
Analyse de Fourier

Arthur Leclaire

Références

- [Bon] J.M. Bony. *Théorie des Distributions et Analyse de Fourier*. Éditions de l'École Polytechnique, 2006.
- [DW] R. Dalmasso et P. Witomski. *Analyse de Fourier et Applications. Exercices corrigés*. Masson, 1996.
- [E] R.E. Edwards. *Fourier Series : A Modern Introduction*. Rinehart and Winston, 1967.
- [GW] C. Gasquet et P. Witomski. *Analyse de Fourier et Applications*. Dunod, 2001.
- [H] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Springer, 1983.
- [Ka] Y. Katznelson. *Introduction to harmonic analysis*. John Wiley and sons, 1968.
- [Kö] T.W. Körner. *Fourier Analysis*. Cambridge University Press, 1988.
- [Rud] W. Rudin. *Analyse Réelle et Complexe*. Masson, 1975.
- [ZQ] C. Zuily et H. Queffélec. *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 2007.

Les deux premiers chapitres du livre [Ka] présentent de manière concise l'essentiel de ce qu'il faut savoir sur les séries de Fourier (et même un peu plus). Le cours est aussi résumé dans [ZQ] avec des exemples et thèmes d'étude pertinents. Le livre [E] est beaucoup plus détaillé, mais un peu moins accessible. Enfin, le livre [Kö] est moins exhaustif, mais peut-être plus accessible.

On trouvera une bonne introduction à la transformée de Fourier dans [Bon] (qui est assez orienté vers la théorie des distributions mais qui explique de manière limpide les applications aux équations aux dérivées partielles). Si l'on veut se limiter à la transformée de Fourier sur L^1 et L^2 , on pourra consulter [Rud], et on trouvera dans [ZQ, Ch.9, §4] le complément sur la classe de Schwartz \mathcal{S} . Pour aller plus loin, on pourra consulter [Ka] et [H] (le deuxième étant vraiment très spécialisé). Pour terminer, le livre [GW] (malheureusement épuisé) donne un éclairage bienvenu sur les aspects pratiques de l'analyse de Fourier, en explorant notamment les liens avec le traitement de signal. Le livre compagnon [DW] contient de nombreux exercices corrigés pertinents.

On prendra garde (notamment le jour de l'oral) à éviter les confusions dues aux différentes normalisations qui existent dans la littérature pour la définition des séries de Fourier et de la transformée de Fourier.

Table des matières

1	Convolution	3
1.1	Convolution sur \mathbb{R}^d	3
1.2	Convolution sur \mathbb{T}	5
2	Séries de Fourier	6
2.1	Généralités	6
2.2	Convergence des Séries de Fourier	9
2.3	Théorie L^2	14
2.4	Calculs et Premières Applications	15
2.5	Analyse de Régularité	18
2.6	Équation de la Chaleur sur \mathbb{T}	23
3	Transformée de Fourier	24
3.1	Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$	24
3.2	Transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	26
3.3	Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$	27
3.4	Calculs et Applications	28
3.5	Équation de la Chaleur sur \mathbb{R}^d	33
3.6	Quelques Mots sur les Distributions Tempérées	34

Notations

On note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ que l'on munit de la mesure de Lebesgue renormalisée $\mu(dx) = \frac{dx}{2\pi}$. On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ s'identifie à une fonction 2π -périodique définie sur \mathbb{R} . Ainsi les éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ s'identifient à des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues 2π -périodiques. De plus, $L^p(\mathbb{T})$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (p < \infty) \quad , \quad \|f\|_\infty = \inf\{ M > 0 \mid |f| \leq M \text{ p.p. } \} .$$

On notera aussi $\mathcal{C}^k(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions 2π -périodiques $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^k . On dira qu'une fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est \mathcal{C}^k par morceaux s'il existe une subdivision $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_p = 2\pi$ telle que pour tout $0 \leq j < p$, $f|_{]x_j, x_{j+1}[}$ admette un prolongement à $[x_j, x_{j+1}]$ de classe \mathcal{C}^k .

On notera $c_0(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ qui admettent pour limite 0 en $-\infty$ et $+\infty$. Enfin, on notera \mathcal{P} le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ engendré par les fonctions

$$e_n : t \longmapsto e^{int} \quad (n \in \mathbb{Z}) .$$

Ainsi \mathcal{P} est l'ensemble des polynômes trigonométriques.

On utilisera la notation $\check{f}(x) = f(-x)$.

1 Convolution

1.1 Convolution sur \mathbb{R}^d

Pour cette partie, on renvoie à [BP] et [Br].

Définition 1. Soient $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions mesurables. Lorsque cela a un sens, on définit la **convolution** $f * g$ de f et g par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)dy .$$

Si cette intégrale existe, on a immédiatement

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y)dy = g * f(x) .$$

Théorème 1. Soient $p, q \in [1, \infty]$ des exposants conjugués (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

1. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g(x)$ existe pour presque tout x et définit $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

2. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g(x)$ existe pour presque tout x et définit $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p .$$

3. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g(x)$ existe pour tout x et définit $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

De plus, $f * g$ est uniformément continue. Enfin, si $1 < p < \infty$, alors $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f * g(x) = 0$.

Remarque 1.

· Le premier point de ce théorème assure que $(L^1(\mathbb{R}^d), +, *)$ est une algèbre de Banach. On verra plus loin que cette algèbre n'admet pas d'unité.

· Plus généralement, si $p, q, r \in [1, \infty]$ sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et si $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g$ est définie dans $L^r(\mathbb{R}^d)$ avec $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (c'est l'inégalité de Young).

Exercice 1. Prouver les différents points du Théorème 1.

la densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ lorsque $p > 0$.

Pour la fin du troisième point (un peu plus dure), on pourra utiliser

Pour le deuxième point, on pourra supposer $\|f\|_1 = 1$ et utiliser l'inégalité de Jensen.

Exercice 2. 1. Montrer que si $A \subset \mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue > 0 , alors

$$A - A = \{ x - y ; x, y \in A \}$$

contient un voisinage de 0 (on pourra considérer $\mathbf{1}_A * \mathbf{1}_{-A}$).

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que f est bornée sur un voisinage de 0.

b. Montrer que f est continue en 0.

c. Montrer que f est linéaire.

Théorème 2. Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est localement intégrable, et si $\alpha : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^k et à support compact, alors $\alpha * f$ est définie partout et de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R}^d . De plus, pour tout multi-indices j de poids $\leq k$, on a

$$\partial^j(\alpha * f) = (\partial^j \alpha) * f.$$

En particulier, si (α_n) est une suite régularisante, alors les fonctions $\alpha_n * f$ sont \mathcal{C}^∞ .

Définition 2. On appelle **approximation de l'unité** une suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ de fonctions mesurables positives sur \mathbb{R}^d , d'intégrale 1 et telles que

$$\forall \delta > 0, \int_{|x| > \delta} \alpha_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Cette définition est la même que celle de [BP] mais se limite au cas de fonctions à valeurs positives.

Proposition 1. Si $\alpha : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ est mesurable d'intégrale 1, alors

$$\alpha_n(x) = n^d \alpha(nx)$$

définit une approximation de l'unité. Autrement dit, on obtient une approximation de l'unité en renormalisant n'importe quelle densité de probabilité.

Théorème 3. Soit (α_n) une approximation de l'unité.

1. Si $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$, alors $\alpha_n * f$ converge vers f uniformément sur les compacts.

2. Si $p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors $\alpha_n * f$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 2. On prendra garde au fait que les preuves habituelles du point 2 s'appuient sur la densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p < \infty$.

Définition 3. Une **suite régularisante** est une approximation de l'unité composée de fonctions \mathcal{C}^∞ à supports compacts.

Un des exercices du TD d'analyse fonctionnelle montre l'existence de suites régularisantes ; rappelons que cela revient à montrer l'existence d'une fonction bosse $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 4. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est ouvert et $p < \infty$, alors $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

1.2 Convolution sur \mathbb{T}

Définition 4. Soient $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions mesurables. Lorsque cela a un sens, on définit la **convolution** (sur le cercle) $f * g$ de f et g par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{T}} f(y)g(y-x)\mu(dy) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)g(x-y)dy .$$

Ainsi, il y a une notion de convolution pour les fonctions 2π -périodiques sur \mathbb{R} . Cette notion est bien différente de celle définie dans le paragraphe précédent. Néanmoins, certaines des propriétés vont persister. Par exemple, les inégalités de convolution présentées dans le Théorème 1 s'adaptent immédiatement au cas du cercle. On notera que dans le cas du cercle, la situation est même plus simple car, \mathbb{T} étant compact de mesure finie, on a

$$\forall p \in [1, \infty], \quad \mathcal{C}(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T}) .$$

L'inégalité la plus importante dans ce cas est donc celle obtenue pour $L^1(\mathbb{T})$ que nous répétons ici : si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, alors $f * g$ est définie presque partout avec

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

Théorème 5. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et si $g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$, alors $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$ et pour tout entier $j \leq k$,

$$(f * g)^{(j)} = f * g^{(j)} .$$

Définition 5. On appelle **approximation de l'unité sur le cercle** une suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ de fonctions mesurables positives sur \mathbb{T} , d'intégrale 1 et telles que

$$\forall \delta > 0, \quad \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]} \alpha_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Là encore, les approximations de l'unité sur le cercle sont données par des fonctions 2π -périodiques. Il ne faut donc en aucun cas confondre avec la notion d'approximation de l'unité développée dans le paragraphe précédent.

