Université Mohammed V-Agdal
Département de mathématiques
et Informatique
Faculté des sciences
Rabat

CORRIGES DE PROBLEMES D'EXAMEN D'ANALYSE DE P3

DISTRIBUTIONS ET TRANSFORMEES DE FOURIER ET DE LAPLACE

Pr. A . Bourass

1 (Janvier 99)

..

Exercice 1

Soit ρ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $0 \leq \rho(x) \leq 1$, $\rho(x) = 1$ si $\mid x \mid \leq 1$ et $\rho(x) = 0$ si $\mid x \mid \geq 2$. On pose $\rho_n(x) = \rho(\frac{x}{n})$, pour $n = 1, 2, ...$ On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, (espace des fonctions Lebesgue intégrables sur $\mathbb{R}$). On pose $f_n = \rho_n f$.

i) Montrer que le support de ρ_n est contenu dans $[-2n, 2n]$

ii) Montrer que $f_n \in L^1(\mathbb{R})$, pour tout $n = 1, 2, ...$

ii) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx \underset{n}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$.

Exercice 2

On munit $I = [-\pi, \pi]$ de la mesure de lebesgue et on considère l'espace $L^2(I)$ des fonctions réelles de carré intégrable sur I , sur lequel on définit le produit scalaire usuel $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)g(x)dx$. On rappelle que la famille $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, n > 1 \right\}$ constitue une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2(I)$ et que $\parallel f \parallel_2^2 = \langle f, f \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)dx$.

i) Calculer $\left\langle x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle, \left\langle x, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle$ et $\left\langle x, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle$

ii) Montrer que $\parallel x + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\sin kx}{k} \parallel_2 \underset{n}{\rightarrow} 0$.

ii) Calculer $\parallel x \parallel_2^2$, puis utiliser i) pour montrer que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par
$f(x) = Y(x)xe^{\lambda x}$, où $Y(x)$ est la fonction d'Heaviside définie sur $\mathbb{R}$ par
$Y(x) = 0$ si $x < 0$ et $Y(x) = 1$ si $x > 0$.

i) Justifier pourquoi f définit-elle une distribution.

ii) Calculer au sens des distributions $\frac{d^2}{dx^2}(\frac{df}{dx} - \lambda f)$.

Exercice 4

Soit la fonction de deux variables réelles $u(t, x) = \frac{Y(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ avec $u(0, x) = 0$.

1) Vérifier que u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer au sens des distributions Du où D est l'opérateur différentiel $D = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

3) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, x)dx = \int_0^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x)dx \ .$$

Solution

Exercice1

i) Il est demandé de montrer une inclusion, ce qui est toujours plus facile qu'une égalité, ne serait-ce que parcequ'une égalité est une double inclusion. Rappelons que le support d'une fonction est le complémentaire du plus grand ouvert où cette fonction est nulle. Si $x \notin [-2n, 2n]$, on a $\mid \frac{x}{n} \mid > 2$; par conséquent $\rho_n(x) = \rho\left(\frac{x}{n}\right) = 0$. Ainsi, ρ_n est nulle dans l'ouvert $]-\infty, 2n[\cup]2n, +\infty[$ ce qui implique par définition que $supp(\rho_n) \subset [-2n, 2n]$.

ii) Nous disposons de deux moyens pour vérifier qu'une fonction h est intégrable : ou bien on montre que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mid h \mid < +\infty$, ou bien on majore $\mid h \mid$ par une fonction qui est intégrable. Dans notre situation, on a $\mid f_n(x) \mid = \mid \rho_n(x) f(x) \mid \leq \mid f(x) \mid$, d'où le résultat demandé puisque f est intégrable .

iii) Dans cette question, il s'agit de montrer qu'une suite d'intégrales converge vers une intégrale. Dans pratiquement tout les cas, c'est le théorème de convergence dominée de Lebesgue qui permet de résoudre ce genre de problème. Vérifions donc les hypothèses du théorème de Lebesgue. D'après ce qui précède les f_n sont intégrables et $\mid f_n \mid \leq f$, $\forall n \geq 1$, avec f intégrable , Il reste à montrer que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mid x \mid \leq p$. Pour tout $n \geq p$ on a $\rho_n(x) = 1$,(car $\mid x \mid \leq n$) et par suite $f_n(x) = f(x)$ pour tout $n \geq p$. Autrement dit, x étant fixé, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mid f_n(x) - f(x) \mid = 0$ pour tout $n \geq p$. C'est à dire que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le théorème de Lebesgue permet alors d'affirmer que $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

Exercice 2

i) Les quantités à calculer sont les coéficients de la fonction $f(x) = x$ sur la base hilbertienne donnée. les calculs sont élémentaires :

$$\left\langle x, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} \tfrac{x}{\sqrt{2\pi}} dx = 0$$

$$\left\langle x, \tfrac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} \tfrac{x \sin nx}{\sqrt{\pi}} dx = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\tfrac{-x \cos nx}{n} \right)]_{-\pi}^{+\pi} + \tfrac{1}{n\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx dx$$

$$= \tfrac{1}{n\sqrt{\pi}} \left(\tfrac{-x \cos nx}{n} \right)]_{-\pi}^{+\pi} = (-1)^{n+1} \tfrac{2\sqrt{\pi}}{n}.$$

$$\left\langle x, \tfrac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} \tfrac{x \cos nx}{\sqrt{\pi}} dx = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\tfrac{x \sin nx}{n} \right)]_{-\pi}^{+\pi} + \tfrac{1}{n\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx dx = 0$$

ii) Comme la fonction $f(x) = x$ est dans $L^2(I)$, elle s'ecrit dans la base hilbertienne S , $x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$, avec $\varphi_n \in S$. D'après i) , tous les produits $\langle x, \varphi_n \rangle$ sont nuls sauf ceux en $\sin$. On obtient

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \tfrac{2\sqrt{\pi}}{n} \tfrac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \tfrac{\sin nx}{n}$$

. Ces'égalités étant au sens de $L^2(I)$, cela signifie que la série $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$ converge dans l'espace normé $L^2(I)$ vers la fonction x . Et cela s'ecrit

$\|x - 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}\|_2 = \|x + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\frac{\sin kx}{k}\|_2 \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

iii) On a $\|x\|_2^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} x^2dx = \frac{2}{3}\pi^3$. D'autre part, d'après la formule de Bessel-Parceval on a , $\|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mid \left\langle x, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \mid^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi}{n^2}$, (les autres termes sont nuls d'après i)). On a donc $\frac{2}{3}\pi^3 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi}{n^2}$. On en déduit l'égalité demandée $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 3

i) La fonction f étant définie continue partout sur $\mathbb{R}$, sauf peut être en 0 , est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (intégrable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$). Elle définit donc une distribution sur $\mathbb{R}$.

ii) On a $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{df}{dx} - \lambda f\right) = \frac{d^3f}{dx^3} - \lambda\frac{d^2f}{dx^2}$. La fonction $xe^{\lambda x}$ etant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on a

$\frac{df}{dx} = Y'xe^{\lambda x} + Y\left(e^{\lambda x} + \lambda xe^{\lambda x}\right) = Y\left(e^{\lambda x} + \lambda xe^{\lambda x}\right)$,

car $Y'xe^{\lambda x} = \delta xe^{\lambda x} = 0$.

En dérivant une seconde fois, on obtient

$\frac{d^2f}{dx^2} = Y'\left(e^{\lambda x} + \lambda xe^{\lambda x}\right) + Y\left(2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2xe^{\lambda x}\right)$

et tenant compte du fait que $Y'xe^{\lambda x} = \delta xe^{\lambda x} = 0$ et $Y'e^{\lambda x} = \delta$,

on a $\frac{d^2f}{dx^2} = \delta + Y\left(2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2xe^{\lambda x}\right)$. Une troisième dérivation donne

$\frac{d^3f}{dx^3} = \delta' + 2\lambda\delta + Y\left(3\lambda^2e^{\lambda x} + \lambda^3xe^{\lambda x}\right)$. D'où finalement

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{df}{dx} - \lambda f\right) = \delta' + 2\lambda\delta + Y\left(3\lambda^2e^{\lambda x} + \lambda^3xe^{\lambda x}\right) - \lambda\delta + \lambda Y\left(2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2xe^{\lambda x}\right)$$
$$= \delta' + \lambda\delta + \lambda^2Ye^{\lambda x} .$$

Exercice 4

i) Il est clair que la fonction u est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$. Au point $(0,0)$, on a $\lim_{(t,x)\longrightarrow(0,o)} u(t,x) = \lim_{(t,x)\longrightarrow(0,0)}\frac{Y(t)}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} = 0 = u(0,0)$, d'où la continuité en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$. Il reste à vérifier que les dérivées partielles de u sont continues. On a $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{4t\sqrt{\pi t}}\left(\frac{x^2}{2t} - 1\right)$ si $t > 0$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = 0$ si $t < 0$. On voit alors que $\lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = 0 = \lim_{t\longrightarrow 0^-}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)$. D'autre part, le calcul de la dérivée par rapport à x donne $\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = -xY(t)\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{4t\sqrt{\pi t}}$ si $t > 0$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0$ si $t \leq 0$ et on a $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0$, d'où la continuité des dérivées partielles de u .

ii) Puisque u est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$ de classe $\mathcal{C}^2$, les dérivées au sens des distributions et les dérivées au sens des fonctions coincident . On a donc au sens des distributions $Du = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Le calcul de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ donne $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{4t\sqrt{\pi t}}\left(\frac{x^2}{2t} - 1\right)$ si $t > 0$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0$ si $t < 0$. On en déduit que $Du = 0$, en vertu de la question précédente.

iii) On a $\langle Du, \varphi \rangle = 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, puisque $Du = 0$. C'est à dire $\iint_{\mathbb{R}^2} Du(t,x)\varphi(t,x)dtdx = 0$; ce qui implique $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\varphi(t,x)dtdx = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\varphi(t,x)dtdx$. Mais par définition de la dérivée d'une distribution, on a $-\iint_{\mathbb{R}^2} u(t,x)\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x)dtdx = \iint_{\mathbb{R}^2} u(t,x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t,x)dtdx$, égalité équivalente à $-\int_0^\infty dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x)dx = \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t,x)$

---

2 (Janvier 2000)

Exercice 1

On considère la suite de fonctions $f_n(x) = x(1 - \frac{x}{n})^n \ln x \chi_{[0,n]}$, $n \geq 1$ et on admet que la fonction $f(x) = xe^{-x}\ln x$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que $(1 - \frac{x}{n})^n \leq e^{-x}$.

1) Vérifier que $| f_n(x) | \leq | f(x) |$.

2) Montrer que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^n x(1 - \frac{x}{n})^n \ln x dx = \int_0^x xe^{-x}\ln x dx.$

Exercice 2

On munit $L^2([-1,1])$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{+1} f(t)g(t)dt$.

1) Vérifier que les polynômes $X_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $X_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$ et $X_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2 - 1)$ sont orthogonaux deux à deux. Calculer la norme $\| X_1 \|_2$ de X_1 dans $L^2([-1,1])$.

2) Soit V le sous espace vectoriel de $L^2([-1,1])$ engendré par $\{X_0, X_1, X_2\}$ et soit P la projection orthogonale de $L^2([-1,1])$ sur V .Calculer $P(x^3)$ et $P(e^x)$.

Expliquer sans faire de calcul, pourquoi on a les égalités $\int_{-1}^{+1} x^4 dx = \int_{-1}^{+1} xP(x^3)dx$ et $\int_{-1}^{+1} x^2 e^x dx = \int_{-1}^{+1} x^2 P(e^x)dx.$

Exercice 3

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{D}^m$ l'ensemble $\mathcal{D}^m = \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \text{de classe } \mathcal{C}^m \text{ et à support compact}\}$. Une suite $(\varphi_i)_i$ d'éléments de $\mathcal{D}^m$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}^m$ si les φ_i ont leurs support dans un même compact et si pour tout p , $0 \leq p \leq m$ la suite $(\frac{d^p \varphi_i}{dx^p})_i$ converge vers 0 uniformément. On note $\mathcal{D}^{m'}$ le dual de $\mathcal{D}^m$ et on rappelle que $T \in \mathcal{D}^{m'}$ si et seulement si pour toute suite $(\varphi_i)_i$ qui converge vers 0 dans $\mathcal{D}^{m'}$, on a $T(\varphi_i) \longrightarrow 0$.

1) Soit $f \in L^1_{loc}$ et δ la mesure de Dirac. Montrer que T_f et δ appartiennent à $\mathcal{D}^{0'}$. On fixe $m \in \mathbb{N}$ et on définit $S : \mathcal{D}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ par $S(\varphi) = \frac{d^m \varphi}{dx^m}(0)$. Montrer que $S \in \mathcal{D}^{m'}$.

2) Soit $m \geq 0$ et $T \in \mathcal{D}^{m'}$, montrer que $T \in \mathcal{D}'$.

3) Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, montrer que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$ converge. On pose $T(\varphi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$. Montrer que T est une distribution.

Solution

Exercice 1

1) L'inégalité demandée se laisse vérifier sans difficulté. On a
$\left| f_n(x) \right| = \left| x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \right| \leq \left| e^{-x} x \ln x \right| = \left| f(x) \right|$,pour tout $n > 0$ et tout $x \in \left]0, n\right[$.

$|f_n(x)| = 0 \leq | f(x) |$, pour tout $n > 0$ et tout $x \notin \left]0, n\right[$.

2) Il s'agit ici d'étudier la limite d'une suite d'intégrales. Dans de tels situations, l'outil indiqué est le théorème de Lebesgue. Vérifions donc les hypothèses de son application.

i) Les fonctions f_n sont intégrables car elles sont majorées en module par une fonction intégrable.

ii) On a $|f_n(x)| \leq | f(x) |$, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n > 0$, avec f intégrable .

iii) Ensuite, on sait que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$, et que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \chi_{]0,n[} = \chi_{]0,\infty[}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

D'où $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x = e^{-x} x \ln x = f(x) \chi_{]0,\infty[}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Les hypothèses du théorème de Lebesgue sont toutes satisfaites. Par conséquent on a
$\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \chi_{]0,\infty[} dx$, c'est à dire $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \int_0^n x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x dx = \int_0^{\infty} e^{-x} x \ln x dx$.

Exercice 2

1) Il faut vérifier que $\langle X_i, X_j \rangle = \int_{-1}^{+1} X_i(x) X_j(x) dx = 0$, pour tout $i \neq j = 0, 1, 2,$. On a $\langle X_0, X_1 \rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} x dx = 0$

$\langle X_0, X_2 \rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(3x^2 - 1\right) dx = \frac{\sqrt{5}}{4} \left[(x^3 - x) \right]_{-1}^{+1} = 0$

$\langle X_1, X_2 \rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(3x^2 - 1\right) dx = \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{4} \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{+1} = 0$.

Le calcul de la norme de X_1 danx $L^2\left([-1, +1]\right)$ donne $\|X_1\|_2^2 = \langle X_1, X_1 \rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{+1} = 1$, d'où $\|X_1\|_2 = 1$.

2) On a d'après le cours $P(f) = \langle f, X_0 \rangle X_0 + \langle f, X_1 \rangle X_1 + \langle f, X_2 \rangle X_2$, pour tout $f \in L^2\left([-1, +1]\right)$.

i) Pour $f(x) = x^3$, on a $\left\langle x^3, X_0 \right\rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{x^3}{\sqrt{2}} dx = 0$,

$\left\langle x^3, X_1 \right\rangle = \int_{-1}^{+1} x^3 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{+1} = \frac{\sqrt{6}}{5}$,

et $\left\langle x^3, X_2 \right\rangle = \int_{-1}^{+1} x^3 \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} (3x^2 - 1) dx = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left[3\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{+1} = 0.$

On en déduit $P(x^3) = \frac{\sqrt{6}}{5}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x = \frac{3}{5}x$.

ii) Pour $f(x) = e^x$, on obtient $\langle e^x, X_0\rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{e^x}{\sqrt{2}}dx = \frac{e-e^{-1}}{\sqrt{2}}$,

$\langle e^x, X_1\rangle = \int_{-1}^{+1} x\frac{e^x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left([xe^x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{+1} e^x dx\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left[\left(e+e^{-1}\right) - \left(e-e^{-1}\right)\right] = \sqrt{6}e^{-1}$ et

$\langle e^x, X_2\rangle = \int_{-1}^{+1} e^x\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2-1)dx = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left[3\int_{-1}^{+1} x^2e^xdx - \int_{-1}^{+1} e^x dx\right]$.

Une intégration par partie de la première intégrale donne

$\int_{-1}^{+1} x^2e^xdx = e - 3e^{-1}$; et comme $\int_{-1}^{+1} e^xdx = e - e^{-1}$, on aboutit à

$\langle e^x, X_2\rangle = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\left(e - 4e^{-1}\right)$. On en déduit l'expression de $P(e^x)$

$P(e^x) = \frac{e-e^{-1}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{6}e^{-1}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\left(e-4e^{-1}\right)\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2-1)$

$= -\frac{3}{4}e - \frac{9}{2}e^{-1} + 3e^{-1}x + \frac{15}{4}\left(e-4e^{-1}\right)x^2$.

