Mathématiques d'Est en Ouest
Théorie et pratique : l'exemple des distributions

Jean-Michel Kantor

La science au regard mauvais
Elle (la mathématique) lance un regard mauvais à l'humanité, elle la force à voir la dure réalité en face, le fait réel uniquement, celui qui réduit à néant les fantaisies les plus merveilleuses comme les plus caustiques.
Robert Musil[1]

Introduction

Quelles leçons tirer des bouleversements qui ont marqué le vingtième siècle quant au développement scientifique ? Les mathématiques ont-elles subi le même bouleversement ? Leur rôle a-t-il été modifié, ont-elles gardé au temps d'Hiroshima la valeur morale et esthétique que vantait Platon ? Ces questions sont trop générales, mais elles suggèrent un débat.

Nous n'étudions ici qu'une situation, un contexte bien précis, celui des travaux mathématiques menés en Russie et en France à partir des années trente, inspirés entre autres par l'œuvre fondatrice d'Hadamard, et qui ont conduit au développement mondial de l'analyse mathématique et de la théorie des équations aux dérivées partielles. Les documents existent, plus de cinquante ans ont passé, assez pour qu'un examen historique soit possible.

La disparition de Laurent Schwartz, éminent mathématicien français, membre du groupe Bourbaki et l'un des animateurs de la communauté mathématique pendant plus de vingt ans, peut être l'occasion de revenir sur la naissance de la théorie des distributions. La publication récente d'archives soviétiques permet de compléter le travail des historiens, en particulier celui d'Adolphe Yuskevitch[2], critique du livre de Jesper Lützen (dont la compétence reconnue en histoire des mathématiques et la conscience professionnelle sont hors de cause) [Lu]. Yuskevitch examine, entre autres, avec le plus grand soin les articles publiés en russe (nos références complètent celles de son article). En effet si les temps ont changé, les barrières linguistiques persistent, qui ont ralenti les échanges d'idées entre l'Ouest et la Russie, et d'ailleurs ont empêché que le texte de Yuskevitch, bien que publié en 1991 dans la

[1] Carnets. Extrait du cahier 16, L'espion (1923-24), W I 1979-80.

[2] Voir p. 30 la traduction de l'article de Adolphe P. Yuskevitch publié en 1991 « Quelques remarques sur l'histoire de la théorie des solutions généralisées d'équations aux dérivées partielles et des fonctions généralisées » (Ist. Math. Issled. 1991, p. 256–266, en russe).

revue d'histoire qu'il avait créée, soit mieux connu. Bien entendu les mathématiques ne sont pas à l'abri de comportements chauvins dans la compétition internationale (l'effet « Popov » à l'Est comme à l'Ouest), Yuskevitch en est conscient, et ne tombe aucunement dans ce travers. Il a visiblement à cœur de montrer qu'il y avait une vie mathématique intense à l'Est, dans l'URSS isolée par la guerre froide et la « construction du socialisme dans un seul pays ». Nous évoquons les différentes sensibilités, les différents styles, que cet épisode révèle.

C'est aussi l'occasion de revenir sur la coopération scientifique internationale de cette période, encore si peu étudiée[3]. La médaille Fields fut attribuée à Laurent Schwartz à Harvard en 1950 en pleine guerre de Corée : la médaille Fields de la guerre froide, a-t-on pu dire (en faisant référence aux difficultés d'obtention du visa pour Hadamard et pour son neveu Schwartz). Un épisode mal connu en tout cas, comme nous le verrons, des rapports entre science et politique. D'autre part dans les années trente l'idée de fonction généralisée ou distribution était « dans l'air », utilisée par le grand physicien Paul Adrien M. Dirac (1902-1984), ou par Solomon Bochner (1889-1982) dont les travaux ont souvent été précurseurs de ceux des distributions [Boc] : les physiciens utilisaient les distributions comme Monsieur Jourdain la prose, sans le savoir. La naissance même de la théorie des fonctions généralisées-distributions peut donc être riche en leçons à une époque où les relations entre mathématiques et physique évoluent (cf [JQ]).

Enfin, cette étude est l'occasion de mettre en scène deux conceptions différentes du rôle des mathématiques, à l'Est et à l'Ouest (pour simplifier), l'une autour de Schwartz et Bourbaki visant à privilégier les structures, l'autre autour de Sobolev et de l'école péterbourgeoise, étroitement liée aux sciences physiques. Toutes ces questions sont encore d'actualité, et nous pensons que nous devons à la mémoire de Laurent Schwartz et à son sens aigu de la place du savant dans la Cité, de les aborder avec honnêteté et rigueur, mais de les aborder enfin.

