Analyse fonctionnelle et distributions

Notes de cours - chapitres 1 - 2 - 3 (début)

Vũ Ngọc San
Université de Rennes 1

Introduction

L'analyse fonctionnelle est une branche très vaste des mathématiques, qui a des répercussions dans presque toutes les mathématiques, sans compter ses applications en physique, chimie, etc. Ce cours en présente une courte introduction, avec applications à la définition et aux premières propriétés des distributions.

Initialement, l'analyse fonctionnelle concerne l'étude des **espaces de fonctions.** Une fonction sera pour nous en général une application d'un ensemble X à valeurs réelles ou complexes. Plus rarement interviendront des applications entre deux ensembles abstraits X et Y.

Le lecteur est sûrement déjà familier avec de nombreux espaces de fonctions. On peut citer

- $C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$, les fonctions **continues** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ou $C^0(I;\mathbb{R})$ lorsque I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On utilise la même notation pour les fonctions continues entre deux quelconques **espaces topologiques** : $C^0(X;Y)$.
- $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, les fonctions **intégrables** au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On peut remplacer $\mathbb{R}$ par un espace mesuré abstrait.
- Les espaces L^p (qu'on examinera plus en détails au cours de ce texte), et en particulier l'espace hilbertien L^2.
- D'autres espaces aussi familiers mais qui se révéleront plus compliqués du point de vue de l'analyse fonctionnelle : $C^k(I), C^\infty(I), C^\omega(I)$ (fonctions analytiques réelles), etc.

Que veut dire étudier un tel espace ? Comme souvent en mathématiques, il s'agit de trouver des structures et d'en examiner les conséquences. Par exemple, on sait bien que $C^0(X,\mathbb{R})$ est un *espace vectoriel.* Si X est **compact** on a beaucoup mieux, c'est un **espace vectoriel normé complet** (un espace de Banach). Les L^p pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$ sont aussi des Banach, et L^2 est même un **espace de Hilbert**.

Ainsi, le point de vue de l'analyse fonctionnelle est d'oublier la fonction elle-même pour se concentrer sur la structure de l'espace de fonctions. Oui mais à quoi ça sert ? La question est parfaitement légitime. Lorsqu'on apprend l'analyse, on se familiarise avec toutes les propriétés possibles des fonctions : leurs régularités locales, leur comportement à l'infini, la géométrie de leur graphe, etc. Une fois qu'on sait tout sur une fonction, à quoi bon connaître la structure abstraite de l'espace dans lequel elle vit ? (sans compter qu'elle vit toujours dans une multitude d'espaces : par exemple l'identité $f(x) = x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dans C^0, C^k, C^∞, C^ω, L^p_{loc}, $\text{END}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (applications linéaires), $\mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (opérateurs bornés), etc.)

Autrement dit, chacun de ces espaces contient des fonctions qui ont des propriétés particulières ; une fois qu'on connaît ces propriétés, à quoi bon connaître les structures abstraites de ces espaces ? La réponse la plus facile (et, une fois qu'on y réfléchit, fondamentale et incontournable) est la suivante. Supposez que vous cherchiez, comme souvent, une **fonction solution d'une équation**. Parfois, une étude rapide de l'équation montre que la solution, si elle existe, possède nécessairement telle ou telle propriété. Cela peut vous inciter à chercher la solution dans tel ou tel espace fonctionnel. Puisque la fonction est *inconnue*, l'espace fonctionnel est la seule chose à votre disposition pour avancer ! Un exemple bien connu : la résolution d'une équation différentielle par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Un exemple : Le théorème de Cauchy-Lipschitz. — Cherchons à résoudre une équation différentielle, d'inconnue $u = u(t)$, qui se met sous la forme

$$\frac{du}{dt} = F(t, u(t)),$$

avec donnée initiale $u(t = 0) = u_0 \in \mathbb{R}$. (C'est le « problème de Cauchy »). Ici, $F : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée par le problème.

Théorème 0.0.1 (Cauchy-Lipschitz) *Si $F = F(t, x)$ est continue en (t, x) et uniformément lipschitzienne en x par rapport à $t \in [0, T]$, alors il existe une solution et une seule $u \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$ au problème de Cauchy.*

Démonstration. On considère l'équation intégrale équivalente

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(s, u(s)ds.$$

Bien entendu, on voulait que u soit de classe C^1. Néanmoins on remarque que si u est seulement continue (C^0) et solution de l'équation intégrale, elle est automatiquement C^1. On va donc chercher à résoudre l'équation intégrale dans l'espace $C^0([0, \tilde{T}]; \mathbb{R})$ (pour un $\tilde{T} \leqslant T$ bien choisi) qui, du point de vue de l'analyse fonctionnelle, est beaucoup plus simple que C^1. On va utiliser le fait que C^0 est un **espace métrique complet**, et chercher la solution comme un **point fixe d'une application contractante** (Théorème du point fixe de Picard). On considère donc l'application

$$L : u \mapsto L(u) \in C^0([0, \tilde{T}]; \mathbb{R})$$

avec

$$L(u)(t) = u_0 + \int_0^t F(s, u(s)ds).$$

Ainsi, u est solution de l'équation intégrale si et seulement si c'est un point fixe de L. La suite en TD... $\square$

Remarque 0.0.2 On n'utilise dans la preuve que le fait que $C^0([0,T];\mathbb{R})$ est un espace de Banach. Cela suggère qu'on peut généraliser la méthode à de nombreux autres cas, tant qu'on arrive à se ramener à un espace de Banach (ou, au moins, à un espace métrique complet). Cette idée est amplement utilisée dans la théorie des équations aux dérivées partielles (EDP). Une première application très importante consiste à remarque qu'en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^n$ on peut traiter des équations différentielle d'ordre arbitraire (à faire...) $\triangle$

Autre exemple : l'équation de Schrödinger Équation aux valeurs propres, problème variationnel, etc.

Distributions. — La portée de l'analyse fonctionnelle ne se limite (heureusement) pas aux problèmes de points fixes... Elle se révèle indispensable pour l'étude des distributions. Les distributions, ou « fonctions généralisées » sont elles-mêmes incontournables dans de nombreux problèmes physiques, mais leur théorie moderne a en grande partie été développée sans lien direct avec les applications.

Même si c'est très réducteur de les présenter ainsi, disons juste pour le moment que les distributions permettent de dériver autant de fois qu'on le souhaite des fonctions qui ne sont même pas continues !

Le cours se sépare donc naturellement en deux parties principales. La première partie est une introduction à l'analyse fonctionnelle abstraite, où l'on parlera un peu d'espaces plus généraux que les espaces normés, en vue de la deuxième partie, qui introduit le monde des distributions.

Le cours est basé (souvent de très près) sur les ouvrages cités dans la bibliographie.

Le lecteur est encouragé à répondre aux petits exercices et autres questions qui viennent au cours du texte.

Première partie

Analyse fonctionnelle

Chapitre 1

Rappels sur les espaces vectoriels normés

Les espaces vectoriels considérés le sont toujours sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Tout ici a été vu en cours de L3 "Topologie générale" et "Espaces vectoriels normés". On ne parle pas ici de dualité (voir plus tard)

Bibliographie : [3]

1.1 Espaces vectoriels normés

[définitions ; exemples ; topologie des boules. Théorème de Riesz : E est de dimension finie si et seulement si les compacts sont les fermés bornés. topologie quotient (?) . Séparabilité. Applications linéaires continues.]

Sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, une **norme** est une application de E dans $\mathbb{K}$, notée en général $\|\cdot\|$, vérifiant les axiomes

1. $\forall x \in E, \quad (\|x\| = 0) \Rightarrow (x = 0)$;
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *(homogénéité)* ;
3. $\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire)*.

Bien entendu, l'homogénéité implique que $\|0\| = 0$, et l'inégalité triangulaire implique ensuite $\|x\| \geqslant 0$.

Un « espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$ » (c'est-à-dire le couple $(E, \|\cdot\|)$) est appelé un **espace vectoriel normé** (EVN).

La fonction $d(x, y) = \|x - y\|$ est un distance, invariante par translation (donc $d(x, y) = d(0, y - x)$). Un EVN est donc aussi un espace métrique, et donc un espace topologique. Il est facile de vérifier que pour cette topologie,

les opérations d'espace vectoriel (addition, multiplication par un scalaire) sont continues. La norme elle-même est une application continue de E dans $\mathbb{K}$, puisqu'elle est 1-lipschitzienne.

Si E est de **dimension finie**, il est facile de trouver une norme sur E. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si $x = \sum_i x_i e_i$ on définit $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$; c'est bien une norme. Et, pour toutes les questions topologiques, il n'y a pas besoin d'aller plus loin :

Proposition 1.1.1 *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. En particulier elles définissent la même topologie (qui ne dépend donc pas de la norme !).*

On rappelle que deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont dites **équivalentes** lorsqu'il existe des constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ telles que

$$C_1 \|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant C_2 \|\cdot\|_1 .$$

Démonstration. Rappelons la preuve de la proposition, qui consiste à comparer une norme donnée $\|\cdot\|$ à la norme $\|\cdot\|_\infty$. Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, et si $C = \sum_i \|e_i\|$, on a, par inégalité triangulaire,

$$\|x\| \leqslant \sum_i |x_i| \, \|e_i\| \leqslant C \|x\|_\infty ,$$

ce qui prouve la première partie de l'inégalité. D'ailleurs cette inégalité dit que l'application $x \mapsto \|x\| : (E, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ est C-Lipschitzienne (le vérifier), donc continue. D'autre part, la sphère unité $S_\infty(0,1)$ pour $\|\cdot\|_\infty$ est compacte, car fermée dans la boule unité fermée qui elle-même est compacte comme produit de n intervalles compacts $[-1,1]$. La norme $\|\cdot\|$ admet donc un minimum strictement positif c sur $S_\infty(0,1)$, et on conclut par homogénéité :

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \geqslant c.$$

□

On a utilisé que la boule unité était compacte. C'est en fait une caractérisation de la dimension finie.

Théorème 1.1.2 (Riesz) *Soit E un espace vectoriel normé. Alors E est de dimension finie* si et seulement si *la boule unité fermée est compacte.*

Démonstration. Il nous reste à montrer que si la boule unité fermée $B := B_f(0,1)$ est compacte, alors E est de dimension finie. Pour cela on considère, par compacité, un nombre fini de points x_n de B tels que les boules de centres x_n et de rayon $1/2$ recouvrent B entièrement, et on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les x_i. On a évidemment

$$B \subset F + \frac{1}{2}B,$$

et donc, par récurrence, $B \subset F + \frac{1}{2^k}B$. En passant à la limite on voit que $B \subset \overline{F}$. Il reste à montrer que, étant de dimension finie, F est fermé dans E. Donc $B \subset F$, et, par homogénéité, $E \subset F$, donc $E = F$. □

En dimension finie, on voit avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ que les fermés bornés sont fermés dans un compact, donc compacts ; réciproquement, les compacts sont fermés et bornés (sinon on peut construire une suite qui « diverge vers l'infini »). Ainsi, une autre façon d'énoncer le théorème de Riesz et de dire que, dans un EVN E, *les compacts sont les fermés bornés si et seulement si E est de dimension finie.* (Dans un EVN, la boule unité fermée est toujours fermée...)

1.2 Séparabilité

Définition 1.2.1 *On dit qu'un* espace métrique *est **séparable** s'il contient une partie dénombrable dense.*

(ne pas confondre avec *séparé* !) Autrement dit, il existe une suite (x_n) dans l'espace (X, d) telle que

$$\forall x \in X \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad d(x, x_n) \leqslant \epsilon.$$

Tout espace vectoriel de **dimension finie** est séparable : il suffit de choisir des coordonnées rationnelles.