Théorème 6. Soit (α_n) une approximation de l'unité sur le cercle.

1. Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, alors $\alpha_n * f$ converge vers f uniformément sur \mathbb{T} .
2. Si $p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors $\alpha_n * f$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

En couplant ce résultat avec le Théorème 5, on obtient que si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$, alors pour tout entier $j \leq k$, $(\alpha_n * f)^{(j)}$ converge uniformément vers $f^{(j)}$.

2 Séries de Fourier

2.1 Généralités

Définition 6. Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{Z}$. Le n -ième **coefficient de Fourier** de f est défini par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx = \int_{\mathbb{T}} f \bar{e}_n d\mu .$$

La **série de Fourier** associée à f est alors la série de fonctions

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} ,$$

la somme sur \mathbb{Z} signifiant $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N f(x)$, où les sommes partielles sont données par

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx} .$$

Bien entendu, nous ne savons pas *a priori* si cette série converge, et ce sera l'une des questions cruciales étudiées dans la suite. On notera aussi

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k f(x)$$

les sommes de Césaro associée à la suite $(S_N f(x))_{N \in \mathbb{N}}$.

Rappelons que $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{T})$. La série de Fourier peut donc se voir comme la décomposition d'une fonction sur cette famille libre.

Proposition 2. Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$, $a \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{Z}$. alors on a

1. $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$ où l'on a noté $\check{f}(x) = f(-x)$,
2. $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$,
3. $c_n(\tau_a f) = e^{-ina} c_n(f)$ où l'on a noté $\tau_a f(x) = f(x - a)$,
4. Si $f = \sum_{n \in I} c_n e_n$ avec $I \subset \mathbb{Z}$ fini (i.e. $f \in \mathcal{P}$), alors $c_n(f) = c_n$.

Remarque 3. Ces propriétés entraînent certaines symétries dans les coefficients de Fourier pour des fonctions particulières. Par exemple, si f est à valeurs réelles, alors $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$. Aussi, si f est paire, alors $c_{-n}(f) = c_n(f)$ ce qui permet de regrouper les termes en $-n$ et n dans la série de Fourier, et donc d'écrire la série de Fourier en cosinus. De même, si f est impaire, alors $c_{-n}(f) = -c_n(f)$ ce qui permet d'écrire la série de Fourier en sinus.

Dans la pratique, on écrit parfois la série de Fourier sous la forme

$$\frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n \geq 1} \left(a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx) \right) ,$$

où les coefficients sont donnés par

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx .$$

L'avantage de cette représentation est que les coefficients sont réels dès que la fonction f l'est aussi. Son inconvénient est que les propriétés liées à l'orthogonalité des exponentielles complexes (par exemple la formule de Parseval) se lisent moins facilement sur les coefficients a_n et b_n . Dans les exercices calculatoires, on jonglera entre les deux écritures de la série de Fourier.

Proposition 3. *La transformation de Fourier*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &: L^1(\mathbb{T}) \longrightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}) \\ f &\longmapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

est une application linéaire continue de norme 1.

Proposition 4 (Riemann-Lebesgue). *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, alors $c_n(f) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \pm\infty$.*

Autrement dit, \mathcal{F} est à valeurs dans $c_0(\mathbb{Z})$.

Proposition 5 (Lien avec la dérivation).

1. *Soit $F \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ telle qu'il existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que*

$$\forall x \in \mathbb{T}, \quad F(x) - F(0) = \int_0^x f(t) dt .$$

Alors pour tout $n \neq 0$, $c_n(F) = \frac{1}{in} c_n(f)$.

2. *Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$, alors pour tout $n \neq 0$, $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')$.*

Remarque 4. En fait, l'ingrédient principal de la Proposition 5 est l'intégration par parties. Par conséquent, le deuxième point s'étend à d'autres cadres. Par exemple, si f est continue, et \mathcal{C}^1 par morceaux (c'est-à-dire qu'il existe une subdivision $0 = a_0 < \dots < a_K = 2\pi$ telle que pour tout k , $f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ admette un prolongement \mathcal{C}^1 sur $[a_k, a_{k+1}]$), alors on a encore pour tout $n \neq 0$, $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')$, voir Exercice 16. L'Exercice 25 généralisera encore cette formule.

Proposition 6 (Lien avec la convolution).

1. *Si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g)$.*

2. *Si $K \in \mathcal{P}$, alors $K * f \in \mathcal{P}$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f * e_n = c_n(f) e_n$.*

Exercice 3[□]. Montrer les propriétés des coefficients de Fourier données ci-dessus.

Définition 7. Le **noyau de Dirichlet** est défini par

$$D_N = \sum_{|n| \leq N} e_n \quad \text{i.e.} \quad D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} e^{inx} .$$

Le **noyau de Fejér** est défini (pour $N \geq 1$) par $K_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k$.

Proposition 7. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$.

1. $S_N f = f * D_N$.

2. $\sigma_N f = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_N f = f * K_N$.

3. $\int_{\mathbb{T}} D_N d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(x) dx = 1$ et $\int_{\mathbb{T}} K_N d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(x) dx = 1$.

4. Les noyaux de Dirichlet et Fejér vérifient

$$D_N(x) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}},$$

$$K_N(x) = \sum_{|n| \leq N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{inx} = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin\frac{Nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

5. Pour tout $\delta \in]0, \pi[$, on a

$$\sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_N(x)| \leq \frac{1}{N \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}.$$

En particulier, (K_N) est une approximation de l'unité sur le cercle.

Exercice 4. Convolution de suites (évoquée dans [E, Exo 3.15])

1. Soient $a = (a_n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $b = (b_n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

a. Montrer que l'on peut définir

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p b_{n-p}$$

et que la suite $c = (c_n)$ ainsi définie est dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ avec $\|c\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1$.

b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{T}$, on peut définir

$$f(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p e^{ipx} \quad , \quad g(x) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} b_q e^{iqx} \quad , \quad \varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{T}$, $\varphi(x) = f(x)g(x)$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $a_n = b_{-n} = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_{0 \leq n < N}$ et on réutilise les notations de la question précédente. Montrer que

$$f(x) = \frac{e^{i\frac{N-1}{2}x}}{\sqrt{N}} \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = |f(x)|^2 = K_N(x).$$

2.2 Convergence des Séries de Fourier

Théorème 7. Convergence Ponctuelle - Théorème de Dirichlet

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et un point $a \in \mathbb{T}$ fixé.

On suppose que f admet en a des limites finies à gauche et à droite notées $f(a_-)$ et $f(a_+)$ et qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\int_0^\delta \frac{|f(a+t) - f(a_+)|}{t} dt < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^\delta \frac{|f(a-t) - f(a_-)|}{t} dt < \infty .$$

Alors

$$S_N f(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(f(a_-) + f(a_+) \right) .$$

Corollaire 1. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ admet des limites finies à gauche et à droite en a et des dérivées à gauche et à droite en a , alors

$$S_N f(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(f(a_-) + f(a_+) \right) .$$

Si de plus, f est continue en a (i.e. $f(a_-) = f(a_+)$), alors $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(a) = f(a)$.

Exercice 5[□]. Preuve du Théorème 7 [ZQ]

1. Montrer que

$$S_N f(a) - \frac{1}{2} \left(f(a_-) + f(a_+) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{h_a(t)}{\sin(\frac{t}{2})} \sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) t \right) dt ,$$

où l'on a posé

$$h_a(t) = f(a+t) - f(a_+) + f(a-t) - f(a_-) .$$

2. Montrer que $t \mapsto \frac{h_a(t)}{\sin \frac{t}{2}} \in L^1(0, \pi)$ et conclure avec le lemme de Riemann-Lebesgue.

Théorème 8. Convergence au sens de Césaro - Théorème de Fejér

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et un point $a \in \mathbb{T}$ fixé.

1. On suppose que f admet en a des limites finies à gauche et à droite notées $f(a_-)$ et $f(a_+)$.

Alors

$$\sigma_N f(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(f(a_-) + f(a_+) \right) ,$$

i.e., en a , la série de Fourier converge **au sens de Césaro** vers $\frac{1}{2} \left(f(a_-) + f(a_+) \right)$.

2. Si f est continue en tout point de $[\alpha, \beta]$, alors $\sigma_N f \rightarrow f$ uniformément sur $[\alpha, \beta]$.

Exercice 6[□]. Preuve du Théorème 8 [Ka, Chap.1, Th. 3.1]

1. On suppose que f admet en a des limites finies à gauche et à droite.

a. Montrer que

$$\sigma_N f(a) - \frac{1}{2} \left(f(a_-) + f(a_+) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi h_a(t) K_N(t) dt,$$

où l'on a posé

$$h_a(t) = f(a+t) - f(a_+) + f(a-t) - f(a_-).$$

b. En écrivant $\int_0^\pi = \int_0^\delta + \int_\delta^\pi$, en déduire la limite de $\sigma_N f(a)$.

