Introduction à la théorie des distributions

Samuel KOKH

CEA Saclay
samuel.kokh@cea.fr

MACS 2 (2007-2008) – Institut Galilée

Plan

1. Introduction
   - Motivation & objectifs du cours
   - Laurent Schwartz
2. Exemple introductif : advection d'un signal à vitesse constante
   - Problème pour un signal régulier
   - Problème pour un signal discontinu
3. Qu'avait donc en tête Paul Dirac ?
   - Les intuitions du physicien Paul Dirac
   - Les mesures : une première réponse mathématiques
   - Les lacunes des mesures
4. Sur les traces de la dérivée de δ
   - Un plan de construction pour δ
   - Un problème de convergence
   - Essais de passage à la limite
   - changement de paradigme
   - une dernière limite

Plan

Plan

Plan

Plan

Motivation & objectifs du cours (1/2)

Objectifs du cours

Introduire la notion de distribution.

Elles sont partout mais vous ne le savez pas !

Les distributions sont un outil ubiquitaire de toutes les disciplines où l'ont peut utiliser un formalisme mathématiques aujourd'hui :

- mathématiques
- physique (mécanique des fluides, mécanique quantique,. . .)
- biologie
- traitement du signal/image/son
- économie
- . . .

Motivation & objectifs du cours (2/2)

Que motive donc la définition d'une nouvelle notion ?

Sur quelques exemples (certains simples, d'autres moins) : on met en évident les lacunes flagrantes de la définition de certains objets mathématiques classiques.

« Aller plus loin » que la notion de fonction

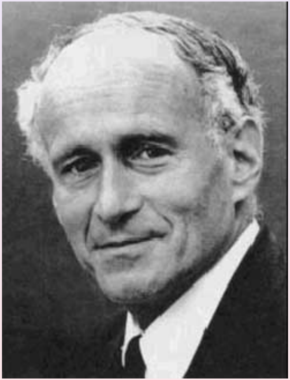
Plus spécifiquement : la notion de fonction (ou même de classe de fonctions) ne permet pas de formuler clairement certains problèmes.

Généralisation de la notion de fonction

En un certain sens (que nous définirons clairement) on va généraliser la notion de fonction.

Le père (français) des distributions

Laurent Schwartz (1915–2002)

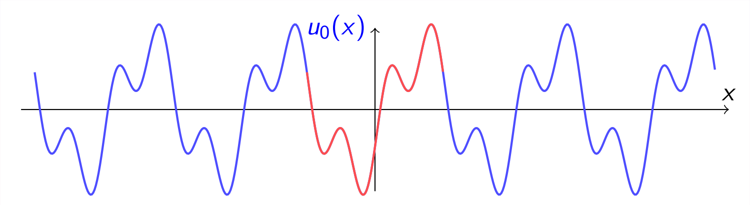


- Inventeur (français ?) de la théorie des distributions (1944)
- Médaille Fields en 1950
- Lépidoptériste passioné (collectionneur de papillons)

Plan

Problème de propagation de signal régulier

On se donne un signal périodique régulier de période 1 dans l'espace. On souhaite décrire la propagation de ce signal à vitesse 1.



Comment obtenir un problème mathématique équivalent ?

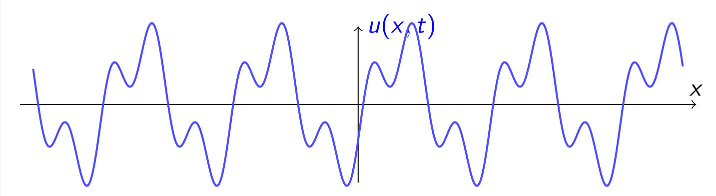
$u_0(x)$ → Problème mathématique → $u(x, t)$

Posons: $u(x,t) = u_0(x-t),\ \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$(x,t) \mapsto u$ est solution du problème de propagation

Posons: $u(x,t) = u_0(x-t),\ \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$(x,t) \mapsto u$ est solution du problème de propagation

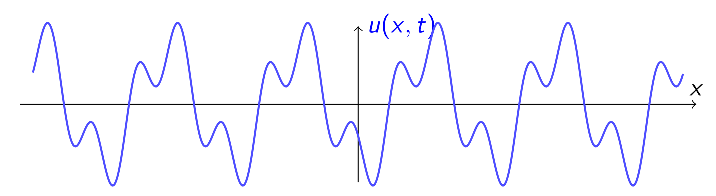


$(x,t) \mapsto u$ est solution d'une EDP

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -u_0'(x-t) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = +u_0'(x-t) \end{array}\right\} \Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$$

Posons: $u(x,t) = u_0(x-t),\ \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$(x,t) \mapsto u$ est solution du problème de propagation



$(x,t) \mapsto u$ est solution d'une EDP

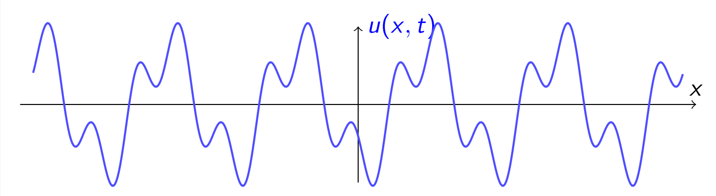
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -u_0(x-t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = +u_0(x-t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$$

Posons: $u(x,t) = u_0(x-t)$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$(x,t) \mapsto u$ est solution du problème de propagation



$(x,t) \mapsto u$ est solution d'une EDP

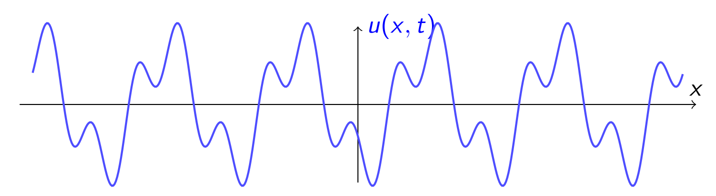
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -u_0(x-t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = +u_0(x-t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$$

Posons: $u(x,t) = u_0(x-t)$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$(x,t) \mapsto u$ est solution du problème de propagation



$(x,t) \mapsto u$ est solution d'une EDP

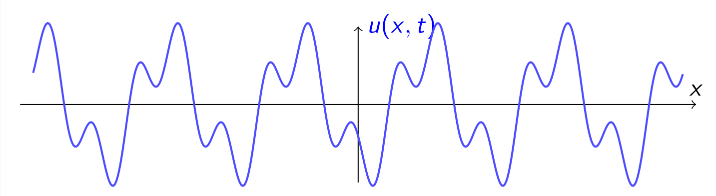
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -u_0(x-t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = +u_0(x-t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$$

Posons: $u(x,t) = u_0(x-t)$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$(x,t) \mapsto u$ est solution du problème de propagation



$(x,t) \mapsto u$ est solution d'une EDP

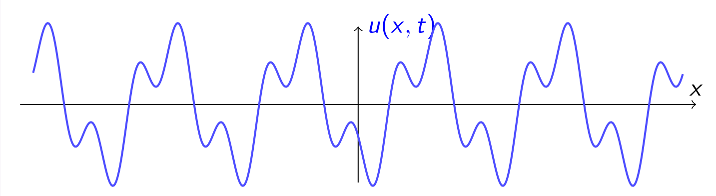
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -u_0(x-t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = +u_0(x-t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$$

Posons: $u(x,t) = u_0(x-t)$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$(x,t) \mapsto u$ est solution du problème de propagation



$(x,t) \mapsto u$ est solution d'une EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -u_0(x-t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = +u_0(x-t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$$

Un problème mathématique équivalent

Notation

$\mathcal{E}_1 = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid u(x+1) = u(x), \forall x \in \mathbb{R}\} =$ ensemble des fonctions périodiques de période 1

Problème d'advection « fort »

Déterminer u : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \\ u(\cdot, t) \in \mathcal{E}_1, \ \forall t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{où } u_0 \in \mathcal{E}_1 \end{cases} \qquad (\mathscr{P}_1)$$

Théorème

Il y a existence et unicité de la solution pour le problème $(\mathscr{P}_1)$.