Tout espace métrique **compact** est séparable : pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il y a un nombre fini de boules de rayon $1/n$ qui recouvrent X. On choisit la suite de tous les centres de ces boules.

On en déduit qu'un espace qui est *réunion dénombrable de compact* est séparable (on dit *σ-compact*).

Enfin, on peut vérifier qu'une **partie** A d'un espace métrique X séparable reste séparable. Attention, ce n'est pas complètement évident, puisque, si (x_n) est une suite dense dans X, il se peut fort bien que A ne contienne aucun élément de cette suite ! (Pensez aux points de coordonnées rationnelles dans $\mathbb{R}^2$ et à une droite de pente irrationnelle). Néanmoins on sait que pour tout

n il y a une suite de boules de rayon $1/n$ qui rencontrent A. On choisit pour chaque boule un point dans l'intersection avec A.

Examinons le cas des espaces vectoriels normés, où on peut introduire une nouvelle notion, celle de famille totale, pour caractériser la séparabilité.

Définition 1.2.2 *Une partie $\mathscr{D}$ d'un espace vectoriel normé E est dite* ***totale*** *si elle engendre une partie dense de E.*

Il convient de préciser ce qu'on entend par *engendrer*. Si $\mathscr{D} \subset E$, on note $\mathrm{Vect}(\mathscr{D})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{D}$, c'est-à-dire l'ensemble des *combinaisons linéaires finies d'éléments de $\mathscr{D}$*.

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{D}) = \{\sum_{i\in I} \lambda_i x_i, \quad I \text{ fini}, (x_i) \in \mathscr{D}^I, (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I\}.$$

On note parfois $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathscr{D})$ pour préciser le corps (ou l'anneau) des scalaires utilisés dans les combinaisons linéaires.

Proposition 1.2.3 *Un EVN E est séparable si et seulement s'il contient une famille totale dénombrable.*

Démonstration. Bien entendu, une suite dense est bien une famille totale dénombrable. Réciproquement, supposons que $\mathscr{D}$ soit une telle famille. On voit facilement que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{D})$ (ou bien $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}(\mathscr{D})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) est dense dans $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathscr{D})$ qui est lui-même dense dans E par hypothèse. □

Évidemment, si E est de dimension finie, une famille est totale si et seulement si elle est génératrice (n'oubliez pas qu'un sous-espace de dimension finie est fermé). Dans ce cas, on peut toujours extraire une sous-partie $\mathscr{D}_0$ qui forme une **base** de E. En dimension quelconque, on a le résultat analogue :

Proposition 1.2.4 *Un EVN est séparable si et seulement s'il contient une famille totale dénombrable et* ***libre****.*

On appelle parfois une telle famille une « base topologique » (ici dénombrable).

Démonstration. Il reste à montrer que si E de dimension infinie est séparable on peut trouver une suite totale $\mathscr{D}_0$ libre. On se donne une suite totale $\mathscr{D} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on cherche à extraire $\mathscr{D}_0$ de la façon la plus naturelle : On commence par le premier x_n non nul ; notons-le y_0. Puis on prend le premier x_n qui ne soit pas colinéaire à y_0, etc. Une fois qu'on a construit $(y_0, \ldots, y_k)$, on choisit le premier x_n qui ne soit pas dans $\mathrm{Vect}(y_0, \ldots, y_k)$ et on le note y_{k+1}. Cette famille est évidemment libre. On voit qu'elle est totale en remarquant que, si on note $x_{n_k} = y_k$,

$$\mathrm{Vect}(x_0, \ldots, x_{n_k}) = \mathrm{Vect}(y_0, \ldots, y_k).$$

□

1.3 Applications linéaires continues

L'analyse fonctionnelle repose en grande partie sur l'étude des applications linéaires continues entre divers espaces. On rappelle la caractérisation fondamentale pour les EVN :

Proposition 1.3.1 *Soit $L : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés. Alors L est continue si et seulement si*

$$\exists C > 0, \quad \forall u \in E, \qquad \|L(u)\|_F \leqslant C \|u\|_E .$$

La plus petite de ces constantes s'appelle la norme de L. Et, en effet, l'espace $\mathcal{L}(E; F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un EVN muni de la norme

$$\|L\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|L(x)\|_F .$$

On notera $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E; E)$ les endomorphismes continus, et on notera $E' := \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ le **dual topologique** de E (par opposition au dual algébrique constitué des formes linéaires non nécessairement continues).

On aura souvent à faire à des suites d'applications linéaires. Le résultat suivant est le premier pas pour arriver au théorème de Banach-Alaoglu (voir section suivante + chapitre 4).

Proposition 1.3.2 *Soit E, F des EVN. Soit $\mathscr{D}$ une famille totale de E. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **bornée** de $\mathcal{L}(E; F)$, et soit $T \in \mathcal{L}(E; F)$.*

Supposons que

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad T_n(x) \to T(x).$$

Alors c'est vrai partout :

$$\forall x \in E, \qquad T_n(x) \to T(x).$$

Démonstration. On peut supposer $T = 0$. Soit $C > 0$ telle que $C \geqslant \sup_n \|T_n\|$, et fixons $x \in E$, $\epsilon > 0$. On peut trouver $y \in \mathrm{Vect}(\mathscr{D})$ tel que

$$\|x - y\| \leqslant \epsilon/C.$$

Il est clair que $T_n(y) \to T(y)$ $(= 0)$. Donc il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n \geqslant N$,

$$\|T_n(y)\| \leqslant \epsilon.$$

Donc

$$\|T_n(x)\| \leqslant \|T_n(x - y)\| + \|T_n(y)\| \leqslant 2\epsilon.$$

□

Attention il n'y a aucune raison pour que T_n converge vers T en norme dans $\mathcal{L}(E; F)$.

1.4 Espaces de Banach

Stefan Banach, mathématicien austro-hongrois 1892 - 1945.

Définition 1.4.1 *Un espace vectoriel normé E est un* ***espace de Banach*** *si l'espace métrique induit par la norme est* ***complet****.*

On sait que $\mathbb{R}$ est complet. Par produit (un produit fini — ou même dénombrable — de complets est complet), on en déduit que tout **espace vectoriel de dimension finie** sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet.

On rappelle également que l'espace des fonctions bornées d'un ensemble X dans un espace de Banach E est lui-même un espace de Banach, muni de la norme uniforme. Si X est un espace topologique, on notera $C_b^0(X; E)$ le sous-espace de telles fonctions *continues* (complet car *fermé* dans un complet).

Exemple 1.4.2 Ainsi, $C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ est complet pour la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Attention il n'est pas complet pour la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$. ★

Théorème 1.4.3 *Un espace vectoriel normé est un Banach si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.*

Démonstration. TD □

La complétude permet d'améliorer un peu le résultat de la proposition 1.3.2.

Proposition 1.4.4 *Soit E un EVN et F un Banach. Soit $\mathscr{D}$ une famille totale de E. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **bornée** de $\mathcal{L}(E;F)$.*

Supposons que

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad T_n(x) \text{ converge.}$$

Alors il existe $T \in \mathcal{L}(E;F)$ tel que

$$\forall x \in E, \qquad T_n(x) \to T(x).$$

Démonstration. Soit $C > 0$, $C \geqslant \|T_n\|$ $\forall n$, soit $x \in E$ et soit $\epsilon > 0$. On montre que $T_n(x)$ est de Cauchy en introduisant $y \in \mathrm{Vect}(\mathscr{D})$ tel que

$$\|x - y\| \leqslant \frac{\epsilon}{3C}$$

et en écrivant un inégalité triangulaire à trois termes pour estimer

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|.$$

On a donc une limite $T(x)$ et on vérifie facilement que T est linéaire en passant à la limite. De même, la caractérisation de la proposition 1.3.1 montre facilement que T est continue. □

Une application de cette proposition (avec un argument supplémentaire d'extraction diagonale) montre le théorème suivant.

Théorème 1.4.5 (Banach-Alaoglu) *Soit E un EVN **séparable**. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $E' = \mathcal{L}(E;\mathbb{K})$.*

*Alors il existe une **suite extraite** $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et une forme linéaire continue $T \in E'$ telles que*

$$\forall x \in E, \qquad T_{n_k}(x) \to T(x).$$

Démonstration. Soit $C = \sup_n \|T_n\|$, et soit (x_p) une suite dense. Pour chaque $p \in \mathbb{N}$ fixé, on a

$$\forall n, \qquad |T_n(x_p)| \leqslant C\,\|x_p\|.$$

Donc la suite $(T_n(x_p))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{K}$, donc d'adhérence $K_p \subset \mathbb{K}$ compacte. Par le théorème de Tychonoff dénombrable (ou une extraction diagonale), le produit

$$K := \prod_p K_p \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

est un compact dans un espace métrisable. On peut donc extraire de toute suite dans K une sous-suite convergente. Or, rappelez-vous que la convergence dans un espace produit est la convergence des coordonnées (convergence simple). On trouve donc une suite extraite $(T_{n_k})_k$ de $(T_n)_n$ telle que

$$\forall p, \qquad (T_{n_k}(x_p)) \text{ converge lorsque } k \to \infty.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la proposition 1.4.4. □

1.5 Les espaces L^p

On étudie les premières propriétés de ces espaces importants. D'autres viendront au fil du cours. On suppose ici connus les résultats standard de la théorie de l'intégration de Lebesgue.

Dans tout ce paragraphe, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue $|dx|$. L'abbréviation « p.p. » signifie *presque partout* pour cette mesure.

Cas $p = \infty$

Définition 1.5.1

$$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable}; \quad \exists C \geqslant 0, \quad |f(x)| \leqslant C \text{ p.p. sur } \Omega\}/\sim,$$

où la relation d'équivalence $\sim$ identifie deux fonctions qui sont égales presque partout. Autrement dit, f est dans $L^\infty(\Omega)$ si et seulement s'il existe un ensemble $E \subset \Omega$ de mesure nulle tel que f soit bornée sur $\Omega \setminus E$. On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C; \quad |f(x)| \leqslant C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Lemme 1.5.2 *Si $f \in L^\infty(\Omega)$, alors*

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty} \text{ p.p. sur } \Omega.$$

Démonstration. Soit C_n une suite décroissante tendant vers $\|f\|_{L^\infty}$. Pour chaque n on a un ensemble de mesure nulle E_n en dehors duquel $|f| \leqslant C_n$. Donc $|f| \leqslant \|f\|_{L^\infty}$ en dehors de l'union de tous ces E_n. Cette union, dénombrable, reste de mesure nulle. □

Théorème 1.5.3 $L^\infty(\Omega)$ *est un espace de Banach non séparable.*

Démonstration. Il est clair que L^∞ est un espace vectoriel. Abstraitement, le quotient par la relation d'équivalence $\sim$ correspond au sous-espace vectoriel des fonctions nulles sauf sur un ensemble de mesure nulle. Il est encore banal de montrer que $\|\cdot\|_{L^\infty}$ est une norme. On a donc un EVN. Montrons qu'il est complet.

Soit f_n une suite de Cauchy : pour tout entier $\epsilon > 0$ il existe un entier N_ϵ tel que, pour $n, m \geqslant N_\epsilon$, il existe un ensemble de mesure nulle $E_{\epsilon,n,m}$ tel que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \epsilon, \quad \forall x \in \Omega \setminus E_{\epsilon,n,m}.$$

En considérant l'union $E_\epsilon = \bigcup_{n,m} E_{\epsilon,n,m}$, on en déduit que $f_n(x)$ est une suite de Cauchy pour tout $x \in \Omega \setminus E_\epsilon$. Soit $f(x)$ sa limite. En passant à la limite en m on obtient

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \epsilon, \quad \forall x \in \Omega \setminus E_\epsilon, \quad \forall n \geqslant N_\epsilon.$$

En particulier $f \in L^\infty$ et

$$\|f - f_n\|_{L^\infty} \leqslant \epsilon, \quad \forall n \geqslant N_\epsilon,$$

donc f_n converge bien vers f dans L^∞.