2. On suppose maintenant f continue en tout point de $[\alpha, \beta]$. On fixe $\varepsilon > 0$.

a. Avec les notations de la première question, montrer qu'il existe $\delta \in]0, \pi[$ tel que

$$\forall a \in [\alpha, \beta], \forall t \in [-\delta, \delta], \quad |h_a(t)| \leq \varepsilon.$$

b. Toujours avec $\int_0^\pi = \int_0^\delta + \int_\delta^\pi$, en déduire que $\sigma_N f \rightarrow f$ uniformément sur $[\alpha, \beta]$.

Théorème 9. Théorème de Fejér revisité [ZQ]

1. La suite (K_N) est une approximation de l'unité sur le cercle.

2. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Alors pour tout $N \geq 1$, $\|\sigma_N f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

De plus, $\sigma_N f \rightarrow f$ uniformément sur \mathbb{T} .

3. Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors $\|\sigma_N f\|_p \leq \|f\|_p$.

De plus, $\sigma_N f \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{T})$.

Corollaire 2.

1. Les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ et dans $L^p(\mathbb{T})$ pour $p < \infty$.

2. La transformation de Fourier $f \in L^1(\mathbb{T}) \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est injective.

Autrement dit, deux fonctions $L^1(\mathbb{T})$ ayant les mêmes coefficients de Fourier sont égales **presque partout**.

Exercice 7. Le théorème de Fejér implique celui de Weierstrass

Soit $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $f = F \circ \cos$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, et que f est paire.

2. En déduire que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sigma_N f = c_0(f) + \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N}\right) c_n(f) (e_n + e_{-n})$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme T_n de degré n (polynôme de Tchebycheff) tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(nt) = T_n(\cos(t)).$$

4. En déduire l'existence d'un polynôme P_N tel que $\|F - P_N\|_\infty = \|f - \sigma_N(f)\|_\infty$.
5. Conclure.

On présente maintenant quelques résultats négatifs sous forme d'exercices. Certains d'entre eux s'appuient sur l'étude de $\|D_N\|_1$ qui fait l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 8. Étude de $\|D_N\|_1$ ([Kö, Lemme 18.3] pour Q1, [ZQ] pour Q2)

1. Montrer que $\|D_N\|_1 \rightarrow \infty$ quand $N \rightarrow \infty$ (on pourra utiliser l'expression du noyau de Dirichlet donnée dans la Proposition 7).
2. On va maintenant estimer plus précisément $\|D_N\|_1$ selon la méthode donnée dans [ZQ].
 - a. Montrer que l'on peut écrire

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\pi, \pi], \quad D_N(x) = 2 \frac{\sin(Nx)}{x} + r_N(x),$$

où $\sup_{|x| \leq \pi, N \geq 0} |r_N(x)| < \infty$ (et où par convention $\frac{\sin(Nx)}{x} = N$ pour $x = 0$).

b. Considérons

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin t| dt \quad \text{et} \quad \varphi(x) = \int_0^x |\sin t| dt - \alpha x.$$

Montrer que $\alpha = \frac{2}{\pi}$, que $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$, avec pour tout $x \in \mathbb{T}$, $\varphi'(x) = |\sin x| - \alpha$.
En déduire que $\|D_N\|_1 = \frac{4}{\pi^2} \log N + O(1)$ quand $N \rightarrow \infty$.

Exercice 9[□]. Il existe $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge en 0 [Rud]

1. Montrer que $f \mapsto S_N f(0)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ de norme $\|D_N\|_1$.
2. En déduire qu'il existe $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ telle que $\sup_{N \geq 0} |S_N f(0)| = \infty$. Conclure.

Exercice 10*. Construisons $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ telle que $S_N f(0)$ diverge [Kö, Ch.18]

1. Dans cette première question, on montre que pour tout $A > 0$, il existe $P \in \mathcal{P}$ tel que

$$\|P\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad |S_N P(0)| \geq A.$$

- a. Posons $h_n = \text{sgn}(D_n)$. Montrer que $S_n h_n(0) \geq \frac{4}{\pi^2} \log(2(n+1))$.
- b. Montrer qu'il existe $g_n : \mathbb{T} \rightarrow [-1, 1]$ continue telle que $S_n g_n(0) \geq \frac{4}{\pi^2} \log(n+1)$.
- c. Montrer qu'il existe $p_n \in \mathcal{P}$ (à valeurs complexes) tel que

$$\|p_n\|_\infty \leq 2 \quad \text{et} \quad |S_n p_n(0)| \geq \frac{4}{\pi^2} \log(n+1) - 1.$$

- d. Conclure.

2. La question précédente montre l'existence d'une suite $H_k = \sum_{q=-q_k}^{q_k} c_q(H_k)e_q$ de polynômes trigonométriques et d'une suite d'entiers n_k telles que

$$\forall k \geq 1, \quad \|H_k\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad |S_{n_k}H_k(0)| \geq 2^{2k}.$$

Posons $p_k = \sum_{j=1}^k (2q_j + 1)$ et $\forall t \in \mathbb{T}, \quad f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} e^{ip_k t} H_k(t)$.

- a. Montrer que f est bien définie et continue sur \mathbb{T} .
- b. Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{Z}$ tel que $q \leq q_k$, on a $c_{p_k+q}(f) = \frac{1}{2^k} c_q(H_k)$.
- c. Remarquer que $q_k > n_k$. En déduire que

$$\forall k \geq 1, \quad |S_{p_k+n_k}f(0) - S_{p_k-n_k}f(0)| = \frac{1}{2^k} |S_{n_k}H_k(0)| \geq 2^k.$$

- d. En déduire que $\limsup_{n \rightarrow \infty} |S_n f(0)| = \infty$ et conclure.

Exercice 11[□]. Défaut de convergence $L^1(\mathbb{T})$ [Ka, §II.1.2]

Par l'absurde, supposons que pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$, $(S_N f)$ converge dans $L^1(\mathbb{T})$.

1. On rappelle que $S_N f = D_N * f$. Calculer la norme de l'opérateur $S_N : L^1(\mathbb{T}) \rightarrow L^1(\mathbb{T})$.
2. En déduire que la suite $(\|D_N\|_1)_{N \geq 1}$ serait bornée, et conclure.

Exercice 12[□]. $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$ n'est pas surjective. Méthode 1 [Rud, §5.15]

Supposons par l'absurde que toute suite (c_n) telle que $\lim_{|n| \rightarrow \infty} c_n = 0$ soit la suite des coefficients de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{T})$.

1. En déduire qu'alors, il existerait une constante $M > 0$ telle que $\forall f \in L^1(\mathbb{T}), \|f\|_1 \leq M \sup_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|$.
2. Obtenir une contradiction en prenant $f = D_N$.

Exercice 13. $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$ n'est pas surjective. Méthode 2 [Ka, Ch.1, §4]

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que pour tout $n \geq 0, c_n(f) = -c_{-n}(f) \geq 0$.

- a. Montrer que $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ définit $F \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$.
- b. Montrer qu'en 0, les sommes de Fejér associées à F s'écrivent

$$\sigma_N F(0) = c_0(F) + 2 \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{c_n(f)}{in}.$$

- c. En utilisant le théorème de Fejér, en déduire que $\sum_{n \neq 0} \frac{c_n(f)}{n} < \infty$.

2. En déduire que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\log n}$ n'est pas la série de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Exercice 14. Conditions suffisantes d'appartenance à $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{T}))$ [Ka, Ch.1,§4.1]

1. Soit $(a_n) \in c_0(\mathbb{Z})$ telle que $a_n = a_{-n} \geq 0$ et qui vérifie la condition de convexité

$$\forall n > 0, \quad a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n \geq 0 .$$

a. En considérant $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$, montrer que $n(a_n - a_{n+1}) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

b. Montrer que

$$\sum_{n=1}^N n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) = a_0 - a_N - N(a_N - a_{N+1}) ,$$

puis que le membre de gauche admet une limite finie quand $N \rightarrow \infty$.

c. En déduire que l'on peut poser

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)K_{n-1}$$

où la série converge dans $L^1(\mathbb{T})$ (K_N désignant le noyau de Fejér).

d. Montrer que les coefficients de Fourier de f sont exactement les (a_n) .

2. En déduire que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\log n}$ est la série de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Exercice 15* . ► DEV ◀ Le Principe de Localisation [Ka]

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ qui est de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle ouvert I . L'objectif est de montrer qu'il y a convergence uniforme de la série de Fourier sur tout intervalle compact $[\alpha, \beta] \subset I$.

1. (Riemann-Lebesgue uniforme) Montrer que si H est précompact dans $L^1(\mathbb{T})$, on a

$$\sup_{\varphi \in H} |c_n(\varphi)| \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0 .$$

2. Pour $a \in [\alpha, \beta]$, définissons $\psi_a : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\psi_a(u) = \frac{f(a - 2u) - f(a)}{\sin u} .$$

Montrer que $H = \{ \psi_a, a \in [\alpha, \beta] \}$ est compact dans $L^1(\mathbb{T})$.

3. En déduire que $S_N f \rightarrow f$ uniformément sur $[\alpha, \beta]$.

4. Si $g_1, g_2 \in L^1(\mathbb{T})$ coïncident au voisinage de $[\alpha, \beta]$, montrer que la convergence uniforme sur $[\alpha, \beta]$ de $S_N g_1$ équivaut à celle de $S_N g_2$.

Remarque 5.