Un problème mathématique équivalent

Notation

$\mathcal{E}_1 = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid u(x+1) = u(x), \forall x \in \mathbb{R}\} =$
ensemble des fonctions périodiques de période 1

Problème d'advection « fort »

Déterminer $u\ : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \\ u(\cdot, t) \in \mathcal{E}_1, \ \forall t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{où } u_0 \in \mathcal{E}_1 \end{cases} \qquad (\mathscr{P}_1)$$

Théorème

Il y a existence et unicité de la solution pour le problème $(\mathscr{P}_1)$.

Un problème mathématique équivalent

Notation

$\mathcal{E}_1 = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid u(x+1) = u(x), \forall x \in \mathbb{R}\} =$
ensemble des fonctions périodiques de période 1

Problème d'advection « fort »

Déterminer u : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \\ u(\cdot, t) \in \mathcal{E}_1, \ \forall t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{où } u_0 \in \mathcal{E}_1 \end{cases} \qquad (\mathscr{P}_1)$$

Théorème

Il y a existence et unicité de la solution pour le problème $(\mathscr{P}_1)$.

Lemme 1

Il y a existence de la solution pour le problème $(\mathscr{P}_1)$.

Preuve : $(x,t) \mapsto u(x,t) = u_0(x-t)$ est solution. $\square$

Lemme 2

Le problème $(\mathscr{P}_1)$ admet au plus une solution.

Lemme 1

Il y a existence de la solution pour le problème $(\mathscr{P}_1)$.

Preuve : $(x, t) \mapsto u(x, t) = u_0(x - t)$ est solution. $\square$

Lemme 2

Le problème $(\mathscr{P}_1)$ admet au plus une solution.

Lemme 2

Le problème $(\mathscr{P}_1)$ admet au plus une solution.

Preuve

On suppose que le système $(\mathscr{P}_1)$ possède deux solutions u et v.
On pose : $w = u - v$. Alors on voit que :

- $w \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$
- $w(\cdot, t) \in \mathcal{E}_1, \ \forall t > 0$
- w vérifie

$$\partial_t w + \partial_x w = 0, \quad w(t = 0, x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$w(t=0,x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^1 \left(w\partial_t w + w\partial_x w \right) \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^1 \frac{w^2}{2}\,\mathrm{d}x\right] = 0$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 w\partial_t w \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\partial_t(w^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \frac{w^2}{2}\,\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_0^1 w\partial_x w \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\partial_x(w^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[w^2(s,t)]_{s=0}^{s=1} = 0 \end{cases}$$

$$\theta(t) = \int_0^1 \frac{w^2}{2}(x,t)\,\mathrm{d}x, \quad \begin{cases} \theta'(t) = 0, \forall t > 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta(t) = 0, \forall t > 0$$

$$w(x,t) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \Rightarrow u = v. \qquad \square$$

$$w(t=0,x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^1 \left(w\partial_t w + w\partial_x w \right) \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^1 \frac{w^2}{2} \mathrm{d}x \right] = 0$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 w\partial_t w \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\partial_t(w^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \frac{w^2}{2}\,\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_0^1 w\partial_x w \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\partial_x(w^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[w^2(s,t)]_{s=0}^{s=1} = 0 \end{cases}$$

$$\theta(t) = \int_0^1 \frac{w^2}{2}(x,t)\,\mathrm{d}x, \quad \begin{cases} \theta'(t) = 0, \forall t > 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta(t) = 0, \forall t > 0$$

$$w(x,t) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \Rightarrow u = v. \qquad \square$$

$$w(t=0,x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \int_0^1 \Big(w\partial_t w + w\partial_x w \Big)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^1 \frac{w^2}{2}\,\mathrm{d}x\right] = 0$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 w\partial_t w\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\partial_t(w^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \frac{w^2}{2}\,\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_0^1 w\partial_x w\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\partial_x(w^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[w^2(s,t)]_{s=0}^{s=1} = 0 \end{cases}$$

$$\theta(t) = \int_0^1 \frac{w^2}{2}(x,t)\,\mathrm{d}x, \quad \begin{cases} \theta'(t) = 0, \forall t > 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta(t) = 0, \forall t > 0$$

$$w(x,t) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \Rightarrow u = v. \qquad \square$$

$$w(t=0,x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \int_0^1 \Big(w\partial_t w + w\partial_x w \Big)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^1 \frac{w^2}{2}\,\mathrm{d}x\right] = 0$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 w\partial_t w\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\partial_t(w^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \frac{w^2}{2}\,\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_0^1 w\partial_x w\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\partial_x(w^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[w^2(s,t)]_{s=0}^{s=1} = 0 \end{cases}$$

$$\theta(t) = \int_0^1 \frac{w^2}{2}(x,t)\,\mathrm{d}x, \quad \begin{cases} \theta'(t) = 0, \forall t > 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta(t) = 0, \forall t > 0$$

$$w(x,t) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \Rightarrow u = v. \qquad \square$$

$$w(t=0,x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \int_0^1 \left(w\partial_t w + w\partial_x w \right) \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^1 \frac{w^2}{2}\,\mathrm{d}x\right] = 0$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 w\partial_t w\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\partial_t(w^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \frac{w^2}{2}\,\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_0^1 w\partial_x w\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\partial_x(w^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[w^2(s,t)]_{s=0}^{s=1} = 0 \end{cases}$$

$$\theta(t) = \int_0^1 \frac{w^2}{2}(x,t)\,\mathrm{d}x, \quad \begin{cases} \theta'(t) = 0, \forall t > 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta(t) = 0, \forall t > 0$$

$$w(x,t) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \Rightarrow u = v. \qquad \square$$

$$w(t=0,x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^1 \left(w\partial_t w + w\partial_x w \right) \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^1 \frac{w^2}{2}\,\mathrm{d}x \right] = 0$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 w\partial_t w\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\partial_t(w^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \frac{w^2}{2}\,\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_0^1 w\partial_x w\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\partial_x(w^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[w^2(s,t)]_{s=0}^{s=1} = 0 \end{cases}$$

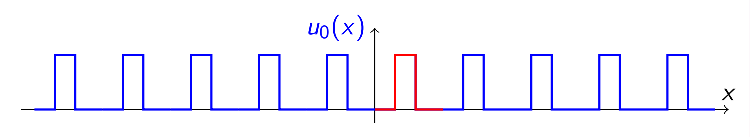
$$\theta(t) = \int_0^1 \frac{w^2}{2}(x,t)\,\mathrm{d}x, \quad \begin{cases} \theta'(t) = 0, \forall t > 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \theta(t) = 0, \forall t > 0$$

$$w(x,t) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \Rightarrow u = v. \qquad \square$$

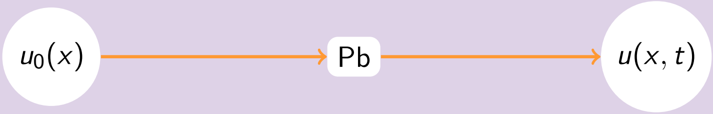
Comment faire avancer un créneau ?

Problème de propagation de signal discontinu

On se donne un signal périodique discontinu de période 1 dans l'espace. On souhaite décrire la propagation de ce signal à vitesse 1.



Comment obtenir un problème mathématique équivalent ?



Posons: $u(x,t) = u_0(x-t), \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$(x,t) \mapsto u$ est solution du problème de propagation

$(x,t) \mapsto u$ est solution de...

?

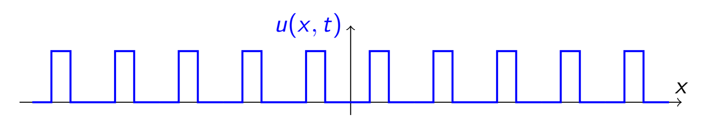
$$\partial_t u = ? \quad \partial_x u = ?$$

La notion de fonction est lacunaire

Comment dériver la fonction u_0 discontinue ?