Montrons maintenant que L^∞ ne peut pas être séparable. D'abord, on peut supposer que Ω est une boule ouverte (à faire !). Pour chaque $a \in \Omega$ on note $r_a = \frac{1}{2}\mathrm{dist}(a, \complement\Omega)$. Soit χ_a la fonction caractéristique de la boule euclidienne (ouverte) de centre a et de rayon r_a :

$$\chi_a = \mathbb{1}_{B(a,r_a)}.$$

Soit enfin

$$O_a := \{f \in L^\infty; \quad \|f - \chi_a\|_{L^\infty} < \frac{1}{2}\}.$$

La norme étant toujours continue dans un EVN, il est clair que O_a est un ouvert de L^∞. D'autre part si $f \in O_a \cap O_{a'}$ avec $a \neq a'$, on trouve

$$\|\chi_a - \chi_{a'}\| < 1.$$

Or puisque $a \neq a'$, il existe un ensemble de mesure positive sur lequel $\chi_a - \chi_{a'} = 1$ (deux boules dans $\mathbb{R}^n$ ne coincident que si elles ont même centre *et* même rayon !). On a donc une contradiction qui nous indique que

$$\forall a \neq a', \qquad O_a \cap O_{a'} = \varnothing.$$

On a donc une famille non dénombrable d'ouverts disjoints dans L^∞, ce qui empêche la séparabilité (si jamais on avait une suite dense (x_n) — qu'on peut supposer injective, on pourrait attribuer à chaque O_a un unique x_n qu'il contiendrait, ce qui implique que l'ensemble des a serait dénombrable). □

Cas $1 \leqslant p < \infty$

Cf TD.

Théorème 1.5.4 *L'espace $L^p(\Omega)$ pour $1 \leqslant p < \infty$ est un espace de Banach séparable.*

Théorème 1.5.5 *De tout suite (f_n) est une convergente dans L^p on peut extraire une sous-suite convergeant presque partout dans Ω.*

Démonstration. cf TD, sauf la séparabilité. □

Remarque 1.5.6 Ainsi, $L^1([0,1])$ est un espace de Banach. Comparer avec l'exemple 1.4.2 ! △

Montrons maintenant que L^p est séparable pour $1 \leqslant p < \infty$. On va faire une démonstration assez longue (il en existe de plus courtes !), mais très instructive. Plusieurs résultats intermédiaires sont d'intérêt indépendant.

Théorème 1.5.7 $C_c^0(\Omega)$ *(les fonctions continues à support compact dans Ω) est dense dans $L^1(\Omega)$.*

Démonstration. Voir le cours sur la théorie de l'intégration (ou les compléments de cours). □

Théorème 1.5.8 *Si (X,d) est un espace métrique compact, alors $C^0(X)$ est séparable (pour la distance uniforme).*

Démonstration. Vous vous rappelez sûrement comment on montre qu'une fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une fonction en escalier : on coupe l'intervalle en sous-intervalles de longueur $1/n$, et sur chaque sous-intervalle on approche la fonction par une constante. Ça marche uniformément car f est uniformément continue. On obtient donc que les fonctions caractéristiques de ces sous-intervalles forment une famille totale dénombrable.

Le problème avec cette construction est qu'une fonction caractéristique n'est pas continue. On y remédie en remplaçant cet ensemble de fonctions par une *partition de l'unité continue*. Faisons-le maintenant dans le cas général.

Pour n fixé, par compacité il existe un nombre fini de boules $B(x_{n,k}, 1/n)$, $k = 1, \ldots, N_n$ dont l'union recouvre X.

Pour chaque k on pose

$$\varphi_{n,k}(x) = \frac{d(x, \complement B_{n,k})}{\sum_{\ell=1}^{N_n} d(x, \complement B_{n,\ell})}.$$

On voit tout de suite

1. $\varphi_{n,k} \geqslant 0$;
2. $\sum_{k=1}^{N_n} \varphi_{n,k}(x) = 1$, $\forall x \in X$;
3. $\varphi_{n,k}(x) = 0$ si x n'est pas dans la boule $B(x_{n,k}, \frac{1}{n})$.

On va maintenant échantillonner une fonction $f \in C^0(X)$ donnée sur cette « base ». Soit
$$\tilde{f} = \sum_k f(x_{n,k})\varphi_{n,k}.$$
(Ici n est toujours fixé.) On a

$$\left|f(x) - \tilde{f}(x)\right| = \left|\sum_k \varphi_{n,k}(x)(f(x) - f(x_{n,k}))\right|. \tag{1.1}$$

Puisque f est uniformément continue sur le compact X, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout x, y dans X

$$d(x,y) \leqslant \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_{n,k})| \leqslant \epsilon.$$

Or, dans la somme (1.1), on voit bien grâce à la propriété (2.) que seuls interviennent les x qui sont à distance $\leqslant 1/n$ de $x_{n,k}$. Donc, si $1/n \leqslant \eta$, on a

$$\forall x \in X, \qquad |\varphi_{n,k}(x)(f(x) - f(x_{n,k}))| \leqslant \varphi_{n,k}(x)\epsilon,$$

et donc
$$\left|f(x) - \tilde{f}(x)\right| \leqslant \epsilon, \text{ càd } \left\|f - \tilde{f}\right\|_\infty \leqslant \epsilon.$$
On a bien montré que la famille $(\varphi_{n,k})_{n\geqslant 1, k=1,\dots N_n}$ est **totale** dans $C^0(X)$. $\square$

Nous ne sommes pas encore au bout de nos peines. Montrons un autre résultat intermédiaire.

Proposition 1.5.9 *Pour* $1 \leqslant p < \infty$*, l'espace* $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$*.*

Démonstration. On remarque déjà que $L^1 \cap L^\infty$ est bien un sous-espace de L^p. En effet si $p > 1$ on peut écrire

$$|f|^p = |f|\,|f|^{p-1},$$

donc si $f \in L^\infty$ avec $\|f\|_{L^\infty} = M$, on a, presque partout,

$$|f|^p = |f|\,|f|^{p-1} \leqslant |f|\,M^{p-1}$$

et donc $f \in L^p$ dès que $f \in L^1$. On a même démontré

$$\|f\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^1}^{1/p} \|f\|_{L^\infty}^{1-1/p} . \tag{1.2}$$

Soit maintenant $f \in L^p$. La fonction $|f|^p$ est positive et intégrable, donc limite croissante presque partout de fonctions étagées intégrables φ_n. Il faut maintenant bidouiller pour construire une suite dans $L^1 \cap L^\infty$ qui converge vers f dans L^p. On ajoute la « phase » nécessaire à $\varphi_n^{1/p}$ en posant

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) = 0 \\ \dfrac{f(x)}{|f(x)|} \varphi_n^{1/p}(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction $\varphi_n^{1/p}$ est encore mesurable et étagée (elle admet un nombre fini de valeurs), donc est dans $L^1 \cap L^\infty$. On voit donc que $f_n \in L^1 \cap L^\infty$ également (rappel : $|f_n| \leqslant \varphi_n^{1/p}$).

Considérons la quantité

$$|f_n(x) - f(x)|^p .$$

D'une part puisque $|f_n| \leqslant \varphi_n^{1/p} \leqslant |f|$, on estime facilement $|f_n(x) - f(x)|^p \leqslant |2f(x)|^p$(presque partout sur Ω), qui est intégrable.

D'autre part, par construction $|f_n(x) - f(x)|^p$ tend vers zéro presque partout.

En appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient que $f_n \in L^p$ et

$$\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$$

□

Théorème 1.5.10 *L'espace $C_c^0(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, pour $1 \leqslant p < \infty$.*

Démonstration. Puisque $L^1 \cap L^\infty$ est dense dans L^p par la proposition précédente, il suffit de montrer que C_c^0 est « dense dans $L^1 \cap L^\infty$ muni de la norme L^p ». Ici encore la démonstration est bâtie sur un résultat fondamental de la théorie de l'intégration, en l'occurrence le cas $p = 1$ (théorème 1.5.7).

On se donne donc $f \in L^1 \cap L^\infty$ et une suite φ_n dans C_c^0 qui tend vers f en norme L^1. On sait déjà contrôler la norme L^p par la norme $L^1 \cap L^\infty$ (formule (1.2)) donc on n'est pas loin d'avoir une suite qui tend vers f en norme L^p. Il reste à contrôler la norme L^∞ de φ_n. Pour cela on considère la boule fermée $B_f(0, M)$ dans $\mathbb{K}$, où $M = \|f\|_{L^\infty}$. Toutes les valeurs de f (sauf sur un ensemble de mesure nulle) sont dans cette boule, mais ce n'est pas le cas de φ_n *a priori*. On introduit donc le projecteur Π de $\mathbb{K}$ dans $B_f(0, M)$, et on pose $\psi_n(x) := \Pi(\varphi_n(x))$. Autrement dit,

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \varphi_n(x) & \text{si } |\varphi_n(x)| \leqslant M \\ \dfrac{\varphi_n(x)}{|\varphi_n(x)|} M & \text{si } |\varphi_n(x)| \geqslant M. \end{cases}$$

Par construction, $\|\psi_n\|_{L^\infty} \leqslant M$. Puisque $f = \Pi(f)$ (p.p.) on peut écrire

$$|f(x) - \psi_n(x)| = |\Pi(f) - \Pi(\varphi_n)|\,.$$

Étant une « projection », Π est une application contractante de rapport 1, donc $|\Pi(f) - \Pi(\varphi_n)| \leqslant |f(x) - \varphi_n(x)|$. D'autre part, Π donc ψ_n est continue. Donc ψ_n est une suite dans C_c^0 qui tend vers f « en norme $L^1 \cap L^\infty$ ». Donc elle tend également vers f en norme L^p (phrase cryptique pour dire qu'il suffit d'écrire l'inégalité (1.2) pour vérifier la convergence en norme L^p). □

On peut (enfin) en venir à la séparabilité de L^p.

Démonstration *séparabilité de L^p (théorème 1.5.4)*. On veut se ramener au cas de fonctions continues sur un compact. Mais Ω n'est pas compact... Soit donc K_n une suite exhaustive de compacts dans Ω. Bien sûr, si on note $C^0_{K_n}$ les fonctions continues à support dans K_n, on a

$$C_c^0(\Omega) = \bigcup_n C^0_{K_n}(\Omega).$$

Une telle fonction (dans $C^0_{K_n}$) peut être considérée comme une fonction sur K_n, et on a une injection continue $C^0_{K_n} \to C^0(K_n)$; autrement dit, on peut considérer $C^0_{K_n}$ comme une partie de $C^0(K_n)$, muni de la distance induite. Puisque $C^0(K_n)$ est séparable (théorème 1.5.8), on en déduit que $C^0_{K_n}$ est séparable, pour la norme uniforme. Mais sur un compact, la norme uniforme contrôle la norme L^p donc toute suite convergente dans $C^0_{K_n}$ converge également pour la norme L^p. Donc $C^0_{K_n}$ est séparable pour la norme L^p. Comme union dénombrable, $C_c^0(\Omega)$ est donc séparable pour la norme L^p. Puisque $C_c^0(\Omega)$ est dense dans L^p (théorème 1.5.10), on obtient une famille de $C_c^0(\Omega)$ totale dans L^p, qui est donc lui-même séparable. □

1.6 Espaces de Hilbert

David Hilbert, mathématicien prusse (1862–1943)

Référence [1].