Les acteurs : Hadamard (1865–1963), Sobolev (1908–1989) et Schwartz (1915–2002), deux mondes

Laurent Schwartz est un mathématicien admiré dans le monde entier, connu bien au-delà des cercles de spécialistes pour son rôle de « mathématicien dans le siècle » [S2]. L'un des membres actifs du groupe Bourbaki après la guerre, il fut aussi un homme de combat défendant toutes les causes humanitaires du vingtième siècle, depuis son trotskisme actif entre 1936 et la Libération jusqu'au Comité Audin pendant la guerre d'Algérie, et celui des mathématiciens pour les droits de l'homme dans les pays de l'Est. La personnalité de Schwartz condense les qualités de l'intellectuel français, issu d'une longue tradition d'ascension sociale qui a fourni à notre pays des intellectuels éminents.

Rien — à part les mathématiques — ne rapproche la personne de Laurent Schwartz de celle de Sergei Sobolev, un grand savant lui aussi, bien moins connu à l'Ouest : Sergei L'vovich Sobolev est né à Saint-Pétersbourg en 1908 d'une famille apparentée à la noblesse ; son père était un avocat important de Saint-Pétersbourg (devenue Léningrad). Dans la compétition qui dure encore entre les villes de Moscou et Saint-Pétersbourg, créée par Pierre le Grand en 1703, les écoles mathématiques

[3] Un ouvrage récent qui concerne le développement international des mathématiques de 1800 à 1945 oublie la Russie !

ont eu un rôle particulier : Saint-Pétersbourg fut la ville d'Euler qui y passa une grande partie de sa vie, et aussi Chebyshev (1821-1894), Markov (1856-1922), Lyapounov (1857-1918). On voit, rien qu'à cet énoncé, que la vie mathématique y a été marquée par une large ouverture vers les sciences et les techniques. C'est aussi à Saint-Pétersbourg que les talents d'organisation de Steklov (1863-1926), mathématicien appliqué, conduisirent à la création d'Instituts de recherche de l'Académie qui portèrent ensuite son nom. On trouvera un récit détaillé des luttes politiques à Moscou et Léningrad au sein des sociétés mathématiques et de leurs conséquences dramatiques (« l'affaire Lusin ») dans plusieurs publications récentes [De, Mar, M-Sh, Viu, Y] entre autres, ainsi que dans les numéros de la revue d'histoire créée par A.P. Yuskevitch *Istoriko-Matematikcheskie Issledovanie*. Voir aussi [G-K].

Sobolev fait de brillantes études précoces comme souvent en Russie au vingtième siècle. À l'université où il entre en 1925 il suit les cours de Grigorii Mikhailovich Fikhtengholtz (1888-1959), Nikolai Maksimovich Gunther (1871-1941) (ce dernier en théorie du potentiel). Il fait la connaissance alors de Vladimir Ivanovich Smirnov (1887-1974), qui sera professeur puis collaborateur de Sobolev, professeur à partir de 1925 et plus tard doyen de la faculté « Mat-Mekh » pendant 25 ans, ce qui ne lui évita pas d'être l'objet de remontrances en 1957 à l'occasion d'un hommage à Euler : louant l'influence positive de Fréchet, présent à la cérémonie, sur les mathématiques soviétiques, Smirnov se voit reprocher en public par Kolmogorov son « amour pour l'étranger » ([Y], page 31). La première publication de Sobolev est un contre exemple à un résultat annoncé par Saltykov et repris dans son cours par Gunther. Il rejoint en 1929 après sa thèse un institut de sismologie où il collabore avec Smirnov avant d'intégrer l'Institut Steklov et de devenir membre correspondant à 24 ans, puis membre à part entière — le plus jeune — de l'Académie des sciences de l'URSS. Il mènera outre sa carrière mathématique, ouverte vers les autres sciences et vers l'extérieur de l'URSS dans un contexte difficile — il parlait couramment le français qu'il avait appris dès l'enfance avec sa gouvernante belge — différents projets dont la création du centre sibérien de l'Académie des sciences, manifestant toute sa vie sa fierté russe et une grande loyauté envers le pouvoir soviétique (il est membre du Parti depuis les années trente), qui ne l'ont pas empêché de prendre des positions parfois difficiles et courageuses (par exemple dans l'affaire Lysenko), parfois plus orthodoxes, comme dans l'affaire Lusin auquel il reproche de manière virulente, avec d'autres, en 1936 son ouverture et ses publications à l'étranger [De].