Posons: $u(x,t) = u_0(x-t)$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$(x,t) \mapsto u$ est solution du problème de propagation



$(x,t) \mapsto u$ est solution de. . .

?

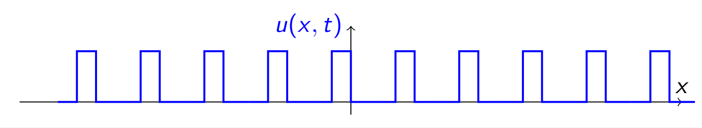
$$\partial_t u = ? \quad \partial_x u = ?$$

La notion de fonction est lacunaire

Comment dériver la fonction u_0 discontinue ?

Posons: $u(x,t) = u_0(x-t)$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$(x,t) \mapsto u$ est solution du problème de propagation



$(x,t) \mapsto u$ est solution de. . .

?

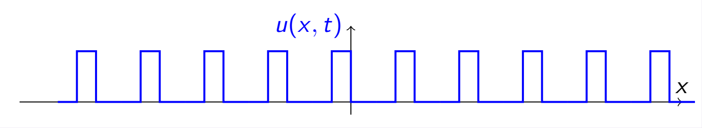
$\partial_t u = ?$ $\quad \partial_x u = ?$

La notion de fonction est lacunaire

Comment dériver la fonction u_0 discontinue ?

Posons: $u(x,t) = u_0(x-t)$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$(x,t) \mapsto u$ est solution du problème de propagation



$(x,t) \mapsto u$ est solution de. . .

?

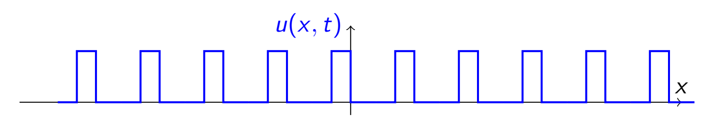
$\partial_t u = ?$ $\quad \partial_x u = ?$

La notion de fonction est lacunaire

Comment dériver la fonction u_0 discontinue ?

Posons: $u(x,t) = u_0(x-t), \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$(x,t) \mapsto u$ est solution du problème de propagation



$(x,t) \mapsto u$ est solution de. . .

?

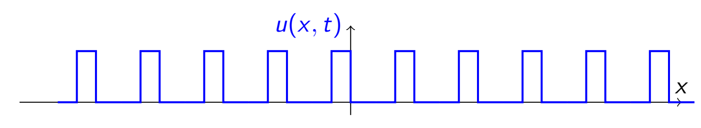
$\partial_t u = ? \quad \partial_x u = ?$

La notion de fonction est lacunaire

Comment dériver la fonction u_0 discontinue ?

Posons: $u(x,t) = u_0(x-t), \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$(x,t) \mapsto u$ est solution du problème de propagation



$(x,t) \mapsto u$ est solution de...

?

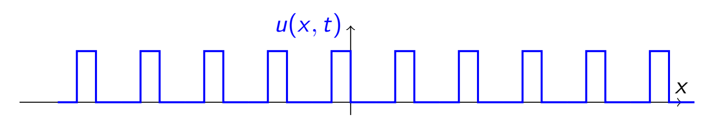
$$\partial_t u = ? \quad \partial_x u = ?$$

La notion de fonction est lacunaire

Comment dériver la fonction u_0 discontinue ?

Posons: $u(x,t) = u_0(x-t), \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$(x,t) \mapsto u$ est solution du problème de propagation



$(x,t) \mapsto u$ est solution de...

?

$$\partial_t u = ? \quad \partial_x u = ?$$

La notion de fonction est lacunaire

Comment dériver la fonction u_0 discontinue ?

Plan

Qu'avait donc en tête Paul Dirac ?

Paul (Adrien Maurice) Dirac
(1902-1984)

La masse de Dirac et autres objets étranges

Malgré une réputation de grande rigueur, Dirac imagine dans ses travaux des objets mathématiques qu'il a beaucoup de mal à décrire clairement.

Les fonctions sont (encore) lacunaires

Dirac essaie tant bien que mal d'expliquer les propriétés de ces objets en se rapportant à la notion de fonction, bien qu'il voie clairement qu'il ne s'agit pas des fonctions.

Un cours de P. Dirac (1)

(*Les principes de la mécanique quantique*, p. 75, 1930)

la fonction singulière $\delta(x)$ étant définie par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = 1$$

$$\delta(\mathrm{x}) = 0 \quad (\text{pour x} \neq 0)$$

il n'est nullement à craindre que l'introduction de la fonction δ dans nos calculs rende la théorie moins rigoureuse qu'elle ne l'était jusqu'à présent ; en effet, toute équation qui renferme la fonction δ peut être écrite sous une forme équivalente, quoique généralement moins commode, et dans laquelle la fonction δ disparaît complétement. la fonction δ constitue donc plutôt une notation commode.

Un cours de P. Dirac (2)

(*Les principes de la mécanique quantique*, p. 75, 1930)

Le seul manque de rigueur réel de la théorie résulte du fait que certaines opérations que nous effectuons sur les symboles abstraits utilisés ne sont pas rigoureusement définies, comme par exemple la dérivation et l'intégration par rapport aux paramètres que ces symboles renferment. Quand ces opérations ont un sens, nous pouvons en étudiant les représentations des symboles abstraits, utiliser librement la fonction δ comme si elle était une fonction continue, sans que cela conduise à des résultats erronés. [...]

Un cours de P. Dirac (3)

(*Les principes de la mécanique quantique*, p. 75, 1930)

Notons quelques propriétés élémentaires de la fonction δ qui peuvent se déduire de sa définition ou qui, du moins, ne sont pas en contradiction avec elle. Nous avons

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$x\delta(x) = 0 \tag{26}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)\,dx = f(a) \tag{27}$$

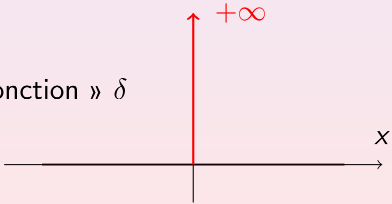
f(x) étant une fonction continue quelconque de x, a un nombre quelconque et le domaine d'intégration étant un domaine quelconque renfermant le point a

La masse de Dirac vue de la physique

Un point de vue encore courant chez les physiciens consiste à décrire la masse de Dirac comme une « sorte de fonction » δ nulle en tout point sauf en $x = 0$ où elle vaudrait $+\infty$.

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

« fonction » δ



Une première réponse aux intuitions de P. Dirac

La notion mathématique de mesure

La théorie de la mesure fournit des objets mathématiques rigoureusement définis qui correspondent aux intuitions de P. Dirac.

Définition de la mesure de Dirac δ_a

Soit $a \in \mathbb{R}$, par définition : $\forall M \subset \mathbb{R}, \quad \delta_a(M) = \begin{cases} 1, \text{si } a \in M \\ 0, \text{si } a \notin M \end{cases}$

Notation : $\delta = \delta_0$.

Relecture mathématique des idées de P. Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} \rightsquigarrow \delta(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\delta = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x \rightsquigarrow \delta_a(f) = \int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\delta_a = f(a)$$

Retour au texte de P. Dirac

(*Les principes de la mécanique quantique*, p. 76, 1930)

[...] Pour arriver à exprimer $\partial\psi_q/\partial q$ sous la forme (24) il est nécessaire d'utiliser la dérivée $\delta'(x)$ de $\delta(x)$. Il est évident que cette dérivée est une fonction encore plus discontinue et plus anormale que la fonction delta(x) elle-même ; mais dans beaucoup de cas, on peut aussi l'utiliser librement, comme si elle était une fonction continue de x, sans aboutir à des résultats erronés. Ses propriétés élémentaires sont données par

$$\delta'(-x) = \delta'(x)$$

$$x\delta'(-x) = -\delta(x) \tag{1}$$

Nouvel écueil

Les mesures : un pas au-delà des fonctions

La notion de mesure généralise déjà la notion de fonction (au sens où les fonctions permettent de définir des cas particuliers de mesures).

La notion de mesure est aussi lacunaire !