Les espaces de Hilbert sont les EVN les plus « proches » des espaces de dimension finie, à la fois pour l'intuition et pour les calculs.

1.6.1 Espaces préhilbertiens

Définition 1.6.1 *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle **produit scalaire** une application*

$$\begin{aligned} E \times E &\to \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

telle que :

1. Pour $y \in E$ fixé, l'application $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire ; (**linéarité à gauche**)
2. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$; (**symétrie hermitienne**)
3. $\langle x, x \rangle \geqslant 0$; (**positivité**)
4. $(\langle x, x \rangle = 0) \Rightarrow (x = 0)$. (caractère « **défini** »)

La linéarité à gauche est une convention ; on trouve parfois la linéarité à droite. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la symétrie hermitienne est la simple symétrie $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$. Lorsque la dernière propriété 4. n'est pas satisfaite, on parlera de **semi-produit scalaire**.

Définition 1.6.2 *Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un **espace préhilbertien**.*

On sait bien que les espaces de dimension finie sont des espaces préhilbertiens. En analyse fonctionnelle, on utilise plutôt des espaces de dimension infinie (de type « L^2 »).

Exemple 1.6.3 L'espace $C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ est préhilbertien avec le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

★

Exemple 1.6.4 Si f et g sont dans $L^2(\Omega)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que le produit fg est dans L^1. On peut donc étendre l'exemple précédent et définir un produit scalaire sur $L^2(\Omega)$. ★

Exemple 1.6.5 En remplaçant la mesure de Lebesgue par la **mesure de dénombrement** dm sur un ensemble quelconque I, on obtient l'espace préhilbertien $L^2(I; dm)$ qu'on note en général $\ell^2(I)$. Rappelons qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ est intégrable pour la mesure dm si le suprémum des **sommes finies** $\sum_{j\in J\subset I} |x_j|$ est fini. Seul un nombre dénombrable de x_i est alors non nul. ★

Proposition 1.6.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz [1]**)** *Si E est préhilbertien on a*

$$\forall x, y \in E, \qquad |\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

On a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

L'inégalité seule est encore vraie pour un semi-produit scalaire.

Démonstration. On écrit que $\langle x + ty, x + ty\rangle \geqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui donne un binôme dont le discriminant doit être négatif (ou nul en cas d'égalité). Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'astuce classique est ensuite de ramener $\langle x, y\rangle$ sur l'axe réel en le tournant (multiplication par un complexe de module 1). □

Corollaire 1.6.7 *Si E est préhilbertien, l'application $x \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une **norme** sur E.*

Par exemple, sur $\ell^2(\mathbb{N})$ on a

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 .$$

Ainsi, un espace préhilbertien est naturellement un espace vectoriel normé. On sait que la norme est continue. C'est encore le cas du produit scalaire et des applications partielles $\phi_y : x \mapsto \langle x, y\rangle$.

Proposition 1.6.8 *La forme linéaire $\phi_y : x \mapsto \langle x, y\rangle$ est continue, et*

$$\|\phi_y\|_{E'} = \|y\| .$$

Démonstration. Cauchy-Schwarz donne $\|\phi_y\|_{E'} \leqslant \|y\|$ et on obtient l'égalité en choisissant $x = y$. □

Proposition 1.6.9 (identité du parallélogramme) *Soit E un espace préhilbertien et x, y dans E ; on a*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Cette identité permet de *caractériser* les produits scalaires à l'aide de la norme.

On dit que x et y sont **orthogonaux** si $\langle x, y\rangle = 0$. Évidemment on a

Proposition 1.6.10 (Pythagore) *Si x et y sont orthogonaux*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cette égalité caractérise l'orthogonalité ; ce n'est plus le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ puisque $|a+ib|^2 = |a|^2 + |b|^2$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

Définition 1.6.11 *L'**orthogonal** d'une partie $A \subset E$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout élément de A.*

$$A^\perp := \{x \in E; \quad \langle x, a\rangle = 0,\ \forall a \in A\} = \bigcap_{a \in A} \ker \phi_a.$$

Il en résulte (par la proposition 1.6.8) que $A^\perp$ est toujours **un sous-espace vectoriel fermé**. En outre $x \in A^\perp$ si et seulement si $A \subset \ker \phi_x$. Or

$$A \subset \ker \phi_x \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\mathrm{Vect}(A)} \subset \ker \phi_x,$$

car $\ker \phi_x$ est un sous-espace fermé. Donc

$$A^\perp = \left(\overline{\mathrm{Vect}(A)}\right)^\perp . \tag{1.3}$$

1.6.2 Espaces de Hilbert

Un espace préhilbertien est naturellement un EVN, donc un espace métrique. C'est sous-entendu dans la définition suivante.

Définition 1.6.12 *Un espace préhilbertien est un **espace de Hilbert** s'il est **complet** (comme espace métrique).*

Autrement dit un espace de Hilbert est un Banach dont la norme provient d'un produit scalaire.

Bien sûr, tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert. Les espaces $L^2(\Omega)$ ou $\ell^2(I)$ sont des espaces de Hilbert. Comme on l'a déjà remarqué, l'exemple 1.6.3 n'est pas un espace de Hilbert.

1.6.3 Théorème de projection

(Très important !)

Théorème 1.6.13 *Soit E un Hilbert et $K \subset E$ une partie* ***fermée, convexe*** *non vide. Alors, pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in K$ tel que*

$$\|x - y\| = d(x, K) := \inf_{a \in K} d(x, a).$$

Ce point, appelé ***projection de*** *x* ***sur*** *K et noté $P_K(x)$, est caractérisé par la propriété suivante :*

$$\begin{cases} y \in K \quad \textit{et} \\ \forall a \in K, \quad \Re\langle x - y, a - y\rangle \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Démonstration. L'égalité du parallélogramme associée à la convexité de K permet de montrer qu'une suite qui tend vers la réalisation de la distance minimale est de Cauchy... Cette même identité montre ensuite l'unicité. Pour la caractérisation, on peut introduire, pour tout $w \in K$, le segment dans K :

$$a(t) := (1 - t)y + tw$$

et écrire que $\|x - y\|^2 \leqslant \|x - a(t)\|^2$.

Réciproquement, si y vérifie (1.4), on voit en développant

$$\|x - a\|^2 = \|(x - y) + (y - a)\|^2$$

que

$$\|x - a\|^2 \geqslant \|x - y\|^2 ,$$

ceci pour tout $a \in K$. □

Ce théorème de projection est un des résultats les plus utiles dans l'étude des espaces de Hilbert. L'application de projection elle-même est un objet important.

Proposition 1.6.14 *P_K est 1-lipschitzienne (donc continue) :*

$$\forall x_1, x_2 \in E, \qquad \|P_K(x_1) - P_K(x_2)\| \leqslant \|x_1 - x_2\| .$$

Démonstration. (exercice) □

Évidemment, le cas où K est un espace vectoriel fermé est très fréquent dans les applications.

Proposition 1.6.15 *Soit F un* ***sous-espace vectoriel fermé*** *d'un espace de Hilbert E. Alors P_F est une* ***application linéaire continue*** *et $y = P_F(x)$ est caractérisé par*

$$\begin{cases} y \in K \quad & et \\ \forall v \in F, & \langle x - y, v \rangle = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Démonstration. Faire le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et utiliser l'homogénéité de F. Faire un dessin ! La linéarité de P_F est une conséquence de la caractérisation. □

Corollaire 1.6.16 *Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel fermé alors*

$$E = F \oplus F^\perp,$$

et P_F est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.

Démonstration. On écrit $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$. □

Corollaire 1.6.17 *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors*

$$E = \overline{F} \oplus F^\perp.$$

Démonstration. On rappelle que $\overline{F}^\perp = F^\perp$ (cf (1.3)). □

Corollaire 1.6.18 *Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace de Hilbert, on a*

$$\overline{F} = (F^\perp)^\perp.$$

Démonstration. On a toujours $F \subset (F^\perp)^\perp$ donc $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$. Puisque $E = \overline{F} \oplus F^\perp$ et $E = (F^\perp)^\perp \oplus F^\perp$ on voit que tout vecteur de $(F^\perp)^\perp$ doit être dans $\overline{F}$. □

Théorème de représentation de Riesz-Fréchet

C'est le cas hilbertien des multiples théorèmes de représentation de Riesz.

Théorème 1.6.19 *Soit E un Hilbert. Pour tout $\varphi \in E'$ il existe un unique élément $y \in E$ tel que*

$$\forall x \in E, \qquad \varphi(x) = \langle x, y \rangle.$$

En outre, $\|\varphi\| = \|y\|$.

Démonstration. Si $\varphi = 0$ l'existence et l'unicité de $y = 0$ sont évidentes. Sinon, on a $E = \ker\varphi \oplus (\ker\varphi)^{\perp}$ et il existe un vecteur $u \in (\ker\varphi)^{\perp}$ de norme 1. Bien entendu, $(\ker\varphi)^{\perp}$ est de dimension 1 (par exemple, la restriction de φ à un 2-plan de $(\ker\varphi)^{\perp}$ serait une forme linéaire en dimension finie (2), donc son noyau serait de dimension 1, donc il existerait un élément dans $(\ker\varphi)^{\perp}$ qui serait aussi dans $\ker\varphi$...).

Donc tout $x \in E$ s'écrit $x = z + \lambda u$ avec $\varphi(z) = 0$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Posons $y = \overline{\varphi(u)}u$. On a bien

$$\varphi(x) = \lambda\varphi(u) = \langle x, y\rangle.$$

L'unicité est évidente. La norme est donnée par la proposition 1.6.8. □

La variante suivante, où l'on se permet de « changer le produit scalaire », est souvent utilisée pour résoudre des EDP linéaires elliptiques. Si E est un espace de Hilbert réel, on dit qu'une forme **bilinéaire** a sur E est **coercive** s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(x,x) \geqslant \alpha \|x\|^2, \qquad \forall x \in E.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire a sur E est **continue** si et seulement s'il existe une constance C telle que

$$|a(x,y)| \leqslant C \|x\| \|y\|, \qquad \forall x, y \in E.$$

Théorème 1.6.20 (Lax-Milgram) *Soit E un espace de Hilbert réel. Soit a une forme bilinéaire continue et coercive sur E. Alors pour toute forme linéaire continue $\varphi \in E'$ il existe un unique $u_\varphi \in E$ tel que*

$$a(u_\varphi, y) = \varphi(y), \qquad \forall y \in E.$$

*Si maintenant a est **symétrique**, posons, pour $x \in E$,*

$$\Phi(x) := \frac{1}{2}a(x,x) - \varphi(x).$$

Alors $u = u_\varphi$ est caractérisé par la propriété

$$\Phi(u) = \min_{x\in E} \Phi(x).$$

Démonstration. Si a est le produit scalaire initial, on a $\varphi(x) = \langle x, u\rangle$ donc

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\|x-u\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2$$

dont le minimum est bien atteint en $x = u$. Pour le cas général, voir le TD. □

On peut généraliser en remplaçant le minimum de $\|x - u\|$ par la distance à un convexe fermé. On obtient le théorème de Lions-Stampacchia.

Somme hilbertienne, base hilbertienne

Le gros avantage des espaces de Hilbert et de pouvoir manipuler des sommes directes orthogonales et des « bases » pratiquement comme en dimension finie.

