

Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles

F. GOLSE

Octobre 2012

Table des matières

I	Distributions	1
1	Fonctions C^∞ à support compact	3
1.1	Calcul différentiel : rappels et notations	3
1.2	Fonctions de classe C^∞ à support compact	6
1.3	Régularisation des fonctions	11
1.3.1	Convolution des fonctions	11
1.3.2	Régularisation par convolution	21
1.4	Partitions de l'unité	24
1.5	Appendice : Inégalités de Hölder et de Minkowski	28
1.6	Exercices	33
2	E.D.P. d'ordre un	35
2.1	L'équation de transport	35
2.2	Equations de transport à coefficients variables	38
2.3	E.D.P. non linéaires d'ordre un	45
2.4	Exercices	50
3	Calcul des distributions	53
3.1	Introduction	53
3.2	Les distributions : définitions et exemples	55
3.2.1	Notion de distribution	55
3.2.2	Distributions positives	60
3.2.3	Remarques sur la définition des distributions	63
3.3	Convergence des suites de distributions	66
3.4	Opérations sur les distributions	72
3.4.1	Dérivation des distributions	72
3.4.2	Multiplication par une fonction de classe C^∞	78
3.4.3	Localisation et recollement des distributions	80
3.4.4	Changement de variables dans les distributions	82
3.4.5	Dérivation/Intégration sous le crochet de dualité	84
3.4.6	Produit de distributions	88
3.5	La formule des sauts et ses variantes	89
3.5.1	Formule des sauts en dimension $N = 1$	89
3.5.2	Formule de Green-Riemann : rappels	91

3.5.3	Formule de Green(-Ostrogradsky)	93
3.5.4	Formule des sauts en dimension quelconque	96
3.6	Distributions homogènes	102
3.7	Exercices	113
4	Support et convolution des distributions	115
4.1	Les distributions à support compact	116
4.1.1	Support d'une distribution	116
4.1.2	Distributions à support compact	119
4.1.3	Structure des distributions à support dans un singleton	121
4.2	Convolution $C_c^\infty \star \mathcal{D}'$	127
4.3	Opérations sur les distributions (suite)	133
4.3.1	Produit tensoriel de deux distributions	133
4.3.2	Composition d'une distribution et d'une application C^∞	136
4.4	Produit de convolution des distributions	139
4.5	Exercices	146
5	Transformation de Fourier	149
5.1	La classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$	150
5.2	La transformation de Fourier sur \mathcal{S}	154
5.3	Les distributions tempérées	161
5.4	La transformation de Fourier sur \mathcal{S}'	166
5.5	Transformation de Fourier partielle	176
5.6	Transformation de Fourier et séries de Fourier	178
5.7	Espaces de Sobolev	183
5.8	Exercices	190
6	Appendice	193
6.1	Rappels de topologie	193
6.2	Intégration sur les surfaces	196
6.2.1	Intégrales curvilignes : rappels	196
6.2.2	Élément d'aire sur une surface ; intégrale de surface	199
6.3	Intégration sur une hypersurface de \mathbf{R}^N	204
6.3.1	Exercices	208
6.4	Quelques propriétés de la fonction Γ	209
II	Applications aux EDP	215
7	Opérateurs différentiels	217
7.1	Opérateurs différentiels : exemples	218
7.2	Solutions élémentaires	226
7.2.1	Solution élémentaire du laplacien	226
7.2.2	Solution élémentaire du d'Alembertien	231
7.2.3	Solution élémentaire de l'opérateur de la chaleur	235
7.2.4	Solution élémentaire de l'opérateur de Schrödinger	237

7.3	Le problème de Cauchy au sens des distributions	241
7.3.1	Le cas des équations différentielles ordinaires	242
7.3.2	Le cas des EDP	245
7.4	Exercices	250
8	Equations de Laplace et de Poisson	253
8.1	Origines du modèle	253
8.2	Fonctions harmoniques	256
8.3	L'équation de Poisson dans l'espace euclidien	265
8.4	Problèmes aux limites pour le laplacien	269
8.5	Exercices	271
9	Equation de la chaleur	275
9.1	Origines du modèle	275
9.2	Problème de Cauchy et équation de la chaleur	277
9.3	Propriétés qualitatives	285
9.3.1	Bornes sur la solution du problème de Cauchy	286
9.3.2	Effet régularisant	289
9.3.3	Irréversibilité	291
9.3.4	Vitesse infinie de propagation	293
9.4	Equation des milieux poreux	295
9.4.1	Origine de l'équation des milieux poreux	295
9.4.2	Solutions auto-similaires.	297
9.5	Solution de l'équation de Hopf après les chocs	300
9.5.1	La transformation de Cole-Hopf.	303
9.5.2	La formule de Lax-Oleinik	308
9.5.3	Appendice	315
9.6	Exercices	317
10	Equation de Schrödinger	321
10.1	Origines du modèle	321
10.2	Problème de Cauchy et équation de Schrödinger	325
10.3	Effets dispersifs	331
10.4	Transformation de Wigner	335
10.4.1	La transformation de Wigner	335
10.4.2	Limite semi-classique	338
10.4.3	Interprétation physique	340
10.5	Exercices	343
11	Equation des ondes	347
11.1	Origines du modèle	347
11.2	Le problème de Cauchy	353
11.2.1	Formulation au sens des distributions	353
11.2.2	Solution élémentaire dans le futur	355
11.2.3	Existence et unicité de la solution	358
11.3	Solution élémentaire dans le futur	361

11.3.1	Le cas général en dimension $N \geq 2$.	362
11.3.2	Le cas de la dimension $N = 1$.	366
11.3.3	Le cas de la dimension $N = 3$: moyennes sphériques	368
11.3.4	Le cas de la dimension $N = 2$: méthode de descente	371
11.4	Propriétés qualitatives de l'équation des ondes	374
11.4.1	Conservation de l'énergie	374
11.4.2	Propagation à vitesse finie	375
11.4.3	Principe de Huygens	378
11.5	Equation des ondes et transformation de Radon	380
11.5.1	La transformation de Radon	380
11.5.2	Transformation de Radon et équation des ondes	384
11.5.3	Transformation de Radon et scanner	386
11.6	Exercices.	389
Bibliographie		393

Première partie

Distributions

Chapitre 1

Fonctions C^∞ à support compact

Ce chapitre rassemble plusieurs résultats préliminaires indispensables pour développer la théorie des distributions. Après quelques rappels de calcul différentiel — principalement destinés à fixer les notations — on étudiera plus particulièrement les fonctions de classe C^∞ sur un ouvert de \mathbf{R}^N et à support compact, ainsi que leurs premières applications en Analyse — notamment à la localisation et la régularisation des fonctions.

1.1 Calcul différentiel : rappels et notations

Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et une application $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ ou \mathbf{C}^n définie par

$$f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_N), \dots, f_n(x_1, \dots, x_N)).$$

Rappelons que l'application f est de classe C^p sur Ω — ce que l'on note $f \in C^p(\Omega, \mathbf{R}^n)$ ou $f \in C^p(\Omega, \mathbf{C}^n)$ — si toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à p des fonctions f_1, \dots, f_n sont continues sur Ω . L'espace $C^p(\Omega, \mathbf{R})$ — ou $C^p(\Omega, \mathbf{C})$ selon le contexte — est noté $C^p(\Omega)$.

De façon plus générale, pour $U \subset \mathbf{R}^N$, on notera $C^p(U, \mathbf{R}^n)$ (resp. $C^p(U, \mathbf{C}^n)$) l'ensemble des restrictions à U d'applications de classe C^p sur un ouvert de \mathbf{R}^N contenant U et à valeurs dans \mathbf{R}^n (resp. \mathbf{C}^n).

Lemme 1.1.1 (Schwarz) *Soit Ω ouvert de \mathbf{R}^N . Si $\phi \in C^2(\Omega)$, alors, pour tous $k < l = 1, \dots, N$, on a*

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_l \partial x_k} \quad \text{sur } \Omega.$$

Nous utiliserons systématiquement les notations suivantes pour les dérivées partielles d'une fonction f de classe C^1 sur Ω , ouvert de \mathbf{R}^N :

$$\partial_k f(x) \text{ ou } \partial_{x_k} f(x) \text{ désigne la dérivée partielle } \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$$

pour tout $k = 1, \dots, N$, ainsi que

$$\nabla f(x) \text{ ou } \nabla_x f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_N} f(x) \end{pmatrix}.$$

Rappelons également que, pour tout champ de vecteurs de classe C^1

$$V : \Omega \subset \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N \quad \text{où } \Omega \text{ est un ouvert de } \mathbf{R}^N,$$

on note

$$\operatorname{div} V(x) \text{ ou } \operatorname{div}_x V(x) = \sum_{k=1}^N \partial_{x_k} V_k(x).$$

Passons au cas des dérivées partielles d'ordre supérieur.

On nomme “multi-indice” tout élément $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbf{N}^N$. A tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$ on associe sa longueur

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N.$$

Pour chaque multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$, on note les dérivées partielles itérées d'une fonction f de classe C^∞ sur Ω comme suit :

$$\partial^\alpha f(x) \text{ ou } \partial_x^\alpha f(x) \text{ désigne } \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}(x),$$

c'est-à-dire que

$$\partial^\alpha f(x) \text{ ou } \partial_x^\alpha f(x) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_N}^{\alpha_N} f(x).$$

Par analogie, pour tout $x \in \mathbf{R}^N$ et tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$, on note

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}.$$

Notons encore, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$ et tout $\beta \in \mathbf{N}^N$

$$\beta \leq \alpha \text{ si et seulement si } \beta_k \leq \alpha_k \text{ pour } k = 1, \dots, N.$$

On posera alors

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)! \beta!}$$

où

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_N!.$$

Avec ces notations, on peut écrire très simplement

(a) la formule du binôme :

$$(x + y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha - \beta} y^\beta;$$

(b) la formule du multinôme :

$$(x_1 + \dots + x_N)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha,$$

(c) et la formule de Leibnitz : pour $f, g \in C^p(\Omega)$ et $|\alpha| \leq p$

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta g$$

Rappelons une dernière notation que nous utiliserons fréquemment par la suite : le laplacien d'une fonction de classe C^2 sur un ouvert de \mathbf{R}^N est

$$\Delta f \text{ ou } \Delta_x f(x) = \operatorname{div}(\nabla f(x)) = \sum_{k=1}^N \partial_{x_k}^2 f(x).$$

Nous allons maintenant passer en revue (sans démonstration) plusieurs énoncés classiques du calcul différentiel.

Commençons par la formule de dérivation des applications composées. On rappelle que, pour tout $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert et tout $f \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^n)$, on a

$$(f'(x) \cdot \xi)_k = \sum_{l=1}^N \partial_{x_l} f_k(x) \xi_l, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbf{R}^N, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Ainsi, f' est une application continue de Ω dans l'espace $\mathcal{L}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^n)$ des applications linéaires de \mathbf{R}^N dans \mathbf{R}^n . De plus, la matrice de $f'(x)$ dans les bases canoniques de \mathbf{R}^N et \mathbf{R}^n est, pour tout $x \in \Omega$,

$$(\partial_{x_l} f_k(x))_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq N}}$$

c'est-à-dire la matrice à n lignes et N colonnes, dont l'élément situé à la k -ième ligne et la l -ième colonne est $\partial_{x_l} f_k(x)$.

Théorème 1.1.2 (Dérivation des applications composées) *Soient U ouvert de \mathbf{R}^l et V ouvert de \mathbf{R}^m . Soient $f \in C^1(U; \mathbf{R}^m)$ et $g \in C^1(V; \mathbf{R}^n)$ telles que $f(U) \subset V$. Alors $g \circ f \in C^1(U; \mathbf{R}^n)$ et on a*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \text{ pour tout } x \in U.$$

(La notation \cdot désigne la composition d'application linéaires de \mathbf{R}^l dans \mathbf{R}^m et de \mathbf{R}^m dans \mathbf{R}^n .)

Les matrices de $(g \circ f)'(x)$, de $g'(f(x))$ et de $f'(x)$ dans les bases canoniques de \mathbf{R}^l , \mathbf{R}^m et \mathbf{R}^n sont donc reliées, pour tout $x \in U$, par la formule

$$(\partial_{x_k} (g \circ f)_i(x))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq l}} = (\partial_{x_j} g_i(f(x)))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \cdot (\partial_{x_k} f_j(x))_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq l}}$$

où \cdot désigne le produit de matrices à n lignes et m colonnes par les matrices à m lignes et l colonnes.

Rappelons enfin la formule de Taylor avec reste intégral :

(a) pour ϕ fonction de classe C^{p+1} sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbf{R}$:

$$\phi(b) = \sum_{k=0}^p \frac{(b-a)^k}{k!} \phi^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} \phi^{(p+1)}(t) dt$$

pour tous $a, b \in I$;

(b) pour une fonction f de classe C^{p+1} sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^N$:

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) \\ &+ (p+1) \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^p \partial^\alpha f(a+t(b-a)) dt, \end{aligned}$$

pour tous $a, b \in \Omega$ tels que le segment $[a, b] \subset \Omega$.

Pour démontrer cette dernière formule, on se ramène au cas à une variable en posant

$$\phi(t) = f(a+t(b-a)),$$

et on vérifie que

$$\phi^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha f(a+t(b-a)) (b-a)^\alpha.$$

1.2 Fonctions de classe C^∞ à support compact

Rappelons la définition du support d'une fonction :

Définition 1.2.1 Soit une fonction ϕ définie sur un espace topologique X et à valeurs dans \mathbf{R} ou \mathbf{C} . Le support de la fonction ϕ est

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in X \mid \phi(x) \neq 0\}}.$$

Les fonctions de classe C^∞ à support compact jouent, en Analyse, plusieurs rôles distincts, également importants :

a) elles servent à localiser les fonctions sans en dégrader les hypothèses de régularité¹ ;

b) elles servent à approcher les fonctions localement intégrables par des fonctions de classe C^∞ ;

1. Sauf l'analyticité, car, d'après le principe des zéros isolés, il n'existe pas de fonction analytique à support compact dans un ouvert de \mathbf{C} qui ne soit pas identiquement nulle — cf. [6], Théorème V.1.16, ou [9], chapitre X, Théorème 6.1.3.

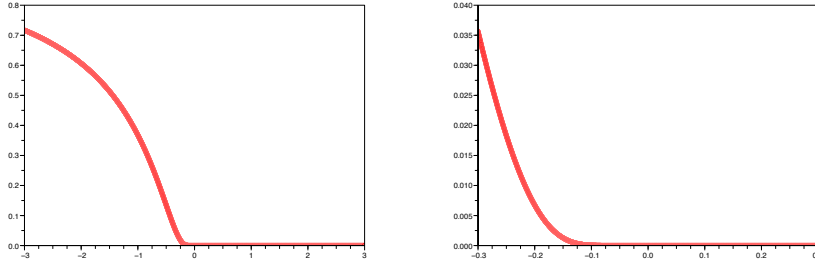


FIGURE 1.1 – A gauche : graphe de la fonction E . A droite : zoom sur la région du graphe correspondant à $x = 0$.

c) enfin, c'est à partir des fonctions de classe C^∞ à support compact et par un procédé de dualité que l'on va étendre le calcul différentiel des fonctions aux distributions, qui sont des objets plus généraux que les fonctions.

Commençons par construire des exemples de fonctions de classe C^∞ à support compact sur la droite réelle.

Considérons la fonction

$$E : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ définie par } E(x) = e^{1/x} \text{ si } x < 0 \text{ et } E(x) = 0 \text{ si } x \geq 0.$$

Il est clair que E est de classe C^∞ sur \mathbf{R}^* ; d'autre part, on montre que

$$E^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{1/x} \quad \text{pour tout } x < 0,$$

où P_n est la suite de polynômes définis par la relation de récurrence

$$\begin{aligned} P_0(X) &= 1, \\ P_{n+1}(X) &= -X^2(P'_n(X) + P_n(X)), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$E^{(n)}(x) \rightarrow 0 \text{ lorsque } x \rightarrow 0^- \text{ pour tout } n \geq 0$$

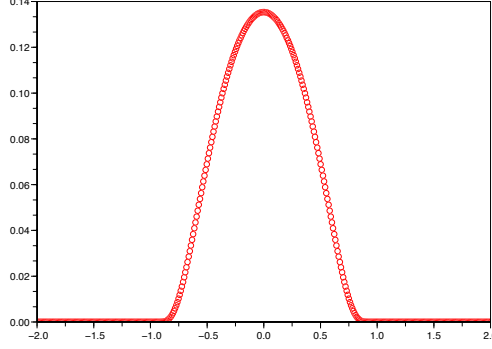
et donc que $E \in C^\infty(\mathbf{R})$. D'autre part, le support de E est \mathbf{R}_- .

A partir de la fonction E , on construit très simplement une fonction F de classe C^∞ sur \mathbf{R} et à support dans un segment $[a, b]$, où $a < b$ sont deux réels quelconques : il suffit de poser

$$F(x) = E(a-x)E(x-b) \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} F(x) &= e^{-\frac{b-a}{(b-x)(x-a)}} & \text{si } x \in]a, b[, \\ F(x) &= 0 & \text{si } x \in]-\infty, a] \cup [b, +\infty[. \end{aligned}$$

FIGURE 1.2 – Graphe de la fonction F pour $a = -1$ et $b = +1$.

Il est clair que $F \in C^\infty(\mathbf{R})$ et que $\text{supp}(F) = [a, b]$.

On construit de même un exemple de fonction de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N et à support compact, en posant

$$G(x) = \prod_{k=1}^N E(a_k - x_k)E(x_k - b_k) \text{ pour tout } x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N. \quad (1.1)$$

A nouveau, on vérifie sans peine que $G \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ (par exemple en constatant que G admet des dérivées partielles continues à tout ordre et en tout point de \mathbf{R}^N) et que $\text{supp}(G) = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N]$.

On obtient encore un autre exemple de fonction de classe C^∞ à support compact sur \mathbf{R}^N en posant

$$H(x) = E(|x|^2 - 1),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} H(x) &= 0 & \text{si } |x| \geq 1, \\ H(x) &= e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si } |x| < 1. \end{aligned}$$

Dans toute la suite, nous désignerons systématiquement par $|x|$ la norme euclidienne de $x \in \mathbf{R}^N$, c'est-à-dire

$$|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^N x_k^2}.$$

La fonction H est de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N comme composée de la fonction E et de la fonction $\mathbf{R}^N \ni x \mapsto |x|^2 - 1 \in \mathbf{R}$, toutes deux de classe C^∞ ; d'autre part,

$$\text{supp}(H) = \overline{B(0, 1)} = \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x| \leq 1\}.$$

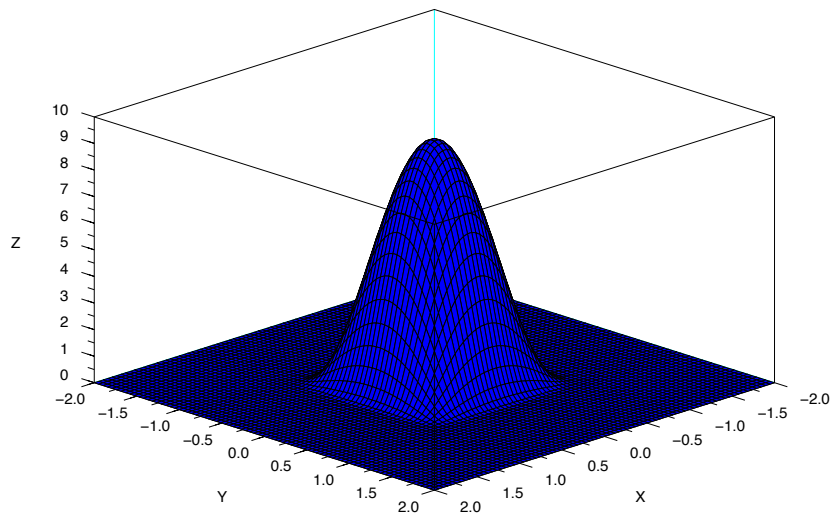
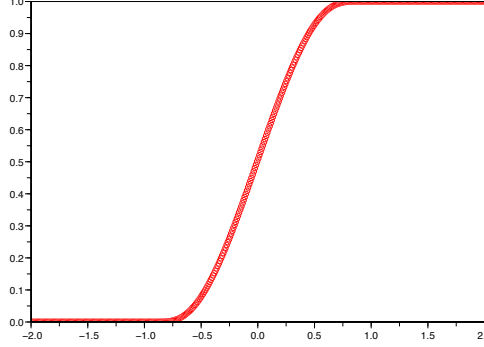


FIGURE 1.3 – Cas $N = 2$, $a_1 = a_2 = -1$ et $b_1 = b_2 = +1$. Graphe de la fonction $(x, y) \mapsto 500G(x, y)$.

FIGURE 1.4 – Graphe de la fonction I pour $a = -1$ et $b = +1$.

Un autre exemple important de fonction de classe C^∞ dans \mathbf{R} est la fonction I donnée par

$$I(x) = \frac{\int_{-\infty}^x F(z) dz}{\int_{-\infty}^{\infty} F(z) dz}$$

où F est la fonction définie ci-dessus. Remarquons que la fonction continue F vérifie

$$F > 0 \text{ sur }]a, b[\text{ de sorte que } \int_{-\infty}^{\infty} F(z) dz > 0.$$

La fonction $I \in C^\infty(\mathbf{R})$ satisfait donc les conditions suivantes :

$$0 \leq I \leq 1, \quad I|_{]-\infty, a]} = 0, \quad I|_{[b, +\infty[} = 1,$$

où $a < b$ sont les deux réels apparaissant dans la construction de F ci-dessus.

A partir de la fonction I , en supposant que les paramètres $a, b > 0$, on construit très simplement un exemple de fonction $J \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$\text{supp}(J) \subset B(0, \sqrt{b}), \quad J|_{\overline{B(0, \sqrt{a})}} = 1, \quad 0 \leq J \leq 1.$$

Il suffit en effet de poser

$$J(x) = 1 - I(|x|^2).$$

Notation 1.2.2 *Etant donné $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert, on notera $C_c^k(\Omega)$ — resp. $C_c^\infty(\Omega)$, $C_c^k(\Omega)$ — l'ensemble des fonctions de classe C^k — resp. de classe C^∞ , resp. continues — sur Ω à valeurs dans \mathbf{R} ou \mathbf{C} et dont le support est un compact inclus dans Ω .*

1.3 Régularisation des fonctions

Le procédé le plus courant de régularisation pour des fonctions localement intégrables sur \mathbf{R}^N utilise la notion de produit de convolution par une suite régularisante.

1.3.1 Convolution des fonctions

Le produit de convolution est une opération classique dans le cas des fonctions, que nous généraliserons ultérieurement au cas des distributions. Rappelons quelques résultats de base sur cette opération.

Définition 1.3.1 (Convolution des fonctions) *Deux fonctions f et g définies p.p. et mesurables sur \mathbf{R}^N sont dites convolables si, pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$, la fonction*

$$y \mapsto f(x-y)g(y) \text{ est intégrable sur } \mathbf{R}^N .$$

On définit alors le produit de convolution de f et de g par la formule

$$f \star g(x) := \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)g(y)dy \text{ p.p. en } x \in \mathbf{R}^N .$$

Donnons quelques exemples de fonctions convolables.

L'inégalité de Hausdorff-Young (Théorème 1.3.10 ci-dessous) montrera que, pour tous $p, q \in [1, \infty]$,

$$f \in L^p(\mathbf{R}^N) \text{ et } g \in L^q(\mathbf{R}^N) \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1 \Rightarrow f \text{ et } g \text{ sont convolables.}$$

Un exemple essentiellement trivial est le cas où $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$ tandis que $\phi \in C_c(\mathbf{R}^N)$: dans ce cas, on vérifie sans peine que f et ϕ sont convolables. En effet, notons K le support de ϕ , ici supposé compact, et

$$\{x\} - K = \{x - z \mid z \in K\} .$$

Evidemment, $\{x\} - K$ est compact pour tout $x \in \mathbf{R}^N$, et on remarque que l'on a $\phi(x-y)f(y) = 0$ pour $y \notin \{x\} - K$. Donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} |\phi(x-y)f(y)|dy &= \int_{\{x\}-K} |\phi(x-y)f(y)|dy \\ &\leq \sup_{z \in K} |\phi(z)| \int_{\{x\}-K} |f(y)|dy < \infty , \end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction

$$y \mapsto \phi(x-y)f(y) \text{ est intégrable pour tout } x \in \mathbf{R}^N .$$

Commençons par l'observation suivante :

Proposition 1.3.2 (Commutativité de la convolution) *Soient deux fonctions f et g mesurables sur \mathbf{R}^N et convolables ; alors*

$$f \star g(x) = g \star f(x) \text{ p.p. en } x \in \mathbf{R}^N .$$

Démonstration. Par hypothèse, les fonctions f et g sont convolables, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble $\mathcal{N} \subset \mathbf{R}^N$ de mesure nulle tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}^N \setminus \mathcal{N}$, la fonction

$$H_x : y \mapsto f(x-y)g(y) \text{ est intégrable sur } \mathbf{R}^N .$$

Pour $x \in \mathbf{R}^N \setminus \mathcal{N}$ quelconque, le changement de variables $y \mapsto z = x - y$ de jacobien $(-1)^N$, qui préserve donc la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^N (cf. [6], chapitre III.3.2, ou [9], chapitre IV, Théorème 3.0.5), transforme la fonction H_x intégrable sur \mathbf{R}^N en la fonction

$$K_x : z \mapsto K_x(z) := H_x(x-z) = g(x-z)f(z)$$

qui est donc intégrable sur \mathbf{R}^N , et vérifie, pour tout $x \in \mathbf{R}^N \setminus \mathcal{N}$,

$$f \star g(x) = \int_{\mathbf{R}^N} H_x(y)dy = \int_{\mathbf{R}^N} K_x(z)dz = g \star f(x) .$$

■

Remarque. La définition du produit de convolution peut paraître mystérieuse a priori. Elle est pourtant très naturelle à bien des égards : par exemple, le produit de convolution intervient dans la théorie des probabilités pour calculer la loi d'une somme de variables aléatoires réelles indépendantes — voir [13], Proposition 4.10.5.

Voici une autre façon intuitive de se représenter le produit de convolution. Supposons que $\phi \in C_c(\mathbf{R}^N)$ vérifie

$$\phi \geq 0 \text{ sur } \mathbf{R}^N, \text{ et } \int_{\mathbf{R}^N} \phi(z)dz = 1 .$$

Autrement dit, ϕ est une densité de probabilité sur \mathbf{R}^N — voir [13], Définition 4.2.7. La formule

$$\phi \star f(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x-z)\phi(z)dz$$

s'interprète alors comme la moyenne ou l'espérance — cf. S. Méléard, *ibid.*, Définition 3.3.1, p. 48 — des translatées de la fonction f — c'est à dire des fonctions de la forme

$$x \mapsto f(x-z)$$

pour la probabilité de densité ϕ .

Ce procédé, consistant à effectuer des translations sur le graphe d'une fonction, puis à prendre le "graphe moyen" va évidemment régulariser, ou ce qui revient au même, flouter les "aspérités" du graphe. Pensons par exemple au

cas où f est la fonction caractéristique d'un segment de \mathbf{R} : on s'attend à ce qu'après convolution par une fonction ϕ comme ci-dessus, les discontinuités de f aux bornes du segment soient éliminées

Le produit de convolution de deux fonctions est une opération non locale : il est important de savoir comment cette opération agit sur les supports des deux fonctions dont on calcule le produit de convolution. Avant cela, il faut définir la notion de support d'un élément de L^1_{loc} sur \mathbf{R}^N .

Définition 1.3.3 Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$ à valeurs dans \mathbf{R} ou \mathbf{C} . Le support de la fonction f est

$$\text{supp}(f) = \bigcap_{\Omega \in \mathcal{O}(f)} (\mathbf{R}^N \setminus \Omega),$$

où

$$\mathcal{O}(f) = \{\Omega \text{ ouvert de } \mathbf{R}^N \mid f = 0 \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

En effet, la définition usuelle du support d'une fonction — que nous avons rappelée dans la Définition 1.2.1 — ne convient plus dans le cas de fonctions définies presque partout. Considérons par exemple $f = \mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$ la fonction indicatrice des rationnels ; comme \mathbf{Q} est dense dans \mathbf{R} , on a

$$\overline{\{x \in \mathbf{R} \mid \mathbf{1}_{\mathbf{Q}}(x) \neq 0\}} = \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}.$$

Mais comme $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}}(x) = 0$ p.p. en $x \in \mathbf{R}$, on a $\mathbf{R} \in \mathcal{O}(\mathbf{1}_{\mathbf{Q}})$, de sorte que $\text{supp}(\mathbf{1}_{\mathbf{Q}}) = \emptyset$, en considérant $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$ comme élément de $L^1_{loc}(\mathbf{R})$ — rappelons que $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$ est (un représentant de la classe d'équivalence de) l'élément 0 de l'espace vectoriel $L^1_{loc}(\mathbf{R})$.

Proposition 1.3.4 (Majoration du support de $f \star g$) Soient f et g deux fonctions mesurables définies p.p. sur \mathbf{R}^N et convolables. Alors

$$\text{supp}(f \star g) \subset \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)},$$

avec la notation

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Démonstration. Soit \mathcal{N} sous-ensemble de \mathbf{R}^N de mesure nulle tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}^N \setminus \mathcal{N}$, la fonction définie p.p. sur \mathbf{R}^N

$$H_x : y \mapsto f(x - y)g(y)$$

soit intégrable sur \mathbf{R}^N .

Nous allons montrer que

$$x \in \mathbf{R}^N \setminus (\mathcal{N} \cup \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}) \Rightarrow H_x(y) \neq 0 \text{ p.p. en } y \in \mathbf{R}^N.$$

Notons

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_f &= \{z \in \mathbf{R}^N \setminus \text{supp}(f) \mid f(z) \neq 0\}, \\ \mathcal{N}_g &= \{z \in \mathbf{R}^N \setminus \text{supp}(g) \mid g(z) \neq 0\}, \end{aligned}$$

qui sont de mesure nulle dans \mathbf{R}^N .

Soit $x \in \mathbf{R}^N \setminus (\mathcal{N} \cup \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)})$; alors, pour tout $y \in \mathbf{R}^N$, on a

- (a) ou bien $x - y \notin \text{supp}(f)$,
- (b) ou bien $y \notin \text{supp}(g)$.

Donc, si $H_x(y) \neq 0$, alors

- ou bien on est dans le cas (a) et alors $x - y \in \mathcal{N}_f$,
- ou bien on est dans le cas (b) et alors $y \in \mathcal{N}_g$.

Autrement dit

$$\{y \in \mathbf{R}^N \mid H_x(y) \neq 0\} \subset (\{x\} - \mathcal{N}_f) \cup \mathcal{N}_g$$

qui est de mesure nulle dans \mathbf{R}^N comme réunion de deux ensembles de mesure nulle. On vient donc de montrer que

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}^N \setminus (\mathcal{N} \cup \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}), \quad H_x(y) = 0 \text{ p.p. en } y \in \mathbf{R}^N.$$

Donc pour tout $x \in \mathbf{R}^N \setminus (\mathcal{N} \cup \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)})$ on a

$$f \star g(x) = \int_{\mathbf{R}^N} H_x(y) dy = 0.$$

Par conséquent, la fonction $f \star g$ définie p.p. sur \mathbf{R}^N est nulle p.p. sur l'ouvert

$$\mathbf{R}^N \setminus \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}$$

ce qui implique l'inclusion

$$\text{supp}(f \star g) \subset \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}.$$

■

Remarque 1.3.5 Soient f et g , deux fonctions mesurables définies p.p. sur \mathbf{R}^N et convolables. Si l'une de ces deux fonctions est à support compact, alors

$$\text{supp}(f \star g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g).$$

En effet, dans ce cas,

$$\text{supp}(f) + \text{supp}(g) = \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)},$$

comme le montre le lemme suivant

Lemme 1.3.6 Soient $A \subset \mathbf{R}^N$ compact et $B \subset \mathbf{R}^N$ fermé. Alors $A + B$ est fermé dans \mathbf{R}^N .

Démonstration. En effet, soit une suite $(z_n)_{n \geq 1}$ de points de $A + B$ convergeant vers z dans \mathbf{R}^N . Il s'agit de montrer que $z \in A + B$.

Comme $z_n \in A + B$, il existe, pour tout $n \geq 1$, des points $x_n \in A$ et $y_n \in B$ tels que $z_n = x_n + y_n$. Comme A est compact dans \mathbf{R}^N , il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ qui converge vers une limite que l'on notera $x \in A$.

Alors

$$y_{n_k} = z_{n_k} - x_{n_k} \rightarrow z - x =: y \quad \text{lorsque } n_k \rightarrow \infty.$$

Comme B est fermé, $y \in B$. Par conséquent

$$z = x + y \text{ avec } x \in A \text{ et } y \in B$$

d'où $z \in A + B$. ■

On sait que le produit usuel de fonctions à valeurs réelles ou complexes hérite des propriétés de régularité de l'ensemble de ses facteurs. Ainsi, pour $f, g \in C^k(\Omega)$, le produit $fg : x \mapsto f(x)g(x)$ est de classe C^k sur Ω . Par comparaison, le produit de convolution a ceci de remarquable qu'il hérite de la régularité d'*un seul* de ses facteurs.

En voici une première manifestation.

Proposition 1.3.7 (Continuité de la convolution $C_c \star L_{loc}^1$) *Pour toute fonction $\phi \in C_c(\mathbf{R}^N)$ et $f \in L_{loc}^1(\mathbf{R}^N)$, la fonction $\phi \star f$ est continue sur \mathbf{R}^N .*

Démonstration. En effet, soient $x_0 \in \mathbf{R}^N$ et $\eta > 0$; on va montrer que, pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$x_n \in B(0, \eta) \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et } x_n \rightarrow x_0 \text{ pour } n \rightarrow \infty,$$

on a

$$\phi \star f(x_n) \rightarrow \phi \star f(x_0) \text{ pour } n \rightarrow \infty,$$

ce qui établira la continuité de $\phi \star f$ en x_0 .

Notons $K = \text{supp}(\phi)$ et posons

$$\tilde{K}_\eta = \{a - b \mid |a| \leq \eta \text{ et } b \in K\};$$

évidemment \tilde{K}_η est compact par construction comme image de $\overline{B(0, \eta)} \times K$ qui est compact par l'application continue $(a, b) \mapsto a - b$.

On définit alors

$$F_n(y) = \phi(x_n - y)f(y)$$

et on remarque que

$$F_n(y) = 0 \quad \text{pour } y \notin \tilde{K}_\eta,$$

car ϕ est à support dans K et $x_n \in B(0, \eta)$.

Comme f est mesurable et ϕ continue, F_n est mesurable pour tout $n \geq 0$ et $F_n(y) \rightarrow \phi(x_0 - y)f(y)$ p.p. en $y \in \mathbf{R}^N$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Enfin

$$|F_n(y)| \leq C|f(y)| \text{ p.p. en } y \in \tilde{K}_\eta$$

en notant

$$C = \sup_{z \in \mathbf{R}^N} |\phi(z)| = \max_{z \in K} |\phi(z)| < \infty.$$

Par convergence dominée, on conclut que

$$\phi \star f(x_n) = \int_{\mathbf{R}^N} F_n(y) dy \rightarrow \int_{\mathbf{R}^N} \phi(x_0 - y)f(y) dy = \phi \star f(x_0)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. ■

Le résultat ci-dessous va encore plus loin et permet de deviner l'intérêt de la notion de produit de convolution pour la régularisation des fonctions.

Proposition 1.3.8 (Régularité de la convolution $C_c^\infty \star L_{loc}^1$) *Pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ et tout $f \in L_{loc}^1(\mathbf{R}^N)$, le produit de convolution $\phi \star f$ appartient à $C^\infty(\mathbf{R}^N)$, et on a*

$$\partial^\alpha(\phi \star f) = (\partial^\alpha \phi) \star f, \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^N.$$

De même

$$\phi \in C_c^m(\mathbf{R}^N) \text{ et } f \in L_{loc}^1(\mathbf{R}^N) \Rightarrow \phi \star f \in C^m(\mathbf{R}^N).$$

Démonstration. Pour $x_0 \in \mathbf{R}^N$ et $\eta > 0$, on considère la fonction mesurable

$$F : B(x_0, \eta) \times \tilde{K}_\eta \ni (x, y) \mapsto \phi(x - y)f(y) \in \mathbf{R},$$

où on rappelle que

$$\tilde{K}_\eta = \{a - b \mid |a| \leq \eta \text{ et } b \in K\},$$

avec $K = \text{supp}(\phi)$ comme ci-dessus.

Pour presque tout $y \in \tilde{K}_\eta$, la fonction $x \mapsto F(x, y)$ est de classe C^∞ sur $B(x_0, \eta)$, et, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$, on a

$$|\partial_x^\alpha F(x, y)| = |\partial^\alpha \phi(x - y)f(y)| \leq C_\alpha |f(y)|$$

pour tout $(x, y) \in B(x_0, \eta) \times (\tilde{K}_\eta \setminus \mathcal{N})$, où \mathcal{N} est un ensemble négligeable éventuel sur lequel la fonction localement intégrable f n'est pas définie, et où

$$C_\alpha = \sup_{z \in \mathbf{R}^N} |\partial^\alpha \phi(z)| = \max_{z \in K} |\partial^\alpha \phi(z)| < \infty.$$

Comme la fonction f est localement intégrable, sa restriction au compact \tilde{K}_η est intégrable et on déduit du théorème de dérivation sous le signe somme² que la fonction

$$x \mapsto \int_{\tilde{K}_\eta} F(x, y) dy = \phi \star f(x)$$

2. Théorème de dérivation sous le signe somme. Soit U ouvert de \mathbf{R}^n et soit une fonction $f : U \times \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{C}$ vérifiant

- (a) pour tout $x \in U$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est sommable sur \mathbf{R}^N ;
- (b) il existe $\mathcal{N} \subset \mathbf{R}^N$ négligeable dans \mathbf{R}^N et une fonction $F : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}_+$ sommable tels que, pour tout $y \in \mathbf{R}^N \setminus \mathcal{N}$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ soit de classe C^1 sur U et que l'on ait

$$|\partial_{x_k} f(x, y)| \leq F(y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in U \times (\mathbf{R}^N \setminus \mathcal{N}) \text{ et tout } k = 1, \dots, n.$$

Alors la fonction

$$x \mapsto \int_{\mathbf{R}^N} f(x, y) dy$$

est de classe C^1 sur U et on a

$$\partial_{x_k} \int_{\mathbf{R}^N} f(x, y) dy = \int_{\mathbf{R}^N} \partial_{x_k} f(x, y) dy \quad \text{pour tout } x \in U \text{ et tout } k = 1, \dots, n.$$

Pour une démonstration, cf. [6], chapitre IV.1.2, ou [9], chapitre VII, Théorème 2.0.9.

admet des dérivées partielles de tous ordres sur $B(x_0, \eta)$, avec

$$\partial^\alpha(\phi \star f) = (\partial^\alpha \phi) \star f \text{ sur } B(x_0, \eta).$$

En particulier, $\phi \star f$ est de classe C^∞ sur $B(x_0, \eta)$, d'où la proposition, puisque x_0 et $\eta > 0$ sont arbitraires. ■

Avant de passer à l'étude du procédé de régularisation proprement dit, nous concluons cette section avec quelques résultats complémentaires sur la convolution des fonctions.

D'abord, il s'agit d'un produit associatif, ce qui permet de définir par récurrence le produit de convolution d'un nombre arbitraire n de fonctions dont $n-1$ sont continues à support compact dans \mathbf{R}^N et la dernière localement intégrable.

Proposition 1.3.9 (Associativité de la convolution) *Soient deux fonctions $f, g \in C_c(\mathbf{R}^N)$ et $h \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$. Alors*

$$f \star (g \star h) = (f \star g) \star h.$$

Démonstration. Tout d'abord, chaque membre de cette égalité a bien un sens. En effet, au membre de gauche, $g \star h \in C(\mathbf{R}^N)$ d'après la Proposition 1.3.7. C'est donc une fonction localement intégrable, de sorte que $f \star (g \star h)$ est bien défini puisque $f \in C_c(\mathbf{R}^N)$. Au membre de droite, $f \star g$ est une fonction continue à support compact d'après la Proposition 1.3.7 et la majoration du support de la Proposition 1.3.4 : alors, $(f \star g) \star h$ est bien définie puisque $h \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$.

On a

$$\begin{aligned} f \star (g \star h)(x) &= \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y) \left(\int_{\mathbf{R}^N} g(y-z)h(z)dz \right) dy \\ &= \int_{\{x\}-A} f(x-y) \left(\int_{\{y\}-B} g(y-z)h(z)dz \right) dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y) \left(\int_{\{x\}-(A+B)} g(y-z)h(z)dz \right) dy \end{aligned}$$

où $A = \text{supp}(f)$ et $B = \text{supp}(g)$ sont tous deux compacts, et où on note

$$E - F = \{u - v \mid u \in E \text{ et } v \in F\},$$

de sorte que

$$\{y\} - B \subset \{x\} - (A + B) \text{ puisque } y \in \{x\} - A.$$

Posons alors

$$H(z) = \mathbf{1}_{\{x\}-(A+B)}(z)h(z), \quad z \in \mathbf{R}^N.$$

Comme $\{x\} - (A + B)$ est compact, la fonction H est intégrable. Donc

$$\begin{aligned} f \star (g \star h)(x) &= \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y) \left(\int_{\mathbf{R}^N} g(y-z)H(z)dz \right) dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} H(z) \left(\int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)g(y-z)dy \right) dz \end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini appliqué à la fonction

$$(y, z) \mapsto f(x - y)g(y - z)H(z)$$

qui est sommable sur \mathbf{R}^2 . Faisons ensuite le changement de variables $y - z = w$:

$$\begin{aligned} f \star (g \star h)(x) &= \int_{\mathbf{R}^N} H(z) \left(\int_{\mathbf{R}^N} f(x - z - w)g(w)dw \right) dz \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} H(z)(f \star g)(x - z)dz \\ &= \int_{\{x\} - (A+B)} h(z)(f \star g)(x - z)dz = \int_{\mathbf{R}^N} h(z)(f \star g)(x - z)dz. \end{aligned}$$

(En effet la majoration du support d'un produit de convolution donnée dans la Proposition 1.3.4 montre que $f \star g(x - z) = 0$ si $z \notin \{x\} - (A + B)$, d'où on tire la dernière égalité.) Comme la dernière intégrale vaut précisément $(f \star g) \star h(x)$, le résultat est démontré. ■

Rappelons enfin l'inégalité suivante, qui est l'outil fondamental permettant d'estimer un produit de convolution dans les espaces L^p de Lebesgue.

Théorème 1.3.10 (Inégalité de Hausdorff-Young) Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}, \quad \text{avec la convention } 1/\infty = 0,$$

et soient $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbf{R}^N)$.

Alors f et g sont convolables sur \mathbf{R}^N et $f \star g \in L^r(\mathbf{R}^N)$.

De plus, $f \star g$ vérifie l'inégalité

$$\|f \star g\|_{L^r(\mathbf{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbf{R}^N)}.$$

Démonstration. Distinguons 4 cas.

1er cas : supposons que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, de sorte que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = 0, \quad \text{d'où } r = \infty.$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}^N$, la fonction

$$y \mapsto f(x - y) \text{ appartient à } L^p(\mathbf{R}^N).$$

Donc, pour tout $x \in \mathbf{R}^N$, l'application

$$y \mapsto f(x - y)g(y) \text{ appartient à } L^1(\mathbf{R}^N)$$

d'après l'inégalité de Hölder — cf. dans l'Appendice de ce chapitre, Théorème 1.5.1 — ce qui montre que f et g sont convolables, et que, pour tout $x \in \mathbf{R}^N$,

l'on a

$$\begin{aligned} |f \star g(x)| &= \left| \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)g(y)dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)||g(y)|dy \\ &\leq \|f(x-\cdot)\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbf{R}^N)} = \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbf{R}^N)}, \end{aligned}$$

d'où

$$\|f \star g\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbf{R}^N)}.$$

2ème cas : supposons que $p = q = 1$, de sorte que $r = 1$ puisque

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = 1.$$

Soient $f, g \in L^1(\mathbf{R}^N)$; alors la fonction

$$(X, Y) \mapsto f(X)g(Y) \text{ appartient à } L^1(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N).$$

Effectuons le changement de variables

$$X = x - y, \quad Y = y, \text{ de jacobien } \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Alors la fonction $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ appartient également à $L^1(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$. D'après le théorème de Fubini, la fonction

$$y \mapsto f(x-y)g(y) \text{ appartient à } L^1(\mathbf{R}^N) \text{ p.p. en } x \in \mathbf{R}^N$$

de sorte que f et g sont convolables. De plus

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} \left| \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)g(y)dy \right| dx &\leq \int_{\mathbf{R}^N} \int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)||g(y)|dydx \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} \int_{\mathbf{R}^N} |f(X)||g(Y)|dXdY \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbf{R}^N)}. \end{aligned}$$

3ème cas : supposons que $p = 1$ et $1 < q = r < \infty$. D'après le 2ème cas, la fonction

$$y \mapsto |f(x-y)|^{1/q}|g(y)| \text{ appartient à } L^q(\mathbf{R}^N) \text{ p.p. en } x \in \mathbf{R}^N,$$

tandis que la fonction

$$y \mapsto |f(x-y)|^{1-1/q} \text{ appartient à } L^{q'}(\mathbf{R}^N) \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^N,$$

en notant $q' = \frac{q}{q-1}$. D'après l'inégalité de Hölder, la fonction

$$y \mapsto |f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{1-1/q}|f(x-y)|^{1/q}|g(y)|$$

appartient donc à $L^1(\mathbf{R}^N)$ pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$, de sorte que f et g sont convolables, et on a

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)|^{1/q} |g(y)| |f(x-y)|^{1-1/q} dy \right)^q \\ & \leq \int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)| |g(y)|^q dy \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)|^{q'(1-1/q)} dy \right)^{q/q'} \\ & = |f| \star |g|^q(x) \|f\|_{L^1(\mathbf{R}^N)}^{q-1}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hausdorff-Young dans le cas déjà établi où $p = q = r = 1$ au produit de convolution $|f| \star |g|^q$, on trouve donc que

$$\begin{aligned} \|f \star g\|_{L^q(\mathbf{R}^N)}^q &= \int_{\mathbf{R}^N} \left| \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)g(y)dy \right|^q dx \\ &\leq \|f\|_{L^1(\mathbf{R}^N)}^{q-1} \int_{\mathbf{R}^N} |f| \star |g|^q(x) dx \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbf{R}^N)}^{q-1} \|f\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbf{R}^N)}^q = \|f\|_{L^1(\mathbf{R}^N)}^q \|g\|_{L^q(\mathbf{R}^N)}^q. \end{aligned}$$

4ème cas : supposons enfin que $1 < p, q, r < \infty$ vérifient

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

D'après le 2ème cas, la fonction

$$y \mapsto |f(x-y)|^{p/r} |g(y)|^{q/r} \text{ appartient à } L^r(\mathbf{R}^N) \text{ p.p. en } x \in \mathbf{R}^N,$$

tandis que

$$\begin{aligned} y \mapsto |f(x-y)|^{1-p/r} & \text{ appartient à } L^{rp/r-p}(\mathbf{R}^N) \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^N, \\ y \mapsto |g(y)|^{1-q/r} & \text{ appartient à } L^{rq/r-q}(\mathbf{R}^N). \end{aligned}$$

Remarquons en effet que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \left(\frac{1}{q} - 1 \right) < \frac{1}{p},$$

de sorte que

$$1 < p < r, \quad \text{et de même } 1 < q < r.$$

Appliquons l'inégalité de Hölder à trois termes — cf. Appendice de ce chapitre, Corollaire 1.5.2 — avec $n = 3$, $p_1 = r$, $p_2 = \frac{rp}{r-p}$ et $p_3 = \frac{rq}{r-q}$, de sorte que

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{r} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1.$$

On en déduit que la fonction

$$y \mapsto |f(x-y)| |g(y)| = |f(x-y)|^{1-p/r} |f(x-y)|^{p/r} |g(y)|^{q/r} |g(y)|^{1-q/r}$$

appartient à $L^1(\mathbf{R}^N)$ p.p. en $x \in \mathbf{R}^N$, de sorte que f et g sont convolables, et que

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)|^{p/r} |g(y)|^{q/r} |f(x-y)|^{1-p/r} |g(y)|^{1-q/r} dy \right)^r \\ & \leq (|f|^p \star |g|^q)(x) \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}^{r-p} \|g\|_{L^q(\mathbf{R}^N)}^{r-q}. \end{aligned}$$

Appliquant l'inégalité de Hausdorff-Young dans le cas déjà établi où $p = q = r = 1$ au produit de convolution $|f|^p \star |g|^q$, on trouve finalement que

$$\begin{aligned} \|f \star g\|_{L^r(\mathbf{R}^N)}^r &= \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)|^{p/r} |g(y)|^{q/r} |f(x-y)|^{1-p/r} |g(y)|^{1-q/r} dy \right)^r dx \\ &\leq \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}^{r-p} \|g\|_{L^q(\mathbf{R}^N)}^{r-q} \int_{\mathbf{R}^N} |f|^p \star |g|^q(x) dx \\ &\leq \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}^{r-p} \|g\|_{L^q(\mathbf{R}^N)}^{r-q} \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}^p \|g\|_{L^q(\mathbf{R}^N)}^q \\ &= \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}^r \|g\|_{L^q(\mathbf{R}^N)}^r \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration. ■

Remarque 1.3.11 Si $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$ et $g \in L^{p'}(\mathbf{R}^N)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (en convenant que $1/\infty = 0$), alors $f \star g \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ d'après l'inégalité de Hausdorff-Young. En fait, on a un résultat plus précis : la fonction $f \star g$ est uniformément continue et bornée sur \mathbf{R}^N . Voir Exercice 4.

1.3.2 Régularisation par convolution

Présentons d'abord la notion de suite régularisante.

Définition 1.3.12 (Suites régularisantes) On appelle suite régularisante (ou approximation de l'identité) une famille $(\zeta_\epsilon)_{0 < \epsilon < \epsilon_0}$ de fonctions définies sur \mathbf{R}^N vérifiant les propriétés suivantes : pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$

$$\zeta_\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^N), \quad \text{supp}(\zeta_\epsilon) \subset \overline{B(0, r_\epsilon)}, \quad \zeta_\epsilon \geq 0, \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}^N} \zeta_\epsilon(x) dx = 1,$$

où on a supposé que

$$r_\epsilon \rightarrow 0 \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Voici comment construire un exemple de suite régularisante. On part de la fonction H définie comme dans la section précédente. Remarquons que $H \geq 0$ sur \mathbf{R}^N et que $H > 0$ sur $B(0, 1)$, de sorte que

$$\int_{\mathbf{R}^N} H(x) dx > 0.$$

On définit une fonction ζ en posant

$$\zeta(x) = \frac{H(x)}{\int_{\mathbf{R}^N} H(z) dz} \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^N.$$

Il est clair que $\zeta \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ et que $\text{supp}(\zeta) = \overline{B(0,1)}$ (puisque $H \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ et $\text{supp}(H) = \overline{B(0,1)}$); de plus, on a $\zeta \geq 0$ et

$$\int_{\mathbf{R}^N} \zeta(x) dx = 1.$$

Posons alors, pour tout $\epsilon > 0$

$$\zeta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^N} \zeta\left(\frac{x}{\epsilon}\right);$$

on vérifie facilement que $(\zeta_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ est une suite régularisante sur \mathbf{R}^N , avec $r_\epsilon = \epsilon$.

Voici une première application de la notion de suite régularisante.

Théorème 1.3.13 (Densité de $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ dans $C_c(\mathbf{R}^N)$) Soit $f \in C_c(\mathbf{R}^N)$, et soit $(\zeta_\epsilon)_{0 < \epsilon < \epsilon_0}$ suite régularisante. Alors

$$\zeta_\epsilon \star f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ et } \zeta_\epsilon \star f \rightarrow f \text{ uniformément sur } \mathbf{R}^N$$

lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Démonstration. Supposons que $\text{supp}(f) \subset B(0, R)$; alors

$$\text{supp}(\zeta_\epsilon \star f) \subset B(0, R) + B(0, r_\epsilon) \subset B(0, R + r_\epsilon) \text{ pour tout } \epsilon \in]0, \epsilon_0[,$$

d'après la Proposition 1.3.4.

D'autre part, d'après la Proposition 1.3.8, la fonction $\zeta_\epsilon \star f \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$.

Enfin, en utilisant la commutativité du produit de convolution (cf. Proposition 1.3.2), on a

$$\begin{aligned} \zeta_\epsilon \star f(x) - f(x) &= \int_{\mathbf{R}^N} \zeta_\epsilon(y) f(x-y) dy - f(x) \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} \zeta_\epsilon(y) (f(x-y) - f(x)) dy \end{aligned}$$

car

$$\int_{\mathbf{R}^N} \zeta_\epsilon(y) dy = 1.$$

Par conséquent, comme $\zeta_\epsilon \geq 0$ est à support dans $\overline{B(0, r_\epsilon)}$

$$\begin{aligned} |\zeta_\epsilon \star f(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbf{R}^N} \zeta_\epsilon(y) |f(x-y) - f(x)| dy \\ &\leq \sup_{|y| \leq r_\epsilon} |f(x-y) - f(x)| \int_{B(0, r_\epsilon)} \zeta_\epsilon(y) dy \\ &= \sup_{|y| \leq r_\epsilon} |f(x-y) - f(x)|. \end{aligned}$$

Or f est continue à support compact, et donc uniformément continue sur \mathbf{R}^N : par conséquent, comme $r_\epsilon \rightarrow 0$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$,

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^N, |y| \leq r_\epsilon} |f(x-y) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

On en déduit alors que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^N} |\zeta_\epsilon \star f(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

■

Théorème 1.3.14 (Densité de $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ dans $L^p(\mathbf{R}^N)$) Soit $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors

a) pour toute suite régularisante $(\zeta_\epsilon)_{0 < \epsilon < \epsilon_0}$, on a

$$\|f - \zeta_\epsilon \star f\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \epsilon \rightarrow 0^+;$$

b) pour tout $\eta > 0$, il existe une fonction $f_\eta \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$\|f - f_\eta\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \leq \eta.$$

Comme nous l'avons rappelé plus haut, l'ensemble des fonctions continues sur \mathbf{R}^N à support compact est dense dans $L^p(\mathbf{R}^N)$ pour $1 \leq p < \infty$. Mais pour $p = \infty$, ce n'est pas le cas : $C_c(\mathbf{R}^N)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbf{R}^N)$ (puisque la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue). Donc, en particulier, $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbf{R}^N)$.

Démonstration. Par densité de $C_c(\mathbf{R}^N)$ dans $L^p(\mathbf{R}^N)$, étant donné $\eta > 0$, il existe $\phi \in C_c(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$\|f - \phi\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} < \frac{1}{2}\eta.$$

Puis, d'après le Théorème 1.3.13, si $(\zeta_\epsilon)_{0 < \epsilon < \epsilon_0}$ est une suite régularisante

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^N} |\zeta_\epsilon \star \phi(x) - \phi(x)| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Or $\text{supp}(\phi)$ est compact ; soit donc $R > 0$ tel que $\text{supp}(\phi) \subset B(0, R)$ de sorte que

$$\text{supp}(\zeta_\epsilon \star \phi) \subset B(0, R) + B(0, r_\epsilon) = B(0, R + r_\epsilon),$$

d'après la Proposition 1.3.4 et le Lemme 1.3.6. Alors, grâce à l'inégalité de Hölder (voir Appendice de ce chapitre, Théorème 1.5.1)

$$\|\zeta_\epsilon \star \phi - \phi\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \leq \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |\zeta_\epsilon \star \phi(x) - \phi(x)| |B(0, R + \sup_{0 < \epsilon < \epsilon_0} r_{\epsilon_0})|^{1/p} \rightarrow 0$$

lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Pour démontrer le b), on choisit $\epsilon > 0$ assez petit pour que

$$\|\zeta_\epsilon \star \phi - \phi\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} < \frac{1}{2}\eta$$

et on pose $f_\eta = \zeta_\epsilon \star \phi$: ainsi

$$\|f - f_\eta\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \leq \|f - \phi\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} + \|\phi - \zeta_\epsilon \star \phi\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} < \eta.$$

D'autre part

$$\zeta_\epsilon \star \phi \in C^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ est à support dans } B(0, R + \sup_{0 < \epsilon < \epsilon_0} r_{\epsilon_0}),$$

ce qui établit le b).

Pour démontrer le a), on écrit que

$$\begin{aligned} & \|f - f \star \zeta_\epsilon\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \\ & \leq \|f - \phi\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} + \|\phi - \zeta_\epsilon \star \phi\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} + \|\zeta_\epsilon \star \phi - \zeta_\epsilon \star f\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \\ & \leq (1 + \|\zeta_\epsilon\|_{L^1(\mathbf{R}^N)}) \|f - \phi\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} + \|\phi - \zeta_\epsilon \star \phi\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \\ & = \eta + \|\phi - \zeta_\epsilon \star \phi\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hausdorff-Young (Théorème 1.3.10). Or on a vu que

$$\|\phi - \zeta_\epsilon \star \phi\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Prenant la limite supérieure de chaque membre de cette inégalité pour $\epsilon \rightarrow 0^+$, on trouve que

$$\overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0^+} \|f - f \star \zeta_\epsilon\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \leq \eta$$

et comme ceci vaut pour tout $\eta > 0$, il s'ensuit que le membre de gauche de cette inégalité, qui est un nombre indépendant de η , est nul, ce qui établit le a).

■

1.4 Partitions de l'unité

Dans de nombreuses situations, il est très important de pouvoir étudier certaines propriétés de régularité d'une fonction (ou même, comme on le verra plus loin, d'une distribution) après l'avoir localisée dans une partie de l'espace. Encore faut-il que le processus de localisation ne modifie pas la régularité de la fonction en question. Pour ce faire, il faut donc disposer de fonctions à support compact dans un ouvert Ω de \mathbf{R}^N et valant identiquement 1 sur un compact de Ω .

Voici un premier résultat dans ce sens.

Lemme 1.4.1 (Fonctions plateaux) *Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et K compact inclus dans Ω . Il existe une fonction ϕ de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N vérifiant*

$$0 \leq \phi \leq 1, \quad \text{supp}(\phi) \text{ compact} \subset \Omega, \quad \text{et } \phi = 1 \text{ sur un voisinage de } K.$$

Démonstration. Pour tout $x \in K$, il existe $r_x > 0$ tel que $\overline{B(x, r_x)} \subset \Omega$. Notons alors χ_x la fonction de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N définie par

$$\chi_x(y) = 2eH\left(\frac{y-x}{r_x}\right), \quad y \in \mathbf{R}^N,$$

où H est la fonction définie à la section 1.2, de sorte que

$$\text{supp}(\chi_x) = \overline{B(x, r_x)}, \quad \chi_x > 0 \text{ sur } B(x, r_x), \quad \text{et } \chi_x(x) = 2.$$

Définissons alors l'ouvert

$$U_x = \{y \in \Omega \mid \chi_x(y) > 1\}, \quad x \in K.$$

Evidemment $(U_x)_{x \in K}$ est un recouvrement ouvert de K puisque $x \in U_x$. Il existe donc $x_1, \dots, x_n \in K$ tels que

$$K \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}.$$

La fonction

$$f = \sum_{j=1}^n \chi_{x_j}$$

vérifie

$$f \in C^\infty(\mathbf{R}^N), \quad \text{supp}(f) \subset \overline{B(x_1, r_{x_1})} \cup \dots \cup \overline{B(x_n, r_{x_n})} \text{ compact } \subset \Omega, \\ \text{et } f > 1 \text{ sur } V = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$$

qui est un voisinage ouvert de K .

Considérons maintenant la fonction I de la section 1.2 avec $a = 0$ et $b = 1$, de sorte que

$$I \in C^\infty(\mathbf{R}), \quad I' \geq 0, \quad I|_{\mathbf{R}_-} = 0, \quad I|_{[1, \infty[} = 1.$$

La fonction $\phi = I \circ f$ répond à la question. ■

N.B. Avec le choix de χ_x fait dans la démonstration ci-dessus,

$$U_x = B(x, \alpha r_x) \text{ où } \alpha > 0 \text{ est tel que } 2e \cdot e^{1/(\alpha^2-1)} = 1.$$

Voici une première application de ce résultat.

Théorème 1.4.2 (Densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$) Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N , $p \in [1, \infty[$ et $f \in L^p(\Omega)$. Pour tout $\eta > 0$, il existe $f_\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que

$$\|f - f_\eta\|_{L^p(\Omega)} < \eta.$$

Pour démontrer ce résultat, on prolonge f par 0 en dehors de Ω , puis on applique le Théorème 1.3.14, ce qui fournit une fonction $G \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ approchant le prolongement de f dans $L^p(\mathbf{R}^N)$. Toutefois, la fonction G ainsi obtenue n'est en général pas à support dans Ω . L'idée consiste à tronquer G en la multipliant par une fonction de $C_c^\infty(\Omega)$ valant 1 sur un compact de Ω bien choisi, comme dans le Lemme 1.4.1.

Démonstration. Soit $F \in L^p(\mathbf{R}^N)$ définie par

$$F(x) = f(x) \text{ si } x \in \Omega, \quad F(x) = 0 \text{ si } x \notin \Omega.$$

D'après le Théorème 1.3.14, il existe $G \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$\|F - G\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} < \frac{1}{2}\eta.$$

Pour tout $n \geq 1$, on considère

$$K_n = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 1/n \text{ et } |x| \leq n\},$$

qui est compact car fermé borné dans \mathbf{R}^N . D'après le Lemme 1.4.1, pour tout $n \geq 1$, il existe $\phi_n \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$\text{supp}(\phi_n) \subset \Omega, \quad \phi_n|_{K_n} = 1, \quad 0 \leq \phi_n \leq 1.$$

Evidemment

$$\mathbf{1}_{K_n} \leq \phi_n \leq \mathbf{1}_\Omega.$$

Pour tout $n \geq 1$, on définit $G_n = \phi_n G$. Par construction de K_n ,

$$\mathbf{1}_{K_n}(x) \uparrow \mathbf{1}_\Omega(x) \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^N \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

de sorte que

$$\phi_n(x) \rightarrow \mathbf{1}_\Omega(x) \text{ pour tout } x \in \Omega \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Comme $G \in L^p(\mathbf{R}^N)$ et que

$$|G(x) - G_n(x)|^p(x) \leq |G(x)|^p \text{ pour tout } x \in \Omega,$$

on en déduit par convergence dominée que

$$\|G_n - G\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega |G_n(x) - G(x)|^p dx \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Il existe donc $n_1 > 1$ tel que

$$\|G_{n_1} - G\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{2}\eta.$$

Posons alors

$$f_\eta = G_{n_1}|_\Omega.$$

Par construction, la fonction $G_{n_1} \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ est à support compact dans Ω , de sorte que $f_\eta \in C_c^\infty(\Omega)$. De plus, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} \|f - f_\eta\|_{L^p(\Omega)} &= \|F - G_{n_1}\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|F - G\|_{L^p(\Omega)} + \|G - G_{n_1}\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|F - G\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} + \|G - G_{n_1}\|_{L^p(\Omega)} < \eta, \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. ■

Un autre problème se posant fréquemment consiste à “passer du local au global”, c'est-à-dire à déduire certaines propriétés de régularité globale d'une fonction (ou, comme on le verra, d'une distribution) à partir de propriétés locales de cette fonction. Pour ce faire, on se servira de la notion de “partition de l'unité”.

Théorème 1.4.3 (Partitions de l'unité) *Soient $K \subset \mathbf{R}^N$ compact, et des ouverts de \mathbf{R}^N notés $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ tels que*

$$K \subset \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_n.$$

Alors il existe des fonctions ϕ_1, \dots, ϕ_n de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N telles que

$$0 \leq \phi_k \leq 1 \quad \text{et } \text{supp}(\phi_k) \text{ compact} \subset \Omega_k \text{ pour } k = 1, \dots, n,$$

vérifiant

$$\sum_{k=1}^n \phi_k = 1 \text{ sur un voisinage de } K.$$

Démonstration.

Etape 1. Montrons qu'il existe K_1, \dots, K_n compacts tels que

$$K_j \subset \Omega_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{et } K \subset \bigcup_{j=1}^n K_j.$$

En effet, pour tout $x \in K$, il existe $k(x) \in \{1, \dots, n\}$ et $r_x > 0$ tels que la boule fermée $\overline{B(x, r_x)} \subset \Omega_{k(x)}$. Evidemment $(B(x, r_x))_{x \in K}$ est un recouvrement ouvert du compact K . Il existe donc $x_1, \dots, x_m \in K$ tels que

$$K \subset \overline{B(x_1, r_{x_1})} \cup \dots \cup \overline{B(x_m, r_{x_m})}.$$

Pour tout $j = 1, \dots, m$, notons

$$A_j = \{l = 1, \dots, m \mid k(x_l) = j\},$$

et posons

$$K_j = \bigcup_{l \in A_j} \overline{B(x_l, r_{x_l})} \subset \Omega_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Etape 2. En appliquant le Lemme 1.4.1, on construit, pour tout $j = 1, \dots, n$, une fonction $\psi_j \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$\text{supp}(\psi_j) \text{ compact} \subset \Omega_j, \quad \psi_j \geq 0, \quad \psi_j = 1 \text{ sur } V_j \text{ voisinage ouvert de } K_j.$$

Alors

$$\sum_{j=1}^n \psi_j > 0 \text{ sur } V = V_1 \cup \dots \cup V_n \text{ voisinage ouvert de } K.$$

Toujours d'après le Lemme 1.4.1, soit $\theta \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ vérifiant

$$\text{supp}(\theta) \text{ compact} \subset V, \quad \theta = 1 \text{ au voisinage de } K, \quad \text{et } 0 \leq \theta \leq 1.$$

Ainsi

$$1 - \theta + \sum_{k=1}^n \psi_k > 0 \text{ sur } \mathbf{R}^N.$$

En effet

$$1 - \theta(x) + \sum_{k=1}^n \psi_k(x) \geq \sum_{k=1}^n \psi_k(x) > 0 \quad \text{si } x \in V,$$

$$1 - \theta(x) + \sum_{k=1}^n \psi_k(x) \geq 1 - \theta(x) = 1 \quad \text{si } x \notin V.$$

Posons alors

$$\phi_j = \frac{\psi_j}{1 - \theta + \sum_{k=1}^n \psi_k}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Par construction, $\phi_j \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ et vérifie

$$\phi_j \geq 0, \quad \text{et } \text{supp}(\phi_j) \text{ compact} \subset \Omega_j.$$

Enfin, on a

$$\sum_{j=1}^n \phi_j(x) = 1 \text{ en tout point où } \theta(x) = 1$$

c'est-à-dire sur un voisinage de K . ■

1.5 Appendice : Inégalités de Hölder et de Minkowski

Théorème 1.5.1 (Inégalité de Hölder) Soient $X \subset \mathbf{R}^N$ mesurable, ainsi que deux réels $p, q \in [1, \infty]$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \text{avec la convention } 1/\infty = 0.$$

Soient $f \in L^p(X)$ et $g \in L^q(X)$. Alors le produit $fg \in L^1(X)$ et on a

$$\int_X |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_X |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \quad \text{si } p, q < \infty,$$

tandis que

$$\int_X |f(x)g(x)|dx \leq \sup_{x \in X} |g(x)| \int_X |f(x)|dx \quad \text{si } p = 1 \text{ et } q = \infty.$$

Rappelons la notion de borne supérieure essentielle : pour toute fonction h mesurable de X dans $[0, +\infty]$,

$$\sup_{x \in X} h(x) := \min\{\lambda \in \mathbf{R} \mid h^{-1}(] \lambda, +\infty]) \text{ de mesure nulle.}\}.$$

Notons $M = \sup_{x \in X} h(x)$; la borne inférieure au membre de droite de l'égalité ci-dessus est bien atteinte, puisque

$$h^{-1}(]M, +\infty]) = \bigcup_{n \geq 1} h^{-1}(]M + \frac{1}{n}, +\infty])$$

et que le membre de droite est un ensemble de mesure nulle comme réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle.

Notant \mathcal{N} l'ensemble de mesure nulle

$$\mathcal{N} = h^{-1}(]M, +\infty]),$$

la définition même de $M = \sup_{x \in X} h(x)$ entraîne que

$$M = \sup_{x \in X \setminus \mathcal{N}} h(x).$$

D'autre part, si $A \subset X$ est un ensemble de mesure nulle, alors

$$\sup_{x \in X} h(x) \leq \sup_{x \in X \setminus A} h(x).$$

Démonstration. Si $p = 1$, alors $q = \infty$ et l'inégalité est triviale. En effet, il existe un ensemble de mesure nulle \mathcal{N} tel que

$$\|g\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} = \sup_{x \in X \setminus \mathcal{N}} |g(x)|.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_X |f(x)g(x)|dx &= \int_{X \setminus \mathcal{N}} |f(x)g(x)|dx \\ &\leq \sup_{x \in X \setminus \mathcal{N}} |g(x)| \int_{X \setminus \mathcal{N}} |f(x)|dx \\ &= \sup_{x \in X \setminus \mathcal{N}} |g(x)| \int_X |f(x)|dx = \|g\|_{L^\infty(X)} \|f\|_{L^1(X)}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $p, q \in]1, \infty[$.

Si

$$\left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_X |g(x)|^q dx \right)^{1/q} = 0,$$

alors l'une des deux fonctions f ou g est nulle p.p. sur X , de sorte que

$$\int_X |f(x)g(x)| dx = 0.$$

L'inégalité de Hölder est donc trivialement vérifiée dans ce cas.

On supposera donc que

$$\left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_X |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \neq 0.$$

Posons alors

$$F(x) = \frac{|f(x)|}{\left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p}} \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{|g(x)|}{\left(\int_X |g(x)|^q dx \right)^{1/q}}.$$

Par concavité de la fonction $z \mapsto \ln z$, on a

$$\frac{1}{p} \ln a + \frac{1}{q} \ln b \leq \ln \left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} \right)$$

pour tous $a, b > 0$, de sorte que

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

pour tous $a, b \in \mathbf{R}_+$.

Appliquons cette inégalité avec $a = F(x)^p$ et $b = G(x)^q$:

$$F(x)G(x) \leq \frac{1}{p} F(x)^p + \frac{1}{q} G(x)^q, \quad \text{p.p. en } x \in X.$$

Intégrant les deux membres de cette inégalité sur X , on aboutit à

$$\int_X F(x)G(x) dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

car

$$\int_X F(x)^p dx = \int_X G(x)^q dx = 1$$

par définition des fonctions F et G . On en déduit le résultat annoncé puisque

$$\int_X F(x)G(x) dx = \frac{1}{\left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_X |g(x)|^q dx \right)^{1/q}} \int_X |f(x)g(x)| dx.$$

■

L'inégalité de Hölder se généralise évidemment au produit d'un nombre quelconque de fonctions.

Corollaire 1.5.2 (Inégalité de Hölder pour un produit de n fonctions)

Soient $X \subset \mathbf{R}^N$ mesurable, un entier $n \geq 2$ ainsi que des réels $p_1, \dots, p_n \in]1, \infty[$ tels que

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1.$$

Soient $f_j \in L^{p_j}(X)$ pour $j = 1, \dots, n$. Alors $f_1 \dots f_n \in L^1(X)$ et on a

$$\int_X |f_1(x) \dots f_n(x)| dx \leq \prod_{j=1}^n \left(\int_X |f_j(x)|^{p_j} dx \right)^{1/p_j}.$$

Démonstration. Appliquer l'inégalité de Hölder du Théorème 1.5.1 en posant $f = f_1$ et $g = f_2 \dots f_n$, puis procéder par récurrence sur n . ■

Voici une première application très importante de l'inégalité de Hölder — qui n'est rien d'autre que l'inégalité triangulaire dans $L^p(X)$.

Théorème 1.5.3 (Inégalité de Minkowski) Soient $X \subset \mathbf{R}^N$ mesurable, ainsi que $p \in [1, \infty[$. Alors, pour tous $f, g \in L^p(X)$, on a

$$\left(\int_X |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_X |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{si } p < \infty,$$

tandis que

$$\sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| \quad \text{si } p = \infty.$$

Démonstration. Le cas $p = 1$ est trivial.

Pour $1 < p < \infty$, écrivons que

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|, \quad \text{pour presque tout } x \in X$$

de sorte que

$$\int_X |f(x) + g(x)|^p dx \leq \int_X |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx + \int_X |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx.$$

Appliquons l'inégalité de Hölder, en notant $p' = \frac{p}{p-1}$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On a

$$\begin{aligned} & \int_X |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \\ & \leq \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_X |f(x) + g(x)|^{(p-1)p'} dx \right)^{1/p'} \\ & = \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_X |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1-1/p}. \end{aligned}$$

De même

$$\int_X |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \leq \left(\int_X |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_X |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1-1/p}.$$

En additionnant membre à membre ces deux inégalités, on trouve que

$$\begin{aligned} & \int_X |f(x) + g(x)|^p dx \\ & \leq \left(\left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_X |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \right) \left(\int_X |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1-1/p}. \end{aligned}$$

Si

$$\int_X |f(x) + g(x)|^p dx = 0$$

l'inégalité annoncée est évidemment vraie.

Sinon, on divise chaque membre de l'inégalité ci-dessus par

$$\left(\int_X |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1-1/p} \neq 0$$

ce qui donne l'inégalité annoncée.

Passons enfin au cas $p = \infty$: il existe A et $B \subset \mathbf{R}^N$ de mesure nulle tels que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} |f(x)| &= \sup_{x \in X \setminus A} |f(x)|, \\ \sup_{x \in X} |g(x)| &= \sup_{x \in X \setminus B} |g(x)|. \end{aligned}$$

Alors $A \cup B$ est de mesure nulle et, pour tout $x \in X \setminus (A \cup B)$

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{x \in X \setminus A} |f(x)| + \sup_{x \in X \setminus B} |g(x)|.$$

En passant au sup sur $X \setminus (A \cup B)$, on trouve que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| &\leq \sup_{x \in X \setminus (A \cup B)} |f(x) + g(x)| \\ &\leq \sup_{x \in X \setminus A} |f(x)| + \sup_{x \in X \setminus B} |g(x)| \\ &= \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)|. \end{aligned}$$

■

Rappelons enfin que, pour tout $X \subset \mathbf{R}^N$ mesurable et toute fonction f mesurable sur X , on note

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(X)} &= \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p} && \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_{L^\infty(X)} &= \sup_{x \in X} |f(x)| && \text{si } p = \infty. \end{aligned}$$

1.6 Exercices

Exercice 1.

Démontrer les formules du binôme, du multinôme et de Leibnitz.

Exercice 2.

Montrer que la fonction χ définie sur \mathbf{R}^N par

$$\chi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{1-|x|^2}} \text{ si } |x| < 1, \quad \chi(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 1$$

est de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N .

Exercice 3.

a) Soit $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur \mathbf{R} .

b) Soit $n \geq 1$ entier. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ pour que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x^n}$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur \mathbf{R} .

Exercice 4.

Soient $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbf{R}^N)$ avec $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que $f \star g$ est uniformément continue et bornée sur \mathbf{R}^N . (On pourra utiliser le fait que $C_c(\mathbf{R}^N)$ est dense dans $L^p(\mathbf{R}^N)$ pour $p \in [1, \infty[$, et qu'une fonction continue sur un compact est uniformément continue.)

Exercice 5.

Soit $A \subset \mathbf{R}^N$ mesurable et de mesure de Lebesgue $|A| > 0$. Montrer que

$$A - A = \{x - y \mid x, y \in A\}$$

est un voisinage de 0.

(Indication : on pourra considérer la fonction $f \star \tilde{f}$, où f est la fonction indicatrice de A et $\tilde{f}(x) = f(-x)$.)

Exercice 6.

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite quelconque de nombres réels, et soit χ , une fonction de classe C^∞ sur \mathbf{R} telle que

$$\chi|_{[-1,1]} = 1, \quad \text{supp}(\chi) \subset [-2,2].$$

a) Montrer qu'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n \geq 0}$ de réels positifs tendant vers 0 telle que la série

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \chi\left(\frac{x}{\epsilon_n}\right)$$

définisse une fonction f de classe C^∞ sur \mathbf{R} .

b) En déduire le

Théorème de Borel. Pour toute suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels, il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que

$$f^{(n)}(0) = a_n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Exercice 7.

Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et K compact de \mathbf{R}^N inclus dans Ω . On notera dans la suite de cet exercice $F = \mathbf{R}^N \setminus \Omega$.

a) On note

$$\text{dist}(K, F) = \inf\{|x - y| \mid x \in K \text{ et } y \in F\}.$$

Montrer que $\text{dist}(K, F) > 0$.

b) Montrer que la borne inférieure du a) est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que $\text{dist}(K, F) = |x - y|$.

c) Dans la suite de cet exercice, on notera $\eta = \text{dist}(K, F)$. Pour tout $\epsilon > 0$, on pose

$$K_\epsilon = \{x \in \mathbf{R}^N \mid \text{dist}(x, K) \leq \epsilon\}.$$

Montrer que, pour tout $\epsilon \in]0, \eta[$, l'ensemble K_ϵ est un compact de \mathbf{R}^N inclus dans Ω .

d) Soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$0 \leq \chi \leq 1, \quad \text{supp}(\chi) \subset B(0, 1), \quad \int_{\mathbf{R}^N} \chi(x) dx = 1.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on pose $\chi_\epsilon(x) = \epsilon^{-N} \chi(x/\epsilon)$, et, pour tout $x \in \mathbf{R}^N$,

$$f_\epsilon(x) = \int_{K_\epsilon} \chi_\epsilon(x - y) dy.$$

Montrer que $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ vérifie

$$\text{supp}(f_\epsilon) \subset K_{2\epsilon}, \quad 0 \leq f_\epsilon \leq 1, \quad f_\epsilon|_K = 1,$$

et enfin que, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$, la famille de nombres réels

$$\epsilon^{|\alpha|} \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |\partial^\alpha f_\epsilon(x)|$$

reste bornée lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

En déduire une autre preuve du Lemme 1.4.1.

Chapitre 2

E.D.P. d'ordre un

Les équations aux dérivées partielles constituent le champ d'application le plus important de la théorie des distributions. Elles en ont d'ailleurs été, historiquement, la motivation première.

La théorie des équations aux dérivées partielles d'ordre un se ramène, dans une certaine mesure, à celle des systèmes d'équations différentielles ordinaires.

C'est donc par l'étude de ces équations que nous commencerons, et nous verrons sur plusieurs exemples qu'il est naturel d'avoir à considérer des solutions d'équations aux dérivées partielles qui ne soient pas forcément différentiables. Cette constatation fait sentir la nécessité de généraliser les notions usuelles du calcul différentiel.

2.1 L'équation de transport

L'équation de transport est le prototype des équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre. Elle s'écrit

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0$$

où l'inconnue $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$ est une fonction à valeurs réelles de classe C^1 définie sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$, et où $v \in \mathbf{R}^N$ est un vecteur donné.

Il s'agit d'un modèle intervenant dans diverses branches de la physique (théorie cinétique des gaz ou des plasmas, optique géométrique, neutronique...) L'inconnue $f(t, x)$ désignera, selon le contexte, une densité d'énergie ou de nombre de particules au point x à l'instant t , dont le vecteur v est la vitesse de propagation.

La notation $\nabla_x f$ désignera tout au long de ce chapitre le gradient de f par rapport aux variables $x = (x_1, \dots, x_N)$:

$$\nabla_x f(t, x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(t, x) \\ \vdots \\ \partial_{x_N} f(t, x) \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$v \cdot \nabla_x f(t, x) = \sum_{k=1}^N v_k \partial_{x_k} f(t, x).$$

Soit $y \in \mathbf{R}^N$; posons, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\gamma(t) = y + tv$; alors γ est une application de classe C^1 de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^N vérifiant

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = v.$$

Définition 2.1.1 *L'ensemble $\{(t, \gamma(t)) \mid t \in \mathbf{R}\}$ est une droite de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$, appelée "courbe caractéristique issue de y pour l'opérateur de transport $\partial_t + v \cdot \nabla_x$ ".*

Soit $f \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N)$ solution de l'équation de transport. L'application $t \mapsto f(t, \gamma(t))$ est de classe C^1 sur \mathbf{R}_+ (comme composée des applications f et $t \mapsto (t, \gamma(t))$, toutes deux de classe C^1), et on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t, \gamma(t)) &= \partial_t f(t, \gamma(t)) + \sum_{k=1}^N \partial_{x_k} f(t, \gamma(t)) \frac{d\gamma_k}{dt}(t) \\ &= \partial_t f(t, \gamma(t)) + \sum_{k=1}^N v_k \partial_{x_k} f(t, \gamma(t)) \\ &= (\partial_t f + v \cdot \nabla_x f)(t, \gamma(t)) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, toute solution de classe C^1 de l'équation de transport reste constante le long de chaque courbe caractéristique.

Théorème 2.1.2 *Soit $f^{in} \in C^1(\mathbf{R}^N)$. Le problème de Cauchy d'inconnue f*

$$\begin{aligned} \partial_t f(t, x) + v \cdot \nabla_x f(t, x) &= 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0, \\ f(0, x) &= f^{in}(x), \quad x \in \mathbf{R}^N, \end{aligned}$$

admet une unique solution $f \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N)$, donnée par la formule

$$f(t, x) = f^{in}(x - tv) \quad \text{pour tout } (t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N.$$

Cette formule explicite pour la solution de l'équation de transport en justifie le nom : le graphe de la donnée initiale f^{in} est en effet transporté par la translation de vecteur tv .

Démonstration. Si f est une solution de classe C^1 de l'équation de transport, elle est constante le long des courbes caractéristiques, donc

$$f(t, y + tv) = f(0, y) = f^{in}(y), \quad \text{pour tout } t > 0, \quad y \in \mathbf{R}^N.$$

En posant $y + tv = x$, on trouve donc que

$$f(t, x) = f^{in}(x - tv) \quad \text{pour tout } t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N.$$

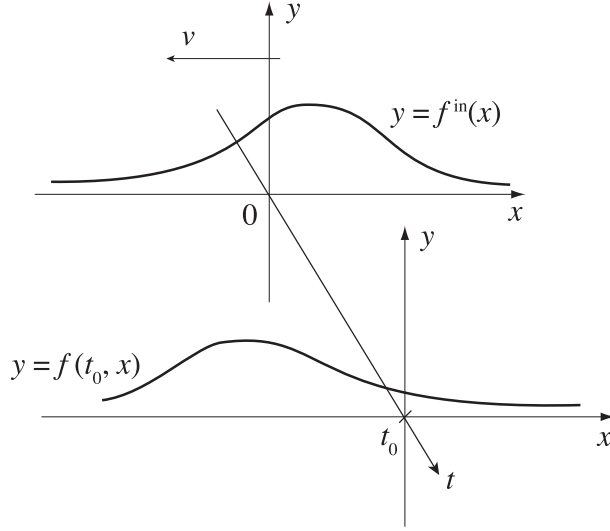


FIGURE 2.1 – Le graphe de la donnée initiale f^{in} est translaté de t_0v pour fournir le graphe de la fonction $x \mapsto f(t_0, x)$.

Réciproquement, pour $f^{in} \in C^1(\mathbf{R}^N)$, l'application $(t, x) \mapsto f^{in}(x - tv)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ (comme composée des applications f^{in} et $(t, x) \mapsto x - tv$ qui sont toutes deux de classe C^1). D'autre part on a

$$\nabla_x(f^{in}(x - tv)) = (\nabla f^{in})(x - tv),$$

tandis que

$$\begin{aligned} \partial_t(f^{in}(x - tv)) &= - \sum_{i=1}^N v_i (\partial_{x_i} f^{in})(x - tv) \\ &= -v \cdot (\nabla f^{in})(x - tv) = -v \cdot \nabla_x(f^{in}(x - tv)), \end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction $f : (t, x) \mapsto f^{in}(x - tv)$ est bien une solution de l'équation de transport. ■

Même si f^{in} n'est pas dérivable, la formule

$$f(t, x) = f^{in}(x - tv)$$

garde un sens, et on souhaiterait pouvoir dire qu'elle définit encore une solution de l'équation de transport.

Exemple : pour $N = 1$, prendre f^{in} en escalier, par exemple

$$f^{in}(x) = 1 \text{ si } x \leq 0, \quad f(x) = 0 \text{ si } x > 0$$

La solution de l'équation de transport modélise alors une onde de choc se propageant à la vitesse v .

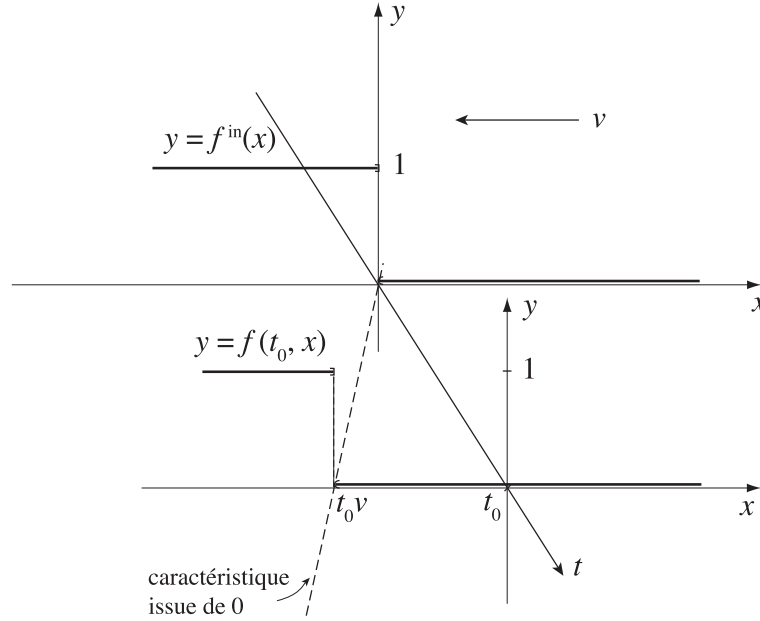


FIGURE 2.2 – Solution de l'équation de transport présentant une discontinuité de première espèce (saut).

Pour l'analyse des équations aux dérivées partielles, il est donc souvent très naturel de devoir “dériver des fonctions non dérivables”.

Le bon cadre pour cela, comme on le verra dans la suite de ce cours, est la théorie des distributions.

2.2 Equations de transport à coefficients variables

Dans de nombreuses situations, la vitesse de propagation v n'est pas constante, mais peut varier avec la position ou même avec le temps. (Pensons par exemple à la propagation de la lumière dans un milieu d'indice variable : la vitesse de la lumière est inversement proportionnelle à l'indice du milieu, et les rayons lumineux sont alors courbés.)

On va donc étudier l'équation de transport

$$\partial_t f(t, x) + V(t, x) \cdot \nabla_x f(t, x) = 0, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

où $V : [0, T] \times \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ est un champ de vecteurs admettant des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport aux variables x_j pour $j = 1, \dots, N$ et vérifiant les hypothèses suivantes :

(H1) V et $\nabla_x V$ sont continues sur $[0, T] \times \mathbf{R}^N$,

et il existe $\kappa > 0$ tel que

$$(H2) \quad |V(t, x)| \leq \kappa(1 + |x|), \text{ pour tout } (t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}^N.$$

La notation $\nabla_x V$ désigne, pour le champ de vecteurs V , la matrice

$$\nabla_x V(t, x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} V_1(t, x) & \dots & \partial_{x_N} V_1(t, x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} V_N(t, x) & \dots & \partial_{x_N} V_N(t, x) \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, le j -ème vecteur colonne de la matrice $\nabla_x V$ est $\partial_{x_j} V$, dérivée partielle du champ de vecteurs V par rapport à la j -ième coordonnée de x , ce qui se traduit encore par la formule

$$(\nabla_x V(t, x))_{ij} = \partial_{x_j} V_i(t, x), \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Comme le champ de vecteurs vérifie l'hypothèse (H1), le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne l'existence locale d'une unique courbe intégrale de V passant par le point x à l'instant t . (Voir [17], Théorème 2.1.)

Définition 2.2.1 Soit γ la courbe intégrale de V passant par x à l'instant t , c'est-à-dire la solution de

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{ds}(s) &= V(s, \gamma(s)), \\ \gamma(t) &= x. \end{aligned}$$

On appellera la courbe de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ paramétrée par s et définie par

$$s \mapsto (s, \gamma(s))$$

“courbe caractéristique de l'opérateur $\partial_t + V \cdot \nabla_x$ passant par x à l'instant t ”.

On veut exploiter la notion de courbe caractéristique pour l'opérateur de transport à coefficients variables $\partial_t + V(t, x) \cdot \nabla_x$ afin d'aboutir à une formule semi-explicite pour les solutions de l'équation

$$\partial_t f(t, x) + V(t, x) \cdot \nabla_x f(t, x) = 0,$$

comme dans le cas où $V = \text{Const.}$ étudié plus haut. Pour ce faire, on aura besoin de quelques propriétés fondamentales de ces courbes caractéristiques, résumées dans la proposition suivante. (Dans le cas où $V = \text{Const.}$ ces propriétés sont vérifiées trivialement car l'équation différentielle donnant les courbes caractéristiques est résolue de manière explicite.)

Proposition 2.2.2 (Flot caractéristique) Supposons que le champ de vecteurs V satisfait aux hypothèses (H1)-(H2).

Alors, pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}^N$, la courbe intégrale $s \mapsto \gamma(s)$ de V passant par x à l'instant t est définie pour tout $s \in [0, T]$. Dans toute la suite, on notera $s \mapsto X(s, t, x)$ cette courbe intégrale, c'est-à-dire la solution de

$$\begin{aligned}\partial_s X(s, t, x) &= V(s, X(s, t, x)), \\ X(t, t, x) &= x.\end{aligned}$$

L'application $X : [0, T] \times [0, T] \times \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ ainsi définie, appelée flot caractéristique de l'opérateur $\partial_t + V \cdot \nabla_x$, vérifie les propriétés suivantes :

(a) pour tous $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ et $x \in \mathbf{R}^N$

$$X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x);$$

(b) pour tout $j = 1, \dots, N$, les dérivées partielles secondes $\partial_s \partial_{x_j} X(s, t, x)$ et $\partial_{x_j} \partial_s X(s, t, x)$ existent pour tout $(s, t, x) \in]0, T[\times]0, T[\times \mathbf{R}^N$ et se prolongent en des fonctions continues sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbf{R}^N$; de plus, pour tout $j = 1, \dots, N$, on a

$$\partial_s \partial_{x_j} X(s, t, x) = \partial_{x_j} \partial_s X(s, t, x) \text{ pour tout } (s, t, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \mathbf{R}^N;$$

(c) pour tous $s, t \in [0, T]$ l'application

$$X(s, t, \cdot) : x \mapsto X(s, t, x)$$

est un C^1 -difféomorphisme de \mathbf{R}^N sur lui-même préservant l'orientation;

(d) le flot X appartient à $C^1([0, T] \times [0, T] \times \mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N)$.

Avant de donner la démonstration de cette proposition, expliquons le rôle de l'hypothèse **(H2)**. Considérons le cas où $N = 1$ et où $V(t, x) = x^2$: cet exemple ne vérifie évidemment pas **(H2)**. Alors le flot caractéristique X de $\partial_t + x^2 \partial_x$ vérifie

$$\begin{aligned}\partial_s X(s, t, x) &= X(s, t, x)^2, \\ X(t, t, x) &= x.\end{aligned}$$

Cette équation différentielle s'intègre explicitement : on trouve que

$$X(s, t, x) = \frac{x}{1 - (s - t)x}.$$

Ainsi, lorsque $x > 0$, la fonction $X(s, t, x)$ n'est définie que pour $s < t + \frac{1}{x}$, tandis que, pour $x < 0$, elle n'est définie que pour $s > t - \frac{1}{x}$. Donc l'application $(s, x) \mapsto X(s, t, x)$ n'est définie sur aucun voisinage de (t, x) de la forme $[a, b] \times \mathbf{R}$. Autrement dit, l'hypothèse **(H2)** sert à définir le flot X de façon globale — c'est-à-dire pour tout t tel que le champ $V(t, \cdot)$ soit défini et de classe C^1 .

Démonstration. Soit $(t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}^N$ et soit γ la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{ds}(s) &= V(s, \gamma(s)), \\ \gamma(t) &= x.\end{aligned}$$

On notera $I \subset [0, T]$ l'intervalle de définition de γ , qui est évidemment un voisinage de t .

D'après l'hypothèse **(H2)**, pour tous $s, t \in [0, T]$ et tout $x \in \mathbf{R}^N$

$$\begin{aligned} |\gamma(s)| &\leq |x| + \left| \int_t^s |V(\tau, \gamma(\tau))| d\tau \right| \\ &\leq |x| + \kappa T + \kappa \left| \int_t^s |\gamma(\tau)| d\tau \right|. \end{aligned}$$

L'inégalité de Gronwall¹ implique alors que

$$|\gamma(s)| \leq (|x| + \kappa T)e^{\kappa|s-t|} \leq (|x| + \kappa T)e^{\kappa T} \text{ pour tout } s \in I.$$

Supposons que $I \neq [0, T]$: d'après le "lemme des bouts" (voir [17], Proposition 4.2), on aurait

$$|\gamma(s)| \rightarrow +\infty \text{ pour } s \rightarrow \inf(I)^+ \text{ ou pour } s \rightarrow \sup(I)^-.$$

Or ceci est exclu par l'inégalité précédente : donc la solution maximale γ est définie sur $I = [0, T]$.

(a) Remarquons que, pour tous $t_1, t_2 \in [0, T]$ et tout $x \in \mathbf{R}^N$, les applications

$$t_3 \mapsto X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) \text{ et } t_3 \mapsto X(t_3, t_1, x)$$

sont deux courbes intégrales de V passant par $X(t_2, t_1, x)$ pour $t_3 = t_2$. Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, elles coïncident donc sur leur intervalle maximal de définition, c'est à dire pour tout $t_3 \in [0, T]$, d'où l'égalité annoncée.

1. **Inégalité de Gronwall.** Soient $A, B > 0$ et $\phi : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ continue telle que

$$\phi(t) \leq A + B \int_0^t \phi(s) ds, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Alors

$$\phi(t) \leq Ae^{Bt}, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Démonstration. La fonction ψ définie par

$$\psi(t) = A + B \int_0^t \phi(s) ds, \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

est de classe C^1 sur \mathbf{R}_+ et à valeurs dans $[A, +\infty[$ puisque ϕ est continue et positive ou nulle sur \mathbf{R}_+ . L'hypothèse faite sur ϕ s'écrit

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{B\phi(t)}{A + B \int_0^t \phi(s) ds} \leq B, \quad t \geq 0.$$

En intégrant sur $[0, t]$ chaque membre de cette inégalité, on trouve que

$$\ln \psi(t) - \ln \psi(0) = \ln \psi(t) - \ln A \leq Bt$$

d'où

$$\phi(t) \leq \psi(t) \leq Ae^{Bt}, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

(b) D'après le théorème de dérivation des solutions d'équations différentielles par rapport à la condition initiale (cf. [17] Théorème 2.2, et Proposition 5.6), pour tout instant initial $t \in [0, T]$ fixé l'application $(s, x) \mapsto X(s, t, x)$ admet une dérivée partielle $\partial_{x_j} X(s, t, x)$ pour tout $(s, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}^N$ et tout $j = 1, \dots, N$. De plus, cette dérivée partielle est l'unique solution définie pour tout $s \in [0, T]$ de l'équation différentielle linéaire

$$\begin{aligned}\partial_s \partial_{x_j} X(s, t, x) &= \nabla_x V(s, X(s, t, x)) \partial_{x_j} X(s, t, x), \\ \partial_{x_j} X(t, t, x) &= e_j\end{aligned}$$

où e_j est le j -ième vecteur de la base canonique de \mathbf{R}^N . Enfin la dérivée partielle $(s, x) \mapsto \partial_{x_j} X(s, t, x)$ est continue sur $[0, T] \times \mathbf{R}^N$ pour tout $j = 1, \dots, N$.

On déduit alors de l'équation différentielle linéaire ci-dessus que, pour tout $j = 1, \dots, N$, la dérivée partielle seconde

$$(s, x) \mapsto \partial_s \partial_{x_j} X(s, t, x) \text{ est continue sur } [0, T] \times \mathbf{R}^N.$$

D'après **(H1)** l'application partielle $V(s, \cdot)$ est de classe C^1 sur \mathbf{R}^N , ainsi que l'application $X(s, t, \cdot)$, dont on a vu qu'elle admet des dérivées partielles $\partial_{x_j} X(s, t, \cdot)$ continues sur \mathbf{R}^N pour tout $j = 1, \dots, N$. Ainsi le membre de droite de l'équation

$$\partial_s X(s, t, x) = V(s, X(s, t, x)), \quad (s, x) \in]0, T[\times \mathbf{R}^N.$$

est-il de classe C^1 en la variable x et le théorème de dérivation des fonctions composées entraîne que, pour tout $j = 1, \dots, N$,

$$\partial_{x_j} \partial_s X(s, t, x) = \nabla_x V(s, X(s, t, x)) \partial_{x_j} X(s, t, x) = \partial_s \partial_{x_j} X(s, t, x)$$

pour tout $(s, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}^N$ — la deuxième égalité ci-dessus étant précisément l'équation différentielle linéaire vérifiée par la dérivée partielle $\partial_{x_j} X$.

(c) D'après le (b), pour tous $s, t \in [0, T]$, l'application $X(s, t, \cdot)$ admet des dérivées partielles par rapport à toutes les variables x_j pour $j = 1, \dots, N$, et ces dérivées partielles sont continues en tout point $x \in \mathbf{R}^N$: donc l'application $X(s, t, \cdot)$ est de classe C^1 sur \mathbf{R}^N .

Appliquons d'autre part le (a) avec $t_3 = t_1 = s$ et $t_2 = t$, puis avec $t_3 = t_1 = t$ et $t_2 = s$: on en déduit que

$$X(s, t, \cdot) \text{ est une bijection de } \mathbf{R}^N \text{ sur } \mathbf{R}^N \text{ d'inverse } X(s, t, \cdot)^{-1} = X(t, s, \cdot).$$

Comme la bijection $X(s, t, \cdot)$ et son inverse $X(t, s, \cdot)$ sont de classe C^1 sur \mathbf{R}^N , c'est un C^1 -difféomorphisme de \mathbf{R}^N sur lui-même.

Considérons enfin le déterminant jacobien

$$J(s, t, x) = \det(\nabla_x X(s, t, x)).$$

Le point (b) entraîne que l'application $s \mapsto J(s, t, x)$ est continue de $[0, T]$ dans \mathbf{R} ; d'autre part $J(t, t, x) = 1$ et $J(s, t, x) \neq 0$ pour tout $s \in [0, T]$, car c'est

le déterminant jacobien du difféomorphisme $X(s, t, \cdot)$. Le théorème des valeurs intermédiaires implique alors que $J(s, t, x) > 0$ pour tout $s \in [0, T]$, ce qui équivaut à dire que le difféomorphisme $X(s, t, \cdot)$ préserve l'orientation de \mathbf{R}^N .

(d) D'après le (b), l'application $(s, t, x) \mapsto X(s, t, x)$ admet des dérivées partielles continues par rapport aux variables x_j pour tout $j = 1, \dots, N$ et tout $(s, t, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \mathbf{R}^N$, ainsi évidemment que par rapport à la variable s puisque, par définition, $\partial_s X(s, t, x) = V(s, X(s, t, x))$.

Montrons que X admet aussi une dérivée partielle continue par rapport à la variable t . Pour $(s, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}^N$ fixé, le point $X(s, t, x)$ est l'unique solution $y(t)$ de l'équation

$$F(t, y(t)) = 0$$

où on a posé

$$F(t, y) = X(t, s, y) - x.$$

L'application $F : [0, T] \times \mathbf{R}^N \mapsto \mathbf{R}^N$ est de classe C^1 , et, pour tout temps $t \in [0, T]$, la matrice $\nabla_y F(t, y) = \nabla_x X(t, s, y)$ est inversible — en effet, on a déjà vu que $\det(\nabla_y F(t, y)) = J(t, s, y) \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites (voir [17], Théorème 1.4), la solution $t \mapsto y(t)$ est donc dérivable et on a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}(t) &= -\nabla_y F(t, y(t))^{-1} \partial_t F(t, y(t)) \\ &= -\nabla_x X(t, s, X(s, t, x))^{-1} V(t, X(t, s, X(s, t, x))) \\ &= -\nabla_x X(t, s, X(s, t, x))^{-1} V(t, x). \end{aligned}$$

Cette dernière formule montre que l'application $\partial_t X$ est également continue sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbf{R}^N$.

Comme l'application X admet des dérivées partielles continues en tout point de $[0, T] \times [0, T] \times \mathbf{R}^N$, elle y est de classe C^1 . ■

Expliquons maintenant comment on résout le problème de Cauchy pour une équation de transport à coefficients variables grâce à la connaissance de son flot caractéristique. Ainsi, le Théorème 2.2.3 ci-dessous se spécialise en Théorème 2.1.2 lorsque $V = \text{Const}$.

Théorème 2.2.3 *Soit V un champ de vecteurs vérifiant les hypothèses (H1) et (H2), et soit $f^{in} \in C^1(\mathbf{R}^N)$. Alors le problème de Cauchy pour l'équation de transport*

$$\begin{aligned} \partial_t f(t, x) + V(t, x) \cdot \nabla_x f(t, x) &= 0, & 0 < t < T, \quad x \in \mathbf{R}^N, \\ f(0, x) &= f^{in}(x), & x \in \mathbf{R}^N, \end{aligned}$$

admet une unique solution $f \in C^1([0, T] \times \mathbf{R}^N)$. Cette solution f est donnée par la formule

$$f(t, x) = f^{in}(X(0, t, x))$$

où X est le flot caractéristique du champ V — c'est-à-dire que $s \mapsto X(s, t, x)$ est la courbe intégrale du champ V passant par x à l'instant t .

Démonstration. Commençons par l'unicité, et pour cela, procédons par condition nécessaire.

Soient donc $f \in C^1([0, T] \times \mathbf{R}^N)$ et $z \in \mathbf{R}^N$ fixés ; on va considérer la fonction $\phi : s \mapsto \phi(s) = f(s, X(s, 0, z))$. Cette fonction est de classe C^1 sur $[0, T]$ comme composée de f et de l'application

$$s \mapsto (s, X(s, 0, z))$$

qui est de classe C^1 d'après la Proposition 2.2.2 (d). Calculons sa dérivée

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{ds}(s) &= \partial_t f(s, X(s, 0, z)) + \nabla_x f(s, X(s, 0, z)) \cdot \partial_s X(s, 0, z) \\ &= \partial_t f(s, X(s, 0, z)) + V(s, X(s, 0, z)) \cdot \nabla_x f(s, X(s, 0, z)). \end{aligned}$$

Par conséquent, si f est solution de l'équation de transport

$$\partial_t f(t, x) + V(t, x) \cdot \nabla_x f(t, x) = 0, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

on a

$$\frac{d\phi}{ds}(s) = 0 \text{ pour tout } s \in]0, T[,$$

de sorte que la fonction ϕ est constante sur l'intervalle $[0, T]$. En particulier, pour tout $s \in [0, T]$,

$$\phi(s) = f(s, X(s, 0, z)) = f(0, X(0, 0, z)) = f(0, z) = \phi(0) = f^{in}(z).$$

Faisons le changement de variables $x = X(s, 0, z)$ ce qui, d'après la Proposition 2.2.2 (a)-(c) équivaut à $z = X(0, s, x)$. On trouve alors que

$$f(s, x) = f^{in}(X(0, s, x)) \text{ pour tout } (s, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}^N.$$

Réciproquement, montrons que la formule

$$f(t, x) = f^{in}(X(0, t, x))$$

définit une fonction de classe C^1 sur $[0, T] \times \mathbf{R}^N$, qui est solution du problème de Cauchy pour l'équation de transport.

D'abord, $f \in C^1([0, T] \times \mathbf{R}^N)$ comme composée de f^{in} qui est de classe C^1 sur \mathbf{R}^N , et de l'application $(t, x) \mapsto X(0, t, x)$, de classe C^1 sur $[0, T] \times \mathbf{R}^N$ d'après la Proposition 2.2.2 (d).

D'autre part, $f(0, x) = f^{in}(X(0, 0, x)) = f^{in}(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$.

Enfin

$$\begin{aligned} \partial_t f(t, x) &= \nabla f^{in}(X(0, t, x)) \cdot \partial_t X(0, t, x), \\ \partial_{x_j} f(t, x) &= \nabla f^{in}(X(0, t, x)) \cdot \partial_{x_j} X(0, t, x), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} &\partial_t f(t, x) + V(t, x) \cdot \nabla_x f(t, x) \\ &= \nabla f^{in}(X(0, t, x)) \cdot \left(\partial_t X(0, t, x) + \sum_{j=1}^N V_j(t, x) \partial_{x_j} X(0, t, x) \right). \end{aligned}$$

Le résultat annoncé découle alors du lemme suivant. ■

Lemme 2.2.4 *Le flot caractéristique X vérifie*

$$\partial_t X(0, t, x) + \sum_{j=1}^N V_j(t, x) \partial_{x_j} X(0, t, x) = 0$$

pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}^N$.

Démonstration. Partons de la relation (a) de la Proposition 2.2.2 :

$$X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x)$$

pour tous $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ et tout $x \in \mathbf{R}^N$.

Dérivons chaque membre de cette égalité par rapport à t_2 : comme le flot caractéristique X est de classe C^1 sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbf{R}^N$, le théorème de dérivation des fonctions composées entraîne que²

$$\partial_t X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) + \sum_{j=1}^N \partial_{x_j} X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) \partial_s X_j(t_2, t_1, x) = 0,$$

ou encore

$$\partial_t X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) + \sum_{j=1}^N \partial_{x_j} X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) V_j(t_2, X(t_2, t_1, x)) = 0.$$

Posant $t_3 = 0$ et $t_2 = t_1 = t$, on aboutit à la relation annoncée. ■

A nouveau, remarquons que la formule

$$f(t, x) = f^{in}(X(0, t, x))$$

garde un sens même si f^{in} n'est pas dérivable, et on aimerait pouvoir dire qu'elle définit une solution en un sens généralisé de l'équation de transport

$$\partial_t f(t, x) + V(t, x) \cdot \nabla_x f(t, x) = 0.$$

Toutefois, pour donner un sens à un tel énoncé, on devra avoir recours à la théorie des distributions, présentée dans la suite de ce cours.

2.3 Equations aux dérivées partielles non linéaires d'ordre un : étude d'un exemple

L'équation de Hopf — également appelée équation de Burgers sans viscosité — intervient dans différents contextes, comme par exemple la dynamique des

2. Dans tout ce qui suit

$\partial_s X$ désigne la dérivée de X par rapport à sa première variable,

$\partial_t X$ désigne la dérivée de X par rapport à sa seconde variable.

gaz sans pression, ou encore en tant que modèle (proposé par Ya. B. Zeldovich) pour l'évolution à grande échelle d'amas de galaxies.