La théorie de la mesure ne fournit pas de définition de la dérivée d'une mesure.

Les mesures ne permettent pas de répondre pleinement aux intuitions de P. Dirac.

Plan

Sur la trace de la dérivée de δ

(Partie largement inspirée par l'introduction du cours de l'École des Mines sur les distributions donné par O. Lafitte)

Exercice de « méthodologie mathématiques »

Cherchons des indices qui vont nous permettre d'élaborer une définition cohérente de la dérivée de δ

Quelques questions

- Question 1 : peut-on « retrouver » δ à partir d'objets pour lesquelles la notion de dérivée n'est pas ambigue (les fonctions dérivables !) ?
- Question 2 : peut-on grâce à ces objets étendre la notion de dérivée à δ ?
- Question 3 : quid d'autres mesures ? D'autres objets ?

Démarche générale

- objets = fonctions dérivables
- processus = passage à la limite

$$\text{fonctions dérivables} \xrightarrow{\text{passage à la limite}} \text{mesure de Dirac}$$

Construction intuitive d'une suite approchant la masse de Dirac

Définitions

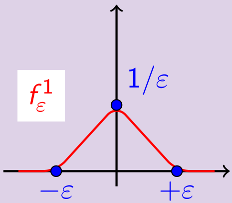
$$\chi : x \in \mathbb{R} \mapsto \chi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-x^2}{1-x^2}\right), & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\theta : x \in \mathbb{R} \mapsto \theta(x) = \chi(x) \left[\int_{\mathbb{R}} \chi(t)\,\mathrm{d}t\right]^{-1}$$

$$\theta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \theta = 1$$

Suite candidate

$$f_\varepsilon^1(x) = \frac{1}{\varepsilon}\theta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$



Construction intuitive d'une suite approchant la masse de Dirac

Définitions

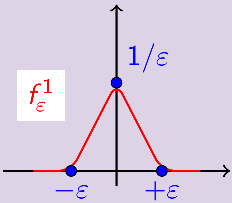
$$\chi : x \in \mathbb{R} \mapsto \chi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-x^2}{1-x^2}\right), & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\theta : x \in \mathbb{R} \mapsto \theta(x) = \chi(x) \left[\int_{\mathbb{R}} \chi(t)\,\mathrm{d}t\right]^{-1}$$

$$\theta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \theta = 1$$

Suite candidate

$$f_\varepsilon^1(x) = \frac{1}{\varepsilon}\theta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$



Construction intuitive d'une suite approchant la masse de Dirac

Définitions

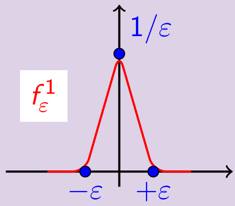
$$\chi : x \in \mathbb{R} \mapsto \chi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-x^2}{1-x^2}\right), & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\theta : x \in \mathbb{R} \mapsto \theta(x) = \chi(x) \left[\int_{\mathbb{R}} \chi(t)\,\mathrm{d}t\right]^{-1}$$

$$\theta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \theta = 1$$

Suite candidate

$$f_\varepsilon^1(x) = \frac{1}{\varepsilon}\theta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$



Le noeud du problème

On arrive à présent à la question suivante.

Tout le problème de la définition de δ est repoussé dans la définition de la limite.
Quel type de limite doit on envisager ? A quel sens doit-on vérifier que $(f_\varepsilon^1)_\varepsilon$ converge vers δ.

On notera pour le moment $f_\varepsilon^1 \xrightarrow{?} \delta$.

Première limite

limite ponctuelle

Test d'une première limite : la limite ponctuelle dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Interprêtons les idées « reçues »

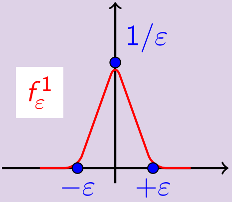
$$(f_\varepsilon)_\varepsilon \xrightarrow{?} \delta \quad \text{si} \quad \begin{cases} f_\varepsilon(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0, & \forall x \neq 0 \\ f_\varepsilon(0) \xrightarrow{\mathbb{R}} +\infty \end{cases}$$

Première limite

limite ponctuelle

Au sens de la convergence dans $\bar{\mathbb{R}}$ on a bien

$$\begin{cases} f_\varepsilon^1(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0, \quad \forall x \neq 0 \\ f_\varepsilon^1(0) \xrightarrow{\mathbb{R}} +\infty \end{cases}$$



Pathologie

Si cette limite était convenable alors $\lim f_\varepsilon^1 = \lim 2 f_\varepsilon^1 \Rightarrow \delta = 2\delta$!

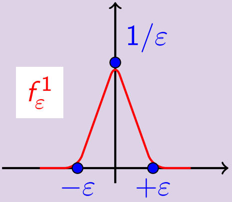
Correction : on ajoute un contrôle de l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la suite.

Première limite

limite ponctuelle

Au sens de la convergence dans $\bar{\mathbb{R}}$ on a bien

$$\begin{cases} f_\varepsilon^1(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0, & \forall x \neq 0 \\ f_\varepsilon^1(0) \xrightarrow{\mathbb{R}} +\infty \end{cases}$$



Pathologie

Si cette limite était convenable alors $\lim f_\varepsilon^1 = \lim 2 f_\varepsilon^1 \Rightarrow \delta = 2\delta$!

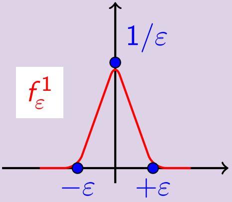
Correction : on ajoute un contrôle de l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la suite.

Première limite

~~limite ponctuelle~~

Au sens de la convergence dans $\bar{\mathbb{R}}$ on a bien

$$\begin{cases} f^1_\varepsilon(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0, & \forall x \neq 0 \\ f^1_\varepsilon(0) \xrightarrow{\mathbb{R}} +\infty \end{cases}$$



Pathologie

Si cette limite était convenable alors $\lim f^1_\varepsilon = \lim 2f^1_\varepsilon \Rightarrow \delta = 2\delta$!

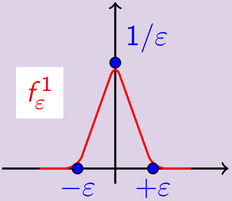
Correction : on ajoute un contrôle de l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la suite.

Première limite

~~limite ponctuelle~~

Au sens de la convergence dans $\bar{\mathbb{R}}$ on a bien

$$\begin{cases} f_\varepsilon^1(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0, & \forall x \neq 0 \\ f_\varepsilon^1(0) \xrightarrow{\mathbb{R}} +\infty \end{cases}$$



Pathologie

Si cette limite était convenable alors $\lim f_\varepsilon^1 = \lim 2 f_\varepsilon^1 \Rightarrow \delta = 2\delta$!

Correction : on ajoute un contrôle de l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la suite.

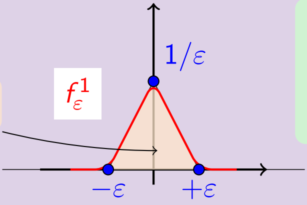
Deuxième limite (1)

~~limite ponctuelle~~ limite ponctuelle + contrôle global

Test d'une deuxième limite : limite ponctuelle dans $\overline{\mathbb{R}}$ + contrôle de $\int_{\mathbb{R}}$.

$$(f_\varepsilon)_\varepsilon \xrightarrow{?} \delta \text{ si } \begin{cases} f_\varepsilon(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0, \forall x \neq 0 \\ f_\varepsilon(0) \xrightarrow{\mathbb{R}} +\infty \end{cases} \text{ et } \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} \delta(\mathbb{R}) = 1$$

$\text{aire} = 1 = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^1 = 1$



On a bien

$f_\varepsilon^1 \xrightarrow{?} \delta$

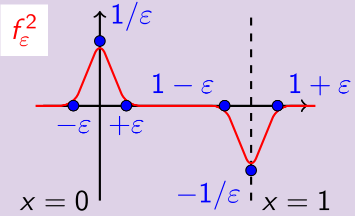
$2f_\varepsilon^1 \xrightarrow{?} 2\delta$