Pour la dernière partie de cette question, remarquons que l'égalité $\int_{-1}^{+1} x^4dx = \int_{-1}^{+1} xP(x^3)dx$ est équivallente à $\int_{-1}^{+1} x(x^3 - P(x^3))dx = 0$. Mais dans l'espace de Hilbert $L^2\left([-1,+1]\right)$, cette dernière égalité s'ecrit $\left\langle x^3 - P(x^3), x\right\rangle = 0$. Ce qui est bien sûr vérifié car $x^3 - P(x^3)$ est orthogonal à V , donc aussi à $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}X_1$ qui est dans V . De même, comme $e^x - P(e^x)$ est orthogonal à V , il est aussi orthogonal à $x^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}X_2 - \frac{2}{\sqrt{5}}X_0$ qui appartient à V . Par conséquent, on a $\left\langle x^2, e^x - P\left(e^x\right)\right\rangle = 0$. C'est à dire $\int_{-1}^{+1} x^2(e^x - P\left(e^x\right))dx = 0$, ou encore de façon équivallente $\int_{-1}^{+1} x^2e^xdx = \int_{-1}^{+1} x^2P\left(e^x\right)dx$.

Exercice 3

1) Il s'agit ici de vérifier que T_f et δ sont bien définies sur $\mathcal{D}^0$ et qu'elles y sont linéaires et cotinues. On a pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^0$, tel que *support*$\varphi \subset [a,b]$ $|T_f(\varphi)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt\right| \leq \int_{\mathbb{R}} \mid f(t) \mid\mid \varphi(t) \mid dt = \int_a^b \mid f(t) \mid\mid \varphi(t) \mid dt \leq \sup\limits_{t\in[a,b]}|\varphi(t)| \int_a^b \mid f(t) \mid dt < +\infty$

car φ est continue donc bornée sur tout interval fermé borné et f est localement intégrable. La linéarité se vérifie sans aucune difficulté en utilisant la linéarité de l'intégrale. Montrons que T_f est continue sur $\mathcal{D}^0$. Soit $(\varphi_i)_i$ une suite dans $\mathcal{D}^0$ qui converge vers 0 dans $\mathcal{D}^0$. Les mêmes majorations que précédemment donnent $|T_f(\varphi_i)| \leq \sup\limits_{t\in[a,b]}|\varphi_i(t)| \int_a^b \mid f(t) \mid dt$. Mais comme $\varphi_i \xrightarrow{\mathcal{D}^0} 0$, on a en particulier $\sup\limits_{t\in[a,b]}|\varphi_i(t)| \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ce qui implique $|T_f(\varphi_i)| \longrightarrow 0$ lorsque $i \longrightarrow \infty$; d'où la continuité de T_f .Le cas de δ se traite de façon analogue puisqu'on a $|\delta(\varphi_i)\mid = |\varphi_i(0)| \leq \sup\limits_{t\in[a,b]}|\varphi_i(t)| \longrightarrow 0$.

L'application S est linéaire sur $\mathcal{D}^m$ car l'opérateur de dérivation $\frac{d^m}{dx^m}$ est linéaire. Montrons la continuité. Soit $(\varphi_i)_i$ une suite dans $\mathcal{D}^m$ qui converge vers 0 dans $\mathcal{D}^m$. Si les supports des φ_i sont tous contenu dans l'intervalle $[a,b]$, on a en particulier $\sup\limits_{t\in[a,b]}\left|\varphi_i^{(m)}(t)\right| \longrightarrow 0$ et donc à fortiori $\left|\varphi_i^{(m)}(0)\right| \longrightarrow 0$, donc $S(\varphi_i) \longrightarrow 0$ par définition de S . Ce qui montre que S est continue sur $\mathcal{D}^m$.

2) Soit $T \in \mathcal{D}^{m'}$, $m \geq 0$. Comme $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^m$, T est bien définie et linéaire sur $\mathcal{D}$. Pour montrer la continuité, considérons une suite $(\varphi_i)_i$ une suite dans $\mathcal{D}$ qui converge vers 0 dans $\mathcal{D}$. Cela implique par définition de la convergence dans $\mathcal{D}$ que les supports des φ_i sont contenus dans un même compact et que pour tout $k \geq 0$, la suite $\left(\varphi_i^{(k)}\right)_i$ converge uniformément vers 0 . Donc en particulier $(\varphi_i)_i$ converge vrs 0 dans $\mathcal{D}^m$. On en déduit que $T(\varphi_i) \longrightarrow 0$, ce qui achève de montrer que T est continue sur $\mathcal{D}$, c'est à dire $T \in \mathcal{D}'$.

3) Si $\varphi \in \mathcal{D}$, puisqu'elle est à support compact, il existe un entier N tel que $\varphi^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout x tel que $|x| \geq N$. On a donc $\varphi^{(n)}(n) = 0$ pour tout $n \geq N$. D'où $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(n) = \sum\limits_{n=0}^{N} \varphi^{(n)}(n) < +\infty$. Si maintenant on pose $T(\varphi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, on vient de voir que T est bien définie sur $\mathcal{D}$. On vérifie sans peine que T est linéaire puisque la série est en fait une somme finie. Montrons la continuité.

$1^{ère}$méthode: Soit K un compact quelconque de $\mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{D}$ à support dans K .On a

$|T(\varphi)| =\leq \sum\limits_{n=0}^{N_\varphi} \left|\varphi^{(n)}(n)\right| \leq N_\varphi P_{K,N_\varphi}(\varphi)$, où $P_{K,N_\varphi}(\varphi) = \sup\left\{\left|\varphi^{(n)}(x)\right|, x \in K, n \leq N_\varphi\right\}$

et N_φ est un entier qui dépend de φ tel que $\varphi^{(n)}(x) = 0$ pour tout n et tout x tel que $|x| \geq N_\varphi$.

$2^{ième}$méthode : Soit $(\varphi_i)_i$ une suite dans $\mathcal{D}$ qui converge vers 0 dans $\mathcal{D}$. Il existe donc un compact K qui contient les supports des φ_i . Soit N un entier tel que $K \subset [-N,N]$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $|T(\varphi_i)| = \left|\sum\limits_{n=0}^{N} \varphi_i^{(n)}(n)\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{N} \left|\varphi_i^{(n)}(n)\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{N} \sup\left\{\left|\varphi_i^{(n)}(x)\right|, x \in K, n \leq N\right\}$

$\leq N \sup\left\{\left|\varphi_i^{(n)}(x)\right|, x \in K, n \leq N\right\}$

Mais comme $\sup\left\{\left|\varphi_i^{(n)}(x)\right|, x \in K, n \leq N\right\} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\varphi_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathcal{D}$, on en déduit finalement que $T(\varphi_i) \longrightarrow 0$, c'est à dire que $T \in \mathcal{D}'$.

____

3 (Janvier 2001)

Exercice1

a) Vérifier que $(1-t)^{\frac{1}{t}} < e^{-1}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 < t < 1$, puis montrer que $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n < e^{-x}$ pour tout $x > 0$.

b) En considérant la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies par $f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}$ si $x \in [0,n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon, montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} dx = 2$.

Exercice2

On rappelle que la famille $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, n\geq 1\right\}$ est une base hilbertienne de $L^2\left([-\pi,\pi]\right)$.

a) Calculer les intégrales

$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}dx$, $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x^2 \sin nx}{\sqrt{\pi}}dx$ et $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x^2 \cos nx}{\sqrt{\pi}}dx$.

b) Expliquer pourquoi $\| 4\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx + \frac{\pi^2}{3} - x^2 \|_2$ tend vers 0 lorsque $n \longrightarrow \infty$.

c) Calculer $\| x^2 \|_2^2$ et utiliser l'égalité de Bessel-Parceval pour montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}$.

Exercice3

Soit la distribution $T = Y(x)e^x$ où Y est la fonction d'Heaviside. Montrer que pour tout $k > 0$, $T^{(k)} = \sum\limits_{i=0}^{k} \delta^{(i)}$ où δ est la distribution de Dirac en 0 .

Exercice 4

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, et dont le support est contenu dans $]1,2[$. On suppose en plus que $\varphi(x) = 1$ pour tout $x \in]a,b[$ où a et b sont des réels tels que $1 < a < b < 2$. On pose $\varphi_n(x) = e^{-n}\varphi(nx)$ pour tout $n \geq 1$.

a) Montrer que $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, pour tout $n \geq 1$.

b) Calculer $\varphi^{(k)}$ (dérivée k^{ième} de φ) et montrer que $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

c) On considère l'application linéaire $T : \mathcal{D}(\Omega) .\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{x^2}}\varphi(x)dx$ où $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.à support dans $\Omega = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

d) Montrer que $T(\varphi_n) \geq e^{-n}\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}} e^{\frac{1}{x^2}}dx$, et que $T(\varphi_n) \geq \frac{b-a}{n}e^n$ pour tout n tel que $n - b^2 \geq b^2$.

e) En calculant $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} T(\varphi_n)$, déduire que $T \notin \mathcal{D}'(\Omega)$ (i.e. T n'est pas une distribution sur Ω) .

Solution

Exercice 1

a) Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction $\ln(1-t)$ entre 0 et t : $\ln(1-t) < -t$. Si $0 < t < 1$, on en déduit $\frac{1}{t}\ln(1-t) < -1$ et en prenant l'exponentielle dans les deux membres, la première inégalité demandée $(1-t)^{\frac{1}{t}} < e^{-1}$ .En remplaçant t par $\frac{x}{n}$, on obtient $\left(1-\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} < e^{-1}$. D'où ,si $x > 0$, $\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n} < e^{-x}$.

b) Soit $f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n} e^{\frac{x}{2}}\chi_{[0,n]}$,pour $n > 0$. On a $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) = e^{-\frac{x}{2}}\chi_{[0,\infty[}$, pour tout $x > 0$,
car $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n} = e^{-x}$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\chi_{[0,n]} = \chi_{[0,\infty[}$.

D'autre part , d'après a) on a, $|\, f_n(x)| \leq e^{-\frac{x}{2}}, \forall n$. Cette inégalité implique au passage que les f_n sont intégrables sur $[0,\infty[$. Nous venons de nous assurer que les hypothèses du théorème de Lebesgue sont satisfaites. On a donc
$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n} e^{\frac{x}{2}}dx = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx = 2.$

Exercice 2

a) Le calcul des intégrales ne présente aucune difficulté . On trouve :
$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}dx = \frac{\pi^2\sqrt{2\pi}}{3}$, $\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{x^2\sin nx}{\sqrt{\pi}}dx = 0$
et $\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{x^2\cos nx}{\sqrt{\pi}}dx = (-1)^n\frac{4\sqrt{\pi}}{n^2}$.

b) La fonctoion $f(x) = x^2$ appartient à $L^2([-\pi,\pi])$. Si on note $\lambda_n = \int_{-\pi}^{+\pi}x^2\varphi_n(x)dx$ où $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, et $\varphi_n(x) = \sin nx$ ou $\varphi_n(x) = \cos nx$, la série de fonctions $\sum\limits_0^\infty \lambda_n\varphi_n$ converge dans $L^2([-\pi,\pi])$ vers x^2. Cela signifie que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left\| \sum\limits_0^n \lambda_i\varphi_i - x^2\right\|_2 = 0$. Tenant compte des calculs faits en a), on obtient $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left\|4\sum\limits_1^n(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2} + \frac{\pi^2}{3} - x^2\right\|_2 = 0$

c) On a $\left\|x^2\right\|_2^2 = \frac{2\pi^5}{5}$. D'autre part d'après l'égalité de Bessel-Parceval on a $\left\|x^2\right\|_2^2 = \sum|\lambda_n|^2 = \frac{2\pi^5}{9} + \sum\limits_1^\infty\frac{16\pi}{n^4}$

Il en résulte $\sum\limits_1^\infty\frac{1}{n^4} = \frac{1}{16}\left(\frac{2\pi^4}{5} - \frac{2\pi^4}{9}\right) = \frac{\pi^4}{9}$.

Exercice 3

Vérifions la formule par récurrence. On a $T' = y'e^x + Ye^x = \delta + T$
car $\delta e^x = \delta$

Supposons que $T^{(k)} = T + \sum\limits_{i=0}^{k-1}\delta^{(i)}$, et dérivons les deux membres,
$T^{(k+1)} = T' + \sum\limits_{i=0}^{k-1}\delta^{(i+1)}$, qui s'écrit en remplaçant $i+1$ par j
$T^{(k+1)} = \delta + T + \sum\limits_{j=1}^{k}\delta^{(j)}$. D'où la formule cherchée $T^{(k+1)} = \delta + \sum\limits_{j=0}^{k}\delta^{(j)}$.

Exercice 4

a) Les φ_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ car φ l'est. De plus si $x \notin \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[$ on a $nx \notin]1, 2[$, donc $\varphi(nx) = 0$, et par suite $\varphi_n(x) = 0$. Par conséquent on a support de φ_n est contenu dans $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ et donc $\varphi_n \in \mathcal{D}$.

b) On a $\varphi_n'(x) = ne^{-n}\varphi'(nx)$, et en dérivant succéssivement jusqu'à l'ordre k , on obtient $\varphi_n^{(k)}(x) = n^k e^{-n}\ \varphi^{(k)}(nx)$. Montrons la convergence dans $\mathcal{D}$. D'après a), pour tout $n > 0$, le support de φ_n est contenu dans $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$, donc toutes les φ_n ont leurs supports contenus dans $[1, 2]$. D'autre part si on pose $K = [1, 2]$ et si $k \in \mathbb{N}$, on a $p_{K,k}(\varphi_n) = \sup\limits_{j\leq k}\sup\limits_{x\in K}\left|\varphi_n^{(j)}(x)\right| \leq \sup\limits_{j\leq k}\sup\limits_{x\in K}\left|\varphi^{(j)}(x)\right| n^k e^{-n} = A_k n^k e^{-n}$, avec $A_k = \sup\limits_{j\leq k}\sup\limits_{x\in K}\left|\varphi^{(j)}(x)\right|$ est une constante qui ne dépend que de k . Il en résulte que $p_{K,k}(\varphi_n) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$

c) comme le support de φ_n est contenu dans $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$, on a

$$T(\varphi_n) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{x^2}}\varphi_n(x)dx = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} e^{\frac{1}{x^2}}\varphi_n(x)dx$$

$$= e^{-n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} e^{\frac{1}{x^2}}\varphi(nx)dx \geq e^{-n}\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}} e^{\frac{1}{x^2}}dx$$

car $\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right] \subset \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$, $0 \leq \varphi(x)$ et $\varphi(nx) = 1$ sur $]a, b[$.

Ensuite, comme $e^{\frac{1}{x^2}}$ est décroissante, on a $e^{\frac{n^2}{b^2}} \leq e^{\frac{1}{x^2}}$ pour tout $x \in \left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$

D'où , $T(\varphi_n) \geq e^{-n}\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}} e^{\frac{1}{x^2}}dx \geq e^{-n}\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}} e^{\frac{n^2}{b^2}}dx = \frac{b-a}{n}e^{-n}e^{\frac{n^2}{b^2}} \geq \frac{b-a}{n}e^n$, pourvu que $\frac{n-b^2}{b^2} \geq 1$.

d) De ce qui précède, il résulte que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} T(\varphi_n) \geq \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{b-a}{n}e^n = +\infty$. Mais cmme on a vu que $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}$, on en déduit que T n'est pas continue, i.e. $T \notin \mathcal{D}'$.

---

4 (Janvier 2002)

1) Soit $(f_k)_k$ une suite de fonctions localement intégrables convergeant simplement vers une fonction f localement intégrable. Montrer en utilisant le théorème de Lebesgue que s'il existe g localement intégrable telle que $|f_k(x)| \leq g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\ et\ \forall k \in \mathbb{N}$, alors la suite de distributions $(T_{f_k})_k$ converge dans $D'(\mathbb{R})$ vers la distribution T_f .

2) On considère la suite de fonction $(f_k)_k$, $k \geq 1$ définie par

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 si\ x < -\frac{1}{2k} \\ kx + \frac{1}{2}\ \text{ si }\ -\frac{1}{2k} \leq x \leq \frac{1}{2k} \\ 1\ \text{ si }\ x > \frac{1}{2k} \end{cases}$$

a) Vérifier que $\forall k \geq 1$, f_k est localement intégrable.

b) Calculer $f_k(0)$ et montrer que la suite $(f_k)_k$ converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$, $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$

c) Montrer en utilisant la question 1) que $T_{f_k} \longrightarrow T_f$ dans $D'(\mathbb{R})$ et vérifier que T_f coincide avec la distribution d'Heaviside.

d)Montrer que si une suite de distributions $(T_n)_n$ converge vers T, la suite des distributions dérivées $(T'_n)_n$ converge vers la dérivée T' de T. En déduire que $T'_{f_k} \longrightarrow \delta$ dans $D'(\mathbb{R})$.

e) Calculer $f'_k(x)$ et utiliser d) pour déterminer la limite dans $D'(\mathbb{R})$ de la suite $(k\pi(kx))_k$ lorsque $k \longrightarrow \infty$

où $\pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad | x |\leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad | x |> \frac{1}{2} \end{cases}$

f) Montrer que $\delta'(x)$ peut être considérée, lorsque $k \longrightarrow \infty$, comme la limite dans $D'(\mathbb{R})$ de la suite $k\left[\delta(x+\frac{1}{2k})-\delta(x-\frac{1}{2k})\right]$.

Solution

1) Soit $\varphi \in \mathcal{D}$. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $h_k(x) = f_k(x)\varphi(x)$ et $h(x) = f(x)\varphi(x)$. On a d'après les hypothèses $h_k(x) \longrightarrow h(x)$, $k \longrightarrow \infty$ et $|h_k(x)| \leq |g(x)\varphi(x)|$. Comme les fonctions $g\varphi$ et les h_k sont intégrables, le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique

$\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} \int h_k(x)\,dx = \int h(x)\,dx$. Autrement dit $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} \langle T_{f_k}, \varphi\rangle = \langle T_f, \varphi\rangle$. Ce qui signifie que $T_{f_k} \longrightarrow T_f$ dans $\mathcal{D}'$.