Définition 1.6.21 *Soit* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* ***sous-espaces fermés*** *de* E. *On dit que* E *est* ***somme hilbertienne*** *des* (E_n) *si* ·

1. *Les* E_n *sont deux-à-deux orthogonaux, c-à-d*
$$\forall n \neq m, \forall x \in E_n, \forall x \in E_m, \qquad \langle x, y\rangle = 0;$$
2. *L'union des* E_n *est* ***totale*** *dans* E.

On note alors
$$E = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$
Je rappelle que la deuxième condition dit que tout élément de E est approchable à ϵ près par une combinaison linéaire finie d'élements dans des espaces E_n, $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.6.22 *On suppose que* E *est somme hilbertienne des* (E_n). *Soit* $x \in E$ *et* $x_n = P_{E_n}(x)$. *Alors*

1. $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *(au sens usuel de la convergence des séries) ;*
2. $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2$. *(**égalité de Bessel-Parceval**).*

Réciproquement, étant donnée une suite (x_n) *de* E *avec* $x_n \in E_n$ *et* $\sum_n \|x_n\|^2 < \infty$, *alors la série* $\sum_n x_n$ *converge dans* E *et la somme* $x = \sum_n x_n$ *vérifie* $x_n = P_{E_n}(x)$.

Démonstration. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $F_k = \sum_{n=0}^{k} E_n$ et $\Pi_k = \sum_{n=0}^{k} P_{E_n}$. Une somme orthogonale étant directe, en écrivant tout $v \in F_k$ sous la forme $v = \sum_{n=0}^{k} v_k$, on voit que $\Pi_k(v) = v$. D'autre part si $v \in F_k^\perp$, on a $v \in E_n^\perp$, donc $P_{E_n}(v) = 0$ pour tout $n \leqslant k$; donc $P_{F_k} = \Pi_k$.

En particulier Π_k est contractant. Soit maintenant $\epsilon > 0$ et $\tilde{x} \in \mathrm{Vect}(\bigcup E_n)$ tel que $\|x - \tilde{x}\| \leqslant \epsilon$. Pour k assez grand, $\Pi_k(\tilde{x}) = \tilde{x}$ (rappelez-vous, $\tilde{x}$ est une CL *finie*). Donc
$$\|\Pi_k(x) - \tilde{x}\| = \|\Pi_k(x) - \Pi_k(\tilde{x})\| \leqslant \|x - \tilde{x}\| \leqslant \epsilon.$$

Donc
$$\|\Pi_k(x) - x\| \leqslant 2\epsilon.$$
On a bien montré que $\lim_{k\to\infty} \Pi_k(x) = x$.

Pour montrer Bessel-Parceval, on observe simplement que
$$\|\Pi_k(x)\|^2 = \sum_{n=0}^{k} \|x_n\|^2\,;$$
on a donc convergence du terme de droite, et égalité des limites.

Pour montrer la réciproque on voit en utilisant encore l'orthogonalité que la suite $y_k := \sum_{n=0}^{k} x_n$ est de Cauchy. En outre, pour tout n fixé, $P_{E_n}(y_k) = x_n$ pour $k \geqslant n$. La conclusion vient par continuité de P_{E_n}. □

Remarque 1.6.23 Il est assez étonnant de constater qu'on dispose ainsi d'un moyen de faire converger des séries $\sum_n x_n$ qui *ne sont pas absolument convergentes* (en général). Prenez par exemple n'importe quelle suite (x_n), $x_n \in E_n$, avec $\|x_n\| = 1/n$. Puisque $\sum_n \|x_n\|^2$ converge, la série $\sum_n x_n$ converge dans E ; pourtant, $\sum_n \|x_n\| = \infty$! △

Définition 1.6.24 *On appelle* ***base hilbertienne*** *de E une suite $(e_n)_{n\in NM}$ telle que*

1. $\|e_n\| = 1$ *(normalisation) ;*
2. $\langle e_n, e_m\rangle = 0$ *pour $n \neq m$ (famille orthogonale) ;*
3. *La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***totale*** *dans E.*

C'est bien sûr un cas particulier d'une somme hilbertienne. On obtient donc, pour tout $x \in E$, $x = \sum_n x_n$ avec $x_n = P_{\mathbb{K}e_n}(x)$. Or, on calcule facilement
$$P_{\mathbb{K}e_n}(x) = \langle x, e_n\rangle e_n;$$
en effet, $\langle x - \langle x, e_n\rangle e_n, e_n\rangle = 0$. En résumé :
$$\forall x \in E, \quad x = \sum_n \langle x, e_n\rangle e_n \text{ et } \|x\|^2 = \sum_n |\langle x, e_n\rangle|^2\,.$$

Réciproquement, étant donnée une suite quelconque de scalaires (α_n) qui vérifie $\sum_n |\alpha_n|^2 < \infty$, alors $\sum_n \alpha_n e_n$ converge vers un vecteur $x \in E$ tel que $\langle x, e_n\rangle = \alpha_n$ et $\|x\|^2 = \sum_n |\alpha_n|^2$.

Les bases hilbertiennes sont donc très pratiques puisqu'elles permettent de se ramener à l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$. Oui, mais existe-t-il toujours une base hilbertienne ?

Théorème 1.6.25 *Tout espace de Hilbert **séparable** admet une base hilbertienne.*

Démonstration. Donnons-nous une suite dense (x_n) et posons

$$F_n := \mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_n).$$

Les F_n forment une suite croissantes de sous-espaces de dimension finie et $\bigcup_n F_n$ contient (x_n) donc est dense dans E. On construit par récurrence une suite e_n ainsi : si $(e_0, \dots, e_{p(n)})$ est une base orthonormée de $F_n \subset F_{n+1}$, on la complète en une base orthonormée $(e_0, \dots, e_{p(n+1)})$ de F_{n+1} (avec donc $p(n) \leqslant p(n+1)$). La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite vérifie

$$\mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_{p(n)}) = F_n,$$

donc $\mathrm{Vect}((e_n)_{n\in\mathbb{N}})$ contient $\bigcup_n F_n$, donc est dense dans E. □

Exemple 1.6.26 Par la théorie des séries de Fourier, on sait que l'espace de Hilbert $L^2_{\mathrm{per}}([0,1])$ (fonctions périodiques dans L^2) admet comme base hilbertienne les exponentielles $(e^{2\pi i n x})_{n\in\mathbb{Z}}$. ★

On verra plus tard comment la théorie spectrale peut fournir des bases hilbertiennes (et l'exemple ci-dessus en est une application).

Remarque 1.6.27 En fait, on peut définir des bases hilbertiennes non dénombrables ; c'est-à-dire des familles $(e_i)_{i\in I}$ vérifiant les mêmes propriétés que celles de la définition 1.6.24. On peut montrer que les égalités

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i \quad \text{et } \|x\|^2 = \sum_i |\langle x, e_i\rangle|^2$$

sont encore valables, au sens des *familles sommables* : on dit que la somme $\sum_{i\in I} x_i$ converge si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une **partie finie** $J_0 \subset I$ telle que pour toute partie finie $J \subset I$ contenant J_0,

$$\Big\| x - \sum_{j\in J} x_j \Big\| \leqslant \epsilon.$$

△

Théorème 1.6.28 *Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ (où l'ensemble I n'est pas nécessairement dénombrable).*

Démonstration. On remplace la preuve constructive (par récurrence) par un appel à l'axiome du choix (ou induction transfinie). Ou plutôt, à la version « pratique » de l'axiome du choix, le lemme de Zorn.

Lemme 1.6.29 (Zorn) *Tout ensemble $\mathscr{P}$ (partiellement) ordonné, inductif et non vide admet un élément maximal.*

L'adjectif **inductif** signifie que toute partie $\mathscr{Q}$ de $\mathscr{P}$ qui est totalement ordonnée admet un majorant : il existe un élément $e \in \mathscr{P}$ qui est plus grand que tout élément de $\mathscr{Q}$.

On choisit $\mathscr{P}$ comme étant l'ensemble des familles orthonormées $(e_i)_{i\in I}$ de E (plus précisément, l'ensemble des *parties* $B \subset E$ dont l'ensemble des éléments forme une famille orthonormée). On munit $\mathscr{P}$ de l'ordre partiel donné par l'inclusion $B \subset B'$.

Si $\mathscr{Q}$ est totalement ordonnée, alors l'union

$$C := \bigcup_{B\in\mathscr{Q}} B \in E$$

est clairement un « majorant » de $\mathscr{Q}$. La seule chose à vérifier est que $C \in \mathscr{P}$, càd est bien orthogonale. Soient donc x et y deux éléments distincts de C. Il existe B, B' dans $\mathscr{Q}$ tels que $x \in B$ et $y \in B'$. Puisque $\mathscr{Q}$ est totalement ordonnée, on peut supposer quitte à échanger x et y que $B \subset B'$. Donc x et y font partie de la famille orthonormée B', donc $\langle x, y\rangle = 0$, CQFD.

Ceci montre que $\mathscr{P}$ est bien inductif. Par Zorn, on en « connaît » un élément maximal, notons-le B_0. C'est une famille orthonormée, donc pour qu'elle soit une base hilbertienne, il faut encore montrer qu'elle est totale dans E. On peut toujours écrire

$$E = F \oplus F^\perp, \qquad \text{avec } F := \overline{\mathrm{Vect}(B_0)}.$$

Si $F^\perp \neq 0$, soit $e \in F^\perp$ de norme 1. Clairement, $B_0 \cup \{e\}$ est une famille orthonormée, mais elle n'est pas contenue dans B_0, ce qui contredit la maximalité. Donc $F^\perp = 0$, et finalement $F = E$, càd B_0 est totale. □

On peut ensuite vérifier :

Théorème 1.6.30 *Soit E un Hilbert, muni d'une base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$. Alors E est **isomorphe** à $\ell^2(I)$, par l'application*

$$E \ni x = \sum_i \langle x, e_i\rangle e_i \quad \mapsto \quad (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I} \in \ell^2(I).$$

Un isomorphisme est une application inversible qui préserve les structures sous-entendues. Ici, c'est une application linéaire inversible qui préserve le produit scalaire.

En particulier E et séparable si et seulement si il admet une base hilbertienne dénombrable, et tous les espaces de Hilbert séparables sont isomorphes à $\ell^2(\mathbb{N})$. Gardons néanmoins à l'esprit que cet isomorphisme dépend de la base et donc, en général, n'est pas explicite.

1.7 Espaces de fonctions continues sur un compact

On a vu (théorème 1.5.8) que si (X,d) est un espace métrique compact, alors $C^0(X)$ est séparable (pour la topologie de la convergence uniforme). On a pour cela construit de façon géométrique une famille dénombrable totale formée de *partitions de l'unité*. Le but de théorème de Stone-Weierstrass est de construire/caractériser des parties totales en exploitant un propriété algébrique, la stabilité par multiplication.

1.7.1 Théorème de Stone-Weierstrass

Soit (X,τ) un espace topologique compact. Commençons par un joli résultat de topologie générale sur les fonctions à valeurs **réelles**.