- Au-delà du procédé de la sommation de Césaro, il existe d'autres procédés de sommation menant à d'autres résultats de convergence. Par exemple, le procédé de sommation d'Abel permet d'écrire que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, alors

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} c_n(f) e^{inx},$$

où la convergence est uniforme en $x \in \mathbb{T}$. La preuve est tout à fait analogue au théorème de Fejér et consiste à montrer que le noyau de Poisson défini pour $r \in [0, 1[$ par

$$P_r(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{inx}$$

est une approximation de l'unité sur le cercle quand $r \rightarrow 1$; voir [ZQ] pour les détails.

- On remarquera qu'une suite de noyaux trigonométriques fournit une façon d'approcher f par des polynômes trigonométriques. Selon les propriétés du noyau et la régularité de la fonction, l'approximation sera plus ou moins rapide. On verra dans l'Exercice 27 que le noyau de Jackson permet de donner une approximation uniforme d'une fonction continue avec une erreur directement contrôlée par le module de continuité.

- Le Théorème 9 montre que pour $p < \infty$ et pour $f \in L^p(\mathbb{T})$, la série de Fourier converge au sens de Césaro dans $L^p(\mathbb{T})$ vers f . On peut se demander si, plus simplement, la série de Fourier $S_N f$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{T})$. Le résultat est clairement faux pour $p = \infty$ pour des raisons de continuité. L'Exercice 11 montre que c'est faux aussi pour $p = 1$. En revanche, pour $1 < p < \infty$, on a effectivement $S_N f \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{T})$ dès que $f \in L^p(\mathbb{T})$; c'est un théorème difficile dû à Marcel Riesz, voit par exemple [Ka, Ch.2, §1.5]. Cependant, le cas particulier $p = 2$ est moins difficile, comme on va le voir dans le paragraphe suivant. Notons aussi que dans ce polycopié, nous n'aborderons pas le problème de la convergence presque partout de la série de Fourier; ce problème très difficile est discuté dans [Ka, §II.3], [Z, Vol.2, Ch.13] ou dans [E, §10.4].

2.3 Théorie L^2

Théorème 10. *La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. Par conséquent,*

$$\begin{aligned} \ell^2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ (c_n) &\longmapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n \end{aligned}$$

est une bijection linéaire isométrique. Aussi, si $f \in L^2(\mathbb{T})$, $S_N f \rightarrow f$ dans $L^2(\mathbb{T})$, i.e.

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$$

où la série converge dans $L^2(\mathbb{T})$. Enfin, on a l'égalité de Parseval

$$\forall f \in L^2(\mathbb{T}), \quad \|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Théorème 11. Si $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et \mathcal{C}^1 par morceaux, alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$.

Par suite

$$\forall x \in \mathbb{T}, \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx},$$

avec convergence normale dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

Exercice 16[□]. Preuve du Théorème 11 [G]

Si x est un point de dérivabilité de f , notons $\varphi(x) = f'(x)$.

1. Expliquer pourquoi cela définit $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{T}, \quad f(x) - f(0) = \int_0^x \varphi(t) dt.$$

2. Montrer que pour tout $n \neq 0$, $c_n(f) = \frac{c_n(\varphi)}{in}$.

3. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en déduire que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$.

Exercice 17[□]. Série de Fourier et convolution sur $L^2(\mathbb{T})$ [BMP]

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$.

1. Montrer que l'on peut définir une fonction continue en posant $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)^2 e_n$.

2. Montrer que $g = f * f$ et en déduire que

$$\forall x \in \mathbb{T}, \quad f * f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)^2 e^{inx}.$$

2.4 Calculs et Premières Applications

Exercice 18[□]. Deux séries de Fourier élémentaires (formules à retrouver dans [ZQ])

1. Définissons $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ et 0 sinon.

a. Montrer que pour

$$\forall n \neq 0, \quad c_n(f) = \frac{i^{n+1}}{2\pi n} \left((-1)^n - 1 \right).$$

b. En déduire que

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos((2p+1)x)$$

où la série converge dans $L^2(\mathbb{T})$.

c. Est-ce que l'égalité précédente est-elle valable ponctuellement et si oui, pour quels x ? Que se passe-t-il en $x = \pm \frac{\pi}{2}$? Quelle est la valeur du membre de droite en ces points?

d. Montrer que $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, puis que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. On pose $g = f * f$.

a. Montrer que pour tout $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $g(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|x|}{\pi}\right)$.

b. Montrer (en utilisant éventuellement l'Exercice 17) que

$$g(x) = \frac{1}{4} + 2 \sum_{p \geq 0} \frac{1}{\pi^2 (2p+1)^2} \cos((2p+1)x),$$

où la série converge dans $L^2(\mathbb{T})$, mais aussi en norme dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

c. En déduire

$$\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \text{puis que} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 19. Phénomène de Gibbs [G], [CLF1], [FGN2], [ZQ]

On reprend la fonction $f = 1_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$.

1. Montrer que si $N = 2P + 1$ ou $N = 2P + 2$ (avec $P \geq 0$), alors

$$S_N f \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2N} \right) - \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^P \frac{1}{2p+1} \sin \left(\left(\frac{2p+1}{2N} \right) \pi \right).$$

2. En utilisant une somme de Riemann, en déduire la limite du membre de gauche.

3. En utilisant que $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \approx 1.18$, en déduire que $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N f\|_\infty > 1$.

Exercice 20. Séries de Fourier et Logarithme Complexe [LFA, §12.1]

Montrer (par la méthode votre choix) que pour tout $x \in]0, 2\pi[$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\log \left(2 \sin \frac{x}{2} \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}.$$

Exercice 21. Exponentielle a périodique [ZQ]

On fixe $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et on définit $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ en posant

$$\forall t \in [-\pi, \pi[, \quad f(t) = e^{iat}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = (-1)^n \frac{\sin \pi a}{\pi(a-n)}$.

2. Montrer que

$$\forall N \geq 1, \quad S_N f(\pi) = \frac{\sin(\pi a)}{\pi a} + \frac{2a \sin(\pi a)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}.$$

3. Avec le théorème de Dirichlet, en déduire que

$$\cos(\pi a) = \frac{\sin(\pi a)}{\pi a} + \frac{2a \sin(\pi a)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2},$$

puis en déduire le développement eulérien de la cotangente

$$\pi \cot(\pi a) = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2} .$$

4. En considérant maintenant $S_N f(0)$, obtenir l'identité

$$\frac{\pi}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} .$$

Exercice 22[□]. The Simplest Convergence Theorem (Questions 1 et 2 dans [Kö])

1. Soit $(c_n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Montrer qu'on peut poser

$$\forall x \in \mathbb{T}, \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} ,$$

où la série converge absolument. Montrer que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n$.

2. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $(c_n(f)) \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Montrer que f est égale presque partout à une fonction continue.

3. (Application) Soit $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et soit $r \in]0, R[$.

a. En considérant $f(t) = F(re^{it})$, montrer les célèbres formules

$$a_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{F(z)}{z^{n+1}} dz , \quad , \quad F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(re^{it}) dt$$

où γ est le chemin composé du cercle de centre 0 et de rayon r parcouru dans le sens trigonométrique. En déduire que si $R = \infty$ et s'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|F(z)|}{1+|z|^d} < \infty$, alors F est un polynôme de degré $\leq d$. Que peut-on dire si F est bornée sur \mathbb{C} ?

b. Montrer que

$$\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(re^{it})|^2 dt .$$

En déduire que si $|F|$ admet un maximum local en 0, alors F est constante sur $D(0, R)$. En déduire que si $G : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction analytique¹ sur un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$ telle que $|G|$ admette un maximum local en un point $a \in U$, alors elle est constante sur U (on pourra utiliser le principe du prolongement analytique).

1. Une fonction est dite analytique si elle est développable en série entière au voisinage de tout point.

Exercice 23. Séries de Fourier Absolument Convergentes [Ka, Chap1, §6]

On introduit l'espace vectoriel

$$A(\mathbb{T}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty \right\}$$

muni la norme $\|f\|_A = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|$.

1. Montrer que

$$\begin{aligned} \ell^1(\mathbb{Z}) &\longrightarrow A(\mathbb{T}) \\ (c_n) &\longmapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n \end{aligned}$$

est une bijection linéaire isométrique. En déduire que $A(\mathbb{T})$ est complet.

2. Montrer que si $f, g \in A(\mathbb{T})$, alors $fg \in A(\mathbb{T})$ avec $\|fg\|_A \leq \|f\|_A \|g\|_A$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ telle que $c_n(f) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

a. Montrer que pour tout $N \geq 1$, $\sum_{n=-N}^N c_n(f) \leq 2\sigma_{2N} f(0)$.

b. En déduire que $f \in A(\mathbb{T})$.

Remarque 6. Mentionnons encore quelques applications qui ne seront pas traitées ici :

- le critère d'équirépartition de Weyl [Kö],
- l'inégalité de Poincaré-Wirtinger [FGN2],
- l'inégalité isopérimétrique [ZQ],
- l'inégalité de Bernstein [ZQ],
- le théorème de Herglotz [Ka],
- la théorie des gammes musicales [GW].