2) a) On vérifie sans peine que pour tout $k > 0$, les f_k sont continues sur $\mathbb{R}$ puisque $f_k(-\frac{1}{2k}) = 0$ et $f_k(\frac{1}{2k}) = 1$. Donc elles sont localement intégrables et définissent par conséquent des distributions T_{f_k}.

b) On a $T_{f_k}(0) = \frac{1}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Si $x < 0$, il existe n tel que $x < -\frac{1}{2n}$, et alors $f_n(x) = 0$ et $f_k(x) = 0$ pour tout $n \leq k$. Donc $f_k(x) \longrightarrow 0$ pour de tels x. Si $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x > \frac{1}{2n}$, et alors $f_n(x) = 1$ et $f_k(x) = 1$ pour tout $k \geq n$. Donc $f_k(x) \longrightarrow 1$ pour de tels x. En définitive la suite (f_k) converge simplement vers la fonction f qui vaut $f(x) = 0$ si $x < 0$, $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

c) On a $|f_k(x)| \leq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$. Comme la fonction constante identiquement égale à 1 est localement intégrable, les hypothèses de 1) sont toutes satisfaites. Il en résulte que $T_{f_k} \longrightarrow T_f$ dans $\mathcal{D}'$. De plus $T_f = Y$ car $f(x) = Y(x)$ sauf sur l'ensemble $\{0\}$ qui est de mesure de Lebesgue nulle.

d) Si $T_n \longrightarrow T$, on a $\langle T_n, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$ Comme la dérivée φ' est aussi dans $\mathcal{D}$, on a $\langle T_n, \varphi'\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi'\rangle$ et donc aussi $\langle T'_n, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T', \varphi\rangle$, c'est à dire $T'_n \longrightarrow T'$. Il en résulte que $T'_{f_k} \longrightarrow T'_f = Y' = \delta$.

e) On a $f'_k(x) = 0$ si $|x| > \frac{1}{2k}$ et $f'_k(x) = k$ si $|x| \leq \frac{1}{2k}$.

Si on pose $u_k(x) = k\pi(kx)$, on s'aperçoit que $u_k(x) = f'_k(x)$. Comme $T'_{f_k} = T_{f'_k} = T_{u_k}$, on en déduit d'après d) que $T_{u_k} \longrightarrow \delta$ dans $\mathcal{D}'$.

f) Rappelons que si h est une fonction qui présente des discontinuités aux points a et b avec des sauts respectfs s_1 et s_2, alors $T'_h = h' + s_1\delta_a + s_2\delta_b$, où h' est la dérivée de h en tant que fonction. La fonction $u_k(x) = k\pi(kx)$ a des discontinuités en $x = -\frac{1}{2k}$ et en $x = \frac{1}{2k}$ avec un saut égal à k. Donc $T'_{u_k} = k\delta_{-\frac{1}{2k}} + k\delta_{\frac{1}{2k}}$. Comme $T_{u_k} \longrightarrow \delta$, on a $T'_{u_k} \longrightarrow \delta'$, c'est à dire

$k\left(\delta_{-\frac{1}{2k}} + \delta_{\frac{1}{2k}}\right) \longrightarrow \delta'$ lorsque $k \longrightarrow \infty$.

---

5 (Janvier 2003)

Exercice1

On rappelle que la famille $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, n \geq 1\right\}$ est une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi])$.

1) Calculer $\int_0^{2\pi} e^{(1+in)x}dx$ et en déduire les valeurs de $\left\langle e^x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle$, $\left\langle e^x, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle$ et $\left\langle e^x, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle$ pour $n \geq 1$. (Le $\langle , \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2([0, 2\pi])$) .

2) Montrer que $\| e^x - \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2}\cos kx - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1+k^2}\sin kx\right) \|_2$ tend vers 0 lorsque $n \longrightarrow +\infty$ où $\| \, . \, \|_2$ désigne la norme de $L^2([0, 2\pi])$.

3) Calculer $\| e^x \|_2^2$ et en déduire que $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2} = \frac{\pi}{2}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}$.

4) Soit F le sous-espace vectoriel de $L^2([0, 2\pi])$ engendré par $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\right\}$. Déterminer la projection P_F de e^x sur F .

Exercice2

A- Soit la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{\sin^2 nx}{nx^2}$, $n \geq 1$, définie par $f_n(x) = \frac{\sin^2 nx}{nx^2}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.

1) Montrer que f_n définit une distribution T_{f_n} , pour tout $n \geq 1$.

2) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

a) Montrer que $\frac{\sin^2 t}{t^2}\varphi(\frac{t}{n}) \longrightarrow \frac{\sin^2 t}{t^2}\varphi(0)$ lorsque $n \longrightarrow \infty$, et que $\left|\frac{\sin^2 t}{t^2}\varphi(\frac{t}{n})\right| \leq M\frac{\sin^2 t}{t^2}$ où M est une constante positive qui dépend de φ .

b) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 nx}{nx^2}\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 t}{t^2}\varphi(\frac{t}{n})dt$.

3) Déduire de ce qui précède que $T_{f_n} \longrightarrow \pi\delta$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. (On admettra que $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 t}{t^2}dt = \pi$) .

B- Soit $g_n(x) = ne^{-n|x|}$, $n \geq 0$. En utilisant une démarche analogue à celle de A, calculer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, la limite de la suite $(T_{g_n})_n$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

Solution

Exercice 1

1) On a $\int\limits_0^{2\pi} e^{(1+in)x}dx = \frac{1}{1+in}\left(e^{(1+in)2\pi}-1\right) = \frac{1}{1+in}\left(e^{2\pi}-1\right)$

$= \frac{e^{2\pi}-1}{1+n^2} - i\ \frac{n(e^{2\pi}-1)}{1+n^2}$.

En remarquant que $e^{(1+in)x} = e^x e^{inx}$ et que $\cos nx + i\sin nx = e^{inx}$, il en résulte

$\left\langle e^x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{2\pi} e^x dx = \frac{e^{2\pi}-1}{\sqrt{2\pi}}.$

et $\left\langle e^x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right\rangle + i\left\langle e^x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{2\pi} e^x\left(\cos nx + i\sin nx\right)dx$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{2\pi} e^{(1+in)x}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{e^{2\pi}-1}{1+n^2} - i\frac{n(e^{2\pi}-1)}{1+n^2}\right]$

D'où $\left\langle e^x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{2\pi}-1}{1+n^2}$, et $\left\langle e^x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{n(e^{2\pi}-1)}{1+n^2}$

2) Les expressions calculées ci-dessus représentent les cefficients de la fonction e^x dans la base hilbertienne $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, n \geq 1\right\}$ de $L^2[0,2\pi]$. Il en résulte que $e^x = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2}\cos kx - \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{1+k^2}\sin kx\right]$ dans $L^2[0,2\pi]$. C'est à dire que la série précédente converge dans $L^2[0,2\pi]$ vers la fonction e^x . Cela s'écrit

$\left\|e^x - \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k^2}\cos kx - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{1+k^2}\sin kx\right]\right\|_2 \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$.

3) On a $\|e^x\|_2^2 = \int\limits_0^{2\pi} e^{2x}dx = \frac{e^{4\pi}-1}{2}$. De l'égalité de Bessel-Parceval

$\frac{e^{4\pi}-1}{2} = (\frac{e^{2\pi}-1}{\sqrt{\pi}})^2\left[\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{1+k^2})^2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{k}{1+k^2})^2\right] = (\frac{e^{2\pi}-1}{\sqrt{\pi}})^2\left[\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k^2}\right]$

on déduit $\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k^2} = \frac{\pi}{2}\frac{e^{4\pi}-1}{(e^{2\pi}-1)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{(e^{2\pi}-1)(e^{2\pi}+1)}{(e^{2\pi}-1)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}.$

4) Soit F le sous espace engendré par $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x\right\}$

On sait que la projection $P_F(e^x)$ de e^x sur F s'ecrit

$P_F(e^x) = \left\langle e^x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \left\langle e^x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x\right\rangle\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x + \left\langle e^x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x\right\rangle\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x$

D'où $P_F(e^x) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}(1 + \cos x - \sin x).$

Exercice 2

A- 1) Pour tout $n > 0$, la fonction f_n est localement intégrable car elle est continue partout sauf peut être en 0 où elle est finie. Donc elle définit une distribution T_{f_n}.

2) a) pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, $\frac{\sin^2 t}{t^2}\varphi\left(\frac{t}{n}\right) \longrightarrow \frac{\sin^2 t}{t^2}\varphi(0)$

car $\varphi\left(\frac{t}{n}\right) \longrightarrow \varphi(0)$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

De plus on a $\left|\frac{\sin^2 t}{t^2}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right| \leq \frac{\sin^2 t}{t^2}\sup\left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right| = M\frac{\sin^2 t}{t^2}.$

b) Dans l'intégrale $\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2 nx}{nx^2}\varphi(x)\,dx$, effectuons le changement de variable $nx = t$. On a

$\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2 nx}{nx^2}\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2 t}{t^2}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)dt$.

3) Il s'agit ici de montrer que $T_{f_n}(\varphi) \longrightarrow \pi\varphi(0)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$.

C'est à dire $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 nx}{nx^2}\varphi(x)\,dx \longrightarrow \pi\varphi(0)$ .En tenant compte de b) et du fait que $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 t}{t^2}dt = \pi$, cela revient à montrer que $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 t}{t^2}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)dt \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 t}{t^2}\varphi(0)\,dt$. Comme souvent, lorsqu'il s'agit de limite d'une suite d'intégrales, le théorème de Lebesgue est l'outil adéquat pour se tirer d'affaire. Vérifions que les hypothèses de son application sont satisfaites. Posons $h_n(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)$. D'après a) on a $h_n(t) \longrightarrow \frac{\sin^2 t}{t^2}\varphi(0)$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ et $|\, h_n(t)| \le M\frac{\sin^2 t}{t^2}$, la fonction $M\frac{\sin^2 t}{t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$. On a donc $\int_{\mathbb{R}} h_n(t)dt \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 t}{t^2}\varphi(0)\,dt$, c'est à dire ce qui est demandé $T_{f_n} \longrightarrow \pi\delta$.

B- Opérons de la même manière pour $g_n(x) = ne^{-n|x|}$ qui définissent des distributions pour la même raison que ci-dessus. En faisant le changement de variable $t = nx$ on a

$\int\limits_{\mathbb{R}} ne^{-n|x|}\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|t|}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)dt$

On a $e^{-|t|}\varphi\left(\frac{t}{n}\right) \longrightarrow e^{-|t|}\varphi(0)$ lorsque $n \longrightarrow \infty$,

et $\left|e^{-|t|}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right| \le Me^{-|t|}$, avec $M = \sup|\varphi(x)|$

Comme $e^{-|t|}$ est intégrable, on peut appliquer le théorème de Lebesgue et on obtient alors

$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|t|}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)dt \longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|t|}\varphi(0)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{t}\varphi(0)\,dt + \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-t}\varphi(0)\,dt = 2\varphi(0)$

Il en résulte que $\langle T_{g_n}, \varphi\rangle \longrightarrow \langle 2\delta, \varphi\rangle$ et donc $T_{g_n} \longrightarrow 2\delta$.

---

6 (mai 99)

Exercice 1

Pour tout $n \ge 0$, on pose $T_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\delta_k$, où δ_k est la distribution de Dirak au point $x = k$.

1) Montrer que T_n est une distribution à support compact. Quel est son support? Expliquer pourquoi T_n est tempéréé.

2) Vérifier que $T = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\delta_k$ est tempérée et montrer que la suite de distributions $(T_n)_n$ converge dans $\mathcal{S}'$ vers T .

3) Montrer que la suite des convolées $(T_n * T_n)_n$ converge dans $\mathcal{S}'$ vers $T * T$. (On pourra utiliser les propriétés de la transformée de Fourier et de son inverse et obtenir le résultat sans faire le calcul de $T_n * T_n$).

4) Calculer la transformée $\mathcal{F}(T_n)(\lambda)$ de T_n en $\lambda \in \mathbb{R}$, puis en admettant que $T * T = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(k+1)\delta_k$, calculer $\mathcal{F}(T * T)(\lambda)$. En déduire la formule de multiplication des séries

$$(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2i\pi k\lambda})\left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2i\pi k\lambda}\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)e^{-2i\pi k\lambda}\right).$$

5) Soit la distribution S dont le support est contenu dans $[0,+\infty[$ et telle que $S' = T$. Verifier que $\delta'' * (S * S) = T * T$. Montrer que

$S * S = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(x-k)Y(x-k)$, où Y est la fonction de Heaviside définie par $Y(t) = 0$ si $t < 0$ et $Y(t) = 1$ si $t > 0$.

Exercice 2

On pose $T = \sum_{k=0}^{+\infty} e^k \delta_k$.

1) Vérifier que T est une distribution .

2) Montrer que T admet une transformée de Laplace qu'on calculera.

3)A l'aide de la transformation de Laplace, résoudre dans D'_+ l'équation différentielle:

$$y'' - 2y\prime + 2y = \sum_{k=0}^{+\infty} e^k \delta_k$$

Solution

Exercice 1

1) La distribution $T_n = \sum_{k=0}^{n} \delta_k$ est une somme d'un nombre fini de distributions à supports compacts, donc elle est elle-même à support compact, puisque l'espace $\mathcal{E}'$ des distributions à support compact est un espace vectoriel. On peut aussi le vérifier directement en utilisant la définition du support d'une distribution. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}'$ à support dans le complémentaire de $\{0, 1, ...n\}$ .On a $T_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \delta_k(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(k) = 0$. Par conséquent le support de T_n est contenu dans $\{0, 1, ...n\}$.

On sait d'après le cours que toute distribution à support compact est tempérée, donc $T_n \in \mathcal{S}'$.

2) soit $T = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k$ et $\varphi \in \mathcal{S}$, montons que $T(\varphi)$ est bien définie. Puisque $\varphi \in \mathcal{S}$ on a $\lim_{|x| \longrightarrow \infty} \left|x^2\varphi(x)\right| = 0$. Il existe donc un réel $A > 0$ tel que $\left|x^2\varphi(x)\right| \leq 1$ dès que $|x| \geq A$, ou encore $|\varphi(x)| \leq \frac{1}{x^2}$ pour tout $|x| \geq A$. Ainsi, pour tout $k \geq A$, $k \in \mathbb{N}$, on a $|\varphi(k)| \leq \frac{1}{k^2}$. D'où $|T(\varphi)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\delta_k(\varphi)| \leq \sum_{k=0}^{[A]} \varphi(k) + \sum_{k=[A]+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$. Montrons à présent que $T_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} T$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}$, il faut vérifier que $T_n(\varphi) \longrightarrow T(\varphi)$. On a $T_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \delta_k(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(k)$ et $\lim_n \sum_{k=0}^{n} \varphi(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) = T(\varphi)$.

3) L'énoncé suggère d'éviter de faire des calculs. D'après ce qui précède on sait que $T_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} T$, donc $\mathcal{F}(T_n) \xrightarrow{\mathcal{S}'} \mathcal{F}(T)$. Il en résulte que

$\mathcal{F}(T_n)\mathcal{F}(T_n) \xrightarrow{\mathcal{S}'} \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(T)$. Appliquons la transformée de Fourier inverse ,

$\overline{\mathcal{F}}\left[\mathcal{F}(T_n)\mathcal{F}(T_n)\right] \xrightarrow{\mathcal{S}'} \overline{\mathcal{F}}\left[\mathcal{F}(T)\mathcal{F}(T)\right]$, c'est à dire

$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T_n * \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T * \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T$, ce qui est équivalent à $T_n *\ T_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} T * T$.

4) On a $\mathcal{F}T_n(\lambda) = \mathcal{F}(\sum\limits_{k=0}^{n} \delta_k)(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathcal{F}(\delta_k)(\lambda)$.

Comme $\mathcal{F}(\delta_k)(\lambda) = \left\langle \delta_k, e^{-2i\pi\lambda x}\right\rangle = e^{-2i\pi\lambda k}$, on a $\mathcal{F}T_n(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{-2i\pi\lambda k}$.

Calculons $\mathcal{F}(T*T)$. On a $\mathcal{F}(T*T) = \mathcal{F}\left[\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)\,\delta_k\right] = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)\,\mathcal{F}\delta_k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,e^{-2i\pi\lambda k}$$

La formule de multiplication des séries s'en déduit en remarquant que $\mathcal{F}(T*T) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(T)$

On obtient $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda k}\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda k}\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)\,e^{-2i\pi\lambda k}$.

5) Soit $S \in \mathcal{D}'_+$ telle que $S' = T$. On a $\delta'' * (S*S) = (S*S)''$

$$= S' * S' = T * T$$

Appliquons la transformée de Laplace aux premier et dernier membre des égalités précédentes

$\mathcal{L}\left(\delta''\right)\mathcal{L}(S*S)(p) = \mathcal{L}(T*T)(p) = \mathcal{L}\left[\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)\,\delta_k\right](p)$

D'où $\mathcal{L}(S*S)(p) = \mathcal{L}\left[\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)\,\delta_k\right](p)\left[\mathcal{L}\left(\delta''\right)\right]^{-1}$

Des relations $\left[\mathcal{L}\left(\delta''\right)\right]^{-1} = \frac{1}{p^2}$ et $\mathcal{L}\left(Y\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)(p) = \frac{1}{p^\alpha}$, et donc en particulier $\mathcal{L}(Yt)(p) = \frac{1}{p^2}$, on déduit

$\mathcal{L}(S*S)(p) = \mathcal{L}(Yt)(p)\mathcal{L}\left[\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)\,\delta_k\right](p) = \mathcal{L}\left[\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)\,\delta_k * Yt\right](p)$

et par conséquent $S*S = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)\,\delta_k * Yt = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)(x-k)\,Y(x-k)$

Exercice 2

Soit la distribution $T = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^n \delta_n$

1) Vérifions que $T \in \mathcal{D}'$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que le support de φ est contenu dans $[-k,k]$. On a $|\langle T,\varphi\rangle| = \left|\sum\limits_{n=0}^{k} e^n \varphi(n)\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{k} e^n\,|\varphi(n)| \leq \sup|\varphi(x)| \sum\limits_{n=0}^{k} e^n$, qui montre que T est bien continue sur $\mathcal{D}$.