L'équation de Hopf, d'inconnue $u \equiv u(t, x) \in \mathbf{R}$, s'écrit

$$\partial_t u(t, x) + u(t, x) \partial_x u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Autrement dit, u est la solution d'une équation de transport dont la vitesse de propagation au point x et à l'instant t est la valeur $u(t, x)$ de l'inconnue. Cette équation est non linéaire à cause de la présence du terme $u \partial_x u$ qui est quadratique en u .

Appliquons à cette équation la méthode des caractéristiques. Supposons donc que u est une solution de l'équation de Hopf de classe C^1 sur $[0, T[\times \mathbf{R}$. Soit $X \equiv X(s, t, x)$ le flot caractéristique de l'opérateur de transport $\partial_t + u(t, x) \partial_x$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \partial_s X(s, t, x) &= u(s, X(s, t, x)), \quad 0 < s < T, \\ X(t, t, x) &= x. \end{aligned}$$

(L'existence et l'unicité locales de X découlent du théorème de Cauchy-Lipschitz puisque u est de classe C^1 .) Alors la fonction $s \mapsto u(s, X(s, t, z))$ est de classe C^1 comme composée de fonctions de classe C^1 et on a

$$\frac{d}{ds} u(s, X(s, t, z)) = (\partial_t u + u \partial_x u)(s, X(s, t, z)) = 0.$$

La fonction $s \mapsto u(s, X(s, t, z))$ est donc constante sur $[0, T[$, de sorte que

$$u(s, X(s, t, z)) = u(t, X(t, t, z)) = u(t, z), \quad 0 < s < T.$$

Injectons cette information dans l'équation différentielle vérifiée par le flot X :

$$\begin{aligned} \partial_s X(s, t, z) &= u(s, X(s, t, z)) = u(t, z), \quad 0 < s < T, \\ X(t, t, z) &= z, \end{aligned}$$

de sorte que

$$X(s, t, z) = z + (s - t)u(t, z), \quad 0 \leq s < T.$$

En particulier

$$X(s, 0, z) = z + su(0, z), \quad 0 \leq s < T.$$

Cette formule montre que le flot caractéristique $X \equiv X(s, t, z)$ se prolonge à tout $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ en une application de classe C^1 .

Ecrivant à nouveau que la solution u est constante le long des courbes caractéristiques de l'opérateur de transport $\partial_t + u \partial_x$, on trouve donc que

$$u(s, z + su(0, z)) = u(0, z), \quad 0 \leq s < T, \quad z \in \mathbf{R}.$$

En se basant sur cette égalité, on aboutit au résultat suivant :

Théorème 2.3.1 Soit $u^{in} \in C^1(\mathbf{R})$, bornée sur \mathbf{R} ainsi que sa dérivée $(u^{in})'$.
(a) Le problème de Cauchy pour l'équation de Hopf

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x) + u(t, x) \partial_x u(t, x) &= 0, & t > 0, x \in \mathbf{R} \\ u(0, x) &= u^{in}(x), & x \in \mathbf{R},\end{aligned}$$

admet une unique solution de classe C^1 sur $[0, T[\times \mathbf{R}$, où

$$T = \frac{1}{\sup_{z \in \mathbf{R}} (\max(0, -(u^{in})'(z)))}$$

avec la convention $1/0 = +\infty$. Cette solution est définie par la relation implicite

$$u(t, z + tu^{in}(z)) = u^{in}(z), \quad (t, z) \in [0, T[\times \mathbf{R}.$$

(b) Si $u \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$ est solution de l'équation de Hopf sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, alors la donnée initiale $z \mapsto u(0, z)$ est croissante sur \mathbf{R} .

Démonstration. (a) Pour $s \geq 0$, posons

$$\phi_s(z) = z + su^{in}(z), \quad z \in \mathbf{R}.$$

La fonction ϕ_s est de classe C^1 sur \mathbf{R}^N et

$$\phi'_s(z) = 1 + s(u^{in})'(z) > 0 \text{ pour tout } (s, z) \in [0, T[\times \mathbf{R},$$

par définition de T . Comme $u^{in}(z) = O(1)$ pour $|z| \rightarrow +\infty$,

$$\phi_s(z) \rightarrow \pm\infty \text{ pour } z \rightarrow \pm\infty.$$

Par conséquent ϕ_s est une bijection croissante de \mathbf{R} sur lui-même pour tout $s \in [0, T[$, de classe C^1 ainsi que sa réciproque ϕ_s^{-1} .

Enfin, en appliquant le théorème des fonctions implicites (voir [17], Théorème 1.4) à l'équation

$$F(t, z) := z + tu^{in}(z) - x = 0$$

dont l'unique solution est $z = \phi_t^{-1}(x)$, on vérifie que l'application

$$\Phi : (t, x) \mapsto \Phi(t, x) = \phi_t^{-1}(x)$$

est de classe C^1 sur $[0, T[\times \mathbf{R}$, avec

$$\begin{aligned}\partial_t \Phi(t, x) &= -\frac{u^{in}(\Phi(t, x))}{1 + t(u^{in})'(\Phi(t, x))}, \\ \partial_x \Phi(t, x) &= +\frac{1}{1 + t(u^{in})'(\Phi(t, x))}.\end{aligned}$$

Donc la fonction

$$u(t, x) = u^{in}(\Phi(t, x))$$

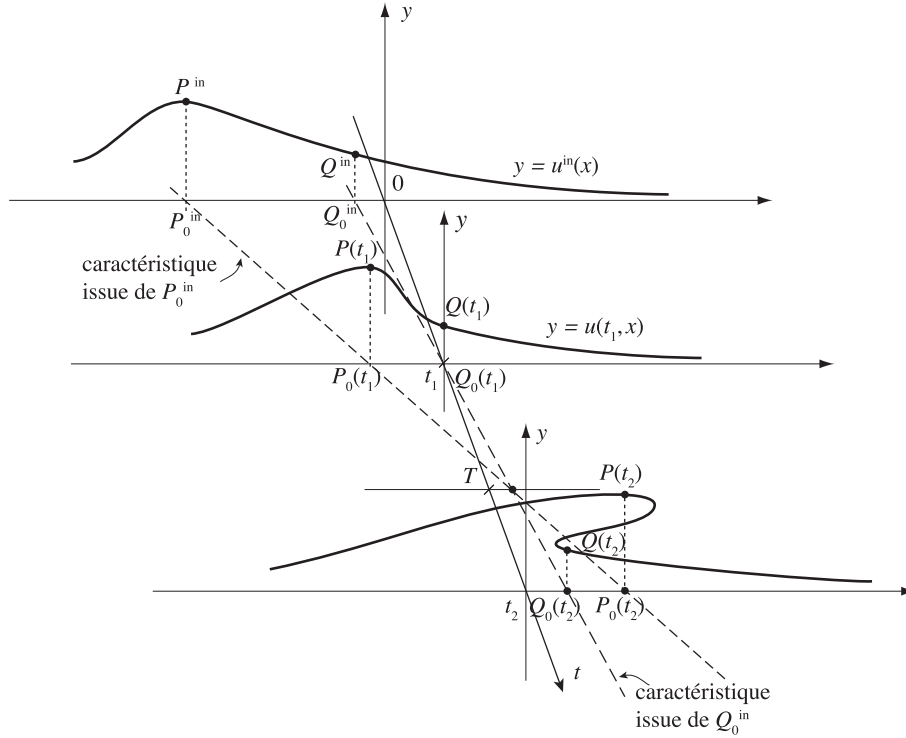


FIGURE 2.3 – Apparition d’une onde de choc dans la solution de l’équation de Hopf. Le graphe de la donnée initiale u^{in} est transporté par les caractéristiques. Or les caractéristiques issues de P et Q se coupent à l’instant T . Le graphe de u^{in} transporté par le flot caractéristique cesse donc, en temps fini, d’être le graphe d’une fonction. La figure montre l’évolution d’une donnée initiale dont le graphe est une courbe croissante puis décroissante. A l’instant t_1 , le graphe de u^{in} transporté par le flot caractéristique est encore le graphe d’une fonction — précisément de $x \mapsto u(t, x)$. En revanche, à l’instant t_2 , le graphe de u^{in} transporté par le flot caractéristique n’est plus le graphe d’une fonction.

est de classe C^1 sur $[0, T[\times \mathbf{R}$ comme composée de fonctions de classe C^1 .

Enfin

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x) &= (u^{in})'(\Phi(t, x)) \partial_t \Phi(t, x) = -\frac{(u^{in})'(\Phi(t, x)) u^{in}(\Phi(t, x))}{1 + t(u^{in})'(\Phi(t, x))}, \\ \partial_x u(t, x) &= (u^{in})'(\Phi(t, x)) \partial_x \Phi(t, x) = +\frac{(u^{in})'(\Phi(t, x))}{1 + t(u^{in})'(\Phi(t, x))},\end{aligned}$$

de sorte que

$$\partial_t u(t, x) + u^{in}(\Phi(t, x)) \partial_x u(t, x) = 0.$$

Comme $u^{in}(\Phi(t, x)) = u(t, x)$, on en déduit que u est bien solution de l'équation de Hopf (la condition initiale étant évidente, puisque $\Phi(0, x) = \phi_0^{-1}(x) = x$.)

L'unicité provient de l'application de la méthode des caractéristiques rappelée avant l'énoncé du théorème. En effet, toute solution de l'équation de Hopf de classe C^1 sur $[0, T[\times \mathbf{R}$ vérifie

$$u(t, z + tu(0, z)) = u(0, z), \quad (t, z) \in [0, T[\times \mathbf{R},$$

c'est-à-dire

$$u(t, \phi_t(z)) = u^{in}(z), \quad (t, z) \in [0, T[\times \mathbf{R}.$$

En faisant le changement de variables $\phi_t(z) = x$, c'est-à-dire

$$z = \phi_t^{-1}(x) = \Phi(t, x),$$

on trouve que

$$u(t, x) = u^{in}(\Phi(t, x)), \quad (t, z) \in [0, T[\times \mathbf{R}.$$

(b) Si u est solution de classe C^1 de l'équation de Hopf sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, elle vérifie la relation

$$u(s, z + su(0, z)) = u(0, z), \quad \text{pour tout } (s, z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R},$$

d'après la méthode des caractéristiques.

Supposons que $z \mapsto u(0, z)$ n'est pas croissante sur \mathbf{R} : il existe donc $z_1 < z_2$ tel que $u(0, z_1) > u(0, z_2)$. Définissons

$$s^* = \frac{z_2 - z_1}{u(0, z_1) - u(0, z_2)} > 0.$$

Alors

$$z_1 + s^* u(0, z_1) = z_2 + s^* u(0, z_2)$$

de sorte que

$$u(0, z_1) = u(s^*, z_1 + s^* u(0, z_1)) = u(s^*, z_2 + s^* u(0, z_2)) = u(0, z_2).$$

On aboutit ainsi à une contradiction, ce qui infirme l'hypothèse de départ, à savoir que $z \mapsto u(0, z)$ n'est pas croissante sur \mathbf{R} . ■

Ce résultat montre que, pour une équation de transport non linéaire, il se peut

- (a) que le flot caractéristique soit défini globalement,
- (b) que la donnée initiale soit globalement de classe C^1 ,

et pourtant que la solution ne soit pas définie et de classe C^1 globalement, c'est-à-dire pour tout $(t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$.

Ce type de comportement est caractéristique des équations différentielles non linéaire, aux dérivées partielles ou non.

Nous avons déjà évoqué plus haut l'exemple de l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dt} = y^2, \quad y(0) = y^{in},$$

dont la solution

$$y(t) = \frac{y^{in}}{1 - ty^{in}}$$

n'est pas définie globalement, c'est-à-dire pour tout $t \in \mathbf{R}$, si $y^{in} \neq 0$.

L'exemple de l'équation de Hopf présenté ci-dessus est tout à fait analogue au cas de l'équation de Riccati.

Toutefois, il est possible de prolonger la solution locale de classe C^1 de l'équation de Hopf après le temps T donné dans le Théorème 2.3.1, en une fonction qui n'est plus de classe C^1 , qui admet en général des discontinuités de première espèce, mais qui est pourtant solution de l'équation de Hopf en un sens généralisé. Ce phénomène d'apparition de singularités dans des solutions d'équations aux dérivées partielles est une nouvelle motivation pour développer le formalisme des distributions.

2.4 Exercices

Exercice 1. Appliquer la méthode des caractéristiques pour résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t f(t, x) + v \cdot \nabla_x f(t, x) + a(t, x)f(t, x) &= 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0, \\ f(0, x) &= f^{in}(x), \quad x \in \mathbf{R}^N, \end{aligned}$$

où $a \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N)$.

Exercice 2. Même question pour le problème avec second membre

$$\begin{aligned} \partial_t f(t, x) + v \cdot \nabla_x f(t, x) + a(t, x)f(t, x) &= S(t, x), \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0, \\ f(0, x) &= f^{in}(x), \quad x \in \mathbf{R}^N, \end{aligned}$$

où a et $S \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N)$.

Exercice 3. Soient $\lambda > 0$, a et $S \in C^1(\mathbf{R}^N)$. Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que

$$a(x) \geq 0 \text{ et } |S(x)| + |\nabla S(x)| + |\nabla a(x)| \leq M \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^N.$$

Montrer que l'équation de transport stationnaire

$$\lambda f(x) + v \cdot \nabla_x f(x) + a(x)f(x) = S(x), \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

admet une unique solution bornée f de classe C^1 sur \mathbf{R}^N , et que cette solution est donnée par la formule

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t - \int_0^t a(x-sv) ds} S(x-tv) dt.$$

Exercice 4. Soit $f \in C^2(\mathbf{R})$ telle que $f''(U) \geq a > 0$ pour tout $U \in \mathbf{R}$. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t v + f(\partial_x v) &= 0, \\ v|_{t=0} &= v^{in}, \end{aligned}$$

où $v^{in} \in C^2(\mathbf{R})$ est bornée sur \mathbf{R} ainsi que ses deux premières dérivées.

1) Quelle est l'équation satisfaite par $\partial_x v$?

2) En déduire un résultat d'existence et unicité locale pour le problème de Cauchy vérifié par v .

Chapitre 3

Calcul des distributions

3.1 Introduction

Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, il est naturel d'avoir à considérer des solutions d'équations aux dérivées partielles en un sens suffisamment généralisé pour n'être même pas forcément différentiables. La théorie des distributions répond précisément à cette exigence.

Mais avant d'entrer dans le vif du sujet et de développer en détail les notions de base de cette théorie, nous allons présenter une manière naturelle d'écrire qu'une fonction non nécessairement différentiable est solution d'une équation aux dérivées partielles.

Considérons par exemple le cas de l'équation de transport en dimension $N = 1$:

$$\begin{aligned}\partial_t u + c\partial_x u &= 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= u^{in},\end{aligned}$$

où la fonction inconnue est $(t, x) \mapsto u(t, x)$, et où la vitesse est $c \in \mathbf{R}$.

Supposons dans un premier temps que $u^{in} \in C^2(\mathbf{R})$, de sorte qu'il existe une unique solution $u \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$ au problème ci-dessus, donnée par la formule

$$u(t, x) = u^{in}(x - ct), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0.$$

Dire que la fonction $u \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$(A) \quad \partial_t u + c\partial_x u = 0 \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$$

c'est dire que la fonction $(t, x) \mapsto \partial_t u(t, x) + c\partial_x u(t, x)$ vérifie

$$(B) \quad \iint_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}} (\partial_t u(t, x) + c\partial_x u(t, x)) \phi(t, x) dt dx = 0$$

pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R})$, ou encore, de façon équivalente, que

$$(C) \quad \iint_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}} u(t, x) (\partial_t \phi(t, x) + c\partial_x \phi(t, x)) dt dx = 0$$

pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R})$.

Les conditions (B) et (C) sont évidemment équivalentes : pour tout entier $n \geq 1$ tel que $\text{supp}(\phi) \subset]1/n, n[\times]-n, n[$, on a

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}} (\partial_t u(t, x) + c \partial_x u(t, x)) \phi(t, x) dt dx \\ &= \iint_{]1/n, n[\times]-n, n[} (\partial_t u(t, x) + c \partial_x u(t, x)) \phi(t, x) dt dx \\ &= \int_{-n}^n \left[u(t, x) \phi(t, x) \right]_{t=1/n}^{t=n} dx + c \int_{1/n}^n \left[u(t, x) \phi(t, x) \right]_{x=-n}^{x=n} dt \\ &\quad - \iint_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}} u(t, x) (\partial_t \phi(t, x) + c \partial_x \phi(t, x)) dt dx \end{aligned}$$

en appliquant le théorème de Fubini et en intégrant par parties en t puis en x . Comme ϕ est identiquement nulle sur le bord du pavé $]1/n, n[\times]-n, n[$, les deux premières intégrales au membre de droite sont nulles et

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}} (\partial_t u(t, x) + c \partial_x u(t, x)) \phi(t, x) dt dx \\ &= - \iint_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}} u(t, x) (\partial_t \phi(t, x) + c \partial_x \phi(t, x)) dt dx \end{aligned}$$

d'où l'équivalence entre les conditions (B) et (C).

Que la condition (A) implique (B) est trivial.

Réciproquement, comme u est de classe C^1 , la condition (B) implique que, pour tout entier $n \geq 1$, la restriction

$$(\partial_t u + c \partial_x u)|_{]1/n, n[\times]-n, n[} \in C([1/n, n] \times [-n, n])$$

définit un élément de l'espace de Hilbert $L^2([1/n, n] \times [-n, n])$ qui est orthogonal au sous-espace dense $C_c^\infty(]1/n, n[\times]-n, n[)$ — voir Théorème 1.4.2. Cet élément est donc nul :

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0 \text{ p.p. en } (t, x) \in [1/n, n] \times [-n, n]$$

et comme $\partial_t u + c \partial_x u$ est continue sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ et que n est arbitraire, on en déduit que l'annulation ci-dessus a lieu partout sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, c'est-à-dire que u vérifie la condition (A) ci-dessus.

Parmi les trois conditions (A), (B) et (C) ci-dessus, la condition (C) est la seule qui ne fasse pas intervenir explicitement les dérivées partielles de u — ce n'est que pour montrer l'équivalence entre cette condition (C) et les deux autres conditions (A) et (B) que l'on a besoin de savoir que u est de classe C^1 .

Cette observation suggère de généraliser la notion de solution de l'équation de transport comme suit : on dira qu'une fonction u continue, ou même seulement

localement intégrable — et en tout cas pas forcément de classe C^1 — sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ est “solution généralisée” de l’équation de transport

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0 \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$$

si cette fonction u vérifie la condition (C) ci-dessus pour toute fonction ϕ dans $C_c^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R})$.

La fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R})$ arbitraire dans la formulation (C) de l’équation de transport est habituellement nommée “fonction test” — c’est pourquoi on a pris l’habitude d’appeler $C_c^\infty(\Omega)$ l’espace des fonctions test.

Cette formulation suggère fortement que l’objet mathématique remplaçant, pour une fonction continue (ou même seulement localement intégrable) u quelconque, et en tout cas pas forcément différentiable, le membre de gauche de l’équation de transport, c’est-à-dire la fonction

$$\partial_t u + c \partial_x u,$$

est la forme linéaire

$$\phi \mapsto - \int_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}} u(t, x) (\partial_t \phi(t, x) + c \partial_x \phi(t, x)) dt dx$$

sur le \mathbf{R} - (ou \mathbf{C} -) espace vectoriel $C_c^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R})$. Ceci est évidemment à rapprocher de la notion de dérivée faible dans L^2 présentée dans [1], chapitre 4.2.2 — la différence essentielle étant qu’on ne demande pas que la forme linéaire ci-dessus soit continue sur L^2 , et donc représentable par une fonction de L^2 — d’après le théorème de représentation de Riesz (cf. [6], Théorème II.2.11, ou [9], chapitre VIII, Théorème 2.2.1 et 2.2.5)

Cette méthode s’applique évidemment à toutes les équations aux dérivées partielles linéaires : l’idée consiste à faire porter toutes les dérivées partielles sur la fonction test en intégrant par parties autant de fois que nécessaire.

La théorie des distributions consiste précisément à formaliser l’idée que nous venons de présenter sur l’exemple très simple de l’équation de transport

3.2 Les distributions : définitions et exemples

3.2.1 Notion de distribution

Commençons par définir ce que sont les distributions.

Définition 3.2.1 (Notion de distribution) Soient $N \geq 1$ entier et Ω un ouvert de \mathbf{R}^N . Une distribution T sur Ω est une forme \mathbf{R} - (ou \mathbf{C} -) linéaire sur $C_c^\infty(\Omega)$ à valeurs réelles (ou complexes) vérifiant la propriété de continuité suivante :

pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C_K > 0$ et $p_K \in \mathbf{N}$ tels que, pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ avec $\text{supp}(\phi) \subset K$,

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

Lorsque p_K peut-être choisi indépendamment de K dans la condition de continuité ci-dessus, c'est-à-dire lorsqu'il existe un entier $p \in \mathbf{N}$ tel que $p_K \leq p$ pour tout compact $K \subset \Omega$, on dit que T est une distribution d'ordre $\leq p$ sur Ω .

Dans ce cas, on appelle "ordre de la distribution T " le plus petit entier p positif ou nul tel que T soit une distribution d'ordre $\leq p$.

On note toujours $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace vectoriel (sur \mathbf{R} ou \mathbf{C}) des distributions sur Ω (à valeurs respectivement réelles ou complexes) — et souvent $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$.

Exemple 3.2.2 (Fonctions localement intégrables) A toute fonction f de $L^1_{loc}(\Omega)$, on associe la forme linéaire définie par

$$T_f : \phi \mapsto \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx,$$

pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Observons que, pour tout compact $K \subset \Omega$ et pour toute fonction $\phi \in C^\infty(\Omega)$ à support dans K , on a

$$|\langle T_f, \phi \rangle| \leq C_K \sup_{x \in K} |\phi(x)|, \quad \text{avec } C_K = \int_K |f(x)|dx.$$

Donc T_f est une distribution d'ordre 0 sur Ω .

Proposition 3.2.3 (Plongement de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$) L'application linéaire

$$L^1_{loc}(\Omega) \ni f \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ est injective.}$$

Convention. Dorénavant, nous identifierons donc toute fonction f localement intégrable sur Ω avec la distribution T_f qu'elle définit sur Ω .

Démonstration. Supposons que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ appartient au noyau de cette application linéaire, c'est-à-dire que

$$\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx = 0 \quad \text{pour tout } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Etape 1 : Soit $x_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\overline{B(x_0, 2r)} \subset \Omega$; montrons que $f = 0$ p.p. sur $B(x_0, r)$.

En effet, soit $F \in L^1(\mathbf{R}^N)$ définie par

$$F(x) = \mathbf{1}_{B(x_0, 2r)}(x)f(x) \text{ p.p. en } x \in \Omega, \quad F(x) = 0 \text{ si } x \notin \Omega.$$

Soit d'autre part $\zeta \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$\zeta \geq 0, \quad \text{supp}(\zeta) \subset B(0, 1), \quad \int_{\mathbf{R}^N} \zeta(x)dx = 1.$$

On sait qu'alors la famille de fonctions ζ_ϵ définies par

$$\zeta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^N} \zeta\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

indexée par $\epsilon \in]0, r[$ est une suite régularisante.

D'après le Théorème 1.3.14 a),

$$\zeta_\epsilon \star F \rightarrow F \text{ dans } L^1(\mathbf{R}^N) \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0.$$

D'autre part, pour tout $x \in B(x_0, r)$,

$$\begin{aligned} \zeta_\epsilon \star F(x) &= \int_{\mathbf{R}^N} F(y) \zeta_\epsilon(x-y) dy \\ &= \int_{B(x_0, 2r)} f(y) \zeta_\epsilon(x-y) dy = \int_{\Omega} f(y) \zeta_\epsilon(x-y) dy = 0 \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse faite sur f , car la fonction $y \mapsto \zeta_\epsilon(x-y)$ est de classe C^∞ à support dans $B(x_0, 2r)$.

En effet, si $\zeta_\epsilon(x-y) \neq 0$, c'est que $|x-y| < r$, or comme $|x-x_0| \leq r$, il s'ensuit que $|y-x_0| < 2r$.

Par conséquent $F = 0$ p.p. sur $B(x_0, r)$; de plus par définition, $f = F$ p.p. sur $B(x_0, 2r)$. Donc $f = 0$ p.p. sur $B(x_0, r)$.

Étape 2 : Soit maintenant, pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble

$$K_n = \{x \in \Omega \mid |x| \leq n \text{ et } \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 1/n\},$$

qui est compact (car fermé borné) dans Ω . Evidemment

$$K_n \subset \bigcup_{x \in K_n} B(x, \frac{1}{2n})$$

de sorte que, par compacité de K_n , il existe un nombre fini de points x_1, \dots, x_k de K_n tels que

$$K_n \subset B(x_1, \frac{1}{2n}) \cup \dots \cup B(x_k, \frac{1}{2n}).$$

Or d'après l'étape 1, $f = 0$ p.p. sur $B(x_j, \frac{1}{2n})$ pour $j = 1, \dots, k$, ce qui implique que $f = 0$ p.p. sur K_n .

Comme Ω est la réunion dénombrable des K_n pour $n \in \mathbf{N}^*$ et que $f = 0$ p.p. sur K_n , l'ensemble

$$\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \{x \in K_n \mid f(x) \neq 0\}$$

est de mesure nulle comme réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle. Autrement dit, $f = 0$ p.p. sur Ω comme annoncé. ■

Mais il existe aussi des distributions qui ne sont pas de la forme T_f avec $f \in L^1_{loc}$. En voici plusieurs exemples.

Exemple 3.2.4 (Masse de Dirac) A tout point $x_0 \in \Omega$ ouvert de \mathbf{R}^N , on associe la forme linéaire définie par

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0), \quad \text{pour toute fonction test } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Evidemment, pour tout compact $K \subset \Omega$ et toute fonction test $\phi \in C^\infty(\Omega)$ à support dans K , on a

$$|\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle| \leq \sup_{x \in K} |\phi(x)|.$$

Donc δ_{x_0} est une distribution d'ordre 0 sur Ω .

Exemple 3.2.5 (Mesure de surface et distributions de simple couche) Soit Σ hypersurface de \mathbf{R}^N de classe C^∞ , et $d\sigma$ l'élément de surface sur Σ — cf. Appendice, section 6.2 pour une présentation de cet objet. Etant donnée $f \in C(\Sigma)$, on appelle “distribution de simple couche de densité f portée par Σ ” la forme linéaire

$$C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \ni \phi \mapsto \int_{\Sigma} \phi f d\sigma.$$

C'est une distribution d'ordre 0. Dans le cas particulier où $f = 1$, on appelle habituellement la distribution de simple couche correspondante la “mesure de surface portée par \mathbf{R}^N ”. (Voir plus loin, dans la section 3.2.2, une justification de cette terminologie.)

Voici maintenant des exemples de distributions d'ordre strictement positif.

Exemple 3.2.6 A tout point $x_0 \in \mathbf{R}$, on associe la forme linéaire définie par

$$\langle \delta_{x_0}^{(m)}, \phi \rangle = (-1)^m \phi^{(m)}(x_0), \quad \text{pour toute fonction test } \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}).$$

A nouveau, pour tout compact $K \subset \mathbf{R}$ et toute fonction test $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ à support dans K , on a

$$|\langle \delta_{x_0}^{(m)}, \phi \rangle| \leq \sup_{x \in K} |\phi^{(m)}(x)|,$$

et on vérifie que $\delta_{x_0}^{(m)}$ est une distribution d'ordre m sur \mathbf{R} .

Exemple 3.2.7 (Valeur principale de $1/x$) La fonction $x \mapsto 1/x$ n'est pas localement intégrable sur \mathbf{R} . Mais on définit la distribution “valeur principale” de $1/x$ par la formule

$$\left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \phi \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx.$$

L'idée motivant la notion de valeur principale — due à Cauchy — est la suivante : la troncature symétrique dans l'intégrale consiste à y retirer un terme du type

$$\int_{-\epsilon}^\epsilon \frac{\phi(x)}{x} dx = \phi(0) \int_{-\epsilon}^\epsilon \frac{dx}{x} + O(\epsilon)$$

et à considérer que le premier terme au membre de droite est nul car la fonction $1/x$ est impaire. Evidemment le calcul ci-dessus est purement formel puisque ni $x \mapsto \phi(x)/x$, ni $x \mapsto 1/x$ ne sont intégrables sur $[-\epsilon, \epsilon]$.

Pour tout $R > 1$ et toute fonction test $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ à support dans $[-R, R]$, on a

$$\left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \phi \right\rangle = \int_0^1 \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx + \int_1^R \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx$$

Alors, d'après le théorème des accroissements finis,

$$\left| \int_0^1 \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx \right| \leq 2 \sup_{|x| \leq 1} |\phi'(x)|,$$

tandis que

$$\left| \int_1^R \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx \right| \leq 2 \ln R \sup_{|x| \leq R} |\phi(x)|.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \phi \right\rangle \right| &\leq 2 \sup_{|x| \leq R} |\phi'(x)| + 2 \ln R \sup_{|x| \leq R} |\phi(x)| \\ &\leq 2(1 + \ln R) \sup_{|x| \leq R} \max(|\phi(x)|, |\phi'(x)|). \end{aligned}$$

A partir de là, on montre sans difficulté que $\text{vp} \frac{1}{x}$ est une distribution d'ordre 1 sur \mathbf{R} .

Revenons sur ce que nous avons appelé la “propriété de continuité” des distributions. Pour pouvoir en parler précisément, il faudrait commencer par définir la topologie de l'espace $C_c^\infty(\Omega)$. Il s'agit là d'une question assez délicate sur le plan technique et qui dépasse le cadre de notre cours.

En revanche il est très facile de raisonner avec des suites convergentes de fonctions test.

Définition 3.2.8 (Convergence des suites de fonctions test) Soient Ω un ouvert de \mathbf{R}^N , une suite $(\phi_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $C_c^\infty(\Omega)$, et une fonction test $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

On dit que

$$\phi_n \rightarrow \phi \text{ dans } C_c^\infty(\Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

si et seulement si

(a) il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que

$$\text{supp}(\phi_n) \subset K \text{ pour tout } n \geq 1;$$

(b) pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$,

$$\partial^\alpha \phi_n \rightarrow \partial^\alpha \phi \text{ uniformément sur } \Omega \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Cette notion de convergence, qui est très forte — en particulier du fait que tous les termes de la suite $(\phi_n)_{n \geq 1}$ doivent être à support *dans le même compact* K — est bien adaptée à la propriété de continuité des distributions, comme le montre l'énoncé suivant.

Proposition 3.2.9 (Continuité séquentielle des distributions) *Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors, pour toute suite $(\phi_n)_{n \geq 1}$ de fonctions test appartenant à $C_c^\infty(\Omega)$ et telle que*

$$\phi_n \rightarrow \phi \text{ dans } C_c^\infty(\Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty,$$

on a

$$\langle T, \phi_n \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Démonstration. Puisque $\phi_n \rightarrow \phi$ dans $C_c^\infty(\Omega)$ lorsque $n \rightarrow \infty$, il existe un compact $K \subset \Omega$ contenant $\text{supp}(\phi_n)$ pour tout $n \geq 1$, ainsi que $\text{supp}(\phi)$.

Au compact K ainsi défini, la propriété de continuité des distributions associe un entier $p_K \geq 0$ et une constante $C_K > 0$ telle que

$$|\langle T, \psi \rangle| \leq C_K \max_{|\alpha| \leq p_K} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(x)|$$

pour toute fonction test $\psi \in C^\infty(\Omega)$ à support dans K .

Appliquons cela à la fonction test $\psi = \phi_n - \phi$:

$$|\langle T, \phi_n \rangle - \langle T, \phi \rangle| \leq C_K \max_{|\alpha| \leq p_K} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi_n(x) - \partial^\alpha \phi(x)|.$$

Le membre de droite de cette inégalité converge vers 0 puisque

$$\partial^\alpha \phi_n \rightarrow \partial^\alpha \phi \text{ uniformément sur } K \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

On en conclut que

$$\langle T, \phi_n \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

■

3.2.2 Distributions positives

Bien qu'on ne puisse pas parler de la valeur d'une distribution en un point de l'ouvert où elle est définie, il existe une notion naturelle de positivité pour une distribution.

Définition 3.2.10 (Distributions positives) *Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et T une distribution sur Ω . On dit que T est une distribution positive, ce que l'on note $T \geq 0$, si*

$$\langle T, \phi \rangle \geq 0 \text{ pour tout } \phi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ telle que } \phi \geq 0 \text{ sur } \Omega.$$

Les distributions positives vérifient la propriété remarquable suivante.

Théorème 3.2.11 (Ordre des distributions positives) *Toute distribution positive sur un ouvert de \mathbf{R}^N est d'ordre 0.*

Démonstration. Soit donc $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $T \geq 0$, où Ω est un ouvert de \mathbf{R}^N .

Soit $K \subset \Omega$ compact. D'après le Lemme 1.4.1, il existe $\chi \in C^\infty(\Omega)$ telle que

$$\chi = 1 \text{ au voisinage de } K, \quad \text{supp}(\chi) \text{ compact } \subset \Omega, \quad 0 \leq \chi \leq 1.$$

Pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\text{supp}(\phi) \subset K$, on a

$$\phi = \chi\phi, \text{ de sorte que } \langle T, \phi \rangle = \langle T, \chi\phi \rangle.$$

Evidemment, comme $\chi \geq 0$ sur Ω , on a

$$-\chi(x) \sup_{y \in K} |\phi(y)| \leq \chi(x)\phi(x) \leq \chi(x) \sup_{y \in K} |\phi(y)| \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Comme $T \geq 0$

$$\left\langle T, \chi \left(\sup_{y \in K} |\phi(y)| - \phi \right) \right\rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad \left\langle T, \chi \left(\phi + \sup_{y \in K} |\phi(y)| \right) \right\rangle \geq 0$$

d'où

$$|\langle T, \chi\phi \rangle| \leq C_K \sup_{y \in K} |\phi(y)|, \quad \text{avec } C_K = \langle T, \chi \rangle.$$

Ceci signifie précisément que T est d'ordre 0. ■

Une conséquence importante de ce théorème est le fait que toute distribution positive s'identifie à une mesure de Radon positive (cf. [9], chapitre V.5.1.)

Corollaire 3.2.12 *Toute distribution positive sur Ω ouvert de \mathbf{R}^N se prolonge de manière unique en une mesure de Radon positive sur Ω , c'est-à-dire en une forme linéaire positive sur $C_c(\Omega)$.*

Démonstration. Soit T distribution positive sur Ω . On a vu dans la démonstration du théorème précédent que, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $L_K \geq 0$ tel que, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ à support dans K , l'on ait

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq C_K \sup_{y \in K} |\phi(y)|.$$

Notons $C_K^0(\Omega)$ (resp. $C_K^\infty(\Omega)$) l'ensemble des fonctions continues (resp. de classe C^∞) sur Ω à valeurs réelles et à support dans K . L'espace vectoriel $C_K^0(\Omega)$ est muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_K := \sup_{y \in K} |f(y)|,$$

et d'après le Théorème 6.1.1, la restriction $T_K := T|_{C_K^\infty(\Omega)}$ admet un seul prolongement continu à l'adhérence $\overline{C_K^\infty(\Omega)}$ de $C_K^\infty(\Omega)$ dans $C_K^0(\Omega)$, noté \overline{T}_K .

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit le compact

$$K_n = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 1/n \text{ et } |x| \leq n\}.$$

Par construction, $\overline{C_{K_m}^\infty(\Omega)} \subset \overline{C_{K_n}^\infty(\Omega)}$ dès que $n \geq m \geq 1$, et $\overline{T_{K_m}}$ est la restriction à $\overline{C_{K_m}^\infty(\Omega)}$ de $\overline{T_{K_n}}$ pour tout $n > m \geq 1$.

Evidemment, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $n \geq 1$ tel que $K \subset K_n$. D'après le Théorème 1.3.13

$$C_c(\Omega) = \bigcup_{n \geq 1} \overline{C_{K_n}^\infty(\Omega)},$$

et on définit la forme linéaire \overline{T} sur $C_c(\Omega)$ en posant $\langle \overline{T}, f \rangle = \langle \overline{T_{K_n}}, f \rangle$ pour tout $n \geq 1$ tel que $f \in \overline{C_{K_n}^\infty(\Omega)}$.

Par construction, la forme linéaire \overline{T} est un prolongement de T (autrement dit, elle coïncide avec T sur le sous-espace $C_c^\infty(\Omega)$ de $C_c(\Omega)$).

Ce prolongement est positif. Soit en effet un compact $K \subset \Omega$ et $f \in C_c(\Omega)$ à support dans K ; supposons que $f \geq 0$ sur Ω et montrons que $\langle \overline{T}, f \rangle \geq 0$. Choisissons $n \geq 1$ tel que $K \subset K_n$. Soit $(\zeta_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ suite régularisante de \mathbf{R}^N telle que $\text{supp}(\zeta_\epsilon) \subset B(0, \epsilon)$. Pour tout $\epsilon < 1/2n$, la fonction $f \star \zeta_\epsilon$ (où l'on identifie f à son prolongement par 0 au complémentaire de Ω) vérifie

$$f \star \zeta_\epsilon \geq 0, \quad \text{et } f \star \zeta_\epsilon \in C_{K_{2n}}^\infty(\Omega),$$

et de plus $f \star \zeta_\epsilon \rightarrow f$ uniformément sur Ω . Ainsi

$$f \in \overline{C_{K_{2n}}^\infty(\Omega)} \text{ et } \langle \overline{T}, f \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle T, f \star \zeta_\epsilon \rangle \geq 0.$$

Démontrons enfin l'unicité du prolongement positif \overline{T} .

Soit S forme linéaire positive sur $C_c(\Omega)$. Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\phi \in C_c(\Omega)$ telle que $0 \leq \phi \leq 1$ sur Ω et $\phi|_K = 1$; posons $L_K = \langle S, \phi \rangle \geq 0$. Alors, pour toute fonction $f \in C_c(\Omega)$ à support dans K , on a

$$-\sup_{y \in \Omega} |f(y)| \phi \leq \langle S, f \rangle \leq \sup_{y \in \Omega} |f(y)| \phi \quad \text{sur } \Omega,$$

de sorte que, par positivité de la forme linéaire S , on a

$$|\langle S, f \rangle| \leq L_K \sup_{y \in \Omega} |f(y)|.$$

Supposons que S coïncide avec T sur $C_c^\infty(\Omega)$. Alors, pour tout $n \geq 1$, la forme linéaire S coïncide avec $\overline{T_{K_n}}$ sur $\overline{C_{K_n}^\infty(\Omega)}$, puisque ces deux formes linéaires continues pour la topologie de la convergence uniforme coïncident avec T sur $C_{K_n}^\infty(\Omega)$. Autrement dit S et \overline{T} coïncident avec $\overline{C_{K_n}^\infty(\Omega)}$ pour tout $n \geq 1$, ce qui montre que $S = \overline{T}$. ■

Ainsi, bien qu'a priori une distribution positive sur Ω soit définie comme forme linéaire sur l'espace des fonctions tests de classe C^∞ à support compact

sur Ω , le corollaire ci-dessus montre que, dans un premier temps, une telle distribution se prolonge par continuité de façon unique en une forme linéaire positive sur l'espace des fonctions continues à support compact.

Par exemple, si Σ est une hypersurface de classe C^∞ de \mathbf{R}^N , dont l'élément de surface est noté $d\sigma$, la distribution de simple couche de densité 1

$$C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \ni \phi \mapsto \langle \sigma, \phi \rangle = \int_{\Sigma} \phi(x) d\sigma(x)$$

est une distribution positive, qui se prolonge donc de manière unique en une mesure de Radon positive, c'est-à-dire en une forme linéaire positive sur $C_c(\mathbf{R}^N)$.

Mais on peut aller plus loin : le processus de prolongement par monotonie, utilisé pour définir l'intégrale de Lebesgue à partir de l'intégrale de Riemann, s'applique dans ce cas et permet de définir l'espace des fonctions sommables pour cette distribution positive, espace qui contient toutes les fonctions continues à support compact, et dans lequel la distribution positive vérifie les énoncés habituels de convergence monotone ou dominée. (Voir les chapitres III et V de [9].)

3.2.3 Remarques sur la définition des distributions

Revenons à la définition de la notion de distribution, en gardant à l'esprit que cette notion doit généraliser celle de fonction.

Il peut évidemment paraître étrange a priori de choisir pour ce faire une notion de forme linéaire continue sur un certain espace de fonctions¹. Il y a pourtant plusieurs raisons à cela.

Au départ, la notion de fonction (numérique) consiste à associer une valeur réelle ou complexe à chaque point de l'ensemble de départ. Or la théorie de Lebesgue de l'intégration nous a déjà habitués à abandonner cette vision des choses, puisqu'une "fonction" appartenant à $L^1(\mathbf{R})$ est en réalité une classe d'équivalence de fonctions égales presque partout sur \mathbf{R} . De la sorte, on ne peut jamais parler de la valeur prise par une "fonction" de $L^1(\mathbf{R})$ en un point quelconque $x_0 \in \mathbf{R}$, puisque le singleton $\{x_0\}$ est de mesure nulle. Ainsi, deux fonctions f et g mesurables sur \mathbf{R} , telles que

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)| dx < \infty \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}} |g(x)| dx < \infty,$$

égales en dehors de $\{x_0\}$ et prenant en x_0 des valeurs différentes quelconques, définissent le même élément de $L^1(\mathbf{R})$.

Cette remarque explique bien pourquoi on est amené naturellement à abandonner en intégration l'idée classique de fonction comme règle associant une valeur réelle ou complexe à tout point de son ensemble de définition. Toutefois, l'idée de considérer comme fonctions généralisées des formes linéaires sur des

1. Cette définition ne s'est d'ailleurs pas imposée d'emblée à l'esprit de Laurent Schwartz, à qui l'on doit la théorie des distributions. Les lecteurs intéressés pourront consulter les pp. 243–251 de ses mémoires *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Odile Jacob, Paris 1997.

espaces de fonctions — idée qui nous avons justifiée par la Proposition 3.2.3 — a de quoi surprendre du strict point de vue ensembliste, puisqu'elle consiste à identifier certaines applications (ici certaines formes linéaires sur l'espace des fonctions test) avec des éléments de leur ensemble source (c'est-à-dire avec des fonctions de classe C^∞ à support compact.)

Cependant, le lecteur aura déjà rencontré plusieurs exemples de ce genre d'identification.

Le théorème de représentation de Riesz (voir [6], Théorème II.2.11 ou [9], chapitre VIII, Théorème 2.2.1 et 2.2.5) appliqué à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbf{R})$ identifie toute "fonction" $f \in L^2(\mathbf{R})$ à la forme linéaire continue sur $L^2(\mathbf{R})$

$$\phi \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x)\phi(x)dx$$

(dans le cas où f est à valeurs réelles).

Toutefois, même si ce résultat permet d'identifier toute "fonction" de $L^2(\mathbf{R})$ à une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbf{R})$, il ne donne lieu à aucune généralisation de la notion de "fonction" de $L^2(\mathbf{R})$, car il montre que $L^2(\mathbf{R})$ est isomorphe à son dual.

Il n'en va pas de même pour les espaces L^p avec $p \neq 2$.

Pour tout $p \in]1, \infty[$, notons $p' = \frac{p}{p-1}$. Considérons l'application

$$L^{p'}([0, 1]) \ni f \mapsto \Lambda_f \in L^p([0, 1])',$$

où $L^p([0, 1])'$ désigne le dual topologique de $L^p([0, 1])$, et où

$$\Lambda_f(\phi) = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx,$$

est une forme linéaire continue sur $L^p([0, 1])$ puisque, d'après l'inégalité de Hölder (Théorème 1.5.1)

$$|\Lambda_f(\phi)| = \left| \int_0^1 f(x)\phi(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^{p'}([0, 1])} \|\phi\|_{L^p([0, 1])}.$$

On voit donc que cette application linéaire

$$L^{p'}([0, 1]) \ni f \mapsto \Lambda_f \in L^p([0, 1])',$$

évidemment injective, identifie toute fonction de $L^{p'}([0, 1])$ à une forme linéaire continue sur $L^p([0, 1])$. (En fait, on démontre que cette application linéaire est un isomorphisme isométrique, mais nous n'aurons pas besoin pour l'instant de ce résultat plus précis.)

Or si $2 < p < \infty$, alors $1 < p' < 2$, et en particulier $p' < p$. D'autre part $L^p([0, 1]) \subset L^{p'}([0, 1])$, toujours d'après l'inégalité de Hölder, car, pour tout $p < q \in]1, \infty[$

$$\int_0^1 |f(x)|^p dx \leq \left(\int_0^1 dx \right)^{1-p/q} \left(\int_0^1 |f(x)|^q dx \right)^{p/q}$$

c'est-à-dire que

$$\|f\|_{L^p([0,1])} \leq \|f\|_{L^q([0,1])}, \quad \text{pour tout } f \in L^q([0,1]).$$

D'autre part, l'inclusion est stricte : la fonction $f : x \mapsto 1/x^\alpha$ est dans $L^{p'}([0,1])$ mais pas dans $L^p([0,1])$ lorsque $1/p < \alpha < 1/p'$. Ainsi le dual topologique de $L^p([0,1])$ est, pour $2 < p < \infty$, un espace plus gros que $L^p([0,1])$ lui-même, qu'il contient.

Le raisonnement ci-dessus montre d'ailleurs que, si l'on admet l'isomorphisme isométrique

$$L^{p'}([0,1]) \simeq L^p([0,1])' \quad \text{pour tout } p \in]1, \infty[,$$

plus l'espace $L^p([0,1])$ est petit, plus son dual topologique $L^{p'}([0,1])$ est gros. Par comparaison, pour définir $\mathcal{D}'(]0,1[)$, on part de l'espace $C_c^\infty(]0,1[)$ qui est contenu strictement dans $L^p([0,1])$ pour tout $p \in]1, \infty[$. On s'attend donc à ce que l'espace $\mathcal{D}'(]0,1[)$ obtenu par dualité à partir de $C_c^\infty(]0,1[)$ contienne strictement $L^p([0,1])$ pour tout $p \in]1, \infty[$ — autrement dit, à ce que les éléments de $\mathcal{D}'(]0,1[)$ soient des objets encore plus généraux que les “fonctions” des espaces de Lebesgue $L^p([0,1])$ pour tout $p \in]1, \infty[$.

Ceci va bien évidemment à l'encontre de l'intuition que nous donne le cas des espaces vectoriels de dimension finie, qui sont toujours isomorphes à leurs duaux.

La discussion ci-dessus montre que l'idée de construire une généralisation de la notion de fonction par un argument de dualité n'est finalement pas aussi surprenante sur le plan mathématique qu'on pourrait le croire a priori².

Il reste que l'idée de généraliser les fonctions indéfiniment dérivables en les plongeant dans le dual d'un espace fonctionnel “assez petit” — celui des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact — n'est pas des plus intuitives, et d'ailleurs, les arguments que nous avons présentés pour tenter de la justifier relèvent de l'analyse fonctionnelle plutôt que de l'intuition que chacun peut avoir de la notion de fonction.

Du point de vue physique, on pense souvent à une fonction comme à une collection de mesures d'une certaine grandeur — par exemple la pression, ou la température dans un fluide, ou encore les composantes d'un champ électromagnétique — que l'on effectuerait en tout point de l'espace.

Ceci est toutefois une vue de l'esprit, car un appareil de mesure ne fournit jamais qu'une valeur moyenne locale de la quantité mesurée — comme la pression dans un fluide par exemple. C'est-à-dire qu'au lieu de fournir la pression

2. Encore que ce procédé ne se soit pas imposé de prime abord comme le plus naturel — cf. note précédente. D'ailleurs, l'idée d'écrire une équation aux dérivées partielles “au sens des distributions”, c'est à dire sous la forme (C) dans l'introduction de ce chapitre, était connue plus de dix ans avant l'introduction par L. Schwartz de la notion de distribution. Cette formulation des équations aux dérivées partielles apparaît déjà au début des années 1930 dans un article fondamental de J. Leray sur les équations de Navier-Stokes de la mécanique des fluides visqueux incompressibles, ou encore dans les travaux de S.L. Sobolev.

$p(x)$ en tout point $x \in \mathbf{R}^3$, ce que l'on peut mesurer est plutôt une quantité du type

$$\frac{1}{|A|} \int_A p(x) dx$$

pour tout cube A de l'espace \mathbf{R}^3 — par exemple — ce que l'on écrit encore

$$\frac{1}{|A|} \int_{\mathbf{R}^3} \mathbf{1}_A(x) p(x) dx .$$

Ceci suggère qu'une mesure physique fournit des quantités du type

$$\int_{\mathbf{R}^3} \phi(x) p(x) dx$$

pour ϕ décrivant une classe bien choisie de fonctions — dépendant typiquement de l'appareil de mesure — plutôt que la valeur $p(x)$ de p en tout point x de \mathbf{R}^3 . Dans ce point de vue, la quantité physique p intervient seulement par le biais de la forme linéaire

$$\phi \mapsto \int_{\mathbf{R}^3} \phi(x) p(x) dx .$$

C'est d'ailleurs ce point de vue qui prévaut en mécanique quantique. Les quantités (énergie, impulsion...) relatives à un système que l'on mesure en mécanique quantique, quantités nommées les "observables", sont des valeurs moyennes d'une fonction par rapport au carré du module de la fonction d'onde dans l'espace des positions ou celui des impulsions — voir l'introduction du chapitre 10, ou, pour plus de détails, [2], chapitre 3.

Les considérations qui précèdent montrent que l'idée de remplacer la notion de fonction comme règle associant une valeur à tout point de l'espace par la donnée de ses valeurs moyennes — ou, ce qui revient au même, par celle de ses intégrales contre n'importe quelle fonction test — rend finalement très naturelle la Définition 3.2.1 des distributions.

La suite de ce cours permettra d'apprécier tout le bénéfice que l'on retire de ce changement de point de vue.

3.3 Convergence des suites de distributions

La convergence des suites de distributions n'est rien d'autre que la convergence simple — c'est-à-dire ponctuelle — des suites de formes linéaires.

Définition 3.3.1 (Suite convergente de distributions) Soient $N \geq 1$ entier et Ω ouvert de \mathbf{R}^N , ainsi que $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite de distributions sur Ω . On dit que

$$T_n \rightarrow T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty ,$$

si, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\langle T_n, \phi \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle \text{ lorsque } n \rightarrow \infty .$$

Evidemment, toute suite f_n de fonctions localement intégrables sur Ω convergeant vers f dans $L^1_{loc}(\Omega)$ — c'est-à-dire que, pour tout compact $K \subset \Omega$

$$\int_K |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0 \text{ pour } n \rightarrow \infty$$

— converge vers f dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Mais cette nouvelle notion de convergence est beaucoup plus souple et permet de rendre compte de nombreux phénomènes intéressants.

Voici donc quelques exemples importants de suites convergentes de distributions.

Exemple 3.3.2 (Dipôle de moment μ) Dans le cas $N = 1$ et $\Omega = \mathbf{R}$, on pose

$$T_n = \mu \frac{n}{2} (\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}), \quad n \geq 1.$$

Alors on vérifie sans peine que

$$T_n \rightarrow -\mu \delta_0^{(1)} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}).$$

Comme les masses de Dirac $\delta_{1/n}$ et $\delta_{-1/n}$ représentent, du point de vue intuitif, des charges unité ponctuelles situées respectivement en $x = +1/n$ et $x = -1/n$, la limite des T_n représente un dipôle d'intensité — ou de moment — μ localisé au point $x = 0$.

La notion de dipôle intervient également dans le contexte de l'analyse numérique des équations différentielles. La résolution numérique d'une équation différentielle de la forme

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),$$

d'inconnue la fonction $t \mapsto x(t)$, s'effectue en remplaçant la dérivée $\dot{x}(t)$ par une "différence finie", c'est-à-dire que l'on fait l'approximation

$$\dot{x}(t) \simeq \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \text{ ou } \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t},$$

où $\Delta t > 0$ est un pas de temps pris suffisamment petit. En écrivant

$$\begin{aligned} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} &= \left\langle \frac{1}{\Delta t} (\delta_{t+\Delta t} - \delta_t), x \right\rangle, \\ \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} &= \left\langle \frac{1}{\Delta t} (\delta_t - \delta_{t-\Delta t}), x \right\rangle, \end{aligned}$$

on voit que la méthode des différence finie consiste à approcher la dérivation par rapport à t par un dipôle, puisque, au sens des distributions,

$$\frac{1}{\Delta t} (\delta_{t+\Delta t} - \delta_t) \rightarrow -\delta_t^{(1)} \text{ et } \frac{1}{\Delta t} (\delta_t - \delta_{t-\Delta t}) \rightarrow -\delta_t^{(1)} \text{ lorsque } \Delta \rightarrow 0^+,$$

et que

$$\langle -\delta_t^{(1)}, x \rangle = \dot{x}(t).$$

Exemple 3.3.3 Dans \mathbf{R} , on considère, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction localement intégrable sur \mathbf{R} définie par

$$T_n : x \mapsto \frac{\mathbf{1}_{[1/n, +\infty[}(|x|)}{x};$$

Alors, on vérifie à nouveau sans aucune difficulté que

$$T_n \rightarrow \text{vp} \frac{1}{x} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Les deux exemples ci-dessus montrent qu'une suite de distributions de même ordre p donné peut très bien converger vers une distribution d'ordre $> p$.

Exemple 3.3.4 (Valeurs au bord de $1/z$ sur l'axe réel) Pour $\epsilon > 0$, on considère les fonctions f_ϵ^+ et f_ϵ^- définies par les formules

$$f_\epsilon^+(x) = \frac{1}{x + i\epsilon}, \quad f_\epsilon^-(x) = \frac{1}{x - i\epsilon}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Ces deux fonctions sont continues et bornées sur \mathbf{R} , donc localement intégrables, de sorte qu'elles définissent des distributions sur \mathbf{R} .

Nous allons montrer que, pour toute suite $\epsilon_n \rightarrow 0^+$, les suites de distributions $f_{\epsilon_n}^+$ et $f_{\epsilon_n}^-$ convergent vers des limites qui sont indépendantes du choix de la suite $\epsilon_n \rightarrow 0^+$. On notera ces limites

$$\frac{1}{x + i0} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\epsilon_n}^+, \quad \frac{1}{x - i0} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\epsilon_n}^-.$$

On trouve que

$$\begin{aligned} \frac{1}{x + i0} &= \text{vp} \frac{1}{x} - i\pi\delta_0, \\ \frac{1}{x - i0} &= \text{vp} \frac{1}{x} + i\pi\delta_0. \end{aligned}$$

En effet, pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, il existe $R > 0$ tel que $\text{supp}(\phi) \subset [-R, R]$. Alors

$$\langle f_\epsilon^+, \phi \rangle = \int_{-R}^R \frac{1}{x + i\epsilon} (\phi(x) - \phi(0)) dx + \phi(0) \int_{-R}^R \frac{dx}{x + i\epsilon}$$

D'une part, d'après le théorème des accroissements finis,

$$\left| \frac{1}{x + i\epsilon} (\phi(x) - \phi(0)) \right| \leq C \frac{|x|}{|x + i\epsilon|} \leq C, \quad \text{avec } C = \max_{|x| \leq R} |\phi'(x)|$$

de sorte que, par convergence dominée

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \frac{1}{x + i\epsilon} (\phi(x) - \phi(0)) dx &\rightarrow \int_{-R}^R \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx \\ &= \int_0^R \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx = \langle \text{vp} \frac{1}{x}, \phi \rangle. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \frac{dx}{x+i\epsilon} &= \int_{-R}^R \frac{x-i\epsilon}{x^2+\epsilon^2} dx = -i \int_{-R}^R \frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} dx = -i \left[\arctan\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right]_{x=-R}^{x=+R} \\ &= -i (\arctan(R/\epsilon) - \arctan(-R/\epsilon)) \rightarrow -i\pi \end{aligned}$$

lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$. On en déduit que, pour toute suite $\epsilon_n \rightarrow 0^+$,

$$\langle f_{\epsilon_n}^+, \phi \rangle \rightarrow \left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \phi \right\rangle - i\pi\phi(0),$$

d'où la relation entre $\frac{1}{x+i0}$, $\text{vp} \frac{1}{x}$ et δ_0 .

On procède de même pour étudier $\frac{1}{x-i\epsilon}$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Voici encore un exemple important de suite de fonctions convergeant au sens des distributions vers une limite qui n'est pas une fonction mais une distribution. Il fait comprendre l'essence de la distribution δ_{x_0} : une masse unité concentrée au point x_0 .

Les suites régularisantes (cf. Définition 1.3.12) relèvent évidemment de la proposition ci-dessous.

Proposition 3.3.5 (Critère de convergence vers une masse de Dirac)

Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et $x_0 \in \Omega$. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables sur Ω vérifiant

$$f_n \geq 0 \text{ p.p. sur } \Omega, \quad \text{supp}(f_n) \subset B(x_0, r_n),$$

et

$$\int_{\Omega} f_n(x) dx \rightarrow 1 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Alors

$$\text{si } r_n \rightarrow 0^+, \quad \text{on a } f_n \rightarrow \delta_{x_0} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Démonstration. En effet, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} f_n(x) \phi(x) dx = \int_{\Omega} f_n(x) (\phi(x) - \phi(x_0)) dx + \phi(x_0) \int_{\Omega} f_n(x) dx$$

D'après le théorème des accroissements finis, comme f_n est à support dans $B(x_0, r_n)$, on a

$$|\phi(x) - \phi(x_0)| \leq |x - x_0| \sup_{|x-x_0| \leq r_n} |\nabla \phi(x)|.$$

Par hypothèse, $r_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$; soient $r^* > 0$ tel que $\overline{B(x_0, r^*)} \subset \Omega$ et $n^* > 1$ tel que $0 < r_n < r^*$ pour tout $n \geq n^*$. Alors, pour tout $n \geq n^*$ et tout $x \in \overline{B(x_0, r_n)}$

$$|\phi(x) - \phi(0)| \leq C^* r_n, \quad \text{avec } C^* = \sup_{|x-x_0| \leq r^*} |\nabla \phi(x)|.$$

Ainsi, comme $f_n(x) \geq 0$ p.p. en $x \in \Omega$, l'on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f_n(x) (\phi(x) - \phi(x_0)) dx \right| &\leq \int_{B(x_0, r_n)} f_n(x) |\phi(x) - \phi(x_0)| dx \\ &\leq C^* r_n \int_{\Omega} f_n(x) dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ puisque, par hypothèse,

$$r_n \rightarrow 0^+ \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} f_n(x) dx \rightarrow 1 \quad \text{lorsque} \quad n \rightarrow \infty.$$

De même, toujours par hypothèse sur la suite $(f_n)_{n \geq 1}$,

$$\phi(x_0) \int_{\Omega} f_n(x) dx \rightarrow \phi(x_0) \quad \text{lorsque} \quad n \rightarrow \infty.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_n(x) \phi(x) dx &= \int_{\Omega} f_n(x) (\phi(x) - \phi(x_0)) dx + \phi(x_0) \int_{\Omega} f_n(x) dx \\ &\rightarrow \phi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \phi \rangle \end{aligned}$$

d'où la convergence annoncée. ■

Nous allons terminer cette section sur des considérations plus délicates relatives à la convergence des distributions et des fonctions test.

L'énoncé fondamental est le

Théorème 3.3.6 (Principe de bornitude uniforme) *Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et $K \subset \Omega$ compact. Soit une suite $(T_n)_{n \geq 1}$ de distributions sur Ω telle que*

la suite $\langle T_n, \phi \rangle$ est convergente pour tout $\phi \in C^\infty(\Omega)$ à support dans K .

Alors il existe un entier $p \geq 0$ et $C > 0$ tels que

$$|\langle T_n, \phi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

pour tout $n \geq 1$ et toute fonction test $\phi \in C^\infty(\Omega)$ à support dans K .

Nous ne donnerons pas la preuve de ce résultat, qui est une variante du théorème de Banach-Steinhaus — également basée sur le théorème de Baire.

Voici deux conséquences remarquables du principe de bornitude uniforme.

Corollaire 3.3.7 *Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite de distributions sur Ω . Supposons que*

la suite $\langle T_n, \phi \rangle$ est convergente pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Alors il existe une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle \quad \text{pour tout} \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega),$$

c'est-à-dire que

$$T_n \rightarrow T \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \quad \text{lorsque} \quad n \rightarrow \infty.$$

Démonstration. Evidemment, l'application

$$\phi \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \phi \rangle$$

est une forme linéaire T sur $C_c^\infty(\Omega)$. Il suffit donc de vérifier que cette forme linéaire T a la propriété de continuité des distributions.

Or, pour tout $K \subset \Omega$ compact, il existe, d'après le principe de bornitude uniforme, un entier $p_K \geq 0$ et une constante $C_K > 0$ tels que

$$|\langle T_n, \phi \rangle| \leq C_K \max_{|\alpha| \leq p_K} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|,$$

pour toute fonction $\phi \in C^\infty(\Omega)$ à support dans K .

En passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus, on voit que

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq C_K \max_{|\alpha| \leq p_K} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|,$$

pour toute fonction $\phi \in C^\infty(\Omega)$ à support dans K , ce qui est la propriété de continuité assurant que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. ■

Proposition 3.3.8 (Continuité séquentielle du crochet de dualité) *Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N , une suite $(T_n)_{n \geq 1}$ de distributions sur Ω , et une suite $(\phi_n)_{n \geq 1}$ de fonctions test appartenant à $C_c^\infty(\Omega)$. Supposons que*

$$\begin{aligned} T_n &\rightarrow T && \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty, \text{ et} \\ \phi_n &\rightarrow \phi && \text{dans } C_c^\infty(\Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Alors

$$\langle T_n, \phi_n \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Démonstration. Comme $\phi_n \rightarrow \phi$ dans $C_c^\infty(\Omega)$, il existe $K \subset \Omega$ compact tel que $\text{supp}(\phi_n) \subset K$ pour tout $n \geq 1$.

D'après le principe de bornitude uniforme (Théorème 3.3.6), il existe un entier $p \geq 0$ et une constante $C > 0$ tels que

$$|\langle T_n, \psi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(x)|$$

pour tout $n \geq 1$ et pour toute fonction test $\psi \in C^\infty(\Omega)$ à support dans K .

Appliquant cela à $\psi = \phi_n - \phi$, on trouve que

$$|\langle T_n, \phi_n - \phi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq p} \max_{x \in K} |\partial^\alpha (\phi_n - \phi)(x)| \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, puisque, par hypothèse sur la suite $(\phi_n)_{n \geq 1}$,

$$\partial^\alpha \phi_n \rightarrow \partial^\alpha \phi \text{ uniformément sur } K \text{ pour } n \rightarrow \infty.$$

Alors

$$\langle T_n, \phi_n \rangle - \langle T, \phi \rangle = \langle T_n, \phi_n - \phi \rangle + \langle T_n - T, \phi \rangle.$$

On vient de voir que le premier terme au membre de droite converge vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$; quant au second, il converge également vers 0 puisque $T_n \rightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. ■

3.4 Opérations sur les distributions

Nous allons définir dans cette section les premiers exemples d'opérations sur les distributions. D'autres opérations, plus complexes (comme la transformation de Fourier) ne peuvent être définies que sur certaines classes plus restreintes de distributions, que nous étudierons ultérieurement.

3.4.1 Dérivation des distributions

La dérivation des distributions s'effectue comme suggéré par l'exemple étudié dans l'introduction du présent chapitre.

Définition 3.4.1 (Dérivation des distributions) Soient $N \geq 1$ entier, Ω ouvert de \mathbf{R}^N et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour tout $j = 1, \dots, N$, on définit la distribution $\partial_{x_j} T$ par la formule

$$\langle \partial_{x_j} T, \phi \rangle = -\langle T, \partial_{x_j} \phi \rangle, \quad \text{pour tout } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Evidemment, cette notion de dérivation coïncide avec la notion habituelle pour les fonctions de classe C^1 .

Proposition 3.4.2 (Dérivation classique et dans \mathcal{D}') Soit Ω ouvert de \mathbf{R}^N . Pour toute fonction $f \in C^1(\Omega)$

$$\partial_{x_j} T_f = T_{\partial_{x_j} f}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Commençons par le cas où $N = 1$ et où $\Omega =]a, b[$. Pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(]a, b[)$, en intégrant par parties

$$\begin{aligned} \langle T'_f, \phi \rangle &= -\langle T_f, \phi' \rangle = -\int_a^b f(x) \phi'(x) dx \\ &= -[f(x) \phi(x)]_a^b + \int_a^b f'(x) \phi(x) dx = \int_a^b f'(x) \phi(x) dx = \langle T_{f'}, \phi \rangle \end{aligned}$$

puisque $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Donc $T'_f = T_{f'}$ dans $\mathcal{D}'(]a, b[)$.

Pour $N \geq 2$, on aura besoin du lemme élémentaire suivant.

Lemme 3.4.3 Soit $C =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_N, b_N[$ cube ouvert non vide de \mathbf{R}^N , et soit $\psi \in C_c^1(C)$. Alors, pour tout $i = 1, \dots, N$, on a

$$\int_C \partial_{x_i} \psi(x) dx = 0.$$

Démonstration de la proposition. Soit $K = \text{supp}(\phi)$ compact dans Ω , et posons $\eta = \frac{1}{\sqrt{N}} \text{dist}(K, \partial\Omega) > 0$. Pour tout $z \in \mathbf{R}^N$ et $r > 0$, on note

$$C(x, r) := \prod_{i=1}^N]x_i - r, x_i + r[.$$

La famille $(C(x, \eta))_{x \in K}$ est un recouvrement ouvert de K dans Ω ; il existe donc $x_1, \dots, x_n \in K$ tels que

$$K \subset C(x_1, \eta) \cup \dots \cup C(x_n, \eta).$$

D'après le Théorème 1.4.3, il existe (χ_1, \dots, χ_n) partition de l'unité de classe C^∞ subordonnée au recouvrement fini $(C(x_k, \eta))_{1 \leq k \leq n}$ et telle que

$$\sum_{k=1}^n \chi_k = 1 \text{ sur un voisinage de } K.$$

On calcule donc

$$\begin{aligned} \langle \partial_{x_j} T_f, \phi \rangle &= - \int_{\Omega} f(x) \partial_{x_j} \phi(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \partial_{x_j} \left(\sum_{k=1}^n \chi_k(x) \phi(x) \right) dx \\ &= - \sum_{k=1}^n \int_{C(x_k, \eta)} f(x) \partial_{x_j} (\chi_k \phi)(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{C(x_k, \eta)} \chi_k(x) \phi(x) \partial_{x_j} f(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_{C(x_k, \eta)} \partial_{x_j} (\chi_k \phi f)(x) dx. \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme ci-dessus appliqué à la fonction $\chi_k \phi f \in C_c^1(C(x_k, \eta))$, on a

$$\int_{C(x_k, \eta)} \partial_{x_j} (\chi_k \phi f)(x) dx = 0$$

pour tout $j = 1, \dots, N$, de sorte que

$$\begin{aligned} \langle \partial_{x_j} T_f, \phi \rangle &= \sum_{k=1}^n \int_{C(x_k, \eta)} \chi_k(x) \phi(x) \partial_{x_j} f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \chi_k(x) \phi(x) \partial_{x_j} f(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^n \chi_k(x) \right) \phi(x) \partial_{x_j} f(x) dx = \int_{\Omega} \phi(x) \partial_{x_j} f(x) dx, \end{aligned}$$

d'où l'on tire que

$$\partial_{x_j} T_f = T_{\partial_{x_j} f} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

■

Démonstration du Lemme. Notons

$$\hat{C}_i :=]a_1, b_1[\times \dots \times]a_{i-1}, b_{i-1}[\times]a_{i+1}, b_{i+1}[\times \dots \times]a_N, b_N[$$

et $\hat{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N)$. Pour tout $\hat{x}_i \in \hat{C}_i$, on a

$$\int_{a_i}^{b_i} \partial_{x_i} \phi(x) dx_i = \left[\phi(x) \right]_{x_i=a_i}^{x_i=b_i} = 0$$

puisque

$$\phi(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_N) = \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_N) = 0,$$

pour tout $\hat{x}_i \in \hat{C}_i$, la fonction ϕ étant à support compact dans C .

Enfin, la fonction $\partial_{x_i}\phi$ étant continue à support compact dans le cube C , on peut échanger l'ordre d'intégration par rapport aux variables x_1, \dots, x_N , et

$$\int_C \partial_{x_i}\phi(x)dx = \int_{\hat{C}_i} \left(\int_{a_i}^{b_i} \partial_{x_i}\phi(x)dx_i \right) d\hat{x}_i = 0.$$

■

Voici un premier exemple de fonction dont la dérivée au sens des distributions n'est pas (représentée par) une fonction localement intégrable.

Exemple 3.4.4 (Dérivée de la fonction de Heaviside) Notons H la fonction de Heaviside définie par

$$H(x) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Alors

$$H' = \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}).$$

La vérification de ce calcul ne pose aucune difficulté.

On sait que toute fonction de classe C^1 sur un intervalle ouvert de \mathbf{R} et dont la dérivée est identiquement nulle sur cet intervalle est une fonction constante. Le même énoncé vaut dans le cas des distributions, mais la démonstration en est assez différente — au moins à première vue.

Proposition 3.4.5 (Dérivation et constantes) Soit I intervalle ouvert de \mathbf{R} et $T \in \mathcal{D}'(I)$. Supposons que

$$T' = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(I).$$

Alors T est (la distribution définie par) une fonction constante.

Démonstration. Notons $I =]a, b[$. Dire qu'une fonction ϕ est la dérivée d'une fonction test $\Phi \in C_c^\infty(I)$ équivaut à dire que

$$\phi \in C_c^\infty(I) \text{ et que } \int_I \phi(x)dx = 0.$$

En effet, soit $[c, d] \subset]a, b[$ tel que $\text{supp}(\phi) \subset [c, d]$. Alors la fonction Φ définie par

$$\Phi(x) = \int_a^x \phi(y)dy$$

satisfait aux conditions suivantes :

$$\Phi \in C^\infty(I), \quad \Phi' = \phi, \quad \text{supp}(\Phi) \subset [c, d]$$

puisque, pour tout $z \in]d, b[$ on a

$$\Phi(z) = \int_a^z \phi(x)dx = \int_I \phi(x)dx = 0.$$

Soit donc $\psi \in C_c^\infty(I)$ quelconque ; posons

$$\phi(x) = \psi(x) - \chi(x) \int_I \psi(y) dy, \quad \text{pour tout } x \in I$$

où $\chi \in C_c^\infty(I)$ est telle que

$$\int_I \chi(y) dy = 1.$$

Alors

$$\int_I \phi(x) dx = \int_I \psi(x) dx - \left(\int_I \chi(x) dx \right) \int_I \psi(x) dx = 0$$

de sorte que, d'après ce qui précède, il existe $\Phi \in C_c^\infty(I)$ telle que $\phi = \Phi'$. Autrement dit

$$\psi(x) = \Phi'(x) + \chi(x) \int_I \psi(y) dy, \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \langle T, \psi \rangle &= \langle T, \Phi' \rangle + \langle T, \chi \rangle \int_I \psi(x) dx \\ &= -\langle T', \Phi \rangle + \langle T, \chi \rangle \int_I \psi(x) dx = C \langle 1, \psi \rangle \text{ avec } C = \langle T, \chi \rangle \end{aligned}$$

pour toute fonction test $\psi \in C_c^\infty(I)$. Autrement dit $T = C$ dans $\mathcal{D}'(I)$. ■

Par dualité, la dérivation au sens des distributions hérite évidemment des propriétés linéaires de la dérivation agissant sur les fonctions de classe C^∞ . En voici un premier exemple :

Lemme 3.4.6 (Symétrie des dérivées multiples) *Soit Ω ouvert de \mathbf{R}^N . Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et tout $j \neq k \in \{1, \dots, N\}$, on a*

$$\partial_{x_j} (\partial_{x_k} T) = \partial_{x_k} (\partial_{x_j} T) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Démonstration. En effet, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, le lemme de Schwarz assure que

$$\partial_{x_j} (\partial_{x_k} \phi) = \partial_{x_k} (\partial_{x_j} \phi) \text{ sur } \Omega.$$

Par conséquent

$$\langle \partial_{x_j} (\partial_{x_k} T), \phi \rangle = \langle T, \partial_{x_k} (\partial_{x_j} \phi) \rangle = \langle T, \partial_{x_j} (\partial_{x_k} \phi) \rangle = \langle \partial_{x_k} (\partial_{x_j} T), \phi \rangle,$$

d'où l'identité annoncée. ■

Le lecteur a sans doute présent à l'esprit les contre-exemples à la symétrie des dérivées croisées d'ordre 2 dans le cas de fonctions qui ne sont pas 2 fois différentiables. Ainsi la fonction f définie sur \mathbf{R}^2 par

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0,$$

est de classe C^1 et vérifie

$$\partial_x f(0, y) = -y, \quad \text{et } \partial_y f(x, 0) = x,$$

de sorte que

$$\partial_{yx}^2 f(0, 0) = -1 \neq 1 = \partial_{xy}^2 f(0, 0).$$

Pourtant, on vérifie sans difficulté que

$$\partial_{x,y}^2 f = \partial_{y,x}^2 f \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2).$$

A partir du lemme ci-dessus, on peut définir par récurrence l'action de n'importe quel monôme différentiel sur une distribution.

Définition 3.4.7 (Dérivées d'ordre supérieur dans \mathcal{D}') Soient un entier $N \geq 1$, un ouvert Ω de \mathbf{R}^N et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$, on pose

$$\langle \partial_x^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial_x^\alpha \phi \rangle, \quad \text{pour tout } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Exemple 3.4.8 (Dérivées de la masse de Dirac) Dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, on a

$$\partial_x^m \delta_{x_0} = \delta_{x_0}^{(m)}$$

où $\delta_{x_0}^{(m)}$ est la distribution d'ordre m définie ci-dessus par la formule

$$\langle \delta_{x_0}^{(m)}, \phi \rangle = (-1)^m \langle \delta_{x_0}, \partial_x^m \phi \rangle = (-1)^m \phi^{(m)}(x_0)$$

pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$.

L'un des grands avantages de la notion de distribution — et la première motivation pour l'introduire — est que, contrairement au cas des fonctions, toute distribution peut être dérivée autant de fois qu'on le désire.

Mais ce n'est pas le seul. Un autre avantage de cette notion est la convergence au sens des distributions, qui donne des énoncés d'une grande souplesse d'utilisation, comme on va le voir.

Proposition 3.4.9 (Continuité de la dérivation dans \mathcal{D}') Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite de distributions sur Ω . Supposons que

$$T_n \rightarrow T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Alors, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}$, la suite des dérivées multiples

$$\partial_x^\alpha T_n \rightarrow \partial_x^\alpha T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Démonstration. En effet, pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\langle \partial_x^\alpha T_n, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_n, \partial_x^\alpha \phi \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial_x^\alpha \phi \rangle = \langle \partial_x^\alpha T, \phi \rangle$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. ■

En particulier, si $f_n \rightarrow f$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$, alors $\partial_x^\alpha f_n \rightarrow \partial_x^\alpha f$ — autrement dit, avec nos conventions de notation, $\partial_x^\alpha T_{f_n} \rightarrow \partial_x^\alpha T_f$ — au sens des distributions sur Ω .

Le lecteur comparera l'énoncé ci-dessus, qui est d'une simplicité maximale, avec les énoncés classiques de dérivation terme à terme des suites de fonctions — où on doit vérifier, typiquement, la convergence uniforme locale de la suite des dérivées. Il est vrai que la Proposition 3.4.9 ne donne que la convergence des dérivées au sens des distributions, c'est à dire en un sens très faible, contrairement à l'énoncé classique rappelé ci-dessus.

Exemple 3.4.10 La fonction $x \mapsto \ln|x|$ étant localement intégrable sur \mathbf{R} , elle définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. On a

$$(\ln|x|)' = \text{vp} \frac{1}{x} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}).$$

En effet, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, on a, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \langle (\ln|x|)', \phi \rangle &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x| \phi'(x) dx = - \int_0^\infty \ln|x| (\phi'(x) + \phi'(-x)) dx \\ &= - \left[\ln|x| (\phi(x) - \phi(-x)) \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx \\ &= \left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \phi \right\rangle. \end{aligned}$$

Noter que les fonctions $x \mapsto \phi'(x) \ln|x|$ et $x \mapsto \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x}$, continues sur \mathbf{R}^* , sont sommables sur \mathbf{R} car ϕ est de classe C^1 , de sorte que l'intégration par parties ci-dessus est bien justifiée.

Le même calcul que ci-dessus, mais en en intégrant par parties sur l'intervalle $[1/n, +\infty[$ pour $n \geq 1$ montre que

$$(\mathbf{1}_{|x| \geq 1/n} \ln|x|)' = \frac{\mathbf{1}_{|x| \geq 1/n}}{x} - \ln n (\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Or

$$\mathbf{1}_{|x| \geq 1/n} \ln|x| \rightarrow \ln|x| \text{ dans } L^1_{loc}(\mathbf{R})$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$ par convergence dominée, tandis que

$$\frac{\mathbf{1}_{|x| \geq 1/n}}{x} \rightarrow \text{vp} \frac{1}{x} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R})$$

par définition. Enfin, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, on a

$$\ln n (\phi(1/n) - \phi(-1/n)) = \ln n \cdot O(1/n) \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$, par le théorème des accroissements finis, de sorte que

$$\ln n (\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}) \rightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R})$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. En passant à la limite pour $n \rightarrow +\infty$ dans l'égalité

$$(\mathbf{1}_{|x| \geq 1/n} |\ln |x||)' = \frac{\mathbf{1}_{|x| \geq 1/n}}{x} - \ln n(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})$$

au sens des distributions, on retrouve la formule $(\ln |x|)' = \text{vp } \frac{1}{x}$.

Exemple 3.4.11 (Solution de l'équation de transport dans \mathcal{D}') Soient une fonction $f^{in} \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$ et un vecteur non nul $v \in \mathbf{R}^N$; posons

$$f(t, x) = f^{in}(x - tv) \text{ p.p. en } (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N.$$

Alors

(a) pour tout $R > 0$, la restriction de f à $\mathbf{R} \times B(0, R)$ est continue en $t \in \mathbf{R}$ à valeurs dans $L^1(B(0, R))$; et

(b) la fonction f est solution de l'équation de transport

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N).$$

On peut évidemment vérifier le (b) à partir de la définition de la dérivée au sens des distributions.

Une autre méthode consiste à approcher f^{in} par une suite f_n^{in} de fonctions de classe C^∞ à support compact, par exemple en posant

$$f_n^{in} = (f^{in} \mathbf{1}_{|x| \leq n}) \star \zeta_{1/n}$$

où $(\zeta_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ est une suite régularisante sur \mathbf{R}^N .

D'après le Théorème 2.1.2, la fonction f_n définie par

$$f_n(t, x) = f_n^{in}(x - tv), \quad (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N,$$

est l'unique solution (au sens classique) du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t f_n + v \cdot \nabla_x f_n &= 0 \quad \text{sur } \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N, \\ f_n|_{t=0} &= f_n^{in}, \end{aligned}$$

Enfin on passe à la limite au sens des distributions dans l'équation de transport grâce à la Proposition 3.4.9, en remarquant que $f_n \rightarrow f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

3.4.2 Multiplication par une fonction de classe C^∞

Définition 3.4.12 (Produit C^∞ - \mathcal{D}') Soient $N \geq 1$ et Ω ouvert de \mathbf{R}^N . Pour toute fonction $a \in C^\infty(\Omega)$ et toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit la distribution produit de T par a , notée $aT \in \mathcal{D}'(\Omega)$, par la formule

$$\langle aT, \phi \rangle = \langle T, a\phi \rangle, \quad \text{pour tout } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Vérifions que la formule ci-dessus définit bien une distribution sur Ω , ce qui se ramène à vérifier la propriété de continuité.

Or la formule de Leibnitz montre que, pour tout compact $K \subset \Omega$, on a

$$\begin{aligned} \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha (a\phi)(x)| &= \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} \left| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} a(x) \partial^\beta \phi(x) \right| \\ &\leq M_{p,K}[a] \max_{|\beta| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\beta \phi(x)| \end{aligned}$$

avec

$$M_{p,K}[a] = 2^p \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha a(x)|.$$

Evidemment, cette opération est (séquentiellement) continue :

Proposition 3.4.13 (Continuité du produit par $a \in C^\infty$) Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N , une fonction $a \in C^\infty(\Omega)$ et une suite $(T_n)_{n \geq 1}$ de distributions sur Ω telle que

$$T_n \rightarrow T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Alors

$$aT_n \rightarrow aT \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Démonstration. En effet, pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\langle aT_n, \phi \rangle = \langle T_n, a\phi \rangle \rightarrow \langle T, a\phi \rangle = \langle aT, \phi \rangle$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. ■

La multiplication par une fonction C^∞ et la dérivation au sens des distributions interagissent comme dans le cas des fonctions.

Proposition 3.4.14 (Formule de Leibnitz dans \mathcal{D}') Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert, une fonction $a \in C^\infty(\Omega)$ et une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors, pour tout $j = 1, \dots, N$, on a

$$\partial_{x_j}(aT) = (\partial_{x_j} a) T + a \partial_{x_j} T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Plus généralement, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$, on a

$$\partial^\alpha (aT) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^{\alpha-\beta} a) \partial^\beta T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Démonstration. En effet, pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \langle \partial_{x_j}(aT), \phi \rangle &= -\langle T, a \partial_{x_j} \phi \rangle = -\langle T, \partial_{x_j}(a\phi) - (\partial_{x_j} a) \phi \rangle \\ &= \langle \partial_{x_j} T, a\phi \rangle + \langle (\partial_{x_j} a) T, \phi \rangle \\ &= \langle a \partial_{x_j} T, \phi \rangle + \langle (\partial_{x_j} a) T, \phi \rangle \end{aligned}$$

d'où la première formule.

La seconde formule découle de la première par récurrence, comme dans le cas classique d'un produit de fonctions. ■

Exemple 3.4.15 (Produit d'une fonction C^∞ par $\partial^\alpha \delta_{x_0}$) On vérifie sans peine que, pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $a \in C^\infty(\Omega)$, l'on a

$$a\delta_{x_0} = a(x_0)\delta_{x_0}.$$

Puis, en appliquant la formule de Leibnitz, on trouve que, pour tout $j = 1, \dots, N$,

$$a\partial_{x_j}\delta_{x_0} = a(x_0)\partial_{x_j}\delta_{x_0} - (\partial_{x_j}a)(x_0)\delta_{x_0}.$$

En procédant par récurrence, on calculerait de même

$$a\partial_x^\alpha \delta_{x_0} \text{ pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^N.$$

3.4.3 Localisation et recollement des distributions

Il est impossible de définir une notion de valeur en un point d'une distribution. Mais on peut restreindre une distribution à n'importe quel ouvert, comme suit.

Définition 3.4.16 (Restriction des distributions) Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et $\omega \subset \Omega$ ouvert. A toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on associe sa restriction à ω , notée $T|_\omega \in \mathcal{D}'(\omega)$ et définie comme suit :

$$\langle T|_\omega, \phi \rangle = \langle T, \Phi \rangle \quad \text{pour tout } \phi \in C_c^\infty(\omega)$$

où Φ est le prolongement de ϕ par 0 sur $\Omega \setminus \omega$.

Il se trouve qu'on peut reconstruire une distribution T connaissant sa restriction à chaque ouvert d'un recouvrement (ouvert) de Ω .

Proposition 3.4.17 (Principe de recollement) Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et $(\omega_i)_{i \in I}$ famille d'ouverts de Ω telle que

$$\bigcup_{i \in I} \omega_i = \Omega.$$

Soit $(T_i)_{i \in I}$ famille de distributions telle que $T_i \in \mathcal{D}'(\omega_i)$ pour tout $i \in I$. Supposons que

$$T_i|_{\omega_i \cap \omega_j} = T_j|_{\omega_i \cap \omega_j} \text{ pour tous } i, j \in I \text{ tels que } \omega_i \cap \omega_j \neq \emptyset.$$

Alors il existe une unique distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que

$$T|_{\omega_i} = T_i, \quad i \in I.$$

Démonstration.

Unicité. Supposons qu'il existe deux distributions sur Ω , T et \tilde{T} , vérifiant cette propriété. Alors la distribution $S = T - \tilde{T}$ est telle que

$$S|_{\omega_i} = 0 \text{ pour tout } i \in I.$$

Montrons que $S = 0$.

Soit donc $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ et soit $K = \text{supp}(\phi)$ compact dans Ω . Comme $(\omega_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de K , il en existe un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire $i_1, \dots, i_n \in I$ tels que

$$K \subset \omega_{i_1} \cup \dots \cup \omega_{i_n}.$$

Soit (χ_1, \dots, χ_n) partition de l'unité sur K subordonnée au recouvrement fini $(\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n})$: c'est-à-dire que, pour tout $k = 1, \dots, n$

$$0 \leq \chi_k \in C^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ est à support compact dans } \omega_{i_k}$$

$$\text{et } \sum_{k=1}^n \chi_k = 1 \text{ au voisinage de } K.$$

Alors

$$\langle S, \phi \rangle = \left\langle S, \sum_{k=1}^n \chi_k \phi \right\rangle = \sum_{k=1}^n \left\langle S|_{\omega_{i_k}}, \chi_k \phi \right\rangle = 0$$

et comme ceci vaut pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on en déduit que $S = 0$.

Existence. Soit K compact dans Ω ; comme dans la preuve d'unicité, on déduit du fait que la famille $(\omega_i)_{i \in I}$ fournit un recouvrement ouvert du compact K l'existence d'un sous-recouvrement fini $(\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n})$ et d'une partition de l'unité sur K notée (χ_1, \dots, χ_n) subordonnée au sous-recouvrement fini $(\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n})$.

Soit maintenant $\phi \in C^\infty(\Omega)$ à support dans K ; on pose

$$T_K(\phi) = \sum_{k=1}^n \langle T_{i_k}, \chi_k \phi \rangle.$$

Montrons que la forme linéaire T_K est indépendante du choix du sous-recouvrement fini $(\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n})$ et de la partition de l'unité (χ_1, \dots, χ_n) . Pour cela, on va supposer qu'il existe un autre sous-recouvrement fini $(\omega_{i'_1}, \dots, \omega_{i'_m})$ et une autre partition de l'unité sur K notée $(\chi'_1, \dots, \chi'_m)$ subordonnée à ce sous-recouvrement. Il faut faire voir que

$$\sum_{k=1}^n \langle T_{i_k}, \chi_k \phi \rangle = \sum_{l=1}^m \langle T_{i'_l}, \chi'_l \phi \rangle.$$

Or

$$\sum_{k=1}^n \langle T_{i_k}, \chi_k \phi \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \left\langle T_{i_k} |_{\omega_{i_k} \cap \omega_{i'_l}}, \chi_k \chi'_l \phi \right\rangle$$

de sorte que, comme

$$T_{i_k} |_{\omega_{i_k} \cap \omega_{i'_l}} = T_{i'_l} |_{\omega_{i_k} \cap \omega_{i'_l}}$$

on conclut que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \langle T_{i_k}, \chi_k \phi \rangle &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \left\langle T_{i_k} \Big|_{\omega_{i_k} \cap \omega_{i'_l}}, \chi_k \chi'_l \phi \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \left\langle T_{i'_l} \Big|_{\omega_{i_k} \cap \omega_{i'_l}}, \chi_k \chi'_l \phi \right\rangle = \sum_{l=1}^m \left\langle T_{i'_l}, \chi'_l \phi \right\rangle. \end{aligned}$$

Ainsi la forme linéaire T_K est-elle bien définie.

Maintenant, si K' est un autre compact de Ω , on montre de même que

$$\langle T_K, \phi \rangle = \langle T_{K'}, \phi \rangle$$

pour toute fonction test $\phi \in C^\infty(\Omega)$ à support dans $K \cap K'$.

Posons alors

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T_K, \phi \rangle \text{ pour tout } \phi \in C^\infty(\Omega) \text{ à support dans } K.$$

Vérifions enfin que T est bien une distribution. Pour $k = 1, \dots, n$, écrivons la propriété de continuité de T_{i_k} sur le compact $\text{supp}(\chi_k) \subset \omega_{i_k}$:

$$\begin{aligned} |\langle T_{i_k}, \chi_k \phi \rangle| &\leq C_k \max_{|\alpha| \leq p_k} \sup_{x \in \text{supp}(\chi_k)} |\partial^\alpha (\chi_k \phi)(x)| \\ &\leq C_k C'_k \max_{|\alpha| \leq p_k} \sup_{x \in \text{supp}(\chi_k)} |\partial^\alpha \phi(x)| \end{aligned}$$

d'après la formule de Leibnitz, en posant

$$C'_k = \max_{|\alpha| \leq p_k} \sup_{x \in \text{supp}(\chi_k)} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^\beta \chi_k(x)|.$$

En sommant membre à membre toutes les inégalités ci-dessus, on aboutit à l'estimation

$$|\langle T, \phi \rangle| = |\langle T_K, \phi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

pour tout $\phi \in C^\infty(\Omega)$ à support dans K , avec

$$p = \max_{1 \leq k \leq n} p_k, \quad \text{et } C = \sum_{k=1}^n C_k C'_k.$$

Ceci montre que la forme linéaire T définie plus haut est une distribution sur Ω . ■

3.4.4 Changement de variables dans les distributions

De façon générale, on aimerait pouvoir définir le produit de composition $T \circ \chi$ d'une distribution T par une application χ — comme on le ferait dans le cas particulier où T est une fonction.

Dans le cas général où T est une distribution, il est plus délicat, comme on va le voir, de définir ce produit de composition, et cela nécessite d'ailleurs certaines hypothèses sur l'application χ .

Nous allons commencer par le cas le plus simple, celui où on suppose que χ est un C^∞ -difféomorphisme entre ouverts de \mathbf{R}^N .

Supposons donc que Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts de \mathbf{R}^N et que

$$\chi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2 \text{ est un difféomorphisme de classe } C^\infty.$$

Pour toute fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega_2)$, on sait que la fonction $f \circ \chi$ appartient à $L^1_{loc}(\Omega_1)$, et la formule du changement de variables dans les intégrales entraîne que

$$\int_{\Omega_1} f \circ \chi(x) \phi(x) dx = \int_{\Omega_2} f(y) \phi(\chi^{-1}(y)) |\det(D\chi(\chi^{-1}(y)))|^{-1} dy$$

où $D\chi(x)$ est la matrice jacobienne de χ au point x .

On va donc définir le produit de composition $T \circ \chi$ pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ en s'inspirant de la formule ci-dessus.

Définition 3.4.18 (Changement de variables dans \mathcal{D}') Soient deux ouverts Ω_1 et Ω_2 de \mathbf{R}^N , $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ une distribution et un difféomorphisme de classe C^∞

$$\chi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2.$$

L'image inverse de la distribution T sur Ω_2 par le difféomorphisme χ est la distribution $T \circ \chi$ sur Ω_1 définie par la formule

$$\langle T \circ \chi, \phi \rangle = \langle T, \chi_*(\phi) \rangle, \quad \text{pour tout } \phi \in C_c^\infty(\Omega_1),$$

où l'image directe de la fonction test par le C^∞ -difféomorphisme χ est donnée par

$$\chi_*(\phi)(y) = \phi(\chi^{-1}(y)) |\det(D\chi(\chi^{-1}(y)))|^{-1}, \quad y \in \Omega_2.$$

Pour voir que $T \circ \chi$ vérifie la propriété de continuité des distributions, on applique la formule de dérivation des applications composées et la formule de Leibnitz par récurrence sur l'ordre de la dérivation.

Evidemment, pour toute fonction localement intégrable f sur Ω_2 , on a — en reprenant pour l'occasion nos anciennes notations —

$$T_f \circ \chi = T_{f \circ \chi}.$$

Autrement dit, le changement de variables au sens des distributions coïncide avec le changement de variables au sens habituel lorsqu'on l'applique à une fonction localement intégrable — on a tout fait pour cela.

On vérifie également sans difficulté que, si $(T_n)_{n \geq 1}$ est une suite de distributions sur Ω_2 telle que

$$T_n \rightarrow T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_2) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

alors

$$T_n \circ \chi \rightarrow T \circ \chi \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_1) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Exemple 3.4.19 (Changements de variables affines) *Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et toute matrice carrée inversible à N lignes et colonnes $A \in GL_N(\mathbf{R})$, on a*

$$\langle T \circ A, \phi \rangle = |\det(A)|^{-1} \langle T, \phi \circ A^{-1} \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N).$$

Cette formule vaut en particulier lorsque A est une rotation ou une symétrie orthogonale, ou plus généralement une matrice orthogonale $A \in O_N(\mathbf{R})$, auquel cas $A^{-1} = A^T$ et $|\det(A)| = 1$.

Elle vaut encore dans le cas particulier où A est la matrice d'un homothétie : pour $\lambda \in \mathbf{R}^$ et $A = \lambda I$, on a*

$$\langle T \circ (\lambda I), \phi \rangle = |\lambda|^{-N} \langle T, \phi(\lambda^{-1} \cdot) \rangle.$$

Le cas d'une translation est identique : pour tout vecteur $V \in \mathbf{R}^N$, notons τ_V la translation de vecteur V :

$$\tau_V : x \mapsto x + V.$$

Alors

$$\langle T \circ \tau_V, \phi \rangle = \langle T, \phi \circ \tau_{-V} \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N).$$

La formule du changement de variables pour une masse de Dirac est tout particulièrement remarquable.

Exemple 3.4.20 (Changement de variables dans une masse de Dirac) *Soient Ω_1 et Ω_2 ouverts de \mathbf{R}^N , et soit $\chi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ un difféomorphisme de classe C^∞ .*

Pour tout $y_0 \in \Omega_2$, on a

$$\delta_{y_0} \circ \chi = |\det(D\chi(x_0))|^{-1} \delta_{x_0}, \quad \text{où } \chi(x_0) = y_0.$$

Par exemple, lorsque $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbf{R}^N$ et $\chi : x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \neq 0$, on trouve que

$$\delta_0 \circ (\lambda I) = |\lambda|^{-N} \delta_0.$$

Cette formule s'étend sans difficulté aux dérivées successives de la masse de Dirac :

$$(\partial^\alpha \delta_0) \circ (\lambda I) = |\lambda|^{-N-|\alpha|} \partial^\alpha \delta_0$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$.

3.4.5 Dérivation/Intégration sous le crochet de dualité

Les deux énoncés suivants généralisent, d'une part le théorème de dérivation sous le signe somme, et d'autre part le théorème de Fubini.

Proposition 3.4.21 (Dérivation sous le crochet de dualité) *Soient un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et une fonction test $\phi \in C^\infty(\Omega_x \times \mathbf{R}_y^n)$ à support dans $K \times \mathbf{R}^n$, où K est compact dans Ω . Alors la fonction*

$$y \mapsto \langle T, \phi(\cdot, y) \rangle \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbf{R}^n$$

et l'on a

$$\partial_y^\alpha \langle T, \phi(\cdot, y) \rangle = \langle T, \partial_y^\alpha \phi(\cdot, y) \rangle.$$

Lorsque $T = T_f$ avec $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, l'énoncé ci-dessus se réduit au fait que

$$y \mapsto \int_{\Omega} f(x) \phi(x, y) dx \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbf{R}^n$$

et que

$$\partial_y^\alpha \int_{\Omega} f(x) \phi(x, y) dx = \int_{\Omega} f(x) \partial_y^\alpha \phi(x, y) dx.$$

Ce cas particulier de la proposition ci-dessus se ramène donc à un énoncé de dérivation sous le signe somme.

Démonstration. Soit $y_0 \in \mathbf{R}^n$; écrivons la formule de Taylor à l'ordre 1 en y_0 pour la fonction $y \mapsto \phi(x, y)$:

$$\phi(x, y_0 + h) = \phi(x, y_0) + \sum_{i=1}^n \partial_{y_i} \phi(x, y_0) h_i + r(x, y_0, h)$$

avec

$$r(x, y_0, h) = 2 \sum_{|\alpha|=2} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t) \partial_y^\alpha \phi(x, y_0 + th) dt.$$

On a $\text{supp}(\phi) \subset K \times \mathbf{R}^n$ où K est compact dans Ω , de sorte que, pour tout $h \in \mathbf{R}^n$, la fonction $x \mapsto r(x, y_0, h)$ est à support dans K . D'autre part, pour tout $x \in K$ et tout $h \in \mathbf{R}^n$ tel que $|h| \leq 1$, on a, par dérivation sous le signe somme dans l'intégrale qui définit $r(x, y_0, h)$:

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha r(x, y_0, h)| &\leq \sum_{|\beta|=2} |h|^\beta \sup_{x \in K, |y-y_0| \leq 1} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \phi(x, y)| \\ &\leq \frac{n(n+1)}{2} |h|^2 \max_{|\beta| \leq 2} \sup_{x \in K, |y-y_0| \leq 1} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \phi(x, y)|. \end{aligned}$$

Alors

$$\langle T, \phi(\cdot, y_0 + h) \rangle = \langle T, \phi(\cdot, y_0) \rangle + \sum_{i=1}^n \langle T, \partial_{y_i} \phi(\cdot, y_0) \rangle h_i + \langle T, r(\cdot, y_0, h) \rangle,$$

et

$$|\langle T, r(\cdot, y_0, h) \rangle| \leq C_K |h|^2 \max_{|\alpha| \leq p_K, |\beta|=2} \sup_{x \in K, |y-y_0| \leq 1} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \phi(x, y)| = O(|h|^2)$$

lorsque $|h| \rightarrow 0$, où C_K et p_K sont les constantes apparaissant dans la condition de continuité de T .

Par conséquent

$$\langle T, \phi(\cdot, y_0 + h) \rangle = \langle T, \phi(\cdot, y_0) \rangle + \sum_{i=1}^n \langle T, \partial_{y_i} \phi(\cdot, y_0) \rangle h_i + O(|h|^2),$$

ce qui montre que la fonction

$$y \mapsto \langle T, \phi(\cdot, y) \rangle$$

est différentiable sur \mathbf{R}^n , et que ses dérivées partielles sont

$$\partial_{y_i} \langle T, \phi(\cdot, y) \rangle = \langle T, \partial_{y_i} \phi(\cdot, y) \rangle, \quad \text{pour tout } y \in \mathbf{R}^n.$$

En itérant cet argument par récurrence sur l'ordre de la dérivation, on aboutit à l'énoncé de la proposition. ■

En fait, la démonstration ci-dessus peut se résumer ainsi : pour toute suite $(h_m)_{m \geq 0}$ de \mathbf{R}^n convergeant vers 0 lorsque $m \rightarrow \infty$, la suite de fonctions test $(\Phi_m)_{m \geq 1}$ définie par

$$\Phi_m(x) := \frac{1}{|h_m|} (\phi(x, y_0 + h_m) - \phi(x, y_0) - \nabla_y \phi(x, y_0) \cdot h_m)$$

vérifie

$$\Phi_m \rightarrow 0 \text{ dans } C_c^\infty(\Omega) \text{ lorsque } m \rightarrow \infty.$$

Par continuité séquentielle de T (cf. Proposition 3.2.9) on conclut que

$$\left\langle T, \frac{1}{|h_m|} (\phi(x, y_0 + h_m) - \phi(x, y_0) - \nabla_y \phi(x, y_0) \cdot h_m) \right\rangle \rightarrow 0$$

lorsque $m \rightarrow \infty$. Comme ceci vaut pour toute suite $(h_m)_{m \geq 0}$ de \mathbf{R}^n convergeant vers 0, il s'ensuit que

$$\left\langle T, \frac{1}{|h|} (\phi(x, y_0 + h) - \phi(x, y_0) - \nabla_y \phi(x, y_0) \cdot h) \right\rangle \rightarrow 0$$

lorsque $|h| \rightarrow 0$.

Proposition 3.4.22 (Intégration sous le crochet de dualité) *Soient un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et une fonction test $\phi \in C_c^\infty(\Omega_x \times \mathbf{R}_y^n)$.*

Alors

$$\int_{\mathbf{R}^n} \langle T, \phi(\cdot, y) \rangle dy = \left\langle T, \int_{\mathbf{R}^n} \phi(\cdot, y) dy \right\rangle.$$

Démonstration. Commençons par traiter le cas où $n = 1$.

Par hypothèse, il existe K compact dans Ω et $R > 0$ tels que ϕ soit à support dans $K \times [-R, R]$.

Soit maintenant $\zeta \in C^\infty(\mathbf{R})$ à support dans $[-R, R]$ et telle que

$$\int_{\mathbf{R}} \zeta(x) dx = 1.$$

Considérons la fonction

$$\psi(x, y) = \phi(x, y) - \zeta(y) \int_{\mathbf{R}} \phi(x, z) dz.$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, il est clair que la fonction $\psi \in C_c^\infty(\Omega \times \mathbf{R})$ et vérifie

$$\text{supp}(\psi) \subset K \times [-R, R] \text{ et } \int_{\mathbf{R}} \psi(x, y) dy = 0 \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

En particulier, la fonction Ψ définie par

$$\Psi(x, y) = \int_{-\infty}^y \psi(x, z) dz$$

est telle que

$$\Psi \in C^\infty(\Omega, \mathbf{R}) \text{ et } \text{supp}(\Psi) \subset K \times [-R, R].$$

Vérifions que

$$\langle T, \Psi(\cdot, y) \rangle = \int_{-\infty}^y \langle T, \psi(\cdot, z) \rangle dz, \quad \text{pour tout } y \in \mathbf{R}.$$

Par dérivation sous le crochet de dualité (Proposition 3.4.21 ci-dessus), on montre que les fonctions de y figurant dans chaque membre de l'égalité ci-dessus sont de classe C^∞ sur \mathbf{R} et ont même dérivée

$$y \mapsto \langle T, \psi(\cdot, y) \rangle.$$

Ces deux fonctions diffèrent donc d'une constante.

De plus, ces deux fonctions sont identiquement nulles pour $y < -R$, car $\text{supp} \psi$ et $\text{supp}(\Psi) \subset K \times [-R, R]$: on en déduit qu'elles coïncident pour tout $y \in \mathbf{R}$.

En particulier, on a

$$\int_{\mathbf{R}} \langle T, \psi(\cdot, y) \rangle dy = \int_{-\infty}^R \langle T, \psi(\cdot, y) \rangle dy = \left\langle T, \Psi(x, R) \right\rangle = 0.$$

Or, par définition de ψ

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \langle T, \psi(\cdot, y) \rangle dy &= \int_{\mathbf{R}} \langle T, \phi(\cdot, y) \rangle dy - \left\langle T, \int_{\mathbf{R}} \phi(\cdot, z) dz \right\rangle \int_{\mathbf{R}} \zeta(y) dy \\ &= \int_{\mathbf{R}} \langle T, \phi(\cdot, y) \rangle dy - \left\langle T, \int_{\mathbf{R}} \phi(\cdot, z) dz \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat dans le cas $n = 1$.

Pour le cas où l'entier $n > 1$, on procède par récurrence à partir du cas $n = 1$ en intégrant successivement par rapport à toutes les composantes de y et en appliquant le théorème de Fubini. ■

3.4.6 Produit de distributions

Dans tous les exemples précédents, on a vu qu'un grand nombre d'opérations bien connues sur les fonctions se généralisent facilement au cas des distributions.

Malheureusement, toutes les opérations non linéaires que l'on connaît sur les fonctions continues ne se généralisent pas au cas des distributions.

Un premier exemple est celui du produit usuel des fonctions à valeurs réelles ou complexes, qui, à deux fonctions $f, g : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} définies sur un ouvert Ω de \mathbf{R}^N , associe la fonction

$$fg : \Omega \ni x \mapsto f(x)g(x) \in \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{C}.$$

Il n'existe aucun moyen satisfaisant d'étendre cette opération aux distributions, sauf dans certains cas particuliers.

Par exemple, s'il paraît tout à fait naturel de poser

$$\delta_{x_1}\delta_{x_2} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \text{ lorsque } x_1 \neq x_2,$$

il n'est pas possible de donner un sens à l'expression

$$(\delta_{x_0})^2 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N),$$

sans risquer de se heurter à de graves contradictions.

Par exemple, on pourrait définir, dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$,

$$(\delta_0)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_0 \delta_{1/n} = 0$$

d'après la remarque ci-dessus. Mais le même principe commanderait alors de définir

$$(\delta_0)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\zeta_n \delta_0)$$

lorsque ζ_n est une suite régularisante définie en posant

$$\zeta_n(x) = n\zeta(nx)$$

où $\zeta \in C^\infty(\mathbf{R})$ vérifie

$$\text{supp}(\zeta) \subset [-1, 1], \quad \zeta > 0 \text{ sur }]-1, 1[, \quad \int_{\mathbf{R}} \zeta(x) dx = 1.$$

Or, comme $\zeta_n(0) = n\zeta(0) \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, la suite $\zeta_n \delta_0 = n\zeta(0)\delta_0$ ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Dans le même ordre d'idées, il n'est pas possible de donner un sens à l'expression

$$H\delta_0 \text{ où } H = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} \text{ est la fonction d'Heaviside.}$$

En effet, comme $H^n = H$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et que $H' = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, la formule de Leibnitz donnerait

$$\delta_0 = H' = (H^2)' = 2H\delta_0 = (H^3)' = 3H^2\delta_0 = 3H\delta_0,$$

d'où on tirerait

$$H\delta_0 = \frac{1}{2}\delta_0 = \frac{1}{3}\delta_0,$$

ce qui est évidemment absurde.

Plus généralement, il n'est pas possible de donner un sens à $F(T)$ pour $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ mais non affine et pour T distribution quelconque sur un ouvert de \mathbf{R}^N .

En résumé, la construction des distributions par dualité à partir d'un espace de fonctions indéfiniment différentiables permet de dériver toute distribution autant de fois qu'on le souhaite. Malheureusement, avec cette construction, on perd le calcul non linéaire qui existe sur les fonctions continues.

3.5 La formule des sauts et ses variantes

Le calcul des distributions permet de manipuler de façon systématique des fonctions régulières par morceaux dans le contexte des équations aux dérivées partielles. Un exemple bien connu de ce type de situation est le cas des ondes de choc en mécanique des fluides, sur lequel nous reviendrons ultérieurement.

3.5.1 Formule des sauts en dimension $N = 1$

On cherche à calculer la dérivée au sens des distributions d'une fonction de classe C^1 par morceaux, n'ayant que des discontinuités de première espèce³.

Théorème 3.5.1 (Formule des sauts en dimension 1) *Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^1 par morceaux, n'ayant que des discontinuités de première espèce, et dont on note*

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

les points de discontinuité.

La dérivée au sens des distributions de la fonction f est donnée par la formule

$$f' = \{f'\} + \sum_{k=1}^n (f(a_k + 0) - f(a_k - 0)) \delta_{a_k}$$

où la notation $\{f\}$ désigne⁴

$$\{f'\} = \left(f|_{\mathbf{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}} \right)',$$

3. Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , où I est un intervalle ouvert de \mathbf{R} . On dit que f présente une discontinuité de première espèce en un point $a \in I$ s'il existe $\epsilon > 0$ tel que f soit continue sur $]a - \epsilon, a[\cup]a, a + \epsilon[$, que f admette des limites finies à gauche et à droite de a , notées resp. $f(a - 0)$ et $f(a + 0)$, et enfin que $f(a - 0) \neq f(a + 0)$.