Entre ces deux personnalités il y a Hadamard, « *le petit père Hadamard* », comme l'appelaient avec familiarité ses admirateurs, ou « *la légende vivante des mathématiques* », expression utilisée par Hardy pour le présenter à la London Mathematical Society en 1944 [Ka]. Après Poincaré, Hadamard est sans doute le Français qui a marqué le plus le vingtième siècle mathématique. Il est lui aussi représentatif du meilleur des traditions humanistes et universalistes de la culture française. Pour la suite il faut remarquer qu'Hadamard est le grand-oncle par alliance de Laurent Schwartz qu'il suivra dès ses années de lycée, puis à l'École normale supérieure où Hadamard professait. Son séminaire, à l'origine de la naissance du groupe Bourbaki (à travers le Séminaire Julia), fut le lieu où s'exerça son influence sur plusieurs générations de normaliens. Laurent Schwartz a reconnu (*loc. cit.*) la part très importante qu'a eue Hadamard dans sa formation. On connaît bien la vie d'Hadamard [M-Sh] — l'immensité de son œuvre mathématique, son engagement à l'extrême gauche lui aussi, d'abord motivé par l'affaire Dreyfus puis par la montée du nazisme, et son compagnonnage aux côtés du parti communiste avec Frédéric Joliot-Curie. Les archives de l'Académie contiennent des copies d'articles publiés lors de ses séjours en URSS, vantant le système et les mérites de la science soviétique [H].

Les faits

Les années trente : les fonctionnelles de Sobolev

Dans le cadre de ses activités militantes pour l'amitié entre les peuples, Hadamard, voyageur infatigable, fit de nombreux voyages à l'Est, en particulier en Chine et en URSS. En URSS il séjourna :

– en 1930 : Congrès des mathématiciens soviétiques à Kharkov, juillet ; il voyage ensuite à Kiev. Il rencontre Sobolev à Kharkov et ils discutent ensuite ensemble en français, à Léningrad. Hadamard demande à Sobolev de le tenir au courant de ses travaux [M-Sh p. 217] ;

– en mai 1934 : Hadamard est membre d'une délégation de neuf savants français dans le cadre de la semaine de la science française en URSS. À Léningrad il rencontre Sobolev, mais il ne participe pas au second Congrès des mathématiciens soviétiques qui se tient du 24 au 30 juin 1934, et où Serge Sobolev donne trois conférences :

1. une nouvelle méthode de résolution du problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles hyperboliques ;
2. solutions généralisées de l'équation des ondes ;
3. sur le problème de diffraction pour les surfaces de Riemann.

Le contenu de ces interventions a été certainement discuté quinze jours plus tôt avec Hadamard, qui suivait avec intérêt les travaux de son émule : Sobolev lui-même a reconnu l'influence de la notion de partie finie mise à jour par Hadamard en 1903 (!) dans ses découvertes de 1934-1935. Comme le soulignent la nécrologie de Sobolev par Jean Leray [L4], et la recension du livre [Lu] par Yuskevitch, la découverte des fonctionnelles généralisées doit être attribuée à Sobolev dans ses articles de 1935 et 1936 :

– Le problème de Cauchy dans l'espace des fonctionnelles, *Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1935, volume III (VIII), Nffi 7 (67).

– Méthodes nouvelles à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, *Math. sbornik* (recueil mathématique), 1936, t.**1** (43), p. 36–71.

Dans ces deux articles, Sobolev définit explicitement les fonctionnelles généralisées comme formes continues sur l'espace des fonctions différentiables à l'ordre m à support dans un compact K pour m et K fixés. Il établit les propriétés fondamentales des fonctionnelles généralisées.

Pourquoi en français ?

L'année 1934, avec l'assassinat de Kirov, un dirigeant communiste très populaire, à Léningrad, marque un tournant dans la situation de l'URSS qui va peu à peu se replier sur elle-même et où les combats « idéologiques » vont faire rage, comme en témoigne la campagne contre Lusin déjà évoquée. Dans cette campagne le rôle des publications, en Russie ou à l'étranger, en russe ou en langue plus accessible, joue un rôle important. La publication de l'article fondateur de Sobolev en russe et en français dans le même volume des Doklady n'est pas innocente. C'est à la fois un exemple de patriotisme que donne Sobolev détracteur de Lusin, mais cela pouvait représenter aussi le risque de rappeler les origines sociales de l'auteur, bien que les publications en français fussent assez fréquentes. Il y a donc fort à parier que cette double publication fut au moins bien accueillie par Hadamard, sans doute même suggérée. En 1936 Hadamard repasse à Moscou de retour de Chine. En 1945 il effectue un nouveau voyage à Moscou et Léningrad comme membre de la délégation française aux célébrations du 220^{e} anniversaire de l'Académie des sciences de Russie (puis d'URSS). Il ne rencontre pas Sobolev (on verra pourquoi). Cependant dès 1935 les rapports qu'il fait à ses retours montrent chez Hadamard la conscience des problèmes (il évoque la disparition tragique d'une étoile montante, il s'agit sans doute du suicide du jeune et brillant mathématicien Schnirelman, théoricien des nombres et topologue, en 1938). Hadamard y loue les relations étroites entre sciences pures et appliquées en URSS, même en mathématiques [H]).