Théorème 1.7.1 *Soit H un sous-espace vectoriel de $C^0(X;\mathbb{R})$* ***réticulé,*** *séparant et contenant les constantes. Alor sH est dense dans $C(X;\mathbb{R})$.*

Je vous laisse le soin de vérifier la preuve dans le cours de topologie. Rappelons qu'une partie H de $C^0(X;\mathbb{R})$ est dite **réticulée** lorsqu'elle est stable par les opérations sup et inf : si f, $g \in H$, alors

$$\sup(f,g) \text{ et } \inf(f,g) \text{ sont encore dans } H.$$

Pour un sous-espace vectoriel, cela revient à montrer que $|f| \in H$ pour tout $f \in H$, puisqu'on a les formules magiques :

$$\sup(f,g) = \frac{1}{2}\left(f+g+|f-g|\right), \qquad \inf(f,g) = \frac{1}{2}\left(f+g-|f-g|\right).$$

Enfin on dit qu'une partie H est *séparante* si quels que soient $x \neq y$, il existe une fonction $f \in H$ telle que

$$f(x) \neq f(y).$$

On en déduit le fameux

Théorème 1.7.2 (Stone-Weierstrass) *Toute* ***sous-algèbre*** *de* $(C^0(X;\mathbb{R}),+,\times)$ *séparante et contenant les constantes est dense dans* $C^0(X;\mathbb{R})$.

Démonstration. En utilisant que la fonction $|\cdot|$ est approchable en norme uniforme sur $[-1,1]$ par des polynômes, et que $P(f) \in H$ pour tout $f \in H$ et pour tout polynôme P (réel), on voit que $\overline{H}$ est réticulée, et donc dense dans $C^0(X;\mathbb{R})$ par le théorème précédent... $\square$

Stone-Weierstrass est typiquement un théorème *réel*. Nénmoins, lorsqu'on peut bien séparer parties réelles et imaginaires, on en déduit un théorème pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Théorème 1.7.3 *Toute sous-algèbre de* $C^0(X;\mathbb{C})$ *séparante, stable par conjugaison complexe et contenant les constantes est dense dans* $C^0(X:\mathbb{C})$.

1.7.2 Théorème d'Ascoli

Après avoir cherché les parties denses, cherchons les parties compactes de $C^0(X)$. Évidemment c'est rarement un espace de dimension finie, donc la caractérisation « fermé borné » ne fonctionne pas. Malgré tout c'est un espace métrique, donc une partie est compacte si et seulement si de toute suite on peut extraire une sous-suite convergente.

Conditions nécessaires

Si $K \subset C^0(X;\mathbb{K})$ est compacte, alors bien sûr l'ensemble

$$K_x := \{f(x); f \in K\}$$

est lui-même compact dans $\mathbb{R}$. Pourquoi ? Car l'application $f \mapsto f(x)$ est linéaire bornée ($|f(x)| \leqslant \|f\|$...) donc continue et K_x est l'image par cette application du compact K.

D'autre part, supposons maintenant que (X,d) est un **espace métrique compact**. Alors pour tout $\epsilon > 0$ on peut recouvrir K par un nombre fini de boules de rayon $\epsilon/3$, qu'on note $B(f_i,\epsilon/3)$. Chaque f_i étant continue sur X et donc uniformément continue, il existe un $\alpha_i > 0$ tel que

$$d(x,y) \leqslant \alpha_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| \leqslant \epsilon/3.$$

Donc si $f \in B(f_i,\epsilon/3)$ et $d(x,y) \leqslant \alpha_i$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| \leqslant \epsilon.$$

On en déduit que, en posant $\alpha = \min \alpha_i$

$$d(x,y) \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad \forall f \in K, |f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon. \tag{1.6}$$

Une partie K de $C^0(X)$ vérifiant (1.6) est dite (uniformément) **équicontinue**.

(On peut définir l'équicontinuité en un point, mais sur un compact c'est équivalent à l'uniforme équicontinuité.)

En résume, si K est compact, alors elle est ponctuellement bornée (càd chaque K_x est borné) et équicontinue. Bien sûr, n'importe quelle partie de K vérifie encore ces propriétés. On en déduit

Proposition 1.7.4 *Soit $K \subset C^0(X;\mathbb{K})$ une partie* ***relativement compacte*** *($\overline{K}$ est compacte), alors elle est ponctuellement bornée et équicontinue.*

Conditions suffisantes

Ces conditions sont suffisantes ; c'est le contenu du théorème d'Ascoli.

Théorème 1.7.5 (Ascoli) *Soit (X,d) un espace métrique compact. Une partie de $C^0(X;\mathbb{K})$ est relativement compacte dans $C(X;\mathbb{K})$ si et seulement si elle est ponctuellement relativement compacte et équicontinue.*

On a remplacé à dessein « ponctuellement bornée » par « ponctuellement relativement compacte » car c'est équivalent dans $\mathbb{K}$ et l'énoncé se généralise en fait tel quel aux fonctions continues de (X,d) dans un espace métrique quelconque.

La moralité est que, étant donnée une suite de fonctions continues sur un compact, on peut toujours en extraire une sous-suite uniformément convergente si on sait contrôler à la fois les valeurs de ces fonctions et leurs « oscillations ».

Opérateurs à noyaux

On définit un **opérateur à noyau**, courant en analyse fonctionnelle, de la façon suivante : soient D_1, D_2 des compacts de $\mathbb{R}^n$ (on peut bien sûr généraliser à des compacts mesurés plus abstraits) et soit $K \in C^0(D_1 \times D_2)$. L'opérateur $T : C^0(D_2) \to C^0(D_1)$ est défini par la formule

$$(Tf)(x) = \int_{D_2} K(x,y) f(y) dy.$$

Proposition 1.7.6 *T est un **opérateur compact**, càd tel que l'image de la boule unité de $C^0(D_2)$ est relativement compacte dans $C^0(D_1)$.*

Démonstration. On note B la boule unité de $C^0(D_2)$:

$$B = \{f \in C^0(D_2); \quad \|f\| < 1\}.$$

On a clairement, pour $f \in B$,

$$|(Tf)(x)| \leqslant M\,|D_2|$$

où $M = \max_{D_1 \times D_2} |K|$. Donc $T(B)$ est bornée.

D'autre part, la continuité uniforme de K implique en particulier que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que

$$d(x_1, x_2) \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad |K(x_1, y) - K(x_2, y)| \leqslant \epsilon, \quad \forall y \in D_2.$$

Donc, pour tout $f \in B$,

$$|Tf(x_1) - Tf(x_2)| \leqslant \epsilon\,|D_2|\,,$$

ce qui montre que $T(B)$ est équicontinue. On peut donc appliquer Ascoli. $\square$

Chapitre 2

Espaces localement convexes

Le début (1,2,3) est théoriquement hors-programme. On n'insiste pas sur les démos.

Bibliographie : [5], [4], [2].

2.1 Espaces topologiques

On rappelle qu'une topologie τ sur un ensemble X est une famille de parties de X appelées ouverts, qui est stable par union quelconque et intersection finie, et qui contient X et $\varnothing$.

On peut également définir une topologie à l'aide des voisinages. Un voisinage d'un point x est une partie qui contient un ouvert contenant x. Réciproquement, étant donné un ensemble X, on se donne pour chaque $x \in X$ une famille de partie $\mathscr{V}(x)$ de telle sorte que

1. Si $V_1 \in \mathscr{V}(x)$ et $V_1 \subset V_2$, alors $V_2 \in \mathscr{V}(x)$;
2. $\mathscr{V}(x)$ est stable par intersection finie ;
3. Tout élément de $\mathscr{V}(x)$ contient x ;
4. Si $V \in \mathscr{V}(x)$, il existe $W \in \mathscr{V}(x)$ tel que $W \subset V$ et $W \in \mathscr{V}(y)$ pour tous $y \in W$.

Alors il existe une unique topologie sur X pour laquelle $\mathscr{V}(x)$ est la famille des voisinages de x.

2.2 Espaces vectoriels topologiques (EVT)

De nombreux espaces indispensables en analyse ne possèdent pas de norme naturelle. Exemple $C(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.2.1 *Un espace vectoriel sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *muni d'une topologie est appelé* ***espace vectoriel topologique*** *lorsque les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire sont continues.*

On se souvient que la topologie peut être définie par l'ensemble des voisinages de tous les points. Une conséquence immédiate de la définition est que, pour les EVT, **on peut se restreindre aux voisinages de l'origine**. Notons $\mathscr{V}(x)$ l'ensemble des voisinages d'un point x.

Théorème 2.2.2 *Si* E *est un EVT et* $x \in E$*, alors*

$$\mathscr{V}(x) = x + \mathscr{V}(0).$$

Démonstration. La translation par x est un homéomorphisme. □

Bien sûr, un EVN est un EVT pour la topologie engendrée par les boules. Dans le cas des EVT, les voisinages peuvent souvent jouer le rôle des boules.

Définition 2.2.3 *Une partie* $V \subset E$ *est dite*

1. ***absorbante*** *si pour tout* $x \in E$ *il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $\lambda x \in V$ *pour tous* λ *tels que* $|\lambda| \leqslant \alpha$.
2. ***équilibrée*** *si* $\lambda V \subset V$ *pour tous* λ *tels que* $|\lambda| \leqslant 1$.
3. ***convexe*** *si* V *contient toujours le segment reliant deux points quelconques de* V.

Proposition 2.2.4 *Si* $V \in \mathcal{F}(0)$*, alors* $\lambda V \in \mathcal{F}(0)$ *pour tout* $\lambda \neq 0$*. En outre, tout voisinage de l'origine est absorbant. Enfin, tout voisinage de l'origine contient un voisinage de l'origine équilibré.*

Démonstration. 1. la multiplication par λ est un homéomorphisme.

2. la multiplication de x par λ est continue en λ.

3. on rend un voisinage équilibré en faisant l'union de tous ses multiples λW pour $\lambda \leqslant \alpha$ avec α bien choisi. Pour choisir ce voisinage W et ce α on utilise la continuité de l'application complète $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$. □

Définition 2.2.5 *Un EVT est dit* ***localement convexe*** *(ELC) si l'origine admet une base de voisinages convexes.*

On verra ci-dessous comment caractériser (et construire) des ELC grâce à des semi-normes.

Proposition 2.2.6 *Dans un espace localement convexe, l'origine admet une base de voisinages convexes et équilibrés.*

Démonstration. Tout voisinage convexe V_1 contient un voisinage équilibré V_2. Il suffit de prendre l'enveloppe convexe de V_2. □

Définition 2.2.7 *L'**enveloppe convexe** d'une partie $A \subset E$ est l'intersection de tous les convexes contenant A.*

Lemme 2.2.8 *L'intérieur et l'adhérence d'un convexe (resp. équilibré) sont convexes (resp. équilibrés).*

(exercice)

Remarque 2.2.9 En dimension finie, on peut montrer que la topologie induite par la norme est la seule topologie d'EVT séparée sur E. △

2.3 Semi-normes

Définition 2.3.1 *Une **semi-norme** sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une fonction $p : E \to \mathbb{R}$ vérifiant*

1. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$
2. $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$.

Rappel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On voit que $p(0) = 0$, et en prenant $x = -y$ on obtient $p(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$.

Bien entendu une norme est une semi-norme ; mais attention $p(x) \equiv 0$ définit toujours une semi-norme.

Proposition 2.3.2 *Soit E un EVT et p une semi-norme sur E. Les énoncés suivants sont équivalents.*

1. *p est continue ;*
2. *$\{x; p(x) < 1\}$ est ouvert ;*
3. *$\{x; p(x) < 1\}$ est un voisinage de l'origine ;*
4. *$\{x; p(x) \leqslant 1\}$ est un voisinage de l'origine ;*
5. *p est continue en 0.*

Démonstration. Évidemment $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$. On montre $4 \Longleftrightarrow 5$ et $4 \Rightarrow 1$ en utilisant l'invariance par dilatation de $\mathscr{V}(0)$. □

Corollaire 2.3.3 *Si p et q sont des semi-normes sur E avec p continue et $q \leqslant p$, alors q est également continue.*

Soit E un espace vectoriel. On considère une famille quelconque $(p_i)_{i\in I}$ de semi-normes sur E. On appelle topologie associée à cette famille la topologie la moins fine (= la plus faible) rendant toutes les p_i continues. On la note τ_I.