4. On remarquera que $\{f'\}$ n'est pas définie sur \mathbf{R} , mais seulement sur $\mathbf{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, où elle est continue. En particulier, $\{f'\}$ est une fonction mesurable définie p.p. sur \mathbf{R} . Par hypothèse, f' est bornée au voisinage de ses points de discontinuité, de sorte que $\{f'\}$ est localement intégrable et définit donc bien une distribution sur \mathbf{R} .

c'est-à-dire que

$$\{f'\}(x) = f'(x) \text{ pour tout } x \in \mathbf{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Démonstration. Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$; calculons

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbf{R}} f(x)\phi'(x)dx &= - \int_{-\infty}^{a_1} f(x)\phi'(x)dx \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\phi'(x)dx - \int_{a_n}^{\infty} f(x)\phi'(x)dx. \end{aligned}$$

Par hypothèse, f est de classe C^1 sur $]a_k, a_{k+1}[$ et se prolonge par continuité à $[a_k, a_{k+1}]$ pour tout $k = 1, \dots, n-1$. En intégrant par parties, on trouve que

$$\begin{aligned} - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\phi'(x)dx &= - \left[f(x)\phi(x) \right]_{a_k}^{a_{k+1}} + \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(x)\phi(x)dx \\ &= - (f(a_{k+1} - 0)\phi(a_{k+1}) - f(a_k + 0)\phi(a_k)) + \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(x)\phi(x)dx, \end{aligned}$$

tandis que

$$- \int_{-\infty}^{a_1} f(x)\phi'(x)dx = -f(a_1 - 0)\phi(a_1) + \int_{-\infty}^{a_1} f'(x)\phi(x)dx$$

et

$$- \int_{a_n}^{\infty} f(x)\phi'(x)dx = f(a_n + 0)\phi(a_n) + \int_{a_n}^{\infty} f'(x)\phi(x)dx.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbf{R}} f(x)\phi'(x)dx &= -f(a_1 - 0)\phi(a_1) + f(a_n + 0)\phi(a_n) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (f(a_k + 0)\phi(a_k) - f(a_{k+1} - 0)\phi(a_{k+1})) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{a_1} f'(x)\phi(x)dx + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(x)\phi(x)dx + \int_{a_n}^{\infty} f'(x)\phi(x)dx. \end{aligned}$$

En regroupant d'une part les intégrales au membre de gauche et d'autre part tous les termes faisant intervenir $\phi(a_k)$ pour tout $k = 1, \dots, n$, on aboutit à la relation

$$- \int_{\mathbf{R}} f(x)\phi'(x)dx = \int_{\mathbf{R}} f'(x)\phi(x)dx + \sum_{k=1}^n (f(a_k + 0) - f(a_k - 0))\phi(a_k),$$

qui signifie précisément que

$$f' = \{f'\} + \sum_{k=1}^n (f(a_k + 0) - f(a_k - 0))\delta_{a_k} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}).$$

■

3.5.2 Formule de Green-Riemann : rappels

Nous allons rappeler ici la formule de Green-Riemann telle qu'elle figure au programme des classes préparatoires. Nous aurons besoins dans la suite d'une généralisation de cette formule, qui s'interprètera de façon très naturelle dans le cadre des distributions.

Une 1-forme différentielle de classe C^k sur U ouvert de \mathbf{R}^N est une application de classe C^k de U dans l'espace $(\mathbf{R}^N)^*$ des formes linéaires sur \mathbf{R}^N .

Exemple 3.5.2 *Pour toute fonction f de classe C^{k+1} sur U à valeurs dans \mathbf{R} , sa différentielle notée df est une 1-forme différentielle de classe C^k sur U . En effet, $df(x)$ est, pour tout $x \in U$, une application linéaire de \mathbf{R}^N dans \mathbf{R} , c'est-à-dire une forme linéaire sur \mathbf{R}^N . En particulier, si $f(x) = x_i$ où $i = 1, \dots, N$, on a $df(x) = e_i^*$ (où (e_1^*, \dots, e_N^*) est la base duale de la base canonique (e_1, \dots, e_N) de \mathbf{R}^N .)*

Notation. Dans toute la suite, on notera dx_i la différentielle de la fonction $x \mapsto x_i$, c'est-à-dire la 1-forme différentielle constante qui associe à tout point $x \in U$ la forme linéaire e_i^* .

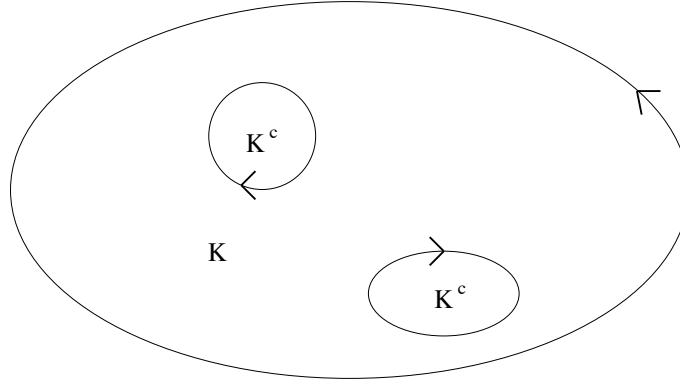
Exemple 3.5.3 *Une 1-forme différentielle sur U n'est pas toujours de la forme df , où f est une fonction de classe C^1 sur U à valeurs réelles. Plus généralement, si f est une fonction de classe C^{k+1} sur U à valeurs dans \mathbf{R} et g une fonction de classe C^k sur U à valeurs dans \mathbf{R} , alors gdf est une 1-forme de classe C^k sur U . Ainsi, $x_2 dx_1$ est une 1-forme différentielle sur \mathbf{R}^2 qui n'est pas de la forme df avec f de classe C^1 sur \mathbf{R}^2 .*

Soit ω une 1-forme différentielle de classe C^k sur U ; pour tout $x \in U$, on note $\omega_i(x)$ la i -ème coordonnée de la forme linéaire $\omega(x)$ dans la base (e_1^*, \dots, e_N^*) (duale de la base canonique de \mathbf{R}^N .) Autrement dit, $\omega_i(x) = \omega(x) \cdot e_i$ où e_i est le i -ème vecteur de la base canonique de \mathbf{R}^N , et comme par hypothèse ω est une 1-forme de classe C^k , la fonction $\omega_i : x \mapsto \omega(x) \cdot e_i$ est de classe C^k sur U . Ainsi, toute 1-forme différentielle de classe C^k sur U ouvert de \mathbf{R}^N s'écrit de façon unique comme

$$\omega = \sum_{i=1}^N \omega_i dx_i, \quad \text{avec } \omega_1, \dots, \omega_N \in C^k(U).$$

Venons-en à la notion de circulation d'une 1-forme différentielle sur un arc de courbe. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^N$ un arc paramétré de classe C^1 , et ω une 1-forme différentielle de classe C^0 sur U . On suppose que l'arc de courbe $\gamma([a, b]) \subset U$. La circulation de ω sur l'arc paramétré γ est

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

FIGURE 3.1 – Orientation du bord d'un compact de \mathbf{R}^2 .

Autrement dit, si

$$\omega = \sum_{i=1}^N \omega_i dx_i, \quad \text{et } \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t)) \text{ pour tout } t \in [a, b],$$

on a

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^N \int_a^b \omega_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt.$$

Dans le cas où $N = 2$, soit K compact de \mathbf{R}^2 dont la frontière est une réunion finie de courbes de Jordan régulières $\gamma_1, \dots, \gamma_m$. (Rappelons qu'une courbe de Jordan de \mathbf{R}^2 est une application continue $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbf{R}^2$ injective sur $[0, L[$ et telle que $\gamma(0) = \gamma(L)$, et que γ est dite régulière si $\gamma \in C^1([0, L]; \mathbf{R}^2)$ et que $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0, L]$.) Supposons que, lorsque chaque courbe γ_i est parcourue dans le sens des t croissants, le compact K est localement à gauche de la courbe γ_i . De façon analogue, si $\nu(\gamma_i(t))$ est le vecteur unitaire normal à la courbe γ_i au point $\gamma_i(t)$ dirigé vers l'extérieur de K , la base orthogonale $(\nu(\gamma_i(t)), \gamma'_i(t))$ est directe. Si tel est le cas, on dit que la courbe γ_i est positivement orientée par le champ de vecteurs normaux ν .

Soit maintenant $\omega = Pdx + Qdy$ une 1-forme de classe C^0 sur un ouvert U de \mathbf{R}^2 contenant le compact K . Alors

Formule de Green-Riemann.

$$\sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_K (\partial_x Q - \partial_y P)(x, y) dx dy$$

Nous allons maintenant écrire cette formule sous une forme légèrement différente. Pour $i = 1, \dots, m$, on a

$$\int_{\gamma_i} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_0^{L_i} (P(\gamma(t)) \gamma'_{i,x}(t) + Q(\gamma(t)) \gamma'_{i,y}(t)) dt.$$

Notons

$$\tau(\gamma_i(t)) = \frac{\gamma'_i(t)}{|\gamma'_i(t)|} = \frac{(\gamma'_{i,x}(t), \gamma'_{i,y}(t))}{\sqrt{\gamma'_{i,x}(t)^2 + \gamma'_{i,y}(t)^2}}$$

le vecteur unitaire tangent à la courbe γ_i orienté dans le sens des t croissants ;
le vecteur

$$\nu(\gamma_i(t)) = \frac{(\gamma'_{i,y}(t), -\gamma'_{i,x}(t))}{\sqrt{\gamma'_{i,x}(t)^2 + \gamma'_{i,y}(t)^2}}$$

est l'image de $\tau(\gamma_i(t))$ par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Autrement dit, $(\nu(\gamma_i(t)), \tau(\gamma_i(t)))$,
ou $(\nu(\gamma_i(t)), \gamma'_i(t))$ sont des bases orthogonales directes, de sorte que, d'après
l'hypothèse faite sur l'orientation, $\nu(\gamma_i(t))$ est le vecteur unitaire normal à la
frontière ∂K au point $\gamma_i(t)$ dirigé vers l'extérieur de K .

Ainsi

$$\begin{aligned} P(\gamma(t))\gamma'_{i,x}(t) + Q(\gamma(t))\gamma'_{i,y}(t)dt &= (-Q(\gamma_i(t)), P(\gamma_i(t))) \cdot \nu(\gamma_i(t))|\gamma'_i(t)|dt \\ &= (Q(\gamma_i(t)), -P(\gamma_i(t))) \cdot \nu(\gamma_i(t))ds(\gamma_i(t)) \end{aligned}$$

où s une abscisse curviligne sur la courbe γ_i croissante en fonction de t . D'autre
part

$$\partial_x Q(x, y) - \partial_y P(x, y) = \operatorname{div}(Q, -P)(x, y).$$

Autrement dit, la formule de Green-Riemann se met sous la forme suivante,
où $\nu(\sigma)$ désigne le vecteur unitaire normal à ∂K au point σ , dirigé vers l'extérieur
de K :

Formule de Green-Riemann : 2ème forme

$$\int_{\partial K} (Q, -P)(\sigma) \cdot \nu(\sigma) ds(\sigma) = \iint_K \operatorname{div}(Q, -P)(x, y) dx dy$$

C'est précisément cette forme de la formule de Green-Riemann que nous aurons
besoin de généraliser en dimension > 2 .

3.5.3 Formule de Green(-Ostrogradsky)

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert à bord de classe C^1 de \mathbf{R}^N . Rappelons que ceci signifie
que

- (a) la frontière $\partial\Omega$ de Ω est une hypersurface de classe C^1 de \mathbf{R}^N ; et
- (b) localement, Ω est d'un seul côté de $\partial\Omega$.

La condition (b) veut dire la chose suivante : pour tout $x_0 \in \partial\Omega$, il existe un
ouvert ω_0 de \mathbf{R}^N tel que $x_0 \in \omega_0$ et une fonction ρ_0 de classe C^1 sur ω_0 vérifiant
les conditions suivantes

$$\nabla \rho_0(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in \omega_0$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \partial\Omega \cap \omega_0 &= \{x \in \omega_0 \mid \rho_0(x) = 0\}, \\ \Omega \cap \omega_0 &= \{x \in \omega_0 \mid \rho_0(x) < 0\}. \end{aligned}$$

Le vecteur normal unitaire au point $x \in \partial\Omega \cap \omega_0$ pointant vers l'extérieur de Ω est

$$\nu(x) = \frac{\nabla\rho_0(x)}{|\nabla\rho_0(x)|}, \quad x \in \partial\Omega \cap \omega_0.$$

Autrement dit, $\Omega \cup \partial\Omega$ est une sous-variété à bord de \mathbf{R}^N de dimension N (voir la Définition 9.8 de [17]).

Etant donné un ouvert à bord Ω de classe C^1 de \mathbf{R}^N , sa frontière $\partial\Omega$ est une hypersurface de \mathbf{R}^N , dont on note ν le champ unitaire normal dirigé vers l'extérieur de Ω , et $d\sigma$ l'élément de surface — cf. Appendice, section 6.2.

La deuxième forme de la formule de Green-Riemann, rappelée ci-dessus, se généralise alors immédiatement en dimension $N > 2$ quelconque de la manière suivante. La formule générale ainsi obtenue est connue sous le nom de formule de Green, ou d'Ostrogradsky, ou encore de Green-Ostrogradsky :

Théorème 3.5.4 (Formule de Green) *Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert à bord de classe C^1 et V , un champ de vecteurs de classe C^1 à support compact sur $\bar{\Omega}$. Alors*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} V dx = \int_{\partial\Omega} V \cdot \nu d\sigma,$$

où $\nu(x)$ est le vecteur unitaire normal au point x de $\partial\Omega$ pointant vers l'extérieur de Ω , et où $d\sigma$ est l'élément de surface sur $\partial\Omega$.

Une conséquence immédiate de la formule de Green est l'énoncé suivant :

Corollaire 3.5.5 *Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert à bord de classe C^1 et $\phi \in C_c^1(\bar{\Omega})$. Alors*

$$\int_{\Omega} \partial_{x_j} \phi dx = \int_{\partial\Omega} \phi \nu_j d\sigma, \quad j = 1, \dots, N,$$

où $\nu(x)$ est le vecteur unitaire normal au point x de $\partial\Omega$ pointant vers l'extérieur de Ω , et où $d\sigma$ est l'élément de surface sur $\partial\Omega$.

Evidemment, l'énoncé du Corollaire 3.5.5 n'est rien d'autre que la formule de Green usuelle appliquée au champ de vecteurs

$$V(x) = \phi(x)e_j \text{ où } e_j \text{ est le } j\text{-ième vecteur de la base canonique de } \mathbf{R}^N.$$

Réciproquement, en appliquant le Corollaire 3.5.5 à chaque composante de V et en additionnant membre à membre les égalités ainsi obtenues, on aboutit à la formule de Green usuelle du Théorème 3.5.4.

On renvoie le lecteur intéressé à [17], Théorème 9.10, pour une démonstration de la formule de Green en dimension 3 dans le langage des formes différentielles — le cas d'une dimension quelconque étant identique.

Remarque. Le lecteur qui aurait du mal à se souvenir de l'orientation du vecteur normal intervenant dans la formule de Green aura intérêt à comparer cette dernière avec la formule usuelle

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a),$$

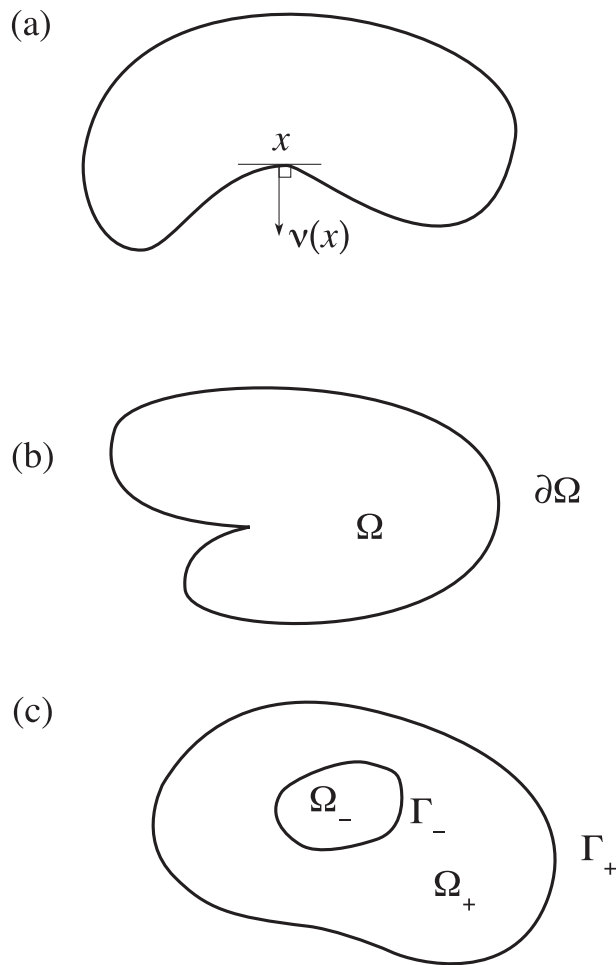


FIGURE 3.2 – (a) Exemple d'ouvert à bord de classe C^1 dans \mathbf{R}^2 ; (b) L'ouvert Ω n'est pas un ouvert à bord de classe C^1 , car sa frontière $\partial\Omega$ n'est pas une courbe de classe C^1 ; (c) l'ouvert $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$ n'est pas un ouvert à bord de classe C^1 bien que $\partial\Omega = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ soit une (union de deux) courbe(s) de classe C^1 dans \mathbf{R}^2 , car Ω se trouve des deux côtés de la composante Γ^- de sa frontière.

valable pour toute fonction $f \in C^1([a, b])$. Ici, $\bar{\Omega} = [a, b]$ de sorte que $\partial\Omega = \{a, b\}$. L'espace vectoriel des vecteurs tangents à $\partial\Omega$ en a (resp. en b) est réduit au vecteur nul. Ainsi, le vecteur "normal" unitaire à $\partial\Omega$ en a pointant vers l'extérieur de Ω est $\nu(a) = -1$; de même $\nu(b) = +1$ et la formule de Green dans ce cas très simple se réduit bien à la formule ci-dessus.

3.5.4 Formule des sauts en dimension quelconque

Le Corollaire 3.5.5 peut encore s'interpréter comme un calcul de dérivée au sens des distributions.

Théorème 3.5.6 (Formule de Green dans \mathcal{D}') Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert à bord de classe C^1 . Alors

$$\partial_{x_j}(\mathbf{1}_\Omega) = -\nu_j \sigma, \quad j = 1, \dots, N,$$

où $\nu(x)$ est le vecteur unitaire normal au point x de $\partial\Omega$ pointant vers l'extérieur de Ω , et où $\sigma \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ est la distribution de simple couche définie par

$$\langle \sigma, \phi \rangle = \int_{\partial\Omega} \phi d\sigma,$$

$d\sigma$ désignant l'élément de surface sur $\partial\Omega$.

A partir de là, il est très facile de calculer la dérivée au sens des distributions d'une fonction de classe C^1 par morceaux ayant une discontinuité de première espèce à travers l'hypersurface $\partial\Omega$.

Théorème 3.5.7 (Formule des sauts dans \mathbf{R}^N) Soient Ω ouvert à bord de classe C^1 de \mathbf{R}^N dont on note $\Sigma = \partial\Omega$ le bord, et f une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}^N \setminus \Sigma$ telle que

- (a) la restriction de f à Ω se prolonge en une fonction de classe C^1 sur un voisinage ouvert de $\bar{\Omega}$, et
- (b) la restriction de f à $\mathbf{R}^N \setminus \bar{\Omega}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur un voisinage ouvert de $\mathbf{R}^N \setminus \Omega$.

Alors la fonction f est localement intégrable sur \mathbf{R}^N et on a

$$\partial_{x_j} f = \{\partial_{x_j} f\} + [f]_\Sigma \nu_j \sigma \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \text{ pour } j = 1, \dots, N.$$

Dans cette formule, on a noté $\{\partial_{x_j} f\}$ la fonction continue par morceaux sur \mathbf{R}^N définie par la formule⁵

$$\{\partial_{x_j} f\}(x) = \partial_{x_j} f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^N \setminus \Sigma,$$

5. Comme dans l'énoncé du Théorème 3.5.1, $\{\partial_{x_j} f\} = \partial_{x_j} (f|_{\mathbf{R}^N \setminus \Sigma})$ n'est définie que sur $\mathbf{R}^N \setminus \Sigma$, où elle est continue et bornée au voisinage de tout compact de $\partial\Sigma$. Ainsi $\{\partial_{x_j} f\}$ est localement intégrable et définit donc bien une distribution sur \mathbf{R}^N .

et $[f]_\Sigma$ le saut de f à travers l'hypersurface Σ dans la direction ν :

$$[f]_\Sigma(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (f(x + t\nu(x)) - f(x - t\nu(x))), \quad x \in \Sigma.$$

Comme dans les énoncés précédents, ν désigne le champ des vecteurs unitaires normaux à Σ et pointant vers l'extérieur de Ω . Enfin, σ est la mesure de surface sur Σ , c'est-à-dire la distribution de simple couche définie par

$$\langle \sigma, \phi \rangle = \int_\Sigma \phi d\sigma,$$

(voir Exemple 3.2.5) où $d\sigma$ désigne l'élément de surface sur Σ .

Démonstration. Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$; la formule de Green montre que

$$\begin{aligned} - \int_\Omega f(x) \partial_{x_j} \phi(x) dx &= - \int_\Omega \partial_{x_j} (f\phi)(x) dx + \int_\Omega \phi(x) \partial_{x_j} f(x) dx \\ &= - \int_\Sigma f^-(x) \phi(x) \nu_j(x) d\sigma(x) + \int_\Omega \phi(x) \partial_{x_j} f(x) dx \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbf{R}^N \setminus \Omega} f(x) \partial_{x_j} \phi(x) dx &= - \int_{\mathbf{R}^N \setminus \Omega} \partial_{x_j} (f\phi)(x) dx + \int_{\mathbf{R}^N \setminus \Omega} \phi(x) \partial_{x_j} f(x) dx \\ &= + \int_\Sigma f^+(x) \phi(x) \nu_j(x) d\sigma(x) + \int_{\mathbf{R}^N \setminus \Omega} \phi(x) \partial_{x_j} f(x) dx \end{aligned}$$

où l'on a noté

$$f^+(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x + t\nu(x)) \text{ et } f^-(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x - t\nu(x)).$$

En additionnant membre à membre ces deux égalités, on trouve que

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbf{R}^N} f(x) \partial_{x_j} \phi(x) dx &= \int_\Sigma (f^+(x) - f^-(x)) \phi(x) \nu_j(x) d\sigma(x) \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}^N} \phi(x) \partial_{x_j} f(x) dx, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Le premier terme au membre de droite est $\langle [f]_\Sigma \nu_j \sigma, \phi \rangle$; le second est $\langle \{\partial_{x_j} f\}, \phi \rangle$: on a donc obtenu la formule annoncée. ■

Nous avons évoqué au début de cette section le cas des ondes de choc dans les fluides compressibles non visqueux comme motivation pour l'étude de la formule des sauts ci-dessus. Nous allons maintenant examiner cet exemple en détail.

Exemple 3.5.8 (Relation de Rankine-Hugoniot) *On considère ici l'écoulement monodimensionnel d'un fluide compressible; on notera $\rho(t, x)$ et $\theta(t, x)$ la densité et la température du fluide au point x et à l'instant t , ainsi que*

$u(t, x) \in \mathbf{R}^3$ la vitesse du fluide au point x et à l'instant t . L'évolution de ces quantités obéit au système des équations d'Euler

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho u_k) + \operatorname{div}_x(\rho u_k u) + \partial_{x_k} p(\rho, \theta) &= 0, \quad k = 1, 2, 3 \\ \partial_t \left(\rho \left(\frac{1}{2} |u|^2 + w(\rho, \theta) \right) \right) + \operatorname{div}_x \left(\rho u \left(\frac{1}{2} |u|^2 + w(\rho, \theta) \right) + p(\rho, \theta) u \right) &= 0. \end{aligned}$$

où $p(\rho, \theta)$ est la pression du fluide lorsque la densité vaut ρ et la température vaut θ , et où $w(\rho, \theta)$ est l'énergie interne du fluide de densité ρ à la température θ .

On suppose pour simplifier que les fonctions ρ , θ et u_k pour $k = 1, 2, 3$ ne dépendent que des variables t et x_1 — et sont indépendantes des variables x_2 et x_3 , de sorte que les équations d'Euler ci-dessus se réduisent au système suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_{x_1}(\rho u_1) &= 0 \\ \partial_t(\rho u_1) + \partial_{x_1}(\rho u_1^2 + p(\rho, \theta)) &= 0 \\ \partial_t(\rho u_k) + \partial_{x_1}(\rho u_1 u_k) &= 0, \quad k = 2, 3, \\ \partial_t \left(\rho \left(\frac{1}{2} |u|^2 + w(\rho, \theta) \right) \right) + \partial_{x_1} \left(\rho u_1 \left(\frac{1}{2} |u|^2 + w(\rho, \theta) \right) + p(\rho, \theta) u_1 \right) &= 0 \end{aligned}$$

Les équations ci-dessus valent en tout point où les fonctions ρ , θ et u sont de classe C^1 — les équations d'état $p(\rho, \theta)$ et $w(\rho, \theta)$ étant supposées suffisamment régulières (au moins de classe C^1).

Mais, dans les écoulements compressibles, il existe aussi des ondes de choc. Typiquement, une onde de choc consiste en une surface mobile à travers laquelle les fonctions ρ , θ et u ont des discontinuités de première espèce.

Le système des EDP ci-dessus ne vaut donc pas sur une onde de choc. Mais il existe des relations, appelées relations de Rankine-Hugoniot, qui relient les valeurs des inconnues ρ , θ et u en amont et en aval du choc.

Supposons que la surface de choc est l'hyperplan d'équation $x_1 = st$, où s est la vitesse du choc. Notons (ρ^-, u^-, θ^-) les valeurs des inconnues pour $x_1 < st$ et (ρ^+, u^+, θ^+) les valeurs des mêmes inconnues pour $x_1 > st$. Les relations de Rankine-Hugoniot s'écrivent

$$\begin{aligned} \rho^+ u_1^+ - s \rho^+ &= \rho^- u_1^- - s \rho^- \\ \rho^+ (u_1^+)^2 + p(\rho^+, \theta^+) - s \rho^+ u_1^+ &= \rho^- (u_1^-)^2 + p(\rho^-, \theta^-) - s \rho^- u_1^- \\ (\rho^+ u_1^+ - s \rho^+) u_k^+ &= (\rho^- u_1^- - s \rho^-) u_k^-, \quad k = 2, 3 \\ \rho^+ u_1^+ \left(\frac{1}{2} |u^+|^2 + w(\rho^+, \theta^+) \right) + p(\rho^+, \theta^+) u_1^+ - s \rho^+ \left(\frac{1}{2} |u^+|^2 + w(\rho^+, \theta^+) \right) & \\ = \rho^- u_1^- \left(\frac{1}{2} |u^-|^2 + w(\rho^-, \theta^-) \right) + p(\rho^-, \theta^-) u_1^- - s \rho^- \left(\frac{1}{2} |u^-|^2 + w(\rho^-, \theta^-) \right) & \end{aligned}$$

Le calcul des distributions permet de ramener ces relations de Rankine-Hugoniot au système des équations d'Euler écrit au sens des distributions au voisinage de l'hypersurface de discontinuité.

Nous allons maintenant présenter ces relations de Rankine-Hugoniot dans un cadre général basé sur le calcul des distributions.

On considère donc un système d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$\partial_t U(t, x) + \partial_x F(U(t, x)) = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$$

où $U : \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ est le champ de vecteurs des quantités inconnues, et où $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ est une application de classe C^1 — qui est connue.

Par exemple, dans le cas des équations d'Euler, $n = 5$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho \left(\frac{1}{2} |u|^2 + w(\rho, \theta) \right) \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho u_1 \\ \rho u_1^2 + p(\rho, \theta) \\ \rho u_1 u_2 \\ \rho u_1 u_3 \\ \rho u_1 \left(\frac{1}{2} |u|^2 + w(\rho, \theta) \right) + p(\rho, \theta) u_1 \end{pmatrix}.$$

Supposons donc que la solution U présente une onde de choc matérialisée par une courbe (en fait une droite) de discontinuité Σ d'équation $x = st$. Notons

$$\begin{aligned} \Omega^+ &= \{(t, x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \mid x > st\}, \\ \Omega^- &= \{(t, x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \mid x < st\}, \\ \Sigma &= \{(t, x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \mid x = st\}, \end{aligned}$$

et supposons que les restrictions de U à Ω^+ ou Ω^- se prolongent en des applications de classe C^1 sur $\overline{\Omega^+}$ et $\overline{\Omega^-}$ respectivement à valeurs dans \mathbf{R}^n .

En appliquant la formule des sauts du Théorème 3.5.7 à travers Σ , on trouve que

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = \{\partial_t U + \partial_x F(U)\} + \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} [F(U) - sU]_{\Sigma} \sigma_{\Sigma}, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}),$$

où σ_{Σ} est la mesure de longueur portée par la droite Σ , c'est-à-dire la distribution définie sur \mathbf{R}^2 par la formule

$$\langle \sigma_{\Sigma}, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \phi(t, st) \sqrt{1+s^2} dt,$$

et où

$$[f]_{\Sigma}(t, st) = f(t, st+0) - f(t, st-0), \quad t \in \mathbf{R},$$

pour toute fonction f définie sur \mathbf{R}^2 présentant une discontinuité de première espèce à travers Σ .

Dire que U est solution du système d'EDP

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R})$$

c'est donc dire que

$$\{\partial_t U + \partial_x F(U)\} + \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} [F(U) - sU]_{\Sigma} \sigma_{\Sigma} = 0, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}).$$

En testant cette relation sur des fonctions test nulles au voisinage de la droite de choc Σ , on commence par montrer que

$$\{\partial_t U + \partial_x F(U)\} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}),$$

ce qui n'est rien d'autre que le système d'EDP de départ

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0 \text{ écrit sur } (\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}) \setminus \Sigma.$$

Par conséquent, l'égalité

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R})$$

équivalent aux deux conditions

$$\begin{aligned} \partial_t U + \partial_x F(U) &= 0 \text{ sur } (\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}) \setminus \Sigma, \\ [F(U) - sU]_\Sigma &= 0 \text{ sur } \Sigma. \end{aligned}$$

Autrement dit, les relations de Rankine-Hugoniot expriment le fait que le système d'EDP

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0$$

vaut globalement au sens des distributions, y compris au voisinage des hypersurfaces de discontinuités correspondant aux ondes de choc.

Exemple 3.5.9 (Ondes de choc pour l'équation de Hopf) *On a vu au chapitre 2 que les solutions de l'équation de Hopf*

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \partial_x u &= 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= u^{in}, \end{aligned}$$

développent des singularités en temps fini (sauf si la donnée initiale u^{in} est une fonction de classe C^1 sur \mathbf{R} telle que $(u^{in})'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.)

Écrivons cette équation sous la forme

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$$

de façon à pouvoir lui appliquer les considérations ci-dessus.

Alors, si u est une solution de l'équation de Hopf de classe C^1 par morceaux présentant une discontinuité de première espèce à travers la droite Σ d'équation $x = st$, on a

$$\frac{u_+^2}{2} - su_+ = \frac{u_-^2}{2} - su_-$$

en notant u_\pm les valeurs de u de part et d'autre de Σ . Comme, pour un vrai choc, on a $u_+ \neq u_-$, cette relation s'écrit encore

$$s = \frac{u_+ + u_-}{2},$$

c'est-à-dire que la vitesse du choc est la moyenne arithmétique des valeurs de la solution de part et d'autre de la discontinuité Σ .

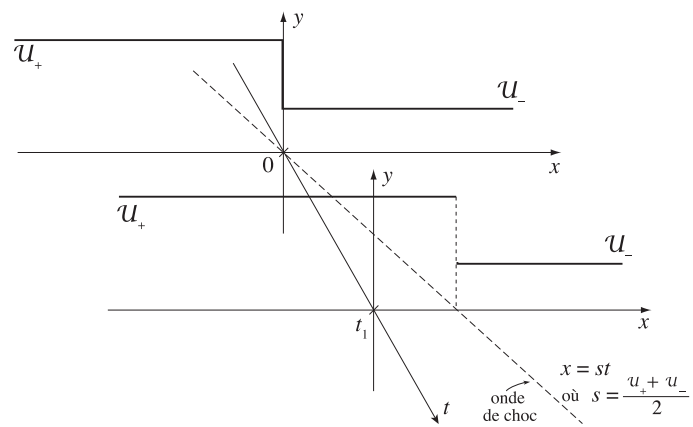


FIGURE 3.3 – Propagation d’une onde de choc et relation de Rankine-Hugoniot pour l’équation de Hopf

3.6 Distributions homogènes

Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$, on notera M_λ l'homothétie de \mathbf{R}^N de rapport λ :

$$M_\lambda : \mathbf{R}^N \ni x \mapsto \lambda x \in \mathbf{R}^N .$$

Soit Ω un cône ouvert de \mathbf{R}^N — c'est-à-dire un ouvert de \mathbf{R}^N tel que

$$M_\lambda(\Omega) \subset \Omega \text{ pour tout } \lambda > 0 .$$

Définition 3.6.1 (Distribution homogène de degré β) *On dira qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est homogène de degré β si, pour tout $\lambda > 0$,*

$$T \circ M_\lambda = \lambda^\beta T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) .$$

Cette définition étend évidemment au cas des distributions la définition usuelle pour les fonctions : en effet, une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ est dite homogène de degré β si, pour tout $\lambda > 0$

$$f(\lambda x) = \lambda^\beta f(x), \quad x \in \Omega .$$

Les distributions homogènes interviennent très souvent dans les applications physiques, car la relation d'homogénéité traduit comment varie une quantité physique lors d'un changement d'unité ou d'échelle.

Commençons par quelques exemples importants de distributions homogènes.

Exemple 3.6.2 (Fonctions homogènes de L^1_{loc}) *Toute fonction homogène f de degré β sur $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ se met sous la forme*

$$f(x) = |x|^\beta f\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad x \neq 0$$

de sorte qu'une fonction continue homogène non identiquement nulle de degré β est localement intégrable sur \mathbf{R}^N — et définit donc une distribution sur \mathbf{R}^N — si et seulement si $\beta > -N$.

En effet, la restriction de la fonction continue f à la sphère unité, qui est un compact de \mathbf{R}^N , est donc bornée, de sorte que

$$|f(x)| \leq C|x|^\beta, \quad \text{avec } C = \max_{|y|=1} |f(y)| .$$

D'autre part, en passant en coordonnées sphériques, on voit que

$$\int_{B(0,R)} |f(x)| dx = \int_0^R r^{\beta+N-1} dr \int_{\mathbf{S}^{N-1}} |f(y)| d\sigma(y)$$

où $d\sigma$ est l'élément de surface sur \mathbf{S}^{N-1} . Donc, si

$$\int_{B(0,R)} |f(x)| dx < \infty$$

c'est que

$$\int_0^R r^{\beta+N-1} dr < \infty \text{ ce qui équivaut à } \beta > -N,$$

faute de quoi

$$\int_{\mathbf{S}^{N-1}} |f(y)| d\sigma(y) = 0,$$

de sorte que $f = 0$ sur \mathbf{R}^N .

Exemple 3.6.3 (La masse de Dirac et ses dérivées) *On a déjà vu que*

$$\delta_0 \circ M_\lambda = \lambda^{-N} \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \text{ pour } \lambda > 0,$$

de sorte que la masse de Dirac à l'origine de \mathbf{R}^N est homogène de degré $-N$.

De même, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$ et tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$

$$\begin{aligned} \langle (\partial^\alpha \delta_0 \circ M_\lambda), \phi \rangle &= \langle \partial^\alpha \delta_0, \lambda^{-N} \phi(\cdot/\lambda) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_0, \lambda^{-N} \partial^\alpha (\phi(\cdot/\lambda)) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_0, \lambda^{-N-|\alpha|} (\partial^\alpha \phi)(\cdot/\lambda) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \lambda^{-N-|\alpha|} \partial^\alpha \phi(0) = \lambda^{-N-|\alpha|} \langle \partial^\alpha \delta_0, \phi \rangle \end{aligned}$$

de sorte que

$$(\partial^\alpha \delta_0) \circ M_\lambda = \lambda^{-N-|\alpha|} \partial^\alpha \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \text{ pour } \lambda > 0.$$

Autrement dit, la distribution $\partial^\alpha \delta_0$ est homogène de degré $-N - |\alpha|$ dans \mathbf{R}^N .

En réalité, le cas des dérivées découle de l'énoncé général suivant :

Proposition 3.6.4 (Homogénéité et dérivation) *Soit Ω cône ouvert de \mathbf{R}^N et T distribution homogène de degré β sur Ω . Alors, pour tout $j = 1, \dots, N$, la distribution*

$$\partial_{x_j} T \text{ est homogène de degré } \beta - 1.$$

Plus généralement, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$, la distribution

$$\partial_x^\alpha T \text{ est homogène de degré } \beta - |\alpha|.$$

Démonstration. Le premier énoncé entraîne le second par une récurrence triviale.

Démontrons donc ce premier énoncé. Pour tout $j = 1, \dots, N$, on a

$$\begin{aligned} \langle (\partial_{x_j} T) \circ M_\lambda, \phi \rangle &= \langle \partial_{x_j} T, \lambda^{-N} \phi(\cdot/\lambda) \rangle \\ &= -\langle T, \lambda^{-N} \partial_{x_j} (\phi(\cdot/\lambda)) \rangle \\ &= -\langle T, \lambda^{-N-1} (\partial_{x_j} \phi)(\cdot/\lambda) \rangle \\ &= -\lambda^{-1} \langle T \circ M_\lambda, \partial_{x_j} \phi \rangle \\ &= -\lambda^{-1} \langle \lambda^\beta T, \partial_{x_j} \phi \rangle = \lambda^{\beta-1} \langle \partial_{x_j} T, \phi \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

d'où

$$(\partial_{x_j} T) \circ M_\lambda = \lambda^{\beta-1} \partial_{x_j} T.$$

■

Voici un autre exemple important de distribution homogène de degré -1 sur \mathbf{R} .

Exemple 3.6.5 (Homogénéité de $\text{vp } \frac{1}{x}$) La distribution $\text{vp } \frac{1}{x}$ est évidemment homogène de degré -1 sur \mathbf{R} .

(Cela se voit facilement sur la formule

$$\left\langle \text{vp } \frac{1}{x}, \phi \right\rangle = \int_0^\infty \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$$

définissant $\text{vp } \frac{1}{x}$.)

Dans le même ordre d'idées, Hadamard a proposé une manière de renormaliser certaines intégrales divergentes, ce qui permet de définir les monômes de puissances non entières comme des distributions sur la droite réelle.

Exemple 3.6.6 (Parties finies d'Hadamard) Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour tout $a \in \mathbf{C}$, on pose

$$x_+^a = x^a \text{ si } x > 0, \quad x_+^a = 0 \text{ si } x \leq 0.$$

Considérons maintenant pour tout $a \in \mathbf{R}$ la fonction $x \mapsto x_+^a$. Cette fonction est évidemment continue sur \mathbf{R}^* et homogène de degré a sur \mathbf{R} . Elle est donc localement intégrable sur \mathbf{R} pour $a > -1$, et définit donc dans ce cas une distribution sur \mathbf{R} .

Dans le cas où $a < -1$ n'est pas un entier, on définit une distribution notée $\text{pf } x_+^a$ sur $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ en posant

$$\langle \text{pf } x_+^a, \phi \rangle = (-1)^k \int_0^\infty \frac{x^{a+k}}{(a+1)\dots(a+k)} \phi^{(k)}(x) dx$$

pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ et tout entier $k > -a - 1$.

La distribution $\text{pf } x_+^a$ est homogène de degré a pour tout $a < -1$ non entier.

Il faut vérifier que cette définition est indépendante de k . L'idée d'Hadamard est la suivante : considérons, pour tout $\epsilon > 0$, l'intégrale

$$\int_\epsilon^\infty x^a \phi(x) dx$$

et intégrons par parties k fois, tenant compte du fait que ϕ est à support compact dans \mathbf{R} , de sorte que les seuls termes de bord qui interviennent sont ceux correspondant à $x = \epsilon$. On a donc ainsi

$$\begin{aligned} \int_\epsilon^\infty x^a \phi(x) dx &= -\frac{\epsilon^{a+1}}{a+1} \phi(\epsilon) - \int_\epsilon^\infty \frac{x^{a+1}}{a+1} \phi'(x) dx \\ &= -\frac{\epsilon^{a+1}}{a+1} \phi(\epsilon) + \frac{\epsilon^{a+2}}{(a+1)(a+2)} \phi'(\epsilon) + \dots + \frac{(-1)^k \epsilon^{a+k}}{(a+1)\dots(a+k)} \phi^{(k-1)}(\epsilon) \\ &\quad + (-1)^k \int_\epsilon^\infty \frac{x^{a+k}}{(a+1)\dots(a+k)} \phi^{(k)}(x) dx. \end{aligned}$$

Cette identité s'écrit encore

$$\int_{\epsilon}^{\infty} x^a \phi(x) dx = (-1)^k \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{x^{a+k}}{(a+1)\dots(a+k)} \phi^{(k)}(x) dx \\ + A_1 \epsilon^{a+1} + A_2 \epsilon^{a+2} + \dots + A_k \epsilon^{a+k} + o(1)$$

en remplaçant chacun des termes de la forme $\phi^{(j)}(\epsilon)$ par son développement de Taylor à l'ordre $k-j$ en $\epsilon = 0$.

L'intégrale ci-dessus se décompose donc en sa partie singulière

$$S_{\epsilon}[\phi] = \sum_{j=1}^{[-a]} A_j \epsilon^{a+j}$$

et sa partie finie

$$\int_{\epsilon}^{\infty} x^a \phi(x) dx - S_{\epsilon}[\phi]$$

qui admet une limite pour $\epsilon \rightarrow 0^+$:

$$\langle \text{pf } x_+^a, \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\epsilon}^{\infty} x^a \phi(x) dx - S_{\epsilon}[\phi] \right).$$

Le calcul ci-dessus montre que, pour tout $k \in \mathbf{N}$ tel que $k > -a - 1$,

$$\int_{\epsilon}^{\infty} x^a \phi(x) dx - S_{\epsilon}[\phi] = (-1)^k \int_0^{\infty} \frac{x^{a+k}}{(a+1)\dots(a+k)} \phi^{(k)}(x) dx \\ + \sum_{j=[|a|]+1}^k A_j \epsilon^{a+j} + o(1).$$

Comme la somme figurant au membre de droite de l'identité ci-dessus tend vers 0 avec ϵ , on en déduit que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\epsilon}^{\infty} x^a \phi(x) dx - S_{\epsilon}[\phi] \right) = (-1)^k \int_0^{\infty} \frac{x^{a+k}}{(a+1)\dots(a+k)} \phi^{(k)}(x) dx$$

pour tout entier $k > -a - 1$, ce qui montre que la définition de la distribution $\text{pf } x_+^a$ est bien indépendante de k .

Toutefois, la méthode d'Hadamard exposée ci-dessus laisse de côté le cas des puissances négatives entières — à part le cas de $1/x$, pour lequel on dispose de la valeur principale, mais la définition de $\text{vp } \frac{1}{x}$ utilise de manière cruciale le caractère impair de la fonction $x \mapsto 1/x$ de sorte que ce procédé n'est pas généralisable aux puissances paires, non plus qu'aux fonctions du type x_+^a .

Une autre idée consiste à "corriger" la distribution $\text{pf } x_+^a$ par un coefficient bien choisi.

Rappelons la définition de la fonction Γ d'Euler :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z \frac{dt}{t}, \quad \Re(z) > 0.$$

Cette fonction se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbf{C} avec des pôles simples aux entiers négatifs, et qui vérifie la relation

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_-.$$

D'autre part, Γ ne s'annule en aucun point de \mathbf{C} , de sorte que la fonction $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$ est holomorphe sur \mathbf{C} . (Voir [6], Théorème VII.2.1.)

Rappelons également que

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*,$$

de sorte que Γ est un prolongement de la factorielle aux complexes qui ne sont pas des entiers négatifs ou nuls.

Exemple 3.6.7 (Distributions χ_+^a) Pour tout $a \in \mathbf{C}$ tel que $\Re(a) > -1$, on pose

$$\chi_+^a(x) = \frac{x_+^a}{\Gamma(a+1)}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Lorsque $\Re a > -1$, la fonction ci-dessus est localement intégrable et définit donc une distribution sur \mathbf{R} .

D'autre part, on vérifie aisément grâce à la relation entre $\Gamma(a+1)$ et $\Gamma(a)$, que

$$(\chi_+^a)' = \chi_+^{a-1} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \quad \text{pour } \Re(a) > 0.$$

Ceci permet donc de prolonger χ_+^a pour tout $a \in \mathbf{C}$ de telle sorte que

$$(\chi_+^a)' = \chi_+^{a-1} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \quad \text{pour tout } a \in \mathbf{C}.$$

On vérifie alors sans peine que

(a) pour tout $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}_-^*$, on a

$$\chi_+^a = \frac{\text{pf } x_+^a}{\Gamma(a+1)};$$

(le symbole pf étant évidemment inutile pour $a > -1$);

(b) pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, la fonction

$$a \mapsto \langle \chi_+^a, \phi \rangle \quad \text{est holomorphe sur } \mathbf{C};$$

(c) pour les valeurs entières négatives de a , on a

$$\begin{aligned} \chi_+^0 &= \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*} && \text{(fonction de Heaviside),} \\ \chi_+^{-1} &= \delta_0, \\ \chi_+^{-k} &= \delta_0^{(k-1)} && \text{si } k > 1. \end{aligned}$$

(d) pour tout $a \in \mathbf{R}$, la distribution χ_+^a est homogène de degré a dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Dans la section 3.3, nous avons étudié les distributions obtenues comme valeurs de la fonction $z \mapsto 1/z$ sur l'axe réel vu comme bord des demi-plans supérieurs et inférieurs. Ceci suggère de considérer plus généralement l'exemple des valeurs sur l'axe réel de fonctions du type $z \mapsto z^a$.

Exemple 3.6.8 (Valeurs sur l'axe réel de z^a et pf x_+^a) Pour tout $a \in \mathbf{C}$ tel que $\Re(a) > 0$, on a

$$\begin{aligned}(x + i0)^a &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (x + i\epsilon)^a = x_+^a + e^{i\pi a} x_-^a, \\ (x - i0)^a &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (x - i\epsilon)^a = x_+^a + e^{-i\pi a} x_-^a,\end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$, où on a noté

$$x_-^a = 0 \text{ si } x \geq 0 \text{ et } x_-^a = |x|^a \text{ si } x < 0,$$

et où $z^a = e^{a \ln z}$, la notation \ln désignant la détermination principale du logarithme, qui est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ — cf. [6], chapitre V.3.2, ou [9], chapitre X.6.4. Ainsi, la fonction $z \mapsto z^a$ est, elle aussi, holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$.

On en déduit que, pour tout $a \in \mathbf{C}$ tel que $\Re(a) > 0$, on a

$$e^{+i\pi a} (x - i0)^a - e^{-i\pi a} (x + i0)^a = 2i \sin(\pi a) x_+^a, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Evidemment, cette identité ponctuelle, qui vaut pour tout $x \in \mathbf{R}$, vaut aussi au sens des distributions sur \mathbf{R} .

En dérivant cette identité au sens des distributions, on trouve que, pour tout $a \in \mathbf{C}$ avec $\Re(a) > 0$

$$e^{+i\pi a} a (x - i0)^{a-1} - e^{-i\pi a} a (x + i0)^{a-1} = 2i \sin(\pi a) a x_+^{a-1}$$

c'est-à-dire, après division par $-a \neq 0$

$$\begin{aligned}e^{+i\pi(a-1)} (x - i0)^{a-1} - e^{-i\pi(a-1)} (x + i0)^{a-1} &= -2i \sin(\pi a) x_+^{a-1} \\ &= 2i \sin(\pi(a-1)) x_+^{a-1}\end{aligned}$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ pour $\Re(a) > 0$.

Puis, en dérivant à nouveau un nombre arbitraire de fois au sens des distributions sur \mathbf{R} , on trouve finalement que

$$\begin{aligned}e^{+i\pi a} (x - i0)^a - e^{-i\pi a} (x + i0)^a &= 2i \sin(\pi a) \text{ pf } x_+^a \\ &\text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}) \text{ pour } a \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_-.\end{aligned}$$

(Evidemment, le symbole pf n'est nécessaire que lorsque $\Re(a) \leq -1$.)

Il est intéressant de voir ce que deviennent les identités ci-dessus lorsque $a \in \mathbf{Z}_-$. Il faut alors utiliser les distributions χ_+^a introduites plus haut.

Exemple 3.6.9 (Valeurs sur l'axe réel de z^{-k} et χ_+^{-k}) Partons de l'identité établie dans l'exemple 3.3.4

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+i0} &= \text{vp} \frac{1}{x} - i\pi\delta_0, \\ \frac{1}{x-i0} &= \text{vp} \frac{1}{x} + i\pi\delta_0.\end{aligned}$$

En soustrayant membre à membre ces deux identités, on voit que

$$\frac{1}{x-i0} - \frac{1}{x+i0} = 2i\pi\delta_0 = 2i\pi\chi_+^{-1}.$$

Dérivant $k-1$ fois chaque membre de cette égalité, on trouve que

$$(-1)(-2)\dots(-(k-1)) \left(\frac{1}{(x-i0)^k} - \frac{1}{(x+i0)^k} \right) = 2i\pi\chi_+^{-k},$$

ce qui s'écrit encore, pour tout $k \geq 1$

$$(-1)^{k-1}(k-1)! \left(\frac{1}{(x-i0)^k} - \frac{1}{(x+i0)^k} \right) = 2i\pi\chi_+^{-k}.$$

Remarque 3.6.10 (Valeurs sur l'axe réel de z^a et χ_+^a pour $\Re(a) < 0$) On peut rassembler la formule ci-dessus et celle de l'exemple précédent dans une seule identité, comme suit :

$$\frac{i\Gamma(-a)}{2\pi} (e^{+i\pi a}(x-i0)^a - e^{-i\pi a}(x+i0)^a) = \chi_+^a, \quad \Re(a) < 0.$$

En effet, pour $a \in \mathbf{C}$ non entier avec $\Re(a) < 0$, on a, d'après l'exemple 3.6.8

$$\begin{aligned}e^{+i\pi a}(x-i0)^a - e^{-i\pi a}(x+i0)^a &= 2i\pi \frac{\sin(\pi a)}{\pi} \text{pf } x_+^a \\ &= -2i\pi \frac{\text{pf } x_+^a}{\Gamma(-a)\Gamma(1+a)} = -2i\pi \frac{\chi_+^a}{\Gamma(-a)}\end{aligned}$$

grâce à la "formule des compléments"

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \text{ pour tout } z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$$

(cf. Appendice, section 6.4.)

D'autre part, pour $a < 0$ entier, d'après l'exemple précédent

$$\begin{aligned}\frac{i\Gamma(-a)}{2\pi} (e^{+i\pi a}(x-i0)^a - e^{-i\pi a}(x+i0)^a) \\ &= \frac{i}{2\pi} (|a|-1)! \left((-1)^a \frac{1}{(x-i0)^{|a|}} - (-1)^{-a} \frac{1}{(x+i0)^{|a|}} \right) \\ &= \frac{i}{2\pi} (-1)^{|a|} (|a|-1)! \left(\frac{1}{(x-i0)^{|a|}} - \frac{1}{(x+i0)^{|a|}} \right) = \frac{i}{2\pi} \cdot (-2i\pi\chi_+^{-|a|}) = \chi_+^a.\end{aligned}$$

Les exemples ci-dessus sont tous relatifs à la dimension 1.

Étudions maintenant les distributions homogènes en dimension quelconque.

On sait que toute fonction homogène de degré β dans un ouvert conique Ω de \mathbf{R}^N vérifie la

RELATION D'EULER

$$\sum_{k=1}^N x_k \partial_{x_k} f = \beta f, \quad \text{sur } \Omega,$$

relation que l'on peut encore écrire sous la forme

$$\operatorname{div}(xf) = \sum_{k=1}^N \partial_{x_k}(x_k f) = (N + \beta)f, \quad \text{sur } \Omega.$$

Rappelons brièvement la démonstration de cette relation.

Démonstration de la relation d'Euler. Comme f est homogène de degré β sur l'ouvert conique Ω

$$f(\lambda x) = \lambda^\beta f(x), \quad \text{pour tout } x \in \Omega \text{ et } \lambda > 0.$$

Comme la fonction f est de classe C^1 , on peut dériver chaque membre de cette égalité par rapport à λ pour tout $x \in \Omega$ fixé :

$$\frac{d}{d\lambda} f(\lambda x) = \nabla f(\lambda x) \cdot x = \beta \lambda^{\beta-1} f(x), \quad \lambda > 0.$$

En particulier, en faisant $\lambda = 1$, on trouve que

$$\left. \frac{d}{d\lambda} f(\lambda x) \right|_{\lambda=1} = x \cdot \nabla f(x) = \beta f(x), \quad x \in \Omega,$$

qui est précisément la première forme ci-dessus de la relation d'Euler. ■

Cette relation vaut encore pour les distributions, comme on va le voir.

Proposition 3.6.11 (Relation d'Euler et distributions homogènes) Soit Ω ouvert conique de \mathbf{R}^N et soit T une distribution homogène de degré β sur Ω . Alors

$$\operatorname{div}(xT) = (N + \beta)T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Démonstration. Dire que T est homogène de degré β sur Ω , c'est dire que, pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\langle T, \phi(\cdot/\lambda) \rangle = \lambda^{N+\beta} \langle T, \phi \rangle, \quad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

Comme dans le cas de la démonstration de la relation d'Euler rappelée ci-dessus dans le cadre des fonctions de classe C^1 , l'idée de la preuve consiste à dériver chaque membre de l'égalité ci-dessus par rapport à λ et à faire $\lambda = 1$. Mais la

fonction $(x, \lambda) \mapsto \phi(x/\lambda)$ ne vérifie pas les hypothèses de la Proposition 3.4.21 ; on va donc la tronquer par une fonction plateau bien choisie.

Soit $\theta : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que

$$\theta|_{[1/2, 2]} = 1, \quad \theta|_{]0, 1/4[\cup]4, \infty[} = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Considérons la fonction $\psi \in C_c^\infty(\Omega \times \mathbf{R}_+^*)$ définie par

$$\psi(x, \lambda) = \phi(x/\lambda)\theta(\lambda), \quad x \in \Omega, \lambda > 0.$$

D'après le théorème de dérivation sous le crochet de dualité

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}(xT), \phi \rangle &= \langle T, -x \cdot \nabla \phi \rangle \\ &= \langle T, \partial_\lambda \phi(\cdot/\lambda) \Big|_{\lambda=1} \rangle \\ &= \langle T, \partial_\lambda (\phi(\cdot/\lambda)\theta(\lambda)) \Big|_{\lambda=1} \rangle \\ &= \partial_\lambda \langle T, \psi(\cdot, \lambda) \rangle \Big|_{\lambda=1} \\ &= \partial_\lambda (\lambda^{N+\beta} \theta(\lambda)) \Big|_{\lambda=1} \langle T, \phi \rangle = (N + \beta) \langle T, \phi \rangle, \end{aligned}$$

ce qui implique la relation d'Euler. ■

Une question qui se pose très souvent dans la pratique est de savoir si une distribution homogène sur $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ se prolonge de façon unique en une distribution homogène sur \mathbf{R}^N . C'est évident pour une fonction continue homogène de degré $> -N$ sur $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$, puisqu'une telle fonction définit un élément de $L_{loc}^1(\mathbf{R}^N)$ — cf. Exemple 3.6.2 ci-dessus.

Proposition 3.6.12 (Prolongement en 0 des distributions homogènes)

Soit T distribution homogène de degré β sur $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$. Si $\beta > -N$, il existe une unique distribution homogène sur \mathbf{R}^N de degré β , notée \dot{T} , telle que

$$\dot{T}|_{\mathbf{R}^N \setminus \{0\}} = T.$$

Démonstration. Pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, on pose

$$R_\beta \phi(x) = \int_0^\infty \phi(rx) r^{\beta+N-1} dr, \quad x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}.$$

Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N \setminus \{0\})$ telle que

$$\int_0^\infty \chi(tx) \frac{dt}{t} = 1, \quad x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}.$$

On pourra prendre χ de la forme

$$\chi(x) = cX(|x|) \text{ avec } 0 \leq X \in C_c^\infty(\mathbf{R}_+^*) \text{ non identiquement nulle,}$$

et définir la constante c en posant

$$c \int_0^\infty X(t) \frac{dt}{t} = 1.$$

Alors, pour tout $r > 0$, on a

$$\int_0^\infty X(tr) \frac{dt}{t} = \int_0^\infty X(s) \frac{ds}{s}$$

grâce au changement de variables $s = tr$, d'où l'identité cherchée.)

Définissons \dot{T} par la formule

$$\langle \dot{T}, \phi \rangle = \langle T, \chi R_\beta \phi \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N).$$

Que \dot{T} soit une distribution sur \mathbf{R}^N se vérifie sans difficulté.

D'autre part, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N \setminus \{0\})$, on a

$$\begin{aligned} \langle T, \chi R_\beta \phi \rangle &= \left\langle T, \chi \int_0^\infty \phi(r \cdot) r^{\beta+N-1} dt \right\rangle \\ &= \int_0^\infty \langle r^\beta T, \chi \phi(r \cdot) r^{N-1} \rangle dr = \int_0^\infty \langle T \circ M_r, \chi \phi(r \cdot) r^{N-1} \rangle dr \\ &= \int_0^\infty \langle T, \chi(\cdot/r) \phi \rangle \frac{dr}{r} = \left\langle T, \phi \int_0^\infty \chi(\cdot/r) \frac{dr}{r} \right\rangle = \langle T, \phi \rangle \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\dot{T}|_{\mathbf{R}^N \setminus \{0\}} = T.$$

Vérifions que \dot{T} est une distribution homogène de degré β . Pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ et tout $\lambda > 0$, on a

$$\langle \dot{T} \circ M_\lambda, \phi \rangle = \langle \dot{T}, \lambda^{-N} \phi(\cdot/\lambda) \rangle = \langle T, \lambda^{-N} \chi R_\beta \phi(\cdot/\lambda) \rangle.$$

Or

$$R_\beta \phi(x/\lambda) = \int_0^\infty \phi(rx/\lambda) r^{\beta+N} \frac{dr}{r} = \lambda^{\beta+N} \int_0^\infty \phi(sx) s^{\beta+N} \frac{ds}{s} = \lambda^{\beta+N} R_\beta \phi(x)$$

grâce au changement de variables $s = r/\lambda$. Donc

$$\langle \dot{T} \circ M_\lambda, \phi \rangle = \langle T, \lambda^{-N} \chi R_\beta \phi(\cdot/\lambda) \rangle = \langle T, \lambda^\beta \chi R_\beta \phi \rangle = \lambda^\beta \langle \dot{T}, \phi \rangle$$

d'où $\dot{T} \circ M_\lambda = \lambda^\beta \dot{T}$.

Montrons enfin que ce prolongement est unique. S'il en existait un autre, disons \ddot{T} , la différence $S = \dot{T} - \ddot{T}$ serait alors une distribution homogène de degré $\beta > -N$ dans \mathbf{R}^N dont la restriction à $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ est nulle. On en déduirait, d'après le lemme ci-dessous, que $S = 0$, d'où l'unicité du prolongement homogène. ■

Lemme 3.6.13 *Soit S distribution homogène de degré $\beta > -N$ sur \mathbf{R}^N , dont la restriction à $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ est nulle. Alors $S = 0$.*

Démonstration. Soit $\theta \in C_c^\infty(\mathbf{R}_+)$ telle que

$$\theta|_{[0,1]} = 1, \quad \theta|_{[2,+\infty[} = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ et tout entier $n \geq 2$, on décompose

$$\phi = \psi_n + \chi_n \text{ avec } \psi_n(x) = \theta(2^n|x|)\phi(x).$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle S\phi \rangle &= \langle S, \psi_n \rangle + \langle S, \chi_n \rangle \\ &= \langle S, \psi_n \rangle + \langle S|_{\mathbf{R}^N \setminus \{0\}}, \chi_n \rangle = \langle S, \psi_n \rangle \end{aligned}$$

puisque

$$\chi_n(x) = (1 - \theta(2^n|x|))\phi(x) = 0 \text{ pour } |x| \leq 2^{-n}.$$

Puis, comme S est homogène de degré β , pour tout $\lambda > 0$

$$\langle S, \psi_n \rangle = \langle S \circ M_\lambda, \lambda^{-\beta} \psi_n \rangle = \langle S, \lambda^{-\beta-N} \psi_n(\cdot/\lambda) \rangle.$$

Choisissons $\lambda = 2^n$; on trouve alors que

$$\langle S, \psi_n \rangle = 2^{-(N+\beta)n} \langle S, \theta\phi(\cdot/2^n) \rangle.$$

Or, pour tout $n \geq 2$, la suite de fonctions test $x \mapsto \theta(|x|)\phi(x/2^n)$ est à support dans $\overline{B(0,2)}$, et

$$M(\alpha, n) := \sup_{|x| \leq 2} |\partial_x^\alpha (\theta(|x|)\phi(x/2^n))|$$

est, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$, une suite bornée lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc

$$|\langle S, \theta\phi(\cdot/2^n) \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq p} M(\alpha, n)$$

est une suite bornée lorsque $n \rightarrow \infty$. Comme d'autre part $N + \beta > 0$, on en déduit que

$$2^{-(N+\beta)n} \theta\phi(\cdot/2^n) \rightarrow 0 \text{ dans } C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Par continuité séquentielle de la distribution S — cf. Proposition 3.2.9 — on en déduit que

$$\langle S, \psi_n \rangle = 2^{-(N+\beta)n} \langle S, \theta\phi(\cdot/2^n) \rangle \rightarrow 0 \text{ pour } n \rightarrow \infty,$$

de sorte que

$$\langle S, \phi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle S, \psi_n \rangle = 0.$$

■

On verra, au chapitre suivant (après la preuve du Théorème 4.1.7) une démonstration beaucoup plus simple de ce lemme, mais qui utilise la notion de support d'une distribution — et surtout la structure des distributions à support dans un singleton — notion que nous n'avons pas encore présentée.

En revanche, une distribution homogène sur $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ de degré $-N$ ne se prolonge pas forcément en une distribution homogène (de degré $-N$) sur \mathbf{R}^N . Nous verrons pourquoi au chapitre suivant — cf. Proposition 4.1.8.

3.7 Exercices

Exercice 1.

- a) Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$, la distribution $\delta_0^{(m)} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ est d'ordre m .
- b) Montrer que la distribution $\text{vp} \frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ est d'ordre 1.

Exercice 2.

Montrer que les suites de distributions sur \mathbf{R} définies par les fonctions

- (i) $f_n(x) = \sin(nx)$
 (ii) $g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x}$
 (iii) $h_n(x) = n \sin(nx) \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x)$
- sont convergentes dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, et calculer leurs limites.

Exercice 3.

Calculer, pour tous m, n entiers, la distribution $x^m \delta_0^{(n)}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Exercice 4.

- a) Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telle que $xT = S$.
- b) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telle que $xT = 0$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbf{R}$ telle que $T = C\delta_0$.
- c) Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ les équations suivantes

$$xT = 1, \quad xT = \delta_0, \quad xT = \text{vp} \frac{1}{x}.$$

Exercice 5.

Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ l'équation $xu' + u = 0$.

Exercice 6.

Montrer qu'il existe une infinité de fonctions $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \ni (t, x) \mapsto u(t, x) \in \mathbf{R}$ continues par morceaux et telles que

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}),$$

$$u(t, x) \rightarrow u^{in}(x) \text{ pour tout } x \neq 0 \text{ lorsque } t \rightarrow 0^+,$$

où

$$u^{in}(x) = 1 \text{ si } x > 0, \quad u^{in}(x) = -1 \text{ si } x < 0.$$

Exercice 7.

- a) Pour tout $\epsilon > 0$, soit E_ϵ la fonction définie sur \mathbf{R}^2 par

$$f_\epsilon(x) = \ln |x| \text{ si } |x| > \epsilon, \quad f_\epsilon(x) = \ln \epsilon \text{ si } |x| \leq \epsilon.$$

Calculer Δf_ϵ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$.

b) Montrer que la fonction $\mathbf{R}^2 \ni x \mapsto \ln|x|$ définit une distribution sur \mathbf{R}^2 , et calculer $\Delta \ln|x|$ au sens des distributions sur \mathbf{R}^2 .

c) Soit $N \geq 3$. Montrer que la fonction $\mathbf{R}^N \ni x \mapsto |x|^{2-N}$ définit une distribution sur \mathbf{R}^N . Calculer, pour tout $k = 1, \dots, N$, la distribution $\partial_{x_k} |x|^{2-N}$.

d) Calculer la distribution $\Delta|x|^{2-N}$ sur \mathbf{R}^N .

Exercice 8.

On rencontre en électromagnétisme la situation suivante.

Soit P un plan affine de l'espace euclidien $E = \mathbf{R}^3$, qu'il sépare en deux demi-espaces ouverts E^+ et E^- . Soit j un champ de vecteurs de classe C^1 sur P . On s'intéresse au champ magnétique B créé par la nappe de courant j ; on note B^\pm la restriction de B à E^\pm , et l'on admet que B^\pm est de classe C^1 sur $\overline{E^\pm}$.

L'absence de charge magnétique, et la loi d'Ampère dans E^\pm s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div} B^\pm &= 0 \text{ sur } E^\pm, \\ \operatorname{rot} B^\pm &= 0 \text{ sur } E^\pm, \end{aligned}$$

où on rappelle que le rotationnel d'un champ de vecteurs V de classe C^1 sur un ouvert de \mathbf{R}^3 est le champ de vecteurs donné par la formule

$$\operatorname{rot} V(x) = \nabla \wedge \begin{pmatrix} V_1(x) \\ V_2(x) \\ V_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} V_3(x) - \partial_{x_3} V_2(x) \\ \partial_{x_3} V_1(x) - \partial_{x_1} V_3(x) \\ \partial_{x_1} V_2(x) - \partial_{x_2} V_1(x) \end{pmatrix}.$$

D'autre part, B^+ et B^- sont reliés par une condition de transmission sur P :

$$\begin{aligned} n \cdot [B]_P &= 0 \text{ sur } P, \\ n \wedge [B]_P &= j \text{ sur } P, \end{aligned}$$

où n est le vecteur unitaire normal à P dirigé vers E^+ , et où

$$[B]_P(y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (B_+(y + tn) - B_-(y - tn)), \quad y \in P.$$

Exprimer les systèmes d'équations aux dérivées partielles sur E^+ et E^- et les conditions de transmission ci-dessus sous la forme d'un seul système aux dérivées partielles au sens des distributions sur \mathbf{R}^3 .

Chapitre 4

Support et convolution des distributions

On a vu au chapitre 1 que le produit de convolution des fonctions permet de montrer que toute fonction localement intégrable est limite d'une suite de fonctions de classe C^∞ à supports compacts. Le produit de convolution par une fonction de classe C^∞ à support compact s'étend à toute distribution sur \mathbf{R}^N , et permet de montrer que l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, pour tout ouvert Ω de \mathbf{R}^N : voir section 4.2 ci-dessous.

A partir de là, on dispose d'un outil puissant permettant de prolonger par densité certaines opérations bien connues portant sur des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω : voir section 4.3.

Enfin, dans la section 4.4, on définira le produit de convolution de deux distributions sur \mathbf{R}^N . Toutefois, on ne sait pas donner un sens à cette opération pour tout couple de distributions sur \mathbf{R}^N — pas plus qu'on ne saurait définir le produit de convolution de deux éléments de $L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$. Déjà dans le cas des fonctions, il faut pouvoir contrôler — en un sens très faible — la croissance des deux termes du produit : c'est là tout le sens de l'inégalité de Hausdorff-Young (Théorème 1.3.10).

Pour cela, on se limitera ici au cas où l'une des distributions est à support compact dans \mathbf{R}^N . On commencera donc par étudier, tout au long de la section 4.1, la notion de support d'une distribution et les propriétés des distributions à support compact — on verra notamment un résultat de structure très simple sur les distributions à support dans un singleton.

Le produit de convolution des distributions est, avec la transformation de Fourier, l'outil fondamental intervenant dans l'analyse des équations aux dérivées partielles à coefficients constants. On verra donc, dans la deuxième partie de ce cours, de nombreuses applications à la théorie des équations aux dérivées partielles des résultats présentés dans ce chapitre.

4.1 Les distributions à support compact

Les distributions à support compact jouent un rôle important dans la théorie des distributions. En effet, on verra qu'une distribution à support compact est une somme finie de dérivées (multiples) au sens des distributions de fonctions continues. Ceci confirme en quelque sorte que la notion de distribution est bien l'extension minimale de la notion de fonction continue pouvant être dérivée autant de fois qu'on le désire.

4.1.1 Support d'une distribution

Commençons par définir la notion de support d'une distribution. Rappelons que pour une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , où Ω est un ouvert de \mathbf{R}^N , le support de f est défini comme

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}};$$

(voir la Définition 1.2.1.)

Malheureusement, il n'est pas possible d'étendre cette définition telle quelle au cas des distributions, car il n'existe aucune notion de valeur en un point d'une distribution. Mais on peut définir de manière équivalente le support d'une fonction comme le plus petit fermé en dehors duquel la fonction est nulle.

Définition 4.1.1 (Support d'une distribution) Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et T une distribution sur Ω . On définit $\text{supp}(T)$ comme le plus petit fermé F de Ω tel que $T|_{\Omega \setminus F} = 0$. Autrement dit

$$\text{supp}(T) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(T)} F$$

où

$$\mathcal{F}(T) = \left\{ F \text{ fermé de } \Omega \mid T|_{\Omega \setminus F} = 0 \right\}.$$

Voici quelques propriétés simples de la notion de support d'une distribution.

Proposition 4.1.2 (Support et opérations) Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et deux distributions $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors

- (a) $T|_{\Omega \setminus \text{supp}(T)} = 0$;
 (b) pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\text{supp}(\phi) \cap \text{supp}(T) = \emptyset \text{ implique que } \langle T, \phi \rangle = 0;$$

- (c) $\text{supp}(T + S) \subset \text{supp}(T) \cup \text{supp}(S)$;
 (d) pour toute fonction $a \in C^\infty(\Omega)$, on a

$$\text{supp}(aT) \subset \text{supp}(a) \cap \text{supp}(T);$$

- (e) pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$

$$\text{supp}(\partial_x^\alpha T) \subset \text{supp}(T).$$

Démonstration. Considérons la famille $(\omega_F)_{F \in \mathcal{F}(T)}$ d'ouverts de Ω définis par

$$\omega_F = \Omega \setminus F, \text{ et posons } T_F = T|_{\omega_F}.$$

Observons que la famille $(\omega_F)_{F \in \mathcal{F}(T)}$ est un recouvrement ouvert de $\Omega \setminus \text{supp}(T)$, que

$$T_F = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\omega_F) \text{ pour tout } F \in \mathcal{F}(T)$$

par définition de $\mathcal{F}(T)$, ce qui entraîne en particulier que

$$T_F|_{\omega_F \cap \omega_{F'}} = 0 = T_{F'}|_{\omega_F \cap \omega_{F'}} \text{ pour tous } F, F' \in \mathcal{F}(T).$$

On déduit alors de la partie unicité du principe de recollement (Proposition 3.4.17) que

$$T|_{\Omega \setminus \text{supp}(T)} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega \setminus \text{supp}(T)),$$

ce qui établit le (a).

Si $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ vérifie

$$\text{supp}(\phi) \cap \text{supp}(T) = \emptyset$$

c'est donc que

$$\text{supp}(\phi) \subset \Omega \setminus \text{supp}(T).$$

On déduit alors du (a) que

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T|_{\Omega \setminus \text{supp}(T)}, \phi|_{\Omega \setminus \text{supp}(T)} \rangle = 0,$$

ce qui établit le (b).

Passons à la démonstration du (c). Considérons les ouverts

$$O = \Omega \setminus \text{supp}(S), \quad \text{et } O' = \Omega \setminus \text{supp}(T).$$

D'après le (a)

$$S|_O = 0 \text{ et } T|_{O'} = 0$$

d'où en particulier

$$S|_{O \cap O'} = T|_{O \cap O'} = 0.$$

Par conséquent

$$(S + T)|_{O \cap O'} = 0$$

ce qui implique que

$$\Omega \setminus (O \cap O') = \text{supp}(S) \cup \text{supp}(T) \in \mathcal{F}(S + T),$$

d'où le (c).

L'énoncé (d) est équivalent au fait que

$$\Omega \setminus (\text{supp}(a) \cap \text{supp}(T)) \in \mathcal{F}(aT).$$

Soit donc $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ quelconque telle que

$$\text{supp}(\phi) \subset \Omega \setminus (\text{supp}(a) \cap \text{supp}(T))$$

c'est-à-dire

$$\text{supp}(\phi) \cap \text{supp}(a) \cap \text{supp}(T) = \emptyset.$$

Or

$$\text{supp}(a\phi) \subset \text{supp}(\phi) \cap \text{supp}(a) \text{ de sorte que } \text{supp}(a\phi) \cap \text{supp}(T) = \emptyset.$$

Par conséquent, d'après le (b)

$$\langle aT, \phi \rangle = \langle T, a\phi \rangle = 0,$$

ce qui montre que

$$\text{la restriction de } T \text{ à } \Omega \setminus (\text{supp}(a) \cap \text{supp}(T)) \text{ est nulle,}$$

d'où le (d).

L'énoncé (e) est équivalent au fait que, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$,

$$\partial^\alpha T|_{\Omega \setminus \text{supp}(T)} = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha T, \phi \rangle = 0 \text{ pour toute fonction test } \phi \in C_c^\infty(\Omega) \\ \text{vérifiant } \text{supp } \phi \subset \Omega \setminus \text{supp}(T) \end{aligned}$$

Or

$$\text{supp}(\partial^\alpha \phi) \subset \text{supp}(\phi)$$

de sorte que

$$\text{supp } \phi \subset \Omega \setminus \text{supp}(T) \text{ entraîne que } \langle \partial^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \phi \rangle = 0.$$

Ceci établit donc le point (e). ■

Exemple 4.1.3 (Support des dérivées de la masse de Dirac) *Pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^N$ et tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$, on a*

$$\text{supp}(\partial_x^\alpha \delta_{x_0}) = \{x_0\}.$$

On verra plus loin que cet exemple admet (presque) une réciproque : voir Théorème 4.1.7

Remarque. On prendra garde au fait suivant : pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, la condition

$$\phi = 0 \text{ sur } \text{supp}(T) \text{ n'implique pas que } \langle T, \phi \rangle = 0.$$

(En revanche, pour $f \in C(\Omega)$, la condition $\phi = 0$ sur $\text{supp}(f)$ implique que $\phi f = 0$.)

Voici un contre-exemple : pour $\theta \in C^\infty(\mathbf{R})$, telle que

$$\theta|_{[-1,1]} = 1, \quad \text{et } \text{supp}(\theta) \subset]-2, 2[,$$

on choisit $\phi(x) = x^2\theta(x)$, et $T = \delta_0''$. Alors

$$\langle T, \phi \rangle = 2 \text{ bien que } \phi(0) = 0.$$

Ceci est dû au fait que $\phi = 0$ sur $\text{supp}(\delta_0'') = \{0\}$, mais pas sur un voisinage ouvert de $\text{supp}(\delta_0'')$, ce qui correspondrait à la condition (b) de la Proposition 4.1.2 ci-dessus.

4.1.2 Distributions à support compact

Soit Ω ouvert de \mathbf{R}^N . On notera

$$\mathcal{E}'(\Omega) = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid \text{supp}(T) \text{ compact dans } \Omega\}.$$

Evidemment, $\mathcal{E}'(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\Omega)$ sur \mathbf{R} (ou \mathbf{C}).

A priori, une distribution à support compact est une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact. Mais comme le support de la distribution est lui-même compact, on peut ignorer les fonctions test en dehors du support de la distribution. Ceci permet d'étendre la dualité et de considérer les distributions à support compact comme les formes linéaires continues sur l'espace des fonctions C^∞ équipé de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact des dérivées de tous ordres.

Proposition 4.1.4 (Dualité $\mathcal{E}' - C^\infty$) Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Pour toute fonction ϕ de classe C^∞ sur Ω , la valeur $\langle T, \chi\phi \rangle$ est indépendante du choix de $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ vérifiant

$$\chi = 1 \text{ sur un voisinage ouvert de } \text{supp}(T).$$

On définira donc

$$\langle T, \phi \rangle := \langle T, \chi\phi \rangle$$

pour toute fonction $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ identiquement égale à 1 sur un voisinage ouvert de $\text{supp}(T)$.

Démonstration. Soient χ_1 et $\chi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ telles que

$$\chi_1|_{V_1} = 1 \text{ et } \chi_2|_{V_2} = 1$$

où V_1 et V_2 sont deux voisinages ouverts de K dans Ω . Alors

$$(\chi_1 - \chi_2)|_{V_1 \cap V_2} = 0$$

et comme $V_1 \cap V_2$ est un voisinage ouvert de $\text{supp}(T)$ dans Ω , pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, la fonction $(\chi_1 - \chi_2)\phi$, qui est de classe C^∞ sur Ω , vérifie

$$\text{supp}((\chi_1 - \chi_2)\phi) \cap \text{supp}(T) = \emptyset.$$

D'après la Proposition 4.1.2 (b)

$$\langle T, (\chi_1 - \chi_2)\phi \rangle = 0$$

de sorte que

$$\langle T\chi_1\phi \rangle = \langle T, \chi_2\phi \rangle.$$

■

Proposition 4.1.5 (Propriété de continuité pour \mathcal{E}') Soit Ω ouvert de \mathbf{R}^N .

Alors

(a) toute distribution à support compact sur Ω est d'ordre fini ;

(b) pour tout $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, il existe un compact $K \subset \Omega$, un entier $p \geq 0$ et une constante $C > 0$ tels que

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

pour tout $\phi \in C^\infty(\Omega)$;

(c) soit $(\phi_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions de classe C^∞ sur Ω telle que, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$,

$$\partial^\alpha \phi_n \rightarrow \partial^\alpha \phi \text{ uniformément sur tout compact de } \Omega \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Alors pour tout $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$

$$\langle T, \phi_n \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Démonstration. Démontrons l'énoncé (b) qui implique évidemment les points

(a) et (c).

Soit $\eta = \frac{1}{2} \text{dist}(\text{supp}(T), \partial\Omega) > 0$. Posons

$$O = \bigcup_{x \in \text{supp}(T)} B(x, \eta) \text{ et } K = \bar{O}.$$

Evidemment $O \subset \Omega$ est ouvert (comme réunion d'ouverts), tandis que $K \subset \Omega$ est compact (car fermé et borné dans \mathbf{R}^N .)

Soit $\chi \in C^\infty(\Omega)$ à support dans O et valant identiquement 1 sur un voisinage ouvert de $\text{supp}(T)$ — l'existence d'une telle fonction étant garantie par le Lemme 1.4.1. Pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T, \chi\phi \rangle$$

d'après la Proposition 4.1.4 et la propriété de continuité des distributions, appliquée au compact K , entraîne l'existence d'un entier $p_K \geq 0$ et d'une constante $C_K > 0$ telle que

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq C_K \max_{|\alpha| \leq p_K} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha (\chi\phi)(x)|.$$

Puis la formule de Leibnitz montre que

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha (\chi \phi)(x)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{x \in K} |\partial^\beta \chi(x)| \sup_{x \in K} |\partial^{\alpha-\beta} \phi(x)|$$

ce qui entraîne le point (b) avec $p = p_K$ et

$$C = C_K \max_{|\alpha| \leq p_K} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{x \in K} |\partial^\beta \chi(x)|.$$

■

Evidemment, toute distribution à support compact peut être prolongée par 0 en dehors de Ω , de la façon suivante.

Définition 4.1.6 (Prolongement d'une distribution de \mathcal{E}') Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. On définit le prolongement \dot{T} de T par 0 en dehors de Ω en posant

$$\langle \dot{T}, \phi \rangle_{\mathcal{E}'(\mathbf{R}^N), C^\infty(\mathbf{R}^N)} = \langle T, \phi|_{\Omega} \rangle_{\mathcal{E}'(\Omega), C^\infty(\Omega)}.$$

Evidemment

$$\dot{T}|_{\Omega} = T, \quad \text{et} \quad \text{supp}(\dot{T}) = \text{supp}(T).$$

4.1.3 Structure des distributions à support dans un singleton

On a vu plus haut que la masse de Dirac δ_{x_0} et ses dérivées successives sont toutes à support dans le singleton $\{x_0\}$.

Réciproquement, les distributions à support dans un singleton admettent une caractérisation très simple.

Théorème 4.1.7 (Distributions à support dans un singleton) Soient Ω un ouvert de \mathbf{R}^N , un point $x_0 \in \Omega$ et une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Supposons que

$$\text{supp}(T) \subset \{x_0\}.$$

Alors il existe une suite $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}^N}$ de nombres réels (ou complexes) telle que

$$a_\alpha = 0 \text{ dès que } |\alpha| > \text{ordre de } T$$

et

$$T = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^N} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}.$$

Démonstration. D'après la Proposition 4.1.5 (a), comme T est à support dans le singleton $\{x_0\}$ qui est compact dans Ω , c'est une distribution d'ordre fini p .

Sans restreindre la généralité de la preuve, nous allons supposer que $x_0 = 0$ — cas auquel on peut toujours se ramener par translation.

Soit $X \in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que

$$X|_{[-1,1]} = 1, \quad \text{supp}(X) \subset [-2, 2], \quad 0 \leq X \leq 1.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on pose $\chi_\epsilon(x) = X(|x|/\epsilon)$; par construction, la fonction $\chi_\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ est à support dans $\overline{B(0, 2\epsilon)}$ et vaut identiquement 1 sur $\overline{B(0, \epsilon)}$.

Pour toute fonction $\phi \in C^\infty(\Omega)$, on a

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T, \chi_\epsilon \phi \rangle + \langle T, (1 - \chi_\epsilon) \phi \rangle$$

et le second terme au membre de droite de cette égalité est nul, car le support de $(1 - \chi_\epsilon)\phi$ est inclus dans $\Omega \setminus B(0, \epsilon)$ et donc ne rencontre pas $\text{supp}(T) = \{0\}$ — cf. Proposition 4.1.2 (b).

Etape 1.

Supposons maintenant que

$$\partial^\alpha \phi(0) = 0 \text{ pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^N \text{ tel que } |\alpha| \leq p = \text{ordre de } T.$$

Il s'agit de montrer que

$$\langle T, \phi \rangle = 0.$$

Notons

$$\eta = \frac{1}{2} \text{dist}(0, \partial\Omega).$$

Ecrivons la formule de Taylor à l'ordre $p - |\alpha|$ pour $\partial^\alpha \phi$ en 0 :

$$\partial^\alpha \phi(x) = (p + 1 - |\alpha|) \sum_{|\beta|=p+1-|\alpha|} \frac{x^\beta}{\beta!} \int_0^1 (1-t)^{p-|\alpha|} \partial^\beta \partial^\alpha \phi(tx) dt,$$

de sorte que

$$|\partial^\alpha \phi(x)| \leq M_p |x|^{p+1-|\alpha|} \text{ pour tout } x \in \Omega \text{ tel que } |x| \leq \eta$$

avec

$$M_p = (p + 1) \sup_{|y| \leq \eta} \sum_{|\beta|=p+1} |\partial^\beta \phi(y)|.$$

Utilisons maintenant la propriété de continuité de T :

$$|\langle T, \phi \rangle| = |\langle T, \chi_\epsilon \phi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{|x| \leq 2\epsilon} |\partial^\alpha (\chi_\epsilon \phi)(x)|.$$

D'après la formule de Leibnitz

$$\partial^\alpha (\chi_\epsilon \phi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \chi_\epsilon \partial^{\alpha-\beta} \phi.$$

De plus, pour $|\beta| \leq p$

$$|\partial^\beta \chi_\epsilon(x)| \leq N_p \epsilon^{-|\beta|} \text{ pour tout } x \in \Omega \text{ tel que } |x| \leq \eta,$$

avec

$$N_p = \max_{|\gamma| \leq p} \sup_{|y| \leq \eta} |\partial^\gamma \chi_1(y)|.$$

D'après ce qui précède, l'hypothèse

$$\partial^\alpha \phi(0) = 0 \text{ pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^N \text{ tel que } |\alpha| \leq p,$$

entraîne donc que

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha (\chi_\epsilon \phi)(x)| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} M_p N_p (2\epsilon)^{p+1-|\alpha|+|\beta|} \epsilon^{-|\beta|} \\ &\leq M_p N_p Q_p \epsilon^{p+1-|\alpha|} \leq M_p N_p Q_p \epsilon \end{aligned}$$

pour tout $x \in \Omega$ dès que $\epsilon < \frac{1}{2}\eta$, avec

$$Q_p = \max_{|\alpha| \leq p} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} 2^{p+1-|\alpha|+|\beta|} \leq 2^{2p+1}.$$

Ainsi

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq C M_p N_p Q_p \epsilon,$$

d'où on tire, puisque $\epsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit, que

$$\langle T, \phi \rangle = 0$$

pour toute fonction $\phi \in C^\infty(\Omega)$ telle que

$$\partial^\alpha \phi(0) = 0 \text{ pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^N \text{ tel que } |\alpha| \leq p = \text{ordre de } T.$$

Etape 2.

Soit maintenant $\psi \in C^\infty(\Omega)$ quelconque; la fonction ψ définie par

$$\phi(x) = \psi(x) - \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \psi(0) x^\alpha$$

est de classe C^∞ sur Ω et vérifie

$$\partial^\alpha \phi(0) = 0 \text{ pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^N \text{ tel que } |\alpha| \leq p.$$

D'après ce qui précède

$$\begin{aligned} \langle T, \psi \rangle &= \langle T, \phi \rangle + \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} \langle T, x^\alpha \rangle \partial^\alpha \psi(0) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} \langle T, x^\alpha \rangle \partial^\alpha \psi(0) \end{aligned}$$

ce qui signifie précisément que

$$T = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \langle T, x^\alpha \rangle \partial^\alpha \delta_0.$$

■

Nous verrons dans la suite de ce cours plusieurs applications de ce résultat. En voici déjà une, élémentaire : il s'agit de donner une démonstration plus simple du Lemme 3.6.13, qui affirme qu'une distribution homogène de degré $> -N$ dans \mathbf{R}^N et à support dans $\{0\}$ est identiquement nulle.

Démonstration du Lemme 3.6.13. En effet, une distribution à support dans $\{0\}$ est une combinaison linéaire finie de δ_0 et de $\partial^\alpha \delta_0$ pour α décrivant \mathbf{N}^N . Or on sait que δ_0 est homogène de degré $-N$ et $\partial^\alpha \delta_0$ est homogène de degré $-N - |\alpha|$: aucune combinaison linéaire finie de ces distributions ne peut donc être homogène de degré $> -N$, sauf la combinaison nulle. ■

Voici une autre application importante du Théorème 4.1.7.

Application : équation $x^m T = 0$

Soient I intervalle ouvert de \mathbf{R} et $x_0 \in I$. On cherche quelles sont les distributions $T \in \mathcal{D}'(I)$ telles que

$$(x - x_0)^m T = 0, \quad \text{où } m \in \mathbf{N}.$$

Tout d'abord, remarquons que cette relation implique que

$$\text{supp}(T) \subset \{x_0\}.$$

D'après le Théorème 4.1.7 ci-dessus, T est de la forme

$$T = \sum_{k=0}^n a_k \delta_{x_0}^{(k)}.$$

Substituons le membre de droite de cette formule dans l'équation, et utilisons la formule de Leibnitz pour calculer

$$(x - x_0)^m \delta_{x_0}^{(k)} = \frac{(-1)^m k!}{(k - m)!} \delta_{x_0}^{(k-m)} \text{ si } k \geq m, \quad = 0 \text{ si } k < m.$$

On en déduit que $a_k = 0$ pour $k \geq m$, de sorte que les solutions de l'équation

$$(x - x_0)^m T = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(I)$$

sont toutes les distributions de la forme

$$T = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \delta_{x_0}^{(k)},$$

où les coefficients a_k sont quelconques.

Application : prolongement des distributions homogènes

Revenons au problème du prolongement à \mathbf{R}^N des distributions homogènes sur $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ évoqué au chapitre précédent (section 3.6).

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N \setminus \{0\})$ homogène de degré $-N$. D'après la Proposition 3.6.11, cette distribution vérifie la relation d'Euler

$$\operatorname{div}(xT) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N \setminus \{0\}).$$

Or les distributions $x_k T$ sont, pour tout $k = 1, \dots, N$, homogènes de degré $1 - N$ dans $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$: d'après la Proposition 3.6.12, elles admettent un unique prolongement $(x_k T) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ qui soit homogène de degré $1 - N$. Alors

$$\operatorname{div}((xT)^\cdot) = c\delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N).$$

(En effet, d'après ce qui précède, $\operatorname{div}((xT)^\cdot)$ est une distribution à support dans $\{0\}$ qui est de surcroît homogène de degré $-N$: la conclusion découle donc du Théorème 4.1.7 ci-dessus, ainsi que du fait que les distributions $\partial^\alpha \delta_0$ sont homogènes de degré $-N - |\alpha|$.) La constante c est appelée "résidu en 0 de la distribution homogène T ".

Supposons que T admette un prolongement $\dot{T} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ qui soit homogène de degré $-N$; évidemment, l'unicité du prolongement dans la Proposition 3.6.12 garantit que

$$(x_k T)^\cdot = x_k \dot{T}, \quad k = 1, \dots, N.$$

de sorte que

$$\operatorname{div}(x\dot{T}) = c\delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N).$$

Mais comme d'autre part \dot{T} est une distribution homogène de degré $-N$ dans \mathbf{R}^N , elle doit, d'après la Proposition 3.6.11, vérifier la relation d'Euler dans \mathbf{R}^N , c'est-à-dire que

$$\operatorname{div}(x\dot{T}) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N).$$

On vient de donc de démontrer que pour qu'une distribution homogène de degré $-N$ dans $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ admette un prolongement homogène, il faut que son résidu à l'origine soit nul. En fait la réciproque est vraie :

Proposition 4.1.8 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N \setminus \{0\})$ homogène de degré $-N$. Pour que T admette un prolongement $\dot{T} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ homogène de degré $-N$, il faut et il suffit que le résidu de T en 0 soit nul.*

Admettons ce résultat, et voyons ce qu'il signifie pour une distribution définie par une fonction f continue sur $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ homogène de degré $-N$. Une telle fonction est nécessairement de la forme

$$f(x) = \frac{1}{|x|^N} A \left(\frac{x}{|x|} \right), \quad x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$$

avec $A \in C(\mathbf{S}^{N-1})$.

Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ fonction test radiale — de la forme $\phi(x) = \Phi(|x|)$ avec $\Phi|_{[0,1]} = 1$. Alors

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}(xf), \phi \rangle &= - \int_{\mathbf{R}^N} f(x)x \cdot \nabla \phi(x) dx \\ &= - \int_{\mathbf{R}^N} f(x)\Phi'(|x|)x \cdot \frac{x}{|x|} dx = - \int_{\mathbf{R}^N} A\left(\frac{x}{|x|}\right) \Phi'(|x|)|x|^{1-N} dx. \end{aligned}$$

Passons maintenant en coordonnées sphériques : $x = r\omega$ avec $r = |x|$, de sorte que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} A\left(\frac{x}{|x|}\right) \Phi'(|x|)|x|^{1-N} dx &= \int_0^\infty \int_{\mathbf{S}^{N-1}} A(\omega)\Phi'(r)r^{1-N}r^{N-1}d\sigma(\omega)dr \\ &= \int_0^\infty \Phi'(r)dr \int_{\mathbf{S}^{N-1}} A(\omega)d\sigma(\omega) \\ &= -\Phi(0) \int_{\mathbf{S}^{N-1}} A(\omega)d\sigma(\omega), \end{aligned}$$

où σ est la mesure de surface sur \mathbf{S}^{N-1} . Ainsi

$$c\phi(0) = \langle \operatorname{div}(xf), \phi \rangle = \Phi(0) \int_{\mathbf{S}^{N-1}} A(\omega)d\sigma(\omega)$$

pour toute fonction test ϕ radiale sur \mathbf{R}^N , de sorte que

$$c = \int_{\mathbf{S}^{N-1}} A(\omega)d\sigma(\omega).$$

Autrement dit, la fonction homogène de degré $-N$

$$f(x) = \frac{1}{|x|^N} A\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\},$$

où A est une fonction continue sur \mathbf{S}^{N-1} , se prolonge en une distribution homogène de degré $-N$ sur \mathbf{R}^N si et seulement si

$$\int_{\mathbf{S}^{N-1}} A(\omega)d\sigma(\omega) = 0$$

c'est-à-dire si et seulement si A est de moyenne nulle sur la sphère unité \mathbf{S}^{N-1} .

Lorsque tel est le cas, le lecteur vérifiera sans peine qu'on obtient un tel prolongement par la méthode de la valeur principale de Cauchy — cf. chapitre 3, exemple 3.2.7 :

$$\langle \dot{f}, \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \epsilon} f(x)\phi(x) dx.$$

De plus, toujours grâce au Théorème 4.1.7 ci-dessus, on vérifie aisément que tous les prolongements de f dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ sont de la forme $\dot{f} + \operatorname{Const} \cdot \delta_0$.

4.2 Convolution $C_c^\infty \star \mathcal{D}'$

On a défini au chapitre 1 (section 1.3) le produit de convolution d'une fonction L^1_{loc} par une fonction de classe C^∞ à support compact. Pour tout $u \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$ et tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, rappelons que

$$\phi \star u(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \phi(x-y)u(y)dy, \quad x \in \mathbf{R}^N.$$

Cette définition s'étend sans difficulté au cas du produit de convolution d'une distribution par une fonction de classe C^∞ à support compact.

Définition 4.2.1 (Convolution $C_c^\infty \star \mathcal{D}'$) Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, on définit

$$T \star \phi(x) = \langle T, \phi(x - \cdot) \rangle = \langle T, (\tau_x)_* \tilde{\phi} \rangle, \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^N$$

où on a noté $\tilde{\phi}$ la fonction définie par

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(-x)$$

et où τ_x désigne la translation de vecteur x

$$\tau_x : y \mapsto \tau_x(y) = y + x,$$

c'est-à-dire que

$$(\tau_x)_* f(y) = f \circ \tau_{-x} = f(y - x), \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbf{R}^N.$$

(Voir Définition 3.4.18 et Exemple 3.4.19).

L'analogie entre cette définition et celle concernant les fonctions suggère que la majoration habituelle du support du produit de convolution reste valable dans ce nouveau cadre.

Proposition 4.2.2 (Majoration du support) Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\text{supp}(T \star \phi) \subset \text{supp}(T) + \text{supp}(\phi).$$

Démonstration. Si $x \in \mathbf{R}^N \setminus (\text{supp}(T) + \text{supp}(\phi))$, alors

$$\text{supp}(\phi(x - \cdot)) = \{x\} - \text{supp}(\phi), \quad \text{donc } \text{supp}(\phi(x - \cdot)) \cap \text{supp}(T) = \emptyset.$$

D'après la Proposition 4.1.2 (b), ceci entraîne que

$$T \star \phi(x) = \langle T, \phi(x - \cdot) \rangle = 0.$$

Par conséquent,

$$T \star \phi = 0 \text{ sur l'ouvert } \mathbf{R}^N \setminus (\text{supp}(T) + \text{supp}(\phi)),$$

ce qui montre que cet ouvert est inclus dans le complémentaire du support de $T \star \phi$:

$$\mathbf{R}^N \setminus (\text{supp}(T) + \text{supp}(\phi)) \subset \mathbf{R}^N \setminus (\text{supp}(T \star \phi)).$$

On en déduit l'inclusion annoncée par passage au complémentaire. ■

Comme dans le cas de la convolution d'une fonction localement intégrable par une fonction test, on peut dériver au sens des distributions le produit de convolution d'une distribution par une fonction test en faisant porter la dérivée sur n'importe lequel des deux facteurs.

Proposition 4.2.3 (Régularité de la convolution $C_c^\infty \star \mathcal{D}'$) *Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, le produit de convolution de la distribution T par la fonction test ϕ est de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N , et on a*

$$\partial_x^\alpha (T \star \phi) = (\partial_x^\alpha T) \star \phi = T \star \partial_x^\alpha \phi.$$

Démonstration. D'une part

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha T) \star \phi(x) &= \langle \partial^\alpha T, \phi(x - \cdot) \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha (\phi(x - \cdot)) \rangle \\ &= \langle T, (\partial^\alpha \phi)(x - \cdot) \rangle = T \star \partial^\alpha \phi(x) \end{aligned}$$

puisque

$$(-1)^{|\alpha|} \partial_y^\alpha (\phi(x - y)) = (\partial^\alpha \phi)(x - y).$$

D'autre part, soit $x_0 \in \mathbf{R}^N$ et $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ fonction plateau telle que $\chi = 1$ sur $B(x_0, 1)$ — cf. Lemme 1.4.1. La fonction de classe C^∞

$$(x, y) \mapsto \chi(x)\phi(x - y) \text{ est à support dans } \text{supp}(\chi) \times (\text{supp}(\chi) + \text{supp}(\phi)).$$

D'après la Proposition 3.4.21 de dérivation sous le crochet de dualité, la fonction $x \mapsto \langle T, \chi(x)\phi(x - \cdot) \rangle$ est de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N et

$$\partial^\alpha \langle T, \chi(x)\phi(x - \cdot) \rangle = \langle T, \partial_x^\alpha (\chi(x)\phi(x - \cdot)) \rangle.$$

Sur $B(x_0, 1)$, cette fonction coïncide avec $T \star \phi$ ce qui montre que $T \star \phi$ est de classe C^∞ sur $B(x_0, 1)$ et que, pour tout $x \in B(x_0, 1)$, l'on a

$$\begin{aligned} T \star \partial^\alpha \phi(x) &= \langle T, (\partial^\alpha \phi)(x - \cdot) \rangle = \langle T, \partial_x^\alpha (\phi(x - \cdot)) \rangle \\ &= \partial^\alpha \langle T, \phi(x - \cdot) \rangle = \partial^\alpha (T \star \phi). \end{aligned}$$

On conclut en observant que ceci vaut pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^N$. ■

Remarque 4.2.4 (Convolution $\mathcal{E}' \star C^\infty$) *On définit le produit de convolution d'une distribution à support compact par une fonction C^∞ par la même formule que dans la Définition 4.2.1 : pour $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ et $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$, on pose*

$$S \star \psi(x) = \langle S, \psi(x - \cdot) \rangle, \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^N.$$

Le même argument que ci-dessus montre que

$$S \star \phi \in C^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ pour tout } S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N) \text{ et tout } \phi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$$

et que

$$\partial^\alpha(S \star \psi) = (\partial^\alpha S) \star \psi = S \star (\partial^\alpha \psi).$$

La Proposition 4.2.3 suggère que la convolution par une approximation de l'identité permet d'approcher toute distribution par une suite de fonctions de classe C^∞ .

Théorème 4.2.5 (Régularisation des distributions) Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $(\zeta_\epsilon)_{\epsilon>0}$ une suite régularisante — c'est-à-dire que $\zeta_\epsilon(x) = \epsilon^{-N} \zeta(x/\epsilon)$ avec

$$\zeta \in C^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ à support dans } B(0,1), \quad \zeta \geq 0 \text{ et } \int_{\mathbf{R}^N} \zeta(x) dx = 1.$$

Posons $T_\epsilon = T \star \zeta_\epsilon$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$T_\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ et } T_\epsilon \rightarrow T \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Démonstration. Que T_ϵ appartient à $C^\infty(\mathbf{R}^N)$ pour tout $\epsilon > 0$ découle de la Proposition 4.2.3 ci-dessus.

Observons ensuite que, pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$,

$$\begin{aligned} \langle T_\epsilon, \phi \rangle &= \int_{\mathbf{R}^N} T_\epsilon(x) \phi(x) dx = \int_{\mathbf{R}^N} \langle T, \zeta_\epsilon(x - \cdot) \rangle \phi(x) dx \\ &= \left\langle T, \int_{\mathbf{R}^N} \zeta_\epsilon(x - \cdot) \phi(x) dx \right\rangle \end{aligned}$$

d'après la Proposition 3.4.22 d'intégration sous le crochet de dualité. Or

$$\int_{\mathbf{R}^N} \zeta_\epsilon(x - y) \phi(x) dx = \tilde{\zeta}_\epsilon \star \phi(y), \quad \text{pour tout } y \in \mathbf{R}^N,$$

de sorte que, pour tout $\epsilon \in]0, 1[$,

$$\text{supp}(\tilde{\zeta}_\epsilon \star \phi) \subset K$$

où

$$K = \{x \in \mathbf{R}^N \mid \text{dist}(x, \text{supp}(\phi)) \leq 1\}$$

est compact (car fermé et borné) dans \mathbf{R}^N .

D'autre part, d'après la Proposition 4.2.3,

$$\partial^\alpha (\tilde{\zeta}_\epsilon \star \phi) = \tilde{\zeta}_\epsilon \star \partial^\alpha \phi$$

de sorte que, d'après le Théorème 1.3.13, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$,

$$\partial^\alpha (\tilde{\zeta}_\epsilon \star \phi) \rightarrow \partial^\alpha \phi \text{ uniformément sur } K \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

On vient donc de montrer que, pour toute suite $\epsilon_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et telle que $\epsilon_n \in]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'on a

$$\widetilde{\zeta}_{\epsilon_n} \star \phi \rightarrow \phi \text{ dans } C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Par conséquent (cf. Proposition 3.2.9)

$$\langle T_{\epsilon_n}, \phi \rangle = \langle T, \widetilde{\zeta}_{\epsilon_n} \star \phi \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle \text{ lorsque } n \rightarrow \infty,$$

et comme ceci vaut pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, et toute suite $\epsilon_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ telle que $\epsilon_n \in]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, on en conclut que $T_\epsilon \rightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$. ■

Evidemment, le théorème de régularisation ci-dessus se localise sans difficulté dans un ouvert de \mathbf{R}^N .

Théorème 4.2.6 (Densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$) Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Il existe alors une suite $(T_n)_{n \geq 1}$ de fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω telle que

$$T_n \rightarrow T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$K_n = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 1/n \text{ et } |x| \leq n\},$$

qui est compact (car fermé et borné dans \mathbf{R}^N .)

D'après le Lemme 1.4.1, il existe, pour tout $n \geq 1$, une fonction $\chi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que

$$0 \leq \chi_n \leq 1, \quad \chi_n|_{K_n} = 1, \quad \text{supp}(\chi_n) \subset K_n + B(0, \frac{1}{2n}).$$

Remarquons que

$$K_n + B(0, \frac{1}{2n}) = \bigcup_{x \in K_n} B(x, \frac{1}{2n}) \text{ est ouvert, et que } K_n + B(0, \frac{1}{2n}) \subset K_{2n}.$$

Soit d'autre part une fonction $\zeta \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$\text{supp}(\zeta) \subset B(0, 1), \quad \zeta \geq 0 \text{ et } \int_{\mathbf{R}^N} \zeta(x) dx = 1.$$

Posons

$$\zeta_n(x) = (4n)^N \zeta(4nx).$$

La distribution $\chi_n T$ est à support compact (inclus dans K_{2n}) dans Ω ; on la prolonge par 0 en dehors de Ω , et on continue de noter par abus $\chi_n T$ son prolongement, qui est une distribution à support compact dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$. Enfin, on pose

$$T_n = (\chi_n T) \star \zeta_n \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N).$$

Soit $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$; on notera encore ϕ son prolongement par 0 en dehors de Ω . D'après la Proposition 3.4.22 d'intégration sous le crochet de dualité,

$$\begin{aligned} \langle (\chi_n T) \star \zeta_n, \phi \rangle &= \int_{\mathbf{R}^N} \langle \chi_n T, \zeta_n(x - \cdot) \rangle \phi(x) dx \\ &= \left\langle \chi_n T, \int_{\mathbf{R}^N} \zeta_n(x - \cdot) \phi(x) dx \right\rangle = \langle T, \chi_n(\tilde{\zeta}_n \star \phi) \rangle \end{aligned}$$

où on rappelle que $\tilde{\zeta}_n(x) = \zeta_n(-x)$.

D'après la Proposition 4.2.3 et le Théorème 1.3.13, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$

$$\partial^\alpha(\tilde{\zeta}_n \star \phi) = \tilde{\zeta}_n \star (\partial^\alpha \phi) \rightarrow \partial^\alpha \phi \text{ uniformément sur tout compact de } \mathbf{R}^N$$

lorsque $n \rightarrow \infty$; de plus, pour tout $n \geq 1$

$$\text{supp}(\partial^\alpha(\tilde{\zeta}_n \star \phi)) \subset \text{supp}(\phi) + B(0, \frac{1}{4n}).$$

Choisissons un entier $n_1 > 0$ tel que $\text{supp}(\phi) \subset K_{n_1}$, puis un entier $n_2 > n_1$ tel que, pour tout $n > n_2$, l'on ait

$$K_{n_1} + B(0, \frac{1}{4n_1}) \subset K_n.$$

Alors, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$ et tout $n > n_2$

$$\text{supp}(\partial^\alpha(\tilde{\zeta}_n \star \phi)) \subset \text{supp}(\phi) + B(0, \frac{1}{4n}) \subset K_{n_1} + B(0, \frac{1}{4n_1}) \subset K_n.$$

Ainsi, pour tout $n > n_2$

$$\chi_n(\tilde{\zeta}_n \star \phi) = \tilde{\zeta}_n \star \phi,$$

qui est à support dans le compact $K_{n_1} + \overline{B(0, \frac{1}{4n_1})}$ de Ω .

On a donc

$$\chi_n(\tilde{\zeta}_n \star \phi) \rightarrow \phi \text{ dans } C_c^\infty(\Omega),$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, de sorte que, par continuité séquentielle des distributions (Proposition 3.2.9)

$$\langle \chi_n(T \star \zeta_n), \phi \rangle = \langle T, \chi_n(\tilde{\zeta}_n \star \phi) \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

La fonction test ϕ étant arbitraire, ceci montre que

$$T_n \rightarrow T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Enfin par construction

$$\begin{aligned} \text{supp}(T_n) &\subset \text{supp}(\chi_n T) + \text{supp}(\zeta_n) \\ &\subset \text{supp}(\chi_n) + \text{supp}(\zeta_n) \subset K_{2n} + \overline{B(0, \frac{1}{4n})} \subset K_{4n} \end{aligned}$$

qui est compact dans Ω , de sorte que $T_n|_\Omega \in C_c^\infty(\Omega)$ pour tout $n > n_2$. ■

De même que la convolution par une fonction de classe C^∞ transforme les distributions en fonctions de classe C^∞ , elle transforme la convergence au sens des distributions en convergence uniforme.