Deuxième limite (2)

~~limite ponctuelle~~ limite ponctuelle + contrôle global

Test d'une nouvelle suite candidate

On définit $(f^2_\varepsilon)_\varepsilon$ par $\quad f^2_\varepsilon(x) = \begin{cases} f^1_\varepsilon(x) & \text{si } |x| < \varepsilon \\ -f^1_\varepsilon(x) & \text{si } |x-1| < \varepsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



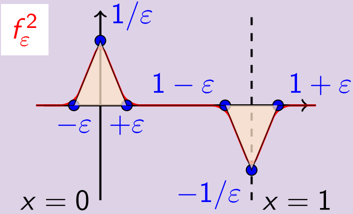
On attend que

$$f^2_\varepsilon \xrightarrow{?} \delta_0 - \delta_1$$

$\delta_\alpha =$ masse de Dirac en $x = \alpha$

Deuxième limite (3)

~~limite ponctuelle~~ limite ponctuelle + contrôle global



$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

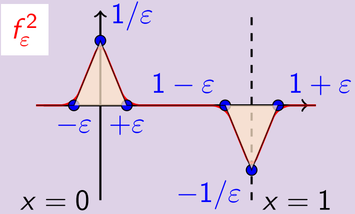
Pathologie

Avec une telle limite on obtient que

$$\left.\begin{aligned} f_\varepsilon^2 &\xrightarrow{?} \delta_0 - \delta_1 \\ 2f_\varepsilon^2 &\xrightarrow{?} \delta_0 - \delta_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta_0 - \delta_1 = 2\delta_0 - 2\delta_1 \ !$$

Deuxième limite (3)

~~limite ponctuelle~~ ~~limite ponctuelle + contrôle global~~



$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

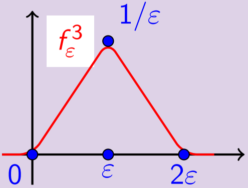
Pathologie

Avec une telle limite on obtient que

$$\left.\begin{array}{r} f_\varepsilon^2 \overset{?}{\longrightarrow} \delta_0 - \delta_1 \\ 2f_\varepsilon^2 \overset{?}{\longrightarrow} \delta_0 - \delta_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_0 - \delta_1 = 2\delta_0 - 2\delta_1 \ !$$

Pathologie de la limite ponctuelle

Une nouvelle fonction candidate



$$f_\varepsilon^3(x) = f_\varepsilon^1(x+\varepsilon)$$

La limite ponctuelle ne répond pas à l'intuition !

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} f_\varepsilon^3(x) = 0, \quad \text{bien que} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^3(x)\,\mathrm{d}x = 1,\ \forall \varepsilon > 0$$

alors que si on attend $f_\varepsilon^1 \xrightarrow{?} \delta$, il est raisonnable d'espérer de même que $f_\varepsilon^3 \xrightarrow{?} \delta$

Vers une troisième limite

Critère ponctuel	Critère local	Critère global
Évaluation d'une quantité liée à f_ε en chaque point	Évaluation d'une quantité liée à f_ε sur une collection d'intervalles	Évaluation d'une quantité liée à f_ε sur $\mathbb{R}$
↓	↓	↓
$f_\varepsilon(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$	mesure/intégrale de f_ε sur tout intervalle	$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x$

↓

Nouvelle tentative de définition : « limite locale »

On dira que $f_\varepsilon \xrightarrow{?} \delta$ lorsque

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b : \quad \int_a^b f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} \delta(]a,b[)$

Vers une troisième limite

Critère ponctuel	Critère local	Critère global
Évaluation d'une quantité liée à f_ε en chaque point	Évaluation d'une quantité liée à f_ε sur une collection d'intervalles	Évaluation d'une quantité liée à f_ε sur $\mathbb{R}$
$f_\varepsilon(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$	mesure/intégrale de f_ε sur tout intervalle	$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x$

Nouvelle tentative de définition : « limite locale »

On dira que $f_\varepsilon \xrightarrow{?} \delta$ lorsque

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b :\quad \int_a^b f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} \delta(]a,b[)$

Vers une troisième limite

Critère ponctuel	Critère local	Critère global
Évaluation d'une quantité liée à f_ε en chaque point	Évaluation d'une quantité liée à f_ε sur une collection d'intervalles	Évaluation d'une quantité liée à f_ε sur $\mathbb{R}$
↓	↓	↓
$f_\varepsilon(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$	mesure/intégrale de f_ε sur tout intervalle	$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x$

↓

Nouvelle tentative de définition : « limite locale »

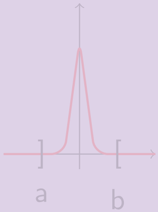
On dira que $f_\varepsilon \xrightarrow{?} \delta$ lorsque
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b : \quad \int_a^b f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} \delta(]a,b[)$

Troisième limite

~~limite ponctuelle~~ | ~~limite ponctuelle + contrôle global~~ | limite locale

Test contre la suite $(f_\varepsilon^1)_{\varepsilon>0}$

- Cas $0 \in]a,b[$: $\int_a^b f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1 = \delta(]a,b[)$
- Cas $0 \notin]a,b[$: $\int_a^b f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 = \delta(]a,b[)$
- Cas $a = 0$: $\int_0^b f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1/2 \neq \delta(]0,b[)$
- Cas $b = 0$: $\int_a^0 f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1/2 \neq \delta(]a,0[)$



La définition n'est toujours pas satisfaisante !

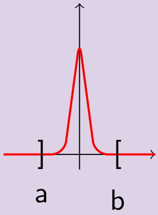
On ne retrouve pas, via ce passage à la limite, un objet qui est cohérent avec la mesure de Dirac.

Troisième limite

~~limite ponctuelle~~ | ~~limite ponctuelle + contrôle global~~ | limite locale

Test contre la suite $(f_\varepsilon^1)_{\varepsilon>0}$

- Cas $0 \in]a, b[$: $\int_a^b f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1 = \delta(]a, b[)$
- Cas $0 \notin]a, b[$: $\int_a^b f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 = \delta(]a, b[)$
- Cas $a = 0$: $\int_0^b f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1/2 \neq \delta(]0, b[)$
- Cas $b = 0$: $\int_a^0 f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1/2 \neq \delta(]a, 0[)$



La définition n'est toujours pas satisfaisante !

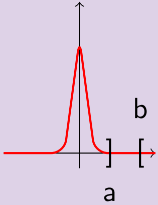
On ne retrouve pas, via ce passage à la limite, un objet qui est cohérent avec la mesure de Dirac.

Troisième limite

~~limite ponctuelle~~ | ~~limite ponctuelle + contrôle global~~ | limite locale

Test contre la suite $(f_\varepsilon^1)_{\varepsilon>0}$

- Cas $0 \in]a,b[$: $\int_a^b f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1 = \delta(]a,b[)$
- Cas $0 \notin]a,b[$: $\int_a^b f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 = \delta(]a,b[)$
- Cas $a = 0$: $\int_0^b f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1/2 \neq \delta(]0,b[)$
- Cas $b = 0$: $\int_a^0 f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1/2 \neq \delta(]a,0[)$



La définition n'est toujours pas satisfaisante !

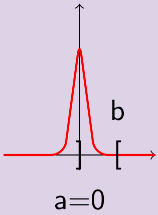
On ne retrouve pas, via ce passage à la limite, un objet qui est cohérent avec la mesure de Dirac.

Troisième limite

~~limite ponctuelle~~ | ~~limite ponctuelle + contrôle global~~ | limite locale

Test contre la suite $(f^1_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$

- Cas $0 \in]a, b[$: $\int_a^b f^1_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1 = \delta(]a, b[)$
- Cas $0 \notin]a, b[$: $\int_a^b f^1_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 = \delta(]a, b[)$
- Cas $a = 0$: $\int_0^b f^1_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1/2 \neq \delta(]0, b[)$
- Cas $b = 0$: $\int_a^0 f^1_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1/2 \neq \delta(]a, 0[)$



La définition n'est toujours pas satisfaisante !