La découverte de Sobolev

Sobolev, inspiré entre autres par les travaux d'Hadamard, a défini d'abord les solutions généralisées d'une équation aux ondes puis en 1934-1935 les « fonctions généralisées », sans qu'il soit question d'une équation de référence (contrairement à la description de [Lu], page 65), d'abord sous le nom de fonctions « idéales », en référence sans doute à l'introduction des nombres idéaux par Kummer, puis comme « fonctions généralisées » dans l'article fondateur de 1935. L'ancien terme évoquait dangereusement la philosophie idéaliste [M-Sh] à une époque où le philosophe marxiste d'origine tchèque Kolman et d'autres adeptes de la « science prolétarienne » sévissaient à Léningrad. Cette hésitation sur l'appellation comme la double publication en russe et en français confirment que Sobolev avait une claire idée de l'importance de son travail et de son caractère général, contrairement aux affirmations de [Lu]. Nous renvoyons à Yuskevitch pour une analyse détaillée des différents articles de Sobolev et de ses inspirateurs et collaborateurs. Outre les travaux d'Hadamard, l'origine de l'article de Sobolev peut être retrouvée chez Gunther [Na]. L'esprit curieux et enthousiaste d'Hadamard ne pouvait rester indifférent à ce travail en cours, il lut l'article de 1936 dès réception à l'ENS. D'ailleurs jusqu'à la fin de sa vie Hadamard fut abonné aux principales revues mathématiques soviétiques [ManS]. Parmi les professeurs de l'École normale figurait, outre Hadamard, Jean Leray, spécialiste des équations aux dérivées partielles et qui lui aussi a participé à la « préhistoire des distributions » avec sa notion de solution faible d'équations aux dérivées partielles [L1]. Il a raconté à Serge Sobolev dans les années quatre-vingt qu'il avait discuté de son article de 1936 avec Laurent Schwartz avant la guerre (Communication personnelle de V. Chechkin, professeur à la Chaire d'équations aux dérivées partielles de l'université de Moscou et petit-fils de S. Sobolev).

Il fallut attendre plus de dix ans, dont quelques années sans travail mathématique puis de lente maturation, pour que naisse le travail de 1945 de Schwartz, qui reprend la définition de Sobolev. Mais entre temps Sobolev avait quitté la scène par une porte dérobée ! Sobolev n'a pas poursuivi son travail dans cette direction, et a laissé à Schwartz le champ libre pour développer la théorie où manquaient essentiellement la transformation de Fourier et la structure d'espace topologique sur l'espace des distributions[4].

La première publication où Schwartz cite ses sources [S1] contient d'ailleurs une note (Note 4 page 5 de l'introduction), étrange par la présentation partielle et antichronologique des articles de Sobolev : « Soboleff[5] ; Friedrichs[6] ; Kryloff[7]. Certains articles signalés dans les notes précédentes sont postérieurs aux distributions, mais les auteurs ignoraient les distributions par suite de la lenteur de l'impression, des communications internationales, ou de ma publication. Voir aussi les fonctionnelles de Soboleff[8] ».

Les deux premières références n'ont pas un intérêt crucial ; la dernière « Méthodes nouvelles ... » est l'article déjà cité. Par contre l'article des *Doklady* de 1935 (reçu le 17.7.1935) est « oublié ».

De plus cette Note est restée à l'identique dans les éditions « entièrement revues et corrigées » ultérieures.

La clé du mystère

Dans son autobiographie, Schwartz, après avoir fait une description *a minima* de la découverte de Sobolev de 1935, tirée de l'article qui n'est pas cité dans la Note 4 ci-dessus, se demande ([S2], p. 236) pourquoi Sobolev n'a pas poursuivi après la guerre ses travaux sur les fonctions généralisées.

La réponse est instructive. Sobolev a disparu du milieu de la recherche mathématique et de tout contact avec l'étranger de 1943 à 1953 parce qu'il était occupé à d'autres activités, des mathématiques appliquées, très appliquées même. Il devint adjoint principal du directeur I. V. Kurchatov au « Laboratoire 2 », d'abord situé au sein de l'université de Moscou, et qui devint ensuite le LIPAN. C'est dans ce laboratoire que vit le jour la première bombe atomique soviétique [Viz].

On sait qu'à l'Ouest comme à l'Est de grands mathématiciens ont joué un rôle crucial dans les projets atomiques [Go, p. 383]. La physique complexe des ondes de choc qui entre en jeu conduit en effet à la résolution d'équations non linéaires, et Bethe (qui en parla à Von Neumann) avait remarqué le caractère instable de l'approximation numérique des solutions ; les compétences des meilleurs mathématiciens étaient requises ! Ces travaux essentiels à la défense soviétique conduisirent Sobolev à la résolution numérique des équations pour un réacteur nucléaire sphérique. Il étudia aussi l'effet appelé « effet-gun » et sa variation sous bombardement par neutrons. Ce sont des travaux essentiels pour les applications aux pertes en eau des réacteurs (Three-Mile Island et Chernobyl). Sobolev fut décoré de la plus haute médaille civile en 1951, celle de héros socialiste du travail. Bien entendu tout contact avec l'étranger lui était totalement interdit : même sa

---

[4] Lützen compare les articles de Sobolev (1936) et l'exposé de Schwartz de 1950, à Cambridge qu'il confond avec son manuel de 1950 qui ne contient pas le théorème des noyaux !