Proposition 4.2.7 (Convolution et notions de convergence) *Soient une fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, et $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite de distributions sur \mathbf{R}^N convergeant vers T au sens des distributions. Alors, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$,*

$$\partial^\alpha(T_n \star \phi) \rightarrow \partial^\alpha(T \star \phi) \text{ uniformément sur tout compact de } \mathbf{R}^N$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Démonstration. Sans restreindre la généralité, on supposera que $T = 0$. D'autre part, il suffit de montrer que

$$T_n \star \phi \rightarrow 0 \text{ uniformément sur tout compact de } \mathbf{R}^N$$

et d'appliquer cet énoncé par récurrence en changeant T_n en $\partial^\alpha T_n$, puisque, d'après la Proposition 4.2.3, $\partial^\alpha(T_n \star \phi) = (\partial^\alpha T_n) \star \phi$.

D'abord, pour tout $x \in \mathbf{R}^N$,

$$\langle T_n, \phi(x - \cdot) \rangle \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Posons alors

$$K = \overline{B(0, R)} + \text{supp}(\tilde{\phi})$$

qui est compact dans \mathbf{R}^N , d'après le Lemme 1.3.6. D'après le principe de bornitude uniforme (Théorème 3.3.6), il existe $C > 0$ et $p \in \mathbf{N}$ tels que

$$\sup_{|x| \leq R} |T_n \star \phi(x)| = \sup_{|x| \leq R} |\langle T_n, \phi(x - \cdot) \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{z \in K} |\partial^\alpha \phi(z)|.$$

Montrons que

$$\sup_{|x| \leq R} |T_n \star \phi(x)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Sinon, il existerait $\eta > 0$ et une suite $x_n \in \overline{B(0, R)}$ tels que

$$|T_n \star \phi(x_n)| > \eta, \quad n \geq 1.$$

Comme $\overline{B(0, R)}$ est compacte, il existe $n_k \rightarrow \infty$ telle que la sous-suite

$$x_{n_k} \rightarrow x^* \in \overline{B(0, R)}, \quad \text{pour } k \rightarrow \infty.$$

Alors

$$\begin{aligned} |T_{n_k} \star \phi(x^*)| &\geq |T_{n_k} \star \phi(x_{n_k})| - |T_{n_k} \star \phi(x_{n_k}) - T_{n_k} \star \phi(x^*)| \\ &\geq \eta - N|x^* - x_{n_k}| \max_{1 \leq j \leq N} \sup_{|y| \leq R} |T_{n_k} \star \partial_j \phi(y)| \\ &\geq \eta - N|x^* - x_{n_k}| \max_{1 \leq j \leq N} C \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{z \in K} |\partial^\alpha \partial_j \phi(z)| \\ &\geq \eta - C'|x^* - x_{n_k}| \geq \eta/2 \end{aligned}$$

avec

$$C' = NC \max_{1 \leq j \leq N} \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{z \in K} |\partial^\alpha \partial_j \phi(z)|,$$

où la deuxième inégalité ci-dessus découle du théorème des accroissements finis, tandis que la troisième est une conséquence de l'estimation uniforme sur $T_n \star \phi$ obtenue plus haut.

Par conséquent

$$\varliminf_{k \rightarrow \infty} |T_{n_k} \star \phi(x^*)| \geq \eta > 0,$$

mais ceci est en contradiction avec le fait que $T_n \star \phi(x) \rightarrow 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

On en déduit que l'hypothèse ci-dessus relative à l'existence du réel η est fautive, c'est-à-dire que

$$\sup_{|x| \leq R} |T_n \star \phi(x)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Or cela signifie précisément que $T_n \star \phi \rightarrow 0$ uniformément sur $\overline{B(0, R)}$ pour tout $R > 0$. ■

4.3 Opérations sur les distributions (suite)

Nous allons définir de nouvelles opérations sur les distributions par densité des fonctions de classe C^∞ dans l'espace des distributions — d'après le Théorème 4.2.6 ci-dessus.

4.3.1 Produit tensoriel de deux distributions

On a vu au chapitre précédent qu'il n'est pas possible de définir en toute généralité le produit de deux distributions.

Toutefois, on peut effectuer le produit de deux distributions *dans des variables différentes* — c'est-à-dire que l'on peut étendre aux distributions l'opération qui, à deux fonctions

$$f : \Omega_1 \rightarrow \mathbf{R} \text{ et } g : \Omega_2 \rightarrow \mathbf{R}$$

associe la fonction — souvent notée $f \otimes g$ — définie par

$$f \otimes g : \Omega_1 \times \Omega_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto f(x_1)g(x_2) \in \mathbf{R}.$$

Cette opération est appelée *produit tensoriel* des fonctions f et g , et elle se généralise sans difficulté aux distributions, de la façon suivante.

Définition 4.3.1 (Produit tensoriel de deux distributions) *Soient Ω_1 et Ω_2 ouverts de \mathbf{R}^m et \mathbf{R}^n respectivement, ainsi que $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. On définit une distribution $S \otimes T$ sur l'ouvert $\Omega_1 \times \Omega_2$ de $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ par la formule*

$$\langle S \otimes T, \phi \rangle = \left\langle S, \langle T, \phi(x_1, \cdot) \rangle \right\rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

On aurait pu également définir $S \otimes T$ par la formule

$$\langle S \otimes T, \phi \rangle = \left\langle T, \langle S, \phi(\cdot, x_2) \rangle \right\rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

Ces deux définitions sont équivalentes, comme le montre la

Proposition 4.3.2 *Soient Ω_1 et Ω_2 ouverts de \mathbf{R}^m et \mathbf{R}^n respectivement, ainsi que $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$, on a*

$$\langle S \otimes T, \phi \rangle = \left\langle S, \langle T, \phi(x_1, \cdot) \rangle \right\rangle = \left\langle T, \langle S, \phi(\cdot, x_2) \rangle \right\rangle.$$

Commençons par démontrer le lemme suivant :

Lemme 4.3.3 *Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ telle que*

$$\langle u, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle = 0$$

pour tout $\phi_1 \in C_c^\infty(\Omega_1)$ et $\phi_2 \in C_c^\infty(\Omega_2)$, en notant

$$\phi_1 \otimes \phi_2(x_1, x_2) = \phi_1(x_1)\phi_2(x_2), \quad x_1 \in \Omega_1, \quad x_2 \in \Omega_2.$$

Alors $u = 0$.

Démonstration de la proposition. Notons U la forme linéaire définie par

$$C_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2) \ni \phi \mapsto \left\langle S, \langle T, \phi(x_1, \cdot) \rangle \right\rangle.$$

Vérifions d'abord qu'il s'agit bien d'une distribution sur $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Supposons que ϕ est à support dans $K_1 \times K_2$, où K_1 et K_2 sont compacts dans Ω_1 et Ω_2 respectivement. Alors

$$\left| \left\langle S, \langle T, \phi(x_1, \cdot) \rangle \right\rangle \right| \leq C_1 \max_{|\alpha| \leq p_1} \sup_{x_1 \in K_1} |\partial_{x_1}^\alpha \langle T, \phi(x_1, \cdot) \rangle|$$

où C_1 et p_1 sont les paramètres intervenant dans la propriété de continuité de S sur le compact K_1 . Puis, par dérivation sous le crochet de dualité

$$\partial_{x_1}^\alpha \langle T, \phi(x_1, \cdot) \rangle = \langle T, \partial_{x_1}^\alpha \phi(x_1, \cdot) \rangle.$$

La propriété de continuité de T sur le compact K_2 entraîne que

$$|\partial_{x_1}^\alpha \langle T, \phi(x_1, \cdot) \rangle| \leq C_2 \max_{|\beta| \leq p_2} \sup_{x_2 \in K_2} |\partial_{x_2}^\beta \partial_{x_1}^\alpha \phi(x_1, x_2)|$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \left| \left\langle S, \langle T, \phi(x_1, \cdot) \rangle \right\rangle \right| &\leq C_1 C_2 \max_{|\alpha| \leq p_1, |\beta| \leq p_2} \sup_{x_1 \in K_1, x_2 \in K_2} |\partial_{x_2}^\beta \partial_{x_1}^\alpha \phi(x_1, x_2)| \\ &\leq C_1 C_2 \max_{|\alpha| + |\beta| \leq p_1 + p_2} \sup_{x_1 \in K_1, x_2 \in K_2} |\partial_{x_2}^\beta \partial_{x_1}^\alpha \phi(x_1, x_2)|. \end{aligned}$$

Ainsi, la forme linéaire U est une distribution sur $\Omega_1 \times \Omega_2$.

On montrerait de même que la forme linéaire V définie par

$$C_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2) \ni \phi \mapsto \left\langle T, \langle S, \phi(\cdot, x_2) \rangle \right\rangle$$

est une distribution sur $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Considérons maintenant la distribution $W = U - V$. Pour toute fonction test $\phi_1 \in C_c^\infty(\Omega_1)$ et $\phi_2 \in C_c^\infty(\Omega_2)$, on a

$$\langle U, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle = \left\langle S, \langle T, \phi_1(x_1)\phi_2 \rangle \right\rangle = \left\langle S, \langle T, \phi_2 \rangle \phi_1 \right\rangle = \langle S, \phi_1 \rangle \langle T, \phi_2 \rangle$$

et

$$\langle V, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle = \left\langle T, \langle S, \phi_1\phi_2(x_2) \rangle \right\rangle = \left\langle T, \langle S, \phi_1 \rangle \phi_2 \right\rangle = \langle S, \phi_1 \rangle \langle T, \phi_2 \rangle$$

de sorte que

$$\langle W, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle = 0.$$

D'après le lemme, $W = 0$, d'où $U = V$ ce qui implique l'égalité entre les deux définitions de $S \otimes T$. ■

Démonstration du lemme. Soient K_1 et K_2 compacts dans Ω_1 et Ω_2 respectivement. D'après le Lemme 1.4.1, il existe deux fonctions $\chi_1 \in C_c^\infty(\Omega_1)$ et $\chi_2 \in C_c^\infty(\Omega_2)$ telles que

$$\chi_j = 1 \text{ sur un voisinage de } K_j, \text{ pour } j = 1, 2.$$

Alors la distribution $v = (\chi_1 \otimes \chi_2)u$ est à support compact dans $\Omega_1 \times \Omega_2$; on notera encore v son prolongement par 0 en dehors de $\Omega_1 \times \Omega_2$. De plus

$$\langle v, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle = \langle u, (\chi_1\phi_1) \otimes (\chi_2\phi_2) \rangle = 0$$

par hypothèse, pour tout $\phi_1 \in C_c^\infty(\mathbf{R}^m)$ ainsi que pour tout $\phi_2 \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Soient maintenant $\zeta_1 \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$ et $\zeta_2 \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ telles que

$$\begin{aligned} \text{supp}(\zeta_1) \subset B(0, 1), \quad \zeta_1 \geq 0, \quad \int_{\mathbf{R}^m} \zeta_1(x_1) dx_1 = 1, \\ \text{supp}(\zeta_2) \subset B(0, 1), \quad \zeta_2 \geq 0, \quad \int_{\mathbf{R}^n} \zeta_2(x_2) dx_2 = 1. \end{aligned}$$

Notons

$$\zeta_{1\epsilon}(x_1) = \frac{1}{\epsilon^m} \zeta_1\left(\frac{x_1}{\epsilon}\right), \quad \zeta_{2\epsilon}(x_2) = \frac{1}{\epsilon^n} \zeta_2\left(\frac{x_2}{\epsilon}\right).$$

Alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\langle v, \zeta_{1\epsilon}(x_1 - \cdot) \otimes \zeta_{2\epsilon}(x_2 - \cdot) \rangle = 0, \quad x_1 \in \mathbf{R}^m, \quad x_2 \in \mathbf{R}^n,$$

ce qui s'écrit encore

$$v \star (\zeta_{1\epsilon} \otimes \zeta_{2\epsilon})(x_1, x_2) = 0, \quad \text{pour tout } x_1 \in \mathbf{R}^m, x_2 \in \mathbf{R}^n.$$

D'après le Théorème 4.2.5

$$0 = v \star (\zeta_{1\epsilon} \otimes \zeta_{2\epsilon}) \rightarrow v \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n) \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

On en déduit que $v = 0$.

D'autre part, pour toute fonction test $\psi \in C^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ à support dans $K_1 \times K_2$,

$$\langle u, \psi \rangle = \langle u, (\chi_1 \otimes \chi_2)\psi \rangle = \langle v, \psi \rangle = 0.$$

Or ceci vaut pour tous compacts K_1 et K_2 de Ω_1 et Ω_2 , de sorte que

$$\langle u, \psi \rangle = 0 \text{ pour tout } \psi \in C_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2),$$

c'est-à-dire que $u = 0$. ■

4.3.2 Composition d'une distribution et d'une application C^∞

On a vu au chapitre précédent la définition du produit de composition $T \circ \chi$ d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(V)$ par un difféomorphisme $\chi : U \rightarrow V$ de classe C^∞ , où U et V sont deux ouverts de \mathbf{R}^N .

Nous allons expliquer comment définir, plus généralement, le produit de composition d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(V)$ par une application $f : U \rightarrow V$ de classe C^∞ entre deux ouverts U et V de \mathbf{R}^N et \mathbf{R}^n respectivement, mais avec $n < N$, de sorte que f n'est en aucun cas un difféomorphisme. Nous nous intéresserons exclusivement au cas $n = 1$, fort important pour les applications.

Comme on va le voir, il s'agit d'une première application de la notion de produit tensoriel que nous venons de définir.

Supposons dans un premier temps que

$$\partial_{x_1} f(x_0) \neq 0, \quad \text{où } x_0 \in U.$$

Considérons alors l'application

$$F : U \rightarrow \mathbf{R}^N, \quad x \mapsto F(x) = (f(x), x_2, \dots, x_N).$$

Cette application est de classe C^∞ sur U et sa matrice jacobienne est de la forme (par blocs)

$$DF(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) & * \\ 0 & I_{N-1} \end{pmatrix}, \quad x \in U.$$

où I_{n-1} est le bloc identité de taille $N - 1$. Ainsi $DF(x_0)$ est une matrice inversible. Il existe donc un voisinage ouvert O_{x_0} de x_0 dans U tel que F induise un C^∞ -difféomorphisme de O_{x_0} sur $F(O_{x_0})$ qui est ouvert dans $V \times \mathbf{R}^{N-1}$.

Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(V)$, on définit $T \circ f \in \mathcal{D}'(O_{x_0})$ par la formule

$$T \circ f = (T \otimes \mathbf{1}_{\mathbf{R}^{N-1}}) \circ F \text{ dans } \mathcal{D}'(O_{x_0}),$$

où 1 est la fonction constante égale à 1 sur \mathbf{R}^{N-1} .

Lorsque T est de la forme T_u où u est une fonction localement intégrable sur l'ouvert V de \mathbf{R} , le produit de composition $T_u \circ f \in \mathcal{D}'(O_{x_0})$ coïncide avec la distribution $T_{u \circ f}$ définie sur O_{x_0} par le produit de composition usuel des fonctions u et f . En effet, pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(O_{x_0})$, la formule du changement de variables dans les intégrales montre que

$$\begin{aligned} \langle T_u \circ f, \phi \rangle &= \langle T_u \otimes \mathbf{1}_{\mathbf{R}^{N-1}}, F_* \phi \rangle \\ &= \int_{F(O_{x_0})} (u \otimes \mathbf{1}_{\mathbf{R}^{N-1}})(y) \phi(F^{-1}(y)) |\det(DF(F^{-1}(y)))|^{-1} dy \\ &= \int_{O_{x_0}} (u \otimes \mathbf{1}_{\mathbf{R}^{N-1}}) \circ F(x) \phi(x) dx = \int_{O_{x_0}} u(f(x)) \phi(x) dx = \langle T_{u \circ f}, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Étudions maintenant le cas où

$$\partial_{x_1} f(x) \neq 0, \text{ pour tout } x \in U.$$

Comme ci-dessus, on associe à tout point $x \in U$ un voisinage ouvert O_x de x dans U tel que $T \circ f$ définisse une distribution sur O_x pour tout $T \in \mathcal{D}'(V)$. Soit T_x cet élément de $\mathcal{D}'(O_x)$.

La famille de distributions $(T_x)_{x \in U}$ vérifie les hypothèses du principe de recollement (Proposition 3.4.17), de sorte qu'il existe une unique distribution $T \circ f$ sur U telle que

$$T \circ f|_{O_x} = T_x \quad \text{pour tout } x \in U.$$

Plus généralement, supposons que

$$df(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in U.$$

Posons alors

$$U_k = \{x \in U \mid \partial_{x_k} f(x) \neq 0\}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Evidemment chaque U_k est ouvert (comme image réciproque de l'ouvert \mathbf{R}^* par la fonction continue $\partial_{x_k} f$) et, comme df ne s'annule en aucun point de U , on a

$$U \subset U_1 \cup \dots \cup U_N.$$

Soit maintenant K compact de \mathbf{R}^N contenu dans U ; choisissons une partition de l'unité ψ_1, \dots, ψ_N subordonnée au recouvrement de K formé des ouverts U_1, \dots, U_N , c'est-à-dire que

$$\psi_k \in C_c^\infty(U_k), \quad 0 \leq \psi_k \text{ pour tout } k = 1, \dots, N$$

et

$$\sum_{k=1}^N \psi_k = 1 \text{ sur un voisinage ouvert de } K.$$

Pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(U)$ à support dans K , on a

$$\phi = \sum_{k=1}^N \psi_k \phi$$

ce qui suggère de définir

$$\langle T \circ f, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(U), C_c^\infty(U)} = \sum_{k=1}^N \langle T \circ f|_{U_k}, \psi_k \phi \rangle_{\mathcal{D}'(U_k), C_c^\infty(U_k)}.$$

Puis, pour chaque U_k , on sait que

$$\partial_{x_k} f(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in U_k$$

ce qui permet de se ramener au cas étudié ci-dessus. Autrement dit, on pose

$$F_k : U_k \ni x \mapsto F_k(x) = (x_1, \dots, x_{k-1}, f(x), x_{k+1}, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N$$

et on montre que le déterminant jacobien (par blocs)

$$\det(DF_k(x)) = \begin{vmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{x_k} f(x) & 0 \\ 0 & 0 & I_{N-k} \end{vmatrix} = \partial_{x_k} f(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in U_k.$$

Comme dans le cas où $k = 1$, on définit alors

$$T \circ f|_{U_k} = (\mathbf{1}_{\mathbf{R}^{k-1}} \otimes T \otimes \mathbf{1}_{\mathbf{R}^{N-k}}) \circ F_k$$

comme élément de $\mathcal{D}'(U_k)$, et

$$T \circ f = \sum_{k=1}^N \psi_k ((\mathbf{1}_{k-1} \otimes T \otimes \mathbf{1}_{N-k}) \circ F_k) \text{ sur l'espace } C_K^\infty(U),$$

où $C_K^\infty(U)$ désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ sur U à support dans K .

On admettra que cette définition ne dépend ni du choix de la partition de l'unité ψ_1, \dots, ψ_N , ni de celui des difféomorphismes F_k dont l'une des coordonnées est l'application f donnée, et que la donnée des formes linéaires ci-dessus pour tout compact $K \subset U$ définit une distribution sur U , qui coïncide bien avec la définition habituelle du produit de composition lorsque T est de la forme T_u avec u fonction localement intégrable sur V . Aucune de ces vérifications n'est très difficile, mais les faire en détail alourdirait considérablement notre exposé.

Exemple 4.3.4 (Distributions de la forme $\delta_0 \circ f$) Soit donc $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ une application de classe C^∞ telle que

$$df(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in U.$$

On sait qu'alors $\Sigma = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$ est soit vide, soit une hypersurface de \mathbf{R}^N de classe C^∞ , et que le champ de vecteurs

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_N} f(x) \end{pmatrix}$$

définit, en tout point $x \in \Sigma$, un vecteur non nul orthogonal à l'hyperplan tangent à Σ au point x . On notera $d\sigma$ l'élément de surface sur Σ (cf. section 6.2 pour un rappel de ces notions.)

Sous ces hypothèses, la distribution $\delta_0 \circ f$ est bien définie, d'après la discussion ci-dessus. On trouve alors que

$$\langle \delta_0 \circ f, \phi \rangle = \int_{\Sigma} \phi(x) |\nabla_x f(x)|^{-1} d\sigma(x)$$

pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(U)$.

La démonstration de cette formule ne pose aucune difficulté compte tenu de la discussion précédente; le lecteur est invité à l'écrire à titre d'exercice.

4.4 Produit de convolution des distributions

On a vu dans la section 4.2 qu'on peut définir le produit de convolution d'une fonction C^∞ à support compact et d'une distribution, et que le résultat de cette opération est une fonction de classe C^∞ . On va donc pouvoir procéder comme dans le chapitre 3 (section 3.4) pour étendre le produit de convolution au cas de deux distributions par un simple argument de transposition pour la dualité $\mathcal{E}' - C^\infty$.

L'extension du produit de convolution au cas de deux distributions est absolument fondamentale dans l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants : nous en verrons de très nombreuses applications dans la partie II de ce cours. Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$, on notera \tilde{T} la composée de T avec l'antipodie $x \mapsto -x$:

$$\tilde{T} := T \circ (-Id_{\mathbf{R}^N}).$$

Autrement dit, pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$

$$\langle \tilde{T}, \phi \rangle = \langle T, \tilde{\phi} \rangle, \quad \text{où } \tilde{\phi}(x) = \phi(-x).$$

Définition 4.4.1 (Produit de convolution $\mathcal{D}' \star \mathcal{E}'$) Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et tout $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$, on définit le produit de convolution $T \star S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ par la formule

$$\langle T \star S, \phi \rangle = \langle T, \tilde{S} \star \phi \rangle$$

pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$.

Cette nouvelle extension du produit de convolution conduit à la même majoration du support que dans le cas des fonctions.

Proposition 4.4.2 (Majoration du support) Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et tout $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\text{supp}(T \star S) \subset \text{supp}(T) + \text{supp}(S).$$

Démonstration. A nouveau, $\text{supp}(T) + \text{supp}(S)$ est fermé dans \mathbf{R}^N puisque $\text{supp}(S)$ est compact dans \mathbf{R}^N — de même que dans le cas des fonctions : cf. Lemme 1.3.6.

Soient $O = \mathbf{R}^N \setminus (\text{supp}(T) + \text{supp}(S))$ et $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ à support dans l'ouvert O .

D'après les Propositions 4.2.2 et 4.2.3, la fonction $\tilde{S} \star \phi$ est de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N et à support dans

$$\text{supp}(\tilde{S}) + \text{supp}(\phi) = \{-x + y \mid x \in \text{supp}(S) \text{ et } y \in \text{supp}(T)\}.$$

Or

$$\text{supp}(T) \cap (\text{supp}(\tilde{S}) + \text{supp}(\phi)) = \emptyset$$

faute de quoi il existerait $x \in \text{supp}(S)$ et $y \in \text{supp}(\phi)$ tels que

$$y \in \text{supp}(T) + \{x\} \subset \text{supp}(T) + \text{supp}(S)$$

ce qui contredit l'hypothèse que ϕ est à support dans O .

Comme $\tilde{S} \star \phi$ est une fonction de classe C^∞ sur Ω à support compact ne rencontrant pas $\text{supp}(T)$, on déduit du point (b) de la Proposition 4.1.2 que

$$\langle T \star S, \phi \rangle = \langle T, \tilde{S} \star \phi \rangle = 0.$$

Par conséquent $T \star S|_O = 0$, d'où la majoration annoncée pour $\text{supp}(T \star S)$. ■

Exemple 4.4.3 (Convolution par la masse de Dirac) La masse de Dirac en l'origine est l'élément neutre pour le produit de convolution : pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$, on a

$$T \star \delta_0 = T$$

Plus généralement, pour tout $a \in \mathbf{R}^N$, notons τ_a la translation de vecteur a , c'est-à-dire

$$\tau_a : \mathbf{R}^N \ni x \mapsto x + a.$$

On vérifie alors sans aucune difficulté que, pour tout $a \in \mathbf{R}^N$,

$$T \star \delta_a = T \circ \tau_{-a}.$$

Observons que, sous les mêmes hypothèses que dans la définition ci-dessus, c'est-à-dire pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et tout $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ on aurait également pu définir le produit de convolution $S \star T$ par la formule

$$\langle S \star T, \phi \rangle = \langle S, \tilde{T} \star \phi \rangle.$$

En effet, $\tilde{T} \star \phi$ est une fonction de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N et S une distribution à support compact dans \mathbf{R}^N , de sorte que le membre de droite de l'égalité ci-dessus est bien défini grâce à l'extension de la dualité de $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ à $C^\infty(\mathbf{R}^N)$ — voir Proposition 4.1.4.

En réalité cette distinction est sans objet comme le montre la proposition ci-dessous.

Proposition 4.4.4 (Commutativité de la convolution) *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$. Alors*

(a) *pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$*

$$\langle S, \tilde{T} \star \phi \rangle = \langle T, \tilde{S} \star \phi \rangle;$$

(b) *si on définit la distribution $S \star T$ par la formule*

$$\langle S \star T, \phi \rangle = \langle S, \tilde{T} \star \phi \rangle, \quad \text{pour tout } \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$$

alors

$$S \star T = T \star S.$$

Démonstration. Vérifions l'énoncé (a). Pour cela, soit $\zeta \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$\text{supp}(\zeta) \subset B(0, 1), \quad \zeta \geq 0, \quad \int_{\mathbf{R}^N} \zeta(x) dx = 1.$$

Posons

$$\zeta_n(x) = n^N \zeta(nx), \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

ainsi que

$$S_n = S \star \zeta_n, \quad n \geq 1.$$

D'après les Propositions 4.2.2 et 4.2.3, S_n est une fonction de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N à support dans $\text{supp}(S) + B(0, \frac{1}{n})$ qui est compact (car fermé borné dans \mathbf{R}^N .)

D'après le théorème de Fubini pour le crochet de dualité (Proposition 3.4.22)

$$\begin{aligned} \langle S_n, \tilde{T} \star \phi \rangle &= \int_{\mathbf{R}^N} S_n(x) \langle \tilde{T}, \phi(x - \cdot) \rangle dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} S_n(x) \langle T, \phi(x + \cdot) \rangle dx \\ &= \left\langle T, \int_{\mathbf{R}^N} S_n(x) \phi(x + \cdot) dx \right\rangle \\ &= \left\langle T, \int_{\mathbf{R}^N} S_n(-x) \phi(-x + \cdot) dx \right\rangle = \langle T, \tilde{S}_n \star \phi \rangle \end{aligned}$$

Passons ensuite à la limite en $n \rightarrow \infty$ dans chaque membre de cette égalité. On sait, d'après le Théorème 4.2.5, que

$$S_n \rightarrow S \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \text{ pour } n \rightarrow \infty$$

et que

$$\text{supp}(S_n) \subset \text{supp}(S) + \overline{B(0,1)}, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Soit d'une part $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, identiquement égale à 1 sur un voisinage ouvert du compact $\text{supp}(S) + \overline{B(0,1)}$. Alors

$$\langle S_n, \tilde{T} \star \phi \rangle = \langle S_n, \chi(\tilde{T} \star \phi) \rangle \rightarrow \langle S, \chi(\tilde{T} \star \phi) \rangle = \langle S, \tilde{T} \star \phi \rangle$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

D'autre part

$$\text{supp}(\tilde{S}_n \star \phi) \subset K \text{ pour tout } n \geq 1$$

avec

$$K = \text{supp}(\phi) + \text{supp}(\tilde{S}) + \overline{B(0,1)}$$

(d'après la Proposition 4.2.2) qui est compact dans \mathbf{R}^N car fermé (d'après le Lemme 1.3.6) et borné. De plus, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$, on a

$$\partial^\alpha(\tilde{S}_n \star \phi) = \tilde{S}_n \star (\partial^\alpha \phi) \rightarrow \tilde{S} \star (\partial^\alpha \phi) = \partial^\alpha(\tilde{S} \star \phi)$$

uniformément sur K , d'après la Proposition 4.2.7.

Par conséquent

$$\tilde{S}_n \star \phi \rightarrow \tilde{S} \star \phi \text{ dans } C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Par continuité séquentielle de la distribution T (cf. Proposition 3.2.9)

$$\langle T, \tilde{S}_n \star \phi \rangle \rightarrow \langle T, \tilde{S} \star \phi \rangle$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, ce qui implique (a).

Enfin, l'énoncé (b) est une conséquence triviale du (a). ■

Théorème 4.4.5 (Continuité séquentielle du produit de convolution)

Soient des suites $(T_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $(S_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ telles que

$$T_n \rightarrow T \text{ et } S_n \rightarrow S \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Supposons en outre qu'il existe un compact $K \subset \mathbf{R}^N$ fixe tel que

$$\text{supp}(S_n) \subset K \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Alors

$$T_n \star S_n \rightarrow T \star S \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Démonstration. Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$; écrivons que

$$\langle T_n \star S_n, \phi \rangle = \langle T_n, \tilde{S}_n \star \phi \rangle$$

Par hypothèse, pour tout $n \geq 1$

$$\text{supp}(\tilde{S}_n \star \phi) \subset \text{supp}(\tilde{S}_n) + \text{supp}(\phi) \subset \text{supp}(\phi) - K,$$

d'après la Proposition 4.2.2. (Rappelons que

$$A - B = \{x - y \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$$

et que $A - B$ est fermé lorsque A et B sont compacts — voir Lemme 1.3.6 — et borné dans \mathbf{R}^N , donc compact.) Et d'après la Proposition 4.2.7,

$$\partial^\alpha(\tilde{S}_n \star \phi) = (\partial^\alpha \tilde{S}_n) \star \phi \rightarrow (\partial^\alpha \tilde{S}) \star \phi = \partial^\alpha(\tilde{S} \star \phi) \text{ uniformément sur } \mathbf{R}^N$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Autrement dit,

$$\tilde{S}_n \star \phi \rightarrow \tilde{S} \star \phi \quad \text{dans } C_c^\infty(\mathbf{R}^N).$$

Alors, d'après la Proposition 3.3.8,

$$\langle T_n \star S_n, \phi \rangle = \langle T_n, \tilde{S}_n \star \phi \rangle \rightarrow \langle T, \tilde{S} \star \phi \rangle = \langle T \star S, \phi \rangle$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. La fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ étant arbitraire, on en déduit que $T_n \star S_n \rightarrow T \star S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ pour $n \rightarrow \infty$. ■

Remarque. Si $(\zeta_\epsilon)_{0 < \epsilon < \epsilon_0}$ est une suite régularisante — voir Définition 1.3.12 — il résulte, comme on l'a dit, de la Proposition 3.3.5, que $\zeta_\epsilon \rightarrow \delta_0$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$. De plus, toutes les fonctions de la famille $(\zeta_\epsilon)_{0 < \epsilon < \epsilon_0}$ sont à support dans un même compact de \mathbf{R}^N . D'après le Théorème 4.4.5 ci-dessus, il s'ensuit donc que, pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\zeta_\epsilon \star T \rightarrow T \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0.$$

On retrouve ainsi le Théorème 4.2.5 de régularisation des distributions.

Théorème 4.4.6 (Dérivation et convolution) Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$. Alors, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$, on a

$$\partial^\alpha(T \star S) = (\partial^\alpha T) \star S = T \star (\partial^\alpha S).$$

Démonstration. Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$. Alors

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha(T \star S), \phi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle T \star S, \partial^\alpha \phi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \tilde{S} \star \partial^\alpha \phi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha(\tilde{S} \star \phi) \rangle \text{ d'après la Proposition 4.2.3} \\ &= \langle \partial^\alpha T, \tilde{S} \star \phi \rangle = \langle (\partial^\alpha T) \star S, \phi \rangle. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha (T \star S), \phi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \tilde{S} \star \partial^\alpha \phi \rangle \\ &= \langle T, (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \tilde{S}) \star \phi \rangle \text{ d'après la Proposition 4.2.3} \\ &= \langle T, \widetilde{(\partial^\alpha S)} \star \phi \rangle = \langle T \star \partial^\alpha S, \phi \rangle. \end{aligned}$$

■

Exemple 4.4.7 (Dérivation et convolution par les dérivées de δ_0) Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$, et pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$, on a

$$T \star \partial^\alpha \delta_0 = \partial^\alpha T.$$

Cet exemple, qui montre que la dérivation s'exprime comme un produit de convolution (avec la dérivée de la masse de Dirac) suggère une notion de “dérivée d'ordre fractionnaire”.

Exemple 4.4.8 (Dérivée fractionnaire) On a introduit les distributions χ_+^a au chapitre 3 — voir Exemple 3.6.7. On rappelle que

$$\chi_+^a = \frac{\text{pf } x_+^a}{\Gamma(a+1)} \text{ pour tout } a \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_-^*$$

et que

$$\chi_+^0 = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*} \text{ (fonction d'Heaviside), } \chi_+^{-1} = \delta_0, \quad \chi_+^{-k} = \delta^{(k-1)} \text{ si } k > 1.$$

Autrement dit, les dérivées successives de la masse de Dirac sont plongées dans la famille des distributions χ_+^a indexées par $a \in \mathbf{R}$. Au vu de l'exemple précédent, cela suggère de définir une notion de “dérivée d'ordre fractionnaire” par la formule

$$\partial^a T = T \star \chi_+^{-a-1}, \quad a \in \mathbf{R}_+, \text{ pour } T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}).$$

Ces distributions jouent un rôle important dans la théorie des “conditions aux limites transparentes” pour les équations aux dérivées partielles. Ces conditions aux limites prescrites au bord du domaine de calcul permettent de simuler numériquement la propagation d'ondes dans un domaine infini.

Dans un code numérique (de type différences finies, par exemple) il est évidemment impossible d'implémenter un domaine de calcul infini. Le domaine de calcul est donc nécessairement borné, ce qui introduit des risques de réflexions parasites des ondes au bord de ce domaine de calcul. Les conditions transparentes sont précisément des conditions aux bord du domaine de calcul permettant aux ondes d'en sortir sans réflexion parasite.

Théorème 4.4.9 (Associativité du produit de convolution) Soient R, S et T , trois distributions sur \mathbf{R}^N . Supposons qu'au moins deux de ces distributions sont à support compact dans \mathbf{R}^N . Alors

$$R \star (S \star T) = (R \star S) \star T.$$

Démonstration. En utilisant la commutativité, on peut toujours se ramener au cas où S et T sont à support compact. Quitte à prendre $R > 0$ assez grand, on supposera que

$$\text{supp}(S), \text{supp}(T) \subset B(0, R).$$

Soit $\zeta \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$\text{supp}(\zeta) \subset B(0, 1), \quad \zeta \geq 0, \quad \int_{\mathbf{R}^N} \zeta(x) dx = 1.$$

Pour tout $n \geq 1$, définissons ζ_n par la formule

$$\zeta_n(x) = n^N \zeta(nx).$$

Vérifions que

$$R \star (S_n \star T_n) = (R \star S_n) \star T_n, \quad n \geq 1.$$

En effet

$$\begin{aligned} R \star (S_n \star T_n)(x) &= \langle R, S_n \star T_n(x - \cdot) \rangle \\ &= \left\langle R, \int_{\mathbf{R}^N} S_n(x - \cdot - z) T_n(z) dz \right\rangle \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} \langle R, S_n(x - \cdot - z) \rangle T_n(z) dz \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} R \star S_n(x - z) T_n(z) dz = (R \star S_n) \star T_n(x). \end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini pour le crochet de dualité (Proposition 3.4.22).

Passons maintenant à la limite pour $n \rightarrow \infty$.

Par construction, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\text{supp}(S_n) \text{ et } \text{supp}(T_n) \subset B(0, R + 1)$$

et

$$S_n \rightarrow S, \quad T_n \rightarrow T \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

D'après le théorème de continuité séquentielle du produit de convolution, on a d'une part

$$R \star S_n \rightarrow R \star S, \text{ puis } (R \star S_n) \star T_n \rightarrow (R \star S) \star T \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

D'autre part, on démontre de même que

$$S_n \star T_n \rightarrow S \star T \text{ et } \text{supp}(S_n \star T_n) \subset \text{supp}(S_n) + \text{supp}(T_n) \subset B(0, 2R + 2).$$

Par continuité séquentielle du produit de convolution, on en déduit encore que

$$R \star (S_n \star T_n) \rightarrow R \star (S \star T) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \text{ pour } n \rightarrow \infty,$$

ce qui entraîne que $R \star (S \star T) = (R \star S) \star T$. ■

On prendra bien garde au fait que ce résultat peut être faux si une seule des trois distributions est à support compact, bien que les membres de droite et de gauche de l'égalité ci-dessus aient un sens. Voici un exemple de ce phénomène.

Exemple 4.4.10 (Compacité des supports et associativité) Dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, notons H la fonction d'Heaviside :

$$H(x) = 1 \text{ si } x \geq 0, \quad H(x) = 0 \text{ si } x < 0.$$

Alors

$$(1 \star \delta'_0) \star H = 1' \star H = 0 \star H = 0,$$

tandis que

$$1 \star (\delta'_0 \star H) = 1 \star H' = 1 \star \delta_0 = 1.$$

4.5 Exercices

Exercice 1. Montrer que la forme linéaire

$$C_c^\infty(\mathbf{R}) \ni \phi \mapsto \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\phi\left(\frac{1}{k}\right) - \phi(0) \right)$$

définit une distribution. Quel est son support ?

Exercice 2. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ suite de nombres réels. On considère les formes linéaires

$$C_c^\infty(\mathbf{R}_+^*) \ni \phi \mapsto T(\phi) = \sum_{n \geq 1} a_n \phi\left(\frac{1}{n}\right),$$

et

$$C_c^\infty(\mathbf{R}_+^*) \ni \phi \mapsto S(\phi) = \sum_{n \geq 1} a_n \phi^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right).$$

a) Montrer que T et S sont des distributions sur \mathbf{R}_+^* .

b) Montrer qu'il y a équivalence entre

$$\text{il existe } u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}) \text{ telle que } T = u|_{]0, \infty[},$$

et

$$\text{il existe } l \geq 0 \text{ tel que } a_n = O(n^l) \text{ pour } n \rightarrow \infty.$$

c) Montrer qu'il y a équivalence entre

$$\text{il existe } v \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}) \text{ telle que } S = v|_{]0, \infty[},$$

et

$$\text{il existe } N \geq 0 \text{ tel que } a_n = 0 \text{ pour } n \geq N.$$

Exercice 3. Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}_+^*)$ telle que $f \geq 0$ p.p.. Montrer que f se prolonge en une distribution sur \mathbf{R} si et seulement si

$$\text{il existe } l \geq 0 \text{ tel que } \int_{\epsilon}^1 f(x)dx = O(\epsilon^{-l}) \text{ pour } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Exercice 4. Déterminer toutes les distributions $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telles que

$$\langle u, \phi \star \psi \rangle = \langle u, \phi \rangle \langle u, \psi \rangle \quad \text{pour } \phi, \psi \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}).$$

Exercice 5.

a) Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telle que $u' \in C(\mathbf{R})$. Montrer que $u \in C^1(\mathbf{R})$.

b) Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ telle que $\partial_j u \in C(\mathbf{R}^N)$ pour tout $j = 1, \dots, N$. Soit $(\zeta_{\epsilon})_{0 < \epsilon < 1}$ suite régularisante, et $f_{\epsilon} = u \star \zeta_{\epsilon}$. Soit enfin $g_{\epsilon} = f_{\epsilon} - f_{\epsilon}(0)$. Montrer que

(i) $\partial_j f_{\epsilon} \rightarrow \partial_j u$ uniformément sur tout compact lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$ pour tout $j = 1, \dots, N$;

(ii) g_{ϵ} converge uniformément sur tout compact lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$.

c) Montrer que $f_{\epsilon}(0)$ admet une limite pour $\epsilon \rightarrow 0^+$.

d) Dédire de ce qui précède que $u \in C^1(\mathbf{R}^N)$.

Exercice 6. Soit U une application linéaire de $C_c^{\infty}(\mathbf{R}^N)$ dans lui-même vérifiant les propriétés suivantes

$$U(\phi \circ \tau_a) = (U\phi) \circ \tau_a \quad \text{pour tout } a \in \mathbf{R}^N \text{ et tout } \phi \in C_c^{\infty}(\mathbf{R}^N),$$

en notant $\tau_a : x \mapsto x + a$ la translation de vecteur a , ainsi que

pour tous $K \subset \mathbf{R}^N$ compact et $p \in \mathbf{N}$,

il existe $L \subset \mathbf{R}^N$ compact, $q \in \mathbf{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^{\alpha}(U\phi)(x)| \leq C \max_{|\beta| \leq q} \sup_{x \in L} |\partial^{\beta}\phi(x)|.$$

Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ telle que U soit de la forme

$$U(\phi) = u \star \phi, \quad \text{pour tout } \phi \in C_c^{\infty}(\mathbf{R}^N).$$

Chapitre 5

Transformation de Fourier

La transformation de Fourier est un outil particulièrement important en mathématiques, que ce soit du point de vue fondamental, ou de celui des applications (à la théorie du signal par exemple, ou encore à tous les phénomènes ondulatoires). Les motivations pour l'étudier sont donc très nombreuses et variées, et il n'est pas possible de donner ici une juste idée de cette diversité.

Nous allons donc motiver l'introduction de la transformation de Fourier à partir des séries de Fourier dont le lecteur a déjà l'habitude — voir par exemple le [6], chapitre IV.3.1.

Rappelons l'idée de base des séries de Fourier : il s'agit de représenter les fonctions périodiques de période L et suffisamment régulières sur \mathbf{R} sous la forme

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{i2\pi kx/L}, \quad \text{avec } c_k = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(y) e^{-i2\pi ky/L} dy.$$

Ceci s'écrit encore

$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_{-L/2}^{L/2} f(y) e^{i2\pi k(x-y)/L} dy.$$

Or pour des fonctions f assez régulières, les coefficients c_k tendent vers 0 très rapidement lorsque $|k| \rightarrow \infty$ — par exemple, si f est de classe C^∞ , on trouve que $c_k = O(|k|^{-n})$ pour tout $n \geq 0$.

Ceci suggère de négliger, pour L assez grand, les termes correspondant à $|k| > L^2/2$ dans la série de Fourier de f ci-dessus : ainsi

$$f(x) \simeq \frac{1}{L} \sum_{|k| \leq L^2/2} \int_{-L/2}^{L/2} f(y) e^{i2\pi k(x-y)/L} dy.$$

Maintenant, la somme discrète est une somme de Riemann, ce qui suggère que, pour $L \rightarrow \infty$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i2\pi \xi(x-y)} dy d\xi,$$

identité que l'on peut encore écrire

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i2\pi\xi x} d\xi, \quad \text{avec } \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i2\pi\xi y} dy.$$

Cette identité ressemble beaucoup à l'identité analogue rappelée ci-dessus dans le cadre des séries de Fourier — on en remarquera d'ailleurs le caractère plus symétrique que dans le cas des séries de Fourier, car la somme discrète est remplacée par une intégrale.

Cette identité constitue le cœur de la théorie de la transformation de Fourier sur la droite réelle, que nous allons étudier dans ce chapitre. Avant d'entrer dans le vif du sujet, précisons que le calcul ci-dessus n'est rien d'autre qu'un calcul formel, et que nous n'essaierons pas d'en justifier les diverses étapes, ou de donner une idée de ce que pourrait être une fonction périodique “de période infinie”.

Le but de cette introduction est seulement de faire apparaître les formules très symétriques reliant les fonctions f et \hat{f} , et de suggérer que l'étude de cette correspondance $f \rightarrow \hat{f}$ n'est pas sans intérêt.

Il existe bien une façon de considérer dans un cadre unique les séries de Fourier et la transformation de Fourier sur \mathbf{R}^N : ceci rend nécessaire l'utilisation du langage des distributions, et fera l'objet de la section 5.6 ci-dessous.

Un autre point de vue consiste à dire que les séries de Fourier et la transformation de Fourier sur la droite réelle sont des cas particuliers d'une notion plus générale de transformation de Fourier sur un groupe abélien — cf. [6], chapitre I.2.5. (Un autre exemple est la transformée de Mellin, qui correspond au groupe multiplicatif \mathbf{R}_+^* , et qui intervient de façon importante en théorie des nombres : cf. [6], chapitre VII.2.)

Quant aux applications les plus importantes de la transformation de Fourier, le lecteur les rencontrera dans l'étude des équations aux dérivées partielles qui fait l'objet de la deuxième partie de ce cours.

5.1 La classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$

Définition 5.1.1 (L'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$) On note $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées. Autrement dit, une fonction $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ si

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < \infty \text{ pour tous } \alpha, \beta \in \mathbf{N}^N.$$

Evidemment, $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ est un espace vectoriel sur \mathbf{R} — ou sur \mathbf{C} quand les fonctions que l'on considère sont à valeurs complexes, ce qui sera le cas dans ce chapitre, puisqu'on y parlera beaucoup de transformation de Fourier.

Exemple 5.1.2 (Quelques fonctions de \mathcal{S}) Evidemment $C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$. Toutes les fonctions de la forme

$$\phi(x) = P(x) e^{-a|x|^2}$$

avec $a > 0$ et P fonction polynôme appartiennent à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$.

En revanche, aucune fraction rationnelle (autre que la fonction nulle) n'appartient à la classe de Schwartz.

La topologie de l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ n'est pas définie par une norme, mais par une famille dénombrable de normes, définies comme suit : pour toute fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, on pose

$$\mathcal{N}_p(\phi) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq p} \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)|, \quad p \in \mathbf{N}.$$

Grâce à la famille de normes \mathcal{N}_p , on peut définir ce qu'est une suite convergente dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$:

Définition 5.1.3 (Suites convergentes dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$) Une suite $(\phi_n)_{n \geq 1}$ de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ converge vers une fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ si

$$\mathcal{N}_p(\phi_n - \phi) \rightarrow 0 \text{ pour tout } p \geq 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Proposition 5.1.4 (Densité de $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$) Toute fonction appartenant à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ est limite dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ d'une suite de fonctions appartenant à $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$.

Démonstration. En effet, soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$\chi|_{\overline{B(0,1)}} = 1, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad \text{et } \text{supp}(\chi) \subset B(0,2).$$

Posons, pour tout $n \geq 1$,

$$\chi_n(x) = \chi\left(\frac{x}{n}\right), \quad x \in \mathbf{R}^N.$$

Soit $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$; définissons, pour tout $n \geq 1$, la fonction ϕ_n par

$$\phi_n(x) = \chi_n(x)\phi(x), \quad x \in \mathbf{R}^N.$$

Evidemment, $\phi_n \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ comme produit de deux fonctions de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N . Par ailleurs

$$\text{supp}(\phi_n) \subset \text{supp}(\chi_n) = \overline{B(0,2n)}.$$

D'autre part

$$\partial^\beta(\phi - \phi_n)(x) = (1 - \chi_n(x))\partial^\beta\phi(x) - \sum_{\substack{\gamma \leq \beta \\ |\gamma| \geq 1}} \binom{\beta}{\gamma} \frac{1}{n^{|\gamma|}} \partial^\gamma \chi(x/n) \partial^{\beta-\gamma} \phi(x)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} |x^\alpha \partial^\beta(\phi - \phi_n)(x)| &\leq |x^\alpha(1 - \chi_n(x))\partial^\beta\phi(x)| \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{\substack{\gamma \leq \beta \\ |\gamma| \geq 1}} \binom{\beta}{\gamma} \sup_{z \in \mathbf{R}^N} |\partial^\gamma \chi(z)| \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |x^\alpha \partial^{\beta-\gamma} \phi(x)| \\ &\leq |x^\alpha(1 - \chi_n(x))\partial^\beta\phi(x)| + \frac{C}{n} \mathcal{N}_p(\phi) \end{aligned}$$

avec

$$C = 2^p \max_{0 < |\gamma| \leq p} \sup_{z \in \mathbf{R}^N} |\partial^\gamma \chi(z)|.$$

De plus, pour tous les multi-indices α, β tels que $|\alpha|$ et $|\beta| \leq p$,

$$|x^\alpha (1 - \chi_n(x)) \partial^\beta \phi(x)| \leq \frac{1}{n^2} |x^\alpha| |x|^2 |\partial^\beta \phi(x)| \leq \frac{1}{n^2} \mathcal{N}_{p+2}(\phi).$$

Remarquons en effet que

$$0 \leq 1 - \chi(z) \leq |z|^2$$

puisque

$$1 - \chi(z) = 0 \text{ si } |z| \leq 1, \text{ tandis que } 0 \leq 1 - \chi(z) \leq 1 \text{ si } |z| \geq 1.$$

Ainsi, pour tous les multi-indices α, β tels que $|\alpha|$ et $|\beta| \leq p$, on a

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta (\phi - \phi_n)(x)| \leq \frac{1}{n^2} \mathcal{N}_{p+2}(\phi) + \frac{C}{n} \mathcal{N}_p(\phi) \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, ce qui montre que $\phi_n \rightarrow \phi$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. ■

En particulier, la classe de Schwartz est dense dans les espaces de Lebesgue L^p pour $1 \leq p < \infty$.

Corollaire 5.1.5 (Densité de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ dans $L^p(\mathbf{R}^N)$) *Pour tout $p \in [1, \infty[$, toute fonction de $L^p(\mathbf{R}^N)$ est limite au sens de la norme L^p d'une suite de fonctions appartenant à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$.*

Démonstration. C'est évident puisque $C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, et que, d'après la Théorème 1.3.14, l'espace $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ est dense dans $L^p(\mathbf{R}^N)$ pour $1 \leq p < \infty$. ■

Voici quelques propriétés opératoires très simples de la classe de Schwartz. Commençons par une définition à peu près évidente :

Définition 5.1.6 (Croissance polynômiale) *On dit qu'une fonction continue f sur \mathbf{R}^N est à croissance polynômiale s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que*

$$f(x) = O(|x|^n) \text{ pour } |x| \rightarrow \infty.$$

Avec cette définition, nous pouvons énoncer quelques propriétés de stabilité de la classe de Schwartz sous l'effet de certaines opérations.

Proposition 5.1.7 (Classe de Schwartz et opérations) *Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$. Alors*

- (a) *pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$, la fonction $\partial^\alpha \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$;*
- (b) *pour tout $f \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ dont toutes les dérivées sont à croissance polynômiale, la fonction $f\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$;*
- (c) *pour tout $q \in [1, \infty]$, on a $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N) \subset L^q(\mathbf{R}^N)$; de plus, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$*

$$\|x^\alpha \partial^\beta f\|_{L^q(\mathbf{R}^N)} \leq C \mathcal{N}_p(f)^{1-1/q} \mathcal{N}_{p+N+1}(f)^{1/q}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^N$ avec $|\alpha|, |\beta| \leq p$

en utilisant la convention habituelle $1/\infty = 0$;

(d) pour toute distribution à support compact $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$, on a

$$S \star \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N).$$

Démonstration. Le point (a) est trivial.

Démontrons le point (b). Appliquons la formule de Leibnitz :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p(f\phi) &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq p} \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta (f\phi)| \\ &\leq \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq p} \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |x^\alpha \partial^\gamma f(x) \partial^{\beta-\gamma} \phi(x)| \end{aligned}$$

Comme f est à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées, il existe, pour tout entier $p \geq 0$, un entier $n_p(f) \geq 0$ et une constante $M_p > 0$ telle que

$$|\partial^\gamma f(x)| \leq M_p \left(1 + |x|^{2n_p(f)}\right), \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^N \text{ et } |\gamma| \leq p.$$

Comme¹

$$|x|^{2n_p(f)} \leq N^{2n_p(f)-1} (x_1^{2n_p(f)} + \dots + x_N^{2n_p(f)})$$

on en déduit que

$$\mathcal{N}_p(f\phi) \leq C_f \mathcal{N}_{p+2n_p(f)}(\phi)$$

avec

$$C_f = M_p (1 + N^{2n_p(f)-1}) \sup_{|\beta| \leq p} \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} = 2^p (1 + N^{2n_p(f)-1}) M_p,$$

d'où le résultat annoncé.

Pour ce qui est du point (c), posons $g = x^\alpha \partial^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$; on observe que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} |g(x)|^q dx &\leq \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |g(x)|^{q-1} \int_{\mathbf{R}^N} |g(x)| dx \\ &\leq \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |g(x)|^{q-1} \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |(1 + |x|^{N+1})g(x)| \int_{\mathbf{R}^N} \frac{dx}{1 + |x|^{N+1}} \\ &\leq C \mathcal{N}_0(g)^{q-1} \mathcal{N}_{N+1}(g), \end{aligned}$$

avec

$$C = (1 + N^{(N-1)/2}) \int_{\mathbf{R}^N} \frac{dx}{1 + |x|^{N+1}},$$

d'où l'inégalité annoncée.

1. En effet, pour tout $n \geq 1$, la fonction $z \mapsto z^n$ est convexe sur \mathbf{R}_+ , de sorte que, pour tous $a_1, \dots, a_N \geq 0$, on a

$$(a_1 + \dots + a_N)^n = N^n \left(\frac{a_1 + \dots + a_N}{N} \right)^n \leq N^n \frac{a_1^n + \dots + a_N^n}{N} = N^{n-1} (a_1^n + \dots + a_N^n).$$

Démontrons enfin le (d). Que la fonction $S \star \phi$ soit de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N découle de la Remarque 4.2.4. Puis la propriété de continuité des distributions à support compact montre que, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^N$, on a

$$\begin{aligned} |x^\alpha \partial^\beta (S \star \phi)(x)| &= |x^\alpha (S \star \partial^\beta \phi)(x)| \text{ d'après la Remarque 4.2.4} \\ &\leq |x^\alpha| C \max_{|\gamma| \leq |\beta| + q} \sup_{|y| \leq R} |\partial^\gamma \phi(x + y)| \\ &\leq C \max_{|\gamma| \leq |\beta| + q} \sup_{|y| \leq R} |(x + y - y)^\alpha \partial^\gamma \phi(x + y)| \\ &\leq 2^{|\alpha| - 1} C \max_{|\gamma| \leq |\beta| + q} \sup_{z \in \mathbf{R}^N} (|z^\alpha| + R^\alpha) |\partial^\gamma \phi(z)| \end{aligned}$$

en notant q l'ordre de la distribution à support compact S et $R > 0$ tel que $\text{supp}(S) \subset B(0, R)$. Donc

$$\mathcal{N}_p(S \star \phi) \leq 2^{p-1} (1 + R^p) C \mathcal{N}_{p+q}(\phi)$$

pour tout $p \in \mathbf{N}$. ■

5.2 La transformation de Fourier sur \mathcal{S}

La transformation de Fourier a déjà été étudiée dans $L^1(\mathbf{R}^N)$ et dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ — voir [6], chapitre IV.4.

Comme on va le voir, l'étude de la transformation de Fourier sur la classe de Schwartz est beaucoup plus simple.

Définition 5.2.1 (Transformation de Fourier) *A toute fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, on associe sa transformation de Fourier*

$$\mathcal{F}\phi(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi \cdot x} \phi(x) dx, \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

L'application linéaire \mathcal{F} est définie pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, puisque, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^N$, on a

$$|e^{-i\xi \cdot x} \phi(x)| = |\phi(x)|$$

et que $\phi \in L^1(\mathbf{R}^N)$ d'après la Proposition 5.1.7 (c).

Voici quelques propriétés élémentaires de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$.

Proposition 5.2.2 (Transformation de Fourier et opérations) *Soit ϕ une fonction de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$. Alors*

(a) *la fonction $\mathcal{F}(\phi)$ est de classe $C^1(\mathbf{R}^N)$ et on a, pour tout $j = 1, \dots, N$*

$$\partial_{\xi_j} \mathcal{F}\phi(\xi) = \mathcal{F}(-ix_j \phi)(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}^N;$$

(b) *pour tout $j = 1, \dots, N$, on a*

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j} \phi)(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}(\phi)(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}^N;$$

(c) pour tout $a \in \mathbf{R}^N$, la fonction² $(\tau_a)_*\phi = \phi \circ \tau_{-a} : x \mapsto \phi(x - a)$ a pour transformée de Fourier

$$\mathcal{F}((\tau_a)_*\phi)(\xi) = e^{-i\xi \cdot a} \mathcal{F}\phi(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}^N;$$

(d) pour tout $a \in \mathbf{R}^N$, on a

$$\mathcal{F}(e^{ia \cdot x} \phi)(\xi) = (\tau_a)_*(\mathcal{F}\phi)(\xi) = \mathcal{F}\phi(\xi - a), \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

Remarque 5.2.3 Les points (a) et (b) montrent que la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ échange dérivation et multiplication par x (à un facteur $\pm i$ près).

Démonstration. Observons que la fonction

$$(x, \xi) \mapsto e^{-i\xi \cdot x} \phi(x)$$

est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$, et que, pour tout $j = 1, \dots, N$,

$$|\partial_{\xi_j} (e^{-i\xi \cdot x} \phi(x))| = |-ix_j e^{-i\xi \cdot x} \phi(x)| = |x_j \phi(x)| \in L^1(\mathbf{R}^N)$$

d'après la Proposition 5.1.7 (b-c).

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme rappelé dans le chapitre 1, note 3, on a donc

$$\partial_{\xi_j} \mathcal{F}\phi(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} \partial_{\xi_j} (e^{-i\xi \cdot x} \phi(x)) dx = \int_{\mathbf{R}^N} -ix_j e^{-i\xi \cdot x} \phi(x) dx$$

ce qui établit le point (a).

Passons à la démonstration du (b). Notons $x' = (x_2, \dots, x_N)$; alors, par intégration par parties en x_1 , on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi \cdot x} \partial_{x_1} \phi(x) dx_1 &= \left[e^{-i\xi \cdot x} \phi(x) \right]_{x_1=-\infty}^{x_1=+\infty} - \int_{\mathbf{R}} (\partial_{x_1} e^{-i\xi \cdot x}) \phi(x) dx_1 \\ &= i\xi_1 \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi \cdot x} \phi(x) dx_1 \end{aligned}$$

car $x_1 \mapsto \phi(x_1, x')$ tend vers 0 pour $|x_1| \rightarrow \infty$ puisque $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$. Puis, en utilisant le fait que

$$\begin{aligned} |e^{-i\xi \cdot x} \partial_{x_1} \phi(x)| &= |\partial_{x_1} \phi(x)| \in L^1(\mathbf{R}^N) \\ \text{et } |e^{-i\xi \cdot x} \phi(x)| &= |\phi(x)| \in L^1(\mathbf{R}^N) \end{aligned}$$

d'après la Proposition 5.1.7 (a-c) puisque $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, on intègre en x' les deux membres de l'égalité

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi \cdot x} \partial_{x_1} \phi(x) dx_1 = i\xi_1 \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi \cdot x} \phi(x) dx_1,$$

2. Rappelons que, pour tout $a \in \mathbf{R}^N$, on note $\tau_a : \mathbf{R}^N \ni x \mapsto x + a \in \mathbf{R}^N$.

et, en appliquant le théorème de Fubini, on trouve que

$$\int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi \cdot x} \partial_{x_1} \phi(x) dx = i\xi_1 \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi \cdot x} \phi(x) dx,$$

ce qui correspond à l'énoncé (b) pour $j = 1$. Le cas de $j = 2, \dots, N$ est identique.

En faisant le changement de variables $z = x - a$ dans l'intégrale de Fourier

$$\mathcal{F}((\tau_a)_* \phi)(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi \cdot x} \phi(x - a) dx = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi \cdot (z+a)} \phi(z) dz = e^{-i\xi \cdot a} \mathcal{F}\phi(\xi),$$

d'où le (c).

Le point (d) découle de la définition même de la transformation \mathcal{F} . ■

Remarque 5.2.4 *La transformation de Fourier \mathcal{F} échange dérivation et multiplication par x , comme on vient de le voir. Par conséquent, \mathcal{F} échange régularité et décroissance à l'infini — c'est-à-dire que, plus une fonction est dérivable (avec des dérivées intégrables sur \mathbf{R}^N), plus sa transformée de Fourier décroît rapidement à l'infini. Ce fait permet de comprendre tout l'intérêt de la classe de Schwartz vis à vis de la transformation de Fourier : comme toute fonction de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ est de classe C^∞ avec des dérivées qui sont toutes intégrables, on en déduit que sa transformée de Fourier est à décroissance rapide. Et comme toute fonction de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ est à décroissance rapide, on en déduit que sa transformée de Fourier est de classe C^∞ . Ainsi, on voit que la classe de Schwartz est invariante par transformation de Fourier, ce qui est l'un des avantages de cet espace.*

La formule d'inversion de Fourier s'écrit donc de manière particulièrement simple pour les fonctions de la classe de Schwartz.

Théorème 5.2.5 (Formule d'inversion de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$) *La transformation de Fourier est un isomorphisme de \mathbf{C} -espaces vectoriels de l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ sur lui-même. L'inverse de cet isomorphisme est donné par la formule*

$$\mathcal{F}^{-1}\psi(x) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{ix \cdot \xi} \psi(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^N}, \quad x \in \mathbf{R}^N.$$

Enfin, les isomorphismes \mathcal{F} et \mathcal{F}^{-1} sont continus sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, au sens où, pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe une constante $C_p > 0$ telle que pour toute fonction ϕ de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$

$$\mathcal{N}_p(\mathcal{F}\phi), \mathcal{N}_p(\mathcal{F}^{-1}\phi) \leq C_p \mathcal{N}_{p+N+1}(\phi).$$

La démonstration de ce théorème utilisera de manière cruciale le calcul explicite suivant, dont nous verrons qu'il est d'un grand intérêt pour l'étude de certaines équations aux dérivées partielles.

Lemme 5.2.6 (Transformée de Fourier des gaussiennes) *Soit une matrice $A \in M_N(\mathbf{R})$ telle que $A = A^T > 0$. Posons*

$$G_A(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(A)}} e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x|x)}, \quad x \in \mathbf{R}^N.$$

Alors $G_A \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ et on a

$$\mathcal{F}G_A(\xi) = e^{-\frac{1}{2}(A\xi|\xi)}, \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

La fonction G_A est la densité Gaussienne centrée (c'est-à-dire de moyenne 0) et de matrice de covariance A , qui est l'un des objets les plus importants du calcul des probabilités — pour son utilisation dans ce contexte, voir [13], §4.6.4. **Démonstration du théorème.** Montrons que $\mathcal{FS}(\mathbf{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$. En effet, d'après les points (b)-(c) de la Proposition 5.2.2, on a

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}\phi = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \mathcal{F}(\partial^\alpha(x^\beta \phi)).$$

Or, d'après la formule de Leibnitz

$$\partial^\alpha(x^\beta \phi) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (\partial^\gamma x^\beta) \partial^{\alpha-\gamma} \phi \in L^1(\mathbf{R}^N)$$

d'après la Proposition 5.1.7 (a-c), puisque $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$. Donc

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}\phi \in L^\infty(\mathbf{R}^N), \text{ pour tous } \alpha, \beta \in \mathbf{N}^N.$$

Ceci montre que $\mathcal{F}\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$.

Plus précisément, d'après la Proposition 5.1.7 (c), pour tous multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^N$ tels que $|\alpha| + |\beta| \leq p$, on a

$$|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}\phi(\xi)| \leq \|\partial^\alpha(x^\beta \phi)\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \leq C\mathcal{N}_{N+1}(\partial^\alpha(x^\beta \phi)) \leq C\mathcal{N}_{p+N+1}(\phi),$$

de sorte qu'il existe $C_p > 0$ tel que, pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, on ait

$$\mathcal{N}_p(\mathcal{F}\phi) \leq C_p \mathcal{N}_{p+N+1}(\phi).$$

Passons maintenant à la formule d'inversion de Fourier. Intuitivement, cette formule signifie que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}\phi(x) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{i\xi \cdot x} \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi \cdot y} \phi(y) dy \right) \frac{d\xi}{(2\pi)^N} \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{i\xi \cdot (x-y)} \phi(y) dy \right) \frac{d\xi}{(2\pi)^N} \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} \phi(y) \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{i\xi \cdot (x-y)} \frac{d\xi}{(2\pi)^N} \right) dy \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'en s'appuyant sur l'Exemple 4.4.3, la formule ci-dessus se ramène au fait que

$$\delta(x-y) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{i\xi \cdot (x-y)} \frac{d\xi}{(2\pi)^N}.$$

Malheureusement, la fonction $(x, y) \mapsto e^{i\xi \cdot (x-y)} \phi(y)$ n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$, de sorte que l'interversion des intégrales en y et ξ dans la deuxième

égalité ci-dessus n'est pas justifiée. Pour cette même raison, l'intégrale ci-dessus censée représenter la masse de Dirac n'a pas de sens comme intégrale de Lebesgue.

Pour rendre cette intégrale convergente, on la remplace par

$$\int_{\mathbf{R}^N} e^{i\xi \cdot (x-y) - \frac{1}{2}\epsilon|\xi|^2} \frac{d\xi}{(2\pi)^N} = G_\epsilon(x-y)$$

pour tout $\epsilon > 0$, d'après le Lemme 5.2.6.

Comme la fonction

$$(y, \xi) \mapsto e^{i\xi \cdot (x-y) - \frac{1}{2}\epsilon|\xi|^2} \phi(y)$$

est intégrable sur $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$, le théorème de Fubini garantit que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} G_\epsilon(x-y) \phi(y) dy &= \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{i\xi \cdot (x-y) - \frac{1}{2}\epsilon|\xi|^2} \frac{d\xi}{(2\pi)^N} \right) \phi(y) dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} e^{i\xi \cdot x} e^{-\frac{1}{2}\epsilon|\xi|^2} \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi \cdot y} \phi(y) dy \right) \frac{d\xi}{(2\pi)^N} \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} e^{i\xi \cdot x} e^{-\frac{1}{2}\epsilon|\xi|^2} \hat{\phi}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^N}. \end{aligned}$$

Enfin, dans l'intégrale au membre de gauche de l'égalité ci-dessus, on fait le changement de variables $z = x - y$, ce qui permet de réécrire cette identité sous la forme

$$\int_{\mathbf{R}^N} \phi(x-z) G_\epsilon(z) dz = \int_{\mathbf{R}^N} e^{i\xi \cdot x} e^{-\frac{1}{2}\epsilon|\xi|^2} \mathcal{F}\phi(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^N}.$$

Dans l'intégrale au membre de gauche, on fait le changement de variables $z = \sqrt{\epsilon}w$, de sorte que

$$\int_{\mathbf{R}^N} \phi(x-z) G_\epsilon(z) dz = \int_{\mathbf{R}^N} \phi(x - \sqrt{\epsilon}w) G_1(w) dw.$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}^N$,

$$\phi(x - \sqrt{\epsilon}w) G_1(w) \rightarrow \phi(x) G_1(w) \text{ pour tout } w \in \mathbf{R}^N$$

lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ — car ϕ est continue puisqu'elle est dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ — et

$$|\phi(x - \sqrt{\epsilon}w) G_1(w)| \leq C G_1(w) \in L^1(\mathbf{R}_w^N) \text{ avec } C = \sup_{y \in \mathbf{R}^N} |\phi(y)|,$$

car ϕ est bornée sur \mathbf{R}^N puisqu'elle appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$. Donc, par convergence dominée, pour tout $x \in \mathbf{R}^N$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} \phi(x-z) G_\epsilon(z) dz &= \int_{\mathbf{R}^N} \phi(x - \sqrt{\epsilon}w) G_1(w) dw \\ &\rightarrow \phi(x) \int_{\mathbf{R}^N} G_1(w) dw = \phi(x) \end{aligned}$$

lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Dans l'intégrale au membre de droite, pour tout $x \in \mathbf{R}^N$

$$e^{i\xi \cdot x} e^{-\frac{1}{2}\epsilon|\xi|^2} \mathcal{F}\phi(\xi) \rightarrow e^{i\xi \cdot x} \mathcal{F}\phi(\xi)$$

lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}^N$. Par ailleurs

$$|e^{i\xi \cdot x} e^{-\frac{1}{2}\epsilon|\xi|^2} \mathcal{F}\phi(\xi)| \leq |\mathcal{F}\phi(\xi)| \in L^1(\mathbf{R}_\xi^N)$$

— car $\mathcal{F}\phi$ est intégrable comme élément de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ (cf. Proposition 5.1.7 (c))

— de sorte que, par convergence dominée

$$\int_{\mathbf{R}^N} e^{i\xi \cdot x} e^{-\frac{1}{2}\epsilon|\xi|^2} \mathcal{F}\phi(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^N} \rightarrow \int_{\mathbf{R}^N} e^{i\xi \cdot x} \mathcal{F}\phi(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^N}$$

lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$.

En passant à la limite pour $\epsilon \rightarrow 0^+$ dans l'identité

$$\int_{\mathbf{R}^N} \phi(x-z) G_\epsilon(z) dz = \int_{\mathbf{R}^N} e^{i\xi \cdot x} e^{-\frac{1}{2}\epsilon|\xi|^2} \mathcal{F}\phi(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^N},$$

on trouve donc que

$$\phi(x) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{i\xi \cdot x} \mathcal{F}\phi(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^N}.$$

■

Démonstration du lemme. Comme A est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable à valeurs propres réelles, avec une matrice de passage orthogonale : il existe $Q \in O_N(\mathbf{R})$ telle que

$$A = Q\Lambda Q^T \text{ avec } \Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_N \end{pmatrix}$$

où a_1, \dots, a_N sont les valeurs propres de A . Comme $A = A^T > 0$, quitte permuter l'ordre des vecteurs propres de A , on peut supposer que $a_1 \geq \dots \geq a_N > 0$.

Que $G_A \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ est évident : en effet

$$\partial^\beta G_A(x) = P_\beta(x) e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x|x)}$$

où $P_\beta(x)$ est une fonction polynôme, de sorte que

$$|\partial^\beta G_A(x)| \leq |P_\beta(x)| e^{-|x|^2/2a_1}$$

qui est bien à décroissance rapide pour tout $\beta \in \mathbf{N}^N$.

Dans l'intégrale définissant la transformée de Fourier de G_A , faisons le changement de variables $y = Q^T x$, et posons $\eta = Q^T \xi$: comme $\det(A) = a_1 \cdot \dots \cdot a_N$,

on trouve que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi \cdot x} G_A(x) dx &= \left(\prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi a_k}} \right) \int_{\mathbf{R}^N} e^{-iQ^T \xi \cdot Q^T x} e^{-\frac{1}{2}(\Lambda^{-1} Q^T x | Q^T x)} dx \\
&= \left(\prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi a_k}} \right) \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\eta \cdot y} e^{-\frac{1}{2}(\Lambda^{-1} y | y)} dy \\
&= \left(\prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi a_k}} \right) \int_{\mathbf{R}^N} \prod_{k=1}^N e^{i\eta_k y_k - \frac{1}{2} a_k^{-1} y_k^2} dy_1 \dots dy_N \\
&= \prod_{k=1}^N \int_{\mathbf{R}} e^{i\eta_k y_k - \frac{1}{2} a_k^{-1} y_k^2} \frac{dy_k}{\sqrt{2\pi a_k}}
\end{aligned}$$

en appliquant le théorème de Fubini à la fonction

$$(y_1, \dots, y_N) \mapsto \prod_{k=1}^N e^{i\eta_k y_k - \frac{1}{2} a_k^{-1} y_k^2}$$

qui appartient à $L^1(\mathbf{R}^N)$ pour tout $\eta \in \mathbf{R}^N$, puisque l'on a $a_k > 0$ pour tout $k = 1, \dots, N$.

Il suffit donc de savoir faire le calcul dans le cas $N = 1$. Pour tout $a > 0$, notons

$$g_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-x^2/2a}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Evidemment $g_a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, et vérifie

$$\frac{dg_a}{dx}(x) = -\frac{x}{a} g_a(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Appliquons la transformation de Fourier à chaque membre de cette égalité. D'après la Proposition 5.2.2 (b)-(c), on a

$$i\xi \mathcal{F}g_a(\xi) = \frac{1}{ia} \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}g_a(\xi),$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{d}{d\xi} \mathcal{F}g_a(\xi) = -a\xi \mathcal{F}g_a(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

Cette équation différentielle admet pour solution générale

$$\mathcal{F}g_a(\xi) = C e^{-\frac{1}{2} a \xi^2}.$$

De plus

$$\mathcal{F}g_a(0) = C = \int_{\mathbf{R}} g_a(x) dx = 1.$$

Par conséquent

$$\mathcal{F}G_A(Q\eta) = \prod_{k=1}^N e^{-\frac{1}{2}a_k\eta_k^2} = e^{-\frac{1}{2}(\Lambda\eta|\eta)}$$

de sorte que, en revenant à la variable $\xi = Q\eta$

$$\mathcal{F}G_A(\xi) = e^{-\frac{1}{2}(\Lambda Q^T Q\eta|Q^T Q\eta)} = e^{-\frac{1}{2}(Q\Lambda Q^T \xi|\xi)} = e^{-\frac{1}{2}(A\xi|\xi)}, \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

■

Terminons cette revue des principales propriétés de la transformation de Fourier sur la classe de Schwartz avec la formule de Plancherel, qui est une conséquence triviale de la formule d'inversion.

Corollaire 5.2.7 (Formule de Plancherel) *Pour tous $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, on a*

$$(\phi|\psi)_{L^2(\mathbf{R}^N)} = \frac{1}{(2\pi)^N} (\mathcal{F}\phi|\mathcal{F}\psi)_{L^2(\mathbf{R}^N)}.$$

Démonstration. En effet

$$\begin{aligned} (\phi|\psi)_{L^2(\mathbf{R}^N)} &= \int_{\mathbf{R}^N} \overline{\phi(x)}\psi(x)dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} \overline{\left(\int_{\mathbf{R}^N} \mathcal{F}\phi(\xi)e^{ix\cdot\xi} \frac{d\xi}{(2\pi)^N} \right)} \psi(x)dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} \int_{\mathbf{R}^N} e^{-ix\cdot\xi} \overline{\mathcal{F}\phi(\xi)}\psi(x)dx d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} \overline{\mathcal{F}\phi(\xi)} \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{-ix\cdot\xi}\psi(x)dx \right) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} (\mathcal{F}\phi|\mathcal{F}\psi)_{L^2(\mathbf{R}^N)}, \end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini. (En effet, la fonction $(x, \xi) \mapsto \overline{\mathcal{F}\phi(\xi)}\psi(x)$ est intégrable sur $\mathbf{R}_\xi^N \times \mathbf{R}_x^N$, puisque ψ et $\mathcal{F}\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$.) Or l'identité ci-dessus est précisément la formule de Plancherel. ■

5.3 Les distributions tempérées

Pour pouvoir définir l'intégrale de Fourier

$$\int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi\cdot x} f(x)dx$$

d'une fonction continue f pour tout $\xi \in \mathbf{R}^N$, il faut avoir des conditions limitant la croissance de f à l'infini.

Par exemple, il suffira de savoir que $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Mais on ne peut pas définir en général la transformée de Fourier d'une fonction qui serait seulement localement intégrable.

Le même problème se pose évidemment lorsqu'on veut définir une notion de transformation de Fourier pour les distributions — sous une forme quelque peu différente, toutefois, car le concept de “croissance à l'infini” n'est pas clair pour une distribution.

Comme on va le voir, on ne sait définir la transformation de Fourier que sur un sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$, la classe des distributions tempérées que nous allons étudier brièvement.

Définition 5.3.1 (Distributions tempérées) *Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, c'est-à-dire une forme linéaire T sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ telle qu'il existe un entier $p \geq 0$ et $C > 0$ pour lesquels*

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq C \mathcal{N}_p(\phi) \text{ pour tout } \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N).$$

L'ensemble des distributions tempérées est un \mathbf{C} -espace vectoriel, que l'on note $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$.

Comme $C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, toute distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ définit par restriction une forme linéaire

$$C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \ni \phi \mapsto \langle T, \phi \rangle.$$

Cette forme linéaire est évidemment une distribution puisque, pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ à support dans un compact K de \mathbf{R}^N , on a

$$\mathcal{N}_p(\phi) \leq A_K^p (p+1)^{2N} \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)| \text{ avec } A_K = \max_{x \in K} (1 + |x|).$$

Par conséquent

$$\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N).$$

Exemple 5.3.2 (Quelques distributions, tempérées ou non) *Toute distribution à support compact est tempérée :*

$$\mathcal{E}'(\mathbf{R}^N) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N).$$

Toute fonction appartenant à l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbf{R}^N)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ définit une distribution tempérée :

$$L^p(\mathbf{R}^N) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \text{ pour tout } p \text{ tel que } 1 \leq p \leq \infty.$$

Toute fonction continue à croissance polynômiale définit une distribution tempérée sur \mathbf{R}^N .

La distribution sur \mathbf{R}

$$T = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k \delta_k$$

est tempérée si la suite $(a_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est à croissance polynômiale, c'est-à-dire s'il existe un entier $p \geq 0$ tel que

$$a_k = O(|k|^p) \text{ lorsque } |k| \rightarrow \infty.$$

En revanche, les distributions définies par les fonctions

$$x \mapsto e^x, \quad x \mapsto \sinh x \text{ ou } \cosh x$$

ne sont pas des distributions tempérées.

Démontrons le caractère tempéré de la distribution T . On sait qu'il existe $p \geq 0$ et $C > 0$ tels que $|a_k| \leq C(1 + |k|^{2p})$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$. Alors, pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$,

$$\begin{aligned} |\langle T, \phi \rangle| &\leq \sum_{k \in \mathbf{Z}} |a_k| |\phi(k)| \\ &\leq C \sum_{k \in \mathbf{Z}} (1 + k^{2p}) |\phi(k)| \\ &\leq C \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{1}{1 + k^2} (1 + k^2 + k^{2p} + k^{2p+2}) |\phi(k)| \leq C' \mathcal{N}_{2p+2}(\phi) \end{aligned}$$

avec

$$C' = C \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{1}{1 + k^2}.$$

Proposition 5.3.3 (Distributions tempérées et opérations) *Soit une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$. Alors*

- (a) *pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$, la dérivée $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$;*
- (b) *pour toute fonction f à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées, la distribution $fT \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$;*
- (c) *pour toute distribution à support compact $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$, le produit de convolution $T \star S \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$.*

Démonstration. Soit $1 \leq j \leq N$; la dérivée $\partial_{x_j} T$ est la forme linéaire

$$C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \ni \phi \mapsto -\langle T, \partial_{x_j} \phi \rangle.$$

Or, comme T est une distribution tempérée, il existe un entier $p \geq 0$ et une constante $C_p > 0$ tels que

$$|\langle \partial_{x_j} T, \phi \rangle| = |\langle T, \partial_{x_j} \phi \rangle| \leq C_p \mathcal{N}_p(\partial_{x_j} \phi) \leq C_p \mathcal{N}_{p+1}(\phi)$$

pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$. Par densité de $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, la forme linéaire $\partial_{x_j} T$ s'étend de façon unique en une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ pour laquelle l'inégalité ci-dessus vaut pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$. Ceci signifie que $\partial_{x_j} T$ est une distribution tempérée. Le (a) en découle par récurrence.

De même, la distribution fT est la forme linéaire

$$C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \ni \phi \mapsto \langle T, f\phi \rangle.$$

Comme T est une distribution tempérée, il existe un entier $p \geq 0$ et une constante $C_p > 0$ tels que

$$|\langle T, f\phi \rangle| \leq C_p \mathcal{N}_p(f\phi).$$

Or (cf. preuve de la Proposition 5.1.7 (b)), il existe un entier $n_p(f) \geq 0$ et une constante $C_f > 0$ tels que

$$\mathcal{N}_p(f\phi) \leq C_f \mathcal{N}_{p+2n_p(f)}(\phi)$$

ce qui montre que la forme linéaire fT , qui n'est définie a priori que sur $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, s'étend par densité de manière unique à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ en une distribution tempérée, comme dans la preuve du point (a).

Démontrons le point (c). La distribution $T \star S$ est définie comme la forme linéaire

$$C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \ni \phi \mapsto \langle T, \tilde{S} \star \phi \rangle$$

où on rappelle que $\tilde{S} = S \circ (-Id_{\mathbf{R}^N})$. Soit $R > 0$ tel que S soit à support dans $B(0, R)$; donc $\text{supp}(\tilde{S}) \subset B(0, R)$. La preuve de la Proposition 5.1.7 (d) montre que

$$\mathcal{N}_p(\tilde{S} \star \phi) \leq 2^{p-1}(1 + R^p)\mathcal{N}_{p+q}(\phi)$$

pour tout $p \in \mathbf{N}$, où q est l'ordre de la distribution à support compact S .

Comme la distribution T est tempérée, il existe donc $p \in \mathbf{N}$ et $C_p > 0$ tels que

$$|\langle T \star S, \phi \rangle| \leq C_p 2^{p-1}(R^p + 1)\mathcal{N}_{p+q}(\phi)$$

ce qui montre comme dans le (a) que la forme linéaire $T \star S$, définie a priori sur $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, s'étend par densité de manière unique à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ en une distribution tempérée. ■

Exemple 5.3.4 (Croissance à l'infini et caractère tempéré) *Pour voir si une distribution définie par une fonction, par exemple, est tempérée ou non, il ne suffit pas d'étudier la croissance à l'infini du module de cette fonction. Considérons par exemple la fonction*

$$x \mapsto ie^x e^{ie^x}.$$

Evidemment

$$\left| ie^x e^{ie^x} \right| = e^x$$

qui à la même croissance à l'infini que les contre-exemples ci-dessus. Mais

$$ie^x e^{ie^x} = \frac{d}{dx} \left(e^{ie^x} \right)$$

et comme la fonction

$$x \mapsto e^{ie^x}$$

est une fonction de classe C^1 bornée sur \mathbf{R} , elle définit une distribution tempérée sur \mathbf{R} .

D'autre part sa dérivée au sens des distributions coïncide avec la distribution définie par sa fonction dérivée au sens usuel, de sorte que, d'après le (a) de la proposition ci-dessus, cette fonction dérivée

$$x \mapsto ie^x e^{ie^x}.$$

définit bien un élément de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$.

Intuitivement, ce sont les oscillations rapides de la fonction $x \mapsto e^{ie^x}$ dans la limite $x \rightarrow +\infty$ qui annihilent la croissance de $x \mapsto e^x$ pour $x \rightarrow +\infty$.

En pratique, pour décider si une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ est tempérée, on cherchera évidemment si elle appartient aux classes d'exemples ci-dessus — distributions à support compact, fonctions de L^p , fonctions à croissance polynômiale...

Si ce n'est pas le cas, il faut ensuite chercher si la distribution considérée est une dérivée (d'ordre quelconque) d'une distribution dont on sait déjà qu'elle est tempérée. (C'est évidemment le cas dans l'exemple précédent.)

Si aucune de ces approches ne permet de conclure, il faut alors revenir à la définition des distributions tempérées, et en vérifier la propriété de continuité.

En fait, on a la caractérisation suivante des distributions tempérées :

Théorème 5.3.5 (Caractérisation des distributions de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$) Toute distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ est de la forme

$$T = \partial_x^\alpha ((1 + |x|^2)^n f) \text{ au sens des distributions}$$

où $\alpha \in \mathbf{N}^N$, où n est un entier naturel, et où f est une fonction continue bornée sur \mathbf{R}^N .

Que le membre de droite de l'égalité ci-dessus définisse une distribution tempérée est une conséquence triviale de la Proposition 5.1.7 (a)-(b).

Que toute distribution tempérée sur \mathbf{R}^N soit nécessairement de cette forme est moins trivial — et surtout moins utile en pratique. On admettra donc ce dernier point³.

Définition 5.3.6 (Convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$) On dit qu'une suite $(T_n)_{n \geq 1}$ de distributions tempérées converge vers $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ si

$$\langle T_n, \phi \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle \text{ lorsque } n \rightarrow \infty \text{ pour tout } \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N).$$

Proposition 5.3.7 (Convergence dans \mathcal{S}' et opérations) Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ suite de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ convergeant vers $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$. Alors

(a) pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$, on a

$$\partial^\alpha T_n \rightarrow \partial^\alpha T \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty ;$$

(b) pour toute fonction f de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées

$$fT_n \rightarrow fT \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

3. Le lecteur intéressé par une démonstration pourra consulter L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris (1966), chapitre VII, §4, pp. 239–241.

Démonstration. En effet

$$\langle \partial^\alpha T_n, \phi \rangle - \langle \partial^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle (T_n - T), \partial^\alpha \phi \rangle \rightarrow 0$$

puisque $T_n \rightarrow T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ pour $n \rightarrow \infty$ et que, d'autre part, $\partial^\alpha \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, d'après la Proposition 5.1.7 (a). Ceci établit le (a).

Pour le (b), on procède de même :

$$\langle fT_n, \phi \rangle - \langle fT, \phi \rangle = \langle (T_n - T), f\phi \rangle \rightarrow 0$$

puisque $T_n \rightarrow T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ pour $n \rightarrow \infty$ et que, d'autre part, $f\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, d'après la Proposition 5.1.7 (b). ■

5.4 La transformation de Fourier sur \mathcal{S}'

Dans la section 5.2, la transformation de Fourier a été définie sur la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$.

Malheureusement, on ne peut s'en contenter, car il y a bien trop peu de fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$.

On va donc maintenant étendre sa définition à l'espace $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ des distributions tempérées, en appliquant la même stratégie de dualité que dans le chapitre 3.

Pour cela, on part de l'observation suivante : pour toute paire ϕ, ψ de fonctions de la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\int_{\mathbf{R}^N} \psi(x) \mathcal{F}\phi(x) dx = \int_{\mathbf{R}^N} \phi(y) \mathcal{F}\psi(y) dy.$$

(En effet

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} \mathcal{F}\phi(x) \psi(x) dx &= \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{-ix \cdot y} \phi(y) dy \right) \psi(x) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{-ix \cdot y} \psi(x) dx \right) \phi(y) dy = \int_{\mathbf{R}^N} \phi(y) \mathcal{F}\psi(y) dy \end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini, puisque

$$(x, y) \mapsto |e^{-ix \cdot y} \psi(x) \phi(y)| = |\phi(x)| |\psi(y)|$$

est une fonction intégrable sur $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$, d'après la Proposition 5.1.7 (c).)

L'identité ci-dessus suggère la définition suivante :

Définition 5.4.1 (Transformation de Fourier des distributions) *A toute distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$, on associe sa transformée de Fourier $\mathcal{F}T$ qui est la distribution tempérée définie par*

$$\langle \mathcal{F}T, \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\phi \rangle$$

pour toute fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$.

D'après le calcul ci-dessus, cette définition de la transformation de Fourier coïncide avec celle de la section 5.2 lorsque la distribution tempérée T est de la forme

$$T_f : \mathcal{S}(\mathbf{R}^N) \ni \phi \mapsto \langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}^N} f(x)\phi(x)dx.$$

avec $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$.

Exemple 5.4.2 (Transformée de Fourier des fonctions de L^1) Soit une fonction $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$; posons

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi \cdot x} f(x)dx, \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

Alors

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbf{R}^N)}, \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbf{R}^N.$$

De plus, pour tout $\xi^* \in \mathbf{R}^N$ et toute suite $(\xi_n)_{n \geq 1}$ convergeant vers ξ^* , on vérifie par convergence dominée que

$$\hat{f}(\xi_n) \rightarrow \hat{f}(\xi^*) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Par conséquent, \hat{f} est une fonction continue bornée⁴ sur \mathbf{R}^N .

On vérifie alors que la transformée de Fourier de T_f est la distribution tempérée définie par la fonction \hat{f} : autrement dit

$$\mathcal{F}T_f = T_{\hat{f}}.$$

Démonstration. Pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\langle \mathcal{F}T_f, \phi \rangle = \langle T_f, \mathcal{F}\phi \rangle = \int_{\mathbf{R}^N} f(x) \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{-ix \cdot y} \phi(y)dy \right) dx.$$

Or la fonction

$$(x, y) \mapsto f(x)\phi(y) \text{ est intégrable sur } \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N.$$

Le théorème de Fubini implique donc que

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x) \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{-ix \cdot y} \phi(y)dy \right) dx = \int_{\mathbf{R}^N} \phi(y) \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{-ix \cdot y} f(x)dx \right) dy.$$

Par conséquent, pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\langle \mathcal{F}T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}^N} \phi(y) \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{-ix \cdot y} f(x)dx \right) dy = \int_{\mathbf{R}^N} \phi(y)\hat{f}(y)dy$$

ce qui signifie justement que $\mathcal{F}T_f = T_{\hat{f}}$. ■

Voici les premières propriétés de cette transformation de Fourier :

4. Rappelons qu'on dispose en fait d'une information plus précise — voir [6], chapitre IV.2.7 :

Théorème de Riemann-Lebesgue. Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Alors sa transformée de Fourier \hat{f} tend vers 0 à l'infini.

Proposition 5.4.3 (Transformation de Fourier dans \mathcal{S}' et opérations)

Soit une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$. Alors

(a) pour tout $k = 1, \dots, N$, on a

$$\mathcal{F}(\partial_{x_k} T) = i\xi_k \mathcal{F}T;$$

(b) pour tout $k = 1, \dots, N$, on a

$$\mathcal{F}(x_k T) = i\partial_{\xi_k} \mathcal{F}T;$$

(c) pour tout $a \in \mathbf{R}^N$, en notant $\tau_a : x \mapsto x + a$, on a

$$\mathcal{F}(T \circ \tau_a) = e^{ia \cdot \xi} \mathcal{F}T;$$

(d) pour tout $a \in \mathbf{R}^N$,

$$\mathcal{F}(e^{-ia \cdot x} T) = (\mathcal{F}T) \circ \tau_a.$$

Remarque. Comme sur la classe de Schwartz (cf. Proposition 5.2.2 (a)-(b)), la transformation de Fourier \mathcal{F} sur l'espace $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ des distributions tempérées échange dérivation et multiplication par x — à un facteur $\pm i$ près. Tout l'intérêt de la transformation de Fourier pour les distributions tempérées réside dans ce simple fait : d'une part, le cadre des distributions permet de dériver autant de fois que nécessaire, d'autre part, après transformation de Fourier, toute dérivée partielle d'ordre quelconque correspond à la multiplication par un monôme.

Démonstration. En effet

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\partial_{x_k} T), \phi \rangle &= \langle \partial_{x_k} T, \mathcal{F}\phi \rangle = -\langle T, \partial_{x_k} \mathcal{F}\phi \rangle \\ &= -\langle T, \mathcal{F}(-i\xi_k \phi) \rangle = \langle \mathcal{F}T, i\xi_k \phi \rangle = \langle i\xi_k \mathcal{F}T, \phi \rangle \end{aligned}$$

d'après la Proposition 5.2.2 (a), ce qui montre le point (a).

D'autre part

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(x_k T), \phi \rangle &= \langle x_k T, \mathcal{F}\phi \rangle = \langle T, x_k \mathcal{F}\phi \rangle \\ &= \langle T, \mathcal{F}(-i\partial_{\xi_k} \phi) \rangle \\ &= -i\langle \mathcal{F}T, \partial_{\xi_k} \phi \rangle = \langle i\partial_{\xi_k} \mathcal{F}T, \phi \rangle \end{aligned}$$

d'après la Proposition 5.2.2 (b), ce qui établit le point (b).

Les points (c) et (d) se démontrent de même par dualité à partir de la Proposition 5.2.2 (c)-(d). ■

Evidemment, la transformation de Fourier est (séquentiellement) continue au sens des distributions tempérées.

Proposition 5.4.4 (Continuité séquentielle de \mathcal{F} sur $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$) On considère une suite de distributions tempérées $(T_n)_{n \geq 1}$ sur \mathbf{R}^N convergeant vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$. Alors $\mathcal{F}T_n \rightarrow \mathcal{F}T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Démonstration. Pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\langle \mathcal{F}T_n, \phi \rangle = \langle T_n, \mathcal{F}\phi \rangle \rightarrow \langle T, \mathcal{F}\phi \rangle = \langle \mathcal{F}T, \phi \rangle$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. ■

Dans le cas d'une distribution à support compact — qui est a fortiori une distribution tempérée, on aurait pu définir la transformée de Fourier en copiant la formule définissant la transformation de Fourier pour les fonctions de la classe de Schwartz, c'est-à-dire poser

$$\mathcal{F}T(\xi) = \langle T, e_{-\xi} \rangle$$

où $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ et où e_ξ est la fonction de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N définie par

$$e_\xi(x) = e^{i\xi \cdot x}.$$

Observons que cette formule définirait $\mathcal{F}T$ ponctuellement, comme fonction de la variable ξ — et non comme une distribution.

En fait, ces deux façons de définir la transformation de Fourier pour les distributions à support compact coïncident, comme le montre le

Théorème 5.4.5 (Transformée de Fourier sur $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$) *Pour toute distribution à support compact $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$, la distribution tempérée $\mathcal{F}T$ est la distribution définie par la fonction*

$$\mathbf{R}^N \ni \xi \mapsto \langle T, e_{-\xi} \rangle.$$

Cette fonction, notée $\xi \mapsto \mathcal{F}T(\xi)$, est de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N et à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées.

Remarque. Cet énoncé est un nouvel exemple du fait, déjà mentionné plus haut, que la transformation de Fourier \mathcal{F} échange décroissance à l'infini et régularité. En effet, le fait d'être à support compact est la condition de convergence vers 0 à l'infini la plus forte possible; que la transformée de Fourier d'une distribution à support compact soit une fonction de classe C^∞ n'est donc pas surprenant.

Démonstration. Vérifions d'abord que $\mathcal{F}T$ est bien la fonction donnée par la formule ci-dessus. Pour cela, on observe que, par intégration sous le crochet de dualité (Proposition 3.4.22)

$$\begin{aligned} \left\langle \langle T, e_{-\xi} \rangle, \phi \right\rangle &= \int_{\mathbf{R}^N} \langle T, e_{-\xi} \rangle \phi(\xi) d\xi \\ &= \left\langle T, \int_{\mathbf{R}^N} e_{-\xi} \phi(\xi) d\xi \right\rangle = \langle T, \mathcal{F}\phi \rangle = \langle \mathcal{F}T, \phi \rangle \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Que la fonction $\xi \mapsto \langle T, e_{-\xi} \rangle$ soit de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N et que

$$\partial_\xi^\alpha \mathcal{F}T(\xi) = \partial_\xi^\alpha \langle T, e_{-\xi} \rangle = \langle T, \partial_\xi^\alpha e_{-\xi} \rangle$$

découle du théorème de dérivation sous le crochet de dualité (cf. Proposition 3.4.21) et du fait que la fonction $(x, \xi) \mapsto e_{-\xi}(x) = e^{-i\xi \cdot x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$.

Enfin, la propriété de continuité des distributions à support compact implique que

$$\begin{aligned} |\langle T, e_{-\xi} \rangle| &\leq C \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{|x| \leq R} |\partial_x^\alpha e_{-\xi}(x)| = C \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{|x| \leq R} |(i\xi)^\alpha e_{-\xi}(x)| \\ &= C \max_{|\alpha| \leq p} |\xi^\alpha| \leq C \left(\frac{1+|\xi|^2}{2} \right)^p, \end{aligned}$$

où p est l'ordre de T et $R > 0$ est tel que $\text{supp}(T) \subset B(0, R)$.

Par conséquent, $\mathcal{F}T$ est à croissance polynômiale sur \mathbf{R}^N .

Il en va de même pour toutes ses dérivées puisque

$$\partial_\xi^\alpha \mathcal{F}T = \mathcal{F}((-ix)^\alpha T)$$

et que la distribution $(-ix)^\alpha T$ est également à support compact. ■

Exemple 5.4.6 (Transformée de Fourier des masses de Dirac) *D'après le théorème ci-dessus, on trouve que*

$$\mathcal{F}\delta_0 = 1 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N),$$

et plus généralement que, pour tout $a \in \mathbf{R}^N$,

$$(\mathcal{F}\delta_a)(\xi) = e^{-i\xi \cdot a}, \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

Appliquant ensuite la Proposition 5.4.3 (a), on trouve que

$$(\mathcal{F}\partial^\alpha \delta_0)(\xi) = (i\xi)^\alpha, \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

et plus généralement que, pour tout $a \in \mathbf{R}^N$,

$$(\mathcal{F}\partial^\alpha \delta_a)(\xi) = (i\xi)^\alpha e^{-i\xi \cdot a}, \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

Remarque. Comparons ce résultat avec le théorème de Riemann-Lebesgue rappelé ci-dessus (cf. note 4 de ce chapitre.) Rappelons que, comme on l'a dit plus haut, la transformation \mathcal{F} échange régularité et décroissance à l'infini. Une fonction de $L^1(\mathbf{R}^N)$ étant un objet moins irrégulier que la masse de Dirac, il n'est pas surprenant que sa transformée de Fourier tende vers 0 à l'infini, alors que $\mathcal{F}\delta_0 = 1$ ne tend pas vers 0 à l'infini. En revanche, la masse de Dirac tend vers 0 à l'infini le plus vite possible, puisque son support (réduit à $\{0\}$) est le plus petit possible : il n'est donc pas surprenant que la transformée de Fourier de δ_0 soit une fonction constante — les constantes étant les fonctions les plus régulières possibles.

En réalité, la transformée de Fourier d'une distribution à support compact est bien mieux que de classe C^∞ : c'est une fonction analytique. Faute d'avoir à notre disposition la notion de fonction analytique de plusieurs variables, nous nous limiterons au cas d'une seule variable.

Théorème 5.4.7 *Soit T une distribution à support compact sur \mathbf{R} . Alors la fonction $\mathcal{F}T \in C^\infty(\mathbf{R})$ se prolonge en une fonction holomorphe sur \mathbf{C} .*

Démonstration. Considérons la fonction définie sur \mathbf{R}^2 par la formule

$$F(\xi, \eta) = \langle T, e_{-\xi - i\eta} \rangle, \quad \text{pour tout } (\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2,$$

puisque T est une distribution à support compact sur \mathbf{R} et que la fonction

$$e_{-\xi - i\eta} : x \mapsto e^{-i(\xi + i\eta)x} \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbf{R}.$$

Par dérivation sous le crochet de dualité, on montre comme dans la preuve du théorème précédent que F admet des dérivées partielles de tous ordres, de sorte que $F \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$.

En particulier, par dérivation sous le crochet de dualité, on trouve que

$$\partial_\xi F(\xi, \eta) = \langle T, -ixe_{-\xi - i\eta} \rangle, \quad \text{tandis que } \partial_\eta F(\xi, \eta) = \langle T, xe_{-\xi - i\eta} \rangle.$$

Par conséquent

$$(\partial_\xi + i\partial_\eta)F(\xi, \eta) = 0 \quad \text{pour tout } (\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2.$$

Autrement dit, F satisfait aux relations de Cauchy-Riemann sur \mathbf{C} (voir [6], Remarque V.1.14). Par conséquent, la fonction

$$\mathbf{C} \ni (\xi + i\eta) \mapsto F(\xi, \eta)$$

est holomorphe. D'autre part, d'après le théorème précédent

$$\mathcal{F}T(\xi) = \langle T, e_{-\xi} \rangle = F(\xi, 0), \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbf{R},$$

de sorte que la fonction holomorphe ci-dessus prolonge bien $\mathcal{F}T$. ■

Remarque. Il existe une réciproque de ce résultat : toute fonction f holomorphe sur \mathbf{C} et vérifiant la condition de croissance suivante : il existe $C, N, R > 0$ tels que

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|)^N e^{R|\Im(z)|} \quad \text{pour tout } z \in \mathbf{C}$$

est (le prolongement analytique de) la transformée de Fourier d'une distribution à support dans $[-R, R] \subset \mathbf{R}$ (Théorème de Paley-Wiener).

Voici maintenant le théorème d'inversion de la transformation de Fourier dans le cadre des distributions.

Théorème 5.4.8 (Inversion de Fourier dans $S'(\mathbf{R}^N)$) *La transformation de Fourier \mathcal{F} est un isomorphisme du \mathbf{C} -espace vectoriel $S'(\mathbf{R}^N)$ dans lui-même, dont l'inverse est donné par la formule*

$$\mathcal{F}^{-1}T = \frac{1}{(2\pi)^N} \widetilde{\mathcal{F}T},$$

où, pour toute distribution S sur \mathbf{R}^N , on a noté

$$\tilde{S} = S \circ (-Id_{\mathbf{R}^N}),$$

c'est-à-dire que, pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$

$$\langle \tilde{S}, \phi \rangle = \langle S, \phi \circ (-Id_{\mathbf{R}^N}) \rangle = \langle S, \phi(-\cdot) \rangle.$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}T) = (2\pi)^N \tilde{T},$$

c'est-à-dire que, pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, l'on a

$$\langle \mathcal{F}(\mathcal{F}T), \phi \rangle = \langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}\phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\mathcal{F}\phi) \rangle = \langle T, (2\pi)^N \phi \circ (-Id_{\mathbf{R}^N}) \rangle$$

car

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}\phi) = (2\pi)^N \phi \circ (-Id_{\mathbf{R}^N})$$

d'après le théorème d'inversion de Fourier pour les fonctions de la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ — voir Théorème 5.2.5. ■

Exemple 5.4.9 (Transformée de Fourier des polynômes) Dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\mathcal{F}1 = (2\pi)^N \delta_0$$

d'après le théorème d'inversion de Fourier appliqué à l'identité

$$\mathcal{F}(\delta_0) = 1.$$

En utilisant ensuite la Proposition 5.4.3 (b), on trouve que

$$\mathcal{F}(x^\alpha) = (2\pi)^N i^{|\alpha|} \partial^\alpha \delta_0, \quad \alpha \in \mathbf{N}^N.$$

En utilisant conjointement la formule d'inversion de Fourier (Théorème 5.4.8), et le Théorème 5.4.5 sur la transformée de Fourier des distributions à support compact, on obtient la caractérisation suivante des distributions à support compact.

Théorème 5.4.10 (Structure des distributions à support compact) Toute distribution à support compact sur \mathbf{R}^N est une somme finie de dérivées itérées au sens des distributions d'une fonction continue bornée sur \mathbf{R}^N .

Ce théorème n'est pas d'une grande importance sur le plan pratique; toutefois, il montre que la théorie des distributions est, en quelque sorte, l'extension minimale de la notion de fonction continue où toute fonction généralisée peut être dérivée indéfiniment.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$. D'après le Théorème 5.4.5, il existe un entier $p \geq 0$ et une constante $C > 0$ tels que

$$|\mathcal{F}T(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^2)^p, \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

Considérons alors la fonction S définie par

$$S(\xi) = \frac{\mathcal{F}T(\xi)}{(1 + |\xi|^2)^{p+N}}, \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

Evidemment, S est une fonction de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N , d'après le Théorème 5.4.5. D'autre part

$$|S(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^2)^{-N}, \quad \xi \in \mathbf{R}^N,$$

de sorte que $S \in L^1(\mathbf{R}^N)$.

En particulier, S définit un élément de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$, et sa transformée de Fourier inverse est la distribution définie par la fonction continue bornée

$$f : \mathbf{R}^N \ni x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix \cdot \xi} S(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^N}$$

— cf. Exemple 5.4.2 ci-dessus et la formule d'inversion de Fourier (Théorème 5.4.8).

De plus, par construction,

$$\mathcal{F}((I - \Delta)^{p+N} f) = (1 + |\xi|^2)^{p+N} \mathcal{F}f = \mathcal{F}T$$

de sorte que

$$T = (I - \Delta)^{p+N} f$$

puisque \mathcal{F} est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ dans lui-même. ■

L'une des vertus de la transformation de Fourier est de transformer le produit de convolution en produit ponctuel.

Théorème 5.4.11 (Transformation de Fourier et convolution) *Soient deux distributions $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$; alors*

$$\mathcal{F}(S \star T) = \mathcal{F}S \cdot \mathcal{F}T \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N).$$

Dans le cas particulier où $T = T_f$ avec $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\mathcal{F}(S \star f)(\xi) = \mathcal{F}S(\xi) \mathcal{F}f(\xi), \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbf{R}^N.$$

Démonstration. Commençons par traiter le cas particulier avec $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$.

D'après la Proposition 5.1.7 (d), on sait que $S \star f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$. Alors

$$\mathcal{F}(S \star f)(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi \cdot x} \langle S, f(x - \cdot) \rangle dx = \left\langle S, \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi \cdot x} f(x - \cdot) dx \right\rangle$$

d'après le théorème de Fubini pour le crochet de dualité (Proposition 3.4.22). Or, d'après la Proposition 5.2.2 (c),

$$\int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi \cdot x} f(x - y) dx = \mathcal{F}f(\xi) e_{-\xi}(y).$$

en notant e_ξ la fonction définie par

$$e_\xi : \mathbf{R}^N \ni y \mapsto e^{i\xi \cdot y}.$$

Alors, on déduit de ce qui précède et du Théorème 5.4.5 que

$$\mathcal{F}(S \star f)(\xi) = \langle S, \mathcal{F}f(\xi)e_{-\xi} \rangle = \mathcal{F}f(\xi) \langle S, e_{-\xi} \rangle = \mathcal{F}f(\xi) \mathcal{F}S(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

Passons maintenant au cas général.

D'une part $S \star T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ d'après la Proposition 5.3.3 (c) puisque $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$, de sorte que $\mathcal{F}(S \star T) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$. D'autre part, $\mathcal{F}S\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ d'après la Proposition 5.3.3 (b) puisque $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ (comme transformée de Fourier de $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$) et que $\mathcal{F}S$ est une fonction de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N à croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées (cf. Théorème 5.4.5).

Vérifions que les deux distributions tempérées $\mathcal{F}(S \star T)$ et $\mathcal{F}S\mathcal{F}T$ sont égales en tant que distributions — c'est-à-dire qu'elles coïncident sur $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$. Pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(S \star T), \phi \rangle &= \langle S \star T, \mathcal{F}\phi \rangle = \langle S \star T, (2\pi)^N \widetilde{\mathcal{F}^{-1}\phi} \rangle \\ &= \langle T, (2\pi)^N \widetilde{S \star \mathcal{F}^{-1}\phi} \rangle \\ &= (2\pi)^N \langle T, S \star \widetilde{\mathcal{F}^{-1}\phi} \rangle \\ &= \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}(S \star \mathcal{F}^{-1}\phi) \rangle = \langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}(S \star \mathcal{F}^{-1}\phi) \rangle \end{aligned}$$

d'après le théorème d'inversion de Fourier appliqué à $S \star \widetilde{\mathcal{F}^{-1}\phi} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$.

D'après le cas particulier du théorème que nous venons de démontrer, en posant $\psi = \mathcal{F}^{-1}\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\mathcal{F}(S \star \mathcal{F}^{-1}\phi) = \mathcal{F}(S \star \psi) = \mathcal{F}S\mathcal{F}\psi = \phi\mathcal{F}S$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(S \star T), \phi \rangle &= \langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}(S \star \mathcal{F}^{-1}\phi) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}S\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\phi) \rangle = \langle \mathcal{F}T, \phi\mathcal{F}S \rangle = \langle \mathcal{F}S\mathcal{F}T, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Comme ceci vaut pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, on en déduit que

$$\mathcal{F}(S \star T) = \mathcal{F}S\mathcal{F}T$$

par densité de $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ (Proposition 5.1.4.)

■

Le lecteur a déjà rencontré le théorème de Plancherel — cf. [6], chapitre IV.4. Dans cette présentation, la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbf{R}^N)$ était construite par densité de $L^1 \cap L^2$ dans l'espace de Hilbert L^2 et en utilisant la formule de Plancherel que l'on avait démontrée pour les fonctions en escalier à support compact. Une autre façon d'arriver au même résultat consiste à montrer que $L^2(\mathbf{R}^N)$ est un sous-espace de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ stable sous l'action de la transformation de Fourier \mathcal{F} .