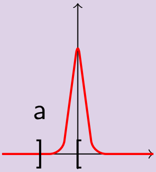
On ne retrouve pas, via ce passage à la limite, un objet qui est cohérent avec la mesure de Dirac.

Troisième limite

~~limite ponctuelle~~ | ~~limite ponctuelle + contrôle global~~ | limite locale

Test contre la suite $(f^1_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$

- Cas $0 \in]a,b[$: $\int_a^b f^1_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1 = \delta(]a,b[)$
- Cas $0 \notin]a,b[$: $\int_a^b f^1_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 = \delta(]a,b[)$
- Cas $a = 0$: $\int_0^b f^1_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1/2 \neq \delta(]0,b[)$
- Cas $b = 0$: $\int_a^0 f^1_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1/2 \neq \delta(]a,0[)$



La définition n'est toujours pas satisfaisante !

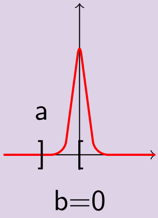
On ne retrouve pas, via ce passage à la limite, un objet qui est cohérent avec la mesure de Dirac.

Troisième limite

~~limite ponctuelle~~ | ~~limite ponctuelle + contrôle global~~ | limite locale

Test contre la suite $(f_\varepsilon^1)_{\varepsilon>0}$

- Cas $0 \in]a,b[$: $\int_a^b f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1 = \delta(]a,b[)$
- Cas $0 \notin]a,b[$: $\int_a^b f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 = \delta(]a,b[)$
- Cas $a = 0$: $\int_0^b f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1/2 \neq \delta(]0,b[)$
- Cas $b = 0$: $\int_a^0 f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1/2 \neq \delta(]a,0[)$



La définition n'est toujours pas satisfaisante !

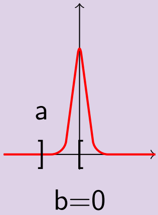
On ne retrouve pas, via ce passage à la limite, un objet qui est cohérent avec la mesure de Dirac.

Troisième limite

~~limite ponctuelle~~ ~~limite ponctuelle + contrôle global~~ ~~limite locale~~

Test contre la suite $(f_\varepsilon^1)_{\varepsilon>0}$

- Cas $0 \in]a,b[$: $\int_a^b f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1 = \delta(]a,b[)$
- Cas $0 \notin]a,b[$: $\int_a^b f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 = \delta(]a,b[)$
- Cas $a = 0$: $\int_0^b f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1/2 \neq \delta(]0,b[)$
- Cas $b = 0$: $\int_a^0 f_\varepsilon^1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{R}} 1/2 \neq \delta(]a,0[)$



La définition n'est toujours pas satisfaisante !

On ne retrouve pas, via ce passage à la limite, un objet qui est cohérent avec la mesure de Dirac.

Posons le crayon 5 minutes...

Que cherchions nous vraiment à faire ?

Décrire la masse de Dirac comme la limite d'une suite de fonctions régulières $\simeq$ décrire l'apparition d'une discontinuité

Que s'est-il passé ?

On ne sait pas capturer le comportement de la singularité bien que nous ayions « testé » son développement sur tous les intervalles (bornés ouverts)...

Quelle erreur a-t'on commise ?

Et si le comportement d'une singularité n'était pas qu'un comportement spatial (*i.e.* qui relève de la variable d'espace) ?

Posons le crayon 5 minutes...

Que cherchions nous vraiment à faire ?

Décrire la masse de Dirac comme la limite d'une suite de fonctions régulières $\simeq$ décrire l'apparition d'une discontinuité

Que s'est-il passé ?

On ne sait pas capturer le comportement de la singularité bien que nous ayions « testé » son développement sur tous les intervalles (bornés ouverts)...

Quelle erreur a-t'on commise ?

Et si le comportement d'une singularité n'était pas qu'un comportement spatial (*i.e.* qui relève de la variable d'espace) ?

Posons le crayon 5 minutes...

Que cherchions nous vraiment à faire ?

Décrire la masse de Dirac comme la limite d'une suite de fonctions régulières $\simeq$ décrire l'apparition d'une discontinuité

Que s'est-il passé ?

On ne sait pas capturer le comportement de la singularité bien que nous ayions « testé » son développement sur tous les intervalles (bornés ouverts)...

Quelle erreur a-t'on commise ?

Et si le comportement d'une singularité n'était pas qu'un comportement spatial (*i.e.* qui relève de la variable d'espace) ?

Posons le crayon 5 minutes. . .

Que cherchions nous vraiment à faire ?

Décrire la masse de Dirac comme la limite d'une suite de fonctions régulières $\simeq$ décrire l'apparition d'une discontinuité

Que s'est-il passé ?

On ne sait pas capturer le comportement de la singularité bien que nous ayions « testé » son développement sur tous les intervalles (bornés ouverts). . .

Quelle erreur a-t'on commise ?

Et si le comportement d'une singularité n'était pas qu'un comportement spatial (*i.e.* qui relève de la variable d'espace) ?

Posons le crayon 5 minutes...

Que cherchions nous vraiment à faire ?

Décrire la masse de Dirac comme la limite d'une suite de fonctions régulières $\simeq$ décrire l'apparition d'une discontinuité

Que s'est-il passé ?

On ne sait pas capturer le comportement de la singularité bien que nous ayions « testé » son développement sur tous les intervalles (bornés ouverts)...

Quelle erreur a-t'on commise ?

Et si le comportement d'une singularité n'était pas qu'un comportement spatial (*i.e.* qui relève de la variable d'espace) ?

Changement de paradigme

Test à travers une collection d'objets

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow$ « mesure » du comportement de f à travers une collection d'objets que sont les intervalles $]a,b[$.

Changeons d'objet test !

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{]a,b[} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathbb{1}_{]a,b[}(x)\,\mathrm{d}x$$

$\mathbb{1}_{]a,b[}$ = cas particulier de fonction test

Changement de paradigme

Test à travers une collection d'objets

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow$ « mesure » du comportement de f à travers une collection d'objets que sont les intervalles $]a, b[$.

Changeons d'objet test !

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{]a,b[} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathbb{1}_{]a,b[}(x)\,\mathrm{d}x$$

$\mathbb{1}_{]a,b[}$ = cas particulier de fonction test

Changement de paradigme

Test à travers une collection d'objets

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow$ « mesure » du comportement de f à travers une collection d'objets que sont les intervalles $]a, b[$.

Changeons d'objet test !

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{]a,b[} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathbb{1}_{]a,b[}(x)\,\mathrm{d}x$$

$\mathbb{1}_{]a,b[}$ = cas particulier de fonction test

Et encore une nouvelle limite

Soit deux fonctions φ. En supposant que celà ait un sens, on pose

$$\mathscr{I}(f,\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

On suppose donné un espace de fonctions (tests) E qui permette toujours de définir $\mathscr{I}(f,\varphi)$.

La nouvelle limite

On dira que $f\varepsilon \xrightarrow{?} \delta$ si : $\quad \forall\varphi \in E, \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon,\varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} \delta(\varphi)$

Quelques remarques :

- Comment choisir E ?
- Il faut que $E \subset \{\text{ensemble des fonctions mesurables}\}$.
- On a $\mathscr{I}(f,\mathbb{1}_{]a,b[}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Et encore une nouvelle limite

Soit deux fonctions φ. En supposant que celà ait un sens, on pose

$$\mathscr{I}(f,\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

On suppose donné un espace de fonctions (tests) E qui permette toujours de définir $\mathscr{I}(f,\varphi)$.

La nouvelle limite

On dira que $f\varepsilon \xrightarrow{?} \delta$ si : $\quad \forall\varphi \in E, \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon,\varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} \delta(\varphi)$

Quelques remarques :

- Comment choisir E ?
- Il faut que $E \subset \{$ensemble des fonctions mesurables$\}$.
- On a $\mathscr{I}(f,\mathbb{1}_{]a,b[}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Testons (encore!) cette limite (1)

Supposons $E \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

$$\forall \varphi \in E \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^1(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (1-|t|)\,\varphi(t\varepsilon)\,\mathrm{d}t$$

$\forall t \in]0,1[\ , \quad \varphi(t\varepsilon) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(0)$, mais $\quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} ?$

Posons $h_\varepsilon : t \in]0,1[\to (1-|t|)\varphi(\varepsilon t)$ et $h : t \in]0,1[\to (1-|t|)$.