[5] « Sur quelques évaluations concernant les familles de fonctions ayant des dérivées à carré intégrables. » Comptes rendus Académie des Sciences URSS, **1** (1936), p. 279–282.

« Sur un théorème d'analyse foctionnelles ». Recueil Mat. (Math. Sbornik), **4** (1938), p. 471–496.

[6] « On differential operators in Hilbert spaces ». Amer. J. Math., **61** (1939), p. 523–544.

[7] « Sur l'existence des dérivées généralisées des fonctions sommables ». Comptes rendus Académie des Sciences URSS, **55** (1947), p. 375–378.

[8] « Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques normales ». Recueil Mat. (Math. Sbornik), **1** (1936), p. 39–71.

femme ne savait pas où Serge Sobolev disparaissait pendant des mois, après des passages rapides à son domicile. Sa liste de publications pendant cette période s'en est ressentie — sauf son manuel de 1950 occasionné par un séjour à l'hôpital pour jambe cassée —, et l'essentiel des travaux auxquels nous venons de faire allusion n'est toujours pas publié.

La suite est plus connue : Sobolev reprendra des activités scientifiques classiques dans les années soixante. Entre-temps, le livre *Théorie des distributions* et les travaux poursuivis par L. Schwartz (distributions tempérées et transformation de Fourier, applications de la théorie des espaces vectoriels topologiques) conduisirent à le considérer comme le père de la théorie. La reconnaissance tardive de la paternité de Sobolev dut attendre encore quinze ans [L3, L4]. L'apport principal de Schwartz, dans la lignée du projet Bourbaki (« algébriser l'analyse », en somme), fut de rapprocher la définition de Sobolev des travaux entrepris par Dieudonné sur les espaces vectoriels topologiques à partir de 1940 [Du] à la suite des travaux de Banach et Köthe, déja assez avancés. Schwartz comprit dans les années quarante cinq-cinquante l'intérêt d'appliquer la théorie des espaces vectoriels topologiques au cas des fonctions généralisées.

On pourrait appeler « appropriation par bourbakisation » ce processus de découverte par rapprochement de théories disjointes. Il fut fréquent. On peut se reporter à [Gr, Mi, S4] pour voir comment une belle idée de Minlos que Gross avait eue indépendamment s'est incarnée dix ans plus tard dans la théorie des applications radonifiantes, le nom de Minlos s'étant perdu au passage. Avec Sobolev, c'était l'auteur lui-même qui avait favorisé le processus ! Le terme de bourbakisation renvoie ici au « projet Bourbaki », qui consistait, en dégageant les structures profondes des mathématiques, à obtenir le degré de généralité donnant à une théorie sa puissance extensive, ici la mise à jour des structures d'espaces vectoriels topologiques. On peut d'ailleurs remarquer que Jacques-Louis Lions (1928-2001), s'est orienté dès sa thèse avec L. Schwartz vers l'utilisation des méthodes de majoration-inégalités de normes de type Sobolev, certes moins élégantes que l'analyse fonctionnelle, mais plus efficaces. Lions devint ensuite le chef des mathématiques appliquées françaises.

La percolation

La percolation (ou l'illumination, il emploie les deux mots) dont parle Schwartz dans son autobiographie, est probablement constituée du rapprochement final, à l'occasion d'un problème posé par Gustave Choquet, entre la théorie des fonctionnelles de Sobolev (définies comme formes linéaires continues) et les travaux de Dieudonné puis Dieudonné-Schwartz. Contrairement aux affirmations de [Lu] en effet, en janvier 1946 Schwartz avait une bonne connaissance des travaux de Sobolev : lors de son cours Peccot au Collège de France « il n'avait que le nom de Sobolev à la bouche », selon le témoignage des participants.