Théorème 5.4.12 (Théorème de Plancherel) *La transformée de Fourier définie dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ induit un isomorphisme de \mathbf{C} -espace vectoriel de $L^2(\mathbf{R}^N)$ dans lui-même, vérifiant en outre l'identité*

$$(f|g)_{L^2(\mathbf{R}^N)} = \frac{1}{(2\pi)^N} (\mathcal{F}f|\mathcal{F}g)_{L^2(\mathbf{R}^N)}$$

pour tous $f, g \in L^2(\mathbf{R}^N)$.

Démonstration. Comme $L^2(\mathbf{R}^N) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$, la transformation de Fourier \mathcal{F} dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ induit par restriction un isomorphisme \mathbf{C} -linéaire de $L^2(\mathbf{R}^N)$ dans $\mathcal{F}L^2(\mathbf{R}^N)$.

Vérifions que $\mathcal{F}L^2(\mathbf{R}^N) \subset L^2(\mathbf{R}^N)$.

Soit donc $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$; d'après le Corollaire 5.1.5, il existe une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions de la classe de Schwartz convergeant vers f dans $L^2(\mathbf{R}^N)$:

$$\|f_n - f\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \rightarrow 0 \text{ pour } n \rightarrow \infty.$$

Pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, on a

$$|\langle \mathcal{F}f_n, \phi \rangle| = |\langle f_n, \mathcal{F}\phi \rangle| \leq \|f_n\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \|\mathcal{F}\phi\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \leq C \|\phi\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}$$

avec

$$C = (2\pi)^{N/2} \sup_{n \geq 1} \|f_n\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} < \infty$$

d'après la formule de Plancherel pour les fonctions de la classe de Schwartz — Corollaire 5.2.7 — et compte-tenu de ce que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge dans $L^2(\mathbf{R}^N)$.

On sait que $f_n \rightarrow f$ dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ et donc a fortiori dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ lorsque $n \rightarrow \infty$, de sorte que, par continuité de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\mathcal{F}f_n \rightarrow \mathcal{F}f \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \text{ pour } n \rightarrow \infty.$$

L'inégalité ci-dessus entraîne donc que

$$|\langle \mathcal{F}f, \phi \rangle| \leq C \|\phi\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}, \quad \text{pour tout } \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N).$$

Par densité de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ dans $L^2(\mathbf{R}^N)$, cette inégalité vaut pour tout $\phi \in L^2(\mathbf{R}^N)$, ce qui montre que $\mathcal{F}f$ se prolonge par continuité en une forme linéaire sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^N)$. Le théorème de représentation de Riesz implique alors l'existence d'un élément \hat{f} de $L^2(\mathbf{R}^N)$ tel que

$$\langle \mathcal{F}f, \phi \rangle = \left(\hat{f} \middle| \phi \right)_{L^2(\mathbf{R}^N)}, \quad \text{pour tout } \phi \in L^2(\mathbf{R}^N).$$

La forme linéaire $\mathcal{F}f$ s'identifie donc à la fonction \hat{f} de $L^2(\mathbf{R}^N)$, d'où

$$\mathcal{F}L^2(\mathbf{R}^N) \subset L^2(\mathbf{R}^N).$$

D'après la formule d'inversion de Fourier pour les distributions tempérées (Théorème 5.4.8),

$$L^2(\mathbf{R}^N) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(L^2(\mathbf{R}^N))) \subset \mathcal{F}(L^2(\mathbf{R}^N)),$$

d'où

$$\mathcal{F}(L^2(\mathbf{R}^N)) = L^2(\mathbf{R}^N)$$

et \mathcal{F} induit un isomorphisme \mathbf{C} -linéaire de $L^2(\mathbf{R}^N)$ dans lui-même.

Vérifions enfin la formule de Plancherel. On a montré que l'identité

$$(\hat{f}|\phi)_{L^2(\mathbf{R}^N)} = \langle \overline{\mathcal{F}f}, \phi \rangle = \langle \mathcal{F}(\overline{f}) \circ (-Id_{\mathbf{R}^N}), \phi \rangle = \langle \mathcal{F}(\overline{f}), \phi \circ (-Id_{\mathbf{R}^N}) \rangle$$

vaut pour tout $\phi \in L^2(\mathbf{R}^N)$. Prenons $\phi = \hat{g}$ avec $g \in L^2(\mathbf{R}^N)$: toujours d'après la formule d'inversion de Fourier

$$\hat{g} \circ (-Id_{\mathbf{R}^N}) = (\mathcal{F}g) \circ (-Id_{\mathbf{R}^N}) = (2\pi)^N \mathcal{F}^{-1}g.$$

Insérant ce choix de ϕ dans l'identité précédente, on trouve que

$$\begin{aligned} (\hat{f}|\hat{g})_{L^2(\mathbf{R}^N)} &= \langle \mathcal{F}(\overline{f}), (2\pi)^N \mathcal{F}^{-1}g \rangle \\ &= \langle \overline{f}, (2\pi)^N \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}g) \rangle = (2\pi)^N \langle \overline{f}, g \rangle = (2\pi)^N (f|g)_{L^2(\mathbf{R}^N)} \end{aligned}$$

ce qui est précisément la formule de Plancherel. ■

5.5 Transformation de Fourier partielle

Dans un certain nombre de situations — et tout particulièrement pour l'étude des équations aux dérivées partielles d'évolution — il est avantageux d'effectuer une transformation de Fourier partielle, ne portant pas sur toutes les variables, mais seulement sur certaines d'entre elles.

Nous allons décrire brièvement ce procédé, en utilisant le cadre des problèmes d'évolution, qui en est la principale application.

Définition 5.5.1 (Transformation de Fourier partielle sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$)

Soit $\phi : (t, x) \mapsto \phi(t, x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$; on définit la transformée de Fourier partielle en x de la fonction ϕ par la formule

$$\mathcal{F}_x \phi(t, \xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi \cdot x} \phi(t, x) dx.$$

Cette transformation de Fourier partielle jouit des mêmes propriétés de continuité et d'inversibilité que la transformation de Fourier usuelle.

Théorème 5.5.2 (Inversion de Fourier partielle dans \mathcal{S}) *La transformation de Fourier partielle en x est une application linéaire continue de l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ dans lui-même, au sens où il existe, pour tout $p \geq 0$, une constante $C_p > 0$ telle que*

$$\mathcal{N}_p(\mathcal{F}_x \phi) \leq C_p \mathcal{N}_{p+N+1}(\phi), \quad \text{pour tout } \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N).$$

De plus, \mathcal{F}_x est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ sur lui-même, d'inverse

$$\mathcal{F}_x^{-1}\psi(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} e^{ix \cdot \xi} \psi(t, \xi) d\xi.$$

La preuve suit exactement celle du Théorème 5.2.5.

Passons maintenant au cas des distributions :

Définition 5.5.3 (Transformation de Fourier partielle sur $\mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$) Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$; on définit la transformée de Fourier partielle en x de la distribution T par la formule

$$\langle \mathcal{F}_x T, \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}_x \phi \rangle, \quad \text{pour tout } \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N).$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que le membre de droite de l'égalité ci-dessus définit bien une distribution tempérée sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N$ — ce qui découle évidemment de la continuité de \mathcal{F}_x énoncée au Théorème ci-dessus.

Théorème 5.5.4 (Inversion de Fourier partielle dans \mathcal{S}') La transformation de Fourier partielle en x est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ sur lui-même, dont l'inverse est donné par la formule

$$\langle \mathcal{F}_x^{-1} T, \psi \rangle = \langle T, \mathcal{F}_x^{-1} \psi \rangle, \quad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N).$$

Autrement dit

$$\mathcal{F}_x^{-1} T = \frac{1}{(2\pi)^N} \mathcal{F}_x T \circ J$$

où $J : (t, x) \mapsto (t, -x)$.

A nouveau, ce résultat se démontre comme la formule d'inversion de Fourier usuelle sur les distributions tempérées — cf. Théorème 5.4.8.

Le lecteur vérifiera sans peine les propriétés suivantes, en suivant pas à pas la démonstration de la Proposition 5.4.3

Proposition 5.5.5 (Transformation \mathcal{F}_x et opérations) La transformation de Fourier partielle en x sur $\mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ vérifie les propriétés suivantes :

(a) pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$, on a

$$\partial_t^n \partial_\xi^\alpha \mathcal{F}_x T = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}_x (x^\alpha \partial_t^n T),$$

(b) pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$, on a

$$\mathcal{F}_x (\partial_t^n \partial_x^\alpha T) = i^{|\alpha|} \mathcal{F}_x (\xi^\alpha \partial_t^n T).$$

5.6 Transformation de Fourier et séries de Fourier

L'un des avantages du cadre des distributions tempérées pour y étudier la transformation de Fourier est que ce cadre est commun à la théorie des séries et des intégrales de Fourier — ce qui n'est pas le cas si on étudie la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbf{R})$ ou $L^2(\mathbf{R})$, car une fonction continue périodique n'appartient à $L^1(\mathbf{R})$ ou $L^2(\mathbf{R})$ que si elle est identiquement nulle. Cette difficulté n'existe pas dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ car toute fonction continue périodique sur \mathbf{R} est bornée sur \mathbf{R} , et définit par conséquent une distribution tempérée sur \mathbf{R} .

Tous les énoncés ci-dessous ont évidemment des analogues dans \mathbf{R}^N , mais nous nous limiterons au cas $N = 1$ afin de n'avoir à manipuler que des séries de Fourier usuelles — au lieu de séries de Fourier multiples, c'est à dire pour des fonctions de plusieurs variables.

Commençons par une identité remarquable de l'analyse de Fourier.

Théorème 5.6.1 (Formule sommatoire de Poisson) *La distribution*

$$T = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta_k \text{ appartient à } \mathcal{S}'(\mathbf{R}),$$

et sa transformée de Fourier est

$$\mathcal{F}T = 2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta_{2k\pi} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}).$$

Démonstration. Que $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ se vérifie en appliquant la Définition 5.3.1 — voir aussi la Proposition 5.6.3 ci-dessous.

La distribution T vérifie

$$T \circ \tau_1 = T$$

où on rappelle que

$$\tau_a : \mathbf{R} \ni x \mapsto x + a, \quad \text{pour tout } a \in \mathbf{R}.$$

D'après la Proposition 5.4.3 (c), il s'ensuit que

$$\mathcal{F}(T \circ \tau_1) = e^{i\xi} \mathcal{F}T = \mathcal{F}T,$$

ce qui montre en particulier que

$$\text{supp}(\mathcal{F}T) \subset 2\pi\mathbf{Z}.$$

Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ telle que

$$\chi|_{[-\pi/8, \pi/8]} = 1, \quad \text{et } \text{supp}(\chi) \subset]-\pi/4, \pi/4[.$$

Alors

$$\mathcal{F}T = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \chi(\cdot - 2\pi k) \mathcal{F}T.$$

D'autre part

$$0 = (e^{i\xi} - 1)\chi(\cdot - 2\pi k)\mathcal{F}T = (\xi - 2\pi k)\frac{e^{i\xi} - 1}{\xi - 2\pi k}\chi(\cdot - 2\pi k)\mathcal{F}T.$$

Ceci montre que

$$\frac{e^{i\xi} - 1}{\xi - 2\pi k}\chi(\cdot - 2\pi k)\mathcal{F}T = \text{Const. } \delta_{2\pi k}$$

(voir la première Application à la fin de la section 4.1) ou encore, de manière équivalente

$$\chi(\cdot - 2\pi k)\mathcal{F}T = c_k \delta_{2\pi k}$$

puisque $\frac{e^{i\xi} - 1}{\xi - 2\pi k} \rightarrow i$ lorsque $\xi \rightarrow 2\pi k$. On en déduit que

$$\mathcal{F}T = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \delta_{2\pi k}.$$

Calculons les coefficients c_k . Observons que

$$e^{i2\pi x T} = T \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}),$$

de sorte que, d'après la Proposition 5.4.3 (d)

$$\mathcal{F}T \circ \tau_{2\pi} = \mathcal{F}T.$$

En confrontant cette identité avec la formule ci-dessus pour $\mathcal{F}T$, on conclut qu'il existe une constante $c \in \mathbf{C}$ telle que

$$c_k = c, \quad \text{pour tout } k \in \mathbf{Z}.$$

Autrement dit

$$\mathcal{F}T = c \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta_{2\pi k}.$$

Identifions maintenant la constante c . Pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ et tout $y \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} c \sum_{k \in \mathbf{Z}} \phi(2\pi k + y) &= \langle \mathcal{F}T, \phi(\cdot + y) \rangle \\ &= \langle T, \mathcal{F}\phi(\cdot + y) \rangle = \langle T, e_y \mathcal{F}\phi \rangle = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{F}\phi(k) e^{iky} \end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité découle de la Proposition 5.4.3 (c), en notant e_y la fonction

$$e_y : \mathbf{R} \ni x \mapsto e^{iyx}.$$

Intégrant chaque membre de l'identité ci-dessus par rapport à y sur $[0, 2\pi]$, on trouve que

$$\begin{aligned} c \int_{\mathbf{R}} \phi(x) dx &= c \sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} \phi(2\pi k + y) dy \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{F}\phi(k) \int_0^{2\pi} e^{iky} dy = 2\pi \mathcal{F}\phi(0) = 2\pi \int_{\mathbf{R}} \phi(x) dx \end{aligned}$$

d'où $c = 2\pi$. L'interversion intégrale-série se justifie sans difficulté, par exemple par convergence dominée, car les suites

$$(\mathcal{F}\phi(k))_{k \in \mathbf{Z}} \quad \text{ainsi que} \quad \left(\sup_{y \in [0, 2\pi]} |\phi(y + 2\pi k)| \right)_{k \in \mathbf{Z}}$$

sont sommables puisque ϕ (et donc $\mathcal{F}\phi$) appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. ■

La théorie des séries de Fourier porte sur les fonctions périodiques. Commençons par étendre cette notion au cas des distributions.

Définition 5.6.2 (Distributions périodiques) *Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ est dite périodique de période a si*

$$T \circ \tau_a = T$$

où τ_a désigne la translation de a :

$$\tau_a : x \mapsto x + a.$$

On sait que toute fonction continue périodique est nécessairement bornée sur \mathbf{R} . Voici, pour le cas des distributions, un énoncé qui va dans le même sens :

Proposition 5.6.3 *Toute distribution périodique sur \mathbf{R} est tempérée sur \mathbf{R} .*

Nous aurons besoin dans tout ce qui suit d'une fonction ϕ appartenant à $C_c^\infty(\mathbf{R})$ telle que

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \phi(x + k) = 1, \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Pour cela, on part d'une fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ telle que

$$\psi \geq 0, \quad \psi|_{[-1, 1]} = 1, \quad \text{supp}(\psi) \subset]-2, 2[$$

de sorte que

$$\Psi(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \psi(x + k) > 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Notons que la somme définissant $\Psi(x)$ ne fait intervenir qu'un nombre fini de termes, grâce à la condition $\text{supp}(\psi) \subset]-2, 2[$. Par construction, Ψ est une fonction périodique de période 1, et la fonction ϕ définie par

$$\phi(x) = \frac{\psi(x)}{\Psi(x)}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}$$

répond à la question.

Passons maintenant à la

Démonstration de la proposition. Soit T distribution périodique de période 1 sur \mathbf{R} . Alors

$$T = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \phi(\cdot + k)T = \sum_{k \in \mathbf{Z}} (\phi T) \circ \tau_k.$$

Pour toute fonction test $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, on a

$$\langle T, \chi \rangle = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle (\phi T) \circ \tau_k, \chi \rangle = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle \phi T, \chi(\cdot - k) \rangle.$$

Comme ϕT est une distribution à support compact, elle vérifie la propriété de continuité suivante : il existe un entier $p \geq 0$ et une constante $C > 0$ tels que, pour tout $k \in \mathbf{Z}$ tel que $|k| \geq 3$, l'on ait

$$|\langle \phi T, \chi(\cdot - k) \rangle| \leq C \max_{\alpha \leq p} \sup_{|x| \leq 2} |\partial^\alpha \chi(x - k)| \leq \frac{C}{(|k| - 2)^2} \mathcal{N}_{\max(p, 2)}(\chi),$$

et on conclut en remarquant que la série de terme général

$$\sum_{|k| \geq 3} |\langle \phi T, \chi(\cdot - k) \rangle| \leq C \mathcal{N}_{\max(p, 2)}(\chi) \sum_{|k| \geq 3} \frac{1}{(|k| - 2)^2} < \infty$$

est évidemment convergente en k . ■

Nous pouvons maintenant expliquer comment la théorie des séries de Fourier pour les fonctions continues périodiques s'inscrit dans le cadre de la transformation de Fourier des distributions tempérées.

Proposition 5.6.4 (Transformation et séries de Fourier) Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ distribution périodique de période 1. Pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ telle que

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \phi(x + k) = 1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R},$$

la transformée de Fourier de u est donnée par la formule

$$\mathcal{F}u = 2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \delta_{2\pi k} \quad \text{avec } c_k = \mathcal{F}(\phi u)(2\pi k),$$

le membre de droite étant une série convergente dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

Supposons que la distribution périodique u est en fait une fonction continue u périodique de période 1. Alors

$$\begin{aligned} c_k = \mathcal{F}(\phi u)(2\pi k) &= \int_{\mathbf{R}} \phi(x) u(x) e^{-i2\pi k x} dx \\ &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} \int_l^{l+1} \phi(x) u(x) e^{-i2\pi k x} dx \\ &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} \int_0^1 \phi(x+l) u(x+l) e^{-i2\pi k(x+l)} dx \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{l \in \mathbf{Z}} \phi(x+l) \right) u(x) e^{-i2\pi k x} dx = \int_0^1 u(x) e^{-i2\pi k x} dx \end{aligned}$$

ce qui est la formule usuelle donnant le k -ième coefficient de Fourier de la fonction continue u .

Le point de vue classique sur les séries de Fourier consiste à associer à toute fonction u continue sur \mathbf{R} et périodique de période 1 la suite $(c_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ de ses coefficients de Fourier — voir [6], Corollaire II.2.7, ou [9], chapitre VIII, Exemple 3.1.2. Le point de vue des distributions associe, à la même fonction continue périodique de période 1 sur \mathbf{R} , la distribution

$$2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \delta_{2\pi k}$$

concentrée aux points multiples entiers de 2π , dont la donnée est évidemment équivalente à celle de la suite $(c_k)_{k \in \mathbf{Z}}$.

Démonstration de la Proposition 5.6.4. Pour toute fonction test $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}u, \psi \rangle &= \langle u, \mathcal{F}\psi \rangle = \left\langle \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} \phi(\cdot + k) \right) u, \mathcal{F}\psi \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k \in \mathbf{Z}} (\phi u) \circ \tau_k, \mathcal{F}\psi \right\rangle \\ &= \left\langle \phi u, \sum_{k \in \mathbf{Z}} (\mathcal{F}\psi)(\cdot - k) \right\rangle = \left\langle \phi u, \sum_{k \in \mathbf{Z}} (\mathcal{F}\psi)(\cdot + k) \right\rangle. \end{aligned}$$

D'après la formule sommatoire de Poisson (Théorème 5.6.1)

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbf{Z}} (\mathcal{F}\psi)(x + k) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{F}(\psi e_{-x})(k) \\ &= \left\langle \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta_k, \mathcal{F}(\psi e_{-x}) \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{F} \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta_k \right), \psi e_{-x} \right\rangle \\ &= 2\pi \left\langle \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta_{2\pi k}, \psi e_{-x} \right\rangle = 2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} \psi(2\pi k) e^{-i2\pi kx}, \end{aligned}$$

où e_a désigne, pour tout $a \in \mathbf{R}$, la fonction

$$e_a : \mathbf{R} \ni x \mapsto e^{iax}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}u, \psi \rangle &= \left\langle \phi u, 2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} \psi(2\pi k) e_{-2\pi k} \right\rangle \\ &= 2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle \phi u, e_{-2\pi k} \rangle \psi(2\pi k) \\ &= 2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{F}(\phi u)(2\pi k) \psi(2\pi k) = \left\langle 2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{F}(\phi u)(2\pi k) \delta_{2\pi k}, \psi \right\rangle \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. ■

La formule d'inversion de Fourier donne alors

$$\begin{aligned} u &= \mathcal{F}^{-1} \left(2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \delta_{2\pi k} \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k 2\pi \mathcal{F}^{-1} \delta_{2\pi k} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{i2\pi kx}, \end{aligned}$$

où on rappelle que

$$c_k = \mathcal{F}(\phi u)(2\pi k) \quad \text{pour tout } k \in \mathbf{Z},$$

et où la série au membre de droite converge dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

Comme on l'a rappelé après l'énoncé de la Proposition 5.6.4, dans le cas où la distribution u est en fait une fonction continue périodique sur \mathbf{R} de période 1, le nombre c_k est le coefficient de Fourier d'ordre k de u . Comme la fonction u définit un élément de $L^2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$, la théorie classique des séries de Fourier nous dit que la série de Fourier de u

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{i2\pi kx}$$

converge dans $L^2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ vers u — voir [6], chapitre IV.3. Le point de vue des distributions nous dit que cette même série converge dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ (ce qui est évidemment une information plus faible.)

5.7 Espaces de Sobolev

On connaît les espaces $C^m(\Omega)$, où Ω est un ouvert de \mathbf{R}^N et m un entier positif. La notion de fonction de classe C^m est évidemment fondamentale, de sorte que les espaces $C^m(\Omega)$ sont de toute façon des objets très naturels.

En revanche, les espaces $C^m(\Omega)$ ne sont pas très commodes pour y faire de l'analyse fonctionnelle — c'est-à-dire pour y utiliser des arguments de nature topologique où les éléments de l'espace $C^m(\Omega)$ sont traités comme des points (en oubliant qu'il s'agit de fonctions sur Ω .) Par exemple, les espaces $C^m(\Omega)$ munis de la convergence uniforme sur tout compact des dérivées d'ordre au plus m ne sont pas des espaces de Banach.

Au contraire, les espaces de Lebesgue $L^p(X)$, où $X \subset \mathbf{R}^N$ est un ensemble mesurable et où $1 \leq p \leq \infty$, sont des espaces de Banach — voir [6], chapitre II. Mais les éléments de ces espaces sont des classes d'équivalence de fonctions égales en dehors d'un ensemble de mesure nulle — ou encore, ce qui revient au même, de fonctions mesurables définies p.p. sur X — donc des objets typiquement beaucoup plus irréguliers que des fonctions continues.

Les espaces de Sobolev constituent un compromis entre les espaces $C^m(\Omega)$ et les espaces de Lebesgue $L^p(X)$, au sens suivant :

- (a) ces espaces sont naturellement des espaces de Banach ou même de Hilbert, et
 (b) ces espaces se comparent très facilement aux espaces $C^m(\Omega)$.

Définition 5.7.1 (Espaces de Sobolev) Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N , un entier $k \in \mathbf{N}$ et $p \in [1, \infty]$. L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid \partial^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ pour } |\alpha| \leq k\}.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Evidemment $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

On vérifie sans peine que les espaces $W^{k,p}(\Omega)$ munis de la norme ainsi définie sont des espaces de Banach — c'est une conséquence facile du fait que $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ est complet, du fait qu'une suite de fonctions convergente dans $L^p(\Omega)$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers la même limite, et enfin de la continuité de la dérivation dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Un cas particulier très important de ces espaces de Sobolev est celui où $p = 2$. On note, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega).$$

Par rapport aux espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, les espaces $H^k(\Omega)$ possèdent une propriété supplémentaire fort agréable : ce sont des espaces de Hilbert, pour le produit scalaire

$$(f|g)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha f | \partial^\alpha g)_{L^2(\Omega)},$$

où on rappelle que

$$(\phi|\psi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \overline{\phi(x)} \psi(x) dx.$$

Il n'est pas difficile de voir que la norme définie par ce produit scalaire est bien équivalente à la norme $\|\cdot\|_{W^{k,2}(\Omega)}$ définie plus haut.

Nous n'étudierons pas plus en détail les espaces $W^{k,p}(\Omega)$ ou même $H^k(\Omega)$ lorsque Ω est un ouvert quelconque de \mathbf{R}^N , bien que ces espaces soient d'un grand intérêt pour l'analyse des équations aux dérivées partielles. Pour plus de détails sur ces questions, voir par exemple [1], chapitre 4.

En revanche nous allons nous restreindre au cas particulier où l'ouvert Ω est l'espace \mathbf{R}^N tout entier, et montrer comment l'emploi de la transformation de Fourier permet d'établir de façon très simple les propriétés essentielles des espaces $H^k(\mathbf{R}^N)$.

Commençons par une remarque cruciale, bien que triviale :

Lemme 5.7.2 Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$; il y a équivalence entre

(a) $f \in H^k(\mathbf{R}^N)$;

et

(b) pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$, on a

$$\xi^\alpha \mathcal{F}f \in L^2(\mathbf{R}^N).$$

Démonstration. D'après la Proposition 5.4.3 (a), il suffit évidemment de traiter le cas où $k = 0$. Autrement dit, il suffit de faire voir que, pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$, il y a équivalence entre les deux conditions

(a') $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$, et

et

(b') $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbf{R}^N)$.

Que (a') entraîne (b') est une conséquence du théorème de Plancherel (Théorème 5.4.12).

Montrons que (b') implique (a'). D'après le Théorème 5.4.8 d'inversion de Fourier,

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}f) = (2\pi)^N \tilde{f} = (2\pi)^N f \circ (-Id_{\mathbf{R}^N}).$$

D'autre part, toujours d'après le Théorème 5.4.12 de Plancherel

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}f) \in L^2(\mathbf{R}^N) \text{ puisque } \mathcal{F}f \in L^2(\mathbf{R}^N).$$

Par conséquent

$$f \circ (-Id_{\mathbf{R}^N}) \in L^2(\mathbf{R}^N)$$

ce qui implique la condition (a'). ■

D'après le théorème de Plancherel et la Proposition 5.4.3 (a)

$$(f|g)_{H^k(\mathbf{R}^N)} = \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{|\alpha| \leq k} (\xi^\alpha \mathcal{F}f | \xi^\alpha \mathcal{F}g)_{L^2(\Omega)}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} (f|f)_{H^k(\mathbf{R}^N)} &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \xi^{2\alpha} \right) |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} (1 + |\xi|^2)^k |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Ceci suggère de généraliser la définition ci-dessus des espaces de Sobolev H^k à des valeurs non entières de k , comme suit.

Définition 5.7.3 (Espaces $H^s(\mathbf{R}^N)$) Pour tout $s \in \mathbf{R}$, on définit

$$H^s(\mathbf{R}^N) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \mid (1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}f \in L^2(\mathbf{R}^N)\}$$

et on pose

$$(f|g)_{H^s(\mathbf{R}^N)} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s \overline{\mathcal{F}f(\xi)} \mathcal{F}g(\xi) d\xi.$$

L'espace vectoriel $H^s(\mathbf{R}^N)$ est un espace de Hilbert pour la forme sesquilinéaire $(\cdot|\cdot)_{H^s(\mathbf{R}^N)}$. Dans toute la suite, on note $\|\cdot\|_{H^s(\mathbf{R}^N)}$ la norme hermitienne définie par la formule

$$\|f\|_{H^s(\mathbf{R}^N)} = (f|f)_{H^s(\mathbf{R}^N)}^{1/2}, \quad f \in H^s(\mathbf{R}^N).$$

La discussion ci-dessus montre que cette définition coïncide avec la précédente lorsque $s \in \mathbf{N}$, et que la norme $\|\cdot\|_{H^s(\mathbf{R}^N)}$ ainsi définie est équivalent à la norme $\|\cdot\|_{W^{s,2}(\mathbf{R}^N)}$ qui a été définie plus haut.

Voici quelques premières propriétés très simples de ces espaces $H^s(\mathbf{R}^N)$.

Proposition 5.7.4 (Echelle des espaces $H^s(\mathbf{R}^N)$) Soient $s, t \in \mathbf{R}$.

(a) Si $s < t$, alors $H^t(\mathbf{R}^N) \subset H^s(\mathbf{R}^N)$ et cette inclusion définit une application linéaire continue, car

$$\|f\|_{H^s(\mathbf{R}^N)} \leq \|f\|_{H^t(\mathbf{R}^N)}, \quad f \in H^t(\mathbf{R}^N);$$

(b) Pour tout $s > 0$, on a

$$H^s(\mathbf{R}^N) \subset L^2(\mathbf{R}^N) \subset H^{-s}(\mathbf{R}^N)$$

et ces deux inclusions sont continues;

(c) pour tout $s \in \mathbf{R}$, on a

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^N) \text{ est un sous-espace dense de } H^s(\mathbf{R}^N);$$

(d) l'application linéaire

$$H^{-s}(\mathbf{R}^N) \ni f \mapsto L_f \in H^s(\mathbf{R}^N)',$$

où L_f est la forme linéaire définie par

$$L_f(\phi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} \overline{\mathcal{F}f(\xi)} \mathcal{F}\phi(\xi) d\xi,$$

est un isomorphisme (anti-linéaire) isométrique entre $H^{-s}(\mathbf{R}^N)$ et le dual topologique⁵ $H^s(\mathbf{R}^N)'$ de l'espace $H^s(\mathbf{R}^N)$.

Démonstration. Le point (a) est trivial.

Il entraîne le point (b) car $H^0(\mathbf{R}^N) = L^2(\mathbf{R}^N)$.

L'inclusion $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N) \subset H^s(\mathbf{R}^N)$ du point (c) est également triviale.

5. Le dual topologique d'un espace vectoriel normé E est le sous-espace du dual E^* de E , généralement noté E' , des formes linéaires continues sur E .

Vérifions que $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ est dense dans $H^s(\mathbf{R}^N)$. Soit donc $f \in H^s(\mathbf{R}^N)$; on sait que

$$\Phi = (1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}f \in L^2(\mathbf{R}^N).$$

Par densité de $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ — cf Théorème 1.3.14 — il existe une suite $(\Phi_n)_{n \geq 1}$ de fonctions de $C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$\Phi_n \rightarrow \Phi \quad \text{dans } L^2(\mathbf{R}^N) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Notons, pour tout $n \geq 1$,

$$\phi_n = (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \Phi_n \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^N), \text{ et } f_n = \mathcal{F}^{-1} \phi_n.$$

Evidemment $f_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ pour tout $n \geq 1$ puisque $\phi_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ et que \mathcal{F} est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ dans lui-même. D'autre part

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{H^s(\mathbf{R}^N)} &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \|(1 + |\xi|^2)^{s/2} (\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \|\Phi_n - \Phi\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Pour ce qui est du point (d), d'après le théorème de représentation de Riesz, l'application anti-linéaire

$$H^s(\mathbf{R}^N) \ni \phi \mapsto \Lambda_\phi \in H^s(\mathbf{R}^N)'$$

est un isomorphisme anti-linéaire isométrique, où Λ_ϕ est la forme linéaire continue sur $H^s(\mathbf{R}^N)$ définie par

$$\Lambda_\phi(\psi) = (\phi|\psi)_{H^s(\mathbf{R}^N)} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s \overline{\mathcal{F}\phi(\xi)} \mathcal{F}\psi(\xi) d\xi, \quad \psi \in H^s(\mathbf{R}^N).$$

Or la définition même de $H^s(\mathbf{R}^N)$ et de $\|\cdot\|_{H^s(\mathbf{R}^N)}$ montre que l'application linéaire

$$T : H^s(\mathbf{R}^N) \ni \phi \mapsto T\phi = \mathcal{F}^{-1} ((1 + |\xi|^2)^s \mathcal{F}\phi) \in H^{-s}(\mathbf{R}^N)$$

est évidemment un isomorphisme isométrique. La formule

$$L_f = \Lambda_{T^{-1}f}$$

entraîne immédiatement le résultat. ■

Les espaces $H^s(\mathbf{R}^N)$ ont beau avoir sur les espaces $C^m(\mathbf{R}^N)$ le grand avantage d'être des espaces de Hilbert, on ne peut pas se passer complètement de ces derniers, et il est donc souhaitable de pouvoir comparer les espaces de Sobolev aux espaces $C^m(\mathbf{R}^N)$, qui sont des objets plus familiers.

Théorème 5.7.5 (Théorème de plongement de Sobolev) *Soit $k \in \mathbf{N}$. Pour tout $s > \frac{N}{2} + k$, on a*

$$H^s(\mathbf{R}^N) \subset C^k(\mathbf{R}^N).$$

Plus précisément, tout $f \in H^s(\mathbf{R}^N)$ est égale p.p. à une fonction de $C^k(\mathbf{R}^N)$; de plus, il existe une constante $C_{N,k,s} > 0$ telle que, pour tout $f \in H^s(\mathbf{R}^N)$,

$$\max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |\partial^\alpha f(x)| \leq C_{N,k,s} \|f\|_{H^s(\mathbf{R}^N)}.$$

Démonstration. Soit $f \in H^s(\mathbf{R}^N)$; on a donc

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}f \in L^2(\mathbf{R}^N).$$

Or, comme $s > \frac{N}{2} + k$, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$, la fonction

$$\xi \mapsto \frac{i^{|\alpha|} \xi^\alpha}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}} \text{ appartient à } L^2(\mathbf{R}^N)$$

de sorte que

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F}f = \frac{i^{|\alpha|} \xi^\alpha}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}} (1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}f$$

appartient à $L^1(\mathbf{R}^N)$ d'après la Proposition 5.4.3 (a) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Par inversion de Fourier (voir Théorème 5.4.8, ainsi que l'Exemple 5.4.2), la distribution tempérée $\partial^\alpha f$ est en fait une fonction continue, et on a

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} e^{ix \cdot \xi} \mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) d\xi, \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^N.$$

On en déduit que, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$, on a

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |\partial^\alpha f(x)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} |\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi)| d\xi \\ &\leq C_{N,k,s} \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \|(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} = C_{N,k,s} \|f\|_{H^s(\mathbf{R}^N)} \end{aligned}$$

avec

$$C_{N,k,s} = \left(\frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} \frac{(1 + |\xi|)^{2k}}{(1 + |\xi|^2)^s} d\xi \right)^{1/2} < \infty$$

puisque $2s - 2k > N$. ■

Une conséquence immédiate du théorème de plongement de Sobolev est le fait que

$$\bigcap_{s \in \mathbf{R}} H^s(\mathbf{R}^N) \subset C^\infty(\mathbf{R}^N).$$

Toutefois, les espaces $H^s(\mathbf{R}^N)$ ne se comportent pas tout à fait comme les espaces $C^k(\mathbf{R}^N)$. En voici un exemple frappant.

Evidemment, pour tout $f \in C^m(\mathbf{R}^N)$ et pour tout hyperplan Σ de \mathbf{R}^N , la restriction $f|_\Sigma$ est une fonction de classe C^m sur Σ (on peut supposer que Σ est l'hyperplan d'équation $x_1 = 0$, auquel cas la restriction $f|_\Sigma$ est l'application $(x_2, \dots, x_N) \mapsto f(0, x_2, \dots, x_N)$ qui admet bien des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre m si $f \in C^m(\mathbf{R}^N)$.)

L'énoncé analogue dans le cadre des espaces de Sobolev est faux. Si $f \in H^s(\mathbf{R}^N)$ avec $s > 0$ et $N \geq 2$, la restriction de f à l'hyperplan d'équation $x_N = 0$ n'est pas en général un élément de $H^s(\mathbf{R}^{N-1})$.

Cette restriction n'est d'ailleurs même pas a priori bien définie, puisque $H^s(\mathbf{R}^N)$ est un sous-espace de $L^2(\mathbf{R}^N)$, de sorte qu'une fonction de $H^s(\mathbf{R}^N)$ est une classe d'équivalence de fonctions mesurables qui coïncident sur le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle — ou, ce qui revient au même, une fonction mesurable définie seulement p.p. sur \mathbf{R}^N . Comme tout hyperplan de \mathbf{R}^N est de mesure nulle, on ne peut donc pas parler de la restriction à un hyperplan d'une fonction de $H^s(\mathbf{R}^N)$.

On a toutefois un résultat positif dans cette direction, connu sous le nom de "théorème de trace".

Théorème 5.7.6 (Théorème de trace) *Soient $N \geq 2$ et $s > 1/2$. Alors l'application linéaire*

$$\gamma : \mathcal{S}(\mathbf{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^{N-1})$$

définie par

$$\gamma(f)(x_1, \dots, x_{N-1}) = f(x_1, \dots, x_{N-1}, 0)$$

se prolonge en une application linéaire continue

$$\gamma : H^s(\mathbf{R}^N) \rightarrow H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{N-1}).$$

L'application linéaire γ est appelée habituellement "trace sur l'hyperplan d'équation $x_N = 0$ ".

Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, il serait impropre d'appeler $\gamma(f)$ la restriction de f à l'hyperplan d'équation $x_N = 0$. Plus exactement, γ est l'unique application linéaire de $H^s(\mathbf{R}^N)$ dans $H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{N-1})$ coïncidant avec la restriction à l'hyperplan d'équation $x_N = 0$ sur la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, qui est un sous-espace dense de $H^s(\mathbf{R}^N)$.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbf{R}^N$, notons $x' = (x_1, \dots, x_{N-1}) \in \mathbf{R}^{N-1}$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, l'on a

$$\|\gamma(f)\|_{H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{N-1})} = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \|(1 + |\xi'|^2)^{s/2-1/4} \mathcal{F}(\gamma(f))\|_{L^2(\mathbf{R}^{N-1})}.$$

Or, par théorème d'inversion de Fourier (Théorème 5.2.5)

$$\mathcal{F}(\gamma(f))(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \mathcal{F}f(\xi) d\xi_N, \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

Appliquons alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_{\mathbf{R}} \mathcal{F}f(\xi) d\xi_N \right|^2 \leq J(\xi') \int_{\mathbf{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi_N$$

avec

$$J(\xi') = \int_{\mathbf{R}} \frac{d\xi_N}{(1 + |\xi|^2)^s} = \int_{\mathbf{R}} \frac{d\xi_N}{(1 + |\xi'|^2)^s \left(1 + \frac{\xi_N^2}{1 + |\xi'|^2}\right)^s}.$$

Comme $s > 1/2$, on a $J(\xi') < \infty$ pour tout $\xi' \in \mathbf{R}^{N-1}$; en faisant le changement de variables

$$\zeta = \frac{\xi_N}{\sqrt{1 + |\xi'|^2}}$$

on trouve que

$$J(\xi') = C_s(1 + |\xi'|^2)^{1/2-s}, \text{ avec } C_s = \int_{\mathbf{R}} \frac{d\zeta}{(1 + \zeta^2)^s}.$$

On déduit de ce qui précède que

$$(1 + |\xi'|^2)^{s-1/2} |\mathcal{F}(\gamma(f))(\xi')|^2 \leq C_s \int_{\mathbf{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi_N,$$

si bien qu'en intégrant chaque membre de cette inégalité sur \mathbf{R}^{N-1} , on arrive à l'inégalité

$$\begin{aligned} \|\gamma(f)\|_{H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{N-1})}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^{N-1}} \int_{\mathbf{R}^{N-1}} (1 + |\xi'|^2)^{s-1/2} |\mathcal{F}(\gamma(f))(\xi')|^2 d\xi' \\ &\leq 2\pi C_s \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi = 2\pi C_s \|f\|_{H^s(\mathbf{R}^N)}^2. \end{aligned}$$

On conclut par densité de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ dans $H^s(\mathbf{R}^N)$ (d'après la Proposition 5.7.4 (c)), grâce au Théorème 6.1.1 de l'Appendice. ■

5.8 Exercices

Exercice 1.

Calculer les transformées de Fourier des fonctions ou distributions suivantes définies sur la droite réelle

- (a) $\frac{1}{1+x^2}$
- (b) $e^{-|x|}$
- (c) $\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}$
- (d) $\frac{1}{x \pm i0}$
- (e) $\text{vp} \frac{1}{x}$
- (f) $x^k \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x)$ pour tout entier $k \geq 0$.

Exercice 2.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ une distribution homogène de degré β . Montrer que T est une distribution tempérée et que $\mathcal{F}T$ est une distribution homogène dont on précisera le degré.

Exercice 3.

a) Calculer les transformées de Fourier de x_{\pm}^{α} pour $\alpha > -1$ en fonction de la distribution

$$\frac{1}{(i\xi + 0)^{1+\alpha}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(i\xi + \epsilon)^{1+\alpha}}$$

et de la fonction Γ .

b) Même question pour $\text{pf}(x_{\pm}^{\alpha})$ pour $\alpha < -1$ non entier.

Exercice 4.

a) Existe-t-il une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ telle que

$$\int_{\mathbf{R}} x^k f(x) dx = 0 \text{ pour tout entier } k \geq 0?$$

b) Même question en cherchant $f \in C_c^{\infty}(\mathbf{R})$.

c) Existe-t-il une distribution $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$ telle que

$$\langle S, x^k \rangle = 0, \quad \text{pour tout entier } k \geq 0?$$

Problème : le principe d'incertitude de Heisenberg

Le but de ce problème est de montrer une formulation mathématique du principe d'incertitude de Heisenberg en mécanique quantique.

1) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ à valeurs complexes. Montrer que

$$\int_{\mathbf{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbf{R}} \xi^2 |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi \geq (2\pi) \left(\int_{\mathbf{R}} x \Re \left(\bar{f}(x) \frac{df}{dx}(x) \right) dx \right)^2.$$

2) En déduire que

$$\int_{\mathbf{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbf{R}} \xi^2 |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{\pi}{2} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2 dx \right)^2.$$

3) Déduire de ce qui précède une minoration de

$$\int_{\mathbf{R}} (x - \bar{x})^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbf{R}} (\xi - \bar{\xi})^2 |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi.$$

Supposons que

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2 dx = 1.$$

4) Montrer que, la fonction f étant fixée et choisie comme ci-dessus, la quantité dans la question 3) est minimale lorsque

$$\bar{x} = \int_{\mathbf{R}} x |f(x)|^2 dx \quad \text{et} \quad \bar{\xi} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \xi |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi.$$

5) Expliquer pourquoi ce qui précède est une formulation mathématique du principe d'incertitude. (Voir [2], chapitre 7.2.)

6) Calculer

$$\inf \int_{\mathbf{R}} (x - \bar{x})^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbf{R}} (\xi - \bar{\xi})^2 |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi$$

lorsque \bar{x} et $\bar{\xi}$ sont choisis comme dans la question 4), et que f décrit l'ensemble des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ vérifiant

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2 dx = 1.$$

(Indication : on pourra étudier le cas où f est une gaussienne.)

7) Généraliser ce qui précède au cas de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ avec $N \geq 2$. Calculer, pour tout $k \neq l \in \{1, \dots, N\}$,

$$\inf \int_{\mathbf{R}^N} x_k^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbf{R}^N} \xi_l^2 |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi$$

lorsque f décrit l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ telles que

$$\int_{\mathbf{R}^N} |f(x)|^2 dx = 1.$$

Chapitre 6

Appendice

On a rassemblé dans cet appendice quelques notions ou résultats classiques en mathématiques, d'un usage fréquent dans ce cours, que le lecteur aura sans doute déjà rencontré sous une forme éventuellement différente, ou dans certains cas particuliers.

6.1 Rappels de topologie

On utilise très souvent en analyse le résultat de prolongement par continuité ci-dessous. (Par exemple, on l'utilise pour définir la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbf{R})$ une fois établie l'égalité de Plancherel pour les fonctions de $L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$: voir [6], chapitre IV.4, ou [9], chapitre IX.1.)

Théorème 6.1.1 *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques, et D une partie dense dans X . Soit $f : D \rightarrow Y$ uniformément continue — c'est-à-dire que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha(\epsilon) > 0$ tel que*

$$x, x' \in D \text{ et } d(x, x') < \alpha(\epsilon) \Rightarrow \delta(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Supposons que Y est complet. Alors f se prolonge de manière unique en une application uniformément continue de $F : X \rightarrow Y$.

Démonstration. Soit $x \in X$; comme D est dense dans X , il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ telle que $x_n \rightarrow x$ lorsque $n \rightarrow \infty$. En particulier la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy. Comme f est uniformément continue sur D , la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ est de Cauchy. Soit en effet $\epsilon > 0$; comme la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy, il existe $N \geq 0$ t.q. $m, n > N$ implique $d(x_m, x_n) < \alpha(\epsilon)$, d'où $\delta(f(x_m), f(x_n)) < \epsilon$. Comme Y est complet, la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ converge dans Y ; notons $F(x)$ sa limite.

D'une part, la valeur $F(x)$ ne dépend que de x , mais pas de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de D convergeant vers x . Soit en effet une autre suite $(x'_n)_{n \geq 0}$ de D convergeant également vers x ; comme $d(x_n, x'_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on a $\delta(f(x_n), f(x'_n)) \rightarrow 0$ puisque f est uniformément continue sur D .

Montrons que F est uniformément continue. Soient en effet $\epsilon > 0$ et $x, x' \in X$ tels que $d(x, x') < \alpha(\epsilon)$. Soient deux suites $((x_n)_{n \geq 0})$ et $((x'_n)_{n \geq 0})$ de D convergeant vers x et x' respectivement. Il existe donc $N > 0$ tel que $n \geq N$ implique $d(x_n, x'_n) < \alpha(3\epsilon)$, de sorte que $\delta(f(x_n), f(x'_n)) < 3\epsilon$. En passant à la limite pour $n \rightarrow +\infty$, on conclut que $\delta(F(x), F(x')) < 3\epsilon$, dès que $d(x, x') < \alpha(\epsilon)$.

Soient maintenant F et F' deux prolongements continus de f à X ; comme $F|_D = F'|_D = f$ et que D est dense dans X , on conclut que $F = F'$, d'où l'unicité de F . ■

Un autre type de raisonnement topologique que le lecteur rencontrera souvent dans ce cours, notamment lorsqu'il s'agit de régulariser par convolution des fonctions à support compact dans un ouvert de \mathbf{R}^N , consiste à faire intervenir la notion de distance d'un compact à un fermé. En pratique, nous n'aurons besoin de cette notion que dans le cas de parties fermées ou compactes de l'espace euclidien \mathbf{R}^N , mais les raisonnements de base relatifs à cette notion sont identiques dans un espace métrique général, et c'est donc dans ce cadre que nous les présentons ci-dessous.

Soient (X, d) espace métrique, et $F \subset X$ fermé. On pose

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y).$$

Proposition 6.1.2 *Soient (X, d) espace métrique, et $F \subset X$ fermé. La fonction $x \mapsto d(x, F)$ est lipschitzienne de rapport 1 sur (X, d) , c'est-à-dire que*

$$|d(x, F) - d(x', F)| \leq d(x, x'), \quad \text{pour tous } x, x' \in X.$$

De plus, pour tout $x \in X$,

$$d(x, F) = 0 \text{ si et seulement si } x \in F.$$

Démonstration. D'après l'inégalité triangulaire, pour tous $x, x' \in X$ et tout $y \in F$, on a

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y)$$

de sorte qu'en prenant la borne inférieure de chaque membre de cette inégalité pour y décrivant F ,

$$d(x, F) \leq d(x, x') + d(x', F),$$

c'est-à-dire que

$$d(x, F) - d(x', F) \leq d(x, x').$$

Par symétrie en x, x' , on en déduit que

$$|d(x, F) - d(x', F)| \leq d(x, x'), \quad \text{pour tous } x, x' \in X.$$

Soit $x \in X$; évidemment, si $x \in F$, on a

$$0 \leq d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y) \leq d(x, x) = 0.$$

Réciproquement, si

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y) = 0$$

il existe une suite $(y_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$y_n \in F \text{ et } 0 \leq d(x, y_n) < \frac{1}{n} \text{ pour tout } n \geq 1,$$

ce qui montre en particulier que $y_n \rightarrow x$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Or comme $y_n \in F$ pour tout $n \geq 1$ et que F est fermé, il s'ensuit que $x \in F$. ■

Plus généralement, soient $A, B \subset X$. On pose

$$d(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y).$$

(Evidemment, pour tout $x \in X$, $d(x, F) = d(\{x\}, F)$.)

Proposition 6.1.3 *Soient (X, d) espace métrique, $F \subset X$ fermé, et $K \subset X$ compact. Il existe $x \in K$ tel que $d(x, F) = d(K, F)$. De plus*

$$d(K, F) > 0 \Leftrightarrow K \cap F = \emptyset$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, la fonction $X \ni x \mapsto d(x, F)$ est continue sur X ; elle atteint donc sa borne inférieure sur le compact K , ce qui veut dire qu'il existe $x \in K$ tel que

$$d(x, F) = \inf_{z \in K} d(z, F) = \inf_{\substack{z \in K \\ y \in F}} d(x, y) = d(K, F).$$

Supposons que $d(K, F) > 0$; évidemment $K \cap F = \emptyset$. Sinon il existerait $x \in K \cap F$, et on aurait

$$0 \leq d(K, F) \leq d(x, F) = 0 \text{ puisqu'en particulier } x \in F.$$

Réciproquement, supposons que $K \cap F = \emptyset$, et montrons que $d(K, F) > 0$. D'après la première partie de la proposition, il existe $x \in K$ tel que $d(K, F) = d(x, F)$. Si on avait $0 = d(K, F) = d(x, F)$, on en déduirait que $x \in F$, et donc que $x \in K \cap F$ ce qui contredirait l'hypothèse selon laquelle $K \cap F = \emptyset$. ■

Par exemple, pour $\Omega \subset X$ ouvert et K compact de X tel que $K \subset \Omega$, on a $K \cap \partial\Omega = \emptyset$, de sorte que

$$d(K, \partial\Omega) = \emptyset.$$

(Ici, $\partial\Omega$ est la frontière de Ω au sens topologique, c'est-à-dire que $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$.)

Il faut noter que si $F_1, F_2 \subset X$ sont des fermés quelconques, la condition $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ n'implique évidemment pas que $d(F_1, F_2) > 0$. Voici un exemple : prendre $X = \mathbf{R}$ muni de sa distance usuelle définie par $d(x, y) = |x - y|$, puis $F_1 = \mathbf{N}$ et $F_2 = \{n + 2^{-n-2} \mid n \in \mathbf{N}\}$.

6.2 Intégration sur les surfaces

Nous allons expliquer de façon purement descriptive — c'est-à-dire sans démonstration et avec le minimum de formalisme — comment définir et calculer des expressions du type

$$\int_{\Sigma} \phi(x) d\sigma(x)$$

où Σ est une surface de classe C^1 de \mathbf{R}^3 — ou plus généralement une hypersurface de classe C^1 de \mathbf{R}^N , et où $d\sigma(x)$ est l'élément d'aire (ou de surface) sur Σ , tandis que $\phi \in C_c(\mathbf{R}^3)$.

6.2.1 Intégrales curvilignes : rappels

Soit Γ un arc de courbe plane défini par un paramétrage $I \ni t \mapsto M(t) \in \mathbf{R}^2$ injectif sur I et de classe C^1 , tel que $\dot{M}(t) := \frac{d}{dt}M(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$, où I est un segment de \mathbf{R} . Rappelons que $\dot{M}(t)$ est un vecteur tangent à la courbe Γ au point $M(t)$. L'espace tangent à Γ au point $M(t)$ est la droite affine passant par $M(t)$ de direction $\dot{M}(t)$.

Rappelons la notion d'abscisse curviligne sur l'arc Γ (notion figurant au programme des classes préparatoires). Une abscisse curviligne sur Γ est une fonction $s : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $t \mapsto s(M(t))$ soit de classe C^1 sur I et vérifie

$$\frac{d}{dt}s(M(t)) = |\dot{M}(t)|.$$

Soit $\phi \in C(\mathbf{R}^2)$; on définit l'intégrale curviligne

$$\int_{\Gamma} \phi(M) ds(M) := \int_I \phi(M(t)) |\dot{M}(t)| dt.$$

Cette définition est évidemment indépendante du paramétrage : si $\mathcal{T} : J \rightarrow I$ est une bijection de classe C^1 de bijection réciproque $\mathcal{T}^{-1} : I \rightarrow J$ de classe C^1 , on a

$$\begin{aligned} \int_I \phi(M(t)) \left| \frac{dM}{dt}(t) \right| dt &= \int_J \phi(M(\mathcal{T}(\tau))) \left| \frac{dM}{dt}(\mathcal{T}(\tau)) \right| |\mathcal{T}'(\tau)| d\tau \\ &= \int_J \phi(M \circ \mathcal{T}(\tau)) \left| \frac{dM \circ \mathcal{T}}{d\tau}(\tau) \right| d\tau \end{aligned}$$

La différentielle

$$ds(M(t)) = |\dot{M}(t)| dt$$

(de la fonction $s \circ M$) est appelé élément de longueur sur la courbe Γ . Le calcul ci-dessus montre qu'il ne dépend pas du paramétrage de Γ choisi.

Si on note $I =: [a, b]$, la longueur de l'arc de courbe Γ est

$$\text{long}(\Gamma) := s(M(b)) - s(M(a))$$

pour toute abscisse curviligne s sur Γ . Comme deux abscisses curvilignes sur Γ diffèrent d'une constante, la définition ci-dessus de la longueur de Γ est évidemment indépendante du choix de l'abscisse curviligne sur Γ . Et la définition ci-dessus de l'intégrale curviligne dans le cas de la fonction constante $\phi = 1$ montre que

$$\text{long}(\Gamma) = \int_{\Gamma} ds(M).$$

Rappelons l'origine de cette formule. Intuitivement

$$\text{long}(\Gamma) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} |\overrightarrow{M(t_i)M(t_{i+1})}|$$

où on a noté $t_i = a + i \frac{b-a}{n}$. Autrement dit, la longueur de l'arc de courbe Γ est la limite des longueurs des lignes polygonales de sommets $M(t_i)$ pour $i = 0, \dots, n$. Si l'on suppose pour simplifier que le paramétrage $t \mapsto M(t)$ est de classe C^2 , alors, d'après la formule de Taylor,

$$|\overrightarrow{M(t_i)M(t_{i+1})}| = [t_{i+1} - t_i] |\dot{M}(t_i)| + O(|t_{i+1} - t_i|^2).$$

Donc

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\overrightarrow{M(t_i)M(t_{i+1})}| = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\dot{M}(t_i)| + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} O\left(\frac{1}{n}\right)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \text{long}(\Gamma) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} |\overrightarrow{M(t_i)M(t_{i+1})}| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\dot{M}(t_i)| = \int_a^b |\dot{M}(t)| dt = \int_{\Gamma} ds(M). \end{aligned}$$

Lorsque Γ est l'arc de courbe d'équation $y = f(x)$ avec $x \in I := [a, b]$ et f de classe C^1 sur I , un paramétrage évident de Γ est $I \ni x \mapsto M(x) = (x, f(x)) \in \mathbf{R}^2$, qui est de classe C^1 . Ce paramétrage vérifie $\dot{M}(x) = (1, f'(x)) \neq 0$ pour tout $x \in I$; il est clairement injectif. Donc

$$\frac{d}{dx} s(M(x)) = |(1, f'(x))| = \sqrt{1 + f'(x)^2}, \quad x \in I,$$

et, pour tout $\phi \in C(\mathbf{R}^2)$,

$$\int_{\Gamma} \phi(M) ds(M) = \int_I \phi(x, f(x)) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Supposons maintenant que Γ est une courbe du plan \mathbf{R}^2 d'équation $F(x, y) = 0$ — c'est-à-dire que $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$ où $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ est une

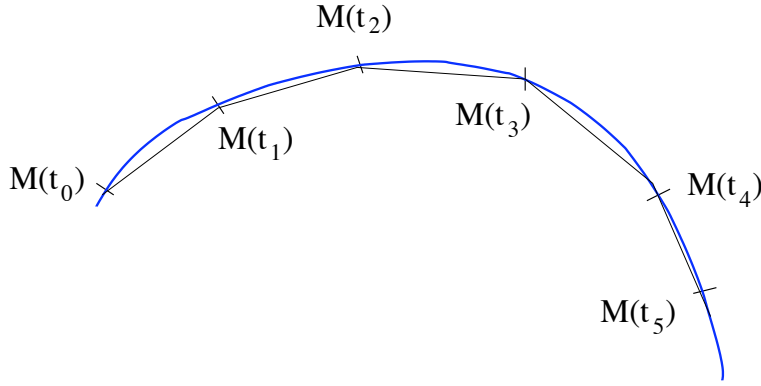


FIGURE 6.1 – Approximation de la longueur d'un arc de courbe par la longueur d'une ligne brisée polygonale

fonction de classe C^1 telle que $\nabla F(x, y) = (\partial_x F(x, y), \partial_y F(x, y)) \neq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Soit $\phi \in C_c(\mathbf{R}^2)$; on veut définir et calculer

$$\int_{\Gamma} \phi(M) ds(M).$$

Soit $R > 0$ t.q. $\text{supp}(\phi) \subset \overline{B(0, R)}$. Pour tout $M^* = (x^*, y^*) \in \Gamma$, on a $\partial_x F(M^*) \neq 0$ ou $\partial_y F(M^*) \neq 0$: d'après le théorème des fonctions implicites, il existe $\Omega(M^*)$ ouvert de \mathbf{R}^2 tel que le morceau de courbe $\Omega(M^*) \cap \Gamma$ soit défini par une équation de la forme $y = f_{M^*}(x)$, ou de la forme $x = g_{M^*}(y)$.

On obtient ainsi $(\Omega(M^*))_{M^* \in \Gamma \cap \overline{B(0, R)}}$ qui est un recouvrement ouvert du compact $\Gamma \cap \overline{B(0, R)}$: il en existe donc un sous-recouvrement fini, soit $(\Omega_k)_{1 \leq k \leq n}$.

L'intersection $\Omega_k \cap \Gamma$ est donc définie par une équation de la forme $y = f_k(x)$ ou $x = g_k(y)$ avec f_k, g_k de classe C^1 . Soit $(\chi_k)_{1 \leq k \leq n}$ partition de l'unité de classe C^∞ au voisinage du compact $\overline{B(0, R)} \cap \Gamma$ subordonnée au recouvrement $(\Omega_k)_{1 \leq k \leq n}$.

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \phi(M) ds(M) &= \sum_{k=1}^n \int_{\overline{B(0, R)} \cap \Gamma} \chi_k(M) \phi(M) ds(M) \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k \cap \Gamma} \chi_k(M) \phi(M) ds(M). \end{aligned}$$

Puis

$$\int_{\Omega_k \cap \Gamma} \chi_k(M) \phi(M) ds(M) = \begin{cases} \int_{I_k} \chi_k \phi(x, f_k(x)) \sqrt{1 + f_k'(x)^2} dx \\ \int_{J_k} \chi_k \phi(g_k(y), y) \sqrt{1 + g_k'(y)^2} dy \end{cases}$$

selon que $\Omega_k \cap \Gamma$ est défini par une équation de la forme $y = f_k(x)$ ou de la forme $x = f_k(y)$.

Remarque : le théorème des fonctions implicites fournit une expression des dérivées

$$f'_k(x) = -\frac{\partial_x F(x, f_k(x))}{\partial_y F(x, f_k(x))},$$

ou

$$g'_k(y) = -\frac{\partial_y F(g_k(y), y)}{\partial_x F(g_k(y), y)}.$$

En revanche, pour exploiter la formule ci-dessus pour

$$\int_{\Omega_k \cap \Gamma} \chi_k(M) \phi(M) ds(M)$$

il faut avoir accès à d'une manière ou d'une autre à une expression de f_k ou de g_k .

Etant donnée Γ , courbe du plan euclidien \mathbf{R}^2 définie, soit par un paramétrage $I \ni t \mapsto M(t) \in \mathbf{R}^2$, soit par une équation de la forme $F(x, y) = 0$, et $\rho \in C(\mathbf{R}^2)$, la forme linéaire

$$C_c^\infty(\mathbf{R}^2) \ni \phi \mapsto \int_{\Gamma} \phi(M) \rho(M) ds(M) \in \mathbf{R}$$

définit une distribution d'ordre 0 sur \mathbf{R}^2 , appelée distribution de simple couche de densité ρ sur la courbe Γ .

6.2.2 Élément d'aire sur une surface ; intégrale de surface

Soient U et V , deux vecteurs de \mathbf{R}^3 . Le parallélogramme $P(U, V)$ engendré par le couple de vecteurs (U, V) est défini par

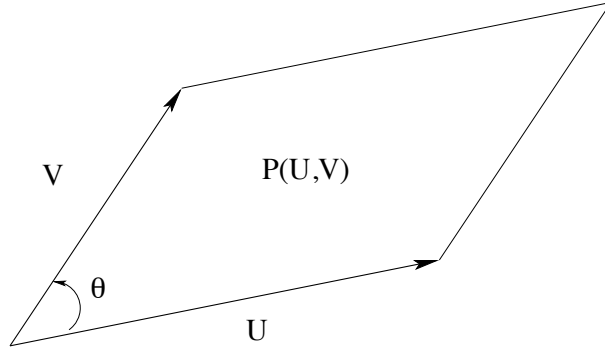
$$P(U, V) := \{uU + vV \mid 0 \leq u, v \leq 1\}.$$

L'aire du parallélogramme $P(U, V)$ vaut

$$\text{aire}(P(U, V)) = |U||V|\sin(\widehat{U, V}) = |U \wedge V|$$

où le symbole \wedge désigne ici le produit vectoriel dans \mathbf{R}^3 .

Une nappe paramétrée Σ de l'espace euclidien \mathbf{R}^3 est un morceau de surface défini par un paramétrage de la forme $\Omega \ni (u, v) \mapsto M(u, v) \in \mathbf{R}^3$ injectif, de classe C^1 sur Ω ouvert de \mathbf{R}^2 , et tel que les deux vecteurs $\partial_u M(u, v)$ et $\partial_v M(u, v)$ de \mathbf{R}^3 soient linéairement indépendants pour tout $(u, v) \in \Omega$. Cette notion généralise celle d'arc de courbe paramétré de la section précédente, en définissant un objet géométrique "à deux degrés de liberté" — c'est-à-dire que, localement au voisinage de $M(u, v)$, on peut se déplacer dans deux directions indépendantes en faisant varier soit u , soit v . Le fait que $\{\partial_u M(u, v), \partial_v M(u, v)\}$ soit une partie libre de \mathbf{R}^3 généralise évidemment la condition $M(t) \neq 0$ de la

FIGURE 6.2 – Parallélogramme engendré par les vecteurs U et V

section précédente pour un arc de courbe paramétré — en effet, dire que le singleton $\{M(t)\}$ est une partie libre de \mathbf{R}^2 équivaut au fait que $M'(t) \neq 0$.

Le plan tangent $T_{M(u,v)}\Sigma$ à Σ au point $M(u, v)$ est le plan affine

$$\begin{aligned} T_{M(u,v)}\Sigma &:= \{M(u, v) + \lambda \partial_u M(u, v) + \mu \partial_v M(u, v) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\} \\ &= \{N \in \mathbf{R}^3 \mid \overrightarrow{M(u, v)N} \in \text{Vect}(\partial_u M(u, v), \partial_v M(u, v))\}. \end{aligned}$$

Soient $I := [a, b]$ et $J := [c, d]$ segments de \mathbf{R} tels que $I \times J \subset \Omega$; on cherche à calculer l'aire du morceau de surface

$$\Sigma(I \times J) := \{M(u, v) \mid (u, v) \in I \times J\}.$$

Intuitivement,

$$\text{aire}(\Sigma(I \times J)) := \lim_{m, n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} A_{ij},$$

où

$$A_{ij} := \text{aire}(P(\overrightarrow{M(u_i, v_j)M(u_{i+1}, v_j)}, \overrightarrow{M(u_i, v_j)M(u_i, v_{j+1})}))$$

avec

$$u_i = a + i \frac{b-a}{m} \quad \text{et} \quad v_j = c + j \frac{d-c}{n}.$$

Cette définition est analogue à celle de la longueur d'un arc de courbe paramétré dans la section précédente. La seule différence est que l'on ne peut pas interpréter cette définition comme conséquence d'une approximation du morceau de surface considéré par une surface polyédrale, dans la mesure où les quatre points $M(u_i, v_j)$, $M(u_{i+1}, v_j)$, $M(u_i, v_{j+1})$ et $M(u_{i+1}, v_{j+1})$ ne sont pas forcément coplanaires.

Supposons pour simplifier que le paramétrage $(u, v) \mapsto M(u, v)$ est en réalité de classe C^2 sur Ω . Alors, d'après la formule de Taylor

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M(u_i, v_j)M(u_{i+1}, v_j)} &= (u_{i+1} - u_i) \partial_u M(u_i, v_j) + O(|u_{i+1} - u_i|^2), \\ \overrightarrow{M(u_i, v_j)M(u_i, v_{j+1})} &= (v_{j+1} - v_j) \partial_v M(u_i, v_j) + O(|v_{j+1} - v_j|^2), \end{aligned}$$

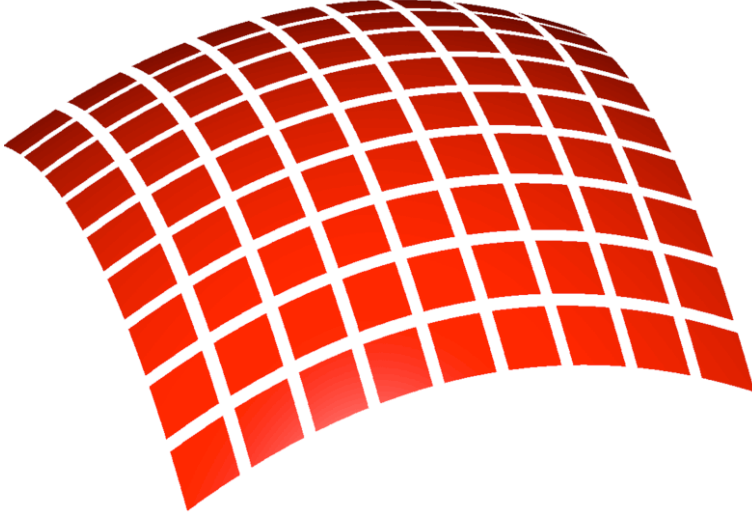


FIGURE 6.3 – Décomposition d'un morceau de surface en parallélogrammes infinitésimaux

de sorte que

$$A_{ij} = |\partial_u M(u_i, v_j) \wedge \partial_v M(u_i, v_j)| (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j) \\ + O(|u_{i+1} - u_i|^2 |v_{i+1} - v_i| + |u_{i+1} - u_i| |v_{j+1} - v_j|^2).$$

Ainsi, l'aire du parallélogramme engendré dans l'espace euclidien \mathbf{R}^3 par les vecteurs $\overline{M(u_i, v_j)M(u_{i+1}, v_j)}$ et $\overline{M(u_i, v_j)M(u_i, v_{j+1})}$ est asymptotiquement équivalente à l'aire du parallélogramme engendré dans le plan tangent à la surface Σ au point $M(u_i, v_j)$ par les vecteurs $(u_{i+1} - u_i)\partial_u M(u_i, v_j)$ et $(v_{j+1} - v_j)\partial_v M(u_i, v_j)$.

Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} A_{ij} = \frac{1}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} |\partial_u M(u_i, v_j) \wedge \partial_v M(u_i, v_j)| \\ + \frac{1}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} O\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right),$$

de sorte que

$$\text{aire}(\Sigma(I \times J)) = \lim_{m, n \rightarrow +\infty} \frac{1}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} |\partial_u M(u_i, v_j) \wedge \partial_v M(u_i, v_j)| \\ = \iint_{I \times J} |\partial_u M(u, v) \wedge \partial_v M(u, v)| du dv.$$

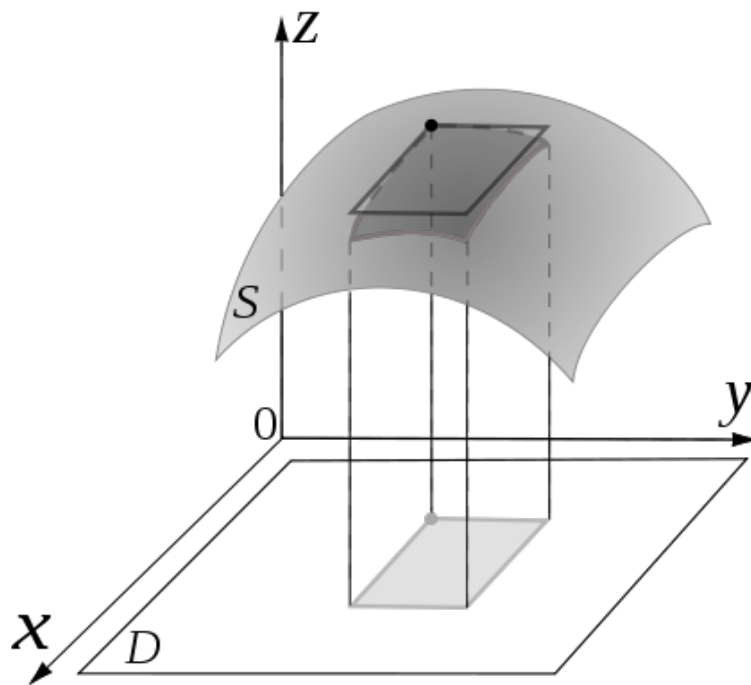


FIGURE 6.4 – Approximation de l'aire d'un parallélogramme infinitésimal par celle du parallélogramme infinitésimal tangent

En résumé, l'élément d'aire (ou de surface) sur la nappe paramétrée Σ de paramétrage $\Omega \ni (u, v) \mapsto M(u, v) \in \mathbf{R}^3$ est la quantité

$$d\sigma(M(u, v)) := |\partial_u M(u, v) \wedge \partial_v M(u, v)| du dv$$

analogue à l'élément de longueur sur un arc de courbe paramétré. En d'autres termes,

$$d\sigma(M(u, v)) = \text{aire}(P(\partial_u M(u, v), \partial_v M(u, v))) du dv.$$

Soit maintenant $\phi \in C(\mathbf{R}^3)$ telle que $\phi \circ M$ est à support compact dans Ω . On définit alors l'intégrale de surface

$$\int_{\Sigma} \phi(M) d\sigma(M) := \iint_{\Omega} \phi(M(u, v)) |\partial_u M(u, v) \wedge \partial_v M(u, v)| du dv$$

qui est l'analogie pour les surfaces de la notion d'intégrale curviligne rappelée à la section précédente.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que cette définition est indépendante du paramétrage choisi pour Σ . En d'autres termes, si Ω' est un autre ouvert de \mathbf{R}^2 et $\mathcal{T} : \Omega' \rightarrow \Omega$ un C^1 -difféomorphisme, on a

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \phi(M(u, v)) |\partial_u M(u, v) \wedge \partial_v M(u, v)| du dv \\ = \iint_{\Omega'} \phi(M \circ \mathcal{T}(w, z)) |\partial_w M \circ \mathcal{T}(w, z) \wedge \partial_z M \circ \mathcal{T}(w, z)| dw dz \end{aligned}$$

grâce à la formule du changement de variables dans les intégrales doubles.

Calculons l'élément d'aire sur une surface $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ donnée par une équation de la forme $z = f(x, y)$ avec $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ de classe C^1 .

Dans ce cas, on dispose pour la surface Σ d'un paramétrage évident, à savoir $\Omega \ni (x, y) \mapsto M(x, y) = (x, y, f(x, y)) \in \mathbf{R}^3$. Ce paramétrage est évidemment de classe C^1 puisque f est de classe C^1 , et il est également clairement injectif. De plus

$$\partial_x M(x, y) = (1, 0, \partial_x f(x, y)) \quad \text{et} \quad \partial_y M(x, y) = (0, 1, \partial_y f(x, y))$$

sont évidemment linéairement indépendants. Un calcul immédiat montre que

$$\partial_x M(x, y) \wedge \partial_y M(x, y) = (-\partial_x f(x, y), -\partial_y f(x, y), 1)$$

de sorte que l'élément d'aire sur la surface Σ d'équation $z = f(x, y)$ vaut

$$d\sigma(M(u, v)) := \sqrt{1 + \partial_x f(x, y)^2 + \partial_y f(x, y)^2} dx dy = \sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2} dx dy$$

On notera l'analogie entre cette formule et celle donnant l'élément de longueur sur une courbe d'équation $y = f(x)$, rappelée dans la section précédente.

Enfin, lorsque la surface Σ est donnée par une équation de la forme $F(x, y, z) = 0$, et que $\phi \in C_c(\mathbf{R}^3)$, on ramène le calcul de l'intégrale de surface

$$\int_{\Sigma} \phi(M) d\sigma(M)$$

à celui d'une somme finie d'intégrales sur des morceaux de surface donnés par des équations de la forme $z = f(x, y)$ ou $x = g(y, z)$, ou encore $y = h(z, x)$, en appliquant le théorème des fonctions implicites et en utilisant une partition de l'unité comme on l'a vu dans le cas des courbes à la fin de la section précédente. Le lecteur est invité à rédiger complètement cet argument en s'en inspirant.

Étant donnée Σ et une surface dans l'espace euclidien \mathbf{R}^3 définie soit par un paramétrage $(u, v) \mapsto M(u, v)$, soit par une équation de la forme $F(x, y, z) = 0$, et $\rho \in C(\mathbf{R}^3)$, la forme linéaire

$$C_c^\infty(\mathbf{R}^3) \ni \phi \mapsto \int_{\Sigma} \phi(M) \rho(M) d\sigma(M) \in \mathbf{R}$$

définit une distribution d'ordre 0 sur \mathbf{R}^3 , appelée distribution de simple couche de densité ρ sur la surface Σ .

6.3 Intégration sur une hypersurface de \mathbf{R}^N

Généralisons ce qui précède en dimension N quelconque.

Mesure de Lebesgue d'un parallélépipède de \mathbf{R}^N

Soient des vecteurs $U_1, \dots, U_N \in \mathbf{R}^N$, et $P(U_1, \dots, U_N)$ le parallélépipède engendré par U_1, \dots, U_N , soit

$$P(U_1, \dots, U_N) := \{u_1 U_1 + \dots + u_N U_N \mid 0 \leq u_1, \dots, u_N \leq 1\}.$$

La mesure de Lebesgue dans \mathbf{R}^N (c'est-à-dire la généralisation du volume en dimension N) de $P(U_1, \dots, U_N)$ est donnée par

$$\mathcal{L}_N(P(U_1, \dots, U_N)) = \int_{\mathbf{R}^N} \mathbf{1}_{P(U_1, \dots, U_N)}(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N.$$

Supposons que U_1, \dots, U_N sont linéairement indépendants dans \mathbf{R}^N , et faisons le changement de variables défini par $(x_1, \dots, x_N) = u_1 U_1 + \dots + u_N U_N$. Son jacobien vaut

$$\det \frac{D(x_1, \dots, x_N)}{D(u_1, \dots, u_N)} = \det(U_1, \dots, U_N)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^N} \mathbf{1}_{P(U_1, \dots, U_N)}(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} \mathbf{1}_{0 \leq u_1, \dots, u_N \leq 1} \det \frac{D(x_1, \dots, x_N)}{D(u_1, \dots, u_N)} du_1 \dots du_N \\ &= \det(U_1, \dots, U_N) \int_{[0,1]^N} du_1 \dots du_N = \det(U_1, \dots, U_N). \end{aligned}$$

On trouve ainsi que

$$\mathcal{L}_N(P(U_1, \dots, U_N)) = \det(U_1, \dots, U_N).$$

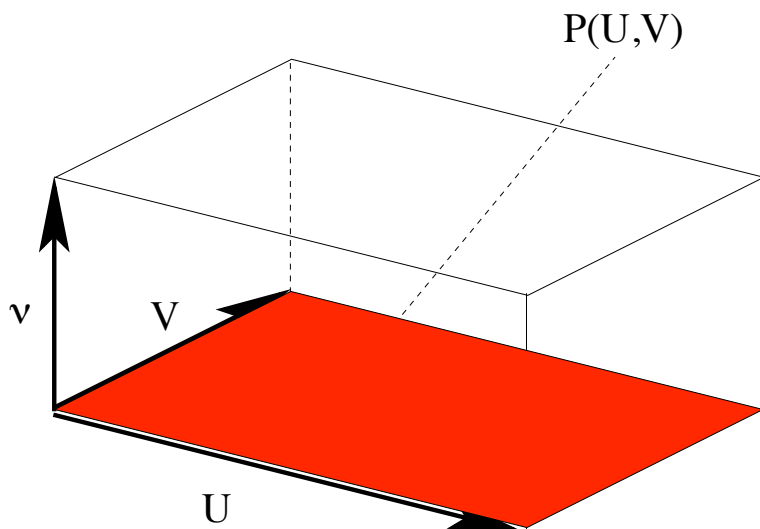


FIGURE 6.5 – Surface du parallélogramme engendré par U et V , et volume du parallélépipède engendré par U , V et ν

Mesure de Lebesgue $N - 1$ -dimensionnelle d'un parallélépipède dans un hyperplan de \mathbf{R}^N

On veut généraliser la notion d'élément d'aire sur une surface de \mathbf{R}^3 au cas d'une hypersurface de classe C^1 de \mathbf{R}^N (c'est-à-dire d'une sous-variété de classe C^1 de dimension $N - 1$ de \mathbf{R}^N). Commençons par le cas d'un hyperplan de \mathbf{R}^N . Soient donc H hyperplan de \mathbf{R}^N , et $V_1, \dots, V_{N-1} \in H$. On définit comme d'habitude le parallélépipède engendré par les vecteurs $V_1, \dots, V_{N-1} \in H$:

$$P(V_1, \dots, V_{N-1}) = \{v_1 V_1 + \dots + v_{N-1} V_{N-1} \mid 0 \leq v_1, \dots, v_{N-1} \leq 1\} \subset H.$$

Soit $\nu \in \mathbf{R}^N$ vecteur unitaire normal à H ; à partir du parallélépipède $N - 1$ -dimensionnel $P(V_1, \dots, V_{N-1})$ de H , on construit le parallélépipède N -dimensionnel $P(V_1, \dots, V_{N-1}, \nu)$ de \mathbf{R}^N .

Intuitivement, la mesure de Lebesgue $N - 1$ -dimensionnelle du parallélépipède $N - 1$ -dimensionnel $P(V_1, \dots, V_{N-1})$ doit vérifier

$$\mathcal{L}_{N-1}(P(V_1, \dots, V_{N-1})) \cdot |\nu| = \mathcal{L}_N(P(V_1, \dots, V_{N-1}, \nu)),$$

soit

$$\mathcal{L}_{N-1}(P(V_1, \dots, V_{N-1})) = |\det(V_1, \dots, V_{N-1}, \nu)|$$

puisque $|\nu| = 1$.

Une façon équivalente de formuler ceci consiste à utiliser la notion de produit vectoriel (comme on l'a fait dans le cas de dimension $N = 3$ dans la section précédente.) On connaît la définition du produit vectoriel de deux vecteurs dans un espace euclidien de dimension 3. Soit maintenant E un espace

vectorel euclidien de dimension $N > 2$, et (e_1, \dots, e_N) une base orthonormée de E qui en définit l'orientation. Soient $X_1, \dots, X_{N-1} \in E$; le produit vectoriel $X_1 \wedge \dots \wedge X_{N-1}$ est l'unique vecteur Y de E représentant la forme linéaire

$$E \ni \xi \mapsto \det(X_1, \dots, X_{N-1}, \xi) \in \mathbf{R}.$$

Autrement dit, $X_1 \wedge \dots \wedge X_{N-1}$ est l'unique vecteur Y de E tel que

$$\det_{(e_1, \dots, e_N)}(X_1, \dots, X_{N-1}, \xi) = Y \cdot \xi \quad \text{pour tout } \xi \in E.$$

Cette définition est indépendante du choix de la base orthonormée directe (e_1, \dots, e_N) — en effet, si (e'_1, \dots, e'_N) est une autre base orthonormée directe de E , on a

$$\begin{aligned} \det_{(e'_1, \dots, e'_N)}(X_1, \dots, X_{N-1}, \xi) &= \det_{(e_1, \dots, e_N)}(X_1, \dots, X_{N-1}, \xi) \det_{(e'_1, \dots, e'_N)}(e_1, \dots, e_N) \\ &= \det_{(e_1, \dots, e_N)}(X_1, \dots, X_{N-1}, \xi) \end{aligned}$$

puisque $\det_{(e'_1, \dots, e'_N)}(e_1, \dots, e_N) = 1$.

On vérifiera sans peine les propriétés suivantes :

- 1) l'application $E^{N-1} \ni (X_1, \dots, X_{N-1}) \mapsto X_1 \wedge \dots \wedge X_{N-1} \in E$ est $N - 1$ -linéaire;
- 2) si les vecteurs X_1, \dots, X_{N-1} ne sont pas linéairement indépendants (sur \mathbf{R}), alors $X_1 \wedge \dots \wedge X_{N-1} = 0$;
- 3) pour toute permutation $\tau \in \mathfrak{S}_{N-1}$, on a

$$X_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge X_{\tau(N-1)} = (-1)^{|\tau|} X_1 \wedge \dots \wedge X_{N-1};$$

- 4) on a

$$X_1 \wedge \dots \wedge X_{N-1} \perp \text{Vect}(\{X_1 \wedge \dots \wedge X_{N-1}\});$$

- 5) si (f_1, \dots, f_N) est une base orthonormée de E , on a

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_{N-1} = \pm f_N,$$

le signe étant $+$ si (f_1, \dots, f_N) et (e_1, \dots, e_N) sont de même orientation, et $-$ dans le cas contraire;

- 6) si les coordonnées de X_i dans la base orthonormée directe (e_1, \dots, e_N) sont (x_i^1, \dots, x_i^N) pour tout $i = 1, \dots, N - 1$,

$$X_1 \wedge \dots \wedge X_{N-1} = \sum_{k=1}^N (-1)^{N+k} \Delta_k e_k,$$

où Δ_k est le déterminant de la matrice carrée à $N - 1$ lignes et colonnes obtenue en supprimant la k -ième ligne de

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_{N-1}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^N & \dots & x_{N-1}^N \end{pmatrix}.$$

Revenons au calcul de la mesure de Lebesgue $N - 1$ -dimensionnelle d'un parallélépipède dans un hyperplan de \mathbf{R}^N muni de son produit scalaire usuel. Soient H hyperplan de \mathbf{R}^N , et $V_1, \dots, V_{N-1} \in H$, ainsi qu'un vecteur unitaire ν normal à H . Alors

$$\begin{aligned} |\det(V_1, \dots, V_{N-1}, \nu)| &= |V_1 \wedge \dots \wedge V_{N-1} \cdot \nu| \\ &= |V_1 \wedge \dots \wedge V_{N-1}| |\nu| = |V_1 \wedge \dots \wedge V_{N-1}| \end{aligned}$$

où la première égalité découle de la définition du produit vectoriel $V_1 \wedge \dots \wedge V_{N-1}$, la deuxième du fait que $V_1 \wedge \dots \wedge V_{N-1}$ est colinéaire à ν (d'après les propriétés 2 et 4 ci-dessus), et la troisième du fait que $|\nu| = 1$.

En résumé, si V_1, \dots, V_{N-1} sont $N - 1$ vecteurs de \mathbf{R}^N , la mesure de Lebesgue $N - 1$ -dimensionnelle du parallélépipède engendré par V_1, \dots, V_{N-1} dans tout hyperplan de \mathbf{R}^N contenant V_1, \dots, V_{N-1} , vaut

$$\mathcal{L}_{N-1}(P(V_1, \dots, V_{N-1})) = |V_1 \wedge \dots \wedge V_{N-1}|.$$

Remarquons que, si V_1, \dots, V_{N-1} sont linéairement indépendants, le seul hyperplan de \mathbf{R}^N contenant V_1, \dots, V_{N-1} est $\text{Vect}(V_1, \dots, V_{N-1})$. Sinon, il existe plusieurs hyperplans de \mathbf{R}^N contenant V_1, \dots, V_{N-1} , mais on a $\mathcal{L}_{N-1}(P(V_1, \dots, V_{N-1})) = 0$.

Élément de surface sur une hypersurface de \mathbf{R}^N

Considérons pour commencer le cas d'une hypersurface Σ de \mathbf{R}^N définie par un paramétrage $\Omega \ni u \mapsto M(u) \in \mathbf{R}^N$ injectif de classe C^1 sur Ω ouvert de \mathbf{R}^{N-1} , tel que, pour tout $u \in \Omega$, les vecteurs de \mathbf{R}^N

$\partial_{u_1} M(u), \partial_{u_2} M(u), \dots, \partial_{u_{N-1}} M(u)$ soient linéairement indépendants.

Comme dans le cas d'une surface paramétrée dans \mathbf{R}^3 , l'espace tangent à Σ au point $M(u)$ est l'hyperplan affine défini par

$$\begin{aligned} T_{M(u)}\Sigma &:= \left\{ M(u) + \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \partial_{u_i} M(u) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}) \in \mathbf{R}^{N-1} \right\} \\ &= \left\{ Q \in \mathbf{R}^N \mid \overrightarrow{M(u)Q} \in \text{Vect}(\partial_{u_1} M(u), \dots, \partial_{u_{N-1}} M(u)) \right\}. \end{aligned}$$

Par analogie avec le cas d'une surface paramétrée de \mathbf{R}^3 , on définit l'élément de surface sur Σ comme étant l'expression

$$d\sigma(M(u)) := \mathcal{L}_{N-1}(P(\partial_{u_1} M(u), \dots, \partial_{u_{N-1}} M(u))) du_1 \dots du_{N-1},$$

c'est-à-dire

$$d\sigma(M(u)) := |\partial_{u_1} M(u) \wedge \dots \wedge \partial_{u_{N-1}} M(u)| du_1 \dots du_{N-1}.$$

Supposons maintenant que l'hypersurface Σ de \mathbf{R}^N est donnée par une équation de la forme $x_N = f(x_1, \dots, x_{N-1})$, où $f \in C^1(\Omega)$. Cette équation

donne le paramétrage $\Omega \ni x' = (x_1, \dots, x_{N-1}) \mapsto M(x') = (x_1, \dots, x_{N-1}, f(x')) \in \mathbf{R}^N$, qui est évidemment injectif et de classe C^1 sur Ω .

De plus la famille de vecteurs de \mathbf{R}^N

$$\partial_{x_i} M(x') = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-i-1}, \partial_{x_i} f(x')), \quad 1 \leq i \leq N-1,$$

est manifestement libre. Enfin, on a

$$\partial_{x_1} M(x') \wedge \dots \wedge \partial_{x_{N-1}} M(x') = (-\partial_{x_1} f(x'), -\partial_{x_2} f(x'), \dots, -\partial_{x_{N-1}} f(x'), 1),$$

et l'élément de surface sur l'hypersurface Σ d'équation $x_N = f(x_1, \dots, x_{N-1})$ est

$$d\sigma(M(x')) := \sqrt{1 + \partial_{x_1} f(x')^2 + \dots + \partial_{x_{N-1}} f(x')^2} dx_1 \dots dx_{N-1},$$

ou encore

$$d\sigma(M(x')) = \sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2} dx'.$$

Etant donnée Σ une hypersurface de \mathbf{R}^N et $\rho \in C(\mathbf{R}^N)$, la forme linéaire

$$C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \ni \phi \mapsto \int_{\Sigma} \phi(M) \rho(M) d\sigma(M),$$

où $d\sigma(M)$ est l'élément de surface de Σ , est une distribution d'ordre 0 sur \mathbf{R}^N , appelée distribution de simple couche de densité ρ sur l'hypersurface Σ .

6.3.1 Exercices

1) On appelle fenêtre de Viviani la courbe intersection d'une sphère de \mathbf{R}^3 de rayon $r > 0$ et d'un cylindre circulaire de rayon $r/2$ dont une génératrice passe par le centre de la sphère.

a) Donner les équations décrivant la fenêtre de Viviani en coordonnées cartésiennes, en choisissant comme origine le centre de la sphère et comme axe des z la génératrice du cylindre passant par le centre de la sphère.

b) Donner une représentation paramétrique de cette même fenêtre de Viviani en coordonnées sphériques.

c) Montrer que le complémentaire de la fenêtre de Viviani dans la sphère est formé de trois composantes connexes dont on calculera les aires.

d) Montrer qu'il est possible de réaliser la quadrature de l'une de ces trois composantes connexes — c'est-à-dire de construire à la règle et au compas un carré de même aire dans le plan euclidien \mathbf{R}^2 , connaissant le centre de la sphère.

2) Soit \mathbf{S}^{N-1} la sphère unité centrée en 0 dans \mathbf{R}^N . Soient $\mathcal{P}_+ \neq \mathcal{P}_-$ deux hyperplans parallèles dont la distance à 0 est $r \in]0, 1[$.

a) Exprimer l'aire $A_N(r)$ de la portion de \mathbf{S}^{N-1} située entre \mathcal{P}_- et \mathcal{P}_+ sous forme d'une intégrale simple.

b) Quel sens peut-on donner à l'énoncé suivant : "lorsque $N \rightarrow +\infty$, la mesure de surface sur la sphère unité de \mathbf{R}^N se concentre près de l'équateur" ?

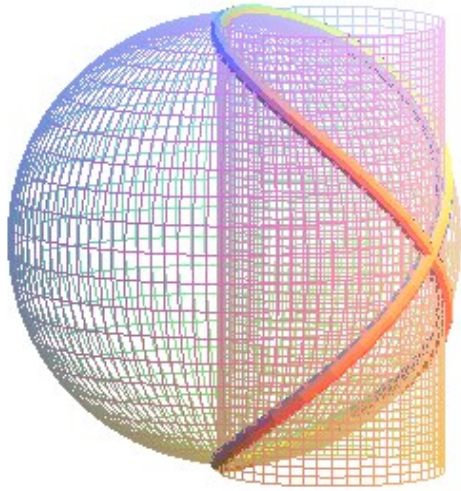


FIGURE 6.6 – Fenêtre de Viviani

6.4 Quelques propriétés de la fonction Γ

Rappelons que, pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $\Re(z) > 0$, on pose

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} \frac{dt}{t}.$$

Une intégration par parties montre que, pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $\Re(z) > 0$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = \left[-t^z e^{-t} \right]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z),$$

puisque le terme entre crochets est nul. En particulier

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1, \quad \text{et } \Gamma(n+1) = n!$$

pour tout entier $n \geq 1$.

Pour tous $x, y > 0$, posons

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Cette nouvelle fonction s'exprime facilement en fonction de Γ , comme suit :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

En effet, pour $x, y > 0$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty s^{x-1}e^{-s}ds \int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}dt \\ &= \iint_{\mathbf{R}_+^2} e^{-(t+s)}(t+s)^{x+y-2} \left(\frac{s}{t+s}\right)^{x-1} \left(\frac{t}{t+s}\right)^{y-1} dsdt\end{aligned}$$

en appliquant le théorème de Fubini. Dans cette dernière intégrale, faisons le changement de variables $(s, t) \mapsto (s, r = s + t)$ de jacobien 1 :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \iint_{\mathbf{R}_+^2} e^{-(t+s)}(t+s)^{x+y-2} \left(\frac{s}{t+s}\right)^{x-1} \left(\frac{t}{t+s}\right)^{y-1} dsdt \\ &= \iint_{\mathbf{R}_+^2} e^{-r}r^{x+y-2}\mathbf{1}_{]0,r[}(s) \left(\frac{s}{r}\right)^{x-1} \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{y-1} dsdr \\ &= \int_0^\infty e^{-r}r^{x+y-2} \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{x-1} \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{y-1} ds\right) dr,\end{aligned}$$

après application du théorème de Fubini dans l'avant-dernière intégrale. Enfin, faisons le changement de variables $s = ru$ dans l'intégrale interne du membre de droite :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty e^{-r}r^{x+y-2} \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{x-1} \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{y-1} ds\right) dr \\ &= \int_0^\infty e^{-r}r^{x+y-2} \left(\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}rdu\right) dr \\ &= \int_0^\infty e^{-r}r^{x+y-2}rB(x, y)dr = B(x, y)\Gamma(x+y).\end{aligned}$$

Grâce à cette nouvelle fonction B , on démontre la

FORMULE DES COMPLÉMENTS

Pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$, on a

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

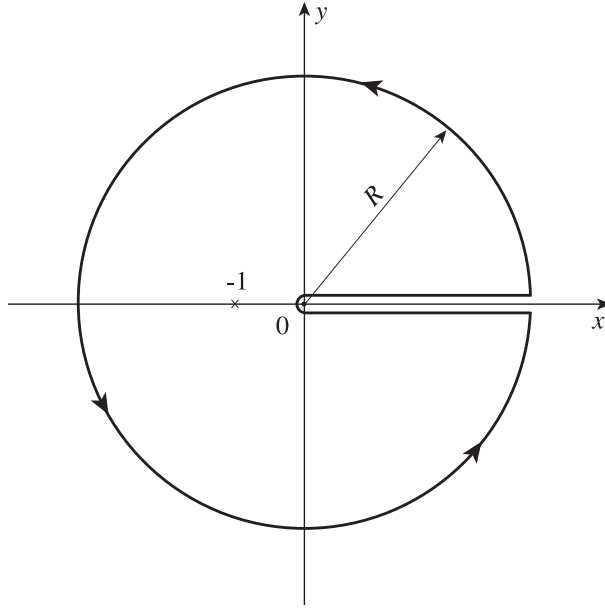
Démonstration. Chaque membre de cette égalité étant une fonction holomorphe de z sur l'ouvert connexe $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$ (cf. [6], Théorème VII.2.1), il suffit, d'après le principe des zéros isolés (ibid., Théorème V.1.16, ou [9], chapitre X, Théorème 6.1.3) de démontrer cette identité pour $z \in]0, 1[$.

D'après ce qui précède, pour tout $z \in]0, 1[$,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = B(z, 1-z)\Gamma(z+1-z) = B(z, 1-z)\Gamma(1) = B(z, 1-z).$$

Puis

$$B(z, 1-z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}dt = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+s}\right)^{z-1} \left(\frac{s}{1+s}\right)^{-z} \frac{ds}{(1+s)^2}$$

FIGURE 6.7 – Bord orienté de Ω_R

en faisant le changement de variables $t = \frac{1}{1+s}$, où $0 < s < \infty$. Ainsi

$$B(z, 1-z) = \int_0^\infty \frac{s^{-z}}{1+s} ds, \quad z \in]0, 1[.$$

Appliquons le théorème des résidus à la fonction méromorphe sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+$ définie par

$$f(s) = \frac{e^{-z(\ln(-s)+i\pi)}}{1+s}$$

où \ln est la détermination principale du logarithme qui est holomorphe dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ (cf. [6], chapitre V.3.2 ou [9], chapitre X.6.4), et au bord orienté du disque ouvert de centre 0 et de rayon R privé du segment $[0, R[$ — cf. Figure 3.3 :

$$\Omega_R = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < R \text{ et } z \notin [0, R]\}.$$

Le seul pôle de f dans Ω_R est $s = -1$ pour $R > 1$, et son résidu vaut $e^{-z(\ln(1)+i\pi)} = e^{-i\pi z}$, de sorte que, pour tout $R > 1$,

$$\int_{\partial\Omega_R} f(s) ds = 2i\pi e^{-i\pi z}.$$

D'autre part,

$$\left| \int_{|s|=R, s \neq R} f(s) ds \right| = O(R^{-z}) \rightarrow 0 \text{ lorsque } R \rightarrow +\infty,$$

d'où on tire que, pour tout $z \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} (1 - e^{-2i\pi z})B(z, 1 - z) &= (1 - e^{-2i\pi z}) \int_0^\infty \frac{s^{-z}}{1 + s} ds \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega_R} f(s) ds = 2i\pi e^{-i\pi z}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $z \in]0, 1[$,

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = B(z, 1 - z) = \frac{2i\pi e^{-i\pi z}}{1 - e^{-2i\pi z}},$$

ce qui n'est rien d'autre que la formule des compléments. ■

Grâce à la fonction Γ , on calcule aisément la surface de la sphère unité en toute dimension.

Pour cela, on exprime de deux manières l'intégrale de Gauss

$$g_N = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-|x|^2} dx.$$

D'une part, en appliquant le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} g_N &= \int_{\mathbf{R}^N} e^{-|x|^2} dx = \int \dots \int_{\mathbf{R}^N} e^{-x_1^2 - \dots - x_N^2} dx_1 \dots dx_N \\ &= \prod_{k=1}^N \int_{\mathbf{R}} e^{-x_k^2} dx_k = g_1^N. \end{aligned}$$

D'autre part, en passant en coordonnées sphériques $x = r\omega$ avec $r = |x|$ et $|\omega| = 1$, on trouve que

$$g_N = \int_0^\infty \int_{\mathbf{S}^{N-1}} e^{-r^2} r^{N-1} d\sigma(\omega) dr,$$

où $d\sigma$ est l'élément de surface sur \mathbf{S}^{N-1} . Le membre de droite de cette égalité s'écrit encore, grâce au changement de variables $t = r^2$:

$$g_N = |\mathbf{S}^{N-1}| \int_0^\infty e^{-r^2} r^{N-1} dr = |\mathbf{S}^{N-1}| \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{2}(N-1)} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} |\mathbf{S}^{N-1}| \Gamma\left(\frac{N}{2}\right).$$

Donc

$$|\mathbf{S}^{N-1}| = \frac{2g_1^N}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}.$$

Pour $N = 2$, cette identité devient

$$2\pi = |\mathbf{S}^1| = \frac{2g_1^2}{\Gamma(1)} = 2g_1^2, \quad \text{d'où } g_1 = \sqrt{\pi}.$$

On en déduit la

SURFACE DE LA SPHÈRE UNITÉ EN DIMENSION $N \geq 2$
--

$$|\mathbf{S}^{N-1}| = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}.$$

Deuxième partie

Applications aux EDP

Chapitre 7

Introduction à l'étude des opérateurs différentiels

Dans ce chapitre, nous allons voir comment le formalisme des distributions s'applique à l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, ce formalisme permet d'obtenir de façon simple et systématique certains calculs explicites dont la justification rigoureuse serait compliquée si l'on voulait rester dans le cadre des fonctions de classe C^k .

Nous avons expliqué dans le chapitre 2 comment mener l'étude des équations aux dérivées partielles d'ordre 1. Rappelons que la méthode des caractéristiques permet de ramener l'étude de ces équations à celle d'un système d'équations différentielles ordinaires.

La méthode des caractéristiques telle que nous l'avons exposée au chapitre 2 ne s'applique pas aux équations aux dérivées partielles du second ordre. Il existe bien un analogue de la méthode des caractéristiques pour certaines équations du second ordre, utilisant des "caractéristiques aléatoires". Par exemple, on peut écrire des formules explicites donnant les solutions des équations de Laplace ou de la chaleur, formules basées sur le mouvement brownien (cf. [7], Théorème 2.2.1).

Nous étudierons ces équations dans ce cours, mais sans jamais faire appel aux outils probabilistes¹.

Dans ce chapitre, nous considérerons donc exclusivement des équations aux dérivées partielles d'ordre > 1 — d'ordre 2, en pratique — à coefficient constants, et posées dans l'espace euclidien \mathbf{R}^N . On se contentera d'étudier les quelques exemples de ces équations intervenant en physique mathématique². On établira,

1. La construction des processus stochastiques utilisés dans l'étude des équations aux dérivées partielles du second ordre nécessite en effet l'utilisation de notions probabilistes qui n'ont rien d'élémentaire — typiquement, de l'intégration dans des espaces de fonctions, c'est-à-dire dans des espaces de dimension infinie. Cette théorie est exposée dans [7].

2. Il n'existe pas de résultat jouant, pour les équations aux dérivées partielles, un rôle semblable à celui du théorème de Cauchy-Lipschitz dans la théorie des équations différentielles ordinaires, c'est-à-dire de résultat universel garantissant l'existence et l'unicité de la solu-

pour ces exemples d'équations, certaines formules explicites permettant d'étudier l'existence, l'unicité et certaines propriétés qualitatives de leurs solutions. On verra que l'obtention de ces formules est grandement facilitée par l'utilisation de quelques notions de base du calcul des distributions que nous avons développés dans la partie I de ce cours, notamment

- a) l'étude des distributions homogènes,
- b) le produit de convolution, et
- c) la transformation de Fourier des distributions tempérées.

L'étude détaillée de ces divers exemples d'équations aux dérivées partielles, basée sur les formules obtenues ici, fera l'objet des chapitres ultérieurs de ce cours.

7.1 Opérateurs différentiels : notions de base et exemples

Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^N .

Définition 7.1.1 (Notion d'opérateur différentiel) *Un opérateur différentiel sur Ω est une application \mathbf{C} -linéaire P de $C^\infty(\Omega)$ dans lui-même $\phi \mapsto P\phi$ définie par une expression de la forme*

$$P\phi(x) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^N, |\alpha| \leq n} a_\alpha(x) \partial^\alpha \phi(x), \quad x \in \Omega,$$

où $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq n$.

Dans la suite, il sera plus commode d'utiliser les notations suivantes :

$$D_k \text{ ou } D_{x_k} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, N,$$

ainsi que

$$D \text{ ou } D_x = (D_{x_1}, \dots, D_{x_N}).$$

Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$, on notera

$$D^\alpha \text{ ou } D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_N}^{\alpha_N}.$$

Quitte à poser

$$b_\alpha(x) = i^{|\alpha|} a_\alpha(x),$$

l'opérateur différentiel de la définition ci-dessus s'écrit sous la forme

$$P(x, D_x) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^N, |\alpha| \leq n} b_\alpha(x) D_x^\alpha.$$

tion d'une équation aux dérivées partielles. Il n'y a d'ailleurs pas d'espoir qu'un tel résultat existe sans avoir été découvert jusqu'ici. C'est pourquoi la théorie des équations aux dérivées partielles passe par l'étude d'exemples significatifs.

Définition 7.1.2 (Symbole. Ordre) Soit $P(x, D_x)$ un opérateur différentiel sur Ω de la forme

$$P(x, D_x) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^N, |\alpha| \leq n} b_\alpha(x) D_x^\alpha.$$

On appelle “symbole complet de l’opérateur $P(x, D_x)$ ” le polynôme en les variables ξ_1, \dots, ξ_N à coefficients de classe C^∞ sur Ω

$$\sigma(P)(x, \xi) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^N, |\alpha| \leq n} b_\alpha(x) \xi^\alpha \in C^\infty(\Omega)[\xi_1, \dots, \xi_N].$$

On appelle “ordre de l’opérateur différentiel $P(x, D_x)$ ” le degré du polynôme $\sigma(P)$ — autrement dit

$$d = \text{ordre de } P(x, D_x) = \max\{|\alpha| \leq n \mid b_\alpha \text{ non identiquement nulle sur } \Omega\}.$$

Le symbole principal de l’opérateur différentiel $P(x, D_x)$ d’ordre d est la composante homogène de degré d de $\sigma(P)$:

$$\sigma_d(P)(x, \xi) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^N, |\alpha|=d} b_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Voici quelques exemples d’opérateurs différentiels parmi les plus importants. Tous ces exemples sont des modèles classiques de la physique mathématique :

a) l’opérateur de transport sur $\mathbf{R}^{1+N} = \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N$ (à la vitesse $v \in \mathbf{R}^N$) :

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^N v_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \partial_t + v \cdot \nabla_x;$$

b) le laplacien sur \mathbf{R}^N :

$$\Delta = \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_k^2};$$

cet opérateur intervient dans de très nombreux contextes — par exemple en électrostatique ;

c) le d’Alembertien sur $\mathbf{R}^{1+N} = \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N$:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \partial_t^2 - \Delta_x$$

qui est l’opérateur décrivant la propagation d’ondes à vitesse 1 ;

d) l’opérateur de la chaleur sur $\mathbf{R}^{1+N} = \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N$:

$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\kappa \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \partial_t - \frac{1}{2}\Delta_x$$

introduit par Fourier pour décrire le champ des températures dans un corps ;

e) l'opérateur de Schrödinger sur $\mathbf{R}^{1+N} = \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N$:

$$i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - V(x) = i \partial_t + \frac{1}{2} \Delta_x - V(x)$$

gouvernant, en mécanique quantique, le mouvement d'une particule soumise à l'action d'un potentiel V .

Voici enfin un dernier exemple, également très important :

f) l'opérateur de Cauchy-Riemann sur \mathbf{R}^2 :

$$\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad z = x + iy, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

intervenant dans la théorie des fonctions holomorphes — rappelons qu'une fonction f à valeurs complexes de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$ est holomorphe dans Ω si et seulement si $\bar{\partial}f = 0$ sur Ω — voir, dans [6], la Remarque V.1.14 sur les équations de Cauchy-Riemann, ou, dans [9], la Définition 2.3.1 du chapitre X.

Dans le reste de cette section, on étudiera plus particulièrement les opérateurs différentiels à coefficients constants.

Soit donc $P = P(D_x)$ opérateur différentiel à coefficients constants sur \mathbf{R}^N :

$$P(D_x) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^N, |\alpha| \leq n} b_\alpha D_x^\alpha, \quad b_\alpha \in \mathbf{C} \text{ pour } |\alpha| \leq n.$$

Définition 7.1.3 (Notion de solution élémentaire) Une solution élémentaire de l'opérateur différentiel $P(D_x)$ est une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$P(D_x)E = \delta_{x=0} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N).$$

En général, il n'y a pas unicité de la solution élémentaire de l'opérateur différentiel $P(D_x)$: si E est une solution élémentaire de $P(D_x)$ et $u \in \text{Ker}(P(D_x))$, alors $E + u$ est encore une solution élémentaire de $P(D_x)$. Par exemple, si $P(D_x)$ est de la forme

$$P(D_x) = \sum_{0 < |\alpha| \leq n} b_\alpha D_x^\alpha, \quad \text{c'est-à-dire si } b_{0, \dots, 0} = 0$$

— autrement dit si le polynôme $\sigma(P)(\xi)$ ne contient pas de terme constant — alors $P(D_x)1 = 0$, de sorte que $\text{Ker}(P(D_x))$ contient au moins toutes les fonctions constantes. Par conséquent, si E est une solution élémentaire de $P(D_x)$, alors $E + \text{Const.}$ en est aussi une solution élémentaire.

L'intérêt de cette notion de solution élémentaire réside dans le théorème suivant :

Théorème 7.1.4 (Résolution des EDP) Soit $P(D_x)$ opérateur différentiel à coefficient constants sur \mathbf{R}^N et $E \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ une solution élémentaire de $P(D_x)$.

Soit une distribution à support compact $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$; l'EDP

$$P(D_x)f = S \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$$

d'inconnue $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ admet au moins une solution, donnée par la formule

$$f = E \star S.$$

La démonstration de ce résultat est très simple, comme on va le voir. Avant de la donner, commençons par illustrer sa signification par un exemple classique tiré de la physique.

Exemple 7.1.5 (Equation de Poisson en électrostatique) Il s'agit de chercher le potentiel électrostatique créé dans l'espace \mathbf{R}^3 par une densité de charges $\rho \equiv \rho(x)$ supposée nulle pour $|x| \geq R$, où $R > 0$ est donné. (Nous reviendrons plus en détail sur ce problème dans l'introduction du chapitre 8.)

On sait d'une part que le champ électrique \mathbf{E} créé par cette densité de charges vérifie l'équation de Gauss

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = -\nabla V$$

où ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide. Donc

$$-\Delta V = -\operatorname{div}(\nabla V) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho.$$

L'équation ci-dessus d'inconnue V est appelée "équation de Poisson".

D'autre part, on sait que le potentiel V créé par la densité de charges $\rho \equiv \rho(x)$ nulle pour $|x| \geq R$ est donné par la formule

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{|x-y|} \rho(y) dy = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|} \star \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Rappelons la signification de cette formule :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x-y|}$$

est le potentiel électrostatique créé au point x par une charge ponctuelle $+1$ située au point y . Du point de vue mathématique, cela veut dire que

$$-\Delta_x \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} = \delta_y \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N).$$

Autrement dit la solution élémentaire translatée de y représente le champ créé par une charge ponctuelle $+1$ située au point y .