2) Pour que T admette une transformlée de Laplace il suffit que $e^{-x}T$ soit une distribution tempérée. Soit donc $\varphi \in \mathcal{S}$. On a $|\langle e^{-x}T, \varphi \rangle| = \left| \left\langle e^{-x} \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^n \delta_n, \varphi \right\rangle \right| = \left| \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^n e^{-n} \varphi(n) \right| \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} |\varphi(n)| < +\infty$

car $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\varphi(n)| \leq \sum\limits_{n=0}^{k} |\varphi(n)| + \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, du fait que $\varphi \in \mathcal{S}$.

Ainsi, $\mathcal{L}T(p) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^n \mathcal{L}\delta(p) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n(p-1)}$.

3) Appliquons la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle

$y'' - 2y' + 2y = T$. On a $\mathcal{L}\ y''(p) - 2\mathcal{L}y'(p) + 2\mathcal{L}y(p) = \mathcal{L}T(p)$

Et avec les formules de dérivations

$\mathcal{L}\ y''(p) = p^2 \mathcal{L}y(p) - py(0) - y'(0)$ et $\mathcal{L}y'(p) = p\mathcal{L}y(p) - y(0)$, on obtient

$\left(p^2 - 2p + 2\right) \mathcal{L}y(p) - (p-2)\, y(0) - y'(0) = \mathcal{L}T(p)$

D'où $\mathcal{L}y(p) = \frac{1}{(p-1)^2+1} \mathcal{L}T(p) + \frac{p-1}{(p-1)^2+1} y(0) + \frac{1}{(p-1)^2+1} [y'(0) - y(0)]$

En remarquant que

$\frac{1}{(p-1)^2+1} = \mathcal{L}[Y(t)\sin t](p-1)$ et $\frac{p-1}{(p-1)^2+1} = \mathcal{L}[Y(t)\cos t](p-1)$, on a

$$\mathcal{L}y(p) = \mathcal{L}T(p)\, \mathcal{L}[Y(t)\sin t](p-1) + y(0)\mathcal{L}[Y(t)\cos t](p-1) + \\ + [y'(0) - y(0)]\, \mathcal{L}[Y(t)\sin t](p-1)$$

Comme $\mathcal{L}(f)(p-1) = \mathcal{L}\left(e^t f)(p)\right)$, on obtient

$\mathcal{L}y(p) = \mathcal{L}T(p)\, \mathcal{L}[Y(t)e^t \sin t](p) + y(0)\mathcal{L}[Y(t)e^t \cos t](p) + [y'(0) - y(0)]\, \mathcal{L}[Y(t)e^t \sin t](p)$

qui donne finalement $y = T * Y(t)e^t \sin t + y(0)Y(t)e^t \cos t + [y'(0) - y(0)]\, Y(t)e^t \sin t$

Un calcul simple donne $e^n \delta_n * Y(t)e^t \sin t = e^t Y(t-n)\sin(t-n)$

On obtient finalement la solution

$$y(t) = e^t \left[\sum_{n=0}^{[t]} Y(t-n)\sin(t-n) + y(0)Y(t)\cos t + [y'(0) - y(0)]\, Y(t)\sin t \right]$$

---

7 (Mai 2000)

Exercice1

1) Montrer que la fonction $f(x) = x$ définit une distribution tempérée. Calculer sa transformée de Fourier $\mathcal{F}f$.

2) Soit $T \in \mathcal{S}'$, espace des distributions tempérées. En utilisant la transformation de Fourier, montrer que les solutions de l'équation $xT = 0$ sont de la forme $T = c\delta$, où δ est la distribution de Dirac et c une constante.

Exercice2

1) Calculer les transformées de Fourier des distributions suivantes :

δ_a , $e^{2i\pi x}$, $e^{-2i\pi x}$, $\cos 2i\pi x$ et $\sin 2i\pi x$.

2) Soit la fonction $f(x) = -\frac{\cos 2\pi x}{\pi^2 x^2} + \frac{\sin 2\pi x}{2\pi^3 x^3}$. Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$.

3) On pose $g(x) = (-2i\pi x)^3 f(x)$. Calculer la transformée de Fourier $\mathcal{F}g(\lambda)$ de g . En déduire que $\mathcal{F}f$ vérifie une équation différentielle du $3^{ième}$ ordre.

4) i) Calculer l'inverse de δ''' dans $\mathcal{D}'_+$.

ii) Résoudre l'équation précédente dans $\mathcal{D}'_+$.

iii) On note $u(\lambda)$ la solution touvée en ii). Montrer que $u(\lambda) = (\lambda^2 - 1)\,[Y(\lambda - 1) - Y(\lambda + 1)]$ où Y est la fonction de Heaviside.

5) Déterminer le support de $u(\lambda)$.

6) En utilisant la définition de la transformée de Fourier inverse $\overline{\mathcal{F}}$ calculer $\overline{\mathcal{F}}u(x)$ et retrouver f .

Solution

Exercice 1

1) La fonction $f(x) = x$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ car elle y est continue. Elle définit donc une distribution. Comme de plus on a $|f(x)| \leq 2\,|x|$ la distribution qu'elle définit est tempérée. Sa transformée de Fourier est $[\,\mathcal{F}x]\,(\lambda) = -\frac{1}{2i\pi}\,[\,\mathcal{F}(-2i\pi x)1]\,(\lambda) = -\frac{1}{2i\pi}\,[\,\mathcal{F}1]'\,(\lambda) = -\frac{1}{2i\pi}\delta'$.

2) Comme $\mathcal{F}xT = 0$, on a $\mathcal{F}x * \mathcal{F}T = 0$. D'où en tenant compte du calcul précédent $-\frac{1}{2i\pi}\delta' * \mathcal{F}T = 0$, ou encore $\delta * (\,\mathcal{F}T)' = 0$, qui équivaut à $(\,\mathcal{F}T)' = 0$. On en déduit que $\mathcal{F}T = c$, où c est une constante. En prenant la transformée de Fourier inverse des deux membres on obtient $T = \overline{\mathcal{F}}\,\mathcal{F}T = c\,\overline{\mathcal{F}}1 = c\delta$.

Exercice2

1) La distribution δ_a est à support compact, donc $\mathcal{F}\delta_a(\lambda) = \left\langle\, \delta_a, e^{-2i\pi\lambda x}\right\rangle = e^{-2i\pi\lambda a}$.

On a de même $\overline{\mathcal{F}}\delta_1(x) = \left\langle\, \delta_1, e^{2i\pi x\lambda}\right\rangle = e^{2i\pi x}$.

D'où $\mathcal{F}e^{2i\pi x} = \delta_1$ et $\mathcal{F}e^{-2i\pi x} = \delta_{-1}$. Partant de là et utilisant les expression des fonctions cos et sin sous forme exponentielle, on déduit

$$\mathcal{F}\cos 2\pi x = \mathcal{F}\left(\frac{e^{2i\pi x} + e^{-2i\pi x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\delta_1 + \delta_{-1}\right)$$

et $$\mathcal{F}\sin 2\pi x = \mathcal{F}\left(\frac{e^{2i\pi x} - e^{-2i\pi x}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\left(\delta_1 - \delta_{-1}\right).$$

2) Un développement limité de la fonction f au voisinage de 0 donne

$$f(x) = -\frac{1}{\pi^2 x^2}\left(1 - \frac{4\pi^2 x^2}{2}\right) + \frac{1}{2\pi^3 x^3}\left(2\pi x - \frac{8\pi^3 x^3}{6}\right) + \epsilon(x) = 2 - \frac{2}{3} + \epsilon(x)$$

avec $\epsilon(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$. D'où $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = \frac{4}{3}$.

On peut donc définir $f(0)$ par prolongement continu.

3) On a $g(x) = (-2i\pi x)^3\left(-\frac{\cos 2\pi x}{\pi^2 x^2} + \frac{\sin 2\pi x}{2\pi^3 x^3}\right) = -8i\pi x \cos 2\pi x + 4i \sin 2\pi x$

et
$$\begin{aligned} \mathcal{F}g(\lambda) &= 4\,\mathcal{F}(\,-2i\pi x \cos 2\pi x)(\lambda) + 4i\,\mathcal{F}(\sin 2\pi x)(\lambda) \\ &= 4\,[\,\mathcal{F}\cos 2\pi x]'\,(\lambda) + 4i\,\mathcal{F}(\sin 2\pi x)(\lambda) \\ &= 4\left(\tfrac{1}{2}\left(\delta_1 + \delta_{-1}\right)'\right) + 4i\left(\tfrac{1}{2i}\delta_1 - \delta\right). \end{aligned}$$

Et finalement $\mathcal{F}g(\lambda) = 2\left(\delta_1 - \delta_{-1} + \delta'_1 + \delta'_{-1}\right)(\lambda)$.

D'autre part on a $\mathcal{F}g(\lambda) = \mathcal{F}((-2i\pi x)^3 f) = (\,\mathcal{F}f)'''\,(\lambda)$.

D'où l'équation différentielle vérifiée par $\mathcal{F}f$:

$(\mathcal{F}f)''' = 2\left(\delta_1 - \delta_{-1} + \delta'_1 + \delta'_{-1}\right)$

4) i) Utilisons la transformée de Laplace et le calcul symbolique pour calculer l'inverse de δ'''.

On a $\left(\delta'''\right)^{-1} * \delta''' = \delta$, d'où $\mathcal{L}\left(\delta'''\right)^{-1} \mathcal{L}\left(\delta'''\right) = \mathcal{L}(\delta)$

et $\mathcal{L}\left(\delta'''\right)^{-1} = \frac{1}{\mathcal{L}\left(\delta'''\right)} = \frac{1}{p^3}$

Mais comme $\mathcal{L}(Y\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)})(p) = \frac{1}{p^\alpha}$, on en déduit $\left(\delta'''\right)^{-1} = Y\frac{t^2}{\Gamma(3)} = Y\frac{t^2}{2}$.

ii) De la relation $(\mathcal{F}f)''' = \delta''' * \mathcal{F}f$, on déduit

$\mathcal{F}f = 2 * \left(\delta_1 - \delta_{-1} + \delta'_1 + \delta'_{-1}\right)$

Effectuons alors les calculs en remplaçant $\left(\delta'''\right)^{-1}$ par sa valeur

$\mathcal{F}f\,(\lambda) = \left(Y(t)t^2 * \delta_1\right)(\lambda) + \left(Y(t)t^2 * \delta'_1\right)(\lambda) - \left(Y(t)t^2 * \delta_{-1}\right)(\lambda) + \left(Y(t)t^2 * \delta'_{-1}\right)(\lambda)$

$= \left[Y(t)t^2 + \left(Y(t)t^2\right)'\right] * \delta_1(\lambda) - \left[Y(t)t^2 - \left(Y(t)t^2\right)'\right] * \delta_{-1}(\lambda)$

$= \left[Y(t)t^2 + 2Y(t)t\right] * \delta_1(\lambda) - \left[Y(t)t^2 - 2Y(t)t\right] * \delta_{-1}(\lambda)$

$= Y(\lambda-1)(\lambda-1)^2 + 2Y(\lambda-1)(\lambda-1) - \left[Y(\lambda-1)(\lambda+1)^2 - 2Y(\lambda+1)(\lambda+1)\right]$

$= Y(\lambda-1)(\lambda^2-1) - Y(\lambda+1)(\lambda^2-1) = (\lambda^2-1)\left[Y(\lambda-1) - Y(\lambda+1)\right]$

iii) On s'aperçoit que $c(\lambda)$ est bien la solution trouvée ci-dessus

5) On a $Y(\lambda-1) \neq 0$ si et seulement si $\lambda \geq 1$, et $Y(\lambda+1) \neq 0$ si et seulement si $\lambda \geq -1$.

Donc $c(\lambda) = 0$ si $\lambda < -1$ ou $\lambda > 1$, Par conséquent le support de $c(\lambda)$ est $[-1, 1]$.

6) On vient de voir au 4) iii) que $c(\lambda) = \mathcal{F}f\,(\lambda)$. Prenons la transformée de Fourier inverse des deux membres de cette égalité,

$\left[\overline{\mathcal{F}}c(\lambda)\right](x) = \left[\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(\lambda)\right](x) = f(x)$.

---

8 (Mai 2001)

Exercice1

Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre l'équation différentielle $ty'' + (1-2t)\,y' - 2y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Exercice2

Si A est une distribution sur $\mathbb{R}$, on note A^{*n} la distribution $A * A * \cdots * A$, n fois. Soit B une autre distribution, vérifier que

$(A+B)^{*2} = A^{*2} + 2A * B + B^{*2}$. On admet que cette formule se généralise pour n (car le produit de convolution est commutatif et associatif) comme suit

$(A+B)^{*n} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n A^{*k} * B^{*n-k}$. On note δ_a la distribution de Dirac au point a et on définit par récurrence la suite de distributions

$(T_n)_n :\ T_1 = \frac{1}{2}\left(\delta_1 + \delta_{-1}\right)$, $T_n = T_{n-1} * T_1$.

1) a et b étant deux réels quelconques, vérifier que $\delta_a + \delta_b = \delta_{a+b}$ et que $T_n = T_1^{*n}$ puis montrer que $T_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_k^n \delta_{2k-n}$.

2) Assurez-vous que T_n est à support compact , puis calculer les transformées de Fourier $\mathcal{F}T_1(\lambda)$ de T_1 et $\mathcal{F}T_n(\lambda)$ de T_n . (On pourra utiliser la relation $T_n = T_1^{*n}$) .

3) Pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n(\lambda) = \mathcal{F}T_n\left(\frac{\lambda}{2\pi\sqrt{n}}\right)$.

a) Vérifier que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \ln f_n(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{2}$.

b) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $h_n(\lambda) = f_n(\lambda)\varphi(\lambda)$. Vérifier que $\mid h_n(\lambda) \mid \leq \mid \varphi(\lambda) \mid$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et utiliser le théorème de Lebesgue (on vérifiera soigneusement les hypothèses) pour montrer que la suite de distributions $(f_n)_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution $e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$.

4) Justifier pourquoi $f_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (distribution tempérée) ainsi que $e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$. On pose $g_n = \overline{\mathcal{F}} f_n$, montrer que la suite de distributions $(g_n)_n$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers une distribution que l'on déterminera.

Solution

Exercice 1

Appliquons la transformée de Laplace à l'équation donnée,

$\mathcal{L}(ty'') + \mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(-ty') - 2\mathcal{L}(y) = 0$

qui donne en utilisant les formules de dérivation liées à la transformée de Laplace

$-\mathcal{L}'(y'') + \mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}'(y') - 2\mathcal{L}(y) = 0$

$-\left[p^2\mathcal{L}(y) - py(0) - y'(0)\right]' + p\mathcal{L}(y) - y(0) + 2\left[p\mathcal{L}(y) - y(0)\right]' - 2\mathcal{L}(y) = 0$

Tenant compte des conditions initiales , on obtient

$\left(2p - p^2\right)\mathcal{L}'(y) - p\mathcal{L}(y) = 0$, ou encore $\frac{\mathcal{L}'(y)}{\mathcal{L}(y)} = -\frac{1}{p-2}$.

L'intégration de cette équation différentielle conduit à

$\mathcal{L}(y) = \frac{k}{p-2} = k(Ye^{2t})(p)$ et à $y = ke^{2t}$.

Comme $1 = y(0) = k$, on obtient finalement $y = e^{2t}$.

Exercice 2

La vérification demandée ne présente aucune difficulté, on a

$(A+B)^{*2} = (A+B) * (A+B) = A^{*2} + 2A * B + B^{*2}$.

1) On peut procéder de deux manières

soit par calcul direct

$$\begin{aligned}\langle \delta_a * \delta_b, \varphi\rangle &= \langle \delta_a \otimes \delta_b, \varphi(x+y)\rangle = \langle \delta_a, \langle \delta_b, \varphi(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle \delta_a, \varphi(x+b)\rangle = \varphi(a+b) = \delta_{a+b}(\varphi)\end{aligned}$$

Donc $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

soit en utilisant la transformée de Fourier

$\mathcal{F}(\delta_a * \delta_b) = \mathcal{F}(\delta_a)\mathcal{F}(\delta_b) = e^{-2i\pi\lambda a}e^{-2i\pi\lambda b} = e^{-2i\pi\lambda(a+b)} = \mathcal{F}(\delta_{a+b})$

d'où $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

Pour la deuxième égalité on a

$T_n = T_{n-1} * T_1 = T_{n-2} * T_1 * T_1 = \cdots\cdots = T_{n-k} * T_1^{*k} = \cdots\cdots = T_1^{*n}$

Quant à la dernière formule, on a

$T_n = \left[\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})\right]^n = \frac{1}{2^n} \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \delta_1^{*k} * \delta_{-1}^{*(n-k)}$

Mais d'après ce qui précède on a

$\delta_1^{*k} = \delta_k$ et $\delta_1^{*k} * \delta_{-1}^{*(n-k)} = \delta_{2k-n}$

et finalement $T_n = \frac{1}{2^n} \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \delta_{2k-n}$

2) La distribution T_n est à support compact car elle est somme finie de distributions à supports compacts.

On a $\mathcal{F}T_1(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}\delta_1 + \mathcal{F}\delta_{-1}\right) = \frac{e^{-2i\pi\lambda} + e^{2i\pi\lambda}}{2} = \cos 2\pi\lambda$

et $\mathcal{F}T_n(\lambda) = \mathcal{F}T_1^{*n}(\lambda) = (\mathcal{F}T_1)^n(\lambda) = (\cos 2\pi\lambda)^n$.