Conclusions et problèmes

À l'Est et à l'Ouest

En Russie, à l'époque du socialisme triomphant, la science se doit d'être au service du peuple pour le progrès de l'humanité. Cette conception actualise en fait une tradition culturelle ancienne en Russie, vivante à Saint-Pétersbourg, même dans le domaine des mathématiques. Qu'on songe à Pafnuty Chebyshev dont les soucis pour les systèmes articulés, le découpage des tissus, les lois du hasard, étaient étroitement reliés à des préoccupations d'une grande abstraction. Chebyshev a très explicitement décrit [C] l'intérêt mutuel que les mathématiques pouvaient tirer des applications pratiques. Dans le cas des fonctionnelles, Smirnov, dans une analyse profonde, montre combien les sciences expérimentales restent au cœur des soucis des mathématiciens russes (Y, page 46). Pour l'école russe, à l'époque concernée comme plus tard, les mathématiques se mesurent à leur efficacité. Même la topologie générale trouve chez Tychonov puis Pontryagin des applications à l'étude du contrôle des systèmes. On peut citer plus récemment les travaux d'Arnold et de son école. On conçoit d'ailleurs quelles furent les difficultés de la Lusitania, la célèbre école créée autour de la théorie des fonctions par Lusin à Moscou, largement inspirée par la théorie des ensembles (germanique) ou la théorie des fonctions (française) [GrK] . En France par contre (comme en Allemagne), le pays de Descartes, de Galois et de Bourbaki, on a favorisé le goût de la recherche mathématique « *pour l'honneur de l'esprit humain* » (l'expression est de Jacobi) : la valeur d'une théorie se mesure à son degré de généralité, une généralité purificatrice synonyme d'efficacité, et qui se manifeste par le rapprochement de domaines apparemment éloignés dans la production de théories nouvelles, et par l'élégance des concepts [B1]. Pour Schwartz par exemple la théorie des distributions prend de l'ampleur quand il marie la définition de Sobolev à la théorie des espaces vectoriels topologiques : il aboutit ainsi aux propriétés des topologies d'espaces de distributions qui permettront les travaux de ses élèves Lions et Malgrange et auparavant au théorème des noyaux annoncé au Congrès de 1950 à Cambridge (USA), qui est la cerise sur le gâteau qui lui rapporte la médaille Fields et la paternité ultérieure — à l'Ouest au moins — des distributions. Ces deux conceptions des mathématiques et de leur rôle ont été présentes simultanément dans chacun de ces pays, et parfois dans la production d'un même mathématicien : qu'on songe à Gel'fand en URSS ou dans le passé à Fourier en France. À l'époque qui nous intéresse, les aspects dominants étaient plutôt ceux que nous avons indiqués. On peut remarquer, même si la question dépasse notre propos, que les développements récents des sciences physiques et mathématiques montrent que la tension entre efficacité et rigueur reste forte (Intégrale de Feynman, théorie des cordes : voir le débat, par exemple à partir de [JQ]). Faut-il se réjouir que les bouleversements politiques des dernières décades risquent d'uniformiser mondialement les pratiques de la science mathématique et les réponses à cette « tension essentielle » [Ku] ?

Probabilités et mesure

La théorie de la mesure et ses relations avec les probabilités méritent une étude particulière : ce fut le premier écueil sérieux pour le développement du projet Bourbaki [B2]. Du point de vue qui nous intéresse, il est indéniable que la théorie des distributions a servi d'argument « idéologique » de poids à l'époque ; voici quelques lignes de l'introduction de [B1] concernant la théorie de la mesure : « ... la théorie de l'intégration est ainsi reliée, d'une part à la théorie générale de la dualité dans les espaces vectoriels topologiques, de l'autre à la théorie des distributions, qui généralise certains aspects de la notion de mesure, et que nous exposerons dans un livre ultérieur ». On voit combien ce point de vue « structuraliste » à l'œuvre aussi dans l'approche de Schwartz des distributions masquait la nature réelle des phénomènes en question, par exemple la finesse des processus aléatoires. On peut avoir un autre aperçu des erreurs commises à la lecture d'André Weil [W1], [W2] : « ... *Le moment est venu de chercher, par une analyse plus serrée, à décomposer les découvertes de Lebesgue en leurs éléments constitutifs pour y distinguer ce qui est essentiel au maniement d'une intégrale, et ce qui a trait aux opérations particulières des ensembles sur lesquels on a le plus souvent à opérer* ».

Plutôt qu'un mépris des applications en vue, ce fut la volonté de faire passer la structure avant le phénomène, l'architecture avant le portrait, qui fit prendre un retard de quinze ans aux probabilités françaises, un comble au pays de Laplace, Lebesgue, Borel et surtout de Paul Lévy, Fortet, Loeve, Ville et Doeblin qui dans les années trente ont participé au tout premier rang à la renaissance de la théorie des probabilités en développant les nouveaux aspects trajectoriels des processus dont les applications se révéleront d'une grande richesse dans la seconde moitié du XX^{e} siècle, y compris dans la solution des grands problèmes de l'analyse classique et son renouvellement (EDP, problème de Dirichlet, théorie du potentiel,...). On espère revenir ailleurs sur cette question, sur laquelle Schwartz lui-même apporte un jugement autocritique ([S2]).

Les difficultés de communication

Depuis la révolution jusqu'aux années soixante-dix, les échanges de mathématiciens ont souffert de nombreuses difficultés dues au manque de liberté intellectuelle en URSS, à la guerre froide, aux conflits à l'intérieur du système culturel et universitaire soviétique à partir des années soixante. C'est ainsi que la délégation soviétique déclina tout entière l'invitation à se rendre au Congrès de 1950 à Harvard, en pleine guerre de Corée. C'est à ce congrès que fut remise la médaille Fields à Laurent Schwartz. On suppose que Kolmogorov, membre du comité qui l'a décernée, n'a pas même mentionné le nom de Sobolev alors sous-directeur du Lipan. Dans les années soixante d'autres problèmes surgirent : nous avons été témoin des difficultés des échanges et de publication d'articles mathématiques en URSS, qui ont conduit par exemple à la naissance de la revue *Functionalnii Analyz* d'Israël M. Gel'fand dans les années soixante-dix.