D'autre part, la formule ci-dessus pour le potentiel V s'interprète comme la superposition de tous ces potentiels électrostatiques pondérés par la densité de charges.

La formule ci-dessus pour le potentiel V est exactement analogue à celle du théorème si l'on admet que la fonction $x \mapsto \frac{1}{4\pi|x|}$ est solution élémentaire de l'opérateur différentiel $P(D_x)$ dans \mathbf{R}^3 — ce qui est bien le cas, comme on le verra dans la section suivante.

Remarquons enfin que, dans l'argument ci-dessus, on a utilisé de façon essentielle le fait que l'opérateur laplacien est invariant par translation. En effet, la relation

$$-\Delta_x \frac{1}{4\pi|x-y|} = \delta_y \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N),$$

c'est-à-dire le fait que le potentiel créé par une charge +1 située au point y vaut $\frac{1}{4\pi\epsilon_0|x-y|}$, se déduit, par le changement de variables $x \mapsto x-y$, du cas particulier où $y=0$:

$$-\Delta_x \frac{1}{4\pi|x|} = \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N).$$

Cette dernière relation, qui signifie que la fonction $x \mapsto \frac{1}{4\pi|x|}$ est solution élémentaire de $-\Delta$ dans \mathbf{R}^3 , s'interprète comme le fait que le potentiel créé par une charge +1 située au point 0 vaut $\frac{1}{4\pi\epsilon_0|x|}$.

De façon générale, si $P(D_x)$ est un opérateur différentiel sur \mathbf{R}^N à coefficients constants, et si τ_y désigne, pour tout $y \in \mathbf{R}^N$, la translation de vecteur y , c'est-à-dire que

$$\tau_y : \mathbf{R}^N \ni x \mapsto x+y \in \mathbf{R}^N,$$

alors, pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$

$$P(D_x)(f \circ \tau_y) = (P(D_x)f) \circ \tau_y.$$

Par densité de $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ (voir Théorème 4.2.6), la relation ci-dessus vaut aussi pour tout $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$, de sorte qu'en particulier, lorsque E est une solution élémentaire de l'opérateur $P(D_x)$, on a

$$P(D_x)(E \circ \tau_{-y}) = \delta_0 \circ \tau_{-y} = \delta_y \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N).$$

— cf. Exemple 3.4.20.

En utilisant le caractère linéaire de l'opérateur $P(D_x)$, on s'attend donc à ce que la superposition des distributions $E \circ \tau_{-y}$ pondérées par S — autrement dit le produit de convolution de E par S — fournisse une solution du problème

$$P(D_x)f = S \text{ au sens des distributions sur } \mathbf{R}^N.$$

Voici maintenant la démonstration du Théorème 7.1.4.

Démonstration du Théorème 7.1.4. La distribution S étant à support compact, le produit de convolution $E \star S$ définit bien une distribution sur \mathbf{R}^N et on a

$$D_x^\alpha(E \star S) = (D_x^\alpha E) \star S \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$$

pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$ — cf. Proposition 4.2.3.

L'opérateur différentiel à coefficients constants

$$P(D_x) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^N, |\alpha| \leq N} b_\alpha D_x^\alpha, \quad b_\alpha \in \mathbf{C} \text{ pour } |\alpha| \leq N$$

vérifie donc

$$P(D_x)(E \star S) = (P(D_x)E) \star S = \delta_{x=0} \star S = S,$$

(voir l'Exemple 4.4.3 pour la justification de cette dernière égalité) de sorte que $f = E \star S$ est une solution de l'EDP $P(D_x)f = S$. ■

Ainsi, la connaissance d'une solution élémentaire d'un opérateur différentiel à coefficients constants $P(D_x)$ sur \mathbf{R}^N permet-elle de "calculer" explicitement une solution de l'EDP

$$P(D_x)f = S \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$$

pour toute distribution S à support compact dans \mathbf{R}^N .

La recherche d'une telle solution élémentaire pour les opérateurs différentiels à coefficients constants est donc d'une importance considérable pour l'étude de ce type d'EDP. Commençons par une remarque très simple.

Proposition 7.1.6 (Solution élémentaire et transformation de Fourier)

Soit $P(D_x)$ opérateur différentiel à coefficients constants sur \mathbf{R}^N . Alors, pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\widehat{P(D_x)f} = \sigma(P)(\xi) \hat{f} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N).$$

Donc, si $P(D_x)$ admet une solution élémentaire tempérée $E \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$, alors

$$\sigma(P)(\xi) \hat{E} = 1 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N),$$

où \hat{E} désigne la transformée de Fourier de E et ξ la variable duale de x .

Démonstration. Rappelons que, pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\widehat{\partial_{x_k} f} = i \xi_k \hat{f} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \text{ pour tout } k = 1, \dots, N,$$

ce qui s'écrit encore

$$\widehat{D_{x_k} f} = \xi_k \hat{f} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \text{ pour tout } k = 1, \dots, N.$$

Donc, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$, on montre par récurrence sur $|\alpha|$ que

$$\widehat{D^\alpha f} = \xi^\alpha \hat{f} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N).$$

En partant de l'expression de $P(D_x)$ sous la forme

$$P(D_x) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^N, |\alpha| \leq n} b_\alpha D^\alpha$$

on trouve que

$$P(\widehat{D_x})f = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^N, |\alpha| \leq n} b_\alpha \xi^\alpha \hat{f} = \sigma(P)(\xi) \hat{f} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N),$$

ce qui est la première formule annoncée. La seconde en découle immédiatement puisque $\widehat{\delta_0} = 1$ — cf. Exemple 5.4.6. ■

Il faut bien comprendre la signification profonde de cet énoncé : pour tout $\xi \in \mathbf{R}^N$, on a

$$D_x^\alpha e^{i\xi \cdot x} = \xi^\alpha e^{i\xi \cdot x}$$

de sorte que

$$P(D_x)(e^{i\xi \cdot x}) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^N, |\alpha| \leq n} b_\alpha \xi^\alpha e^{i\xi \cdot x} = \sigma(P)(\xi) e^{i\xi \cdot x}, \quad x \in \mathbf{R}^N.$$

Autrement dit, la fonction $x \mapsto e^{i\xi \cdot x}$ est un “vecteur propre” de l’application linéaire $P(D_x)$ dans $C^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$, et la “valeur propre” associée est $\sigma(P)(\xi)$.

Considérons l’EDP

$$P(D_x)f = S$$

comme un problème analogue à la résolution d’un système linéaire d’inconnue $v \in \mathbf{C}^d$ de la forme

$$Av = b$$

où $b \in \mathbf{C}^d$ est un vecteur donné et $A \in M_d(\mathbf{C})$ une matrice carrée inversible et normale³. On sait qu’alors, A est diagonalisable et qu’il existe une base orthonormée de \mathbf{C}^d formée de vecteurs propres de A . Cette circonstance rend essentiellement triviale la résolution du système linéaire ci-dessus. En effet, notant P la matrice de passage dont les vecteurs colonnes constituent une base orthonormée de \mathbf{C}^d formée de vecteurs propres de A , on a

$$P^{-1} = P^* \quad \text{et} \quad P^*AP = \Lambda,$$

où Λ est une matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités. Le système ci-dessus est donc équivalent à

$$\Lambda u = P^*b, \quad \text{et} \quad v = Pu,$$

et la résolution du système diagonal

$$\Lambda u = P^*b$$

est immédiate.

Revenant au cas de l’EDP

$$P(D_x)f = S$$

3. Une matrice $A \in M_d(\mathbf{C})$ est dite normale si $AA^* = A^*A$, où on rappelle que la matrice adjointe de A est $A^* = \overline{A}^T$.

on procède de façon analogue en décomposant le second membre S et l'inconnue f comme superpositions linéaires de fonctions de la forme $x \mapsto e^{i\xi \cdot x}$, dont on vient de voir que c'est un "vecteur propre" de $P(D_x)$ associé à la "valeur propre" $\sigma(P)(\xi)$. Cette écriture des distributions f et S comme superpositions linéaires de fonctions de la forme $x \mapsto e^{i\xi \cdot x}$ n'est rien d'autre que la transformation de Fourier, qui joue, pour l'EDP, le rôle de la matrice P^* dans le cas du système linéaire. La Proposition 7.1.6 n'est que la mise en forme de cette idée dans le cas particulier où $S = \delta_0$ — auquel on peut toujours se ramener grâce au Théorème 7.1.4.

Revenons au problème général de déterminer une solution élémentaire d'un opérateur différentiel à coefficients constants $P(D_x)$ quelconque sur \mathbf{R}^N . La Proposition 7.1.6 suggère la stratégie suivante :

a) résoudre l'équation d'inconnue \hat{E}

$$\sigma(P)(\xi)\hat{E} = 1$$

au sens des distributions tempérées sur \mathbf{R}^N ;

b) une fois \hat{E} connu, calculer E par transformation de Fourier inverse.

Cette stratégie n'est pas très facile à mettre en oeuvre en toute généralité. En effet, la formule

$$\hat{E} = \frac{1}{\sigma(P)}$$

à laquelle on pense pour résoudre l'étape a) ne définit pas forcément une distribution tempérée sur \mathbf{R}^N — à cause des $\xi \in \mathbf{R}^N$ tels que $\sigma(P)(\xi) = 0$. Dans ce cas, on ne sait plus revenir dans les variables originelles par transformation de Fourier inverse.

Pourtant, L. Ehrenpreis et B. Malgrange ont réussi à montrer en 1955-1956 que tout opérateur différentiel à coefficients constants sur \mathbf{R}^N admet une solution élémentaire. Leur preuve utilise bien l'idée de diviser par le polynôme $\sigma(P)(\xi)$, mais de la façon suivante :

a) on commence par montrer que l'application $P(D_x)\phi \mapsto \phi(0)$ est correctement définie sur l'image $\text{Im}(P(D_x)) = P(D_x)(C_c^\infty(\mathbf{R}^N))$;

b) puis on montre que cette forme linéaire sur l'image de $P(D_x)$ vérifie la propriété de continuité des distributions sur \mathbf{R}^N ;

c) enfin on conclut en étendant cette forme linéaire à $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ grâce au théorème de Hahn-Banach.

Le théorème d'Ehrenpreis-Malgrange est sans nul doute l'un des résultats majeurs de la théorie générale des EDP linéaires. Surtout, ce théorème montre que la théorie des distributions fournit le bon cadre où étudier les EDP linéaires.

Toutefois, la démonstration du théorème d'Ehrenpreis-Malgrange, utilisant le théorème de Hahn-Banach, ne fournit pas de méthode permettant de calculer en pratique une solution élémentaire pour un opérateur différentiel à coefficients constants arbitraires.

Dans la section suivante, nous allons montrer, sur les quelques exemples d'opérateurs différentiels cités plus haut, comment obtenir des formules explicites de solutions élémentaires de ces opérateurs.

7.2 Solutions élémentaires d'opérateurs différentiels : principaux exemples

A défaut de méthode générale, nous allons calculer des solutions élémentaires des principaux opérateurs différentiels de la physique mathématique en nous appuyant sur quelques idées naturelles qui permettent de simplifier le problème :

a) utiliser les symétries de l'opérateur (invariance par rotation, homogénéité) : cf. le calcul des solutions élémentaires du laplacien ;

b) déformer l'opérateur en faisant varier ses coefficients dans le plan complexe par prolongement analytique : cf. le calcul d'une solution élémentaire du d'Alembertien à partir d'une solution élémentaire du laplacien ;

c) passer en variables de Fourier : cf. le calcul des solutions élémentaires des opérateurs de la chaleur et de Schrödinger (ce dernier cas utilisant également l'idée b) ci-dessus).

Comme on le verra, la mise en oeuvre des quelques idées ci-dessus est considérablement simplifiée par l'utilisation de certains résultats du calcul des distributions établis dans la première partie de ce cours : structure des distributions à support dans $\{0\}$, prolongement en 0 des distributions homogènes, continuité de la dérivation pour la convergence au sens des distributions...

7.2.1 Solution élémentaire du laplacien

Cherchons, pour tout $N \geq 1$, une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$-\Delta E = \delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N).$$

Le cas $N = 1$ est très simple : il s'agit de trouver $E \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telle que

$$-E'' = \delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N).$$

Notons H la fonction d'Heaviside

$$H(x) = 1 \text{ si } x > 0, \quad H(x) = 0 \text{ si } x < 0.$$

L'équation ci-dessus impose que E' est de la forme

$$E' = -H + C_0, \quad \text{où } C_0 \in \mathbf{R} \text{ est une constante arbitraire,}$$

et donc que E est une fonction continue de la forme

$$E(x) = -x_+ + C_0x + C_1, \quad \text{où } C_0, C_1 \in \mathbf{R} \text{ sont deux constantes arbitraires.}$$

Le cas particulier où $C_0 = \frac{1}{2}$ et $C_1 = 0$ donne

$$E(x) = -\frac{1}{2}|x|, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Examinons maintenant les cas $N \geq 2$.

Remarquons d'une part que la masse de Dirac δ_0 est invariante par les isométries linéaires :

$$\delta_0 = \delta_0 \circ A, \text{ pour tout } A \in O_N(\mathbf{R}).$$

D'autre part, pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ et pour toute matrice orthogonale $A \in O_N(\mathbf{R})$

$$\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A,$$

c'est-à-dire que le laplacien est invariant par les isométries linéaires de \mathbf{R}^N .

Il est donc naturel de chercher une solution élémentaire du laplacien qui soit une fonction — ou une distribution — invariante par les isométries de l'espace euclidien \mathbf{R}^N , c'est-à-dire radiale.

Ensuite, si E est une solution élémentaire du laplacien dans \mathbf{R}^N , la restriction de E à $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ vérifie

$$-\Delta E|_{\mathbf{R}^N \setminus \{0\}} = 0.$$

Rappelons que, si $f \in C^2(\mathbf{R}_+^*)$, on a

$$\Delta(f(|x|)) = f''(|x|) + \frac{N-1}{|x|} f'(|x|), \quad x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}.$$

Autrement dit, en notant $r = |x|$, on trouve l'expression ci-dessous pour le

laplacien des fonctions radiales⁴ :

$$\Delta(f(|x|)) = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{N-1} \frac{df}{dr} \right) \Big|_{r=|x|}.$$

Cherchant la distribution E donnée en dehors de l'origine par une fonction radiale, on trouve donc que

$$r^{N-1} \frac{dE}{dr} = \text{Const.},$$

ce qui entraîne, pour $N \geq 3$, que E est de la forme

$$E(x) = \frac{C_0}{|x|^{N-2}} + C_1, \quad x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}, \quad \text{où } C_0, C_1 \in \mathbf{R} \text{ sont deux constantes.}$$

Lorsque $N = 2$, le même raisonnement montre que E est de la forme

$$E(x) = C_0 \ln|x| + C_1, \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}, \quad \text{où } C_0, C_1 \in \mathbf{R} \text{ sont deux constantes.}$$

Commençons par le cas $N \geq 3$.

La fonction $x \mapsto |x|^{2-N}$ est continue sur $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ et localement intégrable sur \mathbf{R}^N . Elle définit donc une distribution sur \mathbf{R}^N , distribution qui est homogène

4. [LAPLACIEN DES FONCTIONS RADIALES] Pour tout $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}_+^*)$ à support dans $]R_1, R_2[$ avec $0 < R_1 < R_2 < \infty$, un calcul d'intégrale en coordonnées sphériques montre que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} \phi(|x|) \Delta(f(|x|)) dx &= - \int_{\mathbf{R}^N} \nabla(\phi(|x|)) \cdot \nabla(f(|x|)) dx \\ &= - \int_{R_1}^{R_2} \int_{\mathbf{S}^{N-1}} \phi'(r) f'(r) r^{N-1} dr d\sigma \\ &= - |\mathbf{S}^{N-1}| \int_{R_1}^{R_2} \phi'(r) f'(r) r^{N-1} dr \\ &= |\mathbf{S}^{N-1}| \int_{R_1}^{R_2} \phi(r) \left(f'(r) r^{N-1} \right)' dr \\ &= |\mathbf{S}^{N-1}| \int_{R_1}^{R_2} \phi(r) r^{1-N} \left(f'(r) r^{N-1} \right)' r^{N-1} dr \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \int_{\mathbf{S}^{N-1}} \phi(r) r^{1-N} \left(f'(r) r^{N-1} \right)' r^{N-1} dr d\sigma \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} \phi(|x|) \frac{1}{r^{N-1}} \left(f'(r) r^{N-1} \right)' \Big|_{r=|x|} dx \end{aligned}$$

en notant $d\sigma$ l'élément de surface sur la sphère \mathbf{S}^{N-1} .

L'identité ci-dessus signifie précisément que

$$\Delta(f(|x|)) = \frac{1}{r^{N-1}} \left(f'(r) r^{N-1} \right)' \Big|_{r=|x|}$$

au sens des distributions sur $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ — et donc pour tout point $x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ puisque $f \in C^2(\mathbf{R}_+^*)$. Le point de vue des distributions — c'est-à-dire le fait de multiplier par une fonction test et d'intégrer par parties — simplifie ici le calcul, puisqu'on évite de faire un changement de variables dans l'opérateur Δ qui est d'ordre deux en se ramenant à un changement de variables dans l'opérateur ∇ qui est d'ordre un (de sorte qu'il suffit d'appliquer *une seule fois* la formule de dérivation des applications composées).

de degré $2 - N$ sur \mathbf{R}^N , car la fonction $x \mapsto |x|^{2-N}$ est homogène de degré $2 - N$ sur $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$.

Par conséquent, $\Delta|x|^{2-N}$ est une distribution homogène de degré $-N$ (cf. Proposition 3.6.4), et le calcul ci-dessus montre que cette distribution est à support dans $\{0\}$. D'après le Théorème 4.1.7, la distribution $\Delta|x|^{2-N}$ est une combinaison linéaire de la masse de Dirac δ_0 et de ses dérivées. Or les dérivées de la masse de Dirac à l'origine sont des distributions homogènes : pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$

$$\partial^\alpha \delta_0 \text{ est homogène de degré } -N - |\alpha|,$$

(voir Exemple 3.6.3.) Or des distributions homogènes de degrés différents sont linéairement indépendantes. On déduit alors de ce qui précède que

$$-\Delta(|x|^{2-N}) = c_N \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N),$$

où c_N est une constante restant à déterminer.

Le cas $N = 2$ est presque identique : même si la fonction $x \mapsto \ln|x|$, qui est continue sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ et localement intégrable, n'est pas homogène de degré 0, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^2} \ln(\lambda|x|) \partial_{x_k} \phi(x) dx &= \int_{\mathbf{R}^2} \ln|x| \partial_{x_k} \phi(x) dx + \int_{\mathbf{R}^2} \ln \lambda \partial_{x_k} \phi(x) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^2} \ln|x| \partial_{x_k} \phi(x) dx, \quad k = 1, 2 \end{aligned}$$

pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^2)$.

Les distributions $\partial_{x_k} \ln|x|$ sont donc homogènes de degré -1 pour $k = 1, 2$, de sorte que $-\Delta \ln|x|$ est une distribution homogène de degré -2 dans \mathbf{R}^2 ; d'autre part $-\Delta \ln|x| = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$. On en déduit comme ci-dessus que

$$-\Delta \ln|x| = c_2 \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2),$$

où c_2 est une constante restant à calculer.

Théorème 7.2.1 (Solution élémentaire du laplacien) *Poisons*

$$\begin{aligned} E_1(x) &= -\frac{1}{2}|x|, & x \in \mathbf{R}, \\ E_2(x) &= -\frac{1}{2\pi} \ln|x|, & x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}, \\ E_N(x) &= \frac{1}{c_N} \frac{1}{|x|^{N-2}}, & x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}, \quad N \geq 3, \end{aligned}$$

avec

$$c_N = (N-2)|\mathbf{S}^{N-1}| = \frac{2\pi^{N/2}(N-2)}{\Gamma(N/2)}, \quad N \geq 3.$$

Alors, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, la distribution E_N est une solution élémentaire du laplacien dans \mathbf{R}^N :

$$-\Delta E_N = \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N).$$

Démonstration. Le cas $N = 1$, qui est trivial, a déjà été discuté ci-dessus.

Passons au cas $N \geq 3$.

D'abord

$$\nabla E_N(x) = -\frac{N-2}{c_N} \frac{x}{|x|^N}, \quad x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$$

et comme on sait que les composantes de ∇E_N sont des distributions homogènes de degré $1 - N$, la différence entre chaque membre de cette égalité est une distribution homogène de degré $1 - N$ à support dans $\{0\}$: elle est donc nulle d'après le lemme 3.6.13, ou le Théorème 4.1.7 et l'Exemple 3.6.3.

D'autre part, pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ radiale, c'est à dire de la forme

$$\phi(x) = \Phi(|x|), \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^N,$$

on a

$$\nabla \phi(x) = \Phi'(x) \frac{x}{|x|}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \langle -\Delta E_N, \phi \rangle &= \int_{\mathbf{R}^N} \nabla E_N(x) \cdot \nabla \phi(x) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} \nabla E_N(x) \cdot \frac{x}{|x|} \Phi'(|x|) dx = -\frac{N-2}{c_N} \int_{\mathbf{R}^N} \frac{x}{|x|^N} \cdot \frac{x}{|x|} \Phi'(|x|) dx \\ &= -\frac{N-2}{c_N} \int_{\mathbf{R}^N} \frac{\Phi'(|x|)}{|x|^{N-1}} dx = -\frac{N-2}{c_N} |\mathbf{S}^{N-1}| \int_0^\infty \Phi'(r) dr \\ &= \frac{N-2}{c_N} |\mathbf{S}^{N-1}| \phi(0), \end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité ci-dessus découlant du passage en coordonnées sphériques dans l'intégrale du membre de gauche. On en déduit le résultat annoncé dans le cas $N \geq 3$.

Le cas $N = 2$ se traite de manière identique :

$$\nabla E_2 = -\frac{1}{2\pi} \frac{x}{|x|^2} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$$

de sorte que, pour toute fonction test $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ radiale de la forme

$$\phi(x) = \Phi(|x|), \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^2,$$

on a

$$\begin{aligned} \langle -\Delta E_2, \phi \rangle &= \int_{\mathbf{R}^2} \nabla E_2(x) \cdot \frac{x}{|x|} \Phi'(|x|) dx = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{x}{|x|^2} \cdot \frac{x}{|x|} \Phi'(|x|) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\Phi'(|x|)}{|x|} dx = -\frac{1}{2\pi} |\mathbf{S}^1| \int_0^\infty \Phi'(r) dr = \phi(0), \end{aligned}$$

d'où le résultat pour $N = 2$. ■

7.2.2 Solution élémentaire du d'Alembertien

Cherchons, pour tout $N \geq 2$, une distribution $E_N \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{1+N})$ telle que

$$\square E_N = \left(\partial_{x_0}^2 - \sum_{j=1}^N \partial_{x_j}^2 \right) E_N = \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{1+N}),$$

Dans la suite de cette section, on notera

$$x = (x_1, \dots, x_N) \text{ et } \Delta_x = \sum_{j=1}^N \partial_{x_j}^2,$$

de sorte que

$$\square = \partial_{x_0}^2 - \Delta_x.$$

Il existe plusieurs méthodes pour calculer une solution élémentaire du d'Alembertien. Notons \square_c le d'Alembertien pour la propagation d'ondes à la vitesse c :

$$\square_c = \partial_{x_0}^2 - c^2 \Delta_x.$$

Nous allons nous baser sur l'observation suivante : le laplacien coïncide avec le d'Alembertien correspondant à la vitesse de propagation $c = \pm i$:

$$\Delta_{x_0, x} = \partial_{x_0}^2 + \Delta_x = \square_{\pm i}.$$

Evidemment cela n'a pas grand sens physique de parler d'une vitesse de propagation imaginaire. Mais cette remarque va nous permettre d'obtenir une solution élémentaire du d'Alembertien à partir de celle que l'on a déjà obtenue pour le laplacien.

Considérons, pour tout $z \in \mathbf{C}$, l'opérateur différentiel

$$P(z, D_X) = \partial_{x_0}^2 + z \Delta_x,$$

avec la notation

$$X = (x_0, x_1, \dots, x_N), \text{ et } D_X = -i(\partial_{x_0}, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N}).$$

L'opérateur $P(z, D_X)$ réalise une déformation reliant le laplacien $\Delta_X = P(+1, D_X)$ au d'Alembertien $\square_{x_0, x} = P(-1, D_X)$.

Théorème 7.2.2 (Solutions élémentaires du d'Alembertien) *On a, pour tout $N \geq 2$,*

$$\begin{aligned} \square(x_0^2 - |x|^2 - i0)^{\frac{1-N}{2}} &= -(N-1) |\mathbf{S}^N| i^{+N} \delta_{(0,0)}, \\ \square(x_0^2 - |x|^2 + i0)^{\frac{1-N}{2}} &= -(N-1) |\mathbf{S}^N| i^{-N} \delta_{(0,0)}, \end{aligned}$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$.

L'idée de la démonstration consiste à transformer de façon analytique le laplacien $\Delta_X = P(+1, D_X)$ au d'Alembertien $\square_{x_0, x} = P(-1, D_X)$ en faisant parcourir au paramètre complexe z un chemin tracé dans le plan complexe évitant $z = 0$.

Démonstration. Partons de la relation

$$\Delta_Y |Y|^{1-N} = -(N-1) |\mathbf{S}^N| \Delta E_{N+1} = -(N-1) |\mathbf{S}^N| \delta_{Y=0}$$

où $Y = (y_0, y_1, \dots, y_N)$ — cf. Théorème 7.2.1.

Faisons dans cette identité, pour tout $z > 0$, le changement de variables linéaire

$$X = (x_0, x_1, \dots, x_N) = (y_0, y_1 \sqrt{z}, \dots, y_N \sqrt{z}).$$

Rappelons que la distribution composée de la masse de Dirac en 0 par une application linéaire inversible $A \in GL_{N+1}(\mathbf{R})$ est (cf. Exemple 3.4.20) :

$$\delta_0 \circ A = |\det A| \delta_0.$$

Appliquant cette identité en prenant pour A le changement de variables linéaire ci-dessus, on trouve que

$$P(z, D_X) (x_0^2 + z^{-1}|x|^2)^{\frac{1-N}{2}} = -(N-1) |\mathbf{S}^N| z^{N/2} \delta_{X=0}.$$

Cette identité signifie précisément que, pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^{N+1})$, on a

$$\int_{\mathbf{R}^{N+1}} (x_0^2 + z^{-1}|x|^2)^{\frac{1-N}{2}} P(z, D_X) \phi(X) dX = -(N-1) |\mathbf{S}^N| z^{N/2} \phi(0), \quad z > 0.$$

Observons maintenant que, la fonction test ϕ étant fixée, chaque membre de l'identité ci-dessus se prolonge à $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ en une fonction holomorphe de la variable z .

Cela est immédiat pour le membre de droite, que l'on écrira

$$-(N-1) |\mathbf{S}^N| (\sqrt{z})^N \phi(0)$$

où \sqrt{z} désigne la détermination principale de la racine carrée. (Rappelons qu'il s'agit de la fonction holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ définie par la formule

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \ln z}$$

où la notation \ln désigne la détermination principale du logarithme — voir [6], chapitre V.3.2, ou [9], chapitre X.6.4.)

Quant au membre de gauche, mettons-en l'intégrande sous la forme

$$\left(\sqrt{x_0^2 + z^{-1}|x|^2} \right)^{1-N} (\partial_{x_0}^2 + z \Delta_x) \phi(X).$$

L'argument de la racine est une fonction holomorphe de z sur \mathbf{C}^* et ne prend des valeurs négatives que si $z < 0$, de sorte que la fonction $z \mapsto \sqrt{x_0^2 + z^{-1}|x|^2}$

est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$, toujours en notant $\sqrt{}$ la détermination principale de la racine carrée. De plus, pour $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$

$$x_0^2 + z^{-1}|x|^2 = 0 \text{ implique } x_0 = 0 \text{ et } x = 0.$$

Par conséquent, la fonction

$$(X, z) \mapsto \left(\sqrt{x_0^2 + z^{-1}|x|^2} \right)^{1-N} (\partial_{x_0}^2 + z\Delta_x)\phi(X)$$

est continue en $(X, z) \in (\mathbf{R}^{N+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-)$ et holomorphe en z .

Pour tout $(X, z) \in (\mathbf{R}^{N+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-)$

$$|x_0^2 + z^{-1}|x|^2|^2 = |x_0^2 + \Re(z^{-1})|x|^2|^2 + \Im(z^{-1})^2|x|^4.$$

De deux choses l'une

— soit $|x_0^2 + \Re(z^{-1})|x|^2| \geq \frac{1}{2}x_0^2$, auquel cas

$$|x_0^2 + z^{-1}|x|^2|^2 \geq \frac{1}{4}x_0^4 + \Im(z^{-1})^2|x|^4;$$

— soit $|x_0^2 + \Re(z^{-1})|x|^2| < \frac{1}{2}x_0^2$, auquel cas $|\Re(z^{-1})||x|^2 \geq \frac{1}{2}x_0^2$, et donc

$$|x_0^2 + z^{-1}|x|^2|^2 \geq \frac{1}{4} \frac{\Im(z^{-1})^2}{\Re(z^{-1})^2} x_0^4 + \frac{1}{2} \Im(z^{-1})^2 |x|^4.$$

Dans tous les cas

$$|x_0^2 + z^{-1}|x|^2|^2 \geq C_z(x_0^2 + |x|^2)^2$$

avec

$$C_z = \frac{1}{8} \min \left(1, \Im(z^{-1})^2, \frac{\Im(z^{-1})^2}{\Re(z^{-1})^2} \right).$$

Par conséquent

$$\left| \left(\sqrt{x_0^2 + z^{-1}|x|^2} \right)^{1-N} \right| \geq C_z^{(1-N)/2} (x_0^2 + |x|^2)^{(1-N)/2}.$$

On en déduit que la fonction

$$(X, z) \mapsto \left(\sqrt{x_0^2 + z^{-1}|x|^2} \right)^{1-N} (\partial_{x_0}^2 + z\Delta_x)\phi(X)$$

qui est continue sur $(\mathbf{R}^{N+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-)$, ainsi qu'identiquement nulle pour $X \notin \text{supp}(\phi)$ compact dans \mathbf{R}^{N+1} , et holomorphe en z , vérifie en outre

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^{N+1}} \sup_{z \in K} \left| \left(\sqrt{x_0^2 + z^{-1}|x|^2} \right)^{1-N} (\partial_{x_0}^2 + z\Delta_x)\phi(X) \right| dX \\ \leq C \int_{\text{supp}(\phi)} (x_0^2 + |x|^2)^{(1-N)/2} dX < \infty \end{aligned}$$

où

$$C = \sup_{z \in K} \|(\partial_{x_0}^2 + z\Delta_x)\phi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{N+1})} \sup_{z \in K} C_z^{(1-N)/2}.$$

Il s'ensuit⁵ que la fonction

$$z \mapsto \int_{\mathbf{R}^{N+1}} \left(\sqrt{x_0^2 + z^{-1}|x|^2} \right)^{1-N} (\partial_{x_0}^2 + z\Delta_x)\phi(X) dX$$

est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$.

On déduit de tout ce qui précède que les fonctions

$$z \mapsto \int_{\mathbf{R}^{N+1}} \left(\sqrt{x_0^2 + z^{-1}|x|^2} \right)^{1-N} (\partial_{x_0}^2 + z\Delta_x)\phi(X) dX$$

et

$$z \mapsto -(N-1)|\mathbf{S}^N|(\sqrt{z})^N \phi(0)$$

qui coïncident pour $z \in \mathbf{R}_+^*$, coïncident sur l'ouvert connexe $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ d'après le théorème des zéros isolés — voir [6], Théorème V.1.16, ou [9], chapitre X, Théorème 6.1.3.

Posons $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$, on trouve que

$$P(e^{i\theta}, D_X) \left(\sqrt{x_0^2 + e^{-i\theta}|x|^2} \right)^{1-N} = -(N-1)|\mathbf{S}^N| e^{iN\theta/2} \delta_{X=0}.$$

En faisant $\theta \rightarrow \pi^-$ ou $\theta \rightarrow -\pi^+$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \square(x_0^2 - |x|^2 - i0)^{\frac{1-N}{2}} &= (\partial_{x_0}^2 - \Delta_x) \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \left(\sqrt{x_0^2 + e^{-i\theta}|x|^2} \right)^{1-N} \\ &= -(N-1)|\mathbf{S}^N| i^{+N} \delta_{X=0}, \\ \square(x_0^2 - |x|^2 + i0)^{\frac{1-N}{2}} &= (\partial_{x_0}^2 - \Delta_x) \lim_{\theta \rightarrow -\pi^+} \left(\sqrt{x_0^2 + e^{-i\theta}|x|^2} \right)^{1-N} \\ &= -(N-1)|\mathbf{S}^N| i^{-N} \delta_{X=0}. \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. ■

5. D'après le théorème suivant (cf. [6], Théorème V.2.20) :

Théorème. Soient $X \subset \mathbf{R}^N$ mesurable et $\Omega \subset \mathbf{C}$ ouvert. Soit $f : \Omega \times X \rightarrow \mathbf{C}$ telle que

- a) pour tout $x \in X$, la fonction $\Omega \ni z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe ;
- b) pour tout $z \in \Omega$, la fonction $X \ni x \mapsto f(z, x)$ est mesurable ;
- c) il existe une fonction ϕ sommable sur X telle que, pour tout $(z, x) \in \Omega \times X$, l'on ait $|f(z, x)| \leq \phi(x)$.

Alors la fonction

$$F : \Omega \ni z \mapsto \int_X f(z, x) dx$$

est holomorphe sur Ω . On peut également appliquer successivement le Théorème 2.09 du chapitre VII, et la Définition 2.3.1 du chapitre X de [9].

7.2.3 Solution élémentaire de l'opérateur de la chaleur

Cherchons, pour tout $N \geq 1$, une distribution $E \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ telle que

$$(\partial_t - \frac{1}{2}\Delta_x)E_N = \delta_{(t,x)=(0,0)} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N).$$

Il est évident que si E est une solution élémentaire de l'opérateur de la chaleur, alors $E + \text{Const.}$ en est également une solution élémentaire.

Nous allons lever cette indétermination grâce à la condition de support suivante :

$$\text{supp}(E_N) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N.$$

Appliquons à la distribution tempérée E_N la transformation de Fourier partielle en la variable x , que l'on notera \hat{E}_N — on notera par ailleurs $\xi \in \mathbf{R}^N$ la variable de Fourier duale de $x \in \mathbf{R}^N$. D'après la Proposition 5.5.5 (b) ou 7.1.6, cette transformée de Fourier partielle vérifie

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{E}_N + \frac{1}{2}|\xi|^2 \hat{E}_N &= \delta_{t=0} \otimes 1 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_\xi^N), \\ \text{supp}(\hat{E}_N) &\subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N. \end{aligned}$$

En particulier, la restriction de \hat{E}_N à $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N$ vérifie

$$\partial_t \hat{E}_N|_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N} + \frac{1}{2}|\xi|^2 \hat{E}_N|_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N} = 0 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N),$$

Ceci suggère de choisir la distribution $\hat{E}_N|_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N}$ comme étant définie par une fonction de la forme

$$(t, \xi) \mapsto C(\xi)e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2}.$$

Et comme la distribution \hat{E}_N est à support dans $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$, il est naturel de chercher la distribution \hat{E}_N comme étant globalement définie par la fonction

$$\hat{E}_N(t, \xi) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t)C(\xi)e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2}, \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

Théorème 7.2.3 (Solution élémentaire de l'opérateur de la chaleur) *Pour tout $N \geq 1$, posons*

$$E_N(t, x) = \frac{\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t)}{(2\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}},$$

pour tout $(t, x) \in \mathbf{R}^{N+1}$. Alors E_N est l'unique distribution tempérée sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ vérifiant

$$\begin{aligned} (\partial_t - \frac{1}{2}\Delta_x)E_N &= \delta_{(t,x)=(0,0)} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N), \\ \text{supp}(E_N) &\subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N. \end{aligned}$$

Sa transformée de Fourier partielle en la variable x est la fonction

$$\hat{E}_N(t, \xi) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t)e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2}, \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

On remarque que la condition de support sur E garantit ici l'unicité de la solution élémentaire.

Démonstration. Commençons par montrer que E_N vérifie bien les conditions annoncées. Tout d'abord, la formule définissant E_N montre qu'il s'agit d'une fonction continue sur $\mathbf{R}_t^* \times \mathbf{R}_x^N$, à support dans $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$ et telle que

$$\int_{\mathbf{R}^N} E_N(t, x) dx = 1 \text{ si } t > 0,$$

de sorte que, la fonction E_N étant à valeurs positives ou nulles,

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^N} |E_N(t, x)| dx < \infty,$$

— autrement dit, $E_N \in L^\infty(\mathbf{R}_+; L^1(\mathbf{R}^N))$. En particulier, ceci entraîne que la fonction E_N définit bien une distribution tempérée sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N$.

La formule classique donnant la transformée de Fourier d'une gaussienne (cf. Lemme 5.2.6) montre que la transformée de Fourier partielle en x de E_N est la fonction définie par

$$\hat{E}_N(t, \xi) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2}$$

en notant ξ la variable duale de x .

D'après la formule de Leibnitz (Proposition 3.4.14) appliquée à la distribution $\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*} \otimes 1$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$, et à la fonction $(t, \xi) \mapsto e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2}$ de classe C^∞ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$, on a

$$\begin{aligned} (\partial_t + \frac{1}{2}|\xi|^2)\hat{E}_N &= e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2} \partial_t (\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*} \otimes 1) \\ &= e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2} (\delta_{t=0} \otimes 1) \\ &= \delta_{t=0} \otimes 1 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N). \end{aligned}$$

Or $E_N \in \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$, de sorte que $\hat{E}_N \in \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$; par conséquent, $\delta_{t=0} \otimes 1$ et $(\partial_t + \frac{1}{2}|\xi|^2)\hat{E}_N$ sont deux distributions tempérées sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$, égales en tant qu'éléments de $\mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$. Par densité de $C_c^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$ dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$ (Proposition 5.1.4), il s'ensuit que l'égalité ci-dessus vaut dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$.

Appliquant à chaque membre de cette relation la transformation de Fourier inverse partielle en la variable x et au sens des distributions, on trouve finalement que

$$(\partial_t - \frac{1}{2}\Delta_x)E_N = \delta_{t=0} \otimes \delta_{x=0} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N),$$

ce qui montre que E_N satisfait bien aux propriétés annoncées — la condition $\text{supp}(E_N) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$ étant évidemment vérifiée.

Passons à la démonstration de l'unicité. Supposons qu'il existe une autre distribution tempérée E'_N vérifiant les mêmes propriétés que E_N , et notons $F_N = E_N - E'_N$.

On vérifie sans peine que F_N satisfait aux hypothèses du lemme ci-dessous, d'où l'on déduit que $F_N = E_N - E'_N = 0$, c'est-à-dire que $E_N = E'_N$. ■

Lemme 7.2.4 Soit $F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ telle que

$$\begin{aligned} (\partial_t - \tfrac{1}{2}\Delta_x)F &= 0 && \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N), \\ \text{supp}(F) &\subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N. \end{aligned}$$

Alors $F = 0$.

Démonstration. Appliquons la transformée de Fourier globale \mathcal{F} en les variables (t, x) et au sens des distributions à chaque membre de cette égalité; notant τ la variable duale de t et ξ celle de x , il vient

$$(i\tau + \tfrac{1}{2}|\xi|)\mathcal{F}F = 0 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$$

En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus par la quantité $-i\tau + \frac{1}{2}|\xi|^2$, on aboutit à la relation

$$(\tau^2 + \tfrac{1}{4}|\xi|^4)\mathcal{F}F = 0 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N).$$

Il en résulte que $(\mathcal{F}F)|_{\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \setminus \{(0,0)\}} = 0$, c'est-à-dire que

$$\mathcal{F}F \text{ est une distribution à support dans } \{(0,0)\}.$$

Le théorème de structure des distributions à support dans l'origine (Théorème 4.1.7) entraîne que $\mathcal{F}F$ est une combinaison linéaire finie de la masse de Dirac à l'origine et de ses dérivées.

Autrement dit, il existe une famille de complexes $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}^{N+1}}$ nuls sauf pour un nombre fini de multi-indices α telle que

$$\mathcal{F}F = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^{N+1}} a_\alpha (i2\pi)^{|\alpha|} \partial_{t,x}^\alpha \delta_{(0,0)}.$$

En appliquant la transformée de Fourier inverse \mathcal{F}^{-1} à chaque membre de cette égalité, on trouve que

$$F = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^{N+1}} a_\alpha t^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N},$$

c'est-à-dire que F est une fonction polynôme.

Mais comme par hypothèse $\text{supp}(F) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$, c'est à dire que la fonction polynôme F est identiquement nulle pour $t < 0$, on conclut que F est identiquement nulle ■

7.2.4 Solution élémentaire de l'opérateur de Schrödinger

Pour tout $N \geq 1$, cherchons une distribution $E_N \in \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$ telle que

$$i\partial_t E_N + \tfrac{1}{2}\Delta_x E_N = i\delta_{(t,x)=(0,0)} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N),$$

et, comme on l'a fait pour l'équation de la chaleur, ajoutons la condition de support

$$\text{supp}(E_N) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N.$$

Une idée naturelle consiste à effectuer le changement de variables $s = it$ ce qui transforme l'opérateur de Schrödinger

$$i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x \text{ en l'opérateur de la chaleur } \partial_s - \frac{1}{2}\Delta_x.$$

Ceci suggère de prendre

$$E_N(t, x) = \frac{\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t)}{\sqrt{2\pi it}^N} e^{-\frac{|x|^2}{2it}}.$$

Cette approche soulève deux questions :

- a) quelle racine carrée de i doit-on choisir dans cette formule ? et
- b) cette fonction définit-elle une distribution de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N)$?

Comme on va le voir, ces deux questions sont intimement liées.

Théorème 7.2.5 (Solution élémentaire de l'opérateur de Schrödinger)

Pour tout $N \geq 1$ et $\epsilon > 0$, posons

$$E_N^\epsilon(t, x) = \frac{\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t)}{\sqrt{2\pi(\epsilon + i)t}^N} e^{-\frac{|x|^2}{2(\epsilon + i)t}}$$

pour tout $(t, x) \in \mathbf{R}^{N+1}$, où $\sqrt{}$ désigne la détermination principale de la racine carrée. Alors

$$E_N^\epsilon \rightarrow E_N \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N) \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0^+,$$

où E_N est l'unique distribution tempérée sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ vérifiant

$$\begin{aligned} (i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x)E_N &= i\delta_{(t,x)=(0,0)} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N), \\ \text{supp}(E_N) &\subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N. \end{aligned}$$

Sa transformée de Fourier partielle en la variable x est la fonction

$$\hat{E}_N(t, \xi) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2}, \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

Il est d'usage d'écrire la solution élémentaire de l'équation de Schrödinger (libre, c'est-à-dire en l'absence de potentiel V) sous la forme

$$E_N(t, x) = \frac{\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t)}{\sqrt{2\pi it}^N} e^{-\frac{|x|^2}{2it}}.$$

donnée avant l'énoncé du théorème. Manifestement, il s'agit d'un abus de notation, et l'énoncé précis figurant dans le théorème ci-dessus indique que c'est une

sorte de valeur principale de cette fonction qui définit la solution élémentaire de l'opérateur dans la classe des distributions tempérées.

Observons à nouveau que la condition de support garantit l'unicité de la solution élémentaire de l'opérateur de Schrödinger.

Nous aurons besoin du lemme suivant sur la transformée de Fourier des gaussiennes complexes.

Lemme 7.2.6 (Transformée de Fourier des gaussiennes complexes) *Soit $z \in \mathbf{C}$ telle que $\Re(z) > 0$, et posons*

$$G_N(z, x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi z)^N}} e^{-\frac{|x|^2}{2z}}, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0,$$

où le symbole $\sqrt{\quad}$ désigne la détermination principale de la racine carrée. Alors la transformée de Fourier en x de G_N est la fonction définie par la formule

$$\hat{G}_N(z, \xi) = e^{-\frac{1}{2}z|\xi|^2}, \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

Démonstration du lemme. La fonction $(z, x) \mapsto G_N(z, x)$ est continue sur $\{z \in \mathbf{C} \mid \Re(z) > 0\} \times \mathbf{R}^N$ et

$$|G_N(z, x)| = \frac{1}{(2\pi|z|)^{N/2}} e^{-\frac{\Re(z)|x|^2}{2|z|^2}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^N$$

de sorte que

$$\int_{\mathbf{R}^N} \sup_{\substack{\Re(z) > a \\ |z| \leq R}} |G_N(z, x)| dx \leq \int_{\mathbf{R}^N} \frac{1}{(2\pi a)^{N/2}} e^{-\frac{a|x|^2}{2R^2}} dx = \frac{R^N}{a^N}.$$

Comme par ailleurs la fonction $z \mapsto G_N(z, x)$ est holomorphe sur le domaine $\{z \in \mathbf{C} \mid \Re(z) > 0\}$, on déduit du Théorème V.2.20 de [6], rappelé dans la note 4 de ce chapitre, que, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^N$, la fonction

$$z \mapsto \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi \cdot x} G_N(z, x) dx \text{ est holomorphe sur } \{z \in \mathbf{C} \mid \Re(z) > 0\}.$$

On sait d'autre part (voir Lemme 5.2.6) que, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^N$, cette fonction coïncide avec la fonction

$$z \mapsto e^{-\frac{1}{2}z|\xi|^2} \text{ également holomorphe sur } \{z \in \mathbf{C} \mid \Re(z) > 0\}$$

lorsque z décrit \mathbf{R}_+^* .

On déduit du théorème des zéros isolés (Théorème V.1.16, de [6], ou Théorème 6.1.3 du chapitre X dans [9]) que ces deux fonctions holomorphes coïncident sur l'ouvert connexe $\{z \in \mathbf{C} \mid \Re(z) > 0\}$. ■

Démonstration du théorème. Appliquons à chaque membre de l'équation de Schrödinger la transformation de Fourier partielle en la variable x — on notera

$\xi \in \mathbf{R}^N$ la variable duale de $x \in \mathbf{R}^N$, ainsi que \hat{f} la transformée de Fourier partielle en la variable x de la distribution $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$. Ainsi, d'après la Proposition 5.5.5 (b)

$$i\partial_t \hat{E}_N + \frac{1}{2}|\xi|^2 \hat{E}_N = i\delta_{t=0} \otimes 1 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N),$$

$$\text{supp}(\hat{E}_N) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N.$$

Multiplions chaque membre de l'équation ci-dessus par $(t, \xi) \mapsto e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}$ qui est une fonction de classe C^∞ à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées. On trouve que

$$i\partial_t \left(e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2} \hat{E}_N \right) = e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2} \left(i\partial_t \hat{E}_N + \frac{1}{2}|\xi|^2 \hat{E}_N \right)$$

$$= ie^{\frac{1}{2}it|\xi|^2} \delta_{t=0} \otimes 1 = i\delta_{t=0} \otimes 1 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N).$$

Cette relation, jointe à la condition portant sur le support de \hat{E}_N , équivaut au fait que

$$e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2} \hat{E}_N = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) \otimes 1 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N).$$

Multipliant chaque membre de cette égalité par la fonction $(t, \xi) \mapsto e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2}$ qui est de classe C^∞ et à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées, on en conclut que l'unique solution du problème de Cauchy ci-dessus pour \hat{E}_N est la fonction donnée par

$$\hat{E}_N(t, \xi) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2}, \quad (t, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N.$$

Cette fonction est mesurable et bornée; la distribution \hat{E}_N qu'elle définit est donc tempérée sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$.

En appliquant la transformation de Fourier inverse partielle en la variable x dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ à la fonction mesurable bornée \hat{E}_N définie ci-dessus, on obtient donc une solution du problème de Cauchy d'inconnue E_N en variables physiques.

Il ne reste plus qu'à montrer que E_N est la limite de E_N^ϵ pour $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$|E_N^\epsilon(t, x)| = \frac{\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t)}{\sqrt{2\pi(\epsilon^2 + 1)^{1/2}t}} e^{-\frac{\epsilon|x|^2}{2(\epsilon^2 + 1)t}}$$

d'où on déduit que

$$\int_{\mathbf{R}^N} |E_N^\epsilon(t, x)| dx = \frac{(\epsilon^2 + 1)^{N/2}}{\epsilon^{N/2}} \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t).$$

Donc $E_N^\epsilon \in L^\infty(\mathbf{R}_+; L^1(\mathbf{R}^N))$ pour tout $\epsilon > 0$, ce qui entraîne en particulier que $E_N^\epsilon \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N)$.

D'après le Lemme 7.2.6

$$\hat{E}_N^\epsilon(t, \xi) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) e^{-\frac{1}{2}(\epsilon+i)t|\xi|^2}$$

de sorte que, par convergence dominée,

$$\hat{E}_N^\epsilon \rightarrow \hat{E}_N \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_\xi^N) \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0^+ .$$

Or la transformation de Fourier inverse partielle en la variable x est continue de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_\xi^N)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$. On déduit de la convergence ci-dessus que

$$E_N^\epsilon \rightarrow E_N \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N) \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0^+ ,$$

d'où le résultat annoncé. ■

7.3 Le problème de Cauchy au sens des distributions

En toute généralité, le problème de Cauchy pour une EDP consiste à chercher une fonction inconnue f vérifiant

$$P(x, D_x)f = S \text{ pour } x \in \Omega$$

et dont la restriction à une hypersurface H de Ω est prescrite

$$f|_H = f^{in} .$$

Dans ce problème, le terme source S est une fonction donnée ainsi que la fonction f^{in} (appelée donnée de Cauchy) ; de même H est une hypersurface de Ω de classe C^∞ connue ainsi que l'opérateur différentiel $P(x, D_x)$ sur Ω .

Mais dans ce cours, nous nous intéresserons uniquement à ce que l'on appelle des "problèmes d'évolution", c'est-à-dire des problèmes de Cauchy particuliers de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t f + A(x, D_x)f &= S, \quad \text{pour } (t, x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N \text{ ou } (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N, \\ f|_{t=0} &= f^{in}. \end{aligned}$$

Autrement dit, l'ouvert Ω est ici $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N$ tandis que l'hypersurface H est l'hyperplan d'équation $t = 0$.

Eventuellement, f peut être à valeurs vectorielles (dans \mathbf{R}^d ou \mathbf{C}^d) de façon à pouvoir traiter le cas d'EDP d'évolution d'ordre supérieur à 1 en la variable t — ce sera notamment le cas pour l'équation des ondes — ou bien plus généralement des systèmes linéaires d'EDP — comme les équations de Maxwell du champ électromagnétique.

Dans ce cas, $A(x, D_x)$ sera alors une matrice carrée à d lignes et colonnes dont les coefficients sont des opérateurs différentiels.

Cette circonstance ne modifie en rien ce que nous allons dire dans cette section, et nous y reviendrons en détail dans notre étude de l'équation des ondes. Le lecteur est donc invité à supposer pour l'instant que la fonction f inconnue de l'EDP

$$\partial_t f + A(x, D_x)f = S$$

est à valeurs scalaires.

Voici la difficulté principale qu'il nous faut considérer pour ce qui est du problème de Cauchy.

Comme nous l'avons dit plus haut, il est avantageux d'étudier les EDP dans le cadre des distributions — autrement dit de supposer que la donnée S est une distribution à support compact et que l'inconnue f est elle-même une distribution.

Or, si la condition initiale

$$f|_{t=0} = f^{in}$$

a bien un sens pour une fonction continue sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N$, elle n'en a aucun si f est une distribution sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N$.

Cette difficulté existe déjà pour $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N)$, car l'hyperplan d'équation $t = 0$ dans $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N$ est de mesure nulle.

(Rappelons en effet qu'un élément de $L^1_{loc}(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N)$ est une classe d'équivalence de fonctions égales en dehors d'un ensemble de mesure nulle. Autrement dit, les divers représentants de f peuvent prendre des valeurs arbitraires sur l'hyperplan d'équation $t = 0$, de sorte que la restriction $f|_{t=0}$ n'est pas définie.)

La condition

$$f|_{t=0}$$

n'a donc aucun sens considérée séparément lorsque f est une distribution sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N$.

Nous allons y remédier en donnant un sens aux deux conditions

$$\partial_t f + A(x, D_x)f = S$$

et

$$f|_{t=0}$$

considérées conjointement.

7.3.1 Le cas des équations différentielles ordinaires

Commençons par le cas du problème de Cauchy pour une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1, qui contient toute la difficulté à surmonter.

Il s'agit de résoudre le problème

$$\begin{aligned} u'(t) + au(t) &= S(t) \quad \text{pour } t > 0 \\ u(0) &= u^{in} \end{aligned}$$

d'inconnue u , où la fonction S et les scalaires a et u^{in} sont donnés.

Lorsque S est une fonction continue sur \mathbf{R}_+ , on sait qu'il existe une unique solution $u \in C^1(\mathbf{R}_+)$ du problème ci-dessus, et de plus que la méthode de variation de la constante donne la formule explicite suivante pour u :

$$u(t) = e^{-at}u^{in} + \int_0^t e^{-a(t-s)}S(s)ds.$$

Notons dans ce qui suit

$$E_a(t) = e^{-at}, \quad t \in \mathbf{R},$$

et supposons que $S \in C_c(\mathbf{R}_+)$.

L'intégrale dans la formule donnant u peut encore s'écrire sous la forme d'un produit de convolution : pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-a(t-s)}S(s)ds &= \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(t-s)e^{-a(t-s)}\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(s)S(s)ds \\ &= (\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}E_a) \star (\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}S)(t). \end{aligned}$$

Pour ce qui est du premier terme dans cette même formule, observons qu'il se met également sous la forme d'un produit de convolution — cf. Exemple 4.4.3 :

$$e^{-at}u^{in} = (\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}E_a) \star (u^{in}\delta_0)(t) \text{ pour tout } t > 0.$$

Par conséquent

$$u = (\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}E_a) \star (u^{in}\delta_0 + \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}S) \text{ sur } \mathbf{R}_+^*.$$

D'autre part, comme $u^{in}\delta_0 + \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}S$ est à support compact, on a, d'après la Proposition 4.4.2,

$$\begin{aligned} \text{supp}((\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}E_a) \star (u^{in}\delta_0 + \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}S)) &\subset \text{supp}(\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}E_a) + \text{supp}(u^{in}\delta_0 + \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}S) \\ &\subset \mathbf{R}_+ + \mathbf{R}_+ \subset \mathbf{R}_+, \end{aligned}$$

de sorte que

$$(\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}E_a) \star (u^{in}\delta_0 + \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}S) = 0 \text{ sur } \mathbf{R}_-^*.$$

Résumons le résultat de cette étude :

Proposition 7.3.1 (Problème de Cauchy dans \mathcal{D}' pour les EDO) Soient $a \in \mathbf{C}$, $S \in C_c(\mathbf{R}_+; \mathbf{C})$ et $u^{in} \in \mathbf{C}$, et soit $u \in C^1(\mathbf{R}_+; \mathbf{C})$ l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} u' + au &= S \quad \text{pour } t > 0, \\ u(0) &= u^{in}. \end{aligned}$$

Soit U la fonction définie sur \mathbf{R}^* à valeurs dans \mathbf{C} définie par

$$U(t) = u(t) \text{ pour } t > 0 \text{ et } U(t) = 0 \text{ pour } t < 0.$$

Alors

(a) la fonction localement bornée $\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} E_a$ est une solution élémentaire de l'opérateur différentiel $\frac{d}{dt} + a$ sur \mathbf{R} ;

(b) la fonction localement bornée U vérifie

$$U = (\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} E_a) \star (u^{in} \delta_0 + \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} S) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}) ;$$

(c) la fonction localement bornée U définit l'unique distribution sur \mathbf{R} vérifiant

$$\begin{aligned} U' + aU &= \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} S + u^{in} \delta_0, \\ \text{supp}(U) &\subset \mathbf{R}_+. \end{aligned}$$

Démonstration. Le point (b) découle de la discussion précédent l'énoncé de cette proposition.

Pour ce qui est du point (a), appliquons la formule de Leibnitz (Proposition 3.4.14) : comme $E_a \in C^\infty(\mathbf{R})$ et $E'_a + aE_a = 0$, on a

$$\begin{aligned} (\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} E_a)' + a(\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} E_a) &= E_a \delta_0 + \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} E'_a + a(\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} E_a) = E_a \delta_0 \\ &= E_a(0) \delta_0 = \delta_0. \end{aligned}$$

Passons au point (c). Comme $u^{in} \delta_0 + \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} S$ est à support compact dans \mathbf{R}_+ , on déduit du Théorème 4.4.6 que

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + a \right) U &= \left(\frac{d}{dt} + a \right) ((\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} E_a) \star (u^{in} \delta_0 + \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} S)) \\ &= \left(\left(\frac{d}{dt} + a \right) (\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} E_a) \right) \star (u^{in} \delta_0 + \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} S) \\ &= \delta_0 \star (u^{in} \delta_0 + \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} S) = u^{in} \delta_0 + \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} S \end{aligned}$$

au sens des distributions sur \mathbf{R} , où la dernière égalité est une conséquence du calcul traité dans l'Exemple 4.4.3. La condition sur le support de U définie par le membre de droite de la formule du (b) a déjà été démontrée dans la discussion précédent l'énoncé de la proposition.

Terminons avec l'unicité de U . Supposons qu'il existe une autre distribution $V \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ vérifiant les mêmes conditions que U . Alors $W = U - V$ est une distribution qui vérifie

$$\begin{aligned} W' + aW &= 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}), \\ \text{supp}(W) &\subset \mathbf{R}_+. \end{aligned}$$

Considérons le produit de W par la fonction $t \mapsto e^{at}$ de classe C^∞ sur \mathbf{R} . Alors, toujours d'après la formule de Leibnitz (Proposition 3.4.14)

$$(e^{at} W)' = e^{at} (W' + aW) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R})$$

de sorte que la distribution $e^{at} W$ est constante sur \mathbf{R} grâce à la Proposition 3.4.5. Or comme W est à support dans \mathbf{R}_+ , cette constante est nulle. Donc

$$W = U - V = 0$$

ce qui montre que $U = V$, d'où l'unicité. ■

Compte tenu de la proposition ci-dessus, il est donc naturel de proposer la définition suivante pour la notion de solution au sens des distributions du problème de Cauchy pour une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

Définition 7.3.2 (Solution dans \mathcal{D}' d'une EDO, problème de Cauchy)
Soient $a \in \mathbf{C}$, $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^*)$ et $u^{in} \in \mathbf{C}$. On dit qu'une distribution $U \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ est solution au sens des distributions du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} u' + au &= S \quad \text{pour } t > 0, \\ u(0) &= u^{in}, \end{aligned}$$

si et seulement si

$$\begin{aligned} U' + aU &= \dot{S} + u^{in}\delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}) \\ \text{supp}(U) &\subset \mathbf{R}_+, \end{aligned}$$

où \dot{S} est le prolongement de S par 0 sur \mathbf{R}_- , qui est défini par la formule

$$\langle \dot{S}, \phi \rangle_{\mathcal{E}'(\mathbf{R}), C^\infty(\mathbf{R})} = \langle S, \phi|_{\mathbf{R}_+^*} \rangle_{\mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^*), C^\infty(\mathbf{R}_+^*)}$$

— voir Définition 4.1.6.

Voici la relation existant entre la notion usuelle de solution du problème de Cauchy, et cette notion de solution au sens des distributions.

La Proposition 7.3.1 ci-dessus montre que, lorsque $S \in C_c(\mathbf{R}_+)$, l'unique solution U au sens des distributions du problème de Cauchy, et sa solution classique u vérifient la relation

$$U|_{\mathbf{R}_+^*} = u|_{\mathbf{R}_+^*}.$$

Autrement dit, la solution classique coïncide avec la restriction de la solution au sens des distributions pour $t > 0$.

7.3.2 Le cas des EDP

Considérons maintenant le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t f(t, x) + A(D_x)f(t, x) &= S(t, x) \quad \text{pour } t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \\ f|_{t=0} &= f^{in}, \end{aligned}$$

où $A(D_x)$ est un opérateur différentiel à coefficients constants sur \mathbf{R}^N de la forme

$$A(D_x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}^N \\ |\alpha| \leq d}} a_\alpha D_x^\alpha$$

vérifiant la propriété suivante

$$(H) \quad \Re(\sigma(A)(\xi)) \geq 0 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbf{R}^N.$$

On supposera dans tout ce qui suit que $f^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ et que $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$.

Pour $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N)$, notons $\hat{\phi}$ la transformée de Fourier partielle en x de la distribution ϕ , et ξ la variable de Fourier duale de x .

En appliquant la transformation de Fourier partielle $\phi \mapsto \hat{\phi}$ à chaque membre des deux égalités figurant dans le problème de Cauchy, on aboutit à

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{f} + \sigma(A)(\xi) \hat{f} &= \hat{S} \text{ pour } t > 0, \xi \in \mathbf{R}^N, \\ \hat{f}|_{t=0} &= \hat{f}^{in}, \end{aligned}$$

grâce à la Proposition 5.5.5 (b) ou 7.1.6.

Lorsque \hat{f} est une fonction de classe C^1 en (t, ξ) , alors le problème de Cauchy ci-dessus correspond à une famille d'équations différentielles ordinaires indexées par $\xi \in \mathbf{R}^N$.

Le cas des équations différentielles ordinaires étudié dans la section précédente suggère que le problème de Cauchy ci-dessus après transformation de Fourier partielle en x admet la formulation suivante au sens des distributions :

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{F} + \sigma(A)(\xi) \hat{F} &= \hat{S} + \delta_{t=0} \otimes \hat{f}^{in} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N), \\ \text{supp}(\hat{F}) &\subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N. \end{aligned}$$

En revenant en variables physiques par transformation de Fourier inverse partielle en la variable x , on aboutit à la définition suivante de la notion de solution au sens des distributions pour un problème de Cauchy aux dérivées partielles.

Définition 7.3.3 (Problème de Cauchy dans \mathcal{S}' pour une EDP) Soient $A(D_x)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur \mathbf{R}^N vérifiant la condition (H), ainsi que deux distributions à support compact $f^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}_x^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(]0, +\infty[_t \times \mathbf{R}_x^N)$.

On dira qu'une distribution $F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ est une solution au sens des distributions (tempérées) du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t f(t, x) + A(D_x) f(t, x) &= S(t, x) \text{ pour } t > 0, x \in \mathbf{R}^N, \\ f|_{t=0} &= f^{in}, \end{aligned}$$

si et seulement si la distribution F vérifie

$$\begin{aligned} \partial_t F + A(D_x) F &= \dot{S} + \delta_{t=0} \otimes f^{in} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N), \\ \text{supp}(F) &\subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N, \end{aligned}$$

où \dot{S} est le prolongement de S par 0 pour $t \leq 0$ — cf. Définition 4.1.6 :

$$\langle \dot{S}, \phi \rangle_{\mathcal{E}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N), C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)} = \langle S, \phi|_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N} \rangle_{\mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N), C^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)}.$$

Pour vérifier le bien fondé de cette définition, il faut encore expliquer la relation existant entre la notion de solution au sens des distributions et celle de solution classique du problème de Cauchy, lorsqu'il en existe une.

Proposition 7.3.4 (Solution classique / au sens des distributions) Soient $A(D_x)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur \mathbf{R}^N vérifiant la condition (H), ainsi que $f^{in} \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ et $S \in C_c^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$. Alors
 (a) il existe une unique solution classique f du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t f(t, x) + A(D_x)f(t, x) &= S(t, x) \text{ pour } t > 0, x \in \mathbf{R}^N, \\ f|_{t=0} &= f^{in}; \end{aligned}$$

cette solution classique est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$, et pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto f(t, x)$ appartient à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$;

(b) il existe une unique solution F au sens des distributions tempérées de ce même problème de Cauchy, et

(c) les solutions F et f coïncident pour $t > 0$:

$$F|_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N} = f|_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N}.$$

Démonstration. Pour démontrer le (a), appliquons à chaque membre des deux égalités intervenant dans le problème de Cauchy la transformation de Fourier partielle en la variable x . On aboutit ainsi au problème de Cauchy en variables de Fourier (ξ étant la variable duale de x) pour une équation différentielle ordinaire — voir Proposition 5.5.5 (b) ou 7.1.6 :

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{f}(t, \xi) + \sigma(A)(\xi) \hat{f}(t, \xi) &= \hat{S}(t, \xi) \text{ pour } t > 0, \xi \in \mathbf{R}^N, \\ \hat{f}(0, \xi) &= \hat{f}^{in}(\xi). \end{aligned}$$

Comme $f^{in} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ et $S \in C_c^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$, leurs transformées de Fourier en x sont des fonctions de la variable ξ — et pas seulement des distributions — de sorte qu'on peut résoudre le problème de Cauchy en variables de Fourier comme pour une famille d'équations différentielles ordinaires paramétrées par $\xi \in \mathbf{R}^N$. On trouve donc que

$$\hat{f}(t, \xi) = e^{-t\sigma(A)(\xi)} \hat{f}^{in}(\xi) + \int_0^t e^{-(t-s)\sigma(A)(\xi)} \hat{S}(s, \xi) ds, \quad (t, \xi) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N.$$

La condition (H) montre que le membre de droite de l'égalité ci-dessus définit une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$ qui est, pour tout $t \geq 0$ dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}_\xi^N)$. Alors la transformée de Fourier inverse

$$f(t, x) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{i\xi \cdot x} \left(e^{-t\sigma(A)(\xi)} \hat{f}^{in}(\xi) + \int_0^t e^{-(t-s)\sigma(A)(\xi)} \hat{S}(s, \xi) ds \right) \frac{d\xi}{(2\pi)^N}$$

définit bien une solution de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$ au problème de Cauchy dans les variables physiques.

C'est la seule solution telle que la fonction $x \mapsto f(t, x)$ appartienne à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ car on a raisonné par condition nécessaire sur le problème de Cauchy en variables de Fourier.

Définissons alors

$$\begin{aligned} F(t, x) &= f(t, x) && \text{pour tout } t \geq 0 \text{ et } x \in \mathbf{R}^N, \\ F(t, x) &= 0 && \text{pour tout } t < 0 \text{ et } x \in \mathbf{R}^N. \end{aligned}$$

On a évidemment

$$\begin{aligned} \hat{F}(t, \xi) &= \hat{f}(t, \xi) && \text{pour tout } t \geq 0 \text{ et } \xi \in \mathbf{R}^N, \\ \hat{F}(t, \xi) &= 0 && \text{pour tout } t < 0 \text{ et } \xi \in \mathbf{R}^N, \end{aligned}$$

et la Proposition 7.3.1 nous dit que, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^N$, la fonction $t \mapsto \hat{F}(t, \xi)$ est l'unique solution au sens des distributions du problème de Cauchy en variable de Fourier. Autrement dit

$$\begin{aligned} (\partial_t + \sigma(A)(\xi))\hat{F} &= \hat{S} + \hat{f}^{in}\delta_{t=0} \quad \text{sur } \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N, \\ \text{supp}(\hat{F}) &\subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N, \end{aligned}$$

en notant \hat{S} le prolongement de S par 0 sur \mathbf{R}_- — notons que ce prolongement est encore de classe C^∞ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ car, par hypothèse, S est nulle au voisinage de $t = 0$.

Comme pour tout $t \geq 0$ la fonction $x \mapsto f(t, x)$ appartient à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, tous les termes apparaissant dans la formulation au sens des distributions du problème de Cauchy en variables de Fourier sont dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ par rapport à ξ .

Par transformation de Fourier inverse partielle en la variable x , on en déduit que F est l'unique distribution tempérée en x telle que

$$\begin{aligned} (\partial_t + A(D_x))F &= \dot{S} + \delta_{t=0} \otimes f^{in} \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N) \\ \text{supp}(F) &\subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N, \end{aligned}$$

ce qui établit le point (b).

Enfin, la définition de F ci-dessus n'est autre que la relation entre f et F du point (c). ■

La proposition précédente s'interprète facilement grâce à la notion de "solution élémentaire dans le futur" pour un problème d'évolution.

Définition 7.3.5 (Solution élémentaire dans le futur pour $\partial_t + A(D_x)$)
Soit $A(D_x)$ opérateur différentiel à coefficients constants sur \mathbf{R}^N . On appelle "solution élémentaire dans le futur" de l'opérateur $\partial_t + A(D_x)$ une solution élémentaire de cet opérateur à support dans $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$. Autrement dit, une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ est une solution élémentaire à support dans le futur de $\partial_t + A(D_x)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} (\partial_t + A(D_x))E &= \delta_{(t,x)=(0,0)} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N), \\ \text{supp}(E) &\subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N. \end{aligned}$$

La condition (H) fournit une solution élémentaire dans le futur de l'opérateur $\partial_t + A(D_x)$ à support "dans le futur", c'est-à-dire pour $t \geq 0$.

Théorème 7.3.6 (Solution élémentaire dans le futur pour $\partial_t + A(D_x)$)
Soit $A(D_x)$ opérateur différentiel à coefficients constants vérifiant la condition (H). Alors

(a) pour tout $t \geq 0$, la fonction

$$\xi \mapsto e^{-t\sigma(A)(\xi)} \text{ est continue et bornée sur } \mathbf{R}^N ;$$

elle définit donc pour tout $t \geq 0$ une distribution tempérée sur \mathbf{R}^N dont on notera $E_A(t)$ la transformée de Fourier inverse partielle par rapport à ξ ;

(b) prolongeons E_A aux valeurs négatives de t en posant

$$E_A(t) = 0 \text{ pour } t < 0 .$$

Le prolongement ainsi obtenu définit une distribution tempérée E_A sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N$ qui est une solution élémentaire dans le futur de l'opérateur $\partial_t + A(D_x)$.

Démonstration. Le point (a) est une conséquence immédiate de la condition (H).

La transformée de Fourier partielle en x du prolongement E_A est donc donnée par la formule

$$\hat{E}_A(t, \xi) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(t) e^{-t\sigma(A)(\xi)}$$

— le membre de droite étant une fonction bornée continue par morceaux sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_\xi^N$.

C'est donc une distribution tempérée sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_\xi^N$, et la formule de Leibnitz entraîne que

$$\begin{aligned} (\partial_t + \sigma(A)(\xi)) \hat{E}_A &= e^{-t\sigma(A)(\xi)} \delta_{t=0} + \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(t) ((\partial_t + \sigma(A)(\xi)) e^{-t\sigma(A)(\xi)}) \\ &= \delta_{t=0} \otimes 1 . \end{aligned}$$

A priori, cette égalité vaut dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_\xi^N)$, mais comme les deux membres de cette égalité sont des distributions tempérées sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_\xi^N$, elle a lieu dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_\xi^N)$ par densité de $C_c^\infty(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_\xi^N)$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_\xi^N)$.

En revenant aux variables physiques par transformation de Fourier inverse partielle par rapport à ξ , on trouve que

$$(\partial_t + A(D_x)) E_A = \delta_{t=0} \otimes \delta_{x=0} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$$

ce qui établit le point (b), la condition de support sur E_A étant triviale par construction de E_A . ■

On aura reconnu dans la démonstration de ce résultat la méthode qui nous a permis de calculer, dans la section précédente, les solutions élémentaires des opérateurs de la chaleur et de Schrödinger, qui vérifient évidemment tous les deux la condition (H).

7.4 Exercices

Exercice 1.

Soit $v \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$. Trouver une solution élémentaire tempérée dans le futur de l'opérateur de transport $\partial_t + v \cdot \nabla_x$. (Indication : on pourra commencer par déterminer une solution élémentaire dans le futur de l'opérateur ∂_t sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N$, puis y ramener l'opérateur de transport $\partial_t + v \cdot \nabla_x$ par un changement de variables bien choisi.)

Exercice 2.

Soit $A \in M_N(\mathbf{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive, de coefficients a_{kl} , avec $k, l = 1, \dots, N$. Notons $P_A(D_x)$ l'opérateur différentiel homogène du second ordre défini par

$$P_A(D_x)\phi(x) = -\operatorname{div}(A\nabla\phi(x)) = -\sum_{k,l=1}^N a_{kl}\partial_{x_k}\partial_{x_l}\phi(x)$$

pour toute fonction $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$. Posons $B = A^{-1}$.

Montrer qu'il existe une constante $c_A \in \mathbf{R}$ telle que

$$P_A(D_x)E_A = \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N),$$

où E_A est la distribution définie par la fonction

$$x \mapsto c_A(Bx|x)^{\frac{2-N}{2}}$$

et où on a noté

$$(Bx|x) = \sum_{k,l=1}^N b_{kl}x_kx_l,$$

les nombres b_{kl} désignant, pour tout $k, l = 1, \dots, N$, les coefficients de la matrice B .

(Indication : commencer par vérifier que $P_A(D_x)(Bx|x)^{\frac{2-N}{2}} = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$; puis se ramener au cas où la matrice A est diagonale.)

Exercice 3.

Soit $A \in M_N(\mathbf{R})$ matrice symétrique réelle définie positive ; montrer que l'opérateur

$$\partial_t + \frac{1}{2}P_A(D_x) = \partial_t - \frac{1}{2}\sum_{kl=1}^N a_{kl}\partial_{x_k}\partial_{x_l}$$

admet une unique solution élémentaire $E_A \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ qui soit à support dans $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$. Cette solution élémentaire E_A est la distribution donnée par la fonction définie, pour tout $(t, x) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^N$, par la formule

$$E_A(t, x) = \frac{\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t)}{\sqrt{(2\pi t)^N |\det A|}} e^{-\frac{1}{2t}(A^{-1}x|x)}.$$

Exercice 4.

Déterminer une solution élémentaire de l'opérateur différentiel

$$\partial_t + \partial_x^3 \text{ sur } \mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x.$$

Chapitre 8

Equations de Laplace et de Poisson

L'objet de ce chapitre est l'étude des EDP de la forme

$$-\Delta f(x) = S(x), \quad x \in \Omega$$

où Ω est un ouvert de \mathbf{R}^N , f est l'inconnue, et S une fonction donnée.

Cette équation porte le nom d'équation de Poisson, ou de Laplace lorsque $S = 0$.

Afin de déterminer f de manière unique, on ajoute à cette équation diverses informations portant sur la solution f , comme par exemple le comportement de f à l'infini lorsque Ω est non borné, ou encore on suppose connue la restriction de f à la frontière de Ω .

8.1 Origines du modèle

Les équations de Laplace et de Poisson interviennent dans de très nombreux contextes en mathématique et en physique. Nous allons rappeler comment cette équation intervient dans le contexte de l'électrostatique.

La loi de Coulomb nous apprend qu'étant données deux charges électriques immobiles q_0 et q placées dans le vide aux points $x_0 \neq x \in \mathbf{R}^3$, une force électrique

$$F = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x_0}{|x - x_0|^3}$$

s'exerce alors sur la charge q du fait de la présence de la charge q_0 — une force opposée s'exerçant par réaction sur la charge q_0 en raison de la présence de la charge q . La constante ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide. La formule ci-dessus montre que la force est répulsive lorsque q_0 et q sont de même signe — en effet, la force exercée sur la charge q est alors dirigée de x_0 vers x — et attractive dans le cas contraire — la force exercée sur la charge q étant alors dirigée de x vers x_0 .

Autrement dit, toute charge immobile q_0 placée au point $x_0 \in \mathbf{R}^3$ dans le vide crée en tout point $x \neq x_0$ un champ électrique $E(x)$ donné par la formule

$$E(x) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x_0}{|x - x_0|^3}, \quad x \in \mathbf{R}^3 \setminus \{x_0\},$$

et la force exercée par la charge q_0 sur la charge q est

$$F = qE.$$

La loi de Coulomb est vérifiée expérimentalement avec une grande précision, et elle constitue l'un des principes fondamentaux de la physique.

Gauss a donné de cette loi l'interprétation géométrique suivante : le flux du champ électrique E créé par une charge q_0 à travers la frontière d'un ouvert Ω à bord de classe C^1 de \mathbf{R}^3 contenant q_0 vaut q_0/ϵ_0 . Ceci s'écrit

$$\int_{\partial\Omega} E(x) \cdot n_x d\sigma(x) = \frac{1}{\epsilon_0} q_0, \quad \text{pour tout } \Omega \subset \mathbf{R}^3 \text{ contenant la charge } q_0,$$

où n_x est le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ au point x dirigé vers l'extérieur de Ω , et où $d\sigma$ est l'élément de surface sur $\partial\Omega$.

Manifestement, le champ électrique créé par un système de charges est la superposition des champs électriques créés par chacune de ces charges. Ceci permet d'affirmer que le flux à travers $\partial\Omega$ du champ électrique créé par une densité de charges ρ vérifie

$$\int_{\partial\Omega} E(x) \cdot n_x d\sigma(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho(x) dx, \quad \text{pour tout ouvert } \Omega \subset \mathbf{R}^3 \text{ à bord } C^1.$$

Supposons maintenant que E est de classe au moins C^1 et que ρ est au moins continue sur \mathbf{R}^3 . Appliquant la formule de Green (Théorème 3.5.4) à l'intégrale de surface au membre de gauche de cette égalité, on trouve que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} E(x) dx = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho(x) dx, \quad \text{pour tout ouvert } \Omega \subset \mathbf{R}^3 \text{ à bord } C^1.$$

Ainsi la fonction continue

$$f = \operatorname{div} E - \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

vérifie

$$\int_{\Omega} f(x) dx = 0 \quad \text{pour tout ouvert } \Omega \subset \mathbf{R}^3 \text{ à bord } C^1.$$

On en déduit que f est nécessairement identiquement nulle sur \mathbf{R}^3 , c'est-à-dire que le champ électrique E vérifie l'équation de Gauss

$$\epsilon_0 \operatorname{div} E = \rho.$$

Un autre principe important de l'électrostatique est l'existence d'un potentiel scalaire électrostatique. On voit sur la formule de Coulomb donnant le champ électrostatique créé par une charge immobile q_0 au point $x_0 \in \mathbf{R}^3$ que

$$E(x) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x_0}{|x - x_0|^3} = -\nabla_x \left(\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x - x_0|} \right), \quad x \in \mathbf{R}^3 \setminus \{x_0\}.$$

Comme le champ électrique créé par un système de charges est la somme des champs élémentaires créés par chaque charge, il est naturel de postuler qu'il en va de même pour le potentiel créé par un système de charges. Il existe donc une fonction $x \mapsto V(x)$ à valeurs scalaires (réelles) telle que

$$E = -\nabla V.$$

Éliminant le champ E entre cette égalité et l'équation de Gauss, on trouve finalement que

$$-\epsilon_0 \Delta V(x) = \rho(x), \quad x \in \mathbf{R}^3.$$

Ceci est l'équation de Poisson qui gouverne le potentiel électrostatique V créé par une densité de charges ρ .

Lorsque le problème est posé dans tout l'espace euclidien \mathbf{R}^3 , il n'y a manifestement pas unicité de la solution : en effet, si V est une solution de l'équation de Poisson ci-dessus, $V + \text{Const.}$ en est aussi solution. D'ailleurs

$$-\nabla(V + \text{Const.}) = -\nabla V$$

de sorte que les potentiels V et $V + \text{Const.}$ produisent le même champ électrique, et donc la même force électrique — qui est en fait la quantité observée. On ajoute donc à l'équation ci-dessus la condition de normalisation

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = 0.$$

Il est donc naturel de se demander si l'équation de Poisson vérifiée par V et la condition de normalisation déterminent le potentiel V de façon unique à partir de la densité de charges ρ .

On peut aussi considérer que les charges sont enfermées dans une enceinte délimitant un domaine Ω de \mathbf{R}^3 , enceinte dont la surface $\partial\Omega$ est portée à un potentiel V_b : dans ce cas, il faut ajouter à l'équation de Poisson vérifiée par V la "condition aux limites de Dirichlet"

$$V|_{\partial\Omega} = V_b.$$

Dans ce cas, on cherchera si l'équation de Poisson vérifiée par le potentiel V dans le domaine Ω et la condition de Dirichlet pour V sur $\partial\Omega$ déterminent à nouveau V de façon unique.

Les équations de Laplace ou de Poisson interviennent aussi dans bien d'autres domaines de la physique (en thermique, en neutronique, c'est-à-dire pour calculer la diffusion des neutrons dans un cœur de réacteur nucléaire...)

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment les outils de calcul que nous avons développés jusqu'ici sur les distributions permettent de répondre très simplement aux questions posées ci-dessus.

8.2 Equation de Laplace et fonctions harmoniques

Commençons par étudier le noyau de l'opérateur laplacien vu comme application linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 . Ceci intervient naturellement dans la question de l'unicité pour l'équation de Poisson.

Soit Ω ouvert de \mathbf{R}^N .

Définition 8.2.1 (Fonctions harmoniques) Une fonction f de classe C^2 sur Ω et à valeurs réelles ou complexes est dite harmonique dans Ω si

$$\Delta f(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Commençons par donner quelques exemples de fonctions harmoniques.

En dimension d'espace $N = 1$, la notion de fonction harmonique est sans intérêt : les fonctions harmoniques sur un intervalle de \mathbf{R} sont les restrictions à cet intervalle de fonctions affines, c'est-à-dire de fonctions de la forme

$$f(x) = ax + b.$$

Un autre cas particulier, plus intéressant, est celui de la dimension d'espace $N = 2$. Identifions \mathbf{R}^2 à \mathbf{C} par $(x, y) \mapsto z = x + iy$. Soit $f \in C^1(\Omega, \mathbf{C})$; on définit $\partial_z f$ et $\partial_{\bar{z}} f$ en écrivant que

$$df = \partial_x f dx + \partial_y f dy = \partial_z f dz + \partial_{\bar{z}} f d\bar{z},$$

avec

$$dz = dx + idy \text{ et } d\bar{z} = dx - idy.$$

On trouve alors que

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \text{ et } \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y).$$

Notation : Il est d'usage de noter

$$\bar{\partial} f = \partial_{\bar{z}} f.$$

Rappelons que $f \in C^1(\Omega, \mathbf{C})$ est holomorphe sur Ω si et seulement si

$$\bar{\partial} f = 0 \quad \text{sur } \Omega;$$

(cf. [6], Remarque V.1.14, ou [9], chapitre X, Définition 2.3.1). En posant $u = \Re(f)$ et $v = \Im(f)$, on voit que cette relation est équivalente au système des relations de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \partial_y v, \\ \partial_y u &= -\partial_x v, \end{aligned}$$

de sorte qu'on appelle également "équation de Cauchy-Riemann" la relation

$$\bar{\partial} f = 0,$$

et "opérateur de Cauchy-Riemann" l'opérateur différentiel

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y).$$

Proposition 8.2.2 (Fonctions harmoniques / fonctions holomorphes)

Toute fonction holomorphe sur un ouvert Ω de \mathbf{C} est harmonique dans Ω . En particulier, si f est une fonction holomorphe dans Ω , alors les fonctions $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont harmoniques dans Ω .

Démonstration. Soit f holomorphe sur Ω ; elle est donc développable en série entière en tout point de Ω et donc, en particulier, de classe C^∞ sur Ω .

On en déduit, d'après le lemme de Schwarz (Lemme 1.1.1), que

$$\partial_x(\partial_y f) = \partial_y(\partial_x f) \text{ sur } \Omega.$$

Comme f est holomorphe sur Ω , elle est solution de l'équation de Cauchy-Riemann, de sorte que

$$\begin{aligned} 0 = \partial_z(0) &= \partial_z(\partial_z f) = \frac{1}{4}(\partial_{xx} f + i\partial_x(\partial_y f) - i\partial_y(\partial_x f) + \partial_{yy} f) \\ &= \frac{1}{4}(\partial_{xx} f + \partial_{yy} f) = \frac{1}{4}\Delta f \text{ sur } \Omega. \end{aligned}$$

Enfin, comme le laplacien Δ est un opérateur différentiel linéaire à coefficients réels,

$$\Re(\Delta f) = \Delta(\Re f) \text{ et } \Im(\Delta f) = \Delta(\Im f)$$

de sorte que si f est une fonction harmonique à valeurs complexes dans Ω , ses parties réelle et imaginaire sont également harmoniques dans Ω . ■

Cette proposition permet de voir sans aucun calcul que les fonctions

$$(x, y) \mapsto e^x \cos y \text{ ou } (x, y) \mapsto e^x \sin y$$

sont harmoniques dans \mathbf{R}^2 , puisqu'il s'agit respectivement des parties réelle et imaginaire de la fonction

$$z \mapsto e^z$$

qui est holomorphe sur \mathbf{C} .

Il existe donc beaucoup de fonctions harmoniques en dimension ≥ 2 et ce ne sont pas toutes des fonctions polynômiales.

Revenons au cas général de fonctions harmoniques dans un ouvert Ω de \mathbf{R}^N avec $N \geq 1$ quelconque. Nous allons établir une propriété qui joue, pour les fonctions harmoniques, un rôle analogue à celui de la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes.

Théorème 8.2.3 (Propriété de la moyenne) Soient Ω un ouvert de \mathbf{R}^N et f une fonction de classe C^2 sur Ω à valeurs réelles ou complexes. Les propriétés (a) et (b) ci-dessous sont équivalentes :

- (a) la fonction f est harmonique dans Ω ,
 (b) pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $r > 0$ tel que $\overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$,

$$f(x_0) = \frac{1}{|\mathbf{S}^{N-1}|} \int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0 + r\omega) d\sigma(\omega),$$

où $d\sigma$ désigne l'élément de surface sur la sphère unité \mathbf{S}^{N-1} , et où

$$|\mathbf{S}^{N-1}| = \int_{\mathbf{S}^{N-1}} d\sigma = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}$$

est la surface de \mathbf{S}^{N-1} (cf. section 6.4).

Lorsque $N = 1$ et que Ω est un intervalle de \mathbf{R} , le résultat est évident. En effet, la propriété (b) devient

(b') pour tous $a, b \in \Omega$, l'on a

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Cette propriété est évidemment vérifiée par toute fonction affine; or on a déjà vu que les fonctions harmoniques sur un intervalle de \mathbf{R} sont précisément les restrictions à cet intervalle de fonctions affines sur \mathbf{R} : on en déduit que (a) implique (b') dans le cas particulier où $N = 1$.

Réciproquement, étant donné $x_0 \in \Omega$, on choisit $\epsilon > 0$ tel que le segment $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subset \Omega$. Puis, pour $0 < h \leq \epsilon$, on écrit (b') avec $a = x_0 - h$ et $b = x_0 + h$ sous la forme

$$\frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = 0.$$

Comme on a supposé que f est de classe C^2 sur Ω ,

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0),$$

ce qui montre que f est harmonique dans Ω , puisque x_0 est un point quelconque de Ω .

Donnons maintenant la démonstration de la propriété de la moyenne dans le cas général $N \geq 2$.

Démonstration. Pour $x_0 \in \Omega$, notons $\rho(x_0) = \text{dist}(x_0, \partial\Omega) > 0$. Pour tout $R \in]0, \rho(x_0)[$, on a $\overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$, et la fonction

$$[0, R] \times \mathbf{S}^{N-1} \ni (r, \omega) \mapsto f(x_0 + r\omega)$$

est de classe C^2 .

Appliquant alors le théorème de dérivation sous le signe somme (voir note 3 p. 12 du chapitre 1) sur le compact $[0, R] \times \mathbf{S}^{N-1}$, on trouve que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0 + r\omega) d\sigma(\omega) &= \int_{\mathbf{S}^{N-1}} \nabla f(x_0 + r\omega) \cdot \omega d\sigma(\omega) \\ &= \frac{1}{r^{N-1}} \int_{\partial B(x_0, r)} \nabla f(y) \cdot \nu(y) dS(y), \end{aligned}$$

la deuxième égalité découlant du changement de variables $x_0 + r\omega = y$. Dans cette formule $\nu(y)$ désigne le vecteur unitaire normal à $\partial B(x_0, r)$ au point y pointant vers l'extérieur de $B(x_0, y)$, et dS l'élément de surface sur la sphère $\partial B(x_0, r)$.

Par hypothèse, f est de classe C^2 au voisinage de $\overline{B(x_0, r)}$; en appliquant la formule de Green (Théorème 3.5.4) à la dernière intégrale ci-dessus, on trouve que, pour tout $r \in]0, \rho(x_0)[$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0 + r\omega) d\sigma(\omega) &= \frac{1}{r^{N-1}} \int_{B(x_0, r)} \operatorname{div}(\nabla f)(x) dx \\ &= \frac{1}{r^{N-1}} \int_{B(x_0, r)} \Delta f(x) dx. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que (a) implique (b). En effet, le calcul ci-dessus montre que, comme $\Delta f = 0$ sur Ω , la fonction

$$r \mapsto \int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0 + r\omega) d\sigma(\omega)$$

est constante sur l'intervalle $[0, \rho(x_0)[$: elle est donc égale identiquement à sa valeur en $r = 0$:

$$\int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0 + r\omega) d\sigma(\omega) = f(x_0) \sigma(\mathbf{S}^{N-1}) \text{ pour tout } 0 \leq r < \rho(x_0)$$

ce qui est précisément la propriété (b).

Réciproquement, si f vérifie la propriété (b), la fonction

$$r \mapsto \int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0 + r\omega) d\sigma(\omega)$$

est constante sur l'intervalle $[0, \rho(x_0)[$, de sorte que

$$\int_{B(x_0, r)} \Delta f(x) dx = r^{N-1} \frac{d}{dr} \int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0 + r\omega) d\sigma(\omega) = 0$$

pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $r \in]0, \rho(x_0)[$. La fonction Δf continue sur Ω étant d'intégrale nulle sur toute boule ouverte contenue dans Ω , on en déduit que $\Delta f = 0$ sur Ω , c'est-à-dire que f est harmonique dans Ω . ■

En intégrant par rapport à r les deux membres de l'égalité traduisant la propriété de la moyenne, on montre aisément qu'en réalité, la valeur d'une fonction harmonique en un point est égale à *n'importe quelle moyenne radiale* de cette fonction autour du point considéré — et pas seulement à la moyenne de la fonction sur une sphère centrée au point considéré.

Corollaire 8.2.4 Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et $f \in C^2(\Omega)$, harmonique dans Ω . Soient $x_0 \in \Omega$ et $\rho(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega) > 0$. Alors, pour tout $R \in]0, \rho(x_0)[$ et toute fonction radiale $x \mapsto \psi(|x|)$ appartenant à $L^1(B(0, R))$, on a

$$f(x_0) \int_{B(0, R)} \psi(|y|) dy = \int_{B(0, R)} f(x_0 + y) \psi(|y|) dy.$$

Démonstration. La fonction harmonique f vérifie la propriété de la moyenne

$$f(x_0)|\mathbf{S}^{N-1}| = \int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0 + r\omega) d\sigma(\omega), \text{ pour tout } r \in [0, \rho(x_0)[.$$

Multiplions chaque membre de cette égalité par $\psi(r)r^{N-1}$ et intégrons en $r \in [0, R]$: on trouve que

$$f(x_0)|\mathbf{S}^{N-1}| \int_0^R \psi(r)r^{N-1} dr = \int_0^R \left(\int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0 + r\omega) d\sigma(\omega) \right) \psi(r)r^{N-1} dr.$$

En appliquant le théorème de Fubini, on commence par montrer que

$$\begin{aligned} & \int_0^R \left(\int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0 + r\omega) d\sigma(\omega) \right) \psi(r)r^{N-1} dr \\ &= \int_{]0, R[\times \mathbf{S}^{N-1}} f(x_0 + r\omega) \psi(r)r^{N-1} dr d\sigma(\omega). \end{aligned}$$

Puis on effectue le changement de variables faisant passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques $r\omega = y$:

$$\begin{aligned} f(x_0) \int_{B(0, R)} \psi(|y|) dy &= f(x_0)|\mathbf{S}^{N-1}| \int_0^R \psi(r)r^{N-1} dr \\ &= \int_{]0, R[\times \mathbf{S}^{N-1}} f(x_0 + r\omega) \psi(r)r^{N-1} dr d\sigma(\omega) \\ &= \int_{B(0, R)} f(x_0 + y) \psi(|y|) dy, \end{aligned}$$

ce qui est précisément la relation annoncée. ■

Voici une conséquence immédiate de la propriété de la moyenne

Corollaire 8.2.5 (Cas particulier du théorème de Liouville) *Toute fonction harmonique sur \mathbf{R}^N tendant vers 0 à l'infini est identiquement nulle sur \mathbf{R}^N .*

C'est une propriété "de rigidité" des fonctions harmoniques, analogue au théorème de Liouville pour les fonctions holomorphes¹.

Démonstration. Soient $f \in C^2(\mathbf{R}^N)$ harmonique sur \mathbf{R}^N et un point $x_0 \in \mathbf{R}^N$ quelconque. D'après la propriété de la moyenne

$$f(x_0) = \frac{1}{|\mathbf{S}^{N-1}|} \int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0 + r\omega) d\sigma(\omega) \text{ pour tout } r > 0.$$

D'autre part, dire que $f(x) \rightarrow 0$ lorsque $|x| \rightarrow 0^+$, c'est dire que

pour tout $\epsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que $|f(x)| < \epsilon$ lorsque $|x| > R$.

1. **Théorème de Liouville.** Toute fonction holomorphe sur \mathbf{C} et bornée est constante. Cf. [6], Corollaire V.2.11, ou [9], chapitre X, Proposition 6.1.1.

En particulier,

$$|f(x_0 + r\omega)| < \epsilon \text{ pour tout } \omega \in \mathbf{S}^{N-1} \text{ et } r > R + |x_0|.$$

Autrement dit

$$f(x_0 + r\omega) \rightarrow 0 \text{ uniformément en } \omega \in \mathbf{S}^{N-1} \text{ lorsque } r \rightarrow +\infty.$$

Donc, pour $r \rightarrow +\infty$

$$|f(x_0)| \leq \frac{1}{|\mathbf{S}^{N-1}|} \int_{\mathbf{S}^{N-1}} |f(x_0 + r\omega)| d\sigma(\omega) \leq \sup_{|\omega|=1} |f(x_0 + r\omega)| \rightarrow 0.$$

Par conséquent, $f(x_0) = 0$. Comme $x_0 \in \mathbf{R}^N$ est arbitraire, ceci montre que f est identiquement nulle sur \mathbf{R}^N . ■

Une autre conséquence extrêmement importante de la propriété de la moyenne est le fait que les fonctions harmoniques vérifient le principe du maximum, de même que les (modules de) fonctions holomorphes.

Théorème 8.2.6 (Principe du maximum fort) *Soit Ω un ouvert connexe de \mathbf{R}^N et f une fonction de classe C^2 dans Ω , harmonique et à valeurs réelles. S'il existe $a \in \Omega$ tel que*

$$f(x) \leq f(a) \text{ pour tout } x \in \Omega,$$

alors la fonction f est constante sur Ω .

Démonstration. Posons

$$A = f^{-1}(\{f(a)\}) = \{x \in \Omega \mid f(x) = f(a)\}.$$

Tout d'abord, A est non vide puisque $a \in A$ par définition.

D'autre part, A est fermé dans Ω comme image réciproque du fermé $\{f(a)\}$ de \mathbf{R} par l'application continue $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$.

Montrons que A est ouvert dans Ω . Soit donc $x_0 \in A$; on rappelle la notation $\rho(x_0) = \text{dist}(x_0, \partial\Omega) > 0$. Nous allons montrer que

$$B(x_0, \rho(x_0)) \subset A.$$

En effet, d'après la propriété de la moyenne

$$f(a) = f(x_0) = \frac{1}{|\mathbf{S}^{N-1}|} \int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0 + r\omega) d\sigma(\omega)$$

ou encore, de façon équivalente,

$$\frac{1}{|\mathbf{S}^{N-1}|} \int_{\mathbf{S}^{N-1}} (f(a) - f(x_0 + r\omega)) d\sigma(\omega) = 0$$

pour tout $r \in]0, \rho(x_0)[$. Or, par hypothèse, l'intégrande dans la formule ci-dessus est une fonction continue et positive ou nulle sur \mathbf{S}^{N-1} : comme son intégrale est nulle, il s'ensuit que l'intégrande est identiquement nul. Donc

$$f(x_0 + r\omega) = f(a) \text{ pour tout } \omega \in \mathbf{R}^N \text{ tel que } |\omega| = 1,$$

et comme cette égalité vaut pour tout $r \in [0, \rho(x_0)[$, on en déduit que

$$f(x) = f(a) \text{ pour tout } x \in B(x_0, \rho(x_0)),$$

ce qui signifie bien que $B(x_0, \rho(x_0)) \subset A$ comme annoncé.

Donc A est une partie non vide ouverte et fermée de Ω qui est connexe : par conséquent $A = \Omega$. ■

Revenons à la propriété de la moyenne : on a vu qu'elle caractérise, parmi les fonctions de classe C^2 , celles qui sont harmoniques. Or, pour écrire la propriété de la moyenne pour une fonction f définie sur un ouvert Ω de \mathbf{R}^N , il suffit que la fonction f soit continue sur Ω .

Ceci suggère donc, comme on l'a déjà fait pour l'équation de transport, d'étendre la propriété d'harmonicité à des fonctions qui ne sont pas de classe C^2 . Le cadre le plus général pour ce faire est évidemment la théorie des distributions.

Définition 8.2.7 (Distributions harmoniques) Soit Ω ouvert de \mathbf{R}^N et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dira que T est une distribution harmonique dans Ω si la distribution

$$\Delta T = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

De façon remarquable, cette généralisation est toutefois sans objet, comme le montre l'énoncé suivant.

Théorème 8.2.8 (Régularité des distributions harmoniques) Toute distribution harmonique dans un ouvert Ω de \mathbf{R}^N est une fonction de classe C^∞ sur Ω .

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que

$$\Delta T = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Soient $x_0 \in \Omega$, et $R > 0$ tel que $B(x_0, 2R) \subset \Omega$. Soit alors $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ vérifiant

$$0 \leq \phi \leq 1, \quad \text{supp}(\phi) \subset B(x_0, \frac{3}{2}R), \quad \phi(x) = 1 \text{ pour } |x| \leq R.$$

(L'existence d'une telle fonction ϕ découle du Lemme 1.4.1.) On va montrer que

$$T \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } B(x_0, \frac{1}{2}R).$$

Observons tout d'abord que $\phi T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ vérifie

$$\Delta(\phi T) = 2\nabla\phi \cdot \nabla T + (\Delta\phi)T;$$

comme $\nabla\phi$ est à support dans $\{x \in \mathbf{R}^N \mid R \leq |x| \leq \frac{3}{2}R\}$ on en déduit que

ϕT est une distribution harmonique dans $B(x_0, R)$.

On notera encore ϕT le prolongement de $\phi T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ par 0 en dehors de Ω (cf. Définition 4.1.6).

Soit $(\zeta_\epsilon)_{\epsilon>0}$ suite régularisante telle que

$$0 \leq \zeta_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N), \quad \text{supp}(\zeta_\epsilon) \subset B(0, \epsilon), \quad \int_{\mathbf{R}^N} \zeta_\epsilon(x) dx = 1.$$

Alors

$$\Delta(\zeta_\epsilon \star (\phi T)) = \zeta_\epsilon \star \Delta(\phi T)$$

et comme ϕT est une distribution harmonique dans $B(x_0, R)$, on déduit de la propriété de majoration du support d'un produit de convolution (cf. Proposition 4.2.2) que

$$\begin{aligned} \text{supp}(\Delta(\zeta_\epsilon \star (\phi T))) &\subset \text{supp}(\zeta_\epsilon) + \text{supp}(\Delta(\phi T)) \\ &\subset B(0, \epsilon) + (\mathbf{R}^N \setminus B(0, R)) = \mathbf{R}^N \setminus B(0, R - \epsilon) \end{aligned}$$

Donc

$$\zeta_\epsilon \star (\phi T) \in C^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ est harmonique dans } B(0, R - \epsilon).$$

Supposons dans tout ce qui suit que $0 < \epsilon < \frac{1}{4}R$, et considérons la fonction radiale $\Psi(x) = \psi(|x|^2)$ à support dans $B(0, \frac{1}{4}R)$ avec $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}_+)$ et

$$\int_{\mathbf{R}^N} \psi(|z|^2) dz = 1.$$

D'après la conséquence de la propriété de la moyenne énoncée au Corollaire 8.2.4, appliquée ici à l'ouvert $B(x_0, \frac{3}{4}R)$ sur lequel $\zeta_\epsilon \star (\phi T)$ est harmonique, on trouve que

$$\zeta_\epsilon \star (\phi T)(x) = \int_{B(0, \frac{1}{4}R)} \zeta_\epsilon \star (\phi T)(x - y) \psi(|y|^2) dy = \Psi \star (\zeta_\epsilon \star (\phi T))(x)$$

pour tout $x \in B(x_0, \frac{1}{2}R)$.

Or, d'après le Théorème 4.2.5

$$\zeta_\epsilon \star (\phi T) \rightarrow \phi T \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0,$$

d'où on déduit, en appliquant la Proposition 4.2.7, que

$\Psi \star (\zeta_\epsilon \star (\phi T)) \rightarrow \Psi \star (\phi T)$ uniformément sur tout compact de \mathbf{R}^N quand $\epsilon \rightarrow 0$.

Comme

$$\zeta_\epsilon \star (\phi T) \Big|_{B(x_0, \frac{1}{2}R)} = \Psi \star (\zeta_\epsilon \star (\phi T)) \Big|_{B(x_0, \frac{1}{2}R)}$$

au sens des distributions pour tout $\epsilon \in]0, \frac{1}{4}R[$, on trouve, en faisant $\epsilon \rightarrow 0^+$ dans chaque membre de l'égalité ci-dessus, que

$$\phi T|_{B(x_0, \frac{1}{2}R)} = \Psi \star (\phi T)|_{B(x_0, \frac{1}{2}R)}.$$

Or le membre de droite est une fonction de classe C^∞ , de sorte que

$$T|_{B(x_0, \frac{1}{2}R)} = \phi T|_{B(x_0, \frac{1}{2}R)}$$

est de classe C^∞ sur $B(x_0, \frac{1}{2}R)$.

Comme ceci vaut pour tout $x_0 \in \Omega$, on en conclut que T est une fonction de classe C^∞ sur Ω . ■

Le théorème précédent est très loin d'être optimal. En effet, on peut montrer que toute distribution harmonique dans un ouvert de \mathbf{R}^N est une fonction analytique dans cet ouvert — c'est-à-dire qu'elle est la somme de sa série de Taylor au voisinage de tout point de l'ouvert.

Voici, dans le cas particulier de la dimension 2, un énoncé analogue à celui-ci.

Définition 8.2.9 (Distributions holomorphes) *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$. On dira qu'une distribution (à valeurs complexes) $T \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbf{C})$ est holomorphe sur Ω si et seulement si elle annule l'opérateur de Cauchy-Riemann*

$$\bar{\partial}T := \partial_{\bar{z}}T = \frac{1}{2}(\partial_x T + i\partial_y T) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Comme dans le cas des distributions harmoniques, cette définition est sans objet, grâce à la remarque suivante, qui est une conséquence immédiate du théorème de régularité des distributions harmoniques (Théorème 8.2.8.)

Corollaire 8.2.10 *Soit Ω ouvert de \mathbf{C} . Toute distribution holomorphe sur Ω est une fonction holomorphe sur Ω*

Démonstration. Soit T distribution holomorphe sur Ω : alors

$$\Delta T = 4\partial_z \partial_{\bar{z}} T = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Autrement dit, T est une distribution harmonique dans Ω . D'après le Théorème 8.2.8, la distribution T est donc une fonction de classe C^∞ sur Ω .

Or cette fonction de classe C^∞ vérifie l'équation de Cauchy-Riemann

$$\bar{\partial}T = 0 \text{ sur } \Omega;$$

on en déduit que T est holomorphe sur Ω — cf. [6], Remarque V.1.14 ou [9], chapitre X, Définition, 2.3.1. ■

Voici un résultat également très simple à démontrer, et qui va dans le même sens.

Théorème 8.2.11 (Distributions tempérées harmoniques) *Toute distribution tempérée harmonique sur \mathbf{R}^N est une fonction polynômiale.*

Avant de donner la démonstration de ce résultat, soulignons qu'il est essentiel d'y supposer que les distributions en question sont tempérées. En effet, nous avons déjà rencontré, au début de cette section, les exemples des fonctions définies par

$$(x, y) \mapsto e^x \cos y \text{ ou } (x, y) \mapsto e^x \sin y$$

qui sont harmoniques dans \mathbf{R}^2 comme parties réelle et imaginaire de la fonction $z \mapsto e^z$ holomorphe sur \mathbf{C} , mais ne sont bien sûr pas polynômiales.

Démonstration. Soit donc $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$\Delta T = 0 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N).$$

Notons \hat{T} la transformée de Fourier de T ; d'après la Proposition 5.4.3 (a), on a

$$\widehat{\Delta T} = -|\xi|^2 \hat{T} = 0 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N).$$

Par conséquent

\hat{T} est une distribution à support dans $\{0\}$.

D'après le Théorème 4.1.7, la distribution \hat{T} est donc une combinaison linéaire de la masse de Dirac en 0 et de ses dérivées : il existe $m \in \mathbf{N}$ et des nombres $a_\alpha \in \mathbf{C}$ pour $|\alpha| \leq m$ tels que

$$\hat{T} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0.$$

Or on sait (voir Exemple 5.4.6) que

$$\hat{\delta}_0 = 1 \text{ et que } \widehat{\partial^\alpha \delta_0} = (i\xi)^\alpha,$$

de sorte que la relation ci-dessus portant sur \hat{T} et le théorème d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ (Théorème 5.4.8) impliquent que

$$T = \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (-i\xi)^\alpha,$$

ce qui est précisément le résultat annoncé. ■

8.3 L'équation de Poisson dans l'espace euclidien

Rappelons le calcul des solutions élémentaires du laplacien au chapitre 7 (cf. Théorème 7.2.1) :

$$-\Delta E_N = \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N),$$

où

$$\begin{aligned} E_1(x) &= -\frac{1}{2}|x|, & x \in \mathbf{R}, \\ E_2(x) &= -\frac{1}{2\pi} \ln |x|, & x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}, \\ E_N(x) &= \frac{1}{c_N} \frac{1}{|x|^{N-2}}, & x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}, \quad N \geq 3, \end{aligned}$$

avec la notation

$$c_N = (N-2)|\mathbf{S}^{N-1}| = \frac{2\pi^{N/2}(N-2)}{\Gamma(\frac{N}{2})}, \quad N \geq 3.$$

(Pour la deuxième égalité ci-dessus, voir l'appendice du chapitre 3.)

Observons que, pour $N = 1$ et $N = 2$, les solutions élémentaires E_1 et E_2 du laplacien ne tendent pas vers 0 à l'infini, ce qui complique un peu le comportement des solutions de l'équation de Poisson dans le cas $N = 2$ (le cas $N = 1$ étant essentiellement trivial).

Afin d'éviter ces deux cas quelque peu exceptionnels, nous supposons dans la suite que $N \geq 3$.