3) Le calcul de f_n donne : $f_n(\lambda) = \mathcal{F}T_n\left(\frac{\lambda}{2\pi\sqrt{n}}\right) = \cos^n \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$.

a) On a $\ln f_n(\lambda) = n \ln \cos \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$.

Il résulte de $\cos \frac{\lambda}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{\lambda^2}{2n} + \varepsilon(\frac{\lambda^2}{n})$ et de $\ln(1+t) \sim t$,

que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \ln f_n(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{2}$

b) Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ et $h_n = f_n\varphi$, on a $|h_n(\lambda)| \leq |\varphi(\lambda)|$ car $\left|\cos^n \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right| \leq 1$, et par suite $h_n \in L^1$. D'autre part $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} h_n(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\varphi(\lambda)$ puisque $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f_n(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$ en vertue du a). On peut donc appliquer le théorème de Lebesgue à la suite h_n,

et on obtient $\int_{\mathbb{R}} h_n(\lambda) d\lambda \underset{n}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\varphi(\lambda) d\lambda$, qui signifie que la suite de distributions f_n converge dans $\mathcal{D}'$ vers la distribution $e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$.

4) Les fonctions f_n sont bornées et localement intégrables, elles définissent donc des distributions tempérées ; de même pour $e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$. Comme f_n converge dans $\mathcal{D}'$ vers $e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$, et comme la transformée de fourier est continue sur $\mathcal{S}'$, on a

$g_n = \overline{\mathcal{F}}\, f_n \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}\ e^{-\frac{\lambda^2}{2}} = \sqrt{2\pi}\ e^{-2\pi^2 x^2}$.

----

9 (juin 2002)

Exercice1

On note Y la fonction d'Heaviside. Résoudre en utilisant la transformée de Laplace, l'équatioin différentielle $f''(x) + f(x) = xY(x)$ sous les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = -2$.

Exercice2

a) Montrer que la fonction $Y(x)\sin x$ définit une distribution de $\mathcal{D}'_+$. Justifier alors l'existence du produit de convolution $Y(x)\sin x * Y(x)\sin x$ et le calculer .

b) On considère l'équation différentielle

(E) : $f''(x) + f(x) = Y(x)\sin x$.

i) Ecrire (E) sous forme d'une équation de convolution dans $\mathcal{D}'_+$.

ii) Montrer que (E) admet une solution unique dans $\mathcal{D}'_+$ et la calculer en utilisant le calcul symbolique.

Exercice3

On considère la fonction $f_\alpha(x) = e^{-a|x|} \mid x \mid^{\alpha-1}$ avec $a > 0$ et $\alpha > 0$

a) Vérifier que $f_\alpha(x) = Y(x)e^{-ax}x^{\alpha-1} + Y(-x)e^{ax}(-x)^{\alpha-1}$.

b) Calculer la transformée de Fourier de $f_\alpha(x)$ et de la fonction $x \longrightarrow e^{-a|x|}$. (On rappelle que $\mathcal{F}\left(Y(x)e^{-ax}x^{\alpha-1}\right)(\lambda) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(a+2i\pi\lambda)^\alpha}$ où $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ est la fonction d'Euler) . En déduire la transformée de Fourier inverse de la fonction $\lambda \longrightarrow \frac{1}{a^2+4\pi^2\lambda^2}$.

c) Soit l'équation différentielle

(E') $f''(x) - a^2 f(x) = Y(x)\sin x \quad (a \in \mathbb{R})$

i) Montrer que la fonction $Y(x)\sin x$ définit une distribution tempérée.

ii) En utilisant la transformation de Fourier et son inverse, montrer que (E') admet une solution tempérée qui est donnée par

$f(x) = \frac{1}{2a}e^{-a|x|} * Y(x)\sin x$.

iii) Calculer $f(x)$ en remarquant que

$e^{-a|x|} = Y(x)e^{-ax} + Y(-x)e^{ax}$.

Solution

Exercice 1

Appliquons la transformation de Laplace à l'équation $\frac{d^2f}{dx^2} + f = xY(x)$.

$\mathcal{L}(\frac{d^2f}{dx^2})(p) + \mathcal{L}f(p) = \mathcal{L}[xY(x)](p)$.

Tenant compte du fait que $\mathcal{L}[xY(x)](p) = \frac{1}{p^2}$ (la vérification de cette denière égalité est immédiate par calcul direct ou en utilisant la relation $\mathcal{L}[x1](p) = -\mathcal{L}[-x1](p) = -\mathcal{L}[1]'(p)$), et avec les formules de dérivation , l'équation devient

$p^2\mathcal{L}f(p) - pf(0) - f'(0) + \mathcal{L}f(p) = \frac{1}{p^2}$

$\left(p^2+1\right)\mathcal{L}f(p) = \frac{1}{p^2} + p - 2$

D'où $\mathcal{L}f(p) = \frac{1}{p^2+1}\frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2+1} - 2\frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{2}{p^2+1}$

$= \frac{p}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+1} + \frac{1}{p^2} = \mathcal{L}(Y\cos x - 3Y\sin x + x)$

Et finalement $f(x) = Y\cos x - 3Y\sin x + x.$

Exercice 2

a) La fonction $Y\sin x$ définit une distribution de $\mathcal{D}'_+$ car elle est localement intégrable et à support dans $[0, +\infty]$. Le produit de convolution $Y(x)\sin x * Y(x)\sin x$ existe car la distribution $Y(x)\sin x$ est dans $\mathcal{D}'_+$. On a

$$[Y(x)\sin x * Y(x)\sin x](t) = \int_0^t \sin(t-x)\sin x dx = \frac{1}{2}\int_0^t \cos(2x-t)dx - \frac{t\cos t}{2}$$

$$= Y\frac{\sin t}{2} - Y\frac{t\cos t}{2}$$

b)

i) L'équation proposée $\frac{d^2f}{dx^2} + f = Y(x)\sin x$ s'écrit dans $\mathcal{D}'_+$ $(\delta'' + \delta) * f = Y(x)\sin x$.

ii) Multiplions les deux membres de l'équation précédente par l'inverse de $(\delta'' + \delta)$. On a $f = (\delta'' + \delta)^{-1} * Y(x)\sin x$. Utilisons le calcul symbolique pour calculer $(\delta'' + \delta)^{-1}$. On a $\frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}\right)$. Comme $\left(\delta' - \lambda\delta\right)^{-1} = Ye^{\lambda x}$ (car , rappelons le $\mathcal{L}Ye^{\lambda x} = \frac{1}{p-\lambda}$), on en déduit

$(\delta'' + \delta)^{-1} = \frac{Ye^{ix} - Ye^{-ix}}{2i} = Y(x)\sin x$.

Par conséquent

$$f(t) = [Y(x)\sin x * Y(x)\sin x]\,(t) = Y\frac{\sin t}{2} - Y\frac{t\cos t}{2} \ .$$

Exercice 3

a) On a

$f_\alpha(x) = Y(x)e^{-ax}x^{\alpha-1}$ si $x \geq 0$ et $f_\alpha(x) = Y(-x)e^{ax}(-x)^{\alpha-1}$ si $x \leq 0$

Donc $f_\alpha(x) = Y(x)e^{-ax}x^{\alpha-1} + Y(-x)e^{-a|x|}\left|x\right|^{\alpha-1}$.

b) On a $\mathcal{F}(f_\alpha)(\lambda) = \mathcal{F}\left(Y(x)e^{-ax}x^{\alpha-1}\right)(\lambda) + \mathcal{F}\left(Y(-x)e^{-a|x|}\left|x\right|^{\alpha-1}\right)(\lambda)$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{(a+2i\pi\lambda)^\alpha} + \mathcal{F}\left(Y(-x)e^{-a(-x)}(-x)^{\alpha-1}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{(a+2i\pi\lambda)^\alpha} + \frac{\Gamma(\alpha)}{(a-2i\pi\lambda)^\alpha}$$

La transformée de Fourier de $e^{-a|x|}$ s' obtient à partir de la formule précédente en faisant $\alpha = 1$ et en remarquant que $\mathcal{F}[f(-x)](\lambda) = \mathcal{F}(f)(-\lambda)$
On trouve $\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right)(\lambda) = \frac{2a}{4\pi^2\lambda^2 + a^2}$. La transformée de Fourier inverse de la fonction $\lambda \longrightarrow \frac{2a}{4\pi^2\lambda^2+a^2}$ s'en déduit immédiatement

$$\overline{\mathcal{F}}\left[\frac{2a}{4\pi^2\lambda^2+a^2}\right](x) = \overline{\mathcal{F}}\ \left[\ \mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right)(\lambda)\right](x) = e^{-a|x|} \ .$$

c) Soit l'équation $\frac{d^2f}{dx^2} - a^2 f = Y(x)\sin x$

i) D'après le cours, toute fonction localement intégrable bornée définit une distribution tempérée; c'est le cas de $Y(x)\sin x$.

ii) Appliquons la transformée de Fourier aux deux membres de l'équation (E_2) $f'' - a^2 f = Y(x)\sin x$,

on a $\mathcal{F}f'' - a^2\ \mathcal{F}f = \mathcal{F}Y(x)\sin x$

et comme $\mathcal{F}f'' = (2i\pi\lambda)\,\mathcal{F}f$ on obtient $\mathcal{F}f = \frac{-1}{4\pi^2\lambda^2+a^2}\mathcal{F}Y(x)\sin x$

On en déduit en prenant la transformée de Fourier inverse et en tenant compte du b)

$$f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = \overline{\mathcal{F}}\left[\frac{-1}{4\pi^2\lambda^2+a^2}\mathcal{F}Y(x)\sin x\right] = \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{-1}{4\pi^2\lambda^2+a^2}\right) * \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}Y(x)\sin x$$

$$= -\frac{1}{2a}\ e^{-a|x|} * Y(x)\sin x \ .$$

iii) On a $f(t) = \left[-\frac{1}{2a}\ e^{-a|x|} * Y(x)\sin x\right](t)$

Calculons ce produit de convolution

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{2a}\ e^{-a|t-x|}Y(x)\sin x dx = \int_{0}^{+\infty} -\frac{1}{2a}\ e^{-a|t-x|}\sin x dx$$

$$= -\frac{1}{2a}\int_{0}^{+\infty} e^{-a|t-x|}\sin x dx = -\frac{1}{2a}\int_{0}^{t} e^{-a(t-x)}\sin x dx - \frac{1}{2a}\int_{t}^{+\infty} e^{a(t-x)}\sin x dx$$

$= -\frac{e^{-at}}{2a} \int\limits_0^t e^{ax} \sin x dx - \frac{e^{at}}{2a} \int\limits_t^\infty e^{-ax} \sin x dx$

Une intégration par parties donne

$\int_0^t e^{ax} \sin x dx = -e^{ax} \cos x]_0^t + a \int_0^t e^{ax} \cos x dx$

$= -e^{at} \cos t + 1 + a e^{ax} \sin x]_0^t - a^2 \int_0^t e^{ax} \sin x dx$

D'où $\int_0^t e^{ax} \sin x dx = \frac{e^{at}}{1+a^2} (a \sin t - \cos t) + \frac{1}{1+a^2}$

De même $\int_t^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx = e^{-at} \cos t + a e^{-at} \sin t - a^2 \int_t^\infty e^{-ax} \sin x dx$

et

$\int_t^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx = \frac{e^{-at}}{1+a^2} (a \sin t + \cos t)$

Ainsi, en remplaçant dans l'égalité ci-dessus, on obtient finalement

$f(t) = -\frac{1}{2a(1+a^2)} (a \sin t - \cos t) - \frac{e^{-at}}{2a(1+a^2)} - \frac{1}{2a(1+a^2)} (a \sin t + \cos t)$

$= -\frac{\sin t}{1+a^2} - \frac{e^{-at}}{2a(1+a^2)}$

Dans $\mathcal{D}'_+$, la solution est $f(t) = -Y(t) \left(\frac{\sin t}{1+a^2} + \frac{e^{-at}}{2a(1+a^2)} \right)$.

---

10 (Mai2003)

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ l'équation différentielle
$X'' + 2X' + X = Y(t)$

Exercice 2 : Résoudre en utilisant la transformation de Laplace l'équation intégrale

$$\int_0^x f(t) \cos(x-t) dt = f'(x) \ .$$

Exercice 3 : La température en un point d'abscisse x d'une barre de longueur illimitée est donnée à chaque instant $t \geq o$, par une fonction $u(x,t)$ de classe C^2 en x et C^1 en t, qui est solution de l'équation de la chaleur
$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \delta(x)\delta(t)$, où $\delta(x)$ et $\delta(t)$ sont respectivement les mesures de Dirac en $x = 0$ et en $t = 0$

On suppose que $u(x,0) = u_0(x)$ est donnée, et en prolongeant $u(x,t)$ par 0 pour $t \leq 0$, on définit sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la distribution $U(x,t) = Y(t)u(x,t)$ où $Y(t)$ est la fonction d'Heaviside avec $Y(0) = 1$.

1) Montrer que la distribution U vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = u_0(x)\delta(t) + \delta(x)\delta(t)$$

2)Pour tout $t \geq 0$ fixé, on note $V(\lambda,t) = \mathcal{F}(U(x,t))(\lambda)$ la transformée de Fourier au point λ de la distribution , ou fonction, $U(x,t)$ de la variable x.Puisque x est la variable d'intégration, on remarquera et on admettra que $\frac{\partial V(\lambda,t)}{\partial t} = \mathcal{F}(\frac{\partial U(x,t)}{\partial t})(\lambda)$.

Montrer que $V(\lambda,t)$ vérifie l'équation de convolution

$$\left[\delta'(t) + 4\pi^2\lambda^2\delta(t)\right] * V(\lambda,t) = V(\lambda,0)\delta(t) + \delta(t)$$

3)En déduire que $V(\lambda,t) = [V(\lambda,0) + Y(t)] * Y(t)e^{-4\pi^2\lambda^2 t}$

4) On rappelle que $\mathcal{F}(e^{-\pi\lambda^2})(x) = e^{-\pi x^2}$. Après avoir vérifié que
$\mathcal{F}(e^{-k\lambda^2})(x) = \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{\pi^2 x^2}{k}}$, montrer que

$U(x,t) = u_0(x)Y(t)\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} + Y(t)e^{-4\pi^2\lambda^2 t}.$

$---$

Solution

Exercice 1

Dans $\mathcal{D}'_+$ l'équation $X''+2X'+X = Y(t)$ est équivalente à l'équation de convolution $\left(\delta'' + 2\delta' + \delta\right) * X = Y.$

En utilisant le calcul symbolique, cela revient à chercher la distribution correspendant à $\frac{1}{(p+1)^2}$, qui est l'inverse symbolique de la distribution $\delta''+2\delta'+\delta$. Cette distribution est $Y(t)e^{-t}t$. D'où $X(t) = Y(t) * Y(t)e^{-t}t$

On a $[Y(x) * Y(x)e^{-x}x](t) = \int\limits_0^t xe^{-x}dx = -te^{-t} - e^{-t} + 1$

et donc $X(t) = -te^{-t} - e^{-t} + 1.$

Exercice 2

L'équation intégrale $\int_0^x f(t)\cos(x-t)dt = f'(t)$ est équivalente dans $\mathcal{D}'_+$ à l'équation de convolution $[Y(t)f(t) * Y(t)\cos t](x) = Y(x)f'(x)$; En prenant la transformée de Laplace, on a

$[\mathcal{L}Yf](p)\cdot[\mathcal{L}Y\cos](p) = [\mathcal{L}Yf'](p) = p\mathcal{L}Yf - f(0)$

Tenant compte des résultats du cours $[\mathcal{L}Yf'](p) = p\mathcal{L}Yf - f(0)$ et $[\mathcal{L}Y\cos](p) = \frac{p}{p^2+1}$, on obtient

$[\mathcal{L}Yf](p) = \frac{p^2+1}{p^3} = f(0)\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{p^3}\right] = f(0)[\mathcal{L}Y](p) + f(0)\left[\mathcal{L}Y\frac{t^2}{2}\right](p)$

d'où $Y(t)f(t) = f(0)Y(t)\left[\frac{t^2}{2}+1\right]$.

Exercice 3

1) Effectuons les dérivées demandées de la distribution $U(x,t) = Y(t)u(x,t)$

On a $\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) = Y'(t)u(x,t) + Y(t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = u(x,0)\delta(t) + Y(t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$

$\frac{\partial U}{\partial x}(x,t) = Y(t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t) = Y(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$

D'où $\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t) = u(x,0)\delta(t) + Y(t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - Y(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$

$= u_0(x)\delta(t) + Y(t)\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right]$

$= u_0(x)\delta(t) + Y(t)\delta(t)\delta(x)$.