Mathématiques et politique

À la fin de l'interview qui a servi de document de travail à Lützen, Laurent Schwartz fait un étonnant rapprochement entre la théorie des distributions et la démocratie politique, en citant l'éminent historien marxiste anglais Moses Finley pour lequel la démocratie a été découverte par les Grecs : « *Ce sont les Grecs, somme toute, qui ont découvert non seulement la démocratie, mais la politique. Je ne nie pas l'existence possible d'exemples antérieurs de démocraties ... Quelle que puisse avoir été la réalité de ces derniers faits, leur influence historique sur les sociétés ultérieures fut nulle. Les Grecs découvrirent la démocratie ...tout à fait comme Christophe Colomb, et non quelque navigateur viking, découvrit l'Amérique* » [Fi]. Autrement dit Sobolev aurait été le Viking de Colomb-Schwartz. Au-delà du débat général sur le réalisme philosophique (la démocratie fut-elle découverte ou inventée ? et les distributions ?), il est clair que les mathématiques comme les concepts politiques n'adviennent pas *ex nihilo*, et que le travail scientifique est un processus : Schwartz arrive après Sobolev, Dirac,... et même Euler ! Avec le recul et l'étude précédente la comparaison paraît plus qu'excessive, injustifiée. On a vu apparaître dans le même champ de l'analyse mathématique le point de vue de l'analyse algébrique dont l'importance paraît autrement prometteuse, ne serait-ce, en adoptant le point de vue de Bourbaki, que par les « ponts » qu'elle établit. Allant plus loin, et tenant compte des non-dits fréquents chez Schwartz (voir plus haut page 38), on peut se demander s'il n'y a pas là allusion au pouvoir idéologique qu'a constitué Bourbaki, parfois contre la volonté de certains de ses membres comme Claude Chevalley, resté libertaire toute sa vie (dans son bel interview nostalgique [Che] il reconnaît aussi avoir pensé « *apporter la lumière au monde mathématique* »), dans une volonté commune de renouveau. D'ailleurs c'est chez Chevalley qu'on trouve les remarques les plus intéressantes sur le rapport entre Bourbaki et la pensée politique : « *c'est chez le penseur politique Castoriadis, dit-il, que j'ai compris les erreurs de mon point de vue en logique mathématique !* »

Le pouvoir de Schwartz a personnifié celui de Bourbaki : mathématiques modernes et réforme dans l'enseignement, rôle du savant pour dire « le juste », et pouvoir indirect dans la vie de la Cité : l'aura du mathématicien, que Schwartz a su manier « pour la bonne cause » est bien faite pour évoquer la Grèce. Cette comparaison renvoie à un rapprochement fréquent chez le grand mathématicien entre action mathématique, combat politique et principes moraux.

La disparition d'une si forte personnalité évoque la fin parfois annoncée de l'époque des « grands récits », celle des acteurs romantiques qui créent des mythes (Bourbaki, le rêve des distributions). Cette époque-là est-elle advenue ? L'avenir nous le dira, et l'Histoire jugera.

Remerciements

L'auteur remercie Chandler Davis pour avoir autorisé la publication de la version française de l'article publié auparavant en anglais dans *The Mathematical Intelligencer*, et Serge Demidov pour avoir autorisé la traduction par l'auteur et la publication de l'article de Serge Yukevitch tiré de son journal *Istoriko-Matematikcheskie Issledovanie* (1991). Enfin il remercie Serge Kutateladze pour avoir attiré son attention sur plusieurs points historiques.

Références

[Be] Beaulieu Liliane. Bourbaki. Une histoire du groupe de mathématiciens français et de ses travaux (1934-1944). Thèse de Ph. D, Université de montréal. 1990

[Boc] Bochner Salomon. Review of L. Schwartz 's « théorie des distributions », Bull. Amer. Math. Soc. 58, (1952), pp. 78-85

[B1] Bourbaki Nicolas. Éléments de mathématique, livre VI Intégration, Hermann, 1952

[B2] Bourbaki Nicolas. L'architecture des mathématiques, p. 35-47, in Les grands courants de la pensée mathématique, sous la direction de F. Le Lionnais, Ed. Albert Blanchard

[Boul] Bouleau Nicolas. Dialogues autour de la création mathématique. Association Laplace-Gauss, 1997

[C] Chebyshev Pafnuty. Rapport du professeur extraordinaire de l'université de Saint- Pétersbourg sur son voyage à l'étranger.