Théorème 8.3.1 (Résolution de l'équation de Poisson) *Soient $N \geq 3$ entier, $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ tels que*

$$-\Delta T = S \text{ dans } \mathbf{R}^N.$$

Alors

- (a) T est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^N \setminus \text{supp}(S)$;
- (b) l'unique solution du problème

$$-\Delta T = S \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N), \text{ et } \lim_{|x| \rightarrow \infty} T(x) = 0$$

est

$$T = E_N \star S.$$

Démonstration. Pour ce qui est du point (a), observons que T est une distribution harmonique dans l'ouvert $\Omega = \mathbf{R}^N \setminus \text{supp}(S)$. D'après le Théorème 8.2.8 sur la régularité des distributions harmoniques, T est donc une fonction de classe C^∞ sur Ω .

Passons à la démonstration du point (b).

D'abord, comme S est une distribution à support compact dans \mathbf{R}^N et E_N une fonction localement intégrable, donc une distribution sur \mathbf{R}^N , le produit de convolution $E_N \star S$ est bien défini et on a, d'après le Théorème 4.4.6,

$$-\Delta(E_N \star S) = (-\Delta E_N) \star S = \delta_0 \star S = S \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N).$$

Montrons que $E_N \star S$ tend vers 0 à l'infini. Notons que ceci a bien un sens car, d'après le (a), la restriction de $E_N \star S$ à $\mathbf{R}^N \setminus \text{supp}(S)$ est une fonction de classe C^∞ .

Soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ une fonction vérifiant

$$\chi(x) = 1 \text{ si } |x| \leq 1, \quad \chi(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 2, \quad 0 \leq \chi \leq 1,$$

(prendre la fonction J de la section 1.2 du chapitre 1 avec $a = 1$ et $b = 4$) et posons

$$E_N = G_1 + G_2 \quad \text{où } G_1 = (1 - \chi)E_N \text{ et } G_2 = \chi E_N,$$

de sorte que

$$E_N \star S = G_1 \star S + G_2 \star S.$$

Soit $R > 0$ tel que

$$\text{supp}(S) \subset B(0, R);$$

la majoration du support du produit de convolution dans la Proposition 4.4.2 entraîne que

$$\text{supp}(G_2 \star S) \subset \text{supp}(G_2) + \text{supp}(S) = B(0, R + 1).$$

Ainsi

$$T = G_1 \star S \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N \setminus \overline{B}(0, R + 1)).$$

Remarquons que $G_1 \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$; ainsi $G_1 \star S$ est une fonction de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N . La propriété de continuité de la distribution à support compact S (cf. Proposition 4.1.5) s'écrit

$$\begin{aligned} |G_1 \star S(x)| &= |(S, G_1(x - \cdot))| \\ &\leq C \sup_{|\alpha| \leq m, |y| \leq R} |\partial^\alpha G_1(x - y)| \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^N, \end{aligned}$$

où m est l'ordre de la distribution à support compact S .

Ecrivons cette propriété pour $|x| > R' > R + 2$:

$$|G_1 \star S(x)| \leq C \sup_{|\alpha| \leq m, |y| \leq R} |\partial^\alpha G_1(x - y)| = C \sup_{|\alpha| \leq m, |y| \leq R} |\partial^\alpha E_N(x - y)|$$

car $\chi(x - y) = 0$ si $|x| > R'$ et $|y| \leq R$.

Or, comme E_N est une fonction homogène de degré $-(N - 2)$, la fonction $\partial^\alpha E_N$ est homogène de degré $-(N - 2) - |\alpha|$, de sorte que

$$|\partial^\alpha E_N(z)| \leq C_\alpha |z|^{-(N-2)-|\alpha|} \text{ pour tout } z \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}.$$

Donc

$$|G_1 \star S(x)| \leq \frac{C \sup_{|\alpha| \leq m} C_\alpha}{(R' - R)^{N-2+m}}, \quad |x| > R'.$$

On en déduit que

$$T(x) = G_1 \star S(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{N-2+m}}\right) \rightarrow 0 \quad \text{pour } |x| \rightarrow \infty,$$

où m est l'ordre de la distribution à support compact S .

Montrons enfin l'unicité de la solution.

Si T_1 et T_2 sont deux solutions du problème

$$-\Delta T = S \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} T(x) = 0,$$

alors $T_1 - T_2$ est une distribution harmonique sur \mathbf{R}^N , et donc une fonction de classe C^∞ harmonique d'après le Théorème 8.2.8. De plus, cette fonction harmonique $T_1 - T_2$ tend vers 0 à l'infini : d'après le cas particulier du théorème de Liouville (cf. Corollaire 8.2.5), $T_1 - T_2$ est identiquement nulle, de sorte que $T_1 = T_2$. ■

On a vu que les distributions harmoniques dans un ouvert de \mathbf{R}^N sont des fonctions de classe C^∞ dans cet ouvert.

Ce résultat remarquable se généralise comme suit :

Théorème 8.3.2 (Régularité locale et laplacien) *Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si la distribution ΔT est une fonction de classe C^∞ sur Ω , alors T est également une fonction de classe C^∞ sur Ω .*

Cette propriété ne se généralise pas à tout opérateur différentiel, même à coefficients constants.

Contre-exemple. Soient $v, w \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ tels que $v \perp w$. Pour toute fonction F de classe C^1 sur \mathbf{R} , on a

$$v \cdot \nabla F(w \cdot x) = (v \cdot w)F'(w \cdot x) = 0.$$

Par conséquent, le fait que

$$v \cdot \nabla f \in C^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ n'implique pas que } f \in C^\infty(\mathbf{R}^N).$$

Démonstration du Théorème 8.3.2.

Soient $x_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\overline{B(x_0, 2r)} \subset \Omega$. Soit $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes

$$\phi|_{B(x_0, \frac{3}{2}r)} = 1, \quad \text{supp}(\phi) \subset \overline{B(x_0, 2r)}, \quad 0 \leq \phi \leq 1.$$

La distribution $\phi T \in \mathcal{E}'(\Omega)$; en notant encore ϕT son prolongement par 0 à $\mathbf{R}^N \setminus \Omega$, on a, d'après la formule de Leibnitz

$$-\Delta(\phi T) = -\phi \Delta T - 2\nabla \phi \cdot \nabla T - (\Delta \phi)T \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N).$$

Posons

$$S_1 = -\phi \Delta T \text{ et } S_2 = -2\nabla \phi \cdot \nabla T - (\Delta \phi)T;$$

évidemment

$$S_1 \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ et } \text{supp}(S_2) \subset \overline{B(x_0, 2r)} \setminus B(x_0, \frac{3}{2}r).$$

Alors, comme ϕT est nulle pour $|x - x_0| > 2r$, le point (b) du Théorème 8.3.1 entraîne que

$$\phi T = T_1 + T_2, \quad \text{avec } T_1 = E_N \star S_1 \text{ et } T_2 = E_N \star S_2.$$

La distribution T_1 est une fonction de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N comme produit de convolution de la fonction localement intégrable E_N par la fonction S_1 appartenant à $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$.

Quant à la distribution T_2 c'est la solution du problème

$$-\Delta T_2 = S_2 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N), \quad \text{avec } \lim_{|x| \rightarrow \infty} T_2(x) = 0.$$

D'après le point (a) du Théorème 8.3.1, T_2 est donc une fonction de classe C^∞ sur $B(x_0, r) \subset \mathbf{R}^N \setminus \text{supp}(S_2)$.

On en déduit que $T|_{B(x_0, r)} = \phi T|_{B(x_0, r)}$ est une fonction de classe C^∞ . Comme ceci vaut pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $r > 0$ tel que $B(x_0, 2r) \subset \Omega$, c'est donc que T est une fonction de classe C^∞ sur Ω . ■

8.4 Problèmes aux limites pour le laplacien

Dans de très nombreux contextes physiques, il est naturel d'étudier les équations de Laplace ou de Poisson dans un ouvert Ω de \mathbf{R}^N . Dans ce cas, l'équation de Laplace de Poisson ne suffit pas à déterminer complètement la solution. On a besoin pour cela d'informations supplémentaires sur le comportement de la solution au bord de l'ouvert Ω . Ces informations supplémentaires portent le nom de "conditions aux limites". Elles jouent un rôle analogue à la condition de limite nulle à l'infini du (b) dans le Théorème 8.3.1. Nous ne dirons que quelques mots de ce type de problèmes, pour l'étude desquels on renvoie le lecteur au chapitre 5 de [1].

On supposera dans tout ce qui suit que Ω est un ouvert de \mathbf{R}^N à bord de classe C^1 .

Voici deux exemples classiques de problèmes aux limites pour les équations de Laplace ou de Poisson.

Le premier exemple est

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, & \text{sur } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= g. \end{aligned}$$

L'inconnue est ici la fonction u , tandis que les données sont les fonctions f et g . Ce problème porte le nom de "problème de Dirichlet" pour le laplacien, et la condition $u|_{\partial\Omega} = g$ au bord de Ω s'appelle "condition de Dirichlet".

Le second exemple est

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} &= g, \end{aligned}$$

où, de nouveau, les fonctions f et g sont données, tandis que la fonction u est l'inconnue. La notation

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) \text{ désigne } \nabla u(x) \cdot n_x$$

où n_x est le vecteur normal unitaire au point x de $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω . Ce second problème aux limites porte le nom de "problème de Neuman", et la condition au bord $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = g$ s'appelle "condition de Neuman".

Dans le contexte de l'électrostatique où l'inconnue est le potentiel électrostatique créé par une densité de charges proportionnelle à f , la condition de Dirichlet consiste à postuler que le bord de Ω est porté à un potentiel imposé — typiquement, lorsque $g = \text{Const.}$, le bord de Ω est une équipotentielle.

La condition de Neuman homogène exprime le fait que le champ électrique au bord de Ω est tangentiel à $\partial\Omega$: ceci se produit dans le cas où la surface bordant le domaine Ω est un conducteur parfait.

Pour ces problèmes, on ne dispose pas, en général, de formule complètement explicite donnant la solution u en fonction de f et de g .

Une approche possible consiste à ramener les problèmes de Dirichlet et de Neuman à des problèmes de minimisation pour des fonctionnelles appropriées sur des espaces fonctionnels bien choisis.

Pour le problème de Dirichlet, on suppose que l'on connaît une fonction $G \in C^2(\overline{\Omega})$ telle que

$$g = G|_{\partial\Omega}.$$

En posant $v = u - G$, le problème de Dirichlet se réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} -\Delta v &= f + \Delta G && \text{dans } \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Notons $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ (cf. section 5.7 du chapitre 5) défini par

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_{x_k} u \in L^2(\Omega), \quad k = 1, \dots, N\}.$$

Ainsi $H_0^1(\Omega)$ est le sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ des fonctions de trace nulle sur $\partial\Omega$ — voir Théorème 5.7.6. Alors, l'unique solution v du problème de Dirichlet ci-dessus réalise

$$\inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx - \int_{\Omega} v(x)(f(x) + \Delta G(x)) dx \right).$$

Voir [1], chapitre 5.2, pour une étude détaillée de ce problème.

Pour le problème de Neuman, observons tout d'abord que, s'il en existe une solution $u \in C^2(\overline{\Omega})$, alors, d'après la formule de Green (Théorème 3.5.4), on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) dx &= \int_{\Omega} \Delta u(x) dx = \int_{\Omega} \text{div}(\nabla u)(x) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \nabla u(x) \cdot n_x d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0 \end{aligned}$$

où $d\sigma$ est l'élément de surface sur $\partial\Omega$, et n_x le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ au point x dirigé vers l'extérieur de Ω .

Si tel est le cas, le problème de Neuman se ramène à l'étude du problème de minimisation

$$\inf_{u \in H^1(\Omega)} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \int_{\Omega} u(x)f(x)dx \right).$$

— voir [1], chapitre 5.2.

Ce qui est remarquable dans cette problématique est que la fonctionnelle à minimiser est la même dans les deux cas (lorsque $g = 0$, c'est-à-dire $G = 0$ dans le cas du problème de Dirichlet). La distinction entre la condition de Dirichlet et la condition de Neuman vient du domaine sur lequel on cherche à minimiser cette fonctionnelle : il s'agit de $H^1(\Omega)$ dans le cas de la condition de Neuman, et de son sous-espace fermé $H_0^1(\Omega)$ dans le cas de la condition de Dirichlet.

8.5 Exercices

Exercice 1.

a) Notons \mathbf{R}_+^N le demi-espace $\{x \in \mathbf{R}^N \mid x_N > 0\}$. Soit $f \in C(\overline{\mathbf{R}_+^N})$ harmonique sur \mathbf{R}_+^N . Posons

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x_N > 0, \\ -f(x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N) & \text{si } x_N < 0. \end{cases}$$

Montrer que F définit une distribution sur \mathbf{R}^N et calculer ΔF au sens des distributions dans \mathbf{R}^N .

b) On suppose ici que $N \geq 3$. Soit $g \in C_c(\mathbf{R}^{N-1})$; en se basant sur ce qui précède, énoncer et démontrer un résultat d'existence et unicité pour le problème de Dirichlet dans le demi-espace

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}_+^N, \\ f|_{x_N=0} &= g. \end{aligned}$$

On précisera dans quel sens la condition de Dirichlet

$$f|_{x_N=0} = g$$

est vérifiée par la solution f .

Exercice 2.

a) Calculer, pour tout $r \in [0, 1[$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$

$$P_r(\theta) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} e^{in\theta};$$

montrer que P_r est de signe constant, que l'on précisera. (La fonction P_r s'appelle "noyau de Poisson du disque unité".)

b) A toute fonction $f \in L^1([-\pi, \pi])$, on associe la fonction F définie sur le disque unité ouvert U de \mathbf{R}^2 par la formule

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt.$$

Montrer que $F \in C^2(U)$ et que

$$\Delta F = 0 \text{ dans } U.$$

(Indication : on pourra soit effectuer un calcul direct, soit faire intervenir une fonction holomorphe sur U bien choisie.)

c) Etudier le comportement de $F(re^{i\theta})$ pour $r \rightarrow 1^-$.

d) Même question lorsque f est continue sur \mathbf{R} et 2π -périodique.

e) Résumer les résultats ci-dessus en un énoncé portant sur la résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité ouvert U de \mathbf{R}^2 :

$$\begin{aligned} \Delta F(x) &= 0 \quad \text{pour tout } x \in U, \\ F|_{\partial U} &= f; \end{aligned}$$

(on précisera en quel sens la condition de Dirichlet

$$F|_{\partial U} = f$$

est satisfaite.)

Exercice 3.

a) Soit (K, d) , espace métrique connexe et compact. Montrer que K est bien enchaîné, c'est-à-dire que, pour tout $r > 0$, et tout couple $(a, b) \in K \times K$, il existe une suite finie de points de K vérifiant

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad \text{et } d(x_{k-1}, x_k) \leq r \text{ pour } 1 \leq k \leq n.$$

Soient Ω ouvert connexe de \mathbf{R}^N , et $U \subset \Omega$ un ouvert connexe d'adhérence compacte $\bar{U} \subset \Omega$. Soit $r = \frac{1}{4} \text{dist}(\bar{U}, \mathbf{R}^N \setminus \Omega) > 0$.

b) Soit enfin f une fonction harmonique positive ou nulle sur Ω . Comparer, pour tout couple (x, y) de points de U tels que $|x - y| \leq r$, les quantités

$$|B(x, 3r)|f(x) \text{ et } |B(y, r)|f(y).$$

c) Dédurre de ce qui précède l'existence d'une constante $C(U, \Omega) > 0$ telle que, pour toute fonction harmonique f positive ou nulle sur Ω , l'on ait

$$\sup_{z \in U} f(z) \leq C(U, \Omega) \inf_{z \in U} f(z)$$

(inégalité de Harnack.)

d) Soit $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq \dots$ suite croissante de fonctions continues sur Ω . Supposons que la fonction

$$x \mapsto u(x) = \sup_{n \geq 1} u_n(x)$$

est continue sur Ω . Montrer qu'alors

$$u_n \rightarrow u \text{ uniformément sur tout compact de } \Omega$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ (théorème de Dini.) (Indication : pour K compact de Ω et $\epsilon > 0$, on pourra considérer la suite de parties de K définie par

$$F_n(\epsilon) = \{x \in K \mid u(x) - u_n(x) \geq \epsilon\}, \quad n \geq 1.$$

e) Soit $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq \dots$ suite croissante de fonctions harmoniques sur Ω . Montrer que, lorsque $n \rightarrow \infty$,

- soit $f_n(x) \rightarrow +\infty$ pour tout $x \in \Omega$,
- soit f_n converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f harmonique dans Ω .

Chapitre 9

Equation de la chaleur

L'équation de la chaleur est l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\partial_t f(t, x) - c \Delta_x f(t, x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0,$$

où l'inconnue est la fonction f et où c est une constante strictement positive. Rappelons que la notation Δ_x désigne le laplacien par rapport à la variable x , c'est-à-dire que

$$\Delta_x f(t, x) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(t, x) \text{ dans } \mathbf{R}^N.$$

9.1 Origines du modèle

L'équation de la chaleur apparaît dans un grand nombre de contextes très différents : soit en physique (thermique, mécanique des fluides visqueux, diffusion des neutrons dans un matériau fissile), soit dans des modèles biologiques (dynamique des populations), ou encore en finance (équation de Black-Scholes).

Expliquons par exemple comment cette équation apparaît en thermique. On s'intéresse à la répartition de la température dans un corps solide emplissant l'espace \mathbf{R}^N . On va procéder en deux phases, dont l'une consiste à écrire la conservation locale de l'énergie, la seconde étant une hypothèse de nature phénoménologique sur le courant thermique.

Conservation locale de l'énergie

Soit Ω un ouvert à bord de classe C^1 borné quelconque de \mathbf{R}^N , et soient $0 < t_1 < t_2$ deux instants quelconques.

La variation de l'énergie de la portion de solide contenue dans Ω entre les instants t_1 et t_2 est, d'après le premier principe de la thermodynamique, égale à l'intégrale entre ces deux instants du flux de chaleur entrant dans Ω à travers $\partial\Omega$.

Notons donc $T(t, x)$ la température du corps au point $x \in \mathbf{R}^N$ et à l'instant $t > 0$. On supposera le solide homogène, de sorte que sa densité ρ est constante, ainsi que sa chaleur massique C . Notons $q(t, x) \in \mathbf{R}^N$ le courant thermique au point x à l'instant t . Alors

$$\int_{\Omega} \rho CT(t_2, x) dx - \int_{\Omega} \rho CT(t_1, x) dx = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} q(t, x) \cdot \nu(x) d\sigma(x)$$

où on a noté $d\sigma(x)$ l'élément de surface sur le bord $\partial\Omega$, et $\nu(x)$ le champ normal unitaire dirigé vers l'extérieur de Ω .

D'après la formule de Green ¹ (Théorème 3.5.4)

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} q(t, x) \cdot \nu(x) d\sigma(x) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \operatorname{div}_x q(t, x) dx.$$

D'autre part, en supposant la température T de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$ et en échangeant l'ordre des intégrations en variables t et x (grâce au théorème de Fubini), on voit que

$$\int_{\Omega} \rho CT(t_2, x) dx - \int_{\Omega} \rho CT(t_1, x) dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho C \partial_t T(t, x) dx dt.$$

Par conséquent, le bilan d'énergie ci-dessus s'écrit

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (\rho C \partial_t T + \operatorname{div}_x q)(t, x) dx dt = 0.$$

Supposant également que le champ de vecteurs q est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N$, on déduit donc de ce qui précède que la fonction continue $\rho C \partial_t T + \operatorname{div}_x q$ est d'intégrale nulle sur tout pavé de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N$. Elle est donc identiquement nulle :

$$\rho C \partial_t T(t, x) + \operatorname{div}_x q(t, x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0.$$

Cette égalité traduit la conservation locale de l'énergie ρCT .

La loi de Fourier pour le courant thermique

Dans le cas de variations de température relativement faibles, on peut utiliser la **loi de Fourier** qui stipule que le courant de chaleur dans un solide est

1. La notation div_x désigne la divergence par rapport à la variable x , c'est-à-dire que

$$\operatorname{div}_x q(t, x) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial q_k}{\partial x_k}(t, x).$$

proportionnel au gradient² de température :

$$q(t, x) = -\kappa \nabla_x T(t, x)$$

où κ est la conduction thermique du matériau. Ce dernier étant supposé homogène et isotrope, κ est une constante strictement positive. Cette hypothèse de signe est conforme au bon sens — et au second principe de la thermodynamique : le courant de chaleur s'écoule des zones à haute température vers les zones à basse température.

En injectant cette formule pour le courant de chaleur dans la relation

$$\rho C \partial_t T(t, x) + \operatorname{div}_x q(t, x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0$$

obtenue plus haut, et en remarquant que

$$\operatorname{div}_x (\nabla_x T(t, x)) = \Delta_x T(t, x),$$

on aboutit à l'équation de la chaleur sous la forme

$$\rho C \partial_t T(t, x) - \kappa \Delta_x T(t, x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0.$$

9.2 Le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur

Nous allons étudier l'équation de la chaleur dans l'espace euclidien \mathbf{R}^N avec $N \geq 1$. Par un choix d'unités physiques convenables, on voit qu'il est toujours possible de se ramener au problème suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t f - \frac{1}{2} \Delta_x f &= S, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0, \\ f|_{t=0} &= f^{in}, \end{aligned}$$

où f^{in} et S sont des fonctions ou distributions données, et où l'inconnue est la fonction $(t, x) \mapsto f(t, x)$ à valeurs réelles.

Rappelons que, pour tout $N \geq 1$, l'unique solution élémentaire tempérée de l'opérateur de la chaleur à support dans $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$ est donnée par la formule

$$E_N(t, x) = \frac{\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t)}{(2\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}.$$

2. La notation ∇_x désigne le gradient par rapport à la variable x , c'est-à-dire que

$$\nabla_x T(t, x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_1}(t, x) \\ \vdots \\ \frac{\partial T}{\partial x_N}(t, x) \end{pmatrix}.$$

Théorème 9.2.1 (Existence et unicité) Soient $N \geq 1$, une donnée initiale $f^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ et un terme source $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$, tous deux à support compact.

Il existe alors une unique solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur avec donnée initiale f^{in} et second membre S .

Cette solution f est donnée par la formule

$$f = E_N \star (\delta_{t=0} \otimes f^{in} + S);$$

d'où l'on déduit en particulier, lorsque $f^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ et $S \in C_c^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$, que

$$f|_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N} \in C^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N).$$

Démonstration. Dire que f est solution du problème de Cauchy ci-dessus au sens des distributions tempérées, c'est dire que $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ et vérifie

$$\begin{aligned} \partial_t f - \frac{1}{2} \Delta_x f &= \delta_{t=0} \otimes f^{in} + \dot{S}, \quad x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ \text{supp}(f^{in}) &\subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N, \end{aligned}$$

où \dot{S} est le prolongement de la distribution à support compact S par 0 dans $\mathbf{R}_- \times \mathbf{R}^N$ — voir Définition 4.1.6.

Vérifions que la formule proposée fournit bien une solution du problème de Cauchy considéré : comme f^{in} et S sont des distributions à support compact, la distribution $\delta_{t=0} \otimes f^{in} + S$ est également à support compact.

Par conséquent

$$\begin{aligned} (\partial_t - \frac{1}{2} \Delta_x) \left(E_N \star (\delta_{t=0} \otimes f^{in} + \dot{S}) \right) &= ((\partial_t - \frac{1}{2} \Delta_x) E_N) \star (\delta_{t=0} \otimes f^{in} + \dot{S}) \\ &= \delta_{(t,x)=(0,0)} \star (\delta_{t=0} \otimes f^{in} + \dot{S}) \\ &= \delta_{t=0} \otimes f^{in} + \dot{S} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N), \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} \text{supp} \left(E_N \star (\delta_{t=0} \otimes f^{in} + \dot{S}) \right) &\subset \text{supp}(E_N) + \text{supp}(\delta_{t=0} \otimes f^{in} + \dot{S}) \\ &\subset (\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N) + (\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \end{aligned}$$

Passons à l'unicité de la solution au sens des distributions tempérées f du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur. Supposons qu'il en existe une autre, disons g , et posons $h = f - g$.

Alors la distribution $h \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ et vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t h - \frac{1}{2} \Delta_x h &= 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ \text{supp}(h) &\subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N. \end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 7.2.4, on trouve que $h = f - g = 0$, d'où l'unicité annoncée. ■

A vrai dire, la condition de support compact sur les données n'est pas absolument nécessaire; elle n'est là que pour permettre d'appliquer le Théorème 4.4.6 et d'écrire que

$$\partial_{t,x}^\alpha (E_N \star (\delta_{t=0} \otimes f^{in} + S)) = (\partial_{t,x}^\alpha E_N) \star (\delta_{t=0} \otimes f^{in} + S)$$

pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^{1+N}$.

Voici un énoncé s'appliquant à des données initiales quelconques dans $L^2(\mathbf{R}^N)$

Proposition 9.2.2 (Données initiales L^2) *Soient $N \geq 1$ et une donnée initiale $f^{in} \in L^2(\mathbf{R}^N)$.*

Il existe alors une unique solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t f - \frac{1}{2} \Delta_x f &= 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0, \\ f|_{t=0} &= f^{in}. \end{aligned}$$

La restriction de cette solution f à $\mathbf{R}_+^ \times \mathbf{R}^N$ se prolonge (pour $t = 0$) en une fonction appartenant à $C(\mathbf{R}_+, L^2(\mathbf{R}^N))$ et donnée par la formule*

$$\begin{aligned} f(t, x) &= E_N(t, \cdot) \star_x f^{in}(x) \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} E(t, x - y) f^{in}(y) dy \quad \text{p.p. en } x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0, \end{aligned}$$

et

$$f(0, x) = f^{in}(x) \quad \text{p.p. en } x \in \mathbf{R}^N.$$

Observons que, lorsque $f^{in} \in C_c(\mathbf{R}^N)$, la distribution

$$E_N \star_{t,x} (\delta_{t=0} \otimes f^{in})$$

coïncide, pour $t > 0$, avec la fonction

$$(t, x) \mapsto E_N(t, \cdot) \star_x f^{in}(x),$$

de sorte que les formules explicites du Théorème 9.2.1 et de la proposition ci-dessus coïncident bien pour une classe de données initiales denses dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ — à savoir les fonctions continues à support compact dans \mathbf{R}^N .

A partir de la Proposition 9.2.2, on définit la notion de semi-groupe engendré par l'équation de la chaleur.

Définition 9.2.3 (Semi-groupe de la chaleur) *Pour tout $t \geq 0$, on définit une application linéaire*

$$P(t) : L^2(\mathbf{R}^N) \ni f^{in} \mapsto f(t, \cdot) \in L^2(\mathbf{R}^N)$$

où f est la solution du problème de Cauchy sans second membre de donnée initiale f^{in} ci-dessus. La famille $P(t)_{t \geq 0}$ est appelée "semi-groupe de la chaleur", et souvent notée

$$P(t) = e^{\frac{1}{2}t\Delta_x}.$$

NB. Cette notation souligne l'analogie entre le semi-groupe de la chaleur et la formule

$$u = e^{-tA} u^{in}$$

donnant la solution du système différentiel linéaire

$$\dot{u} + Au = 0, \quad u(0) = u^{in}$$

d'inconnue $t \mapsto u(t) \in \mathbf{R}^n$, pour A matrice carrée à n lignes et colonnes. Toutefois, pour une matrice carrée à n lignes et colonnes, on a

$$e^{-tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} A^n,$$

tandis que la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{2^n n!} \Delta_x^n$$

n'a aucun sens et ne représente donc pas $e^{\frac{1}{2}t\Delta_x}$.

Commençons par démontrer la proposition ci-dessus ; nous reviendrons ultérieurement sur l'étude des propriétés de $P(t)$.

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, définissons f_n comme la solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur sans second membre et avec donnée initiale f_n^{in} définie par

$$f_n^{in}(x) = \mathbf{1}_{B(0,n)}(x) f_n^{in}(x), \quad x \in \mathbf{R}^N.$$

Evidemment, $f_n^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ de sorte que

$$f_n = E_N \star (\delta_{t=0} \otimes f_n^{in}).$$

Appliquons la transformation de Fourier partielle en x à chaque membre de l'égalité ci-dessus. Notant ξ la variable de Fourier duale de x et \hat{f} la transformée de Fourier de f partielle en la variable x , on trouve que

$$\begin{aligned} \hat{f}_n(t, \xi) &= \hat{E}_N(t, \xi) \hat{f}_n^{in}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2} \hat{f}_n^{in}(\xi), \\ &\text{p.p. en } \xi \in \mathbf{R}^N, \text{ pour tout } t > 0. \end{aligned}$$

Soit, pour tout $t \geq 0$, la fonction mesurable $\xi \mapsto g(t, \xi)$ définie par

$$g(t, \xi) = e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2} \hat{f}_n^{in}(\xi);$$

on a évidemment $g(t, \cdot) \in L^2(\mathbf{R}^N)$ avec

$$\|g(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \leq \|f_n^{in}\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}$$

puisque $0 \leq e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2} \leq 1$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}^N$ et tout $t \geq 0$. D'après le théorème de Plancherel 5.4.12, il existe donc, pour tout $t \geq 0$, une unique fonction $x \mapsto f(t, x)$ appartenant à $L^2(\mathbf{R}^N)$ et telle que

$$\hat{f}(t, \xi) = g(t, \xi) = e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2} \hat{f}^{in}(\xi), \quad \text{p.p. en } \xi \in \mathbf{R}^N \text{ pour tout } t > 0.$$

Notons encore f_n et f les prolongements de f_n et f par 0 pour $t < 0$.

Toujours grâce au théorème de Plancherel, pour tout $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \|f_n(t, \cdot) - f(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} &= \frac{1}{(2\pi)^N} \|\hat{f}_n(t, \cdot) - \hat{f}(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^N} \|\hat{f}_n^{in} - \hat{f}^{in}\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \\ &= \|f_n^{in} - f^{in}\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$, et en particulier, par convergence dominée,

$$f_n \rightarrow f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N) \text{ pour } n \rightarrow \infty.$$

Donc

$$\partial_t f_n \rightarrow \partial_t f \text{ et } \Delta_x f_n \rightarrow \Delta_x f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$$

et comme

$$\partial_t f_n - \frac{1}{2} \Delta_x f_n = \delta_{t=0} \otimes f_n^{in} \rightarrow \delta_{t=0} \otimes f^{in} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$$

on en déduit que

$$\partial_t f - \frac{1}{2} \Delta_x f = \delta_{t=0} \otimes f^{in} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N).$$

D'autre part, par construction

$$\text{supp}(f_n) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \text{ de sorte que } \text{supp}(f) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N.$$

L'unicité de cette solution s'obtient comme dans le Théorème 9.2.1, par une application directe du Lemme 7.2.4.

Enfin la formule

$$\hat{f}(t, \xi) = e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2} \hat{f}^{in}(\xi) \quad \text{p.p. en } \xi \in \mathbf{R}^N \text{ pour tout } t > 0,$$

et le théorème de Plancherel montrent que

$$f|_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N} \in C(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^N)).$$

En effet, pour tout $t \geq 0$ et toute suite $t_n \geq 0$ telle que $t_n \rightarrow t$, on a

$$\|f(t_n, \cdot) - f(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2 = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} \left(e^{-\frac{1}{2}t_n|\xi|^2} - e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2} \right)^2 |\hat{f}^{in}(\xi)|^2 d\xi \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ par convergence dominée, puisque

$$\left| e^{-\frac{1}{2}t_n|\xi|^2} - e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2} \right|^2 |\hat{f}^{in}(\xi)|^2 \leq |\hat{f}^{in}(\xi)|^2$$

p.p. en $\xi \in \mathbf{R}^N$. ■

Revenons au semi-groupe de la chaleur $P(t)_{t \geq 0}$. En voici les principales propriétés :

Proposition 9.2.4 (Propriétés de $e^{\frac{1}{2}t\Delta}$) *Le semi groupe de la chaleur*

$$P(t) = e^{\frac{1}{2}t\Delta_x}$$

vérifie les propriétés suivantes :

(a) pour tout $t \geq 0$, on a

$$\|P(t)f^{in}\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \leq \|f^{in}\|_{L^2(\mathbf{R}^N)};$$

(b) pour tous $s, t \in \mathbf{R}_+$, on a

$$P(t)P(s) = P(t+s);$$

(c) pour toute donnée initiale $f^{in} \in L^2(\mathbf{R}^N)$, la fonction

$$\mathbf{R}_+ \ni t \mapsto P(t)f^{in} \in L^2(\mathbf{R}^N)$$

est continue sur \mathbf{R}_+ .

Démonstration. La preuve de la Proposition 9.2.2 montre que, pour tout $t \geq 0$

$$\widehat{P(t)f^{in}}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2} \hat{f}^{in}(\xi) \text{ p.p. en } \xi \in \mathbf{R}^N,$$

ce qui entraîne immédiatement la propriété (b).

En particulier, pour tout $t \geq 0$

$$\left| \widehat{P(t)f^{in}}(\xi) \right| \leq \left| \hat{f}^{in}(\xi) \right| \text{ p.p. en } \xi \in \mathbf{R}^N,$$

ce qui entraîne la propriété (a) grâce au théorème de Plancherel.

Quant au point (c), il a déjà été établi dans la Proposition 9.2.2. ■

Corollaire 9.2.5 *Soient $N \geq 1$, une donnée initiale $f^{in} \in L^2(\mathbf{R}^N)$ et un terme source $S \in C(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^N))$ tels que*

$$\sup_{t \geq 0} \int_{\mathbf{R}^N} |S(t, x)|^2 dx < \infty.$$

Il existe alors une unique $f \in C(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^N))$ dont le prolongement par 0 pour $t < 0$ est solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t f - \frac{1}{2} \Delta_x f &= S, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0, \\ f|_{t=0} &= f^{in}. \end{aligned}$$

Cette solution est donnée par la formule

$$f(t, \cdot) = P(t)f^{in} + \int_0^t P(t-s)S(s, \cdot)ds, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

La formule ci-dessus donnant f porte le nom de “formule de Duhamel”. Elle s’écrit encore de manière équivalente sous la forme

$$f(t, x) = \int_{\mathbf{R}^N} E_N(t, x-y)f^{in}(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} E_N(t-s, x-y)S(s, y)dyds$$

c’est-à-dire

$$f(t, x) = (E_N(t, \cdot) \star_x f^{in})(x) + E_N \star_{t,x} (\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(t)S)(t, x).$$

Cette formule coïncide donc, dans le cas de fonctions continues à support compact, avec la formule

$$f = E_N \star (\delta_{t=0} \otimes f^{in}) + E_N \star \dot{S}$$

donnée dans le Théorème 9.2.1.

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$S_n(t, x) = \mathbf{1}_{[1/n, n]}(t) \mathbf{1}_{\overline{B(0, n)}}(x) S(t, x), \quad \text{p.p. en } x \in \mathbf{R}^N \text{ et pour tout } t \geq 0.$$

Evidemment $S_n \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$. Soit $g_n = E_N \star \dot{S}_n$, où \dot{S}_n désigne le prolongement de S_n par 0 pour $t \leq 0$. On remarque que g_n s’écrit encore

$$g_n(t, \cdot) = \int_0^t P(t-s)S_n(s, \cdot)ds \quad \text{si } t \geq 0, \quad g(t, \cdot) = 0 \quad \text{si } t < 0,$$

D’après le Théorème 9.2.1, g_n est solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t g_n - \frac{1}{2} \Delta_x g_n &= S_n, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0, \\ g_n|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

D’autre part, pour tout $t > 0$ et tout $n \geq t$, on a

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t P(t-s)S_n(s, \cdot)ds - \int_0^t P(t-s)S(s, \cdot)ds \right\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \\ & \leq \int_0^t \|P(t-s)S_n(s, \cdot) - P(t-s)S(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} ds \\ & \leq \int_0^{1/n} \|S(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} ds + \int_{1/n}^t \|S_n(s, \cdot) - S(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} ds \end{aligned}$$

grâce à la propriété (a) de la Proposition 9.2.4 et la définition de S_n .

Pour le premier terme au membre de droite, on a

$$\int_0^{1/n} \|S(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} ds \leq \frac{1}{n} \sup_{s \in [0,1]} \|S(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Pour le second terme, on commence par appliquer à l'intégrale en t l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en on observe, grâce à la définition de S_n , que, pour tout $T > 0$ et tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} & \int_{1/n}^t \|S_n(s, \cdot) - S(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} ds \\ & \leq \sqrt{T} \left(\int_0^T \int_{\mathbf{R}^N} |S(s, x)|^2 \mathbf{1}_{\mathbf{R}^N \setminus \overline{B(0, n)}} dx \right)^{1/2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ par convergence dominée. Posant

$$g(t, \cdot) = \int_0^t P(t-s)S(s, \cdot) ds \text{ si } t \geq 0, \quad g(t, \cdot) = 0 \text{ si } t < 0,$$

on a ainsi montré que $g_n(t, \cdot) \rightarrow g(t, \cdot)$ dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ uniformément en $t \in [0, T]$, pour tout $T > 0$.

En particulier, $g_n \rightarrow g$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$, et en passant à la limite au sens des distributions dans l'égalité

$$\partial_t g_n - \frac{1}{2} \Delta_x g_n = \dot{S}_n \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N),$$

on trouve que g est solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t g - \frac{1}{2} \Delta_x g &= S, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0, \\ g|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

Vérifions que la restriction de g à $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$ définit bien un élément de $C(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^N))$. En effet, pour $t, t' \in [0, T]$ avec $t \leq t'$, on a, en utilisant successivement les propriétés (b) et (a) de la Proposition 9.2.4

$$\begin{aligned} \|g(t', \cdot) - g(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} &= \left\| \int_0^{t'} P(t'-s)S(s, \cdot) ds - \int_0^t P(t-s)S(s, \cdot) ds \right\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \\ &\leq \left\| \int_0^t P(t-s)(P(t'-t) - I)S(s, \cdot) ds \right\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} + \left\| \int_t^{t'} P(t'-s)S(s, \cdot) ds \right\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \\ &\leq \int_0^t \|(P(t'-t) - I)S(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} ds + \int_t^{t'} \|P(t'-s)S(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} ds \\ &\leq \int_0^T \|(P(t'-t) - I)S(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} ds + \int_t^{t'} \|S(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} ds. \end{aligned}$$

Le second terme au membre de droite vérifie

$$\int_t^{t'} \|S(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} ds \leq (t' - t) \sup_{s \in [0, T]} \|S(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \rightarrow 0$$

lorsque $t' - t \rightarrow 0$. Quant au premier terme, il converge vers 0 par convergence dominée lorsque $t' - t \rightarrow 0$ puisque

$$\|(P(t' - t) - I)S(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \rightarrow 0$$

d'après la propriété (c) de la Proposition 9.2.4 et que

$$\|(P(t' - t) - I)S(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \leq 2 \sup_{s \in [0, T]} \|S(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}$$

pour tout $s \in [0, T]$ grâce au (a) de cette même proposition. On en conclut que $g|_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N} \in C(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^N))$.

Définissons

$$f_0(t, \cdot) = P(t)f^{in} \text{ si } t \geq 0, \quad f_0(t, \cdot) = 0 \text{ si } t < 0.$$

D'après la Proposition 9.2.4, f_0 est solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t f_0 - \frac{1}{2} \Delta_x f_0 &= 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0, \\ f_0|_{t=0} &= f^{in}, \end{aligned}$$

et $f_0|_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N} \in C(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^N))$.

Comme l'équation de la chaleur est linéaire, on déduit alors de ce qui précède que $f = f_0 + g$ est solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t f - \frac{1}{2} \Delta_x f &= S, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0, \\ f|_{t=0} &= f^{in}. \end{aligned}$$

C'est la seule, car s'il en existait une autre, notée f^* , on déduirait du Lemme 7.2.4 que $f - f^* = 0$, comme dans la preuve du Théorème 9.2.1.

Enfin $f_0 + g|_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N} \in C(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^N))$ puisque $f_0|_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N}$ et $g|_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N}$ appartiennent toutes les deux à $C(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^N))$. ■

9.3 Propriétés qualitatives de l'équation de la chaleur

On va établir dans cette section quelques propriétés qualitatives fondamentales des solutions de l'équation de la chaleur. Certaines de ces propriétés sont basées sur l'écriture de la solution élémentaire dans les variables de Fourier, d'autres sur la formule donnant cette même solution élémentaire en variables physiques.

9.3.1 Bornes sur la solution du problème de Cauchy

La solution élémentaire de l'équation de la chaleur définie par

$$E_N(t, x) = \frac{\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t)}{(2\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$$

est manifestement positive. On en déduit immédiatement que l'équation de la chaleur vérifie la forme faible ci-dessous du principe du maximum.

Rappelons que, pour une fonction harmonique, ou pour le module d'une fonction holomorphe, le principe du maximum (fort) dit qu'il ne peut exister de maximum local dans un ouvert connexe que dans le cas où la fonction est constante.

En particulier, une fonction harmonique dans un ouvert connexe borné et continue sur l'adhérence de cet ouvert atteint son maximum sur la frontière de l'ouvert.

On appelle donc "principe du maximum faible" un énoncé consistant à dire que toute fonction solution d'une EDP dans un ouvert et continue sur l'adhérence de cet ouvert atteint son maximum et son minimum sur la frontière de cet ouvert.

Théorème 9.3.1 (Principe du maximum faible) *Soit $f^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$, et soit f la solution (au sens des distributions tempérées) du problème de Cauchy*

$$\begin{aligned} \partial_t f - \frac{1}{2} \Delta_x f &= 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0, \\ f|_{t=0} &= f^{in}. \end{aligned}$$

Soient $m, M \in \mathbf{R}$, deux constantes. Si

$$f^{in} \leq M \quad (\text{resp. si } f^{in} \geq m),$$

alors, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbf{R}^N$, on a

$$f(t, x) \leq M \quad (\text{resp. } f(t, x) \geq m.)$$

La condition

$$f^{in} \leq M \quad (\text{resp. } f^{in} \geq m)$$

signifie que $M - f^{in}$ (resp. $f^{in} - m$) est une distribution positive sur \mathbf{R}^N , c'est-à-dire que

$$\langle f^{in}, \phi \rangle \leq M \int_{\mathbf{R}^N} \phi(x) dx \quad \left(\text{resp. } \langle f^{in}, \phi \rangle \geq m \int_{\mathbf{R}^N} \phi(x) dx \right)$$

— cf. chapitre 3, section 3.2.2.

Démonstration. D'après le Théorème 9.2.1, la solution f du problème de Cauchy considéré est

$$f(t, \cdot) = E_N(t, \cdot) \star_x f^{in}.$$

Si $f^{in} \leq M$, on décompose la solution f comme suit

$$f(t, \cdot) = E_N(t, \cdot) \star_x (M \mathbf{1}_{B(0,R)}) - E_N(t, \cdot) \star_x (\mathbf{1}_{B(0,R)}(M - f^{in})), \quad t > 0,$$

où $R > 0$ est choisi de sorte que $\text{supp}(f^{in}) \subset B(0, R)$. Ainsi la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{B(0,R)}$ est de classe C^∞ — en fait, constante égale à 1 — sur un voisinage de $\text{supp}(f^{in})$, de sorte que le produit

$$\mathbf{1}_{B(0,R)} f^{in} \text{ est bien défini — en fait } \mathbf{1}_{B(0,R)} f^{in} = f^{in}.$$

D'une part $E_N(t, x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$ et $t > 0$, de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} E_N(t, \cdot) \star_x (M \mathbf{1}_{B(0,R)})(x) &= M \int_{|y| < R} E_N(t, x - y) dy \\ &\leq M \int_{\mathbf{R}^N} E_N(t, x - y) dy = M. \end{aligned}$$

D'autre part

$$E_N(t, \cdot) \star_x (\mathbf{1}_{B(0,R)}(M - f^{in})) \geq 0$$

en tant que produit de convolution de la distribution à support compact positive $\mathbf{1}_{B(0,R)}(M - f^{in})$ par la fonction de classe C^∞ positive $E_N(t, \cdot) \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$. (En effet, rappelons que, par définition

$$\begin{aligned} E_N(t, \cdot) \star_x (\mathbf{1}_{B(0,R)}(M - f^{in}))(x) \\ = \langle (\mathbf{1}_{B(0,R)}(M - f^{in})), E_N(t, x - \cdot) \rangle \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \end{aligned}$$

d'où le résultat.)

Par conséquent,

$$f(t, \cdot) \leq E_N(t, \cdot) \star_x (M \mathbf{1}_{B(0,R)}) \leq M$$

pour tout $t > 0$, c.q.f.d..

La minoration $f(t, \cdot) \geq m$ s'obtient de manière analogue. ■

Une autre estimation très importante pour l'équation de la chaleur est l'égalité connue sous le nom d'*égalité d'énergie*.

Théorème 9.3.2 (Régularisation et égalité d'énergie) *Soit $f^{in} \in L^2(\mathbf{R}^N)$. Alors la solution*

$$f(t, \cdot) = e^{\frac{1}{2}t\Delta_x} f^{in} \in C(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^N))$$

du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t f - \frac{1}{2} \Delta_x f &= 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0, \\ f|_{t=0} &= f^{in}, \end{aligned}$$

est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^ \times \mathbf{R}^N$ qui satisfait l'égalité d'énergie*

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(t, x)^2 dx + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla_x f(s, x)|^2 dx ds = \int_{\mathbf{R}^N} f^{in}(x)^2 dx$$

pour tout $t \geq 0$.

La terminologie “égalité d’énergie” désignant l’identité énoncée dans le théorème ci-dessus est impropre du point de vue physique. En effet, dans le contexte de la thermique rappelé dans l’introduction de ce chapitre, l’inconnue f est (proportionnelle à) la densité d’énergie interne. La conservation de l’énergie dans ce contexte correspond donc à l’égalité

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(t, x) dx = \int_{\mathbf{R}^N} f^{in}(x) dx, \quad t > 0,$$

au lieu de l’égalité énoncée ci-dessus.

Malheureusement, les mathématiciens ont pris l’habitude d’appeler “estimations d’énergie” pour des équations aux dérivées partielles générales toute une classe d’inégalités obtenues par la même méthode que dans le théorème précédent, même lorsque les quantités intervenant dans ces inégalités ne peuvent s’interpréter comme une énergie sur le plan physique. Nous suivrons donc, nous aussi cette terminologie consacrée par l’usage, bien que celle-ci soit impropre.

Démonstration. Ecrivons la formule donnant f :

$$f(t, \cdot) = E_N(t, \cdot) \star_x f^{in}, \quad t > 0.$$

Appliquons la transformation de Fourier partielle en la variable x aux deux membres de cette égalité : on trouve que

$$\hat{f}(t, \xi) = \hat{E}_N(t, \xi) \hat{f}^{in}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2} \hat{f}^{in}(\xi), \text{ pour tout } \xi \in \mathbf{R}^N, t > 0.$$

D’après le théorème de Plancherel, pour tout $t > 0$

$$\|f^{in}\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2 - \|f(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2 = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} (1 - e^{-t|\xi|^2}) |\hat{f}^{in}(\xi)|^2 d\xi.$$

Or

$$1 - e^{-t|\xi|^2} = \int_0^t |\xi|^2 e^{-s|\xi|^2} ds$$

de sorte que, d’après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \|f^{in}\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2 - \|f(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} |\xi|^2 \left| e^{-\frac{1}{2}s|\xi|^2} \hat{f}^{in}(\xi) \right|^2 d\xi ds \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} |\xi|^2 \left| \widehat{f(s, \cdot)}(\xi) \right|^2 d\xi ds \end{aligned} .$$

Observons que, pour tout $s > 0$, la fonction

$$\xi \mapsto i\xi e^{-\frac{1}{2}s|\xi|^2} \widehat{f}^{in}(\xi)$$

appartient à $L^1(\mathbf{R}^N)$, de sorte que $f(s, \cdot) \in C^1(\mathbf{R}^N)$ et que

$$\widehat{\nabla f(t, \cdot)}(\xi) = i\xi e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2} \widehat{f}^{in}(\xi)$$

— d'après la Proposition 5.5.5 (b).

En substituant cette relation dans l'égalité précédente, et en tenant compte du théorème de Plancherel, on aboutit à

$$\|f^{in}\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2 - \|f(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2 = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla_x f(s, x)|^2 dx ds,$$

qui est bien l'égalité d'énergie annoncée.

Enfin, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^N$, tout $m \in \mathbf{N}$ et tout $t > 0$,

$$\xi \mapsto \left(-\frac{1}{2}|\xi|^2\right)^m (i\xi)^\alpha e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2} \widehat{f^{in}}(\xi)$$

appartient à $L^1(\mathbf{R}^N)$, puisque $\widehat{f^{in}} \in L^2(\mathbf{R}^N)$. Par inversion de Fourier, on en déduit que

$$\partial_t^m \partial_x^\alpha f \in C(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$$

pour tout $m \in \mathbf{N}$ et tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$. Par conséquent, la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N$. ■

9.3.2 Effet régularisant

On a déjà montré au Théorème 9.2.1 que la solution du problème de Cauchy sans second membre avec donnée initiale distribution à support compact pour l'équation de la chaleur est de classe C^∞ pour $t > 0$.

En réalité, l'effet régularisant de l'équation de la chaleur est encore plus fort : la solution de l'équation de la chaleur est analytique en x pour tout $t > 0$.

Nous énoncerons et démontrerons ce résultat en dimension d'espace $N = 1$, pour ne pas avoir à manipuler des fonctions analytiques de plusieurs variables — encore que, dans ce cas particulier, tout se passe comme en dimension $N = 1$.

Théorème 9.3.3 (Régularisation analytique) *Soit $f^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$, et soit f la solution (au sens des distributions tempérées) du problème de Cauchy*

$$\begin{aligned} \partial_t f - \frac{1}{2} \partial_x^2 f &= 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \\ f|_{t=0} &= f^{in}. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(t, x)$ admet un prolongement holomorphe sur \mathbf{C} .

Démonstration. Comme f^{in} est une distribution à support compact sur \mathbf{R} , on sait que sa transformée de Fourier $\widehat{f^{in}}$ est une fonction de classe C^∞ . Pour tout $t > 0$,

$$f(t, \cdot) = E_1(t, \cdot) \star_x f^{in},$$

où E_1 est la solution élémentaire tempérée de l'opérateur de la chaleur à support dans $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$.

En appliquant aux deux membres de cette égalité la transformation de Fourier partielle en x , on a

$$\widehat{f(t, \cdot)}(\xi) = \widehat{E_1(t, \xi) f^{in}}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} \widehat{f^{in}}(\xi), \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbf{R}, t > 0.$$

Soit $\epsilon > 0$; pour tout $t > \epsilon$, on a donc

$$\widehat{f(t, \cdot)}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}(t-\epsilon)\xi^2} \widehat{f(\epsilon, \cdot)}(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

D'autre part $\widehat{f(\epsilon, \cdot)} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ comme transformée de Fourier de la fonction $f(\epsilon, \cdot)$ qui appartient à la classe de Schwartz comme produit de convolution de la fonction $E_1(t, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ par la distribution à support compact f^{in} (cf. Proposition 5.1.7.)

Posons

$$F(t, z) = \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi z - \frac{1}{2}(t-\epsilon)\xi^2} \widehat{f(\epsilon, \cdot)}(\xi) \frac{d\xi}{2\pi}, \quad z \in \mathbf{C}, t > \epsilon.$$

Montrons que cette intégrale définit bien une fonction $z \mapsto F(t, z)$ holomorphe sur \mathbf{C} . En effet, pour tout $R > 0$,

$$\left| e^{i\xi z - \frac{1}{2}(t-\epsilon)\xi^2} \widehat{f(\epsilon, \cdot)}(\xi) \right| = e^{-\xi \Im(z) - \frac{1}{2}(t-\epsilon)\xi^2} |\widehat{f(\epsilon, \cdot)}(\xi)| \leq e^{R|\xi| - \frac{1}{2}(t-\epsilon)\xi^2} |\widehat{f(\epsilon, \cdot)}(\xi)|,$$

pour tout $\xi \in \mathbf{R}$ et tout $t > \epsilon$, pourvu que $|\Im(z)| \leq R$. Puisque $\widehat{f(\epsilon, \cdot)} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, on a

$$|\widehat{f(\epsilon, \cdot)}(\xi)| = O(\xi^{-2}) \text{ pour } |\xi| \rightarrow +\infty$$

tandis que

$$e^{R|\xi| - \frac{1}{2}(t-\epsilon)\xi^2} = O(1) \text{ pour } |\xi| \rightarrow +\infty.$$

On en déduit l'existence d'une constante $C(t, R) > 0$ telle que la fonction continue

$$\mathbf{C} \times \mathbf{R} \ni (z, \xi) \mapsto e^{i\xi z - \frac{1}{2}(t-\epsilon)\xi^2} \widehat{f(\epsilon, \cdot)}(\xi) \in \mathbf{C}$$

vérifie, pour tout $t > \epsilon$, l'estimation

$$\left| e^{i\xi z - \frac{1}{2}(t-\epsilon)\xi^2} \widehat{f(\epsilon, \cdot)}(\xi) \right| \leq \frac{C(t, R)}{1 + \xi^2}, \quad \xi \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{C}, |\Im(z)| \leq R.$$

Comme l'intégrande de $F(t, z)$ est une fonction holomorphe de z pour tout $t > \epsilon$ et tout $\xi \in \mathbf{R}$, et que le membre de droite de l'inégalité de domination ci-dessus appartient à $L^1(\mathbf{R})$, pour tout $t > \epsilon$, la fonction

$$z \mapsto F(t, z) \text{ est holomorphe sur } \{z \in \mathbf{C} \mid |\Im(z)| < R\},$$

d'après le Théorème V.2.18 de [6] rappelé dans la Note 5 du chapitre 7. Comme ceci vaut pour tout $\epsilon, R > 0$, il s'ensuit que $F(t, \cdot)$ est une fonction holomorphe sur \mathbf{C} pour tout $t > 0$.

Enfin, la restriction de $F(t, \cdot)$ à l'axe réel coïncide pour tout $t > 0$ avec la fonction $f(t, \cdot)$ d'après le théorème d'inversion de Fourier (Théorème 5.2.5) appliquée à $f(t, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ définie par

$$\widehat{f(t, \cdot)}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}(t-\epsilon)|\xi|^2} \widehat{f}(\epsilon, \xi).$$

■

Il n'est pas inutile de comparer le comportement des solutions de l'équation de la chaleur avec celui des solutions de l'équation de transport. Rappelons que la solution du problème de Cauchy pour l'équation de transport

$$\begin{aligned} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f &= 0 \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N \\ f|_{t=0} &= f^{in} \end{aligned}$$

est donnée par la formule

$$f(t, x) = f^{in}(x - tv), \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0,$$

pour tout $f^{in} \in C^1(\mathbf{R}^N)$ — cf. Théorème 2.1.2. On notera dans la suite

$$(e^{-tv \cdot \nabla_x} f^{in})(x) := f(t, x) = f^{in}(x - tv).$$

On voit précisément sur cette formule que $f(t, \cdot)$ a exactement la même régularité que la donnée initiale f^{in} (le graphe de $f(t, \cdot)$ étant celui de f^{in} translaté de tv dans la direction de l'espace des abscisses.) Autrement dit, si f^{in} est de classe C^k sur \mathbf{R}^N et pas de classe C^{k+1} , de même, $f(t, \cdot)$ est de classe C^k sur \mathbf{R}^N et pas de classe C^{k+1} .

Au contraire, pour toute donnée initiale $f^{in} \in L^2(\mathbf{R}^N)$, la solution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned} \partial_t f - \frac{1}{2} \Delta_x f &= 0 \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N \\ f|_{t=0} &= f^{in} \end{aligned}$$

vérifie

$$f(t, \cdot) = e^{\frac{1}{2}t\Delta_x} f^{in} \in C^\infty(\mathbf{R}^N), \quad t > 0,$$

indépendamment de la régularité de la donnée initiale f^{in} . Cette différence de comportement entre l'équation de transport, qui propage les singularités de la donnée initiale, et l'équation de la chaleur qui les efface, est d'une importance considérable dans l'étude théorique des EDP.

L'effet régularisant de l'équation de la chaleur a de nombreuses autres conséquences, comme on va le voir.

9.3.3 Irréversibilité

Comparons à nouveau les comportements des solutions des problèmes de Cauchy pour l'équation de transport et l'équation de la chaleur.

La formule

$$(e^{-tv \cdot \nabla_x} f^{in})(x) = f^{in}(x - tv), \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0$$

montre que l'application linéaire $e^{-tv \cdot \nabla_x}$ définit une bijection de $C^k(\mathbf{R}^N)$ dans lui-même, d'inverse

$$\left((e^{-tv \cdot \nabla_x})^{-1} \phi \right)(x) = \phi(x + tv), \quad x \in \mathbf{R}^N.$$

Autrement dit, la famille d'applications linéaires $e^{-tv \cdot \nabla_x}$, que nous avons définie a priori pour $t > 0$, s'étend évidemment à tout $t \in \mathbf{R}$ — avec la même formule de définition :

$$(e^{-tv \cdot \nabla_x} \phi)(x) = \phi(x - tv), \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t \in \mathbf{R}$$

— et vérifie

$$e^{-sv \cdot \nabla_x} e^{-tv \cdot \nabla_x} = e^{-(s+t)v \cdot \nabla_x}, \quad s, t \in \mathbf{R}.$$

Remarquons d'ailleurs que l'inversion de l'application $e^{-tv \cdot \nabla_x}$ correspond exactement à la notion de “réversibilité mécanique”, bien connue en mécanique statistique :

a) choisissons $v \in \mathbf{R}^N$; on résout le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f &= 0 \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N \\ f|_{t=0} &= f^{in} \end{aligned}$$

et, pour $T > 0$ fixé quelconque, on pose

$$g^{in}(x) = f(T, x), \quad x \in \mathbf{R}^N;$$

b) puis, après avoir changé v en $-v$, on résout le problème de Cauchy analogue

$$\begin{aligned} \partial_t g - v \cdot \nabla_x g &= 0 \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N \\ g|_{t=0} &= g^{in}. \end{aligned}$$

sur le même intervalle de temps $[0, T]$. Alors

$$g(T, x) = f^{in}(x), \quad x \in \mathbf{R}^N.$$

Il n'en est pas de même pour le cas de l'équation de la chaleur. Pour $T > 0$, la fonction

$$e^{\frac{1}{2}T\Delta_x} f^{in} \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbf{R}^N$$

et il n'existe pas de transformation “simple” $f(T, \cdot) \mapsto Sf(T, \cdot)$ — analogue au fait de changer v en $-v$ dans l'équation de transport — telle que

$$e^{\frac{1}{2}T\Delta_x} Sf(T, \cdot) = f^{in}.$$

En effet, choisissons $f^{in} \notin C^\infty(\mathbf{R}^N)$; pour que l'identité ci-dessus soit possible, il faudrait que la transformation S envoie la fonction $f(T, \cdot)$ qui est de classe $C^\infty(\mathbf{R}^N)$ vers une fonction beaucoup plus irrégulière qu'un élément de $L^2(\mathbf{R}^N)$ — ou même, qu'une distribution à support compact. On conçoit qu'une telle transformation, à supposer qu'elle existe n'a a priori aucune chance d'être très simple.

L'équation de la chaleur fournit donc ainsi un exemple classique de dynamique irréversible, par opposition au cas de l'équation de transport. Ceci est bien sûr une conséquence de la propriété de régularisation du semi-groupe de la chaleur établie plus haut.

9.3.4 Vitesse infinie de propagation

Commençons par donner un énoncé précis.

Théorème 9.3.4 (Propagation à vitesse infinie) *Soit $f^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ et f la solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy*

$$\begin{aligned} \partial_t f - \frac{1}{2} \Delta_x f &= 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0, \\ f|_{t=0} &= f^{in}. \end{aligned}$$

S'il existe $t > 0$ et Ω ouvert de \mathbf{R}^N tels que

$$f(t, x) = 0 \text{ pour tout } x \in \Omega$$

alors f est identiquement nulle sur $\mathbf{R}_+^ \times \mathbf{R}^N$ ainsi que f^{in} sur \mathbf{R}^N .*

Cet énoncé montre en particulier que, si f^{in} n'est pas la distribution nulle, alors, pour tout $t > 0$, il est impossible que $f(t, \cdot)$ soit à support compact.

En particulier, pour tout $t > 0$ il existe des points x à une distance arbitrairement grande du support de f^{in} tels que $f(t, x) \neq 0$.

Ceci veut dire que ces points ont été influencés par les valeurs prises par f^{in} sur son support qui est compact; comme ces points sont à distance arbitrairement grande du support de f^{in} , il s'ensuit que l'information contenue dans le graphe de la donnée initiale a été propagée à une vitesse arbitrairement grande.

La démonstration explique comment cette propriété de l'équation de la chaleur est reliée à la propriété de régularisation analytique.

Démonstration. Nous allons démontrer cet énoncé dans les deux cas suivants :

Cas de la dimension d'espace $N = 1$. D'après le théorème de régularisation analytique (Théorème 9.3.3), la solution f à l'instant t , c'est-à-dire la fonction $x \mapsto f(t, x)$, se prolonge en une fonction holomorphe sur \mathbf{C} .

Supposons que cette fonction holomorphe s'annule identiquement sur un ouvert Ω de \mathbf{R} ; d'après le théorème des zéros isolés — cf. [6], Théorème V.1.16, ou [9], chapitre X, Théorème 6.1.3 — la fonction $z \mapsto f(t, z)$ est identiquement nulle sur \mathbf{C} , donc en particulier sur l'axe réel.

Il reste à montrer que f est identiquement nulle sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ — jusqu'ici, on a seulement montré qu'elle est identiquement nulle sur $\{t\} \times \mathbf{R}$.

En revenant à la formule explicite du Théorème 9.2.1 d'existence et unicité, on a donc

$$f(t, \cdot) = E_1(t, \cdot) \star_x f^{in} = 0.$$

Après transformation de Fourier partielle en la variable x , on en déduit que

$$\hat{f}(t, \cdot) = \hat{E}_1(t, \xi) \hat{f}^{in} = e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} \hat{f}^{in} = 0$$

d'où on tire que

$$\hat{f}^{in} = 0$$

puisque $e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} \neq 0$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}$. Comme la transformation de Fourier est un isomorphisme sur l'espace des distributions tempérées (cf. Théorème 5.4.8), on en déduit que $f^{in} = 0$, et donc que $f = 0$ sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$.

Cas d'une donnée initiale positive : Partons à nouveau de la formule explicite du Théorème 9.2.1 d'existence et unicité. Après transformation de Fourier partielle en x , pour tout $t > 0$, on a

$$\hat{f}(t, \cdot) = \hat{E}_N(t, \xi) \hat{f}^{in} = e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} \hat{f}^{in} = e^{-\frac{1}{2}\frac{t}{2}|\xi|^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{f}^{in} = e^{-\frac{1}{2}\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{f}(t/2, \cdot).$$

D'après le principe du maximum faible (ici, en fait, du minimum) — Théorème 9.3.1 — la fonction $x \mapsto f(t/2, x)$ est positive ou nulle sur \mathbf{R}^N puisque la donnée initiale f^{in} est une distribution positive ou nulle.

En revenant dans les variables physiques, on a donc

$$f(t, \cdot) = E_N(t/2, \cdot) \star_x f(t/2, \cdot)$$

ce qui s'écrit

$$f(t, x) = \int_{\mathbf{R}^N} E_N(t/2, x - y) f(t/2, y) dy.$$

Le membre de droite de l'égalité ci-dessus est l'intégrale d'une fonction continue sur \mathbf{R}^N positive ou nulle — rappelons en effet que $f(t/2, \cdot) \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ d'après le Théorème 9.2.1.

Choisissons alors $x_0 \in \Omega$ quelconque ; la condition $f(t, x_0) = 0$ entraîne que

$$E_N(t/2, x_0 - y) f(t/2, y) = 0 \text{ pour tout } y \in \mathbf{R}^N.$$

Comme $E_N > 0$, il s'ensuit que $f(t/2, \cdot)$ est identiquement nulle sur \mathbf{R}^N , de sorte que sa transformée de Fourier partielle en x vérifie

$$\hat{f}(t/2, \cdot) = \hat{E}_N(t/2, \xi) \hat{f}^{in} = e^{-\frac{1}{2}\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{f}^{in} = 0$$

et on conclut comme dans le cas précédent que $f^{in} = 0$. ■

Comme on vient de le voir, il existe un lien profond entre

a) la propriété de régularisation analytique par le semi-groupe de la chaleur, et

b) la propriété de propagation à vitesse infinie.

A nouveau, il en va tout autrement de l'équation de transport : si f^{in} est à support compact, la solution f du problème de Cauchy

$$\begin{aligned}\partial_t f + v \cdot \nabla_x f &= 0 \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N \\ f|_{t=0} &= f^{in}\end{aligned}$$

est telle que la fonction

$$x \mapsto f(t, x) \text{ est à support compact pour tout } t > 0.$$

Dans la section suivante, nous allons présenter une variante non linéaire de l'équation de la chaleur possédant des solutions qui ne sont même pas de classe C^2 , mais se propagent à vitesse finie.

9.4 Equation des milieux poreux et solution de Barenblatt

On appelle "équation des milieux poreux" l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_t u(t, x) = \Delta_x (u(t, x)^\alpha), \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0,$$

où $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$.

9.4.1 Origine de l'équation des milieux poreux

Supposons que l'on veuille décrire l'écoulement d'un gaz dans un milieu poreux. Notons $\rho(t, x) > 0$ la densité du gaz au point x et à l'instant t , ainsi que $j(t, x) \in \mathbf{R}^3$ le courant de masse du gaz au point x et à l'instant t . Autrement dit,

$$j(t, x) = \rho(t, x)u(t, x)$$

où $u(t, x) \in \mathbf{R}^3$ est la vitesse de l'écoulement de gaz mesurée au point x et à l'instant t .

Ecrivons que la variation de la masse de gaz contenue dans un ouvert Ω à bord de classe C^1 arbitraire de \mathbf{R}^3 entre deux instants $t_1 < t_2$ quelconques vaut l'intégrale sur $[t_1, t_2]$ du flux de j à travers le bord $\partial\Omega$ de Ω dans la direction de Ω . On trouve que

$$\int_{\Omega} \rho(t_2, x) dx - \int_{\Omega} \rho(t_1, x) dx = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} j(t, x) \cdot \nu(x) d\sigma(x)$$

où $\nu(x)$ est le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ au point x pointant vers l'extérieur de Ω , et $d\sigma$ est l'élément de surface sur le bord $\partial\Omega$.

En raisonnant comme nous l'avons déjà fait pour établir l'équation de la chaleur, en appliquant la formule de Green (Théorème 3.5.4 au membre de

droite de l'égalité ci-dessus et la dérivation sous le signe somme au membre de gauche, on aboutit à la relation

$$\partial_t \rho(t, x) + \operatorname{div}_x j(t, x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^3, \quad t > 0.$$

Cette équation est connue en mécanique des fluides sous le nom d'“équation de continuité”, ou, ce qui est la même chose, de “loi de conservation locale de la masse”.

Utilisons maintenant l'hypothèse selon laquelle le gaz passe très lentement à travers un milieu poreux. Négligeant l'inertie de la masse de gaz considérée, on écrit alors que la somme des forces internes exercées sur le gaz, à savoir le gradient de pression et le poids du gaz, équilibre la force de friction du gaz sur le milieu poreux.

Supposant que cette force de friction est proportionnelle à la vitesse $u(t, x)$ du gaz, et négligeant le poids du gaz — ce qui est légitime dans le cas de gradients de pression suffisamment importants — on trouve que

$$-\nabla_x p(t, x) - \sigma u(t, x) = 0,$$

où $\sigma > 0$ est une constante et $p(t, x)$ est la pression du gaz au point x et à l'instant t . Ainsi, le champ des vitesses du gaz est donné par

$$u(t, x) = -\frac{1}{\sigma} \nabla_x p(t, x),$$

formule connue sous le nom de *loi de Darcy*.

Injectant cette formule dans l'équation de continuité en tenant compte du fait que $j = \rho u$, on aboutit à la relation

$$\partial_t \rho(t, x) = \operatorname{div}_x \left(\frac{1}{\sigma} \rho(t, x) \nabla_x p(t, x) \right), \quad x \in \mathbf{R}^3, \quad t > 0.$$

Pour obtenir l'équation des milieux poreux, il ne reste plus qu'à exploiter l'équation d'état du gaz.

Dans le cas d'un gaz parfait, et en supposant que l'écoulement du gaz à travers le milieu poreux est isotherme, on écrit que

$$p(t, x) = \frac{k}{m} \rho(t, x) T$$

où k est la constante de Boltzmann, m la masse moléculaire du gaz et T la température. La relation ci-dessus devient alors

$$\partial_t \rho(t, x) = \frac{kT}{2\sigma m} \Delta_x (\rho(t, x)^2), \quad x \in \mathbf{R}^3, \quad t > 0,$$

qui est un premier exemple d'équation des milieux poreux avec exposant $\alpha = 2$.

Dans l'hypothèse où cet écoulement est adiabatique, on écrit alors que

$$p(t, x) = p_0 \left(\frac{\rho(t, x)}{\rho_0} \right)^\gamma$$

où p_0 est une pression de référence associée à une densité de référence ρ_0 , et où γ est le quotient des chaleurs spécifiques à pression et à volume constant pour le gaz considéré.

Par exemple, pour un gaz parfait monoatomique, on a $\gamma = \frac{5}{3}$. Pour des gaz parfaits polyatomiques, on tombe sur des formules du type $\gamma = 1 + \frac{1}{2n+1}$. En tout état de cause, il est naturel de supposer que

$$\gamma > 1.$$

Cette hypothèse d'écoulement adiabatique conduit comme ci-dessus, en utilisant l'équation de continuité, la relation $j = \rho u$ et la loi de Darcy, à

$$\partial_t \rho = \frac{\gamma p_0}{(\gamma+1)\sigma \rho_0^\gamma} \Delta_x (\rho^{1+\gamma}), \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0,$$

qui est un nouvel exemple d'équation des milieux poreux, cette fois avec l'exposant $\alpha = \gamma + 1$.

9.4.2 Solutions auto-similaires.

Considérons donc l'équation des milieux poreux sous la forme

$$\partial_t u(t, x) = \Delta_x (u(t, x)^\alpha), \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0,$$

en supposant que

$$\alpha > 1,$$

et cherchons les valeurs de $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}$ pour lesquelles

$$\lambda^a u(\lambda t, \lambda^b x) \text{ est solution de l'équation des milieux poreux}$$

pour tout $\lambda > 0$ sachant que u est solution de cette même équation. Comme

$$\partial_t (\lambda^a u(\lambda t, \lambda^b x)) = \lambda^{a+1} \partial_t u(\lambda t, \lambda^b x)$$

et

$$\Delta_x \left((\lambda^a u(\lambda t, \lambda^b x))^\alpha \right) = \lambda^{a\alpha+2b} (\Delta_x u^\alpha)(\lambda t, \lambda^b x),$$

on trouve que a et b doivent vérifier la relation

$$a + 1 = a\alpha + 2b.$$

Supposons cette relation réalisée, et choisissons $\lambda = 1/t$: on va donc chercher une solution $u(t, x)$ de l'équation des milieux poreux sous la forme

$$u(t, x) = \frac{1}{t^a} U \left(\frac{x}{t^b} \right), \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0,$$

où $U = u(1, \cdot)$. Notons y la nouvelle variable

$$y = \frac{x}{t^b}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x) &= -at^{-a-1}U(t^{-b}x) - bt^{-a-b-1}x \cdot \nabla U(t^{-b}x) \\ &= -at^{-a-1}U(t^{-b}x) - bt^{-a-1}(t^{-b}x) \cdot \nabla U(t^{-b}x) \\ &= -at^{-a-1}U(y)\Big|_{y=t^{-b}x} - bt^{-a-1}y \cdot \nabla U(y)\Big|_{y=t^{-b}x}.\end{aligned}$$

tandis que

$$\Delta_x \left((t^{-a}U(t^{-b}x))^\alpha \right) = t^{-a\alpha-2b} \Delta(U^\alpha)(t^{-b}x) = t^{-a\alpha-2b} \Delta(U^\alpha(y))\Big|_{y=t^{-b}x}.$$

Par conséquent, la fonction u définie ci-dessus à partir de la fonction U est solution de l'équation des milieux poreux si

$$-at^{-a-1}U(y)\Big|_{y=t^{-b}x} - bt^{-a-1}y \cdot \nabla U(y)\Big|_{y=t^{-b}x} = t^{-a\alpha-2b} \Delta(U^\alpha(y))\Big|_{y=t^{-b}x}$$

Supposons que

$$a + 1 = a\alpha + 2b;$$

alors l'égalité ci-dessus s'écrit

$$\Delta(U^\alpha(y)) + by \cdot \nabla U(y) + aU(y) = 0, \quad y \in \mathbf{R}^N.$$

Pour aller plus loin, supposons la fonction U radiale, c'est-à-dire de la forme

$$U(y) = V(|y|).$$

Rappelons la formule donnant le laplacien d'une fonction radiale dans \mathbf{R}^N (cf. note 3 du chapitre 7 : pour tout $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}_+^*)$, on a

$$\Delta_y(\phi(|y|)) = \phi''(|y|) + \frac{N-1}{|y|} \phi'(|y|), \quad y \in \mathbf{R}^N.$$

Ainsi

$$(V^\alpha)''(r) + \frac{N-1}{r} (V^\alpha)'(r) + brV'(r) + aV(r) = 0, \quad \text{pour tout } r > 0.$$

Supposons que $a = Nb$; multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus par r^{N-1} , on met l'égalité ci-dessus sous la forme

$$(r^{N-1} (V^\alpha)')' + (br^N V)' = 0, \quad r > 0.$$

On en déduit que

$$r^{N-1} (V^\alpha)' + br^N V = \text{Const.}, \quad r > 0$$

et, en supposant que $U(y) = 0$ pour tout $y \in \mathbf{R}^N$ tel que $|y|$ soit assez grand, on trouve que la constante d'intégration ci-dessus est nulle.

L'équation différentielle

$$(V^\alpha)' + brV = 0 \text{ pour tout } r > 0 \text{ avec } \lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = 0$$

admet pour solutions non identiquement nulles toutes les fonctions de la forme

$$V(r) = (1 - \frac{1}{\alpha})^{1/(\alpha-1)} (c - \frac{1}{2}br^2)_+^{1/(\alpha-1)}, \quad r > 0$$

où c est une constante positive quelconque, et on a noté

$$z_+ = \max(z, 0), \quad z \in \mathbf{R}.$$

Que la fonction V définie par la formule ci-dessus soit solution de l'équation différentielle sur $\mathbf{R}_+ \setminus \{\sqrt{2c/b}\}$ découle d'un calcul trivial. Rappelons d'autre part que la fonction définie par

$$\chi_+^\lambda : \mathbf{R} \ni z \mapsto \frac{z_+^\lambda}{\Gamma(\lambda + 1)}$$

pour tout $\lambda > -1$ vérifie la relation

$$(\chi_+^\lambda)^{(n)} = \chi_+^{\lambda-n} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R})$$

(voir Exemple 3.6.7). On en déduit que

$$V(r) = (1 - \frac{1}{\alpha})^{1/(\alpha-1)} \Gamma(\frac{\alpha}{\alpha-1}) \chi_+^{1/(\alpha-1)} (c - \frac{1}{2}br^2)$$

vérifie

$$V'(r) = -b(1 - \frac{1}{\alpha})^{1/(\alpha-1)} \Gamma(\frac{\alpha}{\alpha-1}) r \chi_+^{(2-\alpha)/(\alpha-1)} (c - \frac{1}{2}br^2) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^*)$$

tandis que

$$\begin{aligned} (V(r)^\alpha)' &= -b(1 - \frac{1}{\alpha})^{\alpha/(\alpha-1)} \Gamma(1 + \frac{\alpha}{\alpha-1}) r \chi_+^{1/(\alpha-1)} (c - \frac{1}{2}br^2) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^*) \\ (V(r)^\alpha)'' &= -b(1 - \frac{1}{\alpha})^{\alpha/(\alpha-1)} \Gamma(1 + \frac{\alpha}{\alpha-1}) \chi_+^{1/(\alpha-1)} (c - \frac{1}{2}br^2) \\ &\quad + b^2(1 - \frac{1}{\alpha})^{\alpha/(\alpha-1)} \Gamma(1 + \frac{\alpha}{\alpha-1}) r^2 \chi_+^{(2-\alpha)/(\alpha-1)} (c - \frac{1}{2}br^2) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^*). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $c > 0$ fixé, en choisissant

$$a = \frac{N}{N(\alpha-1)+2} \text{ et } b = \frac{1}{N(\alpha-1)+2},$$

on trouve que la fonction

$$U(y) = (1 - \frac{1}{\alpha})^{1/(\alpha-1)} (c - \frac{1}{2}b|y|^2)_+^{1/(\alpha-1)}$$

est solution de l'équation

$$\Delta(U^\alpha(y)) + by \cdot \nabla U(y) + aU(y) = 0 \text{ sur } \mathbf{R}^N \setminus \{0\}.$$

Comme la fonction U ci-dessus est clairement de classe C^∞ au voisinage de $y = 0$, l'EDP

$$\Delta(U^\alpha(y)) + by \cdot \nabla U(y) + aU(y) = 0$$

vaut au sens des distributions sur \mathbf{R}^N .

On résume l'analyse faite ci-dessus dans la

Proposition 9.4.1 (Solutions de Barenblatt) *Soient $N \geq 1$ et $\alpha > 1$. Pour*

$$a = \frac{N}{N(\alpha - 1) + 2} \text{ et } b = \frac{1}{N(\alpha - 1) + 2},$$

la fonction

$$u(t, x) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \frac{1}{t^a} \left(c - \frac{b|x|^2}{2t^{2b}}\right)_+^{1/(\alpha-1)}$$

est, pour tout $c > 0$, solution au sens des distributions de l'équation des milieux poreux

$$\partial_t u - \Delta_x(u^\alpha) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N).$$

On remarque sur cet exemple que

(a) pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto u(t, x)$ est continue et à valeurs positives ou nulles et

$$\text{supp}(u(t, \cdot)) = \overline{B(0, \frac{2ct^{2b}}{b})};$$

autrement dit, la frontière du support de la fonction $x \mapsto u(t, x)$ est un front sphérique qui se propage à vitesse finie pour $t > 0$;

(b) pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto u(t, x)$ est continue mais pas de classe C^1 sur \mathbf{R}^N , tandis que la fonction $x \mapsto u(t, x)^\alpha$ est de classe C^1 mais pas C^2 sur \mathbf{R}^N .

On a vu que, dans le cas du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur linéaire, il y a à la fois propagation à vitesse infinie du bord du support de la donnée initiale et régularisation analytique instantanée de la donnée initiale. Dans le cas de l'équation des milieux poreux, qui est une variante non linéaire de l'équation de la chaleur, la propagation du bord du support de la donnée initiale s'effectue bien à vitesse finie, mais on perd la propriété de régularisation de la donnée initiale.

9.5 Prolongement de la solution de l'équation de Hopf après l'apparition des ondes de choc.

On a vu au chapitre 2 que le problème de Cauchy pour l'équation de Hopf

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + u(t, x) \partial_x u(t, x) &= 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= u^{in}, \end{aligned}$$

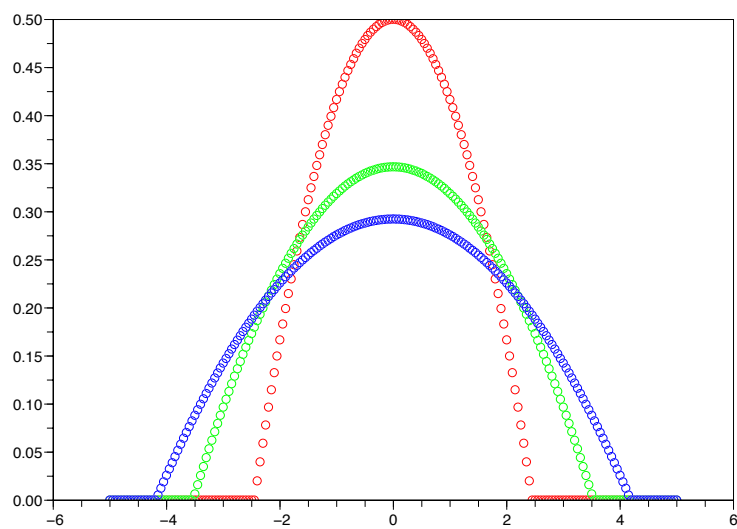


FIGURE 9.1 – Graphe de la solution de Barenblatt en fonction de x à t fixé. Cas $N = 1$ et $\alpha = 2$. Valeurs du temps $t = 1$ (en rouge), $t = 3$ (en vert), $t = 5$ (en bleu).

n'admet en général de solution de classe C^1 que localement en temps, c'est-à-dire sur un domaine maximal de la forme

$$[0, T(u^{in})[\times \mathbf{R}^N \text{ où } T(u^{in}) = \frac{1}{\sup_{z \in \mathbf{R}} (\max(0, -(u^{in})'(z)))}$$

— avec la convention $1/0 = +\infty$.

Nous avons expliqué à la fin du chapitre 2 qu'il est pourtant possible de prolonger la solution de l'équation de Hopf en une fonction qui admet des discontinuités de première espèce et n'est donc plus de classe C^1 , mais qui, en revanche, est solution de l'équation de Hopf en un sens généralisé — très exactement au sens des distributions sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$.

Nous allons montrer dans ce qui suit une façon d'effectuer ce prolongement. L'importance de cette question vient de ce que l'équation de Hopf est un modèle très simplifié des équations de la mécanique des fluides, et que l'étude du prolongement de la solution après $T(u^{in})$ correspond au problème de la formation des ondes de choc.

L'idée que l'on va utiliser pour obtenir ce prolongement — idée qui provient précisément de l'analogie avec la mécanique des fluides — consiste à considérer, au lieu de l'équation de Hopf, l'équation de Burgers

$$\begin{aligned} \partial_t u_\epsilon(t, x) + u_\epsilon(t, x) \partial_x u_\epsilon(t, x) &= \frac{1}{2} \epsilon \partial_x^2 u_\epsilon, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u_\epsilon|_{t=0} &= u^{in} \end{aligned}$$

pour $\epsilon > 0$.

Le terme $\frac{1}{2} \epsilon \partial_x^2 u_\epsilon$ ajouté au second membre de l'équation de Hopf est analogue aux termes de viscosité que l'on ajoute aux équations d'Euler de la mécanique des fluides parfaits pour aboutir aux équations de Navier-Stokes des fluides visqueux. La viscosité doit, en principe empêcher l'apparition d'ondes de choc sous la forme de discontinuités — plus exactement, les ondes de choc sont lissées par l'effet des termes visqueux en profils dont l'épaisseur caractéristique est de l'ordre de $\sqrt{\epsilon}$.

Une autre façon de voir que l'ajout du terme $\epsilon \partial_x^2 u_\epsilon$ au membre de droite de l'équation de Hopf doit en lisser la solution consiste à écrire cette équation sous la forme

$$\partial_t u_\epsilon(t, x) - \frac{1}{2} \epsilon \partial_x^2 u_\epsilon(t, x) = -u_\epsilon(t, x) \partial_x u_\epsilon(t, x)$$

et à espérer que l'effet régularisant de l'équation de la chaleur au membre de gauche de cette égalité soit suffisant pour combattre la non linéarité au membre de droite — qui est le terme responsable de la perte de régularité en temps fini.

Le prolongement de la solution de l'équation de Hopf sera obtenu en montrant

- (a) que l'équation de Burgers admet une solution globale en temps pour tout $\epsilon > 0$; et
- (b) que la famille u_ϵ ainsi obtenue converge lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ vers une solution au sens des distributions de l'équation de Hopf.

Il se trouve que les deux points (a) et (b) ci-dessus se simplifient considérablement grâce à une transformation permettant de ramener la solution de l'équation de Burgers à celle d'une équation de la chaleur, pour laquelle on va utiliser la formule de représentation explicite de la solution donnée au Théorème 9.2.1.

9.5.1 La transformation de Cole-Hopf

Cette transformation consiste à ramener l'équation de Burgers

$$\partial_t u_\epsilon(t, x) - \frac{1}{2}\epsilon \partial_x^2 u_\epsilon(t, x) = -u_\epsilon(t, x) \partial_x u_\epsilon(t, x)$$

à l'équation de la chaleur

$$\partial_t \phi_\epsilon(t, x) - \frac{1}{2}\epsilon \partial_x^2 \phi_\epsilon(t, x) = 0.$$

On va chercher ϕ_ϵ sous la forme

$$\phi_\epsilon(t, x) = e^{-\lambda U(t, x)}$$

où λ est une constante à déterminer en fonction de ϵ et U une fonction de classe (au moins) C^3 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$.

On calcule sans difficulté

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_\epsilon &= -\lambda \partial_t U e^{-\lambda U}, & \partial_x \phi_\epsilon &= -\lambda \partial_x U e^{-\lambda U} \\ \partial_x^2 \phi_\epsilon &= (-\lambda \partial_x U)^2 e^{-\lambda U} - \lambda \partial_x^2 U e^{-\lambda U}. \end{aligned}$$

de sorte que

$$\partial_t \phi_\epsilon - \frac{1}{2}\epsilon \partial_x^2 \phi_\epsilon = -\lambda e^{-\lambda U} \left(\partial_t U + \frac{1}{2}\epsilon \lambda (\partial_x U)^2 - \frac{1}{2}\epsilon \partial_x^2 U \right).$$

Choisissons $\lambda = 1/\epsilon$: alors

$$\phi_\epsilon(t, x) = e^{-U_\epsilon(t, x)/\epsilon}$$

est solution de

$$\partial_t \phi_\epsilon - \frac{1}{2}\epsilon \partial_x^2 \phi_\epsilon = 0$$

si et seulement si

$$\partial_t U_\epsilon + \frac{1}{2} (\partial_x U_\epsilon)^2 - \frac{1}{2}\epsilon \partial_x^2 U_\epsilon = 0.$$

La fonction U_ϵ étant de classe C^3 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, on trouve en dérivant par rapport à x chaque membre de l'égalité ci-dessus que la fonction

$$u_\epsilon = \partial_x U_\epsilon \text{ de classe } C^2 \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$$

vérifie l'équation de Burgers

$$\partial_t u_\epsilon + \frac{1}{2} \partial_x (u_\epsilon^2) - \frac{1}{2}\epsilon \partial_x^2 u_\epsilon = 0$$

ou encore, de manière équivalente

$$\partial_t u_\epsilon + u_\epsilon \partial_x u_\epsilon - \frac{1}{2}\epsilon \partial_x^2 u_\epsilon = 0.$$

Autrement dit, pour résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t u_\epsilon + u_\epsilon \partial_x u_\epsilon - \frac{1}{2} \epsilon \partial_x^2 u_\epsilon &= 0, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u_\epsilon|_{t=0} &= u^{in} \end{aligned}$$

avec, disons $u^{in} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, on procède comme suit :

(a) on pose

$$U^{in}(x) = \int_{-\infty}^x u^{in}(z) dz, \quad x \in \mathbf{R};$$

(b) ensuite on résoud le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_\epsilon - \frac{1}{2} \epsilon \partial_x^2 \phi_\epsilon &= 0, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ \phi_\epsilon|_{t=0} &= e^{-U^{in}/\epsilon} \end{aligned}$$

(c) enfin on calcule $u_\epsilon(t, x)$ par la formule

$$u_\epsilon(t, x) = \partial_x (-\epsilon \ln \phi_\epsilon) = -\epsilon \frac{\partial_x \phi_\epsilon(t, x)}{\phi_\epsilon(t, x)}.$$

Le calcul se résume par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} u^{in} & \longrightarrow & \phi_\epsilon|_{t=0} = e^{-U^{in}/\epsilon} \\ & & \downarrow \\ u_\epsilon(t, \cdot) & \longleftarrow & \phi_\epsilon(t, \cdot) \end{array}$$

où les deux flèches horizontales correspondent à la transformation de Cole-Hopf et son inverse, tandis que la flèche verticale correspond au semi-groupe de la chaleur $e^{\frac{1}{2}\epsilon t \Delta_x}$.

Remarquons que le principe du maximum (du minimum, en fait) pour l'équation de la chaleur garantit que

$$\phi_\epsilon \geq 0, \quad \text{puisque } \phi_\epsilon|_{t=0} = e^{-U^{in}/\epsilon} > 0.$$

Il suffira donc de faire voir que $\phi_\epsilon > 0$ pour que les calculs de l'étape (c) soient bien légitimes.

Le point (a) ne pose pas de problème : U^{in} est bien définie puisque u^{in} est à décroissance rapide à l'infini; de plus U^{in} est de classe C^∞ sur \mathbf{R} comme primitive de $u^{in} \in C^\infty(\mathbf{R})$.

Pour ce qui est du point (b), on utilise la formule explicite donnant la solution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur donnée dans la Proposition 9.2.2 : quitte à changer t en ϵt pour se ramener à l'équation de la chaleur normalisée comme dans les sections précédentes, on a

$$\phi_\epsilon(t, \cdot) = e^{\frac{1}{2}\epsilon t \Delta_x} \left(e^{-U^{in}/\epsilon} \right), \quad t \geq 0,$$

ce qui s'écrit encore, au moyen de la solution élémentaire E_1 de l'opérateur $\partial_t - \frac{1}{2}\partial_x^2$ (à support dans $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$)

$$\phi_\epsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon t}} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\epsilon t}} e^{-\frac{U^{in}(y)}{\epsilon}} dy, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0.$$

Justifions cette dernière formule. Pour pouvoir appliquer directement la Proposition 9.2.2, on fera dans toute la suite l'hypothèse

$$\int_{\mathbf{R}} u^{in}(y) dy = 0.$$

Ainsi, on a

$$U^{in}(y) \rightarrow 0 \text{ quand } |y| \rightarrow \infty$$

de sorte que, pour tout $\epsilon > 0$ fixé

$$e^{-U^{in}(y)/\epsilon} \rightarrow 1 \text{ pour } |y| \rightarrow \infty.$$

On applique alors directement la Proposition 9.2.2 au problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi_\epsilon - \frac{1}{2} \partial_x^2 \Phi_\epsilon &= 0, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ \Phi_\epsilon|_{t=0} &= e^{-U^{in}/\epsilon} - 1, \end{aligned}$$

en notant que

$$e^{-U^{in}/\epsilon} - 1 \in L^2(\mathbf{R}) \text{ puisque } U^{in} \text{ est à décroissance rapide}$$

et que

$$\phi_\epsilon(t, x) = \Phi_\epsilon(t/\epsilon, x) + 1.$$

On en déduit la formule ci-dessus pour ϕ_ϵ , en tenant compte de ce que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon t}} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\epsilon t}} dy = 1, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0.$$

Par ailleurs, pour tout $t > 0$ et tout compact $K \subset \mathbf{R}$

$$\frac{|x-y|^2}{2t} + U^{in}(y) \simeq \frac{|x-y|^2}{2t} \text{ uniformément en } x \in K \text{ pour } y \rightarrow \infty$$

de sorte qu'il existe des constantes $C, c > 0$ pouvant dépendre de t, ϵ et K telles que

$$\left| \partial_x e^{-\frac{(x-y)^2}{2\epsilon t} - \frac{U^{in}(y)}{\epsilon}} \right| = \left| \frac{x-y}{\epsilon t} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\epsilon t} - \frac{U^{in}(y)}{\epsilon}} \right| \leq C e^{-c\frac{y^2}{2\epsilon t}}$$

pour tout $x \in K$ et tout $y \in \mathbf{R}$. Comme le membre de droite de cette inégalité est intégrable sur \mathbf{R} , on peut dériver sous le signe somme — cf. Note 3 du chapitre 1 — et on trouve que

$$\partial_x \phi_\epsilon(t, x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon t}} \int_{\mathbf{R}} \frac{x-y}{\epsilon t} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\epsilon t} - \frac{U^{in}(y)}{\epsilon}} dy, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0.$$

Observons que $\phi_\epsilon > 0$ comme intégrale de la fonction continue

$$y \mapsto e^{-\frac{(x-y)^2}{2\epsilon t} - \frac{U^{in}(y)}{\epsilon}} \text{ strictement positive sur } \mathbf{R}.$$

On conclut ainsi l'étape (c), en obtenant la formule explicite

$$u_\epsilon(t, x) = \frac{\int_{\mathbf{R}} \frac{x-y}{t} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\epsilon t} - \frac{U^{in}(y)}{\epsilon}} dy}{\int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\epsilon t} - \frac{U^{in}(y)}{\epsilon}} dy}, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0,$$

représentant la solution du problème de Cauchy pour l'équation de Burgers

$$\begin{aligned} \partial_t u_\epsilon + u_\epsilon \partial_x u_\epsilon - \frac{1}{2} \epsilon \partial_x^2 u_\epsilon &= 0, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u_\epsilon|_{t=0} &= u^{in}. \end{aligned}$$

Résumons ce que nous avons démontré dans la

Proposition 9.5.1 (Existence et unicité pour l'équation de Burgers) *Soit $u^{in} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ telle que*

$$\int_{\mathbf{R}} u^{in}(x) dx = 0.$$

Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une unique solution u_ϵ de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^ \times \mathbf{R}$ et telle que*

$$(t, x) \mapsto \int_{-\infty}^x u_\epsilon(t, z) dz \text{ soit continue et bornée sur } \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$$

au problème de Cauchy pour l'équation de Burgers ci-dessus avec viscosité $\epsilon/2$ et donnée initiale u^{in} . Cette solution est donnée par la formule

$$u_\epsilon(t, x) = \frac{\int_{\mathbf{R}} \frac{x-y}{t} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\epsilon t} - \frac{U^{in}(y)}{\epsilon}} dy}{\int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\epsilon t} - \frac{U^{in}(y)}{\epsilon}} dy}, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0,$$

ou encore, de manière équivalente

$$u_\epsilon(t, x) = \frac{\int_{\mathbf{R}} u^{in}(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{2\epsilon t} - \frac{U^{in}(y)}{\epsilon}} dy}{\int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\epsilon t} - \frac{U^{in}(y)}{\epsilon}} dy}, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0.$$

En particulier, le principe du maximum (faible) vaut pour l'équation de Burgers :

$$\text{si } m \leq u^{in} \leq M \text{ sur } \mathbf{R}, \text{ alors } m \leq u_\epsilon(t, x) \leq M \text{ pour tout } x \in \mathbf{R} \text{ et } t \geq 0.$$

Démonstration. La discussion précédent l'énoncé de la proposition montre l'existence de u_ϵ , ainsi que la première formule explicite. La seconde formule découle de la première, car

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{x-y}{t} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\epsilon t} - \frac{U^{in}(y)}{\epsilon}} dy - \int_{\mathbf{R}} u^{in}(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{2\epsilon t} - \frac{U^{in}(y)}{\epsilon}} dy = 0.$$

En effet

$$\frac{x-y}{t} - u^{in}(y) = -\partial_y \left(\frac{(x-y)^2}{2t} + U^{in}(y) \right)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \left(\frac{x-y}{t} - u^{in}(y) \right) e^{-\frac{(x-y)^2}{2\epsilon t} - \frac{U^{in}(y)}{\epsilon}} dy \\ = \int_{\mathbf{R}} -\partial_y \left(\frac{(x-y)^2}{2t} + U^{in}(y) \right) e^{-\frac{(x-y)^2}{2\epsilon t} - \frac{U^{in}(y)}{\epsilon}} dy \\ = \left[\epsilon e^{-\frac{(x-y)^2}{2\epsilon t} - \frac{U^{in}(y)}{\epsilon}} \right]_{y=-\infty}^{y=+\infty} = 0 \end{aligned}$$

puisque $U^{in} \in L^\infty(\mathbf{R})$, ce qui entraîne que

$$\frac{(x-y)^2}{2t} + U^{in}(y) \rightarrow +\infty \text{ pour } |y| \rightarrow \infty$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $t > 0$.

Le principe du maximum est une conséquence triviale de la deuxième formule explicite.

Que u_ϵ soit de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ est immédiat. En effet, la fonction Φ solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi_\epsilon - \frac{1}{2} \partial_x^2 \Phi_\epsilon &= 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \\ \Phi_\epsilon(0, x) &= \exp \left(-\frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^x u^{in}(z) dz \right) - 1, \end{aligned}$$

donnée par la formule

$$\Phi_\epsilon(t, \cdot) = E(t, \cdot) \star_x \left(\exp \left(-\frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^x u^{in}(z) dz \right) - 1 \right)$$

est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, comme solution de l'équation de la chaleur à donnée initiale dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ — voir Théorème 9.3.2. On conclut grâce au fait que

$$\Phi_\epsilon > -1 \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$$

et que u_ϵ est donnée en fonction de Φ_ϵ par la formule

$$u_\epsilon(t, x) = -\partial_x \epsilon \ln(1 + \Phi_\epsilon(t/\epsilon, x)).$$

(Pour ce qui est de l'inégalité stricte portant sur Φ_ϵ , observons que

$$E(t, \cdot) \star_x \exp\left(-\frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^x u^{in}(z) dz\right) > 0$$

comme intégrale d'une fonction positive ou nulle non identiquement nulle.)

Il reste à démontrer l'unicité de la solution u_ϵ ainsi obtenue. Soit v_ϵ une autre solution du même problème de Cauchy, de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et telle que

$$(t, x) \mapsto \int_{-\infty}^x v_\epsilon(t, z) dz \text{ soit continue bornée sur } \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N.$$

On vérifie alors sans peine que

$$\Psi_\epsilon(t, x) = \exp\left(-\frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^x v_\epsilon(t/\epsilon, z) dz\right) - 1$$

est une solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t \Psi_\epsilon - \frac{1}{2} \partial_x^2 \Psi_\epsilon &= 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \\ \Psi_\epsilon(0, x) &= \exp\left(-\frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^x u^{in}(z) dz\right) - 1. \end{aligned}$$

Par unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur, on conclut que $\Psi_\epsilon = \Phi_\epsilon$ et donc que $v_\epsilon = u_\epsilon$ d'où l'unicité de solution du problème de Cauchy pour l'équation de Burgers. ■

9.5.2 La formule de Lax-Oleinik

Nous allons maintenant faire tendre ϵ vers 0 et montrer qu'alors $u_\epsilon(t, x)$ converge vers une fonction u définie pour tout $t > 0$ et qui est un prolongement de la solution locale en temps du problème de Cauchy pour l'équation de Hopf.

L'hypothèse

$$u^{in} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}) \text{ et } \int_{\mathbf{R}} u^{in}(z) dz = 0$$

entraîne que

$$U^{in}(x) = \int_{-\infty}^x u^{in}(z) dz$$

définit une fonction

$$U^{in} \in C^\infty(\mathbf{R}), \quad \text{telle que } U^{in}(x) \rightarrow 0 \text{ lorsque } |x| \rightarrow \infty.$$

Considérons alors, pour tout $t > 0$, la fonction F définie par

$$F(t, x, y) = \frac{(x-y)^2}{2t} + U^{in}(y), \quad x, y \in \mathbf{R}, \quad t > 0.$$

Cette fonction vérifie

$$F \in C^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}) \text{ et } F(t, x, y) \rightarrow +\infty \text{ pour } t, x \text{ fixés et } |y| \rightarrow \infty.$$

Donc

$$\inf_{y \in \mathbf{R}} F(t, x, y) \text{ est atteint,}$$

et

$$J_{t,x} = \{z \in \mathbf{R} \mid F(t, x, z) = \inf_{y \in \mathbf{R}} F(t, x, y)\} \text{ est compact,}$$

car c'est un fermé borné de \mathbf{R} .

Dans toute la suite, on notera

$$[y_-(t, x), y_+(t, x)] = \text{le plus petit segment contenant } J_{t,x}.$$

Evidemment, $y_{\pm}(t, x) \in J_{t,x}$.

Commençons par étudier de plus près ces nombres $y_{\pm}(t, x)$.

Lemme 9.5.2 *Pour tout $t > 0$,*

$$x_1 < x_2 \text{ entraîne que } y_+(t, x_1) \leq y_-(t, x_2).$$

En particulier, les fonctions $x \mapsto y_{\pm}(t, x)$ sont croissantes sur \mathbf{R} .

De plus, $x \mapsto y_-(t, x)$ est continue à gauche, $x \mapsto y_+(t, x)$ continue à droite sur \mathbf{R} , et

$$S_t = \{x \in \mathbf{R} \mid y_-(t, x) < y_+(t, x)\} \text{ est fini ou dénombrable.}$$

Démonstration. En effet, soit $y < y_+(t, x_1)$; on a alors

$$\begin{aligned} F(t, x_2, y) - F(t, x_2, y_+(t, x_1)) &= (F(t, x_2, y) - F(t, x_1, y)) \\ &\quad + (F(t, x_1, y) - F(t, x_1, y_+(t, x_1))) \\ &\quad + (F(t, x_1, y_+(t, x_1)) - F(t, x_2, y_+(t, x_1))). \end{aligned}$$

Comme le second terme dans le membre de droite est positif ou nul puisque

$$F(t, x, y_+(t, x_1)) = \inf_{y \in \mathbf{R}} F(t, x_1, y)$$

on en déduit que, si $x_1 < x_2$ et $y < y_+(t, x_1)$, alors

$$\begin{aligned} &F(t, x_2, y) - F(t, x_2, y_+(t, x_1)) \\ &\geq (F(t, x_2, y) - F(t, x_1, y)) + (F(t, x_1, y_+(t, x_1)) - F(t, x_2, y_+(t, x_1))) \\ &= \frac{1}{2t} ((x_2 - y)^2 - (x_1 - y)^2) - \frac{1}{2t} ((x_2 - y_+(t, x_1))^2 - (x_1 - y_+(t, x_1))^2) \\ &= \frac{1}{t} (x_1 - x_2)y - \frac{1}{t} (x_1 - x_2)y_+(t, x_1) = \frac{1}{t} (x_1 - x_2)(y - y_+(t, x_1)) > 0. \end{aligned}$$

On en déduit que, si $x_1 < x_2$, alors

$$\inf_{y \in \mathbf{R}} F(t, x_2, y) = \inf_{y \geq y_+(t, x_1)} F(t, x_2, y),$$

ce qui entraîne que $y_+(t, x_1) \leq y_-(t, x_2)$. Et donc, pour tout $t > 0$, on a

$$x_1 < x_2 \Rightarrow y_-(t, x_1) \leq y_+(t, x_1) \leq y_-(t, x_2) \leq y_+(t, x_2),$$

ce qui montre que $y_{\pm}(t, \cdot)$ est croissante.

Montrons que $x \mapsto y_-(t, x)$ est continue à gauche sur \mathbf{R} . Soient donc $x \in \mathbf{R}$ et $x_n \uparrow x$; évidemment

$$y_n := y_-(t, x_n) \uparrow \sup_n y_-(t, x_n) = y_* \leq y_-(t, x).$$

Si on avait $y_* < y_-(t, x)$, alors, par continuité de F

$$\inf_{y \in \mathbf{R}} F(t, x_n, y) = F(t, x_n, y_n) \rightarrow F(t, x, y_*) > \inf_{y \in \mathbf{R}} F(t, x, y) \text{ pour } n \rightarrow \infty.$$

Or ceci est impossible car la fonction

$$x \mapsto \inf_{y \in \mathbf{R}} F(t, x, y) \text{ est continue sur } \mathbf{R}$$

puisque F est continue et tend vers l'infini pour $|y| \rightarrow \infty$ uniformément en (t, x) sur tout compact de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ — voir une démonstration dans l'appendice de cette section.

On montrerait de même que $x \mapsto y_+(t, x)$ est continue à droite, en considérant cette fois une suite $x_n \downarrow x$.

Les fonctions $x \mapsto y_{\pm}(t, x)$, étant croissantes sur \mathbf{R} , n'y admettent que des discontinuités de première espèce, et les points de discontinuités forment un ensemble au plus dénombrable. Comme $y_+(t, \cdot)$ est continue à droite et $y_-(t, \cdot)$ continue à gauche, on a

$$\begin{aligned} y_+(t, x) &\leq y_-(t, x+0) \leq y_+(t, x+0) = y_+(t, x), \\ y_-(t, x) &= y_-(t, x-0) \leq y_+(t, x-0) \leq y_-(t, x), \end{aligned}$$

de sorte que

$$y_-(t, x+0) = y_+(t, x) \text{ et } y_+(t, x-0) = y_-(t, x).$$

Donc, si $x \in S_t$, on a

$$y_-(t, x-0) \leq y_+(t, x-0) < y_-(t, x+0) \leq y_+(t, x+0).$$

Autrement dit, S_t est inclus dans l'ensemble des points de discontinuité des fonctions monotones $x \mapsto y_{\pm}(t, x)$, de sorte qu'il est au plus dénombrable. ■

D'après ce qui précède, pour tout $t > 0$ et tout $x \notin S_t$, alors

$$F(t, x, y) > F(t, x, y_{\pm}(t, x)) \text{ pour tout } y \neq y_{\pm}(t, x).$$

On en déduit le comportement de $u_{\epsilon}(t, x)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Lemme 9.5.3 Pour tout $t > 0$ et tout $x \notin S_t$, on a

$$u_\epsilon(t, x) \rightarrow \frac{x - y_\pm(t, x)}{t} \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Démonstration. On a en effet, pour tout $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \frac{x-y}{t} e^{-\frac{1}{\epsilon} F(t,x,y)} dy &= \int_{-\infty}^{y_+(t,x)+\eta} \frac{x-y}{t} e^{-\frac{1}{\epsilon} F(t,x,y)} dy + \int_{y_+(t,x)+\eta}^{+\infty} \frac{x-y}{t} e^{-\frac{1}{\epsilon} F(t,x,y)} dy \\ &\geq \frac{x - y_+(t, x) - \eta}{t} \int_{-\infty}^{y_+(t,x)+\eta} e^{-\frac{1}{\epsilon} F(t,x,y)} dy + \int_{y_+(t,x)+\eta}^{+\infty} \frac{x-y}{t} e^{-\frac{1}{\epsilon} F(t,x,y)} dy \end{aligned}$$

Or, par définition de $y_+(t, x)$, on a

$$\inf_{y \geq y_+(t,x)+\eta} F(t, x, y) > \inf_{y \in \mathbf{R}} F(t, x, y) = F(t, x, y_\pm(t, x)),$$

de sorte que

$$\frac{\int_{y_+(t,x)+\eta}^{+\infty} \frac{x-y}{t} e^{-\frac{1}{\epsilon} F(t,x,y)} dy}{\int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{1}{\epsilon} F(t,x,y)} dy} \rightarrow 0 \text{ pour } \epsilon \rightarrow 0^+,$$

et que

$$\frac{\int_{-\infty}^{y_+(t,x)+\eta} e^{-\frac{1}{\epsilon} F(t,x,y)} dy}{\int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{1}{\epsilon} F(t,x,y)} dy} \rightarrow 1 \text{ pour } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Par conséquent

$$\underline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0^+} u_\epsilon(t, x) \geq \frac{x - y_+(t, x) - \eta}{t},$$

de sorte qu'en faisant $\eta \rightarrow 0^+$, on trouve que

$$\underline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0^+} u_\epsilon(t, x) \geq \frac{x - y_+(t, x)}{t},$$

On démontre de même que

$$\overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0^+} u_\epsilon(t, x) \leq \frac{x - y_-(t, x)}{t},$$

de sorte que

$$\frac{x - y_+(t, x)}{t} \leq \underline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0^+} u_\epsilon(t, x) \leq \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0^+} u_\epsilon(t, x) \leq \frac{x - y_-(t, x)}{t},$$

pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbf{R}$, d'où le résultat, puisque

$$y_+(t, x) = y_-(t, x) \text{ comme } x \notin S_t.$$

■

Nous sommes maintenant en mesure de prolonger la solution de classe C^1 locale en temps de l'équation de Hopf construite au chapitre 2.