2.5 Analyse de Régularité

Théorème 12. Régularité \mathcal{C}^k

1. Si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$, alors $c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ quand $|n| \rightarrow \infty$.
2. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ vérifie $c_n(f) = O\left(\frac{1}{|n|^{k+2}}\right)$ quand $|n| \rightarrow \infty$, alors f est égale presque partout à une fonction $\mathcal{C}^k(\mathbb{T})$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Alors f est de classe \mathcal{C}^∞ si et seulement si la suite de ses coefficients de Fourier est à décroissance rapide, c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{|n| \rightarrow \infty} |n|^k c_n(f) \rightarrow 0$.

Ce théorème et sa preuve doivent être absolument connus.

Exercice 24. Fonctions Holdériennes [Ka], [FGN2]

Pour $\alpha \in]0,1]$, on note $\text{Lip}_\alpha(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont α -holdériennes, que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{\text{Lip}_\alpha} = \|f\|_\infty + \sup_{t \in \mathbb{T}, h \neq 0} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|^\alpha}.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}) \subset \text{Lip}_\alpha(\mathbb{T}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

2. Soit $f \in \text{Lip}_\alpha(\mathbb{T})$. On note $\tau_h f(t) = f(t-h)$.

a. Montrer que pour tout $n \neq 0$,

$$c_n(f) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right) e^{-int} dt.$$

b. En déduire que $c_n(f) = O\left(\frac{1}{|n|^\alpha}\right)$ quand $|n| \rightarrow \infty$.

3. Supposons maintenant $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1]$.

a. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{T}$, la translatée $\tau_h f(t) = f(t-h)$ vérifie

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |e^{inh} - 1|^2 |c_n(f)|^2 = \|\tau_h f - f\|_2^2.$$

b. Soient $m \in \mathbb{N}$. En prenant $h = \frac{2\pi}{3 \cdot 2^m}$, montrer que

$$\sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} |c_n(f)|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |e^{inh} - 1|^2 |c_n(f)|^2 \leq \left(\frac{2\pi}{3 \cdot 2^m}\right)^{2\alpha} \|f\|_{\text{Lip}_\alpha}^2.$$

c. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en déduire que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} |c_n(f)| \leq 2^{\frac{m+1}{2}} \left(\frac{2\pi}{3 \cdot 2^m}\right)^\alpha \|f\|_{\text{Lip}_\alpha}.$$

d. En conclure qu'il existe une constante c_α dépendant uniquement de α telle que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| \leq c_\alpha \|f\|_{\text{Lip}_\alpha}.$$

Exercice 25*. Fonctions à Variation Bornée [E]

On dira que $f \in \text{BV}(\mathbb{T})$ si $V(f) := \sup_{0=x_0 < \dots < x_m=2\pi} \sum_{k=1}^m |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \infty$.

On va voir que si $f \in \text{BV}(\mathbb{T})$, alors $c_n(f) = \mathcal{O}(\frac{1}{|n|})$.

1. Première méthode. Soit $n \neq 0$ et posons $g(x) = \frac{e^{-inx}}{-in}$.

a. Supposons d'abord $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour une subdivision assez fine $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 2\pi$, on a

$$\left| c_n(f) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m f(x_k) (g(x_k) - g(x_{k-1})) \right| \leq \varepsilon.$$

b. En déduire que

$$|c_n(f)| \leq \left(1 + \frac{1}{2\pi}\right) \varepsilon + \frac{1}{2\pi} \frac{V(f)}{|n|}.$$

et conclure dans ce cas en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$.

c. On suppose maintenant $f \in \text{BV}(\mathbb{T})$ et pour $r \in]0, \pi[$, et $x \in \mathbb{T}$, $f_r(x) = r \int_x^{x+\frac{1}{r}} f(t) dt$.

d. Montrer que

$$|c_n(f_r)| \leq \frac{V(f_r)}{2\pi|n|} \leq \frac{V(f)}{2\pi|n|}.$$

e. En déduire que $|c_n(f)| \leq \frac{V(f)}{2\pi|n|}$.

2. Deuxième méthode, en admettant que pour $f \in \text{BV}(\mathbb{T})$, il existe une mesure complexe ν sur \mathbb{T} telle que l'on ait pour *presque* tous $x \in \mathbb{T}$,

$$f(x) - f(0) = \int_{[0,x]} d\nu = \nu([0,x]). \quad (1)$$

On renvoie à [AFP, §3.2] ou [Rud, Ch.7, Exo 13] pour ce résultat, et à [Rud] pour la notion de mesure complexe.

a. Montrer que pour une mesure complexe ν sur \mathbb{T} , on peut définir

$$c_n(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{-inx} d\nu(x) \quad \text{avec} \quad |c_n(\nu)| \leq \frac{1}{2\pi} |\nu|(\mathbb{T}).$$

b. Soit $f \in \text{BV}(\mathbb{T})$ et ν vérifiant (1). Montrer que pour tout $n \neq 0$, $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(\nu)$. En déduire que

$$\forall n \neq 0, \quad |c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{|\nu|(\mathbb{T})}{|n|}.$$

(On ne cherchera pas à montrer que $|\nu|(\mathbb{T}) = V(f)$ car $f = g$ p.p. $\Rightarrow V(f) = V(g)$.)

Exercice 26*. Théorème de Paley-Wiener [ZQ]

Pour $\delta > 0$, on note $B_\delta = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(z)| \leq \delta \}$. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

On va voir que f admet un prolongement analytique à une bande B_δ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $c_n(f) = \mathcal{O}(e^{-\varepsilon|n|})$.

1. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |c_n(f)| \leq M e^{-\varepsilon|n|}.$$

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$.

b. Montrer que $F(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inz}$ converge uniformément sur tout compact de B_ε .

c. En déduire que f admet un prolongement analytique à B_ε .

2. Supposons que f admet un prolongement analytique à B_δ . Notons

$$M = \sup \left\{ |F(u + iv)| ; |u| \leq \pi + \frac{\delta}{2}, |v| \leq \frac{\delta}{2} \right\}.$$

a. Avec la formule de Cauchy, montrer que pour $p \in \mathbb{N}$, $\sup_{x \in \mathbb{T}} |f^{(p)}(x)| \leq M p! \left(\frac{2}{\delta}\right)^p$.

b. En déduire que pour tout $n \neq 0$,

$$|c_n(f)| \leq \frac{M p!}{n^p} \left(\frac{2}{\delta}\right)^p \leq M \exp\left(p \log\left(\frac{2p}{\delta|n|}\right)\right).$$

c. En choisissant judicieusement p , en déduire que $|c_n(f)| = \mathcal{O}(e^{-\varepsilon|n|})$ pour $\varepsilon = \frac{\delta}{2e}$.

Exercice 27*. Noyau de Jackson et Approximation [ZQ]

Dans cet exercice on notera $\mathcal{P}_N = \operatorname{Vect}\{ e_n ; |n| \leq N \}$.

1. On introduit le noyau de Jackson $J_n = \frac{K_n^2}{\|K_n^2\|_1}$.

a. Montrer que $J_n \in \mathcal{P}_{2n}$, que $J_n \geq 0$ et que $\|J_n\|_1 = 1$.

b. Montrer que

$$\|K_n^2\|_1 \geq a \cdot n \quad \text{où} \quad a = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^4 du.$$

c. Soit $k \in [0, 3[$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|^k J_n(t) dt \leq \frac{C}{n^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^k \left(\frac{\sin(nt)}{t}\right)^4 dt.$$

d. En déduire que $\forall k \in [0, 3[$, $\int_{-\pi}^{\pi} |t|^k J_n(t) dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^k}\right)$.

e. En déduire que (J_n) est une approximation de l'unité sur le cercle.

2. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. On notera ω le module de continuité de f défini par

$$\omega(\delta) = \sup_{|u-v| \leq \delta} |f(u) - f(v)|.$$

On notera $P_n = f * J_{[\frac{n}{2}]}$ où $[\frac{n}{2}]$ est la partie entière de $\frac{n}{2}$.

a. Montrer que $P_n \in \mathcal{P}_n$.

b. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\omega(|t|) \leq (n|t| + 1) \omega(\frac{1}{n})$ et en déduire que

$$\|f - P_n\|_\infty = \mathcal{O}\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

c. Montrer que

$$\|f - S_n f\|_\infty \leq \|f - P_n\|_\infty (1 + \|D_n\|_1).$$

d. En conclure que

$$\|f - S_n f\|_\infty \leq \mathcal{O}\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right) \log(n)\right).$$

e. (Application) Montrer que si f est α -höldérienne, alors $S_n f \rightarrow f$ uniformément.

Exercice 28*. Séries de Fourier Lacunaires [ZQ]

Soit $(\varepsilon_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n \geq 0} |\varepsilon_n| < \infty$. On définit une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ en posant

$$f(t) = \varepsilon_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n e^{i2^n t}.$$

On va voir que si f est dérivable en un point a , alors $\varepsilon_n = o(2^{-n})$. Pour cela, on réutilisera le noyau de Jackson présenté dans l'Exercice 27.

1. Montrer qu'il suffit de traiter le cas où $a = 0$ avec $f(a) = f'(a) = 0$.

2. Soient $n \geq 2$ et $p < 2^{n-2}$. Montrer que

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) J_p(t) e^{-i2^n t} dt.$$

3. En appliquant cela à $p_n = 2^{n-2} - 1$, démontrer que $p_n \varepsilon_n \rightarrow 0$ et conclure (on pourra décomposer $\int_{\mathbb{T}} = \int_{|t| \leq \delta} + \int_{|t| > \delta}$ et utiliser les propriétés du noyau de Jackson).