2) Posons $\mathcal{F}[U(x,t)](\lambda) = V(\lambda,t)$. Puisque t est considéré comme un paramètre indépendant de la variable d'intégration x ,

on a $\frac{\partial V}{\partial t}(\lambda,t) = \mathcal{F}\,\frac{\partial U}{\partial t}(\lambda)$. Prenons la transformée de Fourier de l'équation trouvée en 1) :

$\mathcal{F}\left[\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)\right](\lambda) - \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t)\right](\lambda) = \mathcal{F}[u_0(x)\delta(t)](\lambda) + \mathcal{F}[Y(t)\delta(t)\delta(x)](\lambda)$

$= \delta(t)\mathcal{F}[u_0(x)](\lambda) + Y(t)\delta(t)\mathcal{F}[\delta(x)](\lambda) = V(\lambda,0)\delta(t) + Y(t)\delta(t).$

D'autre part

$\mathcal{F}\left[\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)\right](\lambda) - \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t)\right](\lambda) = \frac{\partial V}{\partial t}(\lambda,t) - (2i\pi\lambda)^2\mathcal{F}U(\lambda)$

$= \frac{\partial V}{\partial t}(\lambda,t) + 4\pi^2\lambda^2 V(\lambda,t) = \left[\delta'(t) + 4\pi^2\lambda^2\delta(t)\right] * V(\lambda,t)$

D'où finalement

$\left[\delta'(t) + 4\pi^2\lambda^2\delta(t)\right] * V(\lambda,t) = V(\lambda,0)\delta(t) + Y(t)\delta(t).$

Remarque : Attention, l'écriture $\left[\delta'(t)+4\pi^2\lambda^2\delta(t)\right]*V(\lambda,t)$ peut préter à confusion car t est le point où est pris le produit de convolution . L'écriture correcte, sans aucune ambiguité, serait $\left[\left[\delta'(s)+4\pi^2\lambda^2\delta(s)\right]*V(\lambda,s)\right](t)$

3) Calculons l'inverse de convolution de la distribution $\left[\delta'(t)+4\pi^2\lambda^2\delta(t)\right]$. En utilisant le calcul symbolique, cela revient à trouver la distribution corre-spendant à $\frac{1}{p^2+4\pi^2\lambda^2}$. Cette distribution est $Y(t)e^{-4\pi^2\lambda^2 t}$. Il en résulte $V(\lambda,t)=[V(\lambda,0)+Y(t)]*Y(t)e^{-4\pi^2\lambda^2 t}$.

4) Pour $k>0$, on sait que $k\left[\mathcal{F}f(k\lambda)\right](x)=\left[\mathcal{F}f(\lambda)\right]\left(\frac{x}{k}\right)$. Il en résulte

$$\left[\mathcal{F}e^{-k\lambda^2}\right](x)=\left[\mathcal{F}e^{-\pi\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}}\lambda\right)^2}\right](x)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}}\left[\mathcal{F}e^{-\pi\lambda^2}\right]\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}}x\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}}e^{-\frac{\pi^2x^2}{k}}.$$

Prenons la transformée de Fourier inverse (en x) de l'équation de convolution vérifiée par V

$$U(x,t)=\left[\overline{\mathcal{F}}V(\lambda,t)\right](x)=\overline{\mathcal{F}}\left[[V(\lambda,0)+Y(t)]*Y(t)e^{-4\pi^2\lambda^2 t}\right](x)$$

$$=Y(t)\overline{\mathcal{F}}\left[V(\lambda,0)\right](x)\left[\overline{\mathcal{F}}e^{-4\pi^2\lambda^2 t}\right](x)+Y(t)\left[\overline{\mathcal{F}}1\right](x)\left[\overline{\mathcal{F}}e^{-4\pi^2\lambda^2 t}\right](x)$$

Avec la formule ci-dessus avec $k=4\pi^2 t$ on a $\left[\overline{\mathcal{F}}e^{-4\pi^2\lambda^2 t}\right](x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

D'où finalement

$$U(x,t)=Y(t)u_0(x)\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}+$$

inacheve___$Y(t)\left[\overline{\mathcal{F}}1\right](x)\left[\overline{\mathcal{F}}e^{-4\pi^2\lambda^2 t}\right](x)$ =??________Prendre_Y(0)=0__??___

---

11 (Juillet 99)

Exercice1

Pour tout $n>0$, on définit la fonction $f_n:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ par $f_n(t)=n$ si $0<t<\frac{1}{n}$ et $f_n(t)=0$ sinon. On note T_n la distribution définie par f_n .

a) Montrer que $T_n\in\mathcal{E}'$ (espace des distributions à support compact) et que son support est contenu dans $\left[0,\frac{1}{n}\right]$

b) Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$; en remarquant que $\int_0^{\frac{1}{n}}\varphi(0)dt=\frac{1}{n}\varphi(0)$, montrer qu'il existe $M>0$ tel que $\mid T_n(\varphi)-\varphi(0)\mid\leq\frac{M}{n}$.

c) En déduire que $T_n\longrightarrow\delta$ dans $\mathcal{E}'$.

d)Calculer la transformée de Laplace $\mathcal{L}(T_n)$. Retrouver c) en calculant $\lim\mathcal{L}(T_n)$ lorsque $n\longrightarrow\infty$.

Exercice2

Soit f la fonction de la variable réelle t définie par $f(t)=0$ si $t<0$ et $f(t)=2^{n-1}$ si $n<t<n+1$, pour $n=0,1,2...$

a) Calculer $\mathcal{L}(f)$.

b)Trouver $X\in\mathcal{D}'_+$ solution de l'équation $X*f=\sum_{n=0}^{n=+\infty}2^{n-1}\delta_n$.

Exercice3

On définit la fonction $G(x,t)$ des deux variables réelles x et t par : $G(x,t)=e^{2\sqrt{2}\pi xt-\pi t^2}$

a) Les transformées de Fourier sont prises par rapport à la variable x et on rappelle que
$\mathcal{F}(e^{-\pi u^2})(\lambda) = e^{-\pi\lambda^2}$.

Montrer que $\mathcal{F}(G(x,t)e^{-\pi x^2})(\lambda) = G(\lambda, -it)e^{-\pi\lambda^2}$. On pourra commencer par montrer que $\mathcal{F}(G(x,t)e^{-\pi x^2})(\lambda) = e^{\pi t^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x}e^{-\pi(x-t\sqrt{2})}dx$, puis arriver à la formule demandée en effectuant un changement de variable.

b) On rappelle que $e^u = \sum\limits_{n=0}^{n=+\infty} \frac{u^n}{n!}$ .Montrer que $G(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{n=+\infty} P_n(t)\frac{t^n}{n!}$, où P_n est un polynôme de degrés n qu'on ne cherchera pas à calculer .

c)On pose $\varphi_n(x) = P_n(x)e^{-\pi x^2}$. Vérifier que $\varphi_n \in \mathcal{S}$ (espace des fonctions à décroissance rapide), et déduire de a) et de b) que $\mathcal{F}(\varphi_n(x))(\lambda) = (-i)^n\ \varphi_n(\lambda)$.

$---$

Solution

Exercice1

a) Les fonctions f_n , $n > 0$, sont localement intégrables car sur tout intervalle $[a,b]$ fermé borné de $\mathbb{R}$, on a

$\int_a^b f_n\ (t)dt = n\lambda\left([a,b] \cap \left[0, \frac{1}{n}\right]\right) \leq n\lambda\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right) = 1$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Donc elles définissent des distributions T_n . D'autre part, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ dont le support est contenu dans le complémentaire de $\left[0, \frac{1}{n}\right]$. On a

$\langle T_n, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n\ (t)\varphi(t)dt = \int_0^{\frac{1}{n}} n\varphi(t)dt = 0$, puisque φ est nulle sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$. On en déduit que le support de T_n est contenu dans $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et donc $T_n \in \mathcal{E}'$.

b) Soit $\varphi \in \mathcal{E}$, espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. En remarquant que $n\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(0)dt = \varphi(0)$, on a

$\mid T_n(\varphi) - \varphi(0) \mid = \mid \int_0^{\frac{1}{n}} n\varphi(t)dt - \varphi(0) \mid = \mid \int_0^{\frac{1}{n}} (n\varphi(t) - n\varphi(0))dt \mid$

$\leq n\int_0^{\frac{1}{n}} \mid \varphi(t) - \varphi(0) \mid dt$.

Comme φ est $\mathcal{C}^\infty$, il existe une constante $M > 0$ telle que $\mid \varphi'(\xi) \mid \leq M$ quel que soit $\xi \in [0,t]$. D'après le théorème des accroissements finis, on a $\mid \varphi(t) - \varphi(0) \mid \leq tM$. Reprenant les calculs précédents, on obtient $\mid T_n(\varphi) - \varphi(0) \mid \leq n\int_0^{\frac{1}{n}} tMdt = \frac{M}{2n}$.

c) D'après ce qui précède, on a $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \mid T_n(\varphi) - \varphi(0) \mid = 0$, $\forall\varphi \in \mathcal{E}$, qui peut encore s'ecrire

$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \mid T_n(\varphi) - \delta(\varphi) \mid = 0$, $\forall\varphi \in \mathcal{E}$. Et cela signifie par définition que $T_n \longrightarrow \delta$ dans $\mathcal{E}'$.

d) On a $\mathcal{L}(T_n)(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f_n(t)dt = \int_0^{\frac{1}{n}} ne^{-pt}dt = \frac{n}{p}\left(1 - e^{-\frac{p}{n}}\right)$

Un développement limité à l'ordre 2 de $e^{-\frac{p}{n}}$ donne $\frac{n}{p}\left(1 - e^{-\frac{p}{n}}\right) \sim 1 - \frac{p}{2n}$. On en déduit que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \mathcal{L}(T_n)(p) = 1 = \mathcal{L}(\delta)(p)$

Ce qui confirme bien que $T_n \longrightarrow \delta$ dans $\mathcal{E}'$.

Exercice 2

a) On a $\mathcal{L}\,(f)\,(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} 2^{n-1} e^{-pt} dt$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} \frac{e^{-pn} - e^{-p(n+1)}}{p} = \frac{1-e^{-p}}{p} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} e^{-pn} \ .$$

b) Appliquons la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation. Sachant que $\mathcal{L}(X * f) = \mathcal{L}(X)\mathcal{L}(f)$, et que $\mathcal{L}(\delta_n) = e^{-pn}$, on obtient $\mathcal{L}(X)\mathcal{L}(f) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}\mathcal{L}(\delta_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} e^{-pn}$. D'où d'après a), $\mathcal{L}(X)(p) = \frac{p}{1-e^{-p}}$. Mais comme $\frac{p}{1-e^{-p}} = p \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-pn}$ et comme $p = \mathcal{L}(\delta')$, on en déduit que

$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(\delta') \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}(\delta_n) = \mathcal{L}(\delta' * \sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta_n) = \mathcal{L}(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta'_n)$, et par conséquent $X = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta'_n$.

Exercice 3

a) Les calculs ne sont pas compliqués, il suffit de suivre attentivement les indications données. Par définition de la transformée de Fourier, on a

$$\mathcal{F}(G(x,t)e^{-\pi x^2})(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x} e^{-\pi t^2} e^{-\pi x^2} dx$$
$$= e^{\pi t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x} e^{-\pi x^2 + 2\sqrt{2}\pi x t - 2\pi t^2} dx = e^{\pi t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x} e^{-\pi(x-\sqrt{2}t)^2} dx$$

.

En effectuant le changement de variable $u = x - \sqrt{2}t$, on obtient

$$\mathcal{F}(G(x,t)e^{-\pi x^2})(\lambda) = e^{\pi t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda u} e^{-2\sqrt{2}i\pi\lambda t} e^{-\pi u^2} du$$
$$= e^{2\sqrt{2}\pi\lambda(-it) - \pi(it)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda u} e^{-\pi u^2} du = G(\lambda, it)\mathcal{F}\left(e^{-\pi x^2}\right)(\lambda) = G(\lambda, it) e^{-\pi\lambda^2}$$

b) Développons la fonction $G(x,t) = e^{2\sqrt{2}\pi x t} e^{-\pi t^2}$ suivant les puissances de t , on obtient

$$G(x,t) = e^{2\sqrt{2}\pi x t} e^{-\pi t^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(2\sqrt{2}\pi x t\right)^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(-\pi t^2\right)^j}{j!} = \sum_{i,j} (-1)^j \frac{\left(2\sqrt{2}\pi x\right)^i}{i!j!} t^{i+2j}$$

soit en posant $i + 2j = n$

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad , \text{ avec } \quad P_n(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j \frac{\left(2\sqrt{2}\pi\right)^{n-2j} n!}{j!(n-2j)!} x^{n-2j}$$

où $\left[\frac{n}{2}\right]$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$.

c) On sait que si une fonction est à décroissance rapide, alors son produit par n'importe quel polynôme est aussi à décroissance rapide. Or, il est clair que $\varphi\,(x) = e^{-\pi x^2}$ est à décroissance rapide puisque $\lim\limits_{|x| \longrightarrow \infty} |x|^m \left|\varphi^{(n)}\,(x)\right| = 0$ pour tout n et tout m , donc $\varphi_n = P_n e^{-\pi x^2} \in \mathcal{S}$. Montrons maintenant l'égalité demandée. Puisque $G(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{t^n}{n!}$, on a

$$\mathcal{F}(G(x,t)e^{-\pi x^2})(\lambda) = \mathcal{F}\left((\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{t^n}{n!}) e^{-\pi x^2} \right)(\lambda)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{F}\left(P_n(x) e^{-\pi x^2}\right)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{F}\left(\varphi_n\right)(\lambda) \ . \quad (*)$$

Mais daprès la question a), $\mathcal{F}(G(x,t)e^{-\pi x^2})(\lambda) = G(\lambda, it)e^{-\pi\lambda^2}$, Et utilisant à nouveau b) pour les variables λ et (it) , on obtient

$$\mathcal{F}(G(x,t)e^{-\pi x^2})(\lambda) = G(\lambda, it)e^{-\pi\lambda^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\lambda)\frac{(-it)^n}{n!}e^{-\pi\lambda^2}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(-i)^n P_n(\lambda)e^{-\pi\lambda^2} .$$

On en déduit, en comparant avec la relation $(*)$, que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\mathcal{F}(\varphi_n)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(-i)^n P_n(\lambda)e^{-\pi\lambda^2},$$

qui implique que

$\mathcal{F}(\varphi_n)(\lambda) = (-i)^n P_n(\lambda)e^{-\pi\lambda^2} = (-i)^n\varphi_n(\lambda)$, puisque la décomposition en série entière est un unique.

____

12 (Juillet 2000)

On rappelle que la fonction de Bessel d'ordre $n, n > 0$, est la fonction notée $J_n(x)$ définie par $J_n(x) = (\frac{x}{2})^n \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{2k}}{k!(n+k)!}$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle

(E) $\quad x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$.

a) Vérifier que $J_1(x) = -\ J_0'(x)$.

A- Pour tout $n \geq 0$ on pose $f_n(x) = \left[1 - (2\pi x)^2\right]^{n-\frac{1}{2}}$ si $\mid x \mid \leq \frac{1}{2\pi}$ et $f_n(x) = 0$ sinon. On note $\mathcal{F}f_n(\lambda)$ la transformée de Fourier de f en $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) Vérifier que $f_{n+1}(x) - f_n(x) = (-2i\pi x)^2 f_n(x)$ et en déduire que $\mathcal{F}f_{n+1}(\lambda) = \mathcal{F}f_n(\lambda) + (\mathcal{F}f_n)''(\lambda)$.

2) Calculer $f_{n+1}'(x)$ et en déduire en utilisant les formules de dérivation de la transformée de Fourier que $\lambda\ \mathcal{F}f_{n+1}(\lambda) = -\,(2n+1)\,(\mathcal{F}f_n)'(\lambda)$
.

3) Utiliser 1) et 2) pour montrer que la fonction $Z_n(x) = \lambda^n\mathcal{F}f_n(\lambda)$ est solution de l'équation (E) (où la variable x est remplacée par la variable λ) .

B- 1) Montrer que $\int_0^t (t-x)^p x^q dx = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}t^{p+q+1}$ pour tout $p, q \in \mathbb{N}$.

2) En utilisant le développement de J_0 en série entière, calculer directement $S = Y(x)J_0(x) * Y(x)J_0(x)$ où $Y(x)$ est la fonction d'Heaviside. On admettra la formule $\sum_{p+q=k} \frac{2p!2q!}{2^{2p}(p!)^{2q}(q!)^2} = 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3) Vérifier en utilisant la transformation de Laplace et le calcul symbolyque que $S(t) = Y(t)\sin t$.

4)Montrer que la distribution S vérifie l'équation $S'' + S = \delta$ et donner un opérateur différentiel D tel que $DS = \delta$.

5) Vérifier que $D(YJ_0) = \delta' + YDJ_0$.

6)Utiliser l'équation (E) et la question a) du début pour montrer que $D(YJ_0) = \delta' + Y\frac{J_1(x)}{x}$. En déduire que $Y(x)J_0(x) * Y\frac{J_1(x)}{x} = Y(x)J_1(x)$.

Solution

a) On a $J_0(x) = \sum\limits_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}$, dérivons terme à terme

$J_0'(x) = \sum\limits_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k \frac{2k}{2}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}}{(k!)^2} = \sum\limits_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k \frac{x}{2}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-2}}{(k!)(k-1)!}$, et en posant

$l = k-1$, on obtient $J_0'(x) = -\frac{x}{2}\sum\limits_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{l!(l+1)!} = -J_1(x).$

A)

1) On a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \left[1-(2\pi x)^2\right]^{n+1-\frac{1}{2}} - \left[1-(2\pi x)^2\right]^{n-\frac{1}{2}}$

$= -(2\pi x)^2\left[1-(2\pi x)^2\right]^{n-\frac{1}{2}} = (-2i\pi x)^2 f_n(x)$

Il en résulte $\mathcal{F}f_{n+1} - \mathcal{F}f_n = \mathcal{F}(-2i\pi x)^2 f_n(x) = (\mathcal{F}f_n)''$.