- $|h_\varepsilon|$ admet un majorant : $|h_\varepsilon(t)| \leq (\max_{\mathbb{R}} |\varphi|)h(t)$, $t \in]0,1[$
- Ce majorant est dans $L^1(]0,1[)$, puisque $h \in L^1(]0,1[)$
- h_ε converge ponctuellement vers $\varphi(0)h$ sur $]0,1[$

D'après le théorème de convergence dominée

$$h_\varepsilon \xrightarrow{L^1(]0,1[)} \varphi(0)h \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} h_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} h(t)\varphi(0)\,\mathrm{d}t = \varphi(0)$$

Testons (encore!) cette limite (1)

Supposons $E \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

$$\forall \varphi \in E \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon^1(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (1-|t|)\ \varphi(t\varepsilon)\ \mathrm{d}t$$

$$\forall t \in]0,1[\ , \quad \varphi(t\varepsilon) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(0)\ , \text{ mais } \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} ?$$

Posons $h_\varepsilon : t \in]0,1[\to (1-|t|)\varphi(\varepsilon t)$ et $h : t \in]0,1[\to (1-|t|)$.

- $|h_\varepsilon|$ admet un majorant : $|h_\varepsilon(t)| \leq (\max_{\mathbb{R}} |\varphi|)h(t)$, $t \in]0,1[$
- Ce majorant est dans $L^1(]0,1[)$, puisque $h \in L^1(]0,1[)$
- h_ε converge ponctuellement vers $\varphi(0)h$ sur $]0,1[$

D'après le théorème de convergence dominée

$$h_\varepsilon \xrightarrow{L^1(]0,1[)} \varphi(0)h \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} h_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} h(t)\varphi(0)\,\mathrm{d}t = \varphi(0)$$

Testons (encore!) cette limite (1)

Supposons $E \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

$$\forall \varphi \in E \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon^1(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f_\varepsilon^1(t\varepsilon)\varphi(t\varepsilon)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (1 -$$

$$\forall t \in]0,1[\ , \quad \varphi(t\varepsilon) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(0)\ , \text{ mais } \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} ?$$

Posons $h_\varepsilon : t \in]0,1[\to (1-|t|)\varphi(\varepsilon t)$ et $h : t \in]0,1[\to (1-|t|)$.

- $|h_\varepsilon|$ admet un majorant : $|h_\varepsilon(t)| \leq (\max_{\mathbb{R}} |\varphi|) h(t)$, $t \in]0,1[$
- Ce majorant est dans $L^1(]0,1[)$, puisque $h \in L^1(]0,1[)$
- h_ε converge ponctuellement vers $\varphi(0)h$ sur $]0,1[$

D'après le théorème de convergence dominée

$$h_\varepsilon \xrightarrow{L^1(]0,1[)} \varphi(0)h \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} h_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} h(t)\varphi(0)\,\mathrm{d}t = \varphi(0)$$

Testons (encore!) cette limite (1)

Supposons $E \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

$$\forall \varphi \in E \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon^1(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{\varepsilon - \varepsilon|t|}{\varepsilon}\varphi(t\varepsilon)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (1$$

$$\forall t \in]0,1[\ , \quad \varphi(t\varepsilon) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(0)\ , \text{ mais } \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} ?$$

Posons $h_\varepsilon : t \in]0,1[\to (1-|t|)\varphi(\varepsilon t)$ et $h : t \in]0,1[\to (1-|t|)$.

- $|h_\varepsilon|$ admet un majorant : $|h_\varepsilon(t)| \leq (\max_{\mathbb{R}} |\varphi|)h(t)$, $t \in]0,1[$
- Ce majorant est dans $L^1(]0,1[)$, puisque $h \in L^1(]0,1[)$
- h_ε converge ponctuellement vers $\varphi(0)h$ sur $]0,1[$

D'après le théorème de convergence dominée

$$h_\varepsilon \xrightarrow{L^1(]0,1[)} \varphi(0)h \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} h_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} h(t)\varphi(0)\,\mathrm{d}t = \varphi(0)$$

Testons (encore!) cette limite (1)

Supposons $E \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

$$\forall \varphi \in E \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon^1(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (1-|t|)\ \varphi(t\varepsilon)\ \mathrm{d}t$$

$\forall t \in]0,1[\ ,\quad \varphi(t\varepsilon) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(0)$, mais $\quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} ?$

Posons $h_\varepsilon : t \in]0,1[\to (1-|t|)\varphi(\varepsilon t)$ et $h : t \in]0,1[\to (1-|t|)$.

- $|h_\varepsilon|$ admet un majorant : $|h_\varepsilon(t)| \leq (\max_{\mathbb{R}} |\varphi|)h(t)$, $t \in]0,1[$
- Ce majorant est dans $L^1(]0,1[)$, puisque $h \in L^1(]0,1[)$
- h_ε converge ponctuellement vers $\varphi(0)h$ sur $]0,1[$

D'après le théorème de convergence dominée

$$h_\varepsilon \xrightarrow{L^1(]0,1[)} \varphi(0)h \qquad \text{et} \qquad \int_{-1}^{1} h_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} h(t)\varphi(0)\,\mathrm{d}t = \varphi(0)$$

Testons (encore!) cette limite (1)

Supposons $E \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

$$\forall \varphi \in E \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon^1(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (1 - |t|)\ \varphi(t\varepsilon)\ \mathrm{d}t$$

$$\forall t \in]0,1[\ , \quad \varphi(t\varepsilon) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(0)\ , \text{ mais } \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} ?$$

Posons $h_\varepsilon : t \in]0,1[\to (1 - |t|)\varphi(\varepsilon t)$ et $h : t \in]0,1[\to (1 - |t|)$.

- $|h_\varepsilon|$ admet un majorant : $|h_\varepsilon(t)| \leq (\max_{\mathbb{R}} |\varphi|) h(t)$, $t \in]0,1[$
- Ce majorant est dans $L^1(]0,1[)$, puisque $h \in L^1(]0,1[)$
- h_ε converge ponctuellement vers $\varphi(0)h$ sur $]0,1[$

D'après le théorème de convergence dominée

$$h_\varepsilon \xrightarrow{L^1(]0,1[)} \varphi(0)h \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} h_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} h(t)\varphi(0)\,\mathrm{d}t = \varphi(0)$$

Testons (encore!) cette limite (1)

Supposons $E \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

$$\forall \varphi \in E \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon^1(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (1-|t|)\ \varphi(t\varepsilon)\ \mathrm{d}t$$

$$\forall t \in]0,1[\ , \quad \varphi(t\varepsilon) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(0)\ , \text{ mais } \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} ?$$

Posons $h_\varepsilon : t \in]0,1[\to (1-|t|)\varphi(\varepsilon t)$ et $h : t \in]0,1[\to (1-|t|)$.

- $|h_\varepsilon|$ admet un majorant : $|h_\varepsilon(t)| \leq (\max_{\mathbb{R}} |\varphi|) h(t)$, $t \in]0,1[$
- Ce majorant est dans $L^1(]0,1[)$, puisque $h \in L^1(]0,1[)$
- h_ε converge ponctuellement vers $\varphi(0)h$ sur $]0,1[$

D'après le théorème de convergence dominée

$$h_\varepsilon \xrightarrow{L^1(]0,1[)} \varphi(0)h \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} h_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} h(t)\varphi(0)\,\mathrm{d}t = \varphi(0)$$

Testons (encore!) cette limite (1)

Supposons $E \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

$$\forall \varphi \in E \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon^1(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (1-|t|)\ \varphi(t\varepsilon)\ \mathrm{d}t$$

$$\forall t \in]0,1[\ , \quad \varphi(t\varepsilon) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(0)\ ,\ \text{mais} \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} ?$$

Posons $h_\varepsilon : t \in]0,1[\to (1-|t|)\varphi(\varepsilon t)$ et $h : t \in]0,1[\to (1-|t|)$.