4. En déduire que $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i2^n t}}{2^n}$ est une fonction continue nulle part dérivable.

2.6 Équation de la Chaleur sur \mathbb{T}

Dans cette partie, nous proposons en exercice de revenir à la motivation initiale des séries de Fourier : la résolution de l'équation de la chaleur. Si $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, la valeur $u(x)$ représentera donc la température en un point x d'une barre circulaire modélisée par \mathbb{T} . Les séries de Fourier permettent de résoudre les équations régissant la diffusion de la chaleur dans cette barre au cours du temps t .

Exercice 29. ► DEV ◀ Équation de la Chaleur sur \mathbb{T} [DK], [FGN4]

Fixons une condition initiale $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et cherchons $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$, de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}$ et vérifiant

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T} \\ u(0, x) &= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{T} \end{aligned}$$

1. (Unicité) Soit $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ une solution.

a. On fixe $t > 0$. Montrer qu'il existe des coefficients $(c_n(t))_{n \in \mathbb{Z}}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{T}, \quad u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx},$$

où la série converge absolument.

b. Montrer que $t \mapsto c_n(t)$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que

$$\forall t > 0, \quad c'_n(t) = -n^2 c_n(t).$$

c. Montrer que $\lim_{t \rightarrow 0} c_n(t) = c_n$ où c_n est le n -ième coefficient de Fourier de f .

d. En déduire que l'on a nécessairement pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{T}$,

$$u(0, x) = f(x) \quad \text{et} \quad u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-n^2 t} e^{inx}. \quad (2)$$

2. (Existence) Définissons u par les formules (2).

a. Montrer que sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}$, u est de classe \mathcal{C}^∞ et vérifie $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

b. Pour $t > 0$, posons

$$p_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t} e^{inx}$$

Montrer que pour $t > 0$, $u(t, \cdot) = f * p_t$.

La suite de l'exercice consiste à montrer la continuité de u . Le cas $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$ est rapide (cf. question c), mais cela demande plus de travail dans le cas général.

c. Supposons que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$. Montrer qu'alors les deux formules de (2) se recoupent pour $t = 0$ et que u est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$. Conclure dans le cas $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$. En déduire au passage que pour $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$, $f * p_t \rightarrow f$ uniformément lorsque $t \rightarrow 0$.

d. Supposons encore $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$ et aussi que $f \geq 0$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $t_0 > 0$ et $x_0 \in \mathbb{T}$ tels que $u(t_0, x_0) < 0$. Pour $\beta < 0$, considérons alors $v = e^{\beta t} u$. Montrer que v admet un minimum relativement à $[0, t_0] \times \mathbb{T}$ atteint un point $(t_1, x_1) \in]0, t_0] \times \mathbb{T}$. Aboutir à une contradiction avec les conditions nécessaires d'extremum. En déduire que $u \geq 0$.

e. En utilisant une approximation positive de l'unité sur le cercle (par exemple le noyau de Fejér), en déduire que pour tout $t > 0$, on a $p_t \geq 0$.

f. Montrer que $\|p_t\|_1 = 1$. En déduire que $\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ (principe du maximum).

g. Déduire des questions précédentes que dans le cas général $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, on a encore

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} |u(t, x) - f(x)| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

En déduire que u est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$ et conclure.

Remarque 7.

- La famille de fonctions $(p_t)_{t>0}$, appelée noyau de la chaleur, peut être exprimée autrement grâce à la formule sommatoire de Poisson ; cela donne d'ailleurs une autre méthode pour montrer l'existence d'une solution à l'équation de la chaleur, voir Exercice 44.

- Plutôt que de supposer la barre circulaire, on peut aussi considérer l'équation de la chaleur sur une barre rectiligne de longueur L avec des températures fixées à zéro aux deux extrémités de la barre. On se ramène alors au cas périodique en prolongeant les fonctions à $[-L, L]$ par imparité et en considérant seulement des séries de Fourier impaires (i.e. avec des termes en $\sin(nx)$). Le calcul est alors semblable au cas périodique ; voir [ZQ].

3 Transformée de Fourier

3.1 Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$

Définition 8. La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx,$$

où l'on a noté $\xi \cdot x = \xi^t x = \sum_{k=1}^d \xi_k x_k$. On notera aussi $\check{f}(x) = f(-x)$.

Proposition 8. La transformation de Fourier

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d) \\ f &\longmapsto \hat{f} \end{aligned}$$

est une application linéaire continue de norme 1.

Proposition 9 (Riemann-Lebesgue). Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ quand $|\xi| \rightarrow \infty$. Autrement dit, \mathcal{F} est à valeurs dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 10 (Lien avec la dérivation).

1. Soit $F \in L^1(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt .$$

Alors nécessairement $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$ et pour tout $\xi \neq 0$, $\widehat{F}(\xi) = \frac{1}{i\xi} \widehat{f}(\xi)$.

2. Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $\xi \neq 0$, $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{i\xi} \widehat{f'}(\xi)$.

3. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\int |xf(x)| dx < \infty$, alors \widehat{f} est dérivable et $(\widehat{f})'(\xi) = -i \widehat{xf(x)}(\xi)$, où l'on s'autorise l'abus de notation $\widehat{xf(x)}$ pour désigner la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto xf(x)$.

Proposition 11 (Lien avec la convolution). Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

1. Si $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$.

2. Si on a $g(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int G(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi$ avec $G \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f * g(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \widehat{f}(\xi) G(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi .$$

Exercice 30[□]. Montrer les propriétés de la transformée de Fourier données ci-dessus. Pour le point 1 de la Proposition 10, on pourra approcher $\int_{\mathbb{R}}$ par \int_{-A}^A puis procéder à une intégration par parties.

Théorème 13. Inversion de Fourier L^1

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On suppose que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors on a presque partout

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi \quad \text{i.e.} \quad f = \frac{1}{(2\pi)^d} \check{\check{f}} .$$

En particulier, f admet un représentant continu.

Exercice 31[□]. ► DEV ◀ **Gaussiennes et Inversion de Fourier**

1. Soit A une matrice $d \times d$ symétrique définie positive. On définit $g_A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g_A(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi A)}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^t A^{-1} x\right) .$$

a. Posons $g = g_1$. Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et calculer \widehat{g} (on pourra montrer que \widehat{g} est solution d'une équation différentielle).

b. En déduire que pour $\sigma > 0$, la transformée de Fourier de g_{σ^2} est $\widehat{g_{\sigma^2}}(\xi) = e^{-\frac{\sigma^2 \xi^2}{2}}$.

c. En déduire que $g_A \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et que la transformée de Fourier de g_A est donnée par

$$\widehat{g_A}(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2} \xi^t A \xi\right) .$$

2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On note $k_\sigma = g_{\sigma^2 I} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $k = k_1$.

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$k_\sigma(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \widehat{k}_\sigma(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi.$$

b. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$k_\sigma * f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \widehat{k}_\sigma(\xi) \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi.$$

c. Montrer que $k_\sigma * f \rightarrow f$ dans L^1 quand $\sigma \rightarrow 0$.

d. Montrer que $\widehat{k}_\sigma(\xi) = \widehat{k}(\sigma\xi)$ et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int \widehat{k}_\sigma(\xi) \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^d} \int \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi.$$

e. En déduire la formule d'inversion de Fourier pour f .

Remarque 8.

- Le calcul de $\widehat{g}_1(0)$ fait intervenir l'intégrale de Gauss, dont la valeur doit être connue (elle était demandée sans démonstration dans l'écrit d'analyse et probabilités de 2010) : $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.
- On peut montrer que la convergence est uniforme en x dans la question d.
- La démarche de preuve s'adapte à d'autres approximations de l'unité (k_σ) obtenues par exemple avec le noyau de Fejér sur \mathbb{R} [Ka], ou le noyau de Cauchy [Rud].

3.2 Transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Pour un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on notera $|\alpha| = \sum_{k=1}^d |\alpha_k|$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$, $\partial^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d} f$.

Définition 9. On introduit l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions f de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^d telles que pour tous multi-indices α, β ,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\beta \partial^\alpha f(x)| < \infty.$$

Conformément au programme de l'agrégation, on munira $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ de la famille de semi-normes $(N_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définies par

$$N_p(f) = \sup_{\substack{|\alpha| \leq p \\ |\beta| \leq p}} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\beta \partial^\alpha f(x)|.$$

Ainsi, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un espace métrique complet pour la distance définie par

$$d(f, g) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^p} \min(1, N_p(f - g)).$$

On remarquera que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace de $L^p(\mathbb{R}^d)$, qui est dense dès que $p < \infty$.

Théorème 14. L'application $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un isomorphisme bicontinu et

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi.$$

De plus, pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, avec un léger abus de notations, on a pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$\partial^\alpha \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha f(x))(\xi), \quad (3)$$

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi). \quad (4)$$

Exercice 32[□]. Preuve du Théorème 14 [Bon]

1. Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $P \cdot f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

En déduire que $P \cdot f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

2. Montrer les formules (3) et (4) (en justifiant soigneusement).

3. Montrer que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et que $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est continu.

4. Conclure.

Proposition 12. Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$.