2) La dérivée de f_{n+1} se calcule facilement, on trouve $f_{n+1}'(x) = -(2n+1)\left(4\pi^2 x\right) f_n(x)$. En utilisant les formules de dérivation de la transformée de Fourier on a

$$(2i\pi\lambda)\,\mathcal{F}f_{n+1}(\lambda) = \mathcal{F}f_{n+1}'(\lambda) = -(2n+1)4\pi^2\mathcal{F}(xf_n)(\lambda)$$
$$= -(2n+1)2i\pi\mathcal{F}(-2i\pi x f_n)(\lambda)$$

d'où $\lambda\mathcal{F}f_{n+1}(\lambda) = -(2n+1)\mathcal{F}(-2i\pi x f_n)(\lambda) = -(2n+1)\left[\mathcal{F}f_n\right]'(\lambda).$

3) Vérifions que $Z_n(\lambda) = \lambda^n\mathcal{F}f_n(\lambda)$ est solution de l'équation (E). On a

$$Z_n'(\lambda) = n\lambda^{n-1}\mathcal{F}f_n(\lambda) + \lambda^n\left[\mathcal{F}f_n\right]'(\lambda)$$

et

$$Z_n''(\lambda) = n(n-1)\lambda^{n-2}\mathcal{F}f_n(\lambda) + 2n\lambda^{n-1}\left[\mathcal{F}f_n\right]'(\lambda) + \lambda^n\left[\mathcal{F}f_n\right]''(\lambda)$$

D'où

$\lambda^2 Z_n'' + \lambda Z_n' + (\lambda^2 - n^{2)}Z_n = n(n-1)\lambda^n\mathcal{F}f_n(\lambda) + 2n\lambda^{n+1}\left[\mathcal{F}f_n\right]'(\lambda) + \lambda^{n+2}\left[\mathcal{F}f_n\right]''(\lambda) + n\lambda^n\mathcal{F}f_n(\lambda) + \lambda^{n+1}\left[\mathcal{F}f_n\right]'(\lambda) + \lambda^{n+2}\mathcal{F}f_n(\lambda) - n^2\lambda^n\mathcal{F}f_n(\lambda) = \lambda^{n+2}\left[\mathcal{F}f_n(\lambda) + \left[\mathcal{F}f_n\right]''(\lambda)\right] + (2n+1)\lambda^{n+1}\left[\mathcal{F}f_n\right]'(\lambda) = \lambda^{n+2}\mathcal{F}f_{n+1}(\lambda) - \lambda^{n+2}\mathcal{F}f_{n+1}(\lambda) = 0.$

L'avant dernière égalité étant dûe à 1) et 2) .

B)

1) Soit $I_{p,q} = \int\limits_0^t (t-x)^p x^q dx$, où $p, q \in \mathbb{N}$. Faisons une intégration par parties

$I_{p,q} = \left.(t-x)^p \frac{x^{q+1}}{q+1}\right]_0^t + \frac{p}{q+1}\int\limits_0^t (t-x)^{p-1} x^{q+1}dx = \frac{p}{q+1}I_{p-1,q+1}$

On en déduit

$I_{p,q} = \frac{p}{q+1}\frac{p-1}{q+2}\frac{p-2}{q+3}......I_{0,q+p} = \frac{p!}{(q+1)(q+2).....(q+p)}\int\limits_0^t x^{q+p}dx = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}t^{p+q+1}$

2) On a $S(t) = \left[\, Y(x)J_0(x) * Y(x)J_0(x)\right](t)$

$$= \left[\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}Y(x)\right] * \left[\sum_{i=0}^{i=\infty}(-1)^i \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}}{(i!)^2}Y(x)\right](t)$$
$$= \sum_{i,k=0}^{\infty}(-1)^{i+k}\frac{1}{(k!)^2(i!)^2}\left[Y(x)(\tfrac{x}{2})^{2k} * Y(x)(\tfrac{x}{2})^{2i}\right](t)$$
$$= \sum_{i,k=0}^{\infty}(-1)^{i+k}\frac{1}{(k!)^2(i!)^2}\frac{1}{2^{2k}2^{2i}}I_{2k,2i}$$
$$= \sum_{i,k=0}^{\infty}(-1)^{i+k}\frac{1}{(k!)^2(i!)^2}\frac{1}{2^{2k}2^{2i}}\frac{(2k)!(2i)!}{(2k+2i+1)!}t^{2k+2i+1}$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k+i=l}^{\infty}(-1)^l\frac{1}{(k!)^2(i!)^2}\frac{1}{2^{2k}2^{2i}}\frac{(2k)!(2i)!}{(2l+1)!}t^{2l+1}$$

Comme $\displaystyle\sum_{k+i=l}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2(i!)^2}\frac{1}{2^{2k}2^{2i}}\frac{(2k)!(2i)!}{(2l+1)!} = 1$, il en résulte

$S(t) = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{t^{2l+1}}{(2l+1)!} = Y(t)\sin t.$

3) Appliquons la transformée de Laplace

$\mathcal{L}S(p) = \mathcal{L}(YJ_0)\mathcal{L}(YJ_0) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{p^2+1} = \mathcal{L}(Y\sin t)(p)$

D'où $S = Y(t)\sin t.$

4) En tenant compte du fait que $\delta\sin t = 0$ dans la dérivation de S, on obtient

$S' = Y'\sin + Y\cos t = Y\cos t$. Dérivons une seconde fois

$S'' = Y'\cos t - Y\cos t = \delta - S$. On obtient la relation annoncée $S'' + S = \delta$, et l' opèrateur demandé est $D = \frac{d^2}{dx^2} + 1$.

5) Calculons $D(YJ_0)$

$D(YJ_0) = (YJ_0)'' + YJ_0 = (Y'J_0 + YJ_0')' + YJ_0 = (\delta + YJ_0')' + YJ_0$
$= \delta' + Y'J_0' + YJ_0'' + YJ_0$

Comme $Y'J_0' = \delta J_0' = 0$ (puisque $J_0'(0) = 0$), on obtient finalement
$D(YJ_0) = \delta' + Y(J_0'' + J_0) = \delta' + YDJ_0$.

6) Puisque J_0 est solution e (E) (pour $n = 0$), on a
$x^2J_0'' + xJ_0' + x^2J_0 = 0$. Comme $J_1 = -J_0'$ (question préliminaire a)), on a $J_0'' + J_0 = \frac{J_1(x)}{x}$. Autrment dit $D(J_0) = \frac{J_1(x)}{x}$.

Il en résulte d'après 5) $D(YJ_0) = \delta' + Y\frac{J_1(x)}{x}$.

Le produit de convolution s'en déduit

$YJ_0 * Y\frac{J_1(x)}{x} = YJ_0 * \left[D(YJ_0) - \delta'\right] = YJ_0 * D(YJ_0) - YJ_0 * \delta'$
$= D\left(YJ_0 * YJ_0\right) - (YJ_0)' = DS - YJ_0' - \delta = YJ_1$,
puisque $DS - \delta = 0$ et $J_1 = -J_0'$.

---

13 (Juillet 2001)

Exercice1

On considère l'équation de diffusion $\frac{\partial\Psi}{\partial t}(x,t) = c\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(x,t)$ où c est une constante positive et $\Psi(x,t)$ une fonction de deux variables réelles x et t. La transformée de Fourier en un point $\lambda \in \mathbb{R}$ de $\Psi(x,t)$ par rapport à la variable x est une fonction de λ et du paramètre t qu'on notera $\mathcal{F}\Psi(\lambda,t)$. Nous admettrons que $\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\Psi(\lambda,t) = \mathcal{F}\frac{\partial \Psi}{\partial t}(\lambda)$. En utilisant la définition de la transformation de Fourier écrire cette dernière égalité sous forme de limites d'intégrales. Quel est le résultat du cours qui permettrait de démontrer ces égalités?

1) Soit $f(x) = e^{-\frac{x^2}{a^2}}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ecrire une équation différentielle du 1^{er} ordre vérifiée par f et une équation différentielle du 1^{er} ordre vérifiée par sa transformée de Fourier $\mathcal{F}f\ (\lambda)$. Vérifier que $\mathcal{F}f\ (\lambda) = e^{-\pi^2 a^2 \lambda^2}$.

2) Montrer que $\mathcal{F}\Psi(\lambda,t) = \mathcal{F}\Psi(\lambda,0)\ e^{-\pi^2 a^2 \lambda^2}$ avec $a = 2\sqrt{ct}$.

3) Calculer $\Psi(x,t)$ dans chacun des cas suivants:

i) $\Psi(x,0) = \delta$

ii) $\Psi(x,0) = \delta_{-1} + \delta_{+1}$

Exercice2

Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre l'équation différentielle $ty'' + y' + 4ty = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 3$ et $y'(0) = 0$

Solution

Exercice 1

Par définition de la transformée de Fourier, l'égalité $\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\Psi(\lambda,t) = \mathcal{F}\frac{\partial \Psi}{\partial t}(\lambda)$ est équivalente à

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x}\Psi(x,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x}\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t)\ dx$,

qui est équivalente à son tour, par définition de la dérivée, à

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x}\left(\Psi(x,t+h) - \Psi(x,t)\right)dx\right]$$
$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x}\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\left(\Psi(x,t+h) - \Psi(x,t)\right)dx\right].$$

Cette égalité pourrait se démontrer avec le théorème de Lebesgue appliqué à la suite de fonctions $f_n = \frac{1}{h_n}\left(\Psi(x,t+h_n) - \Psi(x,t)\right)$

où h_n est une suite de scalaires qui tend vers zéro.

1) Dérivons la fonction $f(x) = e^{-\frac{x^2}{a^2}}$. On a

$f'(x) = -\frac{2x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{a^2}}$, et l'équation différentielle est $f^{'}(x) + \frac{2x}{a^2}f(x) = 0$. En prenant la transformée de Fourier on obtient l'équation différentielle $\mathcal{F}f'(\lambda) + \mathcal{F}\left(\frac{2x}{a^2}f(x)\right) = 0$. Utilisant les formules de dérivation, cette équation devient

$2\pi^2 a^2 \lambda\ \mathcal{F}f(\lambda) +\ [\mathcal{F}f(\lambda)]' = 0$. L'intégration de cette dernière équation donne $\mathcal{F}f(\lambda) = e^{-\pi^2 a^2 \lambda^2}$.

2) Appliquons la transformée de Fourier à l'équation de diffusion initiale $\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t) = c\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x,t)$

On a $\mathcal{F}\frac{\partial \Psi}{\partial t}(\lambda) = c\mathcal{F}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(\lambda)$.

Soit en tenant compte de l'égalité admise au début ,

$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\Psi(\lambda,t) = c\,(2i\pi\lambda)^2\,\mathcal{F}\Psi(\lambda,t)$, équation différentielle qu'on intégre sans peine et qui a pour solution

$\mathcal{F}\Psi(\lambda,t) = ke^{-4c\pi^2\lambda^2 t}$, k étant une constante réelle.
Si $t=0$, on a $\mathcal{F}\Psi(\lambda,0) = k$, et si l'on pose $a^2 = 4ct$, on obtient
$\mathcal{F}\Psi(\lambda,t) = \mathcal{F}\Psi(\lambda,0)e^{-\pi^2 a^2\lambda^2}$, c'est à dire d'après le résultat obtenu en 1),

$\mathcal{F}\Psi(\lambda,t) = \mathcal{F}\Psi(\lambda,0)\mathcal{F}f(\lambda)$, qui s'écrit aussi

$\mathcal{F}\Psi(\lambda,t) = \mathcal{F}\left[\Psi(\lambda,0) * f(\lambda)\right]$. Il en résulte $\Psi(x,t) = \Psi(x,0) * f(x)$.

3) Calcul de $\Psi(x,t)$

i) Si $\Psi(x,0) = \delta$, on a $\Psi(x,t) = f(x) = e^{-\frac{x^2}{a^2}} = e^{-\frac{x^2}{4ct}}$.

ii) Si $\Psi(x,0) = \delta_1 + \delta_{-1}$ on a

$\Psi(x,t) = (\delta_1 + \delta_{-1}) * f = f(x+1) + f(x-1) = e^{-\frac{(x+1)^2}{4ct}} + e^{-\frac{(x-1)^2}{4ct}}$.

Exercice 2

Soit l'équation $ty'' + y' + 4ty = 0$ avec les conditions initiales
$y(0) = 3, y'(0) = 0$

On a $\mathcal{L}(ty'') + \mathcal{L}(y') + \mathcal{L}(4ty) = 0$, ou $-\left[\mathcal{L}(y'')\right]' + \mathcal{L}(y') - 4\left[\mathcal{L}(y)\right]' = 0$

soit $-\left[p^2\mathcal{L}(y) - py(0) - y'(0)\right]' + p\mathcal{L}(y) - y(0) - 4\left[\mathcal{L}(y)\right]' = 0$

$\left(p^2+4\right)\left[\mathcal{L}(y)\right]' + p\mathcal{L}(y) = 0$

On en déduit $\mathcal{L}(y) = \frac{c}{\sqrt{p^2+4}}$ et $y = cJ_0(2t)$. Les conditions initiales permettent de calculer la valeur de la constante, on trouve $c = 3$. La solution est donc $y = 3J_0(2t)$.

−−

14 (Juillet 2002)

Exercice1

Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre l'équation intégrale
$f(x) = x^2 + \int_0^x f(t)\sin(t-x)dt$.

Exercice2

Soit T une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$. On suppose que $xT = 1$ et que T est impaire. On note $\mathcal{F}T$ la transformée de Fourier de T et Y la fonction d'Heaviside.

a) Calculer$(\mathcal{F}T)'$ et montrer que $\mathcal{F}T = -2i\pi Y + c$, où c est une constante réelle. b) Utiliser la parité de T pour calculer la valeur de la constante c
et vérifier que $\mathcal{F}T = -2i\pi Y + i\pi$.

En déduire que $\mathcal{F}Y + \overline{\mathcal{F}}Y = \delta$.

Exercice3

1) Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ (distribution à support compact), et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $e^{ax}(S * T) = (e^{ax}S) * (e^{ax}T)$.

2) Soit l'opérateur différentiel $D = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} + a$, $a \in \mathbb{R}$. Calculer $D\left(e^{ax}T\right)$ et trouver un autre opérateur différentiel D_a tel que
$D_a(e^{ax}T) = e^{ax}DT$, pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3) Soit T_0 une solution élémentaire de D (i.e. $DT_0 = \delta$) . Donner une solution élémentaire de D_0 en fonction de T_0 .

Solution

Exercice 1

Appliquons la transformée de Laplace à l'équation intégrale

$f(x) = x^2 + \int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$

On a $\mathcal{L}f(p) = \mathcal{L}\left(Yx^2\right) + \mathcal{L}\left[f * Y\sin\right](p) = \left[\mathcal{L}Y\right]''(p) + \mathcal{L}f(p)\,\mathcal{L}(Y\sin)(p)$

$= \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2+1}\mathcal{L}f(p)$

D'où $\mathcal{L}f(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^5} = \mathcal{L}\left(Yx^2\right)(p) + \frac{1}{12}\mathcal{L}\left(Yx^4\right)(p)$

et $f(x) = \frac{1}{12}Yx^4 + Yx^2$

Exercice 2

a) On sait que $[\mathcal{FT}]' = \mathcal{F}(-2i\pi xT)$. Utilisant l'hypothèse $xT = 1$, on a $[\mathcal{FT}]' = -2i\pi\mathcal{F}(1) = -2i\pi\delta$. Il en résulte, puisque $Y' = \delta$, que $\mathcal{FT} = -2i\pi Y + c$, où c est une constante réelle.

b) On a $\langle \mathcal{FT}, \varphi\rangle = -2i\pi\int_0^{\infty}\varphi(x)\,dx + c\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ et $\langle \mathcal{FT}, \varphi(-x)\rangle = -2i\pi\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx + c\int_{-A}^{+A}\varphi(x)\,dx$

Comme $\mathcal{FT}$ est impaire ($\langle \mathcal{FT}, \varphi\rangle = -\langle \mathcal{FT}, \varphi(-x)\rangle$) , il en résulte

$$-2i\pi\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx + c\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx = 2i\pi\int_0^{\infty}\varphi(x)\,dx - c\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx$$

D'où $2c\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx = 2i\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ et $c = i\pi$.

On a $T = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{FT} = -2i\pi\overline{\mathcal{F}}Y + i\pi\overline{\mathcal{F}}1 = -2i\pi\overline{\mathcal{F}}Y + i\pi\delta$

et $-T = -2i\pi\mathcal{F}Y + i\pi\delta$ d'où $\mathcal{F}Y + \overline{\mathcal{F}}Y = \delta$

Exercice 3

1) Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $T \in \mathcal{D}'$ et $a \in \mathbb{R}$. On a

$\langle e^{ax}(S*t), \varphi\rangle = \langle S*t, e^{ax}\varphi\rangle = \left\langle S, \left\langle T, e^{a(x+t)}\varphi(x+t)\right\rangle\right\rangle$

$= \langle e^{ax}S, \langle e^{at}T, \varphi(x+t)\rangle\rangle = \langle e^{ax}S * e^{ax}T, \varphi\rangle$

D'où $e^{ax}(S*t) = e^{ax}S * e^{ax}T$.

2) Soit l'opérateur différentiel $D = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} + a$, $a \in \mathbb{R}$.

On a $(e^{ax}T)' = ae^{ax}T + e^{ax}T'$

$(e^{ax}T)'' = e^{ax}T'' + 2a\ e^{ax}T' + a^2\ e^{ax}T$

et $D(e^{ax}T) = e^{ax}T'' + 2a\ e^{ax}T' + a^2\ e^{ax}T + ae^{ax}T + e^{ax}T' + ae^{ax}T$

$= e^{ax}(T'' + T' + aT) + 2a\ e^{ax}T' + \left(a^2 + a\right)\ e^{ax}T$

Pour déterminer l'opérateur D_a demandé, remarquons que

$D(e^{ax}T) = e^{ax}DT + 2a\ e^{ax}T' + \left(a^2+a\right)\ e^{ax}T$

d'où $e^{ax}DT = (e^{ax}T)'' + (e^{ax}T)' + ae^{ax}T - 2a\ e^{ax}T' - \left(a^2+a\right)\ e^{ax}T$

$= (e^{ax}T)'' + (e^{ax}T)' - 2a(e^{ax}T)' + a^2e^{ax}T$

$= (e^{ax}T)'' + (1-2a)(e^{ax}T)' + a^2e^{ax}T$

L'opérateur cherché est alors $D_a = \frac{d^2}{dx^2} + (1-2a)\frac{d}{dx} + a^2$

et on a bien $e^{ax}DT = D_a(e^{ax}T)$.

3) Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que $e^{ax}\delta = \delta$
Si T_0 est telle que $DT_0 = \delta$, on a alors $D_a\left(e^{ax}T_0\right) = e^{ax}DT_0 = e^{ax}\delta = \delta$
La solution élémentaire de D_a est donc $e^{ax}T_0$.

---

15 (Juillet 2003)

Exercice 1 On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions de la variable réelle t définies par $f_n(t) = (1-4\pi^2t^2)^{n-\frac{1}{2}}$ pour $|t| < \frac{1}{2\pi}$ et $f_n(t) = 0$ ailleurs. On note $\mathcal{F}f_n(\lambda)$ la transformée de Fourier de f_n.

1) Justifier pourquoi les fonctions f_n et $t^m f_n$ sont intégrables pour tout n et tout m dans $\mathbb{N}$. Conclure ensuite que $\mathcal{F}f_n$ est de classe C^∞.

2) On pose $Z_n(\lambda) = \lambda^n\ \mathcal{F}f(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

a) $Z_n''(\lambda) + \frac{1}{\lambda}Z_n'(\lambda) + (1-\frac{n^2}{\lambda^2})Z_n(\lambda) =$
$$= \lambda^n\left[\ \mathcal{F}f_n(\lambda) +\ \mathcal{F}f_n(\lambda)''\right] + (2n+1)\lambda^{n-1}\ \mathcal{F}f_n(\lambda)'$$

b) $\mathcal{F}f_n(\lambda) +\ \mathcal{F}f_n(\lambda)'' =\ \mathcal{F}f_{n+1}(\lambda)$.

c) $(2n+1)\ \mathcal{F}f_n(\lambda)' = -\lambda\ \mathcal{F}f_{n+1}(\lambda)$, (On pourra commencer par calculer f_{n+1}').

3)En déduire que Z_n est solution de l'équation de Bessel
$$y'' + \frac{1}{x}y' + (1-\frac{n^2}{x^2})y = 0 \quad .$$

Exercice 2

Pour tout nombre réel α et tout entier naturel k , on définit la distribution $\mathrm{T}_{k,\alpha} = Y(t)t^k e^{\alpha t}$.

1) Pour quelles valeurs de $p \in \mathbb{C}$ la transformée de Laplace $\mathcal{L}(T_{k,\alpha})(p)$ existe-t-elle?

2) Soit $p \in \mathbb{R}$. Trouver une relation de récurrence entre $\mathcal{L}(T_{k,\alpha})(p)$ et $\mathcal{L}(T_{k-1,\alpha})(p)$, puis calculer $\mathcal{L}(T_{k,\alpha})(p)$.

3) Applications:

a) Trouver une distribution T vérifiant $\mathcal{L}(T) = \frac{p}{p+1}$.

b) Résoudre l'équation de convolution $Y(t)te^t * T = Y(t)\sin(t)$.

Solution

Exercice 1

1) Les fonction f_n ainsi que les fonctions $t^m f_n$ sont intégrables car elles sont continues et à supports compacts contenus dans $|t| \leq \frac{1}{2\pi}$. De plus, $\mathcal{F}f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car pour tout entier m on a
$$[\ \mathcal{F}f_n]^{(m)} =\ \mathcal{F}\left(-2i\pi x\right)^m f_n.$$

2) Posons $Z_n(\lambda) = \lambda^n\mathcal{F}f_n\left(\lambda\right)$

a) On a $Z_n'(\lambda) = n\lambda^{n-1}\mathcal{F}f_n\left(\lambda\right) + \lambda^n\left[\mathcal{F}f_n\left(\lambda\right)\right]'$
$$Z_n''(\lambda) = n(n-1)\lambda^{n-2}\mathcal{F}f_n\left(\lambda\right) + n\lambda^{n-1}\left[\mathcal{F}f_n\left(\lambda\right)\right]' +$$
$$+n\lambda^{n-1}\left[\mathcal{F}f_n\left(\lambda\right)\right]' + \lambda^n\left[\mathcal{F}f_n\left(\lambda\right)\right]''$$
$$= \lambda^n\left[\mathcal{F}f_n\left(\lambda\right)\right]'' + 2n\lambda^{n-1}\left[\mathcal{F}f_n\left(\lambda\right)\right]' + n(n-1)\lambda^{n-2}\mathcal{F}f_n\left(\lambda\right)$$

D'où $\quad Z_n''(\lambda) + \frac{1}{\lambda} Z_n'(\lambda) + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda^2}\right) Z_n(\lambda) =$

$= \lambda^n \left[\mathcal{F} f_n(\lambda)\right]'' + 2n\lambda^{n-1} \left[\mathcal{F} f_n(\lambda)\right]' + n(n-1)\lambda^{n-2} \mathcal{F} f_n(\lambda) +$
$+ n\lambda^{n-2} \mathcal{F} f_n(\lambda) + \lambda^{n-1} \left[\mathcal{F} f_n(\lambda)\right]' + \lambda^n \mathcal{F} f_n(\lambda) - n^2 \lambda^{n-2} \mathcal{F} f_n(\lambda)$
$= \lambda^n \left[\mathcal{F} f_n(\lambda)'' + \mathcal{F} f_n(\lambda)\right] + (2n+1)\lambda^{n-1} \mathcal{F} f_n(\lambda)'$.

b) Remarquons que $\quad f_{n+1}(t) = \left(1 - 4\pi^2 t^2\right) f_n = f_n + (-2i\pi t)^2 f_n$

D'où $\quad [\mathcal{F}\ f_{n+1}](\lambda) = [\mathcal{F} f_n](\lambda) + \left[\mathcal{F}\left(-2i\pi t\right)^2 f_n\right](\lambda) = [\mathcal{F} f_n](\lambda) + [\mathcal{F} f_n]''(\lambda)$

c) On a $\quad f_{n+1}'(t) = -2i\pi(2n+1)(-2i\pi t) f_n$

et $\quad \left[\mathcal{F}\ f_{n+1}'\right](\lambda) = (2i\pi\lambda)\ \ [\mathcal{F}\ f_{n+1}](\lambda)$

D'où $\quad (2i\pi\lambda)\ \ [\mathcal{F}\ f_{n+1}](\lambda) = [\mathcal{F}(-2i\pi)(2n+1)(-2i\pi t) f_n](\lambda)$
$\qquad = (-2i\pi)(2n+1)\ [\mathcal{F} f_n]'(\lambda)$

et $\ $ par suite $\quad \lambda\,[\mathcal{F}\ f_{n+1}](\lambda) = -(2n+1)\ [\mathcal{F} f_n]'(\lambda)$.

3) Utilisons les résultats de a) , b) et c) pour calculer

$Z_n''(x) + \frac{1}{x}\ Z_n'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) Z_n$, $\quad$ on a

$$Z_n''(x) + \frac{1}{x}\ Z_n'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) Z_n = x^n \left[\mathcal{F} f_n(x)'' + \mathcal{F} f_n(x)\right] + (2n+1)\,x^{n-1} \mathcal{F} f_n(x)'$$
$$= x^n\,[\mathcal{F}\ f_{n+1}](x) - x^n\ [\mathcal{F}\ f_{n+1}](x) = 0 .$$

Exercice 2

1) Une distribution T admet une transformée de Laplace pour tout $p = x + iy$, tel que $x > x_0$ si $e^{-xt}T$ est tempérée pour tout $x > x_0$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}$, on a $\left\langle Y(t)t^k e^{\alpha t} e^{-xt}, \varphi\right\rangle = \int\limits_0^\infty t^k e^{\alpha t} e^{-xt} \varphi(t)\,dt$. Cette intégrale converge pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$ dès que $\alpha - x < 0$. Par consequent, la transformée de Laplace de $T_{k,\alpha} = Y(t)t^k e^{\alpha t}$ existe pour tout $p = x + iy$ tel que $x > \alpha$.

2) Soit $p \in \mathbb{R}$, $p > \alpha$. On a

$$\mathcal{L}T_{k,\alpha}(p) = \langle T_{k,\alpha}, e^{-pt}\rangle = \int\limits_0^\infty t^k e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \left.\frac{t^k e^{(\alpha-p)t}}{\alpha - p}\right]_0^\infty + \frac{k}{p-\alpha} \int\limits_0^\infty t^{k-1} e^{(\alpha-p)t} dt$$
$$= \frac{k}{p-\alpha} \int\limits_0^\infty t^{k-1} e^{(\alpha-p)t} dt .$$

Ainsi $\quad T_{k,\alpha}(p) = \frac{k}{p-\alpha}\ \mathcal{L}T_{k-1,\alpha}(p)$.

Le calcul de $\mathcal{L}T_{k,\alpha}(p)$ est alors évident. On a

$$\mathcal{L}T_{k,\alpha}(p) = \frac{k}{p-\alpha}\ \mathcal{L}T_{k-1,\alpha}(p) = \frac{k(k-1)}{(p-\alpha)^2}\ \mathcal{L}T_{k-2,\alpha}(p) = \cdots\cdots = \frac{k!}{(p-\alpha)^k}\ \mathcal{L}T_{0,\alpha}(p)$$
$$= \frac{k!}{(p-\alpha)^k} \int\limits_0^\infty e^{(\alpha-p)t} dt = \frac{k!}{(p-\alpha)^{k+1}} .$$

3) Application

a) On a $\mathcal{L}T_{0,-1}(p) = \frac{1}{p+1}$, et comme $\mathcal{L}\delta' = p$, la distribution cherchée vérifie la relation

$\mathcal{L}T = \mathcal{L}T_{0,-1}(p)\mathcal{L}\delta' = \mathcal{L}\left[Y(t)e^{-t} * \delta'\right]$.

D'où $\quad T = Y(t)e^{-t} * \delta' = \delta - Y(t)e^{-t}$.

b) Appliquons la transformation de Laplace à l'équation donnée $Y(t)te^t * T = Y(t)\sin t$,

on a $\quad \mathcal{L}Y(t)te^t \mathcal{L}T = \mathcal{L}Y(t)\sin t$

Comme $\quad \mathcal{L}Y(t)te^t = \mathcal{L}T_{1,1} = \frac{1}{(p-1)^2}$ et $\mathcal{L}Y(t)\sin t = \frac{1}{p^2+1}$, on en déduit

$\mathcal{L}T\,(p)=\frac{(p-1)^2}{p^2+1}=1-2\frac{p}{p^2+1}=\mathcal{L}\delta-2\mathcal{L}Y(t)\cos t$ et $T=\delta-2Y(t)\cos t$.

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

Janvier 2005

Exercice 1 **Soit un réel** $\alpha>1$ **et la suite de fonctions** $(f_n)_n$ **définies sur** $[0,+\infty[$ **par** $f_n(t)=\frac{nt}{1+n^\alpha t^\alpha}$.

1) Montrer que $f_n(t)\underset{n}{\longrightarrow}0$ **pour tout** $t\in[0,+\infty[$.

2) En effectuant une étude rapide de la fonction f_n **sur** $[0,+\infty[$, **montrer qu'il existe une constante** $M>0$ **telle que** $|\,f_n(t)|\leq M$ **, pour tout** $n\in\mathbb{N}$ **et tout** $t\in[0,+\infty[$.

3) Soit $f\in L^1(\,[0,+\infty[)$ **tel que** $\int\limits_0^{+\infty}f(t)dt=1.$

Dites pourquoi $\frac{nt}{1+n^\alpha t^\alpha}f(t)\longrightarrow 0$ **presque partout sur** $[0,+\infty[$ **et calculer** $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1+nt+n^\alpha t^\alpha}{1+n^\alpha t^\alpha}f(t)dt.$

Exercice 2 **Soit** $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \textit{tels que}\ \ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\ z\geq 0\right\}$ **et** $f(x,y,z)$ **la fonction définie sur** D **par** $f(x,y,z)=\frac{1}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}$.

1) Justifier l'utilisation du théorème de Fubini et calculer $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]}f(x,y,z)dxdy$ **en fonction de** z **.**

2) Posons $\theta(z)=\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]}f(x,y,z)dxdy$ **. Montrer que** $\theta(z)$ **est Lebesgue-intégrable sur** $[0,+\infty[$. **En déduire que** f **est lebesgue intégrable sur** D.

3) En remarquant que $f(x,y,z)=\frac{1}{x^2-y^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2z^2}-\frac{y^2}{1+y^2z^2}\right)$ **, calculer** $\int\limits_0^{+\infty}f(x,y,z)dz$ **en fonction de** x **et** y.

4) En justifiant encore une fois l'utilisation du théorème de Fubini calculer $\int\limits_D f(x,y,z)dxdydz.$ **En déduire que** $\int\limits_0^{+\infty}(\frac{Arctgz}{z})^2dz=\pi Log2.$

(On rappelle qu'une primitive de $Logt\ est\ tLogt-t$ **)**

Exercice 3 **L'espace** $L^2(\mathbb{R})$ **muni du produit scalaire**

$<f,g>=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)g(x)dx$ **est un espace de Hilbert. Soit** H_n **,** $n\in\mathbb{N}$ **les polynômes d'Hermite définis par** $H_n(x)=(-1)^n\,e^{x^2}\frac{d^ne^{-x^2}}{dx^n}$.

1) En observant que $\frac{d^ne^{-x^2}}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}e^{-x^2}}{dx^{n-1}}\right)$ **et que** $\frac{d^{n-1}e^{-x^2}}{dx^{n-1}}=(-)^{n-1}e^{-x^2}H_{n-1}$ **, montrer que** $H_n(x)=2xH_{n-1}(x)-H'_{n-1}(x).$

2) Vérifier que $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$.

3) Soit $\varphi_n(x) = a_n e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$, **avec** $a_n \in \mathbb{R}$ **choisi tel que** $\|\varphi_n\|_2^2 = \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = 1$. **Calculer** φ_n **en fonction de** a_n **pour** $n = 0, 1, 2, 3$.

On admet que les φ_n **constituent une base hilbertienne de** $L^2(\mathbb{R})$ **.**

4) Soit $f(x) = x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}$. **Vérifier que** $f = \frac{1}{8a_3}\varphi_3 + \frac{3}{4a_1}\varphi_1$ **et en déduire** $\langle f, \varphi_1 \rangle$, $\langle f, \varphi_3 \rangle$ **et** $\langle f, \varphi_n \rangle$ **pour** $n \neq 1, 3$ **en fonction de** a_n.

5) Justifier l'égalité $\|f\|_2^2 = \langle f, \varphi_1 \rangle^2 + \langle f, \varphi_3 \rangle^2$ **et en déduire la valeur de** $\|f\|_2^2$ **en fonction de** a_1 **et** a_3.

6) **Calculer la valeur de** $\|f\|_2^2$ **sachant que** $a_n^2 = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}$.

Juin 2005

EXERCICE 1 **Soit pout tout** $n \in \mathbb{N}$, **les distributions** $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} \delta_k$ **et** $T = \sum_{k=0}^{k=\infty} \delta_k$.

1) Soit $\varphi \in S$ **, espace des fonctions à décroissance rapide; On rappelle que** $\lim_{x \longrightarrow \infty} \left| x^2 \varphi(x) \right| = 0$. **Montrer qu'il existe** $N \in \mathbb{N}$ **tel que** $|\varphi(n)| \leq \frac{1}{n^2}$ **pour tout** $n \geq N$.

2) Montrer que $T_n \in E'$ **et** $T \in S'$.

3) Montrer que $T_n \longrightarrow T$ **dans** S'.

EXERCICE 2 **Soit les fonctions**

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } |x| > 2 \\ 1 \text{ si } |x| < 1 \\ 2 - |x| \text{ si } 1 < |x| < 2 \end{cases} \quad \textbf{et} \quad g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } |x| > 1 \\ 1 - |x| \text{ si } 0 < |x| < 1 \end{cases}$$

1) Dire pourquoi les fonctions f **et** g **définissent-elles des distributions.**

2) Vérifier que $f = g * (\delta + \delta_1 + \delta_{-1})$ **;**

3) Calculer les transformées de Fourier $Fg(\lambda)$ **et** $Ff(\lambda)$.

4) Calculer la dérivée $f'(x)$ **au sens des distributions ainsi que sa transformée de Fourier** $Ff'(\lambda)$ **de** f'. **En déduire** $Ff(\lambda)$ **. Comparer avec 3).**

EXERCICE 3 **Soit l'équation l'équation intégrale :**

$$f(t) = t^2 + \int_0^t f(u) \sin(t-u) du$$

1) Ecrire dans D'_+ **l'équation de convolution correspondante.**

2) Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre, pour $t > o$ **, l'équation intégrale.**

EXERCICE 4

1) Utiliser le calcul symbolique pour calculer l'inverse dans D'_+ **de la distribution** $T = \delta'' + 2\delta' + 2\delta.$

2) Soit f **la solution correspondant aux conditions initiales** $f(0)$ **et** $f'(0)$ **de l'équation différentielle**

(1) $$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$$

On note Yf **la distribution de** D'_+ **définie par** f**. Montrer que** Yf **est solution de l'équation de convolution**

$$(\delta'' + 2\delta' + 2\delta) * Yf = [f'(0) + 2f(0)]\,\delta + f(0)\delta'.$$

3) Déterminer f **dans** $\mathbb{R}^+$ **pour** $f(0) = 0$ **et** $f'(0) = 2$ **.**