- $|h_\varepsilon|$ admet un majorant : $|h_\varepsilon(t)| \leq (\max_{\mathbb{R}} |\varphi|) h(t),\ t \in]0,1[$
- Ce majorant est dans $L^1(]0,1[)$, puisque $h \in L^1(]0,1[)$
- h_ε converge ponctuellement vers $\varphi(0)h$ sur $]0,1[$

D'après le théorème de convergence dominée

$$h_\varepsilon \xrightarrow{L^1(]0,1[)} \varphi(0)h \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} h_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} h(t)\varphi(0)\,\mathrm{d}t = \varphi(0)$$

Testons (encore!) cette limite (1)

Supposons $E \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

$$\forall \varphi \in E \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon^1(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (1 - |t|)\ \varphi(t\varepsilon)\ \mathrm{d}t$$

$$\forall t \in]0,1[\ , \quad \varphi(t\varepsilon) \overset{\mathbb{R}}{\longrightarrow} \varphi(0)\ ,\ \text{mais} \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) \overset{\mathbb{R}}{\longrightarrow} ?$$

Posons $h_\varepsilon : t \in]0,1[\to (1 - |t|)\varphi(\varepsilon t)$ et $h : t \in]0,1[\to (1 - |t|)$.

- $|h_\varepsilon|$ admet un majorant : $|h_\varepsilon(t)| \leq (\max_{\mathbb{R}} |\varphi|) h(t)$, $t \in]0,1[$
- Ce majorant est dans $L^1(]0,1[)$, puisque $h \in L^1(]0,1[)$
- h_ε converge ponctuellement vers $\varphi(0)h$ sur $]0,1[$

D'après le théorème de convergence dominée

$$h_\varepsilon \xrightarrow{L^1(]0,1[)} \varphi(0)h \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} h_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \overset{\mathbb{R}}{\longrightarrow} \int_{-1}^{1} h(t)\varphi(0)\,\mathrm{d}t = \varphi(0)$$

Testons (encore!) cette limite (1)

Supposons $E \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

$$\forall \varphi \in E \quad \mathscr{I}(f^1_\varepsilon, \varphi) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^1_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (1 - |t|)\ \varphi(t\varepsilon)\ \mathrm{d}t$$

$$\forall t \in]0,1[\ , \quad \varphi(t\varepsilon) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(0)\ ,\ \text{mais} \quad \mathscr{I}(f^1_\varepsilon, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} ?$$

Posons $h_\varepsilon : t \in]0,1[\to (1 - |t|)\varphi(\varepsilon t)$ et $h : t \in]0,1[\to (1 - |t|)$.

- $|h_\varepsilon|$ admet un majorant : $|h_\varepsilon(t)| \leq (\max_{\mathbb{R}} |\varphi|) h(t)$, $t \in]0,1[$
- Ce majorant est dans $L^1(]0,1[)$, puisque $h \in L^1(]0,1[)$
- h_ε converge ponctuellement vers $\varphi(0)h$ sur $]0,1[$

D'après le théorème de convergence dominée

$$h_\varepsilon \xrightarrow{L^1(]0,1[)} \varphi(0)h \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} h_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} h(t)\varphi(0)\,\mathrm{d}t = \varphi(0)$$

Testons (encore!) cette limite (1)

Supposons $E \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

$$\forall \varphi \in E \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon^1(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (1-|t|)\ \varphi(t\varepsilon)\ \mathrm{d}t$$

$$\forall t \in]0,1[\ , \quad \varphi(t\varepsilon) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(0)\ , \text{ mais } \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} ?$$

Posons $h_\varepsilon : t \in]0,1[\to (1-|t|)\varphi(\varepsilon t)$ et $h : t \in]0,1[\to (1-|t|)$.

- $|h_\varepsilon|$ admet un majorant : $|h_\varepsilon(t)| \leq (\max_{\mathbb{R}} |\varphi|)h(t),\ t \in]0,1[$
- Ce majorant est dans $L^1(]0,1[)$, puisque $h \in L^1(]0,1[)$
- h_ε converge ponctuellement vers $\varphi(0)h$ sur $]0,1[$

D'après le théorème de convergence dominée

$$h_\varepsilon \xrightarrow{L^1(]0,1[)} \varphi(0)h \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} h_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} h(t)\varphi(0)\,\mathrm{d}t = \varphi(0)$$

Testons (encore!) cette limite (2)

Supposons $E \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

mesure de φ pour la mesure δ

$$\forall \varphi \in E, \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} \boxed{\varphi(0) = \delta(\varphi)}$$

De même, $\forall \varphi \in E$

- $\mathscr{I}(f_\varepsilon^2, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(0) - \varphi(1) = (\delta_0 - \delta_1)(\varphi)$
- $\mathscr{I}(f_\varepsilon^3, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(0) = \delta(\varphi)$

Ça marche !

Avec la nouvelle définition on a bien :

- f_ε^1 et f_ε^3 convergent vers δ
- f_ε^2 converge vers $\delta_0 - \delta_1$

Testons (encore!) cette limite (2)

Supposons $E \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

mesure de φ pour la mesure δ

$$\forall \varphi \in E, \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} \boxed{\varphi(0) = \delta(\varphi)}$$

De même, $\forall \varphi \in E$

- $\mathscr{I}(f_\varepsilon^2, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(0) - \varphi(1) = (\delta_0 - \delta_1)(\varphi)$
- $\mathscr{I}(f_\varepsilon^3, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(0) = \delta(\varphi)$

Ça marche !

Avec la nouvelle définition on a bien :

- f_ε^1 et f_ε^3 convergent vers δ
- f_ε^2 converge vers $\delta_0 - \delta_1$

Testons (encore!) cette limite (2)

Supposons $E \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

mesure de φ pour la mesure δ

$$\forall \varphi \in E, \quad \mathscr{I}(f_\varepsilon^1, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} \boxed{\varphi(0) = \delta(\varphi)}$$

De même, $\forall \varphi \in E$

- $\mathscr{I}(f_\varepsilon^2, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(0) - \varphi(1) = (\delta_0 - \delta_1)(\varphi)$
- $\mathscr{I}(f_\varepsilon^3, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(0) = \delta(\varphi)$

Ça marche !

Avec la nouvelle définition on a bien :

- f_ε^1 et f_ε^3 convergent vers δ
- f_ε^2 converge vers $\delta_0 - \delta_1$

Qu'est-ce donc qu'une distribution ?

Intuitivement

- C'est un « filtre » que l'on peut appliquer à des fonctions (vision « traitement du signal ») : on verra la parenté avec les filtres classiques obtenus par intégration
- L'ensemble des distributions est obtenu par un « cousinage » avec un espace de fonction à tester (verstion topologique) : il s'agit du dual topologique d'un espace de fonctions tests
- La notion de dérivée et d'autres outils disponibles pour les fonctions s'étendent aux distributions
- L'ensemble des distributions est très vaste

Quelques éléments de bibliographie

- J.M. Bony. Cours d'analyse, Théorie des distributions et analyse de Fourier. Éd. de l'École Polytechnique, 2001.
- P. A. M. Dirac. Les principes de la mécanique quantique. Éd. Jacques Gabay, 1990.
- Th. Gallouët et R. Herbin. Mesure et intégration. http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/licence.d/int-poly.pdf, 2007.
- O. Lafitte. Distributions et applications. S1924, ENSMP, 2000.
- F. Laudenbach. Calcul différentiel et intégral. Éd. de l'École Polytechnique, 2000.
- W. Rudin. Analyse fonctionnelle. Ediscience.
- W. Rudin. Analyse réelle et complexe. Masson.
- L. Schwartz. Analyse fonctionnelle.
- L. Schwartz. Théorie des distributions. Hermann, 1973.