3.3 Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$

Théorème 15. La transformée de Fourier, définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, s'étend par densité en un isomorphisme $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie la formule de Plancherel

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \|f\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|\mathcal{F} f\|_2, \quad (5)$$

et dont l'inverse est $\frac{1}{(2\pi)^d} \check{\mathcal{F}}$ (où $\check{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \mathcal{F} f(-\xi)$).

Exercice 33[□]. Preuve du théorème 15 (► DEV ◀ en refaisant le prolongement)

1. Montrer que pour toutes $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

2. En déduire que \mathcal{F} admet un prolongement continu à $L^2(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie l'équation (5).

3. Déduire de l'équation (5) l'inverse de \mathcal{F} sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 34. Convolution dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

1. Montrer que $\widehat{f g} = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{f} * \hat{g}$.

2. Peut-on dire que $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$?

3.4 Calculs et Applications

Exercice 35[□]. Transformée de Fourier du sinus cardinal et applications

On pose $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$, qui se prolonge en $\text{sinc} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Pour $a > 0$, calculer la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-a,a]}$.
2. En déduire que $\widehat{\text{sinc}} = \pi \mathbf{1}_{[-1,1]}$.
3. En déduire la transformée de Fourier de sinc^2 .
4. Montrer que pour $A > 0$, $\int_0^A \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = -\frac{\sin^2 A}{A} + \int_0^A \frac{\sin(2x)}{x} dx$.
5. Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale semi-convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque 9. La valeur de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}$ peut être aussi obtenue via le calcul de la transformée de Laplace de sinc (voir [G]) ou via le calcul des résidus (voir [Boc]).

Exercice 36. Noyau de Fejér sur \mathbb{R} [Ka]

Pour $\lambda > 0$, on pose

$$k_\lambda(x) = \lambda k(\lambda x) \quad \text{où} \quad k(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (1 - |\xi|) e^{i\xi x} d\xi$.

Indication : On pourra utiliser les résultats de l'Exercice 35.

2. Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$k_\lambda * f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda} \right) \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

3. En déduire que les fonctions à bande limitée (c'est-à-dire dont la transformée de Fourier est à support compact) sont denses dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 37. Théorème de Dirichlet pour les fonctions $L^1(\mathbb{R})$ [A]

On pose $d(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin x}{x}$ et pour $\lambda > 0$, $d_\lambda(x) = \lambda d(\lambda x)$. Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ telle que

$$h_a(t) = f(a+t) + f(a-t) - 2l \quad \text{vérifie} \quad \int_0^\delta \frac{|h_a(t)|}{t} dt < \infty.$$

1. Montrer que pour $\lambda > 0$, $d_\lambda * f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^\lambda \hat{f}(\xi) e^{i\xi a} d\xi$.

2. Montrer que

$$d_\lambda * f(a) - l = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} h_a(t) \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt \quad \left(\text{au sens} \int_0^{+\infty} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \right).$$

On pourra utiliser la valeur de l'intégrale de Dirichlet calculée dans l'exercice 35.

3. En conclure que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^\lambda \hat{f}(\xi) e^{i\xi a} d\xi \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} l.$$

Decomposer l'intégrale de la question 2 en $\int_0^\delta + \int_\delta^{+\infty}$. Attention aux conclusions hâtives pour $\int_\delta^{+\infty}$.

Exercice 38. [Ka, §1.13] ou [A]

1. Calculer la transformée de Fourier de $f_a : x \mapsto e^{-a|x|}$.

2. En déduire la transformée de Fourier de $g : \xi \mapsto \frac{1}{1 + \xi^2}$.

3. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1 + \xi^2} d\xi.$$

4. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant le théorème des résidus à la fonction $z \mapsto \frac{e^{izx}}{1+z^2}$ sur un contour bien choisi (voir [AM, §8.4.3] si besoin d'aide).

Remarque 10. La méthode des résidus permet de calculer d'autres transformées de Fourier. Par exemple, en intégrant sur le bord du rectangle $[-R, R] + [0, 2]i$, on peut montrer

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2i\pi\zeta s}}{\cosh(\pi s)} ds = \frac{1}{\cosh(\pi\zeta)},$$

qui exprime que la fonction $\cosh^{-1} \left(\cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)$ est à une constante près sa propre transformée de Fourier. Voir [StShCA] pour les détails.

Exercice 39. ► DEV ◀ Vecteurs Propres de la Transformée de Fourier [A]

Posons $G(z) = e^{-z^2}$. On définit les polynômes et fonctions de Hermite par

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}) \quad , \quad h_n(t) = (n! 2^n \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} H_n(t) e^{-\frac{t^2}{2}} .$$

1. Quelles sont les seules valeurs propres possibles pour $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$?

2. Dans cette question, on montre que h_n est vecteur propre de \mathcal{F} .

a. Montrer que pour tous $x, u \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{t^2}{2}} G(t+u) e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} G(iu-x) e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t) e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} (-i)^n H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

c. En déduire que h_n est vecteur propre de \mathcal{F} .

3. Dans cette question, on montre que (h_n) est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

a. Montrer $H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - H'_n(t)$.

En déduire le degré de H_n , son coefficient dominant et sa parité.

b. Montrer que si P est un polynôme, et si $0 \leq k \leq n$,

$$\int_{\mathbb{R}} P(t) H_n(t) e^{-t^2} dt = \int_{\mathbb{R}} P^{(k)}(t) H_{n-k}(t) e^{-t^2} dt .$$

c. En déduire que (h_n) est une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$.

d. Montrer que (h_n) est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

e. Que peut-on dire d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} = \sqrt{2\pi} f$?

Exercice 40. Une EDP linéaire [Bon]

Soient $\lambda > 0$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On rappelle que $\Delta = \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.

Trouver toutes les fonctions $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui vérifient

$$\Delta u - \lambda u = f .$$

Exercice 41. $L^1(\mathbb{R}^d)$ n'a pas d'unité pour la convolution

1. Résoudre dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ l'équation $f * f = f$. En déduire que $L^1(\mathbb{R}^d)$ n'admet pas d'unité pour la convolution.
2. Montrer que l'équation $f * f = f$ admet une infinité de solutions sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 42*. Un sous-espace de L^2 invariant par translation

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On pose $V = \text{Vect}(\tau_x f, x \in \mathbb{R})$ où $\tau_x f(y) = f(y - x)$.

Montrer que V est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\hat{f} \neq 0$ presque partout.

Remarque 11. On peut aussi montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors V est dense dans $L^1(\mathbb{R})$ ssi pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) \neq 0$. On trouvera ce théorème dû à Wiener dans [RudFA, Ch.9].

Exercice 43*. Théorème de Paley-Wiener [Ka]

Soient $f \in L^2(\mathbb{R})$, $a > 0$, et $B_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Im}(z)| < a\}$.

On va voir que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) La fonction f se prolonge en une fonction F holomorphe sur B_a et telle que

$$\sup_{|y| < a} \int_{\mathbb{R}} |F(x + iy)|^2 dx < \infty .$$

- (b) La fonction $\xi \mapsto e^{a|\xi|} \hat{f}(\xi)$ est dans $L^2(\mathbb{R})$.

1. Supposons (b). Montrer que

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi z} d\xi$$

est un prolongement holomorphe de f sur B_a qui convient.

2. Supposons (a). On se donne $\lambda > 0$ et on reprend k_λ défini dans l'Exercice 36.

On définit pour $x \in \mathbb{R}$ et $|y| < a$, $f_y(x) = F(x + iy)$ et $g_{\lambda,y}(x) = G_\lambda(x + iy)$ où

$$G_\lambda(z) = \int_{\mathbb{R}} F(z - u) k_\lambda(u) du .$$

a. Montrer que $\widehat{g_{\lambda,y}} = \widehat{k_\lambda} \widehat{f_y}$.

b. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{g_{\lambda,y}}(\xi) = \widehat{g_{\lambda,0}}(\xi) e^{-\xi y}$.

c. En déduire que pour $|\xi| < \lambda$, $\widehat{f_y}(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-\xi y}$.

d. Conclure en utilisant la formule de Plancherel.

3. En déduire que si f et \hat{f} sont à supports compacts, alors $f = 0$.

Exercice 44. Formule sommatoire de Poisson [ZQ], [StShFou]

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2n\pi).$$

1. Montrer que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de g .
3. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{T}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx} \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

4. (Application à la fonction θ de Jacobi et au noyau de la chaleur [DK])

a. Montrer que pour $\alpha, t > 0$, on a

$$\forall x \in \mathbb{T}, \quad \sqrt{\frac{\pi}{\alpha t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{(x - 2n\pi)^2}{4\alpha t}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha n^2 t} e^{inx}.$$

b. En déduire que la fonction $\theta : t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$ vérifie

$$\forall t > 0, \quad \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

(Cette identité joue un rôle dans le prolongement holomorphe de ζ à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$; voir [ZQ]).

c. On définit le noyau de la chaleur par

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{T}, \quad p_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t} e^{inx}.$$

On se donne $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et on définit $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$u(0, \cdot) = f \quad \text{et} \quad \forall t > 0, \quad u(t, \cdot) = f * p_t,$$

où la convolution $f * p_t$ est circulaire. Montrer que sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}$, u est de classe \mathcal{C}^∞ et vérifie

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Déduire des questions précédentes que

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{4t}\right) f(y) dy.$$

En déduire que $\limsup_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \sup_{x \in \mathbb{T}} |u(t, x) - f(x)| = 0$ puis que u est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$ avec

$$\sup_{t \geq 0, x \in \mathbb{T}} |u(t, x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{T}} |f(x)|.$$

3.5 Équation de la Chaleur sur \mathbb{R}^d

Exercice 45. Équation de la chaleur sur \mathbb{R}^d [Bon], [StShFou]

Fixons une condition initiale $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, et cherchons $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$ et vérifiant

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) &= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Dans cet exercice, \hat{u} désigne la transformée de Fourier par rapport à la variable d'espace :

$$\hat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) e^{-i\xi \cdot x} dx.$$

1. On va montrer l'unicité sous conditions. Supposons $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Soit u une solution telle que $u(t, \cdot)$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ uniformément en t , c'est-à-dire que pour tout intervalle compact $I \subset \mathbb{R}_+^*$, et pour tous multi-indices α, β

$$\sup_{t \in I, x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha| |\partial^\beta u(t, x)| < \infty.$$

On suppose aussi que quand $t \rightarrow 0$, on a $u(t, \cdot) \rightarrow f$ dans L^1 .