Pour tous $i \in I$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ on note la « semi-boule ouverte »

$$V_{i,\rho} = \{x \in E; p_i(x) < \rho\}.$$

Lemme 2.3.4 *Les semi-boules possèdent les propriétés suivantes.*

1. $V_{i,\rho} = \rho V_{i,1}$;
2. $V_{i,\rho} + V_{i,\sigma} \subset V_{i,\rho+\sigma}$;
3. *Si* $x \in V_{i,\rho}$ *il existe* $r > 0$ *tel que* $x + V_{i,r} \subset V_{i,\rho}$;
4. $V_{i,\rho}$ *est absorbant et équilibré ;*
5. $V_{i,\rho}$ *est convexe.*

Démonstration. Point 3 : Puisque $p_i(x) < \rho$ il existe $\delta < 1$ tel que $p_i(x) < \delta\rho$. Soit $r = (1-\delta)\rho$ et $y \in V_{i,r}$. On a $p_i(x+y) \leqslant p_i(x) + p_i(y) < \rho$ donc $x + y \in V_{i,\rho}$. □

Théorème 2.3.5 *L'ensemble des intersections finies des $V_{i,\rho}$ avec $i \in I$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ constitue une base de voisinages de l'origine pour la topologie associée à la famille $(p_i)_{i\in I}$. En outre E est un EVT pour cette topologie.*

Démonstration. On commence par définir une topologie (notée τ_V) à l'aide de ces semi-boules. On appelle τ_V-voisinage de l'origine toute partie A qui contient une intersection finie de tels $V_{i,\rho}$. Si $x \in E$ on appelle τ_V-voisinage de x un translaté $x + V$ où V est un τ_V-voisinage de l'origine. Une telle famille vérifie les 4 axiomes des voisinages (en particulier on voit que toute semi-boule ouverte est voisinage de chacun de ses points par le lemme). On obtient donc bien une topologie τ_V.

Pour cette topologie, montrons que E est un EVT. Pour la continuité de l'addition, fixons deux points $x, y \in E$ et soit $x + y + V$ un τ_V-voisinage quelconque de $x + y$. On sait que V contient une intersection finie de semi-boules, donc il est facile de trouver un τ_V-voisinage de l'origine U tel que $U + U \subset V$ (prendre l'intersection des semi-boules de rayon moitié). On voit que l'addition envoie $(x+U)\times(y+U)$ dans $x+y+V$, ce qui prouve la continuité en (x,y).

Il reste à montrer la continuité de la multiplication par un scalaire. Soit $(\alpha,x)\in\mathbb{K}\times E$, et soit $\alpha x+V$ un τ_V-voisinage de αx. Soit encore U un τ_V-voisinage de l'origine tel que $U+U\subset V$. Comme intersection finie d'absorbants équilibrés, U l'est encore. Donc il existe $\eta>0$ tel que $(\lambda-\alpha)x\subset U$ dès que $|\lambda-\alpha|\leqslant\eta$.

Soit $W:=U/(\eta+|\alpha|)$; c'est encore un τ_V-voisinage de 0. Si $y\in x+W$ on écrit $\lambda y-\alpha x=\lambda(y-x)+(\lambda-\alpha)x$. Le deuxième terme est dans U si $|\lambda-\alpha|\leqslant\eta$, tandis que sous cette même condition le premier terme, dans λW, est également dans U car $\frac{|\lambda|}{\eta+|\alpha|}\leqslant 1$. Ceci montre que la multiplication envoie $B(\alpha,\eta)\times x+W$ dans $U+U\subset V$, ce qu'il fallait démontrer.

Puisque E est un EVT, on peut appliquer la proposition 2.3.2 et on déduit que les p_i sont continues pour cette topologie (elles sont continues en l'origine et on applique le point 5).

Puisque τ_V est une topologie qui rend les p_i continues, elle est plus fine que τ_I : $\tau_I\subset\tau_V$. Mais puisque les p_i sont continues pour τ_I, les semi-boules sont ouvertes pour τ_I. Donc $\tau_V\subset\tau_I$. □

Remarque 2.3.6 On peut remplacer $r\in\mathbb{R}_+^*$ par $r=1/n$, $n\in\mathbb{N}^*$, ce qui montre que, si I est dénombrable, E admet une base dénombrable de voisinages en chaque point. △

Exemple 2.3.7 $C^0(\mathbb{R})$ avec la métrique $d(f,g)=\min\{\sup_{\mathbb{R}}|f-g|\,;1\}$. La convergence est la convergence uniforme. Il est impossible de trouver une structure d'EVT pour cette convergence. En effet soit $f(x)=x$. La suite $\frac{1}{n}f$ ne converge pas uniformément vers 0, alors qu'elle converge vers 0 pour toute structure d'EVT, puisque la multiplication par un scalaire est continue ! ★

Exemple 2.3.8 Sur $C^0(X)$ on peut définir la topologie de la **convergence uniforme sur tout compact**. C'est la topologie définie par les semi-normes $p_K(f)=\sup_K|f|$, où K parcourt tous les compacts de X. ★

Exemple 2.3.9 Dans le cas $C(\mathbb{R})$, une base (dénombrable) de voisinages de l'origine est donnée par les semi-normes $p_n(f)=\max_{[-n,n]}|f|$. On remarque qu'un voisinage de l'origine, étant intersection *finie* de semi-boules, contient des fonctions arbitrairement grandes loin de l'origine. Plus précisément on peut construire une fonction f dont tous les multiples restent dans ce voisinage. Ça exclut que la topologie soit *normable* ! ★

Exemple 2.3.10 On peut voir l'espace des fonctions d'un ensemble X dans $\mathbb{C}$ comme le produit $\mathbb{C}^X$; la *topologie produit* est (pratiquement par définition) la topologie associée aux semi-normes $p_x(f) = |f(x)|$. La convergence est la *convergence simple*. Cette topologie n'est même pas *métrisable*. (TD ?) ★

Le lien entre semi-normes et espaces localement convexes est très important.

Théorème 2.3.11 *Soit E un EVT. Alors E est localement convexe si et seulement si il existe une famille de semi-normes qui définit sa topologie.*

Montrons d'abord le résultat suivant.

Théorème 2.3.12 *Soit E un EVT. Soit V un voisinage de l'origine, ouvert, convexe et équilibré. Alors il existe une unique semi-norme p telle que*

$$V = \{x; p(x) < 1\}. \tag{2.1}$$

On déduit de la proposition 2.3.2 que p est continue.

Définition 2.3.13 *p vérifiant (2.1) est appelée la **jauge** de l'ouvert convexe V.*

Démonstration. On définit

$$p(x) := \inf\{t \geqslant 0; x \in tV\}.$$

1. Montrons que p (qu'on notera parfois p_V par la suite) est bien une semi-norme. Si $s \geqslant 0$ il est clair que $p(sx) = sp(x)$. Puisque V est équilibré on voit facilement que pout tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\lambda V = |\lambda|\, V.$$

Donc $\lambda x \in tV \equiv x \in \frac{t}{|\lambda|}V$. Donc $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$.

Montrons maintenant l'« inégalité triangulaire ». Soient $x, y \in E$. Pour $\epsilon > 0$, posons $t = p(x) + \epsilon$ et $s = p(y) + \epsilon$, de sorte que, par définition de l'infimum, il existe un $t_0 < t$ tel que $x \in t_0 V$. Puisque V est équilibré, $t_0 V \subset tV$ donc $x \in tV$. De même, posons $s = p(y) + \epsilon$, de sorte que $y \in sV$.

Les éléments x/t et y/t sont dans V qui est convexe, donc le barycentre suivant est encore dans V :

$$\frac{x+y}{t+s} = \frac{t(\frac{x}{t}) + s\frac{y}{s}}{t+s} \in V.$$

Càd $p(x+y) \leqslant t+s$, autrement dit

$$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)+2\epsilon,$$

ce qui donne le résultat.

2. Montrons que $V=\{x;p(x)<1\}$. Si $x \in V$, on peut trouver un $t<1$ tel que $x/t \in V$, car V est ouvert et la multiplication est continue. Donc $p(x)<1$. Réciproquement, si $x \notin V$, alors on ne peut pas avoir en même temps $t<1$ et $x \in tV$ (V est équilibré...). Donc $p(x) \geqslant 1$.

3. Montrons enfin l'unicité d'une telle semi-norme. Si q est une semi-norme avec

$$V=\{x;p(x)<1\}=\{x;q(x)<1\},$$

on écrit, pour tout $x \in E$, $q(\frac{x}{q(x)})=1$ donc $\frac{x}{q(x)} \notin V$. Du coup, $p(\frac{x}{q(x)}) \geqslant 1$, càd $p(x) \geqslant q(x)$. Évidemment on montre de la même façon $q(x) \geqslant p(x)$ donc $p(x)=q(x)$. $\square$

Démonstration *du théorème 2.3.11***.** La topologie induite par une famille $(p_i)_{i \in I}$ de semi-normes est certainement localement convexe, en vertu du théorème 2.3.5 et de la convexité des semi-boules.

Réciproquement, si E est localement convexe, on considère les jauges p_U associées à tous les voisinages de 0, U, ouverts convexes et équilibrés de E. Notons τ la topologie initiale sur E et τ_I celle induite par ces semi-normes. Puisque les p_U sont continues pour τ, $\tau_I \subset \tau$. Réciproquement,si $V \in \mathscr{V}_\tau(0)$, on peut trouver par locale convexité un τ-voisinage de l'origine $U \subset V$ qui est ouvert, convexe et équilibré. Mais on a $U=\{x;p_U(x)<1\}$ qui est un τ_I-voisinage de l'origine... donc $V \in \mathscr{V}_{\tau_I}(0)$ et ainsi $\tau \subset \tau_I$. $\square$

Remarque 2.3.14 Au lieu de considérer la famille des toutes les semi-normes p_U associées à tous les voisinages ouverts convexes équilibrés, on peut se restreindre à la famille associée à une **base** de tels voisinages.

En effet, soit τ_I la topologie associée à la famille $(p_i)_{i \in I}$ où I est l'ensemble des voisinages ouverts convexes équilibrés, et soit $J \subset I$ un sous-ensemble correspondant à une base de tels voisinages. Puisque τ_I rend évidemment tous les p_j, $j \in J$ continus, on a

$$\tau_J \subset \tau_I.$$

Réciproquement, si tous les p_j, $j \in J$ sont continus, soit $i \in I$ (je rappelle que c'est un voisinage !). Puisque J est une base, il existe un voisinage $j \in J$ contenu dans i. On voit immédiatement que les semi-normes associées vérifient

$$p_j \geqslant p_i.$$

Par le corollaire 2.3.3, p_i est automatiquement continue pour τ_J. Donc si les p_j sont tous continus, en réalité tous les p_i le sont déjà ! Autrement dit τ_J rend les p_i continues, donc

$$\tau_I \subset \tau_J.$$

△

L'intérêt de la remarque précédente est de pouvoir se retreindre à une **famille dénombrable** de semi-normes lorsque l'origine admet une famille dénombrable de voisinages ouverts convexes équilibrés. Et c'est le cas des espaces métriques (prendre les boules ouvertes !). Donc la topologie de tout *ELC* **métrisable** peut être définie par une famille dénombrable de semi-normes. On sait également que les espaces métriques sont séparés. La séparation se voit facilement sur les semi-normes.

Proposition 2.3.15 *Un espace localement convexe E défini par la famille de semi-normes $(p_i)i \in I$ est* ***séparé*** *si et seulement si*

$$\bigcap_i \{x; p_i(x) = 0\} = \{0\}. \tag{2.2}$$

Autrement dit, si $(p_i(x) = 0\ \forall i) \Rightarrow (x = 0)$.