[Che] Chevalley Claude. Nicolas Bourbaki, Collective Mathematician. The Math. Intelligencer, Vol. 7, nº 2, (1985), pp. 18-22

[De] Demidov Sergei S. The Moscow school of the theory of functions in the 1930s in : Golden years of Moscow Mathematics, S. Zravkovska, P. Duren Editors, vol. 6, AMS, LMS, 1993

[Du] Dugac Pierre. Jean Dieudonné mathématicien complet, Éd. Jacques Gabay, 1995

[Fl] Moses I. Finley, Démocratie antique et démocratie moderne, Payot, 1976

[Ge] Gel'fand Israel M. Some aspects of functional analysis and algebra. Proc. Int. Cong. Math, 1954, Amsterdam (1957), 253-276

[JQ] Jaffe Arthur ; Quinn Frank. « Theoretical mathematics » : toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics. Bull. Amer. Math. Soc. 29 (1993), n° 1, 1-13

[Go] Godement Roger. Analyse mathématique, tome 2, Springer-Verlag 2000

[Gr] Gross Leonard. Harmonic Analysis on Hilbert space, Mem, AMS, n° 46, 1963

[GrK] Graham Loren, Kantor Jean-Michel. Name Worshippers : Religion, Russian and French Mathematics, 1900-1930 sur www.math.jussieu.fr/∼kantor

[H1] Hadamard Jacques. Le mouvement scientifique en URSS, Rapport présenté en 1935 à Paris aux journées d'étude et d'amitié franco-soviétiques.

[H2] Hadamard Jacques. Rapport paru en 1945 après le 220e anniversaire de l'Académie des sciences de Russie

[Ka] Jean-Pierre Kahane. Jacques Hadamard. The Math. Intelligencer, vol. 13, n° 1, (1991), pp. 23-29

[Kub] Kuhn Thomas. La tension essentielle, Gallimard, 1990

[L1] Leray Jean. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta math. 63 (1934), p. 193-248

[L2] Leray Jean. Travaux de M. Laurent Schwartz, rapport annexe à la candidature de Laurent Schwartz, 1964, Académie des Sciences, Paris

[L3] Leray Jean. Rapport sur l'attribution du prix Cognac-Jay (Samaritaine) 1972 à Laurent Schwartz, Jacques-Louis Lions et Bernard Malgrange

[L4] Leray Jean. La vie et l'œuvre de Serge Sobolev, La Vie des sciences, série générale, t. 7 (1990), n° 6, p. 467-471

[Lo] Lorentz G. G. Mathematics and Politics in the Soviet union, Journal of Approximation Theory 116 (2002), p. 169-223

[Lu] Lutzen, Jesper. The Prehistory of the theory of distributions, Springer-Verlag, 1982.

[ManS] Mandelbrojt Szolem. Souvenirs à bâtons rompus, recueillis en 1970 et préparés par Benoît Mandelbrot, Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, n° 6, (1985), p. 1-46

[ManB] Mandelbrot Benoît. Chaos, Bourbaki and Poincaré, The Math. Intelligencer, vol. 11, n° 3, (1989)

[Mar] Maritz Peter. Around the graves of Petrovskii and Pontryagin The Math. Intelligencer, vol. 25, 2, (2003), p. 79

[M-Sh] Maz'ya Vladimir - Shaposhnikova Tatyana - Jacques Hadamard. Universal Mathematician. (AMS-LMS), 1998

[Mi] Minlos R. Continuation of a generalized random process to a completely additive measure Dokl. Akad. NaukSSSR (N. S.) 119 (1958), p. 439-442

[Na] Naumann Joachim. Remarcs on the prehistory of Sobolev spaces. Preprint series, Institut für Mathematik, Hunbold, universität zu Berlin.

[S1] Schwartz Laurent. Théorie des distributions, t. 1, Herman, Paris 1950

[S2] Schwartz Laurent. Un mathématicien aux prises avec le siècle, Éd. O. Jacob, 1997

[S3] Schwartz Laurent. Le point de vue de Laurent Schwartz in « Les mathématiciens » pour la Science, Paris (1996)

[S4] Schwartz Laurent. Séminaire « Applications radonifiantes », 1969-70, École polytechnique

[Viu] Viucinich A. Soviet mathematics and dialectics in the Stalin Era. Historia mathematica 27 (2000), pp. 54-76

[Viz] Vizguin V. Istoria sov. atomnogo proekta. Izdat. rousk. kristian. gumanitarnogo instituta St. Petersbourg

[Y] Yuskevitch A. P. Encounters with mathematicians, Golden Years of Moscow mathematics. S. Zdravkovska, Peter L. Duren Editors History of mathematics, vol. 6, AMS, LMS, 1991

[W1] Weil André. Calcul des probabilités, méthode axiomatique, intégration. Revue scientifique, t. 78, 1940, p. 201–208 ; p. 260-272

[W2] Weil André. L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, Paris, 1940, Œuvres vol. 1. Voir aussi Commentaire p. 551