=\delta$.

- On a:

$$\langle V,\varphi\rangle=\langle\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\Theta(x)x^{n-1}\right\},\varphi(x)\rangle=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\;\langle\Theta(x)x^{n-1},\varphi^{(n)}(x)\rangle=$$

$$=(-1)^n\int_0^\infty\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\;\varphi^{(n)}(x)dx=(-1)^nI_n.$$

Pour calculer cette intégrale, nous effectuons une intégration par parties en posant:

$$u=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!},\qquad du=\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\,dx,$$

$$dv = \varphi^{(n)}(x)dx, \qquad v = \varphi^{(n-1)}(x).$$

Nous avons donc:

$$I_n = \left[\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi^{(n-1)}(x)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\,\varphi^{(n-1)}(x)dx = \Big(\text{pour } n \geq 2\Big) = -I_{n-1}.$$

Par conséquent:

$$I_n = (-1)^{n-1}I_1 = (-1)^{n-1}\int_0^\infty \varphi'(x)dx = (-1)^n\varphi(0)$$

et donc

$$\langle V, \varphi\rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle \Longrightarrow V = \delta.$$

Exercice 3.

- L'intégrale

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\varphi(\sin(xy))\,dx\,dy.$$

  existe pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ puisque φ est bornée. Donc T est bien une fonctionnelle, et sa linéarité est évidente.

- Considérons l'ouvert $U = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Si une fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ a un support inclus dans U, on a $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in [-1, 1]$. Pour une telle fonction φ, on a $\langle T, \varphi\rangle = 0$. La distribution T est nulle dans U. Le support de T est donc inclus dans $[-1, 1]$. Montrons que $\operatorname{supp} T = [-1, 1]$. Désignons par Ω le complémentaire du support de T. Supposons qu'il existe $u \in \Omega$ tel que $-1 < u < 1$. Choisissons $\rho > 0$ tel que

$$(u-\rho, u+\rho) \subset \Big(\Omega \cap (-1, 1)\Big).$$

  Considérons une fonction $\varphi \in \mathcal{D}$, positive, à support inclus dans $(u-\rho, u+\rho)$ et égale à 1 dans $[u-\rho/2, u+\rho/2]$. Le sous-ensemble W de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$W = \{(x, y) :\ |\sin(xy) - u| < \rho/2\}$$

  est ouvert. Si $(x, y) \in W$, on a $\varphi(\sin(xy)) = 1$. Donc

$$\langle T, \varphi\rangle \geq \int_W e^{-x^2-y^2}dxdy > 0.$$

  Or le support de φ est inclus dans Ω et $\langle T, \varphi\rangle = 0$. On obtient une contradiction: il n'existe pas un tel réel u.

  Comme le support de T est fermé, on a bien $\operatorname{supp} T = [-1, 1]$.