Démonstration. Supposons E séparé ; si $x \neq 0$ on peut trouver une semi-boule $V_i \in \mathscr{V}(0)$ qui ne contient pas x. Mais alors $p_i(x) \geqslant 1$...

Réciproquement, si $\bigcap_i \{x; p_i(x) = 0\} = \{0\}$ et $x \neq 0$, alors x n'appartient pas à cette intersection ; c'est bien dire qu'il existe un indice i tel que $p_i(x) \neq 0$. Notons $\rho = p_i(x)$. Évidemment, $x \notin \rho V_i$; donc ρV_i est un voisinage ouvert de l'origine qui sépare bien x de 0. □

Remarque 2.3.16 On pourrait aussi utiliser la caractérisation des espaces topologiques séparés comme étant ceux pour lesquels un singleton est l'intersection de tous ses voisinages fermés. Ici les $\{x; p_i(x) \leqslant 1/n\}$ engendrent les voisinages fermés. △

Les ELC métrisables et séparés sont donc définis par une famille dénombrable de semi-normes « **séparante** » (au sens où l'équation (2.2) est vérifiée). Ces conditions sont en fait suffisantes pour caractériser la métrisabilité.

Proposition 2.3.17 *Soit E un ELC séparé et dont la topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes (p_n). Alors E est* ***métrisable.***

Mieux, on peut construire une métrique ***invariante par translation*** *de la façon suivante : On pose*

$$h_n(x) = \frac{p_n(x)}{1+p_n(x)}; \qquad h(x) = \sum_n \frac{1}{2^n} h_n(x)$$

et on définit

$$d(x,y) = h(y-x).$$

Démonstration. (TD ?) Le coefficient $1/2^n$ sert simplement à faire converger la série. On peut le remplacer par n'importe quelle série positive convergente. □

Exemple 2.3.18 Les espaces L^p pour $p \geqslant 1$ sont des espaces normés. Pour $p = \frac{1}{2}$, on a encore une structure d'EVT grâce à la métrique invariante $d(f,g) = \|f-g\|_p^p$. Mais $L^{\frac{1}{2}}$ n'est pas localement convexe (TD ?) ★

2.4 Espaces de Baire

René-Louis Baire, mathématicien francais (1874–1932).

Nous allons maintenant introduire la notion de complétude pour les EVT, afin de disposer d'espaces qui généralisent naturellement les espaces de Banach. On sait que les espaces métriques complets possèdent la propriété importante dite de Baire. Commençons par rappeler ceci.

Définition 2.4.1 *Dans un espace topologique X, un* ***fermé d'intérieur vide*** *est dit* ***rare****. Une partie $A \subset X$ est dite* ***maigre*** *si elle est contenue dans une union dénombrable d'ensembles rares.*

Définition 2.4.2 *Un* ***espace de Baire*** *est un espace topologique où toute partie maigre est d'intérieur vide.*

En particulier un espace de Baire non vide X n'est jamais lui-même union dénombrable de parties rares, sinon son intérieur $\mathring{X} = X$ serait vide. Bien sûr, une définition équivalente est la suivante :

Définition 2.4.3 *Un espace de Baire est un espace topologique où une intersection dénombrable d'ouverts denses reste dense.*

Exemple 2.4.4 L'espace $X = \mathbb{Q}$ muni de la topologie induite de celle de $\mathbb{R}$ n'est *pas* de Baire, puisque

$$Q = \cup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\} \quad , \text{et est donc maigre.}$$

★

Exemple 2.4.5 On verra plus tard (TD ?) que si $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact, l'espace $\mathscr{D}_K$ des fonctions C^∞ à support dans K est un fermé d'intérieur vide dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Donc $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_k \mathscr{D}_{K_n}$, où (K_n) est une suite exhaustive de compacts, est maigre. ★

Heureusement, il y a beaucoup d'espaces de Baire. Les deux catégories les plus importantes sont les espaces localement compacts et les espaces métriques complets.

Théorème 2.4.6 *Tout espace topologique localement compact est de Baire.*

Démonstration. Je rappelle que *localement compact* veut dire (comme toujours avec l'adjectif « localement ») que tout point admet une base de voisinages compacts.

Soit X un espace localement compact ; soit (O_n) une suite d'ouverts denses dans X. Montrons que $\bigcap_n O_n$ est encore dense dans X, c'est-à-dire rencontre n'importe que voisinage (qu'on peut supposer compact).

Soit donc $x \in X$ et V un voisinage compact de x. Puisque O_1 est dense dans X, et que $\mathring{V}$ est un voisinage de x, il existe un élément $e_1 \in O_1 \cap \mathring{V}$. Puisque $O_1 \cap \mathring{V}$ est ouvert, c'est un voisinage de e_1 ; il en contient donc un voisinage compact E_1. On peut recommencer la construction en considérant maintenant l'ouvert O_2 avec le point e_1 et son voisinage compact E_1. On trouve donc $e_2 \in O_2 \cap \mathring{E}_1$, etc. On construit ainsi un famille décroissante (E_n) de compacts non vides telle que, pour tout n, $E_n \subset O_n \cap \mathring{V}$. L'intersection de cette famille est non vide, et contenue dans $(\bigcap_n O_n) \cap \mathring{V}$, ce qu'on voulait démontrer. □

Théorème 2.4.7 *Tout espace métrique complet est de Baire.*

Démonstration. L'idée est similaire. On se donne une famille d'ouverts denses (O_n). Soit B_0 une boule fermée centrée en x. On peut trouver $e_1 \in O_1 \cap \mathring{B}_0$. Tout voisinage contient une boule fermée (pourquoi ?) donc on choisit une boule fermée $B_1 \subset O_1 \cap \mathring{B}_0$ centrée en e_1. On peut toujours supposer que son rayon est inférieur à 1. On recommence avec O_2, e_1 et cette boule

$B_1(e_1, r_1)$... pour trouver par récurrence une famille décroissante de boules fermées $B_n(e_n, r_n)$ de rayon $r_n \leqslant 1/n$, avec $B_n \subset O_n$. Puisque $B_m \subset B_n$ si $m \geqslant n$, on a

$$d(e_m, e_n) \leqslant 1/n.$$

Donc la suite (e_n) est de Cauchy. Soit e sa limite. Elle appartient à $(\bigcap_n B_n) \subset (\bigcap_n O_n) \cap B_0$, ce qu'on voulait démontrer. □

2.5 Applications linéaires continues

On a vu que la topologie d'un EVT est caractérisée par les voisinages de l'origine. Pour les applications linéaires, ceci conduit au résultat suivant.

Proposition 2.5.1 *Si E et F sont des EVT, une application linéaire $f : E \to F$ est* ***continue*** *si et seulement si elle est continue en* 0*, càd*

$$\forall V \in \mathscr{V}_F(0), \quad \exists W \in \mathscr{V}_E(0), \quad f(W) \subset V.$$

Démonstration. Supposons f est continue en 0. Soit $x \in E$ et posons $y = f(x)$. Un voisinage de y s'écrit $y + V$, où $V \in \mathscr{V}(0)$. Par continuité en 0, il existe $W \in \mathscr{V}(0)$ tel que $f(W) \subset V$. Alors, bien sûr

$$f(x + W) \subset y + V,$$

ce qui prouve que f est continue en y. □

On aura parfois besoin de la variante suivante :

Proposition 2.5.2 *Une application linéaire $f : E \to F$ est continue si et seulement si*

$$\forall V \in \mathscr{V}_F(0), \quad \exists W \in \mathscr{V}_E(0), \quad f(W) \subset \overline{V}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que tout voisinage de l'origine contient un voisinage fermé. Si $V \in \mathscr{V}(0)$, on peut trouver par continuité de l'addition un voisinage $U \in \mathscr{V}(0)$ tel que $U + U \subset V$. On sait que U lui-même contient un voisinage équilibré W. Or, $\overline{W} \subset V$. En effet, si $x \in \overline{W}$, tout voisinage de x rencontre W. En particulier $x + W$ rencontre W. Donc

$$x \in W - W \subset W + W \subset U + U \subset V.$$

□

Comme pour les EVN, va montrer qu'une application linéaire continue est *bornée* ; encore faut-il commencer par définir une partie bornée d'un EVT...

Définition 2.5.3 *Une partie $A \subset E$ d'un EVT est dite **bornée** si*

$$\forall V \in \mathscr{V}(0), \quad \exists t_0 > 0 \text{ tel que } A \subset tV, \quad \forall |t| \geqslant t_0.$$

On retrouve (heureusement) la terminologie habituelle dans le cas des EVN.

Proposition 2.5.4 *Si E est (aussi) un EVN, alors A est bornée au sens topologique si et seulement s'il existe une constante M telle que*

$$\|x\| \leqslant M, \qquad \forall x \in A.$$

Démonstration. Si A est bornée au sens de la norme, $A \subset B(0,M)$ et la caractérisation topologique se déduit de ce que tout voisinage contient une boule.

Réciproquement, si A est bornée au sens EVT, on applique la caractérisation à la boule unité et on trouve que $A \subset B(0,t_0)$. □

Remarque 2.5.5 Si E et F sont des EVT, et $f : E \to F$ est linéaire continue, alors f est bornée, au sens où l'image d'un borné est borné. La réciproque n'est pas vraie en général (ça marche dans le cas métrisable). △

Démonstration *(du sens direct)***.** Si f est continue est $B \subset E$ est borné, on se donne $V \in \mathscr{V}_F(0)$; par continuité il existe $W \in \mathscr{V}_E(0)$ tel que $f(W) \subset V$. Pour ce W, la bornitude donne un t_0 tel que $B \subset tW$, $\forall |t| \geqslant t_0$. Donc

$$f(B) \subset tf(W) \subset tV.$$

On a bien montré que $f(B)$ est borné. □

Lemme 2.5.6 *1. Un singleton est borné.*

2. Si A et B sont bornés alors $A + B$ est borné.

Démonstration. 1) Tout voisinage est absorbant...

2) Si $V \in \mathscr{V}(0)$, soit $U \in \mathscr{V}(0)$ tel que $U + U \subset V$. Par définition on a des réels positifs t_A et t_B tels que

$$A \subset tU \quad B \subset sU; \quad \forall |t| \geqslant t_A, \quad \forall |s| \geqslant t_B.$$

Donc $A+B \subset tU+tU$ pour $|t| \geqslant \max(t_A, t_B)$. On a bien $A \subset t(U+U) \subset tV$. □

[La suite reste à écrire !]

2.6 Espaces de Fréchet

2.7 Théorèmes de Banach-Steinhaus

2.8 Théorème de l'application ouverte

2.9 Théorème du graphe fermé

Chapitre 3

Théorèmes de Hahn-Banach

Chapitre 4

Dualité et convergence faible

Chapitre 5

Introduction à la théorie spectrale des opérateurs compacts

Deuxième partie

Distributions.

Chapitre 6

Rappels de calcul différentiel

Chapitre 7

Définition des distributions

Chapitre 8

Multiplication et dérivation.

Chapitre 9

Restriction et support.

Bibliographie

[1] H. Brézis. *Analyse fonctionelle, théorie et applications*. Masson, 1983.

[2] J.B. Conway. *A course in functional analysis*. Springer-Verlag, 1990.

[3] F. Nier and D. Iftimie. *Introduction à la topologie*. IRMAR/Université de Rennes 1, 2005-2007. poly du cours de Licence.

[4] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1991.

[5] L. Schwartz. *Functional analysis*. New York University, 1964.