Montrer que \hat{u} est dérivable par rapport à t et que

$$\forall t > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, \xi) = -|\xi|^2 \hat{u}(t, \xi).$$

En déduire que pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy. \quad (6)$$

En déduire que pour tout $t > 0$, $u(t, \cdot)$ est la convolution de f par le noyau k_t défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad k_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

2. Montrons maintenant l'existence d'une solution dans le cas où $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$. On définit alors $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ en posant

$$u(0, \cdot) = f \quad \text{et} \quad \forall t > 0, \quad u(t, \cdot) = f * k_t.$$

Montrons que ceci a un sens et que cela définit une fonction u continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$ et qui est solution de l'équation de la chaleur avec condition initiale f .

Remarque 12.

- On remarquera que la formule (6) recoupe celle obtenue dans l'Exercice 44 lorsque f est une fonction continue 2π -périodique sur \mathbb{R} .

- La transformée de Fourier permet de résoudre d'autres équations d'évolution, par exemple l'équation de Schrödinger, ou l'équation des ondes. On renvoie à [Bon] pour une discussion très claire à ce sujet.

3.6 Quelques Mots sur les Distributions Tempérées

Définition 10. Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (qui est muni de la structure d'espace métrique complet définie dans la Sous-section 3.2). On notera $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions tempérées². On note généralement $\langle T, \varphi \rangle$ la valeur de la distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ sur la fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

En remarquant que

$$\forall f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \hat{\varphi}(x) dx ,$$

on peut naturellement prolonger la transformée de Fourier à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Définition 11. Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on définit $\hat{T} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}$ en posant

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle .$$

Ceci définit effectivement une distribution tempérée \hat{T} appelée transformée de Fourier de T .

Théorème 16. L'application $T \mapsto \hat{T}$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même.

L'intérêt de cette définition est qu'elle généralise très largement les notions de transformées de Fourier déjà rencontrées. En effet, on peut voir qu'une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ définit une distribution tempérée T_f via la formule

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx .$$

On peut voir que dans les cas $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ou $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier ainsi définie recoupe celles rencontrées au-dessus. Mais cette formule permet aussi de définir la transformée de Fourier sur les autres $L^p(\mathbb{R}^d)$, ce qui n'était pas du tout évident a priori. Aussi, on peut associer à une mesure de probabilité μ sur \mathbb{R}^d une distribution tempérée T_μ définie par une formule analogue. La transformée de Fourier de T_μ recoupera alors (à un signe près sur la variable ξ) la notion de fonction caractéristique rencontrée en probabilités, et qui joue un rôle important dans le théorème central-limite.

Cette généralisation permet de justifier des calculs communément rencontrés en physique, et donc de donner un cadre tout à fait rigoureux à des formules du type

$$\hat{\delta}_0 = \mathbf{1} \quad , \quad \delta_0 = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{\mathbf{1}} .$$

On remarquera au passage que la transformée de Fourier de la fonction $\mathbf{1} \in L^\infty$ n'est pas une fonction mais une mesure. En particulier, on pourra voir dans [GW] que les distributions tempérées permettent d'exprimer de manière assez claire la théorie de l'échantillonnage (et notamment le théorème de Shannon) du fait que la formule sommatoire de Poisson se réécrit alors

2. Ces distributions tempérées sont aussi parfois appelées distributions sphériques, ce qui explique le \mathcal{S} habilement choisi par Laurent Schwartz. Pour l'explication, voir l'article original [S]

simplement

$$\Pi_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \widehat{\Pi}_1 \quad \text{où} \quad \Pi_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{an} .$$

Mentionnons que la dérivation s'étend aisément aux distributions tempérées, et qu'on peut aussi convoluer une distribution tempérée par une distribution à support compact. De plus, les formules habituelles sur le lien entre dérivation et multiplication par des polynômes vont persister pour la transformée de Fourier sur les distributions tempérées. Ceci permet par exemple de résoudre de manière assez directe les équations de convolution du type

$$A * u = f$$

où A est une distribution à support compact, où f est un second membre (par exemple dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$), et où $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est la fonction inconnue. Puisque l'opérateur différentiel ∂_α peut être vu comme la convolution par la distribution $(-1)^{|\alpha|} \partial_\alpha \delta_0$, ce cadre comprend notamment les EDP linéaires à coefficients constants. En particulier, l'équation $(\Delta - \lambda)u = f$ rencontrée dans l'Exercice 40 rentre dans ce cadre. La méthode utilisée dans cet exercice se généralise : dans le domaine de Fourier, il s'agit de "diviser" $\hat{f}(\xi)$ par $\hat{A}(\xi)$. Lorsque $\hat{A}(\xi)$ est une fonction \mathcal{C}^∞ qui ne s'annule pas, c'est toujours possible. Par contre, lorsque \hat{A} s'annule, c'est plus délicat. Évidemment, une fois résolue cette équation dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on n'a aucune information quant à la régularité de la solution, et en particulier, on ne sait pas si c'est une fonction localement intégrable. Pour en dire plus sur la régularité, on a généralement besoin des espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ que l'on peut définir et étudier en se basant sur la transformée de Fourier.

On renvoie à [Bon] pour un exposé très détaillé sur les distributions et la transformée de Fourier des distributions tempérées.

Références

- [A] M. El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008.
- [AFP] L. Ambrosio, N. Fusco, et D. Pallara. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford Science Publications, 2000.
- [AM] E. Amar et E. Matheron. *Analyse Complexe*. Cassini, 2004.
- [Boc] N. Boccara. *Fonctions Analytiques*. Ellipses, 1998.
- [Bon] J.M. Bony. *Théorie des Distributions et Analyse de Fourier*. Éditions de l'École Polytechnique, 2006.
- [Br] H. Brézis. *Analyse Fonctionnelle*. Dunod, 1999.
- [BMP] V. Beck, J. Malick, et G. Peyré. *Objectif Agrégation*. H-K, 2005.
- [BP] M. Briane et G. Pagès. *Théorie de l'Intégration*. Vuibert, 2007.
- [CLF1] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, et V. Maillot. *Exercices de Mathématiques pour l'Agrégation : Analyse 1*. Masson, 1997.
- [DK] H. Dym et H.P Mc Kean. *Fourier Series and Integrals*. Academic Press, 1972.
- [DW] R. Dalmaso et P. Witomski. *Analyse de Fourier et Applications. Exercices corrigés*. Masson, 1996.
- [E] R.E. Edwards. *Fourier Series : A Modern Introduction*. Rinehart and Winston, 1967.
- [FGN2] S. Francinou, H. Gianella, et S. Nicolas. *Oraux X-ENS, Analyse 2*. Cassini, 2009.
- [FGN4] S. Francinou, H. Gianella, et S. Nicolas. *Oraux X-ENS, Analyse 4*. Cassini, 2012.
- [G] X. Gourdon. *Les Maths en Tête, Analyse*. Ellipses, 1994.
- [GW] C. Gasquet et P. Witomski. *Analyse de Fourier et Applications*. Dunod, 2001.
- [H] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Springer-Verlag, 1983.
- [Ka] Y. Katznelson. *Introduction to harmonic analysis*. John Wiley and sons, 1968.
- [Kö] T.W. Körner. *Fourier Analysis*. Cambridge University Press, 1988.
- [LFA] J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudiès. *Cours de Mathématiques - Analyse*. Dunod, 2002.
- [Rud] W. Rudin. *Analyse Réelle et Complexe*. Masson, 1975.
- [RudFA] W. Rudin. *Functional Analysis*. Mc-Graw Hill, 1991.
- [S] L. Schwartz. Théorie des distributions et transformation de Fourier. *Annales de l'université de Grenoble*, vol.23, pp.7-24, 1947-1948.
- [StShCA] E.M. Stein et R. Shakarchi. *Complex Analysis*. Princeton University Press, 2003.
- [StShFou] E.M. Stein et R. Shakarchi. *Fourier Analysis*. Princeton University Press, 2002.
- [Z] A. Zygmund. *Trigonometric Series, Third Edition*. Cambridge University Press, 2002.
- [ZQ] C. Zuily et H. Queffélec. *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 2007.