Théorème 9.5.4 (Formule de Lax-Oleinik) *Soit $u^{in} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ telle que*

$$\int_{\mathbf{R}} u^{in}(z) dz = 0.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, soit u_ϵ la solution du problème de Cauchy pour l'équation de Burgers

$$\begin{aligned} \partial_t u_\epsilon + u_\epsilon \partial_x u_\epsilon - \frac{1}{2} \epsilon \partial_x^2 u_\epsilon &= 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \\ u_\epsilon|_{t=0} &= u^{in}. \end{aligned}$$

Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, on a $u_\epsilon \rightarrow u$ p.p. sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, où u est une solution de l'équation de Hopf écrite sous la forme

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}).$$

Cette solution est donnée par la formule explicite

$$u(t, x) = \frac{x - y_\pm(t, x)}{t}, \text{ pour tout } t > 0 \text{ et } x \in \mathbf{R} \text{ tel que } y_-(t, x) = y_+(t, x).$$

et vérifie le principe du maximum (faible) :

$$\text{si } m \leq u^{in} \leq M \text{ sur } \mathbf{R}, \text{ alors } m \leq u(t, x) \leq M \text{ pour tout } x \in \mathbf{R} \text{ et } t \geq 0.$$

De plus, la restriction de u à $[0, T(u^{in})[\times \mathbf{R}$ est l'unique solution de classe C^1 telle que

$$u|_{t=0} = u^{in}.$$

Démonstration. La convergence p.p. de u_ϵ et la formule explicite pour la limite découlent du Lemme 9.5.3.

D'autre part, le principe du maximum pour l'équation de Burgers implique que

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})} \leq \|u^{in}\|_{L^\infty(\mathbf{R})}, \quad \text{pour tout } \epsilon > 0,$$

de sorte que la limite p.p. de u_ϵ vérifie aussi

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})} \leq \|u^{in}\|_{L^\infty(\mathbf{R})}.$$

En appliquant le théorème de convergence dominée, on montre alors que

$$u_\epsilon \rightarrow u \text{ et } u_\epsilon^2 \rightarrow u^2 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}).$$

En passant la limite au sens des distributions dans l'équation de Burgers écrite sous la forme

$$\partial_t u_\epsilon + \partial_x \left(\frac{u_\epsilon^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \epsilon \partial_x^2 u_\epsilon = 0,$$

on trouve que

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}).$$

Montrons enfin que u prolonge la solution locale de classe C^1 . Par définition,

$$T(u^{in}) = \frac{1}{\sup_{z \in \mathbf{R}} (\max(0, -(u^{in})'(z)))} \quad \text{en posant } 1/0 = +\infty,$$

de sorte que, pour tout $t \in [0, T(u^{in}[$:

$y \mapsto y + tu^{in}(y)$ est une bijection croissante et continue de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .

Par conséquent, pour tout $t \in [0, T(u^{in}[$ et tout $x \in \mathbf{R}$, il existe un unique point $y(t, x) \in \mathbf{R}$ tel que

$$y(t, x) + tu^{in}(y(t, x)) = x$$

et la fonction

$$y \mapsto \frac{(x - y)^2}{2t} + U^{in}(y)$$

est décroissante sur $] -\infty, y(t, x)[$, croissante sur $]y(t, x), \infty[$ et atteint son minimum en l'unique point $y = y(t, x)$. Autrement dit

$$y_-(t, x) = y_+(t, x) = y(t, x) \text{ pour tout } x \in \mathbf{R} \text{ et } t \in [0, T(u^{in}[$$

et

$$u(t, x) = \frac{x - y(t, x)}{t} = u^{in}(y(t, x)), \quad x \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq t < T(u^{in}).$$

Comme la définition de $y(t, x)$ ci-dessus montre qu'il s'agit du pied de la courbe caractéristique passant par x à l'instant t , cette dernière formule coïncide avec celle obtenue au chapitre 1 par la méthode des caractéristiques. Donc, la restriction de u à $[0, T(u^{in})[\times \mathbf{R}$ est la solution locale en temps de classe C^1 de l'équation de Hopf obtenue par la méthode des caractéristiques. ■

La formule explicite pour la solution globale u de l'équation de Hopf dans l'énoncé du théorème ci-dessus a été obtenue indépendamment par P. Lax et O. Oleinik.

En voici une conséquence remarquable :

Proposition 9.5.5 (Inégalité de Lax-Oleinik) *Avec les notations du Théorème 9.5.4, la solution globale u de l'équation de Hopf obtenue comme limite à viscosité évanescence de la solution de l'équation de Burgers vérifie la condition suivante :*

$$\partial_x u(t, \cdot) \leq \frac{1}{t} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_x), \text{ pour tout } t > 0.$$

(Pour $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, la notation $T \leq S$ signifie que la distribution $S - T$ est positive ou nulle sur \mathbf{R} : cf. chapitre 3, section 3.2.2.)

Démonstration. Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto y_+(t, x)$ est croissante sur \mathbf{R} et continue à droite, d'après le Lemme 9.5.2. En particulier, cette fonction est continue sauf sur un ensemble $S_t \subset \mathbf{R}$ au plus dénombrable de points où elle admet des discontinuités de première espèce, et localement bornée, de sorte qu'elle définit bien un élément de $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

D'après la formule des sauts (cf. Théorème 3.5.1)

$$\partial_x y_+(t, \cdot) = \{\partial_x y_+(t, \cdot)\} + \sum_{z \in S_t} (y_+(t, z+0) - y_+(t, z-0)) \delta_z$$

où

$$\{\partial_x y_+(t, \cdot)\} = \partial_x \left(y(t, \cdot) \Big|_{\mathbf{R} \setminus S_t} \right).$$

Comme $y_+(t, \cdot)$ est croissante

$$\{\partial_x y_+(t, \cdot)\} \geq 0 \text{ sur } \mathbf{R} \setminus S_t \text{ et } y_+(t, z+0) - y_+(t, z-0) \geq 0 \text{ pour tout } z \in S_t.$$

Par conséquent, la distribution $\partial_x y_+(t, \cdot)$ est positive ou nulle, et donc, pour tout $t > 0$

$$t \partial_x u(t, \cdot) = 1 - \partial_x y_+(t, \cdot) \leq 1 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R})$$

ce qui est précisément l'inégalité de Lax-Oleinik. ■

Comme les fonctions $x \mapsto y_{\pm}(t, x)$ sont croissantes sur \mathbf{R} , la formule explicite de Lax-Oleinik permet d'affirmer que, pour tout $t \geq T(u^{in})$, la solution prolongée par viscosité évanescence $x \mapsto u(t, x)$ n'a que des discontinuités de première espèce, et que u est nécessairement décroissante à travers chacune de ces discontinuités, d'après l'inégalité de Lax-Oleinik.

Du point de vue physique (et bien que l'équation de Hopf ne soit pas un modèle correct de la dynamique des gaz) ces discontinuités de première espèce s'interprètent comme des ondes de choc. On comprend maintenant comment se forment ces ondes de chocs à partir d'une donnée initiale u^{in} de classe C^1 . D'après l'étude faite au chapitre 2 et dans la démonstration du Théorème 9.5.4, pour $0 < t < T(u^{in})$, la fonction

$$y \mapsto \frac{(x-y)^2}{2t} + \int_{-\infty}^y u^{in}(z) dz$$

atteint son minimum sur \mathbf{R} en un point unique — l'idée étant que, pour $t > 0$ assez petit, cette fonction est proche de la fonction

$$y \mapsto \frac{(x-y)^2}{2t}$$

qui atteint son minimum en l'unique point $y = x$. Lorsque $t > 0$ augmente, le terme

$$\int_{-\infty}^y u^{in}(z) dz \text{ n'est plus une petite perturbation de } \frac{(x-y)^2}{2t}$$

de sorte que le minimum de la fonction

$$y \mapsto \frac{(x-y)^2}{2t} + \int_{-\infty}^y u^{in}(z) dz$$

peut être atteint en plusieurs points. Les points extrêmes de minimum de cette fonction, à savoir $y_-(t, x)$ et $y_+(t, x)$, déterminent l'amplitude du saut de $u(t, \cdot)$ à travers le point de choc x à l'instant t .

L'inégalité de Lax-Oleinik nous permet d'affirmer en outre que le graphe de la fonction $x \mapsto u(t, x)$ a tendance à s'aplatir sur l'axe réel lorsque $t \rightarrow +\infty$: en particulier, la force des ondes de choc diminue lorsque le temps augmente.

9.5.3 Appendice

La démonstration du Lemme 9.5.2 est basée sur l'argument suivant.

Proposition 9.5.6 *Soit $\Phi : E \times K \rightarrow \mathbf{R}$ continue, où E, K sont des espaces métriques et où K est compact. Alors, la fonction $\phi : E \rightarrow \mathbf{R}$ définie par*

$$\phi(x) = \inf_{y \in K} \Phi(x, y)$$

est continue sur E .

Démonstration. D'abord, pour tout $x \in E$, la fonction continue

$$K \ni y \mapsto \Phi(x, y)$$

atteint sa borne inférieure sur le compact K ; en particulier, $\phi(x)$ est fini.

Soit donc $x \in E$; il existe $y_* \in K$ tel que

$$\phi(x) = \inf_{y \in K} \Phi(x, y) = \Phi(x, y_*).$$

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de E arbitraire convergant vers x ; soit d'autre part une suite $(y_n)_{n \geq 1}$ convergant vers y_* dans K .

Par continuité de Φ sur $E \times K$, on a

$$\phi(x_n) = \inf_{y \in K} \Phi(x_n, y) \leq \Phi(x_n, y_n) \rightarrow \Phi(x, y_*) = \phi(x),$$

ce qui montre que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) \leq \phi(x).$$

Choisissons maintenant une sous-suite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$\phi(x_{n_k}) \rightarrow \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) \quad \text{lorsque } k \rightarrow \infty.$$

D'autre part, pour tout $k \geq 1$, choisissons $y_{n_k}^*$ dans le compact K tel que la fonction continue $\Phi(x_{n_k}, \cdot)$ atteigne sa borne inférieure sur K au point $y = y_{n_k}^*$

$$\phi(x_{n_k}) = \inf_{y \in K} \Phi(x_{n_k}, y) = \Phi(x_{n_k}, y_{n_k}^*).$$

Considérons maintenant la suite $(y_{n_k}^*)_{k \geq 1}$ à valeurs dans le compact métrique K : d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite de $(y_{n_k}^*)_{k \geq 1}$, que nous noterons $(y_{n'_k}^*)$, convergeant vers $y^* \in K$. Par continuité de Φ , on a

$$\phi(x_{n'_k}) = \inf_{y \in K} \Phi(x_{n'_k}, y) = \Phi(x_{n'_k}, y_{n'_k}^*) \rightarrow \Phi(x, y^*) = \inf_{y \in K} \Phi(x, y) = \phi(x),$$

et comme d'autre part la première suite extraite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ avait été choisie de façon à ce que

$$\phi(x_{n_k}) \rightarrow \varliminf_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) \quad \text{lorsque } k \rightarrow \infty,$$

il s'ensuit que

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) = \phi(x).$$

Au total, on a montré que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) \leq \phi(x) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n)$$

ce qui entraîne que

$$\phi(x_n) \rightarrow \phi(x) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Comme ceci vaut pour tout $x \in E$ et toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ convergeant vers x dans l'espace métrique E , on en déduit que ϕ est continue sur E . ■

Plus précisément, la démonstration du Lemme 9.5.2 utilise la variante suivante de la proposition ci-dessus.

Corollaire 9.5.7 *Soit $\Phi : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue et telle que, pour tout $L > 0$,*

$$\Phi(x, y) \rightarrow +\infty \quad \text{lorsque } |y| \rightarrow \infty \quad \text{uniformément en } x \in [-L, L].$$

Alors la fonction

$$\phi : \mathbf{R} \ni x \mapsto \inf_{y \in \mathbf{R}} \Phi(x, y)$$

est continue.

Démonstration. Il suffit évidemment de montrer que ϕ est continue sur $[-L, L]$ pour tout $L > 0$.

Par définition de ϕ , on a évidemment

$$\phi(x) \leq \Phi(x, 0) \quad \text{pour tout } x \in [-L, L].$$

L'application $x \mapsto \Phi(x, 0)$ étant continue, elle atteint sa borne supérieure sur le compact $[-L, L]$: notons M cette borne supérieure.

D'autre part, par hypothèse

$$\inf_{|x| \leq L} \Phi(x, y) \rightarrow +\infty \quad \text{lorsque } |y| \rightarrow \infty$$

de sorte qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\Phi(x, y) \geq M + 1 > \phi(x) \quad \text{pour tout } x \in [-L, L] \text{ et tout } y \text{ tel que } |y| > R.$$

Par conséquent, pour tout $x \in [-L, L]$, on a

$$\phi(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}} \Phi(x, y) = \inf_{|y| \leq R} \Phi(x, y)$$

de sorte qu'on se ramène à la proposition précédente en posant $E = [-L, L]$ et $K = [-R, R]$. ■

9.6 Exercices

Exercice 1.

Soit $u \in C^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$ solution de l'équation de la chaleur

$$\partial_t u - \frac{1}{2} \Delta_x u = 0 \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N.$$

Montrer, avec le minimum de calculs, que les fonctions

$$\begin{aligned} (t, x) &\mapsto 2t \partial_t u(t, x) + x \cdot \nabla_x u(t, x) \\ (t, x) &\mapsto 4(t \partial_t)^2 u(t, x) + 4t \partial_t (x \cdot \nabla_x u(t, x)) + (x \cdot \nabla_x)^2 u(t, x) \end{aligned}$$

sont solutions de la même équation de la chaleur que u . (Indication : on pourra considérer la fonction $u(\lambda^2 t, \lambda x)$, où $\lambda > 0$.)

Exercice 2.

Existe-t-il une solution élémentaire tempérée dans le passé de l'opérateur de la chaleur $\partial_t - \frac{1}{2} \Delta_x$, c'est-à-dire $E \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ telle que

$$\begin{aligned} (\partial_t - \frac{1}{2} \Delta_x) E &= \delta_{(t,x)=(0,0)}, \\ \text{supp}(E) &\subset \mathbf{R}_- \times \mathbf{R}^N? \end{aligned}$$

Exercice 3.

Notons E la solution élémentaire tempérée à support dans $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$ de l'opérateur de la chaleur $\partial_t - \frac{1}{2} \Delta_x$ dans $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N$. Posons

$$B(t, x; r) = \left\{ (s, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \mid s \leq t \text{ et } E(t-s, x-y) \geq \frac{1}{r^N} \right\}.$$

Soit $u \in C^2(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N)$. Montrer que

$$u(t, x) = \frac{1}{r^N} \iint_{B(t,x;r)} u(s, y) \frac{|x-y|^2}{2(t-s)} dy ds.$$

(Indication : on pourra s'inspirer de la démonstration de la formule de la moyenne pour les fonctions harmoniques.)

Exercice 4.

a) Soit $u \in C^2(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+)$ vérifiant

$$\begin{aligned} \partial_t u - \frac{1}{2} \partial_x^2 u &= 0 & \text{sur } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*, \\ u|_{t=0} &= 0 & \text{sur } \mathbf{R}_+^*. \end{aligned}$$

Posons

$$U(t, x) = \begin{cases} u(t, x) & \text{si } x > 0, \\ -u(t, -x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Calculer

$$(\partial_t - \frac{1}{2} \partial_x^2)U \text{ au sens des distributions sur } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}.$$

b) A partir de ce qui précède, énoncer et démontrer un résultat d'existence et unicité d'une solution du problème

$$\begin{aligned} \partial_t u - \frac{1}{2} \partial_x^2 u &= 0 & \text{sur } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*, \\ u|_{x=0} &= g & \text{pour } t > 0, \\ u|_{t=0} &= f & \text{pour } x > 0, \end{aligned}$$

lorsque f et g sont des fonctions de classe C^2 à support compact dans \mathbf{R}_+^* .

Exercice 5.

Notons I la fonction définie sur \mathbf{R} par $I(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, et, pour tout $a > 0$, posons $I_a(x) = \frac{1}{a} I(\frac{x}{a})$. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ suite de nombres strictement positifs tels que

$$\sum_{n \geq 0} a_n < \infty.$$

Définissons une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ sur \mathbf{R} comme suit :

$$f_1 = I_{a_1}, \quad f_2 = I_{a_1} \star I_{a_2}, \dots, f_n = I_{a_1} \star \dots \star I_{a_n}.$$

a) Montrer que la suite f_n converge uniformément sur tout compact de \mathbf{R} vers une fonction f continue sur \mathbf{R} dont on précisera le support.

b) Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbf{R} , et que, pour tout $k \geq 1$, on a

$$|f^{(k)}(t)| \leq \frac{2^k}{a_1 a_2 \dots a_k}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

c) Comment choisir une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ vérifiant les propriétés du a) et telle que la série

$$u(t, x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!} f^{(k)}(t)$$

définisse une fonction u de classe C^2 sur \mathbf{R}^2 ?

d) Calculer

$$\partial_t u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) \text{ pour tout } (t, x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R},$$

ainsi que

$$u(0, x) \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Comparer le résultat obtenu aux énoncés d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur établis plus haut — comme, par exemple, le Lemme 7.2.4.

Chapitre 10

Equation de Schrödinger

10.1 Origines du modèle

L'équation de Schrödinger intervient dans des contextes très différents :

a) c'est l'équation du mouvement pour une particule quantique soumise à l'action d'un potentiel; mais aussi

b) c'est une équation approchée pour certains problèmes de propagation d'ondes.

Disons quelques mots du thème a).

Rappelons les équations du mouvement pour un point matériel de masse m soumis à l'action d'un champ de forces dérivant d'un potentiel $V(x)$: en notant $x(t) \in \mathbf{R}^N$ la position du point matériel à l'instant t , on a

$$m\ddot{x} + \nabla V(x) = 0.$$

Ce système d'équations du second ordre se met aussi sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1 et de dimension double :

$$\begin{aligned} m\dot{x} &= \xi, \\ \dot{\xi} &= -\nabla V(x), \end{aligned}$$

où $\xi(t)$ est l'impulsion du point à l'instant t .

L'énergie du point considéré à l'instant t est la somme de son énergie cinétique $\frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 = \frac{|\xi(t)|^2}{2m}$ et de son énergie potentielle $V(x(t))$:

$$E = \frac{1}{2} \frac{|\xi(t)|^2}{m} + V(x(t)) = \text{Const.}$$

La formulation hamiltonienne de la mécanique classique consiste à partir de l'énergie ci-dessus comme fonction des variables de position $x \in \mathbf{R}^N$ et d'impulsion $\xi \in \mathbf{R}^N$:

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2} \frac{|\xi|^2}{m} + V(x).$$

Cette fonction est appelée “hamiltonien” du système mécanique considéré — dans le cas présent, d’un point matériel de masse m soumis à l’action du potentiel V . A partir du hamiltonien, on forme le système des équations de Hamilton

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_j &= -\frac{\partial H}{\partial x_j}(x, \xi), \quad j = 1, \dots, N \\ \dot{x}_j &= +\frac{\partial H}{\partial \xi_j}(x, \xi),\end{aligned}$$

dont on vérifie, dans le cas du hamiltonien d’un point matériel de masse m soumis à l’action du potentiel V , qu’il coïncide avec le système différentiel d’ordre 1 ci-dessus, équivalent aux équations du mouvement.

On vérifie également sans peine que le hamiltonien reste constant le long des courbes intégrales du système des équations de Hamilton — cette propriété, qui vaut pour tout hamiltonien de classe C^2 , est donc équivalente à la conservation de l’énergie dans le cas du point matériel dans un champ de potentiel pris ici comme exemple.

Après ce rappel sur les équations de la mécanique classique, voyons comment la mécanique quantique décrit l’évolution du même point matériel soumis à l’action du potentiel V — pour plus de détails, voir [2].

En mécanique quantique, le problème n’est plus de chercher la position $x(t)$ et l’impulsion $\xi(t)$ du point matériel à tout instant t — le principe d’incertitude de Heisenberg nous dit qu’une telle description est impossible.

On va donc chercher plutôt une fonction $(t, x) \mapsto \psi(t, x) \in \mathbf{C}$, au moins mesurable, appelée “fonction d’onde” qui va coder l’état du système (ici du point matériel considéré) d’une façon quelque peu compliquée, que nous allons présenter succinctement.

La fonction d’onde doit satisfaire

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\psi(t, x)|^2 dx = 1 \text{ pour tout } t \in \mathbf{R},$$

ce qui signifie que $|\psi(t, x)|^2$ est une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue dx — cf. [13], Définition 4.2.7.

La signification de cette densité de probabilité est la suivante : $|\psi(t, x)|^2 dx$ représente la probabilité (infinitésimale) de trouver le point matériel dans un volume infinitésimal dx centré au point $x \in \mathbf{R}^N$ à l’instant t . Ainsi, pour tout $A \subset \mathbf{R}^N$ mesurable, la probabilité de trouver le point matériel dans A à l’instant t vaut-elle

$$\int_A |\psi(t, x)|^2 dx.$$

Mais on peut calculer également bien d’autres quantités physiques au moyen de cette densité de probabilité. Par exemple,

$$\int_{\mathbf{R}^N} V(x) |\psi(t, x)|^2 dx$$

représente l’(espérance de l’)énergie potentielle du point matériel à l’instant t .

Plus généralement, étant donnée une quantité physique quelconque dont la valeur est $f(x)$ lorsque le point matériel se trouve au point $x \in \mathbf{R}^N$, on obtient la valeur observée pour cette quantité à l'instant t pour un système décrit par la fonction d'onde $\psi(t, x)$ au moyen de la formule

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x) |\psi(t, x)|^2 dx.$$

Cette discussion n'explique pas comment calculer toutes les quantités physiques naturelles pour le point matériel considéré. Par exemple, il resterait à expliquer comment on calcule, en mécanique quantique, la valeur observée de quantités physiques faisant intervenir l'impulsion — comme par exemple l'énergie cinétique.

D'ailleurs, on comprend bien qu'en passant de la fonction d'onde $\psi(t, x)$ à valeurs complexes au carré de son module $|\psi(t, x)|^2$, on a perdu beaucoup d'information — toute celle contenue dans l'argument du nombre complexe $\psi(t, x)$.

Voici donc comment calculer la valeur observée à l'instant t pour une quantité physique valant $g(\xi)$ lorsque l'impulsion du point matériel vaut ξ .

En appliquant le théorème de Plancherel (Théorème 5.4.12) à la fonction $x \mapsto \psi(t, x)$ qui appartient à $L^2(\mathbf{R}^N)$, on voit que

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\psi(t, x)|^2 dx = \int_{\mathbf{R}^N} |\hat{\psi}(t, \frac{1}{\hbar}\xi)|^2 \frac{d\xi}{(2\pi\hbar)^N},$$

où on a noté ξ la variable duale de x et $\hat{\psi}$ la transformée de Fourier partielle de ψ en la variable par rapport à la variable x . Autrement dit $|\hat{\psi}(t, \frac{1}{\hbar}\xi)|^2$ est aussi une densité de probabilité par rapport à la mesure $\frac{d\xi}{(2\pi\hbar)^N}$ proportionnelle à la mesure de Lebesgue $d\xi$, cette fois non pas dans l'espace physique — c'est-à-dire dans l'ensemble de toutes les positions possibles du point matériel — mais dans l'espace de Fourier qui est l'ensemble de toutes les impulsions possibles du point matériel considéré. (La constante \hbar intervenant ici est $\frac{h}{2\pi}$, où h est la constante de Planck.)

Ceci suggère la même construction que pour les quantités physiques fonctions de la seule variable x : la valeur observée d'une quantité physique dont la valeur vaut $g(\xi)$ lorsque l'impulsion du système vaut ξ est

$$\int_{\mathbf{R}^N} g(\xi) |\hat{\psi}(t, \frac{1}{\hbar}\xi)|^2 \frac{d\xi}{(2\pi\hbar)^N}.$$

Par exemple, l'énergie cinétique observée à l'instant t pour un point matériel de masse m de fonction d'onde $\psi(t, x)$ est

$$\int_{\mathbf{R}^N} \frac{1}{2} \frac{|\xi|^2}{m} |\hat{\psi}(t, \frac{1}{\hbar}\xi)|^2 \frac{d\xi}{(2\pi\hbar)^N}.$$

Supposons que la fonction d'onde est suffisamment régulière et décroissante à l'infini, par exemple que la fonction $x \mapsto \psi(t, x)$ appartient à la classe de

Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$. Alors — cf. Proposition 5.2.2 (b) — on a

$$\xi_j \hat{\psi}(t, \frac{1}{\hbar}\xi) = \left(\frac{\hbar}{i} \partial_{x_j} \widehat{\psi}(t, x) \right) \left(\frac{1}{\hbar}\xi \right)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} \frac{1}{2} \frac{|\xi|^2}{m} |\hat{\psi}(t, \frac{1}{\hbar}\xi)|^2 \frac{d\xi}{(2\pi\hbar)^N} &= \frac{1}{2m} \int_{\mathbf{R}^3} \left| \widehat{\hbar\nabla_x \psi} \right|^2 (t, \frac{1}{\hbar}\xi) \frac{d\xi}{(2\pi\hbar)^N} \\ &= \frac{1}{2m} \int_{\mathbf{R}^3} |\hbar\nabla_x \psi|^2 (t, x) dx \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du théorème de Plancherel (Théorème 5.4.12 ou Corollaire 5.2.7.)

Une intégration par parties permet d'ailleurs de mettre cette dernière intégrale sous la forme

$$\frac{1}{2m} \int_{\mathbf{R}^3} |\hbar\nabla_x \psi|^2 (t, x) dx = \int_{\mathbf{R}^3} \overline{\psi(t, x)} \left(\frac{-\hbar^2 \Delta_x}{2m} \right) \psi(t, x) dx.$$

Ainsi la valeur observée de l'énergie totale à l'instant t du point matériel de fonction d'onde $\psi(t, x)$, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, s'écrit

$$\int_{\mathbf{R}^N} \overline{\psi(t, x)} \left(\frac{-\hbar^2 \Delta_x}{2m} + V(x) \right) \psi(t, x) dx$$

La discussion ci-dessus montre que plus généralement, pour calculer la valeur observée d'une quantité physique de la forme $g(\xi) + f(x)$ pour un système décrit par la fonction d'onde $\psi(t, x)$, où g est une fonction polynômiale et où x et ξ sont respectivement les variables de position et d'impulsion, on forme la quantité

$$\int_{\mathbf{R}^N} \overline{\psi(t, x)} (g(\hbar D_x) + f(x)) \psi(t, x) dx$$

— rappelons ici la notation

$$D_x = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_N} \right).$$

Autrement dit, à la fonction $g(\xi) + f(x)$ de la mécanique classique qui est la valeur d'une quantité physique lorsque le point matériel considéré se trouve simultanément à la position x avec une impulsion ξ , la mécanique quantique associe l'opérateur différentiel $g(\hbar D_x) + f(x)$.

Par exemple, au hamiltonien de la mécanique classique pour un point matériel de masse m dans un champ de potentiel $V(x)$, qui est la fonction définie par

$$H(x, \xi) = \frac{|\xi|^2}{2m} + V(x)$$

est associé le hamiltonien de la mécanique quantique, qui est l'opérateur différentiel

$$H(x, \hbar D_x) = \frac{\hbar^2 |D_x|^2}{2m} + V(x) = \frac{-\hbar^2 \Delta_x^2}{2m} + V(x).$$

Cette correspondance associant un opérateur (c'est-à-dire une application linéaire sur un espace vectoriel de fonctions) porte le nom de "quantification". Quantifier une expression de la forme $g(\xi) + f(x)$ avec g polynômiale est très simple, comme on vient de le voir ; dans le cas d'une fonction quelconque $a(x, \xi)$ de x et de ξ — même appartenant à $\mathcal{S}(\mathbf{R}_x^N \times \mathbf{R}_\xi^N)$ — cette opération est plus compliquée. En particulier, il existe plusieurs procédés de quantification associant des opérateurs différents à une même fonction $a(x, \xi)$. Nous n'insisterons pas d'avantage sur cet aspect de la question, qui sort du cadre de notre étude.

Après cette évocation de quelques-unes des notions fondamentales de la mécanique quantique, qui a pour but d'en faire sentir les analogies et les différences avec la théorie plus familière qu'est la mécanique classique, nous concluons en présentant enfin l'équation de Schrödinger.

Au hamiltonien de la mécanique classique pour un point matériel de masse m dans un champ de potentiel $V(x)$, qui est une fonction des variables de position x et d'impulsion ξ , nous avons vu comment associer de façon naturelle le hamiltonien de la mécanique quantique qui est un opérateur différentiel agissant sur les fonctions de la seule variable de position.

L'équation de Schrödinger gouverne l'évolution de la fonction d'onde du point matériel considéré et s'écrit

$$i\hbar\partial_t\psi(t, x) = H(x, \hbar D_x)\psi(t, x), \quad (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N,$$

c'est-à-dire

$$i\hbar\partial_t\psi(t, x) + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\psi(t, x) = V(x)\psi(t, x), \quad (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N.$$

Cette équation joue, pour la mécanique quantique, le rôle du système des équations de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_j &= -\frac{\partial H}{\partial x_j}(x, \xi), \quad j = 1, \dots, N, \\ \dot{x}_j &= +\frac{\partial H}{\partial \xi_j}(x, \xi), \end{aligned}$$

en mécanique classique.

Nous reviendrons sur l'analogie entre ces deux théories à la fin de ce chapitre.

10.2 Etude du problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger

Nous allons étudier l'équation de Schrödinger libre (c'est-à-dire sans potentiel : $V = 0$) dans l'espace euclidien \mathbf{R}^N avec $N \geq 1$. Quitte à choisir des unités convenables de masse et d'énergie, on se ramène donc au problème suivant :

$$\begin{aligned} i\partial_t\psi + \frac{1}{2}\Delta_x\psi &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \\ \psi|_{t=0} &= \psi^{in} \end{aligned}$$

où ψ^{in} est une fonction (ou une distribution tempérée) donnée, et où l'inconnue est la fonction $(t, x) \mapsto \psi(t, x)$ à valeurs complexes.

Rappelons que, pour tout $N \geq 1$

$$E_N = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t)}{\sqrt{2\pi(\epsilon + i)t}} e^{-\frac{|x|^2}{2(\epsilon + i)t}}$$

définit l'unique solution élémentaire tempérée de l'opérateur de Schrödinger à support dans $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$.

Théorème 10.2.1 (Résolution de l'équation de Schrödinger) *Pour toute distribution à support compact $\psi^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$, il existe une unique solution Ψ au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger avec donnée initiale ψ^{in} .*

Cette solution ψ est donnée par la formule

$$\Psi = E_N \star (\delta_{t=0} \otimes \psi^{in}).$$

De plus, si $\psi^{in} \in H^s(\mathbf{R}^N)$ avec $s \in \mathbf{R}$, alors la restriction de la solution Ψ à $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$, c'est-à-dire au domaine défini par l'inégalité $t \geq 0$, se prolonge par continuité pour $t = 0$ en

$$\Psi \in C(\mathbf{R}_+; H^s(\mathbf{R}^N))$$

telle que

$$\|\Psi(t, \cdot)\|_{H^s(\mathbf{R}^N)} = \|\psi^{in}\|_{H^s(\mathbf{R}^N)} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

En particulier, lorsque $\psi^{in} \in L^2(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\Psi(t, x)|^2 dx = \int_{\mathbf{R}^N} |\psi^{in}(x)|^2 dx \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

Cette dernière égalité traduit la conservation de la masse — ou du nombre de particules, ce qui est équivalent.

Démonstration. Dire que Ψ est solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger avec donnée initiale ψ^{in} , c'est dire que

$$\begin{aligned} (i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x)\Psi &= \delta_{t=0} \otimes \psi^{in} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N), \\ \text{supp}(\Psi) &\subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N. \end{aligned}$$

Par hypothèse, $\delta_{t=0} \otimes \psi^{in}$ est à support compact, de sorte que (cf. Théorème 4.4.6)

$$\begin{aligned} (i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x)(E_N \star (\delta_{t=0} \otimes \psi^{in})) &= ((i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x)E_N) \star (\delta_{t=0} \otimes \psi^{in}) \\ &= \delta_{(t,x)=(0,0)} \star (\delta_{t=0} \otimes \psi^{in}) \\ &= \delta_{t=0} \otimes \psi^{in} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N). \end{aligned}$$

De plus, comme $\delta_{t=0} \otimes \psi^{in}$ est à support compact, d'après la Proposition 4.4.2 de majoration du support d'un produit de convolution

$$\begin{aligned} \text{supp}(E_N \star (\delta_{t=0} \otimes \psi^{in})) &\subset \text{supp}(E_N) + \text{supp}(\delta_{t=0} \otimes \psi^{in}) \\ &\subset (\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N) + (\{0\} \times \mathbf{R}^N) \\ &\subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N. \end{aligned}$$

Ceci montre que la formule

$$\Psi = E_N \star (\delta_{t=0} \otimes \psi^{in})$$

définit bien une solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger libre avec donnée initiale ψ^{in} .

Démontrons l'unicité de cette solution.

Supposons qu'il existe deux solutions au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger libre avec donnée initiale ψ^{in} , notées Ψ_1 et Ψ_2 .

Par linéarité de l'équation, $\Phi = \Psi_1 - \Psi_2$ vérifie

$$\begin{aligned} (i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x)\Phi &= 0 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N), \\ \text{supp}(\Phi) &\subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N. \end{aligned}$$

Appliquons à chaque membre de l'égalité ci-dessus la transformation de Fourier partielle en la variable x , notée $\Phi \mapsto \hat{\Phi}$. Désignant par ξ la variable duale de x , on a, d'après la Proposition 5.4.3 (a) :

$$\begin{aligned} (\partial_t + \frac{1}{2}i|\xi|^2)\hat{\Phi} &= 0 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_\xi^N), \\ \text{supp}(\hat{\Phi}) &\subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N. \end{aligned}$$

Multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus par $e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}$ qui est une fonction bornée dont les dérivées successives sont toutes à croissance polynômiale, on trouve que

$$\partial_t \left(e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2} \hat{\Phi} \right) = e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2} (\partial_t + \frac{1}{2}i|\xi|^2)\hat{\Phi} = 0 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_\xi^N)$$

ce qui, grâce à la Proposition 3.4.5 montre que

$$e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2} \hat{\Phi} = C \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_N) \text{ distribution constante en } t \in \mathbf{R}.$$

Mais comme par hypothèse Φ est à support dans le domaine des temps positifs ou nuls,

$$\text{supp}(\hat{\Phi}) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N,$$

de sorte que

$$\text{supp} \left(e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2} \hat{\Phi} \right) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N.$$

Comme cette distribution est constante en $t \in \mathbf{R}$, elle est donc nécessairement nulle, ce qui entraîne que

$$\hat{\Phi} = 0 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_\xi^N).$$

Par inversion de Fourier inverse partielle en la variable x — cf. Théorème 5.5.4, l'on trouve finalement que

$$\Phi = \Psi_1 - \Psi_2 = 0 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N).$$

Supposons ensuite que $\psi^{in} \in H^s(\mathbf{R}^N)$, autrement dit que

$$(1 + |\xi|)^s \hat{\psi}^{in} \in L^2(\mathbf{R}_\xi^N).$$

Alors

$$E_N \star (\widehat{\delta_{t=0}} \otimes \psi^{in}) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2} \hat{\psi}^{in}$$

d'après le Théorème 5.4.11, de sorte que, pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \Psi(t, x)$ appartient à $H^s(\mathbf{R}^N)$ avec

$$\begin{aligned} \|\Psi(t, \cdot)\|_{H^s(\mathbf{R}^N)} &= \|(1 + |\xi|)^s \hat{\Psi}\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \\ &= \|(1 + |\xi|)^s e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2} \hat{\psi}^{in}\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \\ &= \|\psi^{in}\|_{H^s(\mathbf{R}^N)}. \end{aligned}$$

Enfin, pour $s, t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \|\Psi(t, \cdot) - \Psi(s, \cdot)\|_{H^s(\mathbf{R}^N)} &= \|(1 + |\xi|)^s (e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2} - e^{-\frac{1}{2}is|\xi|^2}) \hat{\psi}^{in}\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \\ &= \|(1 + |\xi|)^s (e^{-\frac{1}{2}i(t-s)|\xi|^2} - 1) \hat{\psi}^{in}\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

par convergence dominée lorsque $s - t \rightarrow 0$, puisque

$$(1 + |\xi|)^s (e^{-\frac{1}{2}i(t-s)|\xi|^2} - 1) \hat{\psi}^{in} \rightarrow 0 \text{ p.p. en } \xi \in \mathbf{R}^N,$$

tandis que

$$|(1 + |\xi|)^s (e^{-\frac{1}{2}i(t-s)|\xi|^2} - 1) \hat{\psi}^{in}|^2 \leq 4(1 + |\xi|)^{2s} |\hat{\psi}^{in}|^2 \in L^1(\mathbf{R}_\xi^N).$$

■

Contrairement au cas de l'équation de la chaleur (voir la section 9.3.3 du chapitre 9, il n'y a pas de sens préférentiel d'écoulement du temps pour l'équation de Schrödinger, de sorte que le problème de Cauchy avec donnée initiale prescrite à $t = 0$ peut être résolu aussi bien pour $t > 0$ que pour $t < 0$, de même que pour le cas de l'équation de transport.

Corollaire 10.2.2 (Continuité en temps) *Soit $\psi^{in} \in H^s(\mathbf{R}^N)$. La restriction pour $t > 0$ de la solution Ψ au sens des distributions du problème de Cauchy*

avec donnée initiale ψ^{in} pour l'équation de Schrödinger se prolonge pour $t \leq 0$ en un unique élément ψ de $C(\mathbf{R}_t; H^s(\mathbf{R}_x^N))$ vérifiant

$$i\partial_t\psi + \frac{1}{2}\Delta_x\psi = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N).$$

Cette fonction ψ est donnée par la formule

$$\hat{\psi}(t, \xi) = e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2} \psi^{in}(\xi), \quad \text{p.p. en } \xi \in \mathbf{R}^N \text{ et pour tout } t \in \mathbf{R},$$

en notant $\hat{\psi}$ la transformée de Fourier partielle en x de ψ et ξ la variable de Fourier duale de x . De plus, on a

$$\|\psi(t, \cdot)\|_{H^s(\mathbf{R}^N)} = \|\psi^{in}\|_{H^s(\mathbf{R}^N)} \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

On prendra bien garde à ne pas confondre ψ qui vérifie

$$i\partial_t\psi + \frac{1}{2}\Delta_x\psi = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$$

est continue en t à valeurs dans $H^s(\mathbf{R}^N)$ et telle que

$$\psi|_{t=0} = \psi^{in},$$

avec Ψ qui est discontinue sur l'hyperplan d'équation $t = 0$.

D'ailleurs c'est précisément le fait que ψ soit continue en t qui permet de parler de la restriction $\psi|_{t=0}$ de ψ à l'hyperplan d'équation $t = 0$.

Démonstration. Comme on l'a vu dans la preuve du Théorème 10.2.1, dire que $\psi \in C(\mathbf{R}_+, H^s(\mathbf{R}^N))$ vérifie

$$(i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x)\psi = 0 \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N),$$

c'est dire que sa transformée de Fourier partielle $\hat{\psi}$ en la variable x vérifie

$$(\partial_t + \frac{1}{2}i|\xi|^2)\hat{\psi} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_\xi^N)$$

ou encore que

$$\partial_t \left(e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2} \hat{\psi} \right) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_\xi^N)$$

ce qui équivaut à dire que

$$e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2} \hat{\psi}(t, \xi) = \text{Const.} = \hat{\psi}^{in}(\xi) \quad \text{p.p. en } \xi \in \mathbf{R}^N \text{ et pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

Ainsi, l'unique élément de $C(\mathbf{R}_t, H^s(\mathbf{R}_x^N))$ tel que

$$\begin{aligned} (i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x)\psi &= 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N), \\ \psi|_{t=0} &= \psi^{in}, \end{aligned}$$

est donné par la formule

$$\hat{\psi}(t, \xi) = e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2} \hat{\psi}^{in}(\xi) \quad \text{p.p. en } \xi \in \mathbf{R}^N \text{ et pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

La relation

$$\|\psi(t, \cdot)\|_{H^s(\mathbf{R}^N)} = \|\psi^{in}\|_{H^s(\mathbf{R}^N)} \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}$$

découle évidemment de la formule ci-dessus — cf. la preuve de la même relation de conservation de la norme H^s dans la démonstration du Théorème 10.2.1.

On vérifie également, toujours comme dans la preuve du Théorème 10.2.1, que cette formule définit bien un élément de $C(\mathbf{R}_t, H^s(\mathbf{R}_x^N))$ sous l'hypothèse $\psi^{in} \in H^s(\mathbf{R}^N)$.

Enfin cette formule définit bien un prolongement de Ψ pour tout $t \in \mathbf{R}$ puisque

$$\hat{\Psi} = E_N \star \widehat{(\delta_{t=0} \otimes \psi^{in})} = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2} \hat{\psi}^{in} = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) \hat{\psi}.$$

■

Le corollaire ci-dessus montre qu'il est naturel de considérer, pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'application linéaire

$$U(t) : \psi^{in} \mapsto \psi(t, \cdot).$$

On note en général cette application

$$U(t) = e^{\frac{1}{2}it\Delta_x}.$$

Proposition 10.2.3 (Groupe de Schrödinger libre) *La famille d'applications linéaires $U(t) = e^{\frac{1}{2}it\Delta_x}$ vérifie les propriétés suivantes*
a) *pour tous $s, t \in \mathbf{R}$, on a*

$$U(t+s) = U(s)U(t), \quad U(0) = Id;$$

b) *pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'application linéaire $U(t)$ est unitaire dans $H^s(\mathbf{R}^N)$, c'est-à-dire que*

$$U(t)^* = U(t)^{-1} = U(-t);$$

c) *pour tout $\psi^{in} \in H^s(\mathbf{R}^N)$, l'application*

$$\mathbf{R} \ni t \mapsto U(t)\psi^{in} \in H^s(\mathbf{R}^N)$$

est continue et, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\widehat{U(t)\psi^{in}} = e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2} \hat{\psi}^{in}.$$

La famille d'applications linéaires $e^{\frac{1}{2}it\Delta}$ est appelée “groupe de Schrödinger libre” : en effet, la propriété a) montre que U est un morphisme de groupe de \mathbf{R} additif dans le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{L}(H^s(\mathbf{R}^N))$ — l'algèbre des endomorphismes continus sur $H^s(\mathbf{R}^N)$. (Rappelons que l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(H^s(\mathbf{R}^N))$ muni de la composition des endomorphismes forme un groupe.)

Le point b) signifie que le groupe $(U(t))_{t \in \mathbf{R}}$ est un “groupe unitaire sur $H^s(\mathbf{R}^N)$ ” car pour tout $t \in \mathbf{R}$, l’endomorphisme $U(t)$ est un endomorphisme unitaire sur $H^s(\mathbf{R}^N)$.

Enfin, le point c) signifie que le groupe $(U(t))_{t \in \mathbf{R}}$ est “fortement continu”, au sens où, pour tout $\psi^{in} \in H^s(\mathbf{R}^N)$

l’application $t \mapsto U(t)\psi^{in}$ est continue de \mathbf{R} dans $H^s(\mathbf{R}^N)$

Démonstration. Le point a) est une conséquence immédiate de la formule du Corollaire 10.2.2.

Le point c) a déjà été établi dans ce même Corollaire.

Quant au point (b), soient $\phi, \psi \in H^s(\mathbf{R}^N)$ et $t \in \mathbf{R}$. Alors pour tout $t \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} (\phi|U(t)\psi)_{H^s(\mathbf{R}^N)} &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} \overline{\hat{\phi}(\xi)} \widehat{U(t)\psi}(\xi) (1+|\xi|)^{2s} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} \overline{\hat{\phi}(\xi)} e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2} \hat{\psi}(\xi) (1+|\xi|)^{2s} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} \overline{e^{+\frac{1}{2}it|\xi|^2} \hat{\phi}(\xi)} \hat{\psi}(\xi) (1+|\xi|)^{2s} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} \overline{\widehat{U(-t)\phi}}(\xi) \hat{\psi}(\xi) (1+|\xi|)^{2s} d\xi \\ &= (U(-t)\phi|\psi)_{H^s(\mathbf{R}^N)}, \end{aligned}$$

d’où on tire la formule $U(-t) = U(t)^*$.

Enfin, le fait que $U(-t) = U(t)^{-1}$ découle du point (a). ■

10.3 Effets dispersifs

Nous n’allons pas discuter ici en détail la notion générale d’EDP dispersive, ce qui nous entraînerait trop loin.

Intuitivement, une EDP d’évolution dispersive a tendance à “étalement” le support de sa donnée initiale — mais cette propriété d’étalement du support ne caractérise pas les équations dispersives. Par exemple, l’équation de la chaleur, qui vérifie cette propriété d’étalement du support — cf. Théorème 9.3.4 — n’est pas une considérée comme une équation dispersive.

L’équation de Schrödinger fait partie de la famille des équations dispersives, et nous allons examiner quelques conséquences très simples de cette propriété d’étalement du support de la donnée initiale.

Voici une première estimation rendant compte de l’effet dispersif de l’équation de Schrödinger.

Proposition 10.3.1 *Soient $N \geq 1$ et $U(t)$ le groupe de Schrödinger libre sur \mathbf{R}^N . Alors, pour toute fonction $\phi \in C_c(\mathbf{R}^N)$, on a*

$$\|U(t)\phi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \leq \frac{1}{(2\pi|t|)^{N/2}} \|\phi\|_{L^1(\mathbf{R}^N)}$$

pour tout $t \in \mathbf{R}^*$, et $U(t)$ se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de $L^1(\mathbf{R}^N)$ à valeurs dans $L^\infty(\mathbf{R}^N)$ vérifiant cette inégalité.

Démonstration. Posons, pour $c \in \mathbf{C}$ tel que $\Re(c) > 0$

$$G_c(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c}^N} e^{-\frac{|x|^2}{2c}}, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

en notant $\sqrt{}$ la détermination principale de la racine carrée sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$.

On sait, d'après le Théorème 10.2.1 et la construction de la solution élémentaire de l'opérateur de Schrödinger dans le Théorème 7.2.5, que

$$U(t)\phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} G_{\epsilon t + it} \star \phi$$

et, comme $\phi \in C_c(\mathbf{R}^N)$, la limite ci-dessus vaut ponctuellement en tout point de \mathbf{R}^N , en appliquant le théorème de convergence dominée à l'intégrale définissant le produit de convolution au membre de droite de cette égalité.

Or, pour tout $x \in \mathbf{R}^N$, on a

$$\begin{aligned} |G_{\epsilon t + it} \star \phi(x)| &\leq \|G_{\epsilon t + it}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \|\phi\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{\epsilon^2 t^2 + t^2})^{N/2}} \|\phi\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \\ &\leq \frac{1}{(2\pi|t|)^{N/2}} \|\phi\|_{L^1(\mathbf{R}^N)}. \end{aligned}$$

On conclut donc en passant à la limite pour $\epsilon \rightarrow 0^+$ au membre de gauche de cette chaîne d'inégalités.

L'existence et unicité du prolongement continu de $U(t)$ découle de la densité de $C_c(\mathbf{R}^N)$ dans $L^1(\mathbf{R}^N)$, d'après le Théorème 6.1.1. ■

Comparons l'estimation

$$\|U(t)\phi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \leq \frac{1}{(2\pi|t|)^{N/2}} \|\phi\|_{L^1(\mathbf{R}^N)}$$

avec le fait, établi dans le Corollaire 10.2.2, que

$$\|U(t)\phi\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} = \|\phi\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

L'estimation ci-dessus montre que

$$\|U(t)\phi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } |t| \rightarrow +\infty, \text{ tandis que } \|U(t)\phi\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} = \text{Const.}$$

Cela n'est évidemment possible que si le graphe de la fonction

$$x \mapsto |U(t)\phi(x)|$$

s'étale dans l'espace euclidien \mathbf{R}^N lorsque $|t| \rightarrow +\infty$.

Cette propriété d'étalement du support, qui vaut pour $t \rightarrow \pm\infty$, s'accompagne donc du phénomène inverse de concentration. Voici comment : si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ est une donnée initiale "concentrée" en l'origine, l'estimation ci-dessus montre que, pour $T > 0$ assez grand, $U(-T)\phi$ est au contraire très "étalée". Choisissons maintenant $\psi = U(-T)\phi$; on obtient ainsi une donnée initiale très "étalée" telle que $U(T)\psi = \phi$ soit "concentrée" en l'origine — voir Proposition 10.2.3 (a)-(b). Evidemment, pour $t \gg T$, le graphe de $U(t)\psi$ s'étalera à nouveau.

Voici une conséquence de ce phénomène d'étalement-concentration qui peut sembler curieuse a priori :

Proposition 10.3.2 (Non continuité L^p de $U(t)$) Soient $U(t) = e^{\frac{1}{2}it\Delta}$ le groupe de Schrödinger dans \mathbf{R}^N , et $p \in [1, \infty]$. Si $p \neq 2$, l'unique valeur de t pour laquelle $U(t)$ est continu pour la norme de $L^p(\mathbf{R}^N)$ est $t = 0$.

Autrement dit, l'espace $L^2(\mathbf{R}^N)$ et les espaces de Sobolev $H^s(\mathbf{R}^N)$ modélés sur $L^2(\mathbf{R}^N)$ sont les espaces naturels où étudier le groupe de Schrödinger libre — au-delà du fait que ces espaces sont commodes à utiliser grâce à la représentation du groupe $U(t)$ en variables de Fourier.

Pour établir ce résultat, l'intuition du mécanisme d'étalement-concentration ne suffit pas, et nous aurons besoin de solutions explicites et non triviales de l'équation de Schrödinger libre sur \mathbf{R}^N .

De même que dans le cas de l'équation de la chaleur, la solution à l'instant t de l'équation de Schrödinger est donnée par convolution de la donnée initiale avec une gaussienne — complexe dans le cas de l'équation de Schrödinger.

Or le produit de convolution de deux fonctions gaussiennes est encore une gaussienne : on obtient donc des solutions explicites du problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger en partant de données initiales gaussiennes.

Lemme 10.3.3 (Données initiales gaussiennes) Pour tout $N \geq 1$ et tout $c \in \mathbf{C}$ tel que $\Re(c) > 0$, posons

$$G_c(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c}^N} e^{-\frac{|x|^2}{2c}}, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

en notant $\sqrt{\cdot}$ la détermination principale de la racine carrée sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$. Alors

a) pour tout $p \in [1, \infty]$ et tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a

$$\|G_{a+ib}\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{1}{p}-1\right) (a^2 + b^2)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right) (ap)^{-N/2p};$$

b) la transformée de Fourier de G_c est la fonction

$$\hat{G}_c(\xi) = e^{-\frac{1}{2}c|\xi|^2}, \quad \xi \in \mathbf{R}^N;$$

c) pour tout $t \in \mathbf{R}$, le groupe de Schrödinger agit sur G_c par

$$U(t)G_c = G_{c+it}.$$

Démonstration du lemme. Pour ce qui est du point a),

$$|G_{a+ib}(x)| = \frac{1}{(2\pi\sqrt{a^2+b^2})^{N/2}} \exp\left(-\frac{a}{a^2+b^2} \frac{|x|^2}{2}\right)$$

de sorte que, pour tout $p \in [1, \infty[$

$$\int_{\mathbf{R}^N} |G_{a+ib}(x)|^p dx = \left(2\pi\sqrt{a^2+b^2}\right)^{-Np/2} \left(2\pi \frac{a^2+b^2}{pa}\right)^{N/2}.$$

Autrement dit

$$\|G_{a+ib}\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} = (2\pi)^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}-1\right)} (a^2+b^2)^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} (ap)^{-N/2p}$$

tandis que

$$\|G_{a+ib}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} = \left(2\pi\sqrt{a^2+b^2}\right)^{-N/2}.$$

Pour le point b), cf. Lemme 7.2.6.

Le point c) est une conséquence immédiate du b) et de la formule

$$\widehat{U(t)G_c}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2} \hat{G}_c(\xi) = e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2} e^{-\frac{1}{2}ct|\xi|^2} = e^{-\frac{1}{2}(c+it)|\xi|^2} = \hat{G}_{c+it}(\xi).$$

■

Démonstration de la Proposition. Pour tout $c \in \mathbf{C}$ tel que $\Re(c) > 0$, on part de l'identité

$$U(t)G_c = G_{c+it}, \quad t \in \mathbf{R}$$

démontrée au c) du Lemme 10.3.3. On pose comme ci-dessus $\Re(c) = a$ et $\Im(c) = b$.

Puis on calcule

$$\frac{\|U(t)G_c\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}}{\|G_c\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}} = \frac{\|G_{c+it}\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}}{\|G_c\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}} = \left(\frac{\sqrt{a^2+(t+b)^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{N\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}$$

Supposons maintenant que $p > 2$ et que $t \neq 0$; choisissons $b = -t$ et faisons $a \rightarrow 0^+$: alors

$$\frac{\|U(t)G_{a-it}\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}}{\|G_{a-it}\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}} \sim \left(\frac{a}{|t|}\right)^{N\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}$$

de sorte que

$$\frac{\|U(t)G_{a-it}\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}}{\|G_{a-it}\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}} \rightarrow +\infty.$$

Au contraire, si $p < 2$ et $t \neq 0$, on choisit $b = 0$ et on fait $a \rightarrow 0^+$: ainsi

$$\frac{\|U(t)G_a\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}}{\|G_a\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}} \sim \left(\frac{|t|}{a}\right)^{N\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}$$

de sorte qu'à nouveau

$$\frac{\|U(t)G_a\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}}{\|G_a\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}} \rightarrow +\infty.$$

Or si l'application linéaire $U(t)$ était continue pour la norme $L^p(\mathbf{R}^N)$, il existerait une constante $C = C(p, t) > 0$ telle que

$$\|U(t)\phi\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \leq C(p, t)\|\phi\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \text{ pour tout } \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N).$$

Mais ceci est impossible lorsque $t \neq 0$ et $p \neq 2$, d'après les comportements asymptotiques établis ci-dessus. ■

10.4 Transformation de Wigner et limite semi-classique

Dans l'introduction de ce chapitre, nous avons rappelé quelques notions de base de la mécanique quantique en tâchant d'en souligner les analogies avec la mécanique classique. Nous allons voir dans ce qui suit comment la transformation de Wigner permet de passer des objets quantiques aux objets classiques.

10.4.1 La transformation de Wigner

Commençons par la définition de la transformation de Wigner.

Définition 10.4.1 Soient $\epsilon > 0$ et $\psi \in L^2(\mathbf{R}^N)$. On définit la transformation de Wigner de ψ à l'échelle ϵ comme

$$W_\epsilon[\psi](x, \xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi \cdot y} \psi(x + \frac{1}{2}\epsilon y) \overline{\psi(x - \frac{1}{2}\epsilon y)} \frac{dy}{(2\pi)^N}.$$

Sachant que $\psi \in L^2(\mathbf{R}^N)$, on commence par observer que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} |\psi(x + \frac{1}{2}\epsilon y) \overline{\psi(x - \frac{1}{2}\epsilon y)}| dy &\leq \int_{\mathbf{R}^N} \frac{1}{2} \left(|\psi(x + \frac{1}{2}\epsilon y)|^2 + |\overline{\psi(x - \frac{1}{2}\epsilon y)}|^2 \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\psi(x + \frac{1}{2}\epsilon y)|^2 dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\psi(x - \frac{1}{2}\epsilon y)|^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\epsilon}\right)^N \int_{\mathbf{R}^N} |\psi(x + z)|^2 dz + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\epsilon}\right)^N \int_{\mathbf{R}^N} |\psi(x - z)|^2 dz \\ &= \frac{2^N}{\epsilon^N} \|\psi\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2 \end{aligned}$$

grâce au changement de variables $z = \frac{1}{2}\epsilon y$.

Autrement dit, la fonction

$$y \mapsto \psi(x + \frac{1}{2}\epsilon y) \overline{\psi(x - \frac{1}{2}\epsilon y)}$$

est bornée dans $L^1(\mathbf{R}^N)$ uniformément en $x \in \mathbf{R}^N$. On en déduit que la transformée de Wigner de ψ à l'échelle ϵ vérifie

$$\sup_{x, \xi \in \mathbf{R}^N} |W_\epsilon[\psi](x, \xi)| \leq \frac{2^N}{\epsilon^N} \|\psi\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2.$$

Proposition 10.4.2 (Continuité de la transformation de Wigner) *Pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\psi \in L^2(\mathbf{R}^N)$, la transformée de Wigner $W_\epsilon[\psi]$ de ψ à l'échelle ϵ est une fonction continue et bornée sur $\mathbf{R}_x^N \times \mathbf{R}_\xi^N$.*

Démonstration. Soit $\psi \in L^2(\mathbf{R}^N)$; par densité de $C_c(\mathbf{R}^N)$ dans $L^2(\mathbf{R}^N)$, il existe une suite $(\psi_n)_{n \geq 1}$ de $C_c(\mathbf{R}^N)$ telle que $\psi_n \rightarrow \psi$ dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Pour tout $n \geq 1$, la transformée de Wigner $W_\epsilon[\psi_n]$ à l'échelle ϵ de ψ_n est continue sur $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$. En effet, pour toute suite $(x_k, \xi_k)_{k \geq 1}$ convergeant vers (x, ξ) lorsque $k \rightarrow \infty$, la suite (x_k) est en particulier bornée, et on pose

$$R = \sup_{k \geq 1} |x_k| < \infty.$$

Puis on remarque que toutes les fonctions

$$y \mapsto \psi_n(x_k + \frac{1}{2}\epsilon y) \overline{\psi_n(x_k - \frac{1}{2}\epsilon y)}$$

sont continues et à support dans le compact

$$\frac{2}{\epsilon} \left(\text{supp}(\psi_n) + \overline{B(0, R)} \right).$$

On en déduit par convergence dominée que, pour tout $n \geq 1$ fixé

$$\int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi_k \cdot y} \psi_n(x_k + \frac{1}{2}\epsilon y) \overline{\psi_n(x_k - \frac{1}{2}\epsilon y)} dy \rightarrow \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi \cdot y} \psi(x + \frac{1}{2}\epsilon y) \overline{\psi(x - \frac{1}{2}\epsilon y)} dy$$

lorsque $k \rightarrow \infty$, d'où la continuité de $W_\epsilon[\psi_n]$.

Enfin, l'inégalité établie avant l'énoncé du lemme et le caractère bilinéaire de la transformation de Wigner montrent que, pour $\epsilon > 0$ et $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \sup_{x, \xi \in \mathbf{R}^N} |W_\epsilon[\psi_n](x, \xi) - W_\epsilon[\psi](x, \xi)| &\leq \frac{2^N}{\epsilon^N} \|\psi_n\|_{L^2(\mathbf{R})} \|\psi_n - \psi\|_{L^2(\mathbf{R})} \\ &\quad + \frac{2^N}{\epsilon^N} \|\psi\|_{L^2(\mathbf{R})} \|\psi_n - \psi\|_{L^2(\mathbf{R})}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$W_\epsilon[\psi_n](x, \xi) \rightarrow W_\epsilon[\psi](x, \xi)$$

uniformément sur $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ lorsque $n \rightarrow \infty$, pour $\epsilon \rightarrow 0$.

Ainsi, $W_\epsilon[\psi]$ est, pour tout $\epsilon > 0$, une fonction continue bornée sur $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ comme limite uniforme de fonctions continues bornées. ■

Voici quelques exemples de calculs de transformées de Wigner pour des classes de fonctions remarquables.

Exemple 10.4.3 (Ondes planes) Soient $a \in C_c(\mathbf{R}^N)$ à valeurs réelles et $k \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$, et posons, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\alpha > 0$

$$\psi_{\epsilon^\alpha}(x) = a(x)e^{ik \cdot x / \epsilon^\alpha}, \quad x \in \mathbf{R}^N.$$

Alors, pour tout $\alpha > 0$, la transformation de Wigner à l'échelle ϵ de ψ_{ϵ^α} est donnée par les formules suivantes

$$W_\epsilon[\psi_{\epsilon^\alpha}](x, \xi) = W_\epsilon[a](x, \xi - \epsilon^{1-\alpha}k)$$

De plus lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, on a

$$\begin{aligned} W_\epsilon[\psi_{\epsilon^\alpha}] &\rightarrow a(x)^2 \otimes \delta_{\xi=0} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \text{ si } \alpha < 1, \\ W_\epsilon[\psi_\epsilon] &\rightarrow a(x)^2 \otimes \delta_{\xi=k} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \text{ si } \alpha = 1, \end{aligned}$$

lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

En effet, la formule $W_\epsilon[\psi_{\epsilon^\alpha}](x, \xi) = W_\epsilon[a](x, \xi - \epsilon^{1-\alpha}k)$ découle trivialement de la définition de la transformation de Wigner.

Puis, pour toute fonction test $\chi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$, on a, en notant $\hat{\chi}(x, y)$ la transformée de Fourier de la fonction $\xi \mapsto \chi(x, \xi)$ et y la variable duale de ξ

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} \chi(x, \xi) W_\epsilon[\psi_{\epsilon^\alpha}](x, \xi) dx d\xi \\ &= \iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} \hat{\chi}(x, y) e^{i\epsilon^{1-\alpha}k \cdot y} a(x + \frac{1}{2}\epsilon y) a(x - \frac{1}{2}\epsilon y) \frac{dy dx}{(2\pi)^N}, \end{aligned}$$

en appliquant le théorème de Fubini après avoir constaté que l'intégrande est dominé par la fonction

$$(x, y, \xi) \mapsto \chi(x, \xi) a(x + \frac{1}{2}\epsilon y) a(x - \frac{1}{2}\epsilon y)$$

qui est intégrable sur $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ car a est continue à support compact et $\chi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$.

Passons ensuite à la limite dans l'intégrale au membre de droite : lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, on a

$$\begin{aligned} e^{i\epsilon^{1-\alpha}k \cdot y} a(x + \frac{1}{2}\epsilon y) a(x - \frac{1}{2}\epsilon y) &\rightarrow a(x)^2 && \text{pour } \alpha < 1, \\ e^{ik \cdot y} a(x + \frac{1}{2}\epsilon y) a(x - \frac{1}{2}\epsilon y) &\rightarrow e^{ik \cdot y} a(x)^2 && \text{pour } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Comme la fonction $\hat{\chi} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ en tant que transformée de Fourier partielle (par rapport à la variable ξ) de $\chi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$, on trouve, par convergence dominée, que

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} \hat{\chi}(x, y) e^{i\epsilon^{1-\alpha}k \cdot y} a(x + \frac{1}{2}\epsilon y) a(x - \frac{1}{2}\epsilon y) \frac{dy dx}{(2\pi)^N} \\ &\rightarrow \iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} \hat{\chi}(x, y) a(x)^2 \frac{dy dx}{(2\pi)^N} = \int_{\mathbf{R}^N} \chi(x, 0) a(x)^2 dx = \langle a(x)^2 \otimes \delta_{\xi=0}, \chi \rangle \end{aligned}$$

lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ avec $\alpha < 1$, et

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} \hat{\chi}(x, y) e^{ik \cdot y} a(x + \frac{1}{2}\epsilon y) a(x - \frac{1}{2}\epsilon y) \frac{dy dx}{(2\pi)^N} \\ \rightarrow & \iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} \hat{\chi}(x, y) e^{ik \cdot y} a(x)^2 \frac{dy dx}{(2\pi)^N} = \int_{\mathbf{R}^N} \chi(x, k) a(x)^2 dx = \langle a(x)^2 \otimes \delta_{\xi=k}, \chi \rangle \end{aligned}$$

lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ avec $\alpha = 1$.

Exemple 10.4.4 (Paquet d'ondes) Pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^N$ et tout $\xi_0 \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$, posons

$$\Psi_{x_0, \xi_0, \epsilon}(x) = (\pi\epsilon)^{-N/4} e^{-|x-x_0|^2/2\epsilon} e^{i\xi_0 \cdot x/\epsilon}.$$

Alors

$$W_\epsilon[\Psi_{x_0, \xi_0, \epsilon}](x, \xi) = (\pi\epsilon)^{-N} e^{-\frac{|x-x_0|^2 + |\xi-\xi_0|^2}{\epsilon}}$$

Un calcul immédiat, basé sur l'identité

$$|x + \frac{1}{2}\epsilon y - x_0|^2 + |x - \frac{1}{2}\epsilon y - x_0|^2 = 2|x - x_0|^2 + \frac{1}{2}\epsilon^2|y|^2$$

montre que

$$W_\epsilon[\Psi_{x_0, \xi_0, \epsilon}](x, \xi) = e^{-\frac{|x-x_0|^2}{\epsilon}} (\pi\epsilon)^{-N/2} \int_{\mathbf{R}^N} e^{-\epsilon|y|^2/4} e^{i(\xi_0-\xi) \cdot y} \frac{dy}{(2\pi)^N},$$

et on conclut grâce à la formule donnant la transformée de Fourier d'une gaussienne (voir Lemme 5.2.6).

10.4.2 Limite semi-classique

Nous allons commencer par établir une propriété très importante de la transformation de Wigner : celle-ci transforme l'équation de Schrödinger libre en l'équation de transport libre. Nous reviendrons plus loin sur la signification physique de ce fait remarquable — et sur ses généralisations.

Soit donc $(t, x) \mapsto \psi(t, x)$, une solution sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N$ de l'équation de Schrödinger :

$$i\partial_t \psi + \frac{1}{2}\epsilon \Delta_x \psi = 0.$$

Bien évidemment, en passant aux complexes conjugués, on trouve que

$$i\partial_t \bar{\psi} - \frac{1}{2}\epsilon \Delta_x \bar{\psi} = 0.$$

Évaluant le membre de gauche de la première équation à l'instant t et au point $x + \frac{1}{2}\epsilon y$, on obtient, après multiplication par $\bar{\psi}(t, x - \frac{1}{2}\epsilon y)$, l'égalité

$$\overline{i\psi(t, x - \frac{1}{2}\epsilon y) \partial_t \psi(t, x + \frac{1}{2}\epsilon y)} + \frac{1}{2}\epsilon \overline{\psi(t, x - \frac{1}{2}\epsilon y) \Delta_x \psi(t, x + \frac{1}{2}\epsilon y)} = 0,$$

et, en procédant de même avec la seconde équation

$$i\psi(t, x + \frac{1}{2}\epsilon y) \overline{\partial_t \psi(t, x - \frac{1}{2}\epsilon y)} - \frac{1}{2}\epsilon \overline{\psi(t, x + \frac{1}{2}\epsilon y) \Delta_x \psi(t, x - \frac{1}{2}\epsilon y)} = 0.$$

Additionnant chaque membre de ces deux égalités, on trouve que

$$\begin{aligned} & i\partial_t \left(\psi(t, x + \tfrac{1}{2}\epsilon y) \overline{\psi(t, x - \tfrac{1}{2}\epsilon y)} \right) \\ &= \tfrac{1}{2}\epsilon \psi(t, x + \tfrac{1}{2}\epsilon y) \Delta_x \overline{\psi(t, x - \tfrac{1}{2}\epsilon y)} - \tfrac{1}{2}\epsilon \overline{\psi(t, x - \tfrac{1}{2}\epsilon y)} \Delta_x \psi(t, x + \tfrac{1}{2}\epsilon y). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \psi(t, x + \tfrac{1}{2}\epsilon y) \Delta_x \overline{\psi(t, x - \tfrac{1}{2}\epsilon y)} &= \operatorname{div}_x \left(\psi(t, x + \tfrac{1}{2}\epsilon y) \nabla_x \overline{\psi(t, x - \tfrac{1}{2}\epsilon y)} \right) \\ &\quad - \nabla_x \psi(t, x + \tfrac{1}{2}\epsilon y) \cdot \nabla_x \overline{\psi(t, x - \tfrac{1}{2}\epsilon y)} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2}\epsilon \psi(t, x + \tfrac{1}{2}\epsilon y) \Delta_x \overline{\psi(t, x - \tfrac{1}{2}\epsilon y)} - \tfrac{1}{2}\epsilon \overline{\psi(t, x - \tfrac{1}{2}\epsilon y)} \Delta_x \psi(t, x + \tfrac{1}{2}\epsilon y) \\ &= \tfrac{1}{2}\epsilon \operatorname{div}_x \left(\psi(t, x + \tfrac{1}{2}\epsilon y) \nabla_x \overline{\psi(t, x - \tfrac{1}{2}\epsilon y)} - \overline{\psi(t, x - \tfrac{1}{2}\epsilon y)} \nabla_x \psi(t, x + \tfrac{1}{2}\epsilon y) \right). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \nabla_x \overline{\psi(t, x - \tfrac{1}{2}\epsilon y)} &= -\frac{2}{\epsilon} \nabla_y \overline{\psi(t, x - \tfrac{1}{2}\epsilon y)} \\ \nabla_x \psi(t, x + \tfrac{1}{2}\epsilon y) &= +\frac{2}{\epsilon} \nabla_y \psi(t, x + \tfrac{1}{2}\epsilon y) \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2}\epsilon \psi(t, x + \tfrac{1}{2}\epsilon y) \Delta_x \overline{\psi(t, x - \tfrac{1}{2}\epsilon y)} - \tfrac{1}{2}\epsilon \overline{\psi(t, x - \tfrac{1}{2}\epsilon y)} \Delta_x \psi(t, x + \tfrac{1}{2}\epsilon y) \\ &= -\operatorname{div}_x \left(\nabla_y \left(\psi(t, x + \tfrac{1}{2}\epsilon y) \overline{\psi(t, x - \tfrac{1}{2}\epsilon y)} \right) \right). \end{aligned}$$

On a donc

$$i\partial_t \left(\psi(t, x + \tfrac{1}{2}\epsilon y) \overline{\psi(t, x - \tfrac{1}{2}\epsilon y)} \right) = -\operatorname{div}_x \left(\nabla_y \left(\psi(t, x + \tfrac{1}{2}\epsilon y) \overline{\psi(t, x - \tfrac{1}{2}\epsilon y)} \right) \right).$$

Supposons maintenant que la fonction $x \mapsto \psi(0, x)$ appartient à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$; on sait alors, d'après le Corollaire 10.2.2, que $\psi \in C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$ et que les fonctions $x \mapsto \psi(t, x)$ et $x \mapsto \partial_t \psi(t, x)$ sont uniformément bornées dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ lorsque t décrit \mathbf{R} .

Appliquant alors la transformation de Fourier inverse partielle en la variable y aux deux membres de cette égalité, on trouve que

$$i\partial_t W_\epsilon[\psi(t, \cdot)](x, \xi) = \operatorname{div}_x (-i\xi W_\epsilon[\psi(t, \cdot)])(x, \xi)$$

c'est-à-dire que

$$\partial_t W_\epsilon[\psi(t, \cdot)](x, \xi) + \xi \cdot \nabla_x W_\epsilon[\psi(t, \cdot)](x, \xi) = 0.$$

On vient donc de démontrer le

Théorème 10.4.5 (Equation de Schrödinger et transformation de Wigner)

Soit $\psi^{in} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ et soit, pour tout $\epsilon > 0$, la solution ψ_ϵ du problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger

$$\begin{aligned} i\partial_t \psi_\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon \Delta_x \psi_\epsilon &= 0 \text{ sur } \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N, \\ \psi_\epsilon|_{t=0} &= \psi^{in}. \end{aligned}$$

Alors la transformée de Wigner à l'échelle ϵ de ψ_ϵ est la solution du problème de Cauchy pour l'équation de transport

$$\begin{aligned} \partial_t W_\epsilon[\psi_\epsilon(t, \cdot)](x, \xi) + \xi \cdot \nabla_x W_\epsilon[\psi(t, \cdot)](x, \xi) &= 0 \text{ sur } \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N \times \mathbf{R}_\xi^N, \\ W_\epsilon[\psi(t, \cdot)]|_{t=0} &= W_\epsilon[\psi^{in}]. \end{aligned}$$

10.4.3 Interprétation physique

Revenant à l'introduction de ce chapitre, on voit que l'équation du mouvement d'une particule libre de masse m en mécanique quantique est

$$i\hbar \partial_t \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x \psi = 0,$$

où \hbar est la constante de Planck réduite.

Dans cette équation, les variables de temps $t \in \mathbf{R}$ et d'espace $x \in \mathbf{R}^N$ sont mesurées en unités de temps T et d'espace L .

Il faut penser à T comme une échelle de temps et à L comme une échelle de longueur, toutes deux caractérisant les conditions — typiquement les unités de mesure — dans lesquelles on observe la particule de masse m considérée.

On définit alors des variables adimensionnées

$$\tilde{t} = \frac{t}{T} \quad \text{et} \quad \tilde{x} = \frac{x}{L}$$

et on pose

$$\Psi(\tilde{t}, \tilde{x}) = \psi(t, x).$$

Alors

$$i \frac{\hbar}{T} \partial_{\tilde{t}} \Psi + \frac{\hbar^2}{2mL^2} \Delta_{\tilde{x}} \Psi = 0.$$

En posant

$$\epsilon = \frac{\hbar T}{mL^2}$$

on écrit l'équation de Schrödinger ci-dessus sous la forme

$$i\partial_{\tilde{t}} \Psi + \frac{1}{2}\epsilon \Delta_{\tilde{x}} \Psi = 0.$$

On sait que la mécanique classique est une approximation de la mécanique quantique dans le cas d'objets microscopiques observés à une échelle macroscopique. Or le nombre ϵ défini ci-dessus est la rapport de la constante de Planck (réduite) \hbar à la quantité

$$m \frac{L}{T} \times L$$

qui est le produit de la masse m de la particule par sa vitesse caractéristique L/T , multipliée par la longueur caractéristique d'observation L . La zone de validité de l'approximation de la mécanique quantique par la mécanique classique est précisément le cas où

$$\hbar \ll m \frac{L}{T} \times L, \quad \text{c'est-à-dire } \epsilon \ll 1.$$

Considérons alors le cas particulier où la fonction d'onde initiale est une onde plane (cf. Exemple 10.4.3)

$$\psi^{in}(\tilde{x}) = a(\tilde{x})e^{ik \cdot \tilde{x}/\epsilon}$$

avec $k \neq 0$, et

$$a \in C_c(\mathbf{R}^N) \text{ réelle} \quad \text{telle que} \quad \int_{\mathbf{R}^N} a(\tilde{x})^2 d\tilde{x} = \frac{1}{L^N}.$$

Rappelons la signification physique de ce fait : la position initiale de la particule considérée est distribuée suivant la densité de probabilité $L^N a(\tilde{x})^2$, avec une impulsion initiale $\frac{mL}{T}k$.

On a vu que, dans ces conditions

$$W_\epsilon[\psi_\epsilon^{in}] \rightarrow a(\tilde{x})^2 \otimes \delta_{\xi=k} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

On déduit du théorème ci-dessus que

$$W_\epsilon[\psi_\epsilon(\tilde{t}, \cdot)] \rightarrow f(\tilde{t}, \cdot) \otimes \delta_{\xi=k}$$

au sens des distributions dans $\mathbf{R}_{\tilde{t}} \times \mathbf{R}_{\tilde{x}}^N \times \mathbf{R}_{\tilde{\xi}}^N$, où

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{t}} f(\tilde{t}, \tilde{x}) + k \cdot \nabla_{\tilde{x}} f(\tilde{t}, \tilde{x}) &= 0, \quad \tilde{x} \in \mathbf{R}^N, \quad \tilde{t} \in \mathbf{R}, \\ f(0, \tilde{x}) &= a(\tilde{x})^2. \end{aligned}$$

Cette équation de transport se résout par la méthode des caractéristiques pour donner

$$f(\tilde{t}, \tilde{x}) = a(\tilde{x} - k\tilde{t})^2$$

Dans les variables physiques de départ, cette égalité signifie que la densité de probabilité initiale de la particule considérée est transportée par un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\frac{L}{T}k$.

En résumé, dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$, qui est connue sous le nom de "limite semi-classique" de la mécanique quantique, la transformée de Wigner de la fonction d'onde à l'échelle ϵ d'une particule quantique converge vers une densité de probabilité transportée par les trajectoires de cette particule du point de vue de la mécanique classique.

Le lecteur pourrait retirer du Théorème 10.4.5 l'impression fallacieuse que le passage à la limite $\epsilon \rightarrow 0$ est superflu puisque la transformée de Wigner

$W_\epsilon[\psi_\epsilon(\tilde{t}, \cdot)]$ est solution de l'équation de transport pour tout $\epsilon > 0$. Ceci conduirait à une absurdité sur le plan physique : on sait que la mécanique classique cesse de s'appliquer à des objets dont l'action est de l'ordre de \hbar — c'est-à-dire, dans le cas présent, lorsque ϵ est de l'ordre de 1. Cette obstruction d'origine physique se traduit au niveau mathématique de deux façons différentes.

(a) Seul le cas d'une particule libre a été considéré ici. Dans le cas plus général d'une particule soumise à l'action d'un potentiel V , l'équation de Schrödinger à considérer est

$$i\hbar\partial_t\psi + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\psi = V(x)\psi.$$

Cette équation est adimensionnée comme ci-dessus avec la définition supplémentaire

$$\tilde{V}(\tilde{x}) = \epsilon\frac{T}{\hbar}V(x)$$

et on montre, sous des hypothèses de régularité assez peu contraignantes sur le potentiel \tilde{V} , que, dans la limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, la transformée de Wigner

$$W_\epsilon[\psi_\epsilon(\tilde{t}, \cdot)] \rightarrow f$$

au sens des distributions sur $\mathbf{R}_{\tilde{t}} \times \mathbf{R}_{\tilde{x}}^N \times \mathbf{R}_{\tilde{\xi}}^N$, où f est solution de l'équation de transport

$$\partial_t f + \xi \cdot \nabla_{\tilde{x}} f - \nabla_{\tilde{x}} \tilde{V}(\tilde{x}) \cdot \nabla_{\tilde{\xi}} f = 0$$

Les courbes caractéristiques de cet équation de transport vérifient

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{\xi}, \\ \dot{\tilde{\xi}} &= -\nabla_{\tilde{x}} \tilde{V}(\tilde{x}),\end{aligned}$$

qui sont précisément les trajectoires de la particule considérée soumise à l'action du potentiel rescalé \tilde{V} dans le cadre de la mécanique classique.

Alors que dans le cas $V = 0$, l'équation de transport libre est vérifiée par la transformée de Wigner de la fonction d'onde pour tout $\epsilon > 0$, sans qu'il soit besoin de passer à la limite pour $\epsilon \rightarrow 0^+$, il n'en est pas de même dans le cas d'un potentiel régulier général V , et la transformée de Wigner de la fonction d'onde avant le passage à la limite $\epsilon \rightarrow 0^+$ n'est pas en général la solution d'une équation de transport¹.

(b) Indépendamment du potentiel V — et donc même dans le cas d'une particule libre — la transformée de Wigner d'une fonction d'onde n'est en général pas positive ou nulle pour $\epsilon > 0$ fixé. Elle l'est dans le cas d'un paquet d'ondes gaussien (cf. Exemple 10.4.4 ci-dessus).

Mais c'est à peu de chose près la seule exception. Voir [12], pp. 50–51, pour une démonstration du fait suivant : si $\psi \in L^2(\mathbf{R})$, alors $W_\epsilon[\psi] \geq 0$ si et seulement si ψ est de la forme

$$\psi(x) = Ce^{ax^2+bx+c}$$

1. Sauf dans le cas exceptionnel où $V(x)$ est de la forme $V(x) = \text{Const.} \frac{x^2}{2}$, correspondant au cas de l'oscillateur harmonique quantique.

avec $a, b, c, C \in \mathbf{C}$ et $\Re(a) < 0$.

Donc, même si la transformée de Wigner de la fonction d'onde d'une particule libre est solution de l'équation de transport, elle ne peut pas s'interpréter comme une densité de probabilité de présence pour une particule qui évoluerait en suivant les trajectoires de la mécanique classique.

En revanche, pour toute famille bornée dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ de données initiales ψ_ϵ^{in} pour la fonction d'onde, notant ψ_ϵ la solution de

$$\begin{aligned} i\epsilon\partial_t\psi_\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon^2\Delta_x\psi_\epsilon &= V(x)\psi_\epsilon, \\ \psi_\epsilon|_{t=0} &= \psi_\epsilon^{in}, \end{aligned}$$

qui appartient à $C(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}^N))$ sous des hypothèses très faibles portant sur le potentiel V , la famille des transformées de Wigner $W_\epsilon[\psi_\epsilon]$ converge, à extraction d'une sous-suite près, au sens des distributions tempérées vers une distribution positive (c'est-à-dire une mesure de Radon) lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$. Cette observation, due à P.-L. Lions et T. Paul et, sous une forme très semblable, à P. Gérard remonte au début des années 1990, et justifie la pertinence de la transformation de Wigner pour l'étude de la transition de la mécanique quantique à la mécanique classique. Peu de temps avant, L. Tartar avait également introduit un objet voisin, connu sous le nom de H -mesure, et permettant, tout comme la transformation de Wigner, d'étudier les oscillations à haute fréquence dans les équations aux dérivées partielles.

Quoi qu'il en soit, les remarques ci-dessus montrent donc que le passage à la limite pour $\epsilon \rightarrow 0^+$ est donc absolument nécessaire y compris sur le plan strictement mathématique pour passer du cadre quantique au cadre classique.

Alors qu'a priori la mécanique quantique et la mécanique classique décrivent un même système au moyen d'objets mathématiques très différents (fonctions d'onde dans le cas quantique, trajectoires dans le cas classique), la transformation de Wigner fournit un objet unique commun aux deux théories et qui permet de formuler de façon satisfaisante la limite semi-classique de la mécanique quantique.

10.5 Exercices

Exercice 1.

On pose $H_0(x) = 1$ et $H_n(x) = (-1)^n e^{-x^2} (e^{x^2})^{(n)}$.

a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, la fonction H_n est polynômiale de degré n , de coefficient directeur 2^n , et que

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x).$$

Les fonctions H_n sont nommées "polynômes d'Hermite".

b) Montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = 0 \quad \text{si } m < n,$$

et que

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)^2 e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

(On rappelle que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.)

c) Dédurre du b) que, pour tout $n \geq 1$, l'on a

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

(On pourra écrire H_{n+1} comme combinaison linéaire des polynômes H_0, \dots, H_n, xH_n et appliquer le b).)

d) En utilisant les questions a) et c), montrer que

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}, \quad n \geq 1$$

puis que

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0, \quad n \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

e) Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$u_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} e^{-x^2/2} H_n(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{R})$. (On pourra par exemple utiliser la régularisation analytique par le semi-groupe de la chaleur — Théorème 9.3.3 — pour montrer que, si $f \in L^2(\mathbf{R})$ vérifie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2/2} x^n dx = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

alors $f = 0$ p.p. sur \mathbf{R} .)

f) Montrer que

$$-\partial_x^2 u_n(x) + x^2 u_n(x) = (2n+1)u_n(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad n \geq 0.$$

g) Soit $\psi^{in} \in L^2(\mathbf{R})$. Montrer que le problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger avec potentiel quadratique

$$\begin{aligned} i\partial_t \psi &= -\frac{1}{2}\partial_x^2 \psi + \frac{1}{2}x^2 \psi, \quad (t, x) \in \mathbf{R}^2, \\ \psi|_{t=0} &= \psi^{in}. \end{aligned}$$

admet une unique solution dans $C(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}))$, donnée par

$$\psi(t, x) = \sum_{n \geq 0} e^{-i(2n+1)t/2} u_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{in}(y) u_n(y) dy.$$

Le système quantique correspondant à un point dans un potentiel quadratique, qui est décrit par l'équation de Schrödinger ci-dessus est appelé "oscillateur harmonique" (quantique).

Exercice 2.

On considère, pour tout $\epsilon > 0$, l'équation de Schrödinger pour l'oscillateur harmonique

$$i\epsilon\partial_t\psi = -\frac{1}{2}\epsilon^2\partial_x^2\psi + \frac{1}{2}x^2\psi,$$

où $\epsilon > 0$ est le paramètre semi-classique. On utilisera les résultats sur les polynômes d'Hermite obtenus dans l'exercice précédent.

a) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)u_n(x)dx = O\left(\frac{1}{n^k}\right) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty,$$

où les fonctions u_n sont celles définies à la question e) de l'Exercice 1.

b) Soit $\psi^{in} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ et soit, pour tout $\epsilon > 0$, ψ_ϵ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} i\partial_t\psi &= -\frac{1}{2}\partial_x^2\psi + \frac{1}{2}x^2\psi, & (t, x) \in \mathbf{R}^2, \\ \psi|_{t=0} &= \psi^{in}. \end{aligned}$$

Vérifier que la transformée de Wigner de $\psi_\epsilon(t, \cdot)$ à l'échelle ϵ , notée

$$w_\epsilon(t, x, \xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} \psi_\epsilon(t, x + \frac{1}{2}\epsilon y) \overline{\psi_\epsilon(t, x - \frac{1}{2}\epsilon y)} \frac{dy}{2\pi}$$

est solution de l'équation de transport

$$\begin{aligned} \partial_t w_\epsilon + \xi \partial_x \psi_\epsilon - x \partial_\xi w_\epsilon &= 0, & (t, x, \xi) \in \mathbf{R}^3, \\ w_\epsilon|_{t=0} &= W_\epsilon[\psi^{in}]. \end{aligned}$$

Exercice 3.

Soient $a^{in} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ et $\phi^{in} \in C^\infty(\mathbf{R})$, toutes deux à valeurs réelles. Pour tout $\epsilon > 0$, on pose

$$\psi_\epsilon^{in}(x) = a^{in}(x)e^{i\phi^{in}(x)/\epsilon}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Notons

$$w_\epsilon^{in}(x, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} \psi_\epsilon^{in}(x + \frac{1}{2}\epsilon y) \overline{\psi_\epsilon^{in}(x - \frac{1}{2}\epsilon y)} \frac{dy}{2\pi}$$

la transformée de Wigner de ψ_ϵ^{in} à l'échelle ϵ .

a) Montrer que, lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$, la suite w_ϵ^{in} converge dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_\xi)$ vers $a^{in}(x)^2 \delta(\xi - (\phi^{in})'(x))$.

Supposons que les fonctions $(\phi^{in})'$ et $(\phi^{in})''$ sont toutes deux bornées sur \mathbf{R} , que $a^{in} > 0$ sur \mathbf{R} , et posons

$$T = \frac{1}{\sup_{x \in \mathbf{R}} \max(0, -(\phi^{in})''(x))} \text{ avec la convention } 1/0 = +\infty.$$

b) Montrer que, pour $0 \leq t < T$, l'application

$$f_t : \mathbf{R} \ni x \mapsto x + t(\phi^{in})'(x) \in \mathbf{R}$$

est un difféomorphisme de classe C^∞ de \mathbf{R} dans lui-même.

Pour tout $\epsilon > 0$, on définit ψ_ϵ comme la solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} i\partial_t \psi_\epsilon + \epsilon \frac{1}{2} \partial_x^2 \psi_\epsilon &= 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \\ \psi_\epsilon|_{t=0} &= \psi_\epsilon^{in}. \end{aligned}$$

On note la transformée de Wigner de $\psi_\epsilon(t, \cdot)$ à l'échelle ϵ

$$w_\epsilon(t, x, \xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} \psi_\epsilon(t, x + \frac{1}{2}\epsilon y) \overline{\psi_\epsilon(t, x - \frac{1}{2}\epsilon y)} \frac{dy}{2\pi}.$$

c) Montrer que, pour tout $0 < t < T$,

$$w_\epsilon(t, \cdot, \cdot) \rightarrow \rho(t, x) \delta(\xi - u(t, x))$$

dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_\xi)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$, où

$$\rho(t, x) = a^{in}(f_t^{-1}(x))^2 \text{ et } u(t, x) = (\phi^{in})'(f_t^{-1}(x)).$$

d) Vérifier que les fonctions ρ et u sont solutions du système d'EDP

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u &= 0, \end{aligned}$$

sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, et vérifient la condition initiale

$$\rho|_{t=0} = |a^{in}|^2, \quad u|_{t=0} = (\phi^{in})'.$$

Chapitre 11

Equation des ondes

L'équation des ondes s'écrit

$$\partial_t^2 u(t, x) - c^2 \Delta_x u(t, x) = 0;$$

elle gouverne la propagation d'ondes à la vitesse c .

On va découvrir dans ce chapitre comment les outils du calcul des distributions donnent assez facilement accès à plusieurs formules de représentation des solutions du problème de Cauchy pour cette équation. On verra d'ailleurs que la connaissance précise de ces formules de représentation est fondamentale pour comprendre certaines propriétés qualitatives de l'équation des ondes.

11.1 Origines du modèle

Bien que l'équation

$$\partial_t^2 u(t, x) - c^2 \Delta_x u(t, x) = 0;$$

soit connue sous le nom d'équation des ondes, il ne faudrait pas en déduire qu'elle sert à modéliser tous les phénomènes de propagation d'ondes intervenant dans la nature — ce serait plutôt le contraire, d'ailleurs, dans la mesure où les effets non linéaires, absents de ce modèle, jouent un rôle de tout premier plan dans de nombreux phénomènes de propagation.

Malgré tout, l'équation des ondes intervient dans plusieurs contextes physiques différents, comme par exemple

- la propagation d'ondes acoustiques,
- la propagation d'ondes électromagnétiques.

De même, c'est une variante de l'équation des ondes faisant intervenir deux vitesses de propagation (au lieu de la seule vitesse c) qui modélise la propagation des ondes élastiques, par exemple en sismologie.

Nous n'allons évidemment pas décrire en détail ces différents modèles ; nous nous contenterons d'évoquer la manière dont l'équation des ondes intervient dans la propagation des ondes électromagnétiques.

Les équations fondamentales gouvernant le champ électromagnétique dans le vide créé par une distribution de charges en mouvement sont les équations de Maxwell. Ces équations constituent l'un des principes de base de la physique classique (c'est-à-dire non quantique) et ont été, du point de vue historique, les premières équations relativistes — au sens où elles sont invariantes par le groupe des transformations de Lorentz.

Rappelons les équations de Maxwell pour le champ électrique E et le champ magnétique B .

La première équation exprime qu'il n'existe pas de charges magnétiques :

$$\operatorname{div}_x B = 0.$$

La deuxième équation (équation de Faraday) exprime que le flux d'un champ magnétique variable à travers une boucle conductrice y crée un champ électrique :

$$\operatorname{rot}_x E = -\partial_t B.$$

La troisième est l'équation de Gauss de l'électrostatique, qui reste valable même dans le cas de charges en mouvement :

$$\epsilon_0 \operatorname{div}_x E = \rho,$$

où ρ désigne la densité de charges réparties dans l'espace.

Enfin, la quatrième et dernière équation est une correction — due à Maxwell — de l'équation d'Ampère, qui affirme qu'une boucle de courant crée un champ magnétique conformément à la relation

$$\operatorname{rot}_x B = \mu_0 j.$$

L'équation de Maxwell-Ampère est obtenue à partir de l'équation d'Ampère en ajoutant au courant j le terme $\epsilon_0 \partial_t E$, appelé courant de déplacement :

$$\operatorname{rot}_x B = \mu_0 j + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t E.$$

Dans toutes ces équations, ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide, tandis que μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. Le produit $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ où $1 \ll c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ (vitesse de la lumière dans le vide). Par conséquent le terme correctif $\mu_0 \epsilon_0 \partial_t E$ est très petit dans de nombreuses situations. Il est même identiquement nul dans le cas où le champ électromagnétique est indépendant du temps. Dans ce cas, les équations vérifiées par E et B se découpent, et on retrouve d'une part les équations de l'électrostatique

$$\epsilon_0 \operatorname{div}_x E = \rho, \quad \text{et} \quad \operatorname{rot}_x E = 0,$$

et d'autre part les équations de la magnétostatique

$$\operatorname{div}_x B = 0, \quad \text{et} \quad \operatorname{rot}_x B = \mu_0 j.$$

La condition $\operatorname{rot}_x E = 0$ suggère de chercher E sous la forme $E = -\nabla_x \phi$; en substituant cette expression dans l'équation de Gauss, on aboutit à l'équation de Poisson vérifiée par le potentiel électrostatique ϕ , à savoir

$$-\Delta_x \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

On retrouve ici la formulation de l'électrostatique présentée au début du chapitre 8, et qui nous a servi de motivation pour l'étude de l'équation de Poisson.

En résumé, le système de équations de Maxwell gouvernant l'évolution d'un champ électromagnétique (E, B) dans le vide est

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x B = 0, \\ \operatorname{rot}_x E = -\partial_t B, \\ \operatorname{div}_x E = \rho/\epsilon_0, \\ \operatorname{rot}_x B = \mu_0 j + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t E, \end{cases}$$

où ρ est la densité de charges, et j la densité de courant électrique.

Supposons, dans la suite de cette section, que les champs inconnus et les densités de charges ρ et de courant j sont des fonctions assez régulières (de classe C^2 au moins pour les champs, et de classe C^1 au moins pour les termes sources).

Sous cette hypothèse de régularité, on prend le rotationnel de chaque membre des équations de Faraday et de Maxwell-Ampère, et on tient compte de la formule suivante d'analyse vectorielle : pour tout champ de vecteurs H de classe C^2 sur \mathbf{R}^3 , on a

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} H) = \nabla(\operatorname{div} H) - \Delta H$$

où le champ ΔH est le champ de vecteurs dont les composantes sont les laplaciens des composantes de H :

$$\Delta H = \begin{pmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \Delta H_3 \end{pmatrix}.$$

On trouve donc que

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_x(\operatorname{rot}_x E) &= -\operatorname{rot}_x \partial_t B = -\partial_t \operatorname{rot}_x B = -\mu_0 \partial_t j - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 E, \\ \operatorname{rot}_x(\operatorname{rot}_x B) &= \mu_0 \operatorname{rot}_x j + \mu_0 \epsilon_0 \operatorname{rot}_x \partial_t E \\ &= \mu_0 \operatorname{rot}_x j + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \operatorname{rot}_x E = \mu_0 \operatorname{rot}_x j - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 B. \end{aligned}$$

La formule ci-dessus pour le carré du rotationnel donne donc

$$\nabla_x(\operatorname{div}_x E) - \Delta_x E = -\mu_0 \partial_t j - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 E,$$

et on élimine le terme $\operatorname{div}_x E$ par l'équation de Gauss pour trouver

$$\mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 E - \Delta_x E = -\mu_0 \partial_t j - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla_x \rho.$$

Faisons de même avec l'égalité portant sur $\text{rot}_x(\text{rot}_x B)$:

$$\nabla_x(\text{div}_x B) - \Delta_x B = \mu_0 \text{rot}_x j - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 B.$$

L'absence de charges magnétiques permet d'éliminer le premier terme du membre de gauche :

$$\mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 B - \Delta_x B = \mu_0 \text{rot}_x j.$$

Les deux équations

$$\begin{cases} \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 E - \Delta_x E = -\mu_0 \partial_t j - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla_x \rho, \\ \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 B - \Delta_x B = \mu_0 \text{rot}_x j, \end{cases}$$

sont des équations des ondes pour les (composantes des) champs inconnus E et B , avec des termes sources calculés à partir des densités de charges et de courant. Observons que ces équations peuvent être résolues séparément pour calculer E et B , alors que le système des équations originales de Maxwell couple les deux champs E et B . Comme on l'a dit, le produit

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}, \quad \text{où } c \text{ est la vitesse de la lumière dans le vide.}$$

Il existe une autre manière de ramener le système des équations de Maxwell à deux équations des ondes découplées.

Pour cela, on introduit un potentiel électromagnétique (ϕ, A) où ϕ est à valeurs scalaires et A est un champ de vecteurs (on parle respectivement du potentiel scalaire ϕ et du potentiel vecteur A). Dans tout la suite, on supposera que ϕ et A sont de classe C^3 au moins.

L'absence de charges magnétiques, qui se traduit par l'équation

$$\text{div}_x B = 0,$$

suggère de chercher B sous la forme

$$B = \text{rot}_x A.$$

Dans le cas électrostatique — c'est-à-dire pour des charges fixes — on sait que E est le gradient du potentiel électrostatique

$$E = -\nabla_x \phi.$$

Cette relation est impossible dans le cas de charges en mouvement, et en considérant l'équation de Faraday et l'expression ci-dessus, on trouve que

$$\text{rot}_x(E + \partial_t A) = \text{rot}_x E + \partial_t \text{rot}_x A = \text{rot}_x E + \partial_t B = 0.$$

Par conséquent, le champ de vecteurs $E + \partial_t A$ est un gradient : il existe donc une fonction $\phi \equiv \phi(t, x)$ à valeurs réelles telle que

$$E = -\nabla_x \phi - \partial_t A.$$

Cherchons les équations que doivent satisfaire ϕ et A pour que E et B vérifient les équations de Maxwell. D'abord, la relation

$$B = \text{rot}_x A \text{ implique } \text{div}_x B = 0$$

tandis que la relation

$$E = -\nabla_x \phi - \partial_t A \text{ implique } \text{rot}_x E = -\text{rot}_x \partial_t A = -\partial_t \text{rot}_x A = -\partial_t B$$

de sorte que l'absence de charges magnétiques et l'équation de Faraday sont automatiquement vérifiées. Ces deux équations constituent pour ainsi dire une sorte de contrainte de nature géométrique sur le champ électromagnétique. Elles constituent d'ailleurs la réciproque des raisonnements précédents aboutissant aux relations donnant E et B en fonction de ϕ et A .

Passons aux deux équations contenant des termes source. L'équation de Gauss devient

$$\epsilon_0 \text{div}_x E = -\epsilon_0 \Delta_x \phi - \epsilon_0 \text{div}_x \partial_t A = \rho,$$

tandis que l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\begin{aligned} \text{rot}_x B - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t E &= \text{rot}_x(\text{rot}_x A) + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \nabla_x \phi + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 A \\ &= \nabla_x(\text{div}_x A) - \Delta_x A + \frac{1}{c^2} \nabla_x(\partial_t \phi) + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 A \\ &= \mu_0 j. \end{aligned}$$

Cette dernière équation s'écrit

$$\mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 A - \Delta_x A = \mu_0 j - \nabla_x \left(\text{div}_x A + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi \right),$$

tandis que l'équation obtenu à partir de l'équation de Gauss s'écrit

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi - \Delta_x \phi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho + \partial_t \left(\frac{1}{c^2} \partial_t \phi + \text{div}_x A \right).$$

En résumé, le potentiel électromagnétique (ϕ, A) vérifie

$$\begin{cases} \square_c \phi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho + \partial_t L, \\ \square_c A = \mu_0 j - \nabla_x L, \end{cases}$$

avec les notations

$$\square_c = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta_x,$$

et

$$L = \frac{1}{c^2} \partial_t \phi + \text{div}_x A.$$

Appliquons l'opérateur $\frac{1}{c^2} \partial_t$ aux deux membres de l'équation pour ϕ et prenons la divergence des deux membres de l'équation pour A : additionnant membre à membre les deux équations obtenues ainsi, on trouve que

$$\square_c L = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \partial_t \rho + \mu_0 \operatorname{div}_x j + \square_c L,$$

de sorte que

$$\mu_0 (\partial_t \rho + \operatorname{div}_x j) = 0.$$

La relation

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}_x j = 0$$

est appelée "équation de continuité" ou "loi de conservation locale de la charge". Rappelons-en la signification : pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ borné à bord de classe C^1 , la variation par unité de temps de la charge totale contenue dans Ω est égale au flux entrant du vecteur courant à travers la frontière de Ω :

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\Omega} \rho(t, x) dx &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}_x j(t, x) dx \\ &= - \int_{\partial\Omega} j(t, x) \cdot n_x d\sigma(x), \end{aligned}$$

où $d\sigma$ est l'élément de surface sur $\partial\Omega$, et n_x le vecteur unitaires normal à $\partial\Omega$ au point x , dirigé vers l'extérieur de Ω .

Ce raisonnement est analogue à celui que nous avons déjà fait pour la conservation de l'énergie dans l'établissement de l'équation de la chaleur — voir l'introduction du chapitre 9. Pour obtenir la première égalité, on intègre sur Ω par rapport à x chaque membre de l'équation de continuité ; la densité ρ étant au moins de classe C^1 , la dérivation sous le signe somme est licite. La deuxième égalité résulte de la formule de Green (Théorème 3.5.4).

Revenons maintenant au système d'équations des ondes gouvernant ϕ et A .

Supposons qu'il existe une fonction à valeurs réelles V de classe au moins C^4 telle que

$$\square_c V = L,$$

et posons

$$\phi_0 = \phi - \partial_t V, \quad A_0 = A + \nabla_x V.$$

D'une part

$$\begin{aligned} \square_c \phi_0 &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho + \partial_t (L - \square_c V) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ \square_c A_0 &= \mu_0 j - \nabla_x (L - \square_c V) = \mu_0 j, \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} E &= -\nabla_x \phi - \partial_t A = -\nabla_x (\phi_0 + \partial_t V) - \partial_t (A_0 - \nabla_x V) \\ &= -\nabla_x \phi_0 - \partial_t A_0, \end{aligned}$$

tandis que

$$B = \operatorname{rot}_x A = \operatorname{rot}_x (A_0 - \nabla_x V) = \operatorname{rot}_x A_0.$$

Enfin le potentiel électromagnétique corrigé (ϕ_0, A_0) vérifie la relation

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \phi_0 + \operatorname{div}_x A_0 = L - \square_c V = 0.$$

Cette dernière égalité vérifiée par le potentiel électromagnétique (ϕ, A) porte le nom de “condition de jauge de Lorentz”.

Il faut remarquer que le potentiel électromagnétique original (ϕ, A) et le potentiel électromagnétique corrigé (ϕ_0, A_0) donnent lieu au même champ électromagnétique (E, B) . La transformation $(\phi, A) \mapsto (\phi_0, A_0)$ est un exemple de ce que l’on appelle “transformation de jauge” en physique. Bien qu’un peu plus compliquée, cette situation est analogue au fait qu’en électrostatique, où le champ électrique $E = -\nabla_x \Phi$, le potentiel électrostatique Φ n’est défini qu’à une constante près.

On voit ainsi que le système des équations de Maxwell, qui régit la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide, se ramène, de plusieurs manières différentes, à des systèmes d’équations des ondes découplées.

11.2 Le problème de Cauchy

Dans tout le reste de ce chapitre, nous étudierons l’équation des ondes pour une vitesse de propagation égale à 1, et nous noterons

$$\square_{t,x} = \partial_t^2 - \Delta_x$$

l’opérateur d’Alembertien.

11.2.1 Formulation au sens des distributions

Dans le chapitre 7, section 7.3, nous avons expliqué en détail comment formuler au sens des distributions le problème de Cauchy pour une EDP d’évolution d’ordre 1 en la variable t de temps.

Or l’équation des ondes est d’ordre 2 en temps. Nous devons donc adapter cette analyse au cas de l’équation des ondes.

Pour faire la théorie du problème de Cauchy pour les équations différentielles ordinaires d’ordre 2, on commence par se ramener à un *système* différentiel d’ordre 1. Nous allons procéder exactement de même dans le cas de l’équation des ondes.

Ainsi, l’EDP du second ordre en t

$$\square_{t,x} u = \partial_t^2 u - \Delta_x u = f$$

est équivalente au système

$$\begin{cases} \partial_t u = v, \\ \partial_t v = \Delta u + f, \end{cases}$$

que l'on met sous la forme

$$\partial_t w + A(D_x)w = g, \quad \text{avec } A(D_x) = - \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta_x & 0 \end{pmatrix},$$

et avec

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \quad \text{et } w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

C'est un système d'EDP d'ordre 2 en x , mais d'ordre 1 en t , de sorte que la formulation au sens des distributions du problème de Cauchy pour ce système s'écrit en suivant la méthode exposée au chapitre 7, section 7.3.

Une solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t w + A(D_x)w = g, & x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ w|_{t=0} = w^{in}, \end{cases}$$

où

$$w^{in} = \begin{pmatrix} u^{in} \\ v^{in} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)^2 \quad \text{et } g \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)^2$$

est donc un vecteur à composantes distributions tempérées $W \in \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)^2$ tel que

$$\begin{cases} \partial_t W + A(D_x)W = \dot{g} + \delta_{t=0} \otimes w^{in} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N), \\ \text{supp}(W) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N, \end{cases}$$

où on rappelle que \dot{g} est le prolongement de g par 0 pour $t < 0$, défini par

$$\langle \dot{g}, \phi \rangle_{\mathcal{E}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N), C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)} = \langle g, \phi|_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N} \rangle_{\mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N), C^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)}$$

— cf. Définition 4.1.6.

De façon équivalente, on peut revenir à une équation des ondes scalaire, lorsque le membre de droite de l'équation du premier ordre ci-dessus est de la forme

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \text{ avec } f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N).$$

La formulation au sens des distributions du problème de Cauchy ci-dessus s'écrit, composante par composante, sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t U - V = \delta_{t=0} \otimes u^{in} \\ \partial_t V - \Delta_x U = \delta_{t=0} \otimes v^{in} + \dot{f} \end{cases}$$

où \dot{f} est le prolongement par 0 pour $t < 0$ de la distribution à support compact $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$ défini comme ci-dessus.

Dérivant la première équation par rapport à t et éliminant $\partial_t V$ avec la seconde équation — grâce à la symétrie des dérivées secondes au sens des distributions (Lemme 3.4.6) — on trouve que

$$\square_{t,x} U = \delta'_{t=0} \otimes u^{in} + \delta_{t=0} \otimes v^{in} + \dot{f}.$$

Nous pouvons résumer la discussion ci-dessus par la définition suivante :

Définition 11.2.1 (Problème de Cauchy dans \mathcal{S}' pour les ondes) Une solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy pour l'équation des ondes

$$\begin{cases} \square_{t,x} u = f, & x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_I, & \partial_t u|_{t=0} = u_{II}, \end{cases}$$

où $u_I, u_{II} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ et où $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$ est une distribution tempérée $U \in \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$ vérifiant les conditions

$$\begin{cases} \square_{t,x} U = \delta'_{t=0} \otimes u_I + \delta_{t=0} \otimes u_{II} + \dot{f} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N) \\ \text{supp}(U) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N, \end{cases}$$

où \dot{f} est le prolongement de f par 0 pour $t < 0$.

11.2.2 Solution élémentaire dans le futur

Comme pour tous les problèmes d'évolution, la résolution du problème de Cauchy pour l'équation des ondes, bien que cette dernière soit d'ordre 2 en temps, passe par l'utilisation d'une solution élémentaire dans le futur de l'opérateur d'Alembertien.

Proposition 11.2.2 Il existe une unique solution élémentaire tempérée dans le futur de l'opérateur d'Alembertien, c'est-à-dire $E \in \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$ vérifiant

$$\begin{cases} \square_{t,x} E = \delta_{(t,x)=(0,0)} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N), \\ \text{supp}(E) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

La transformée de Fourier partielle en la variable x de la distribution E est la distribution tempérée définie par la formule

$$\hat{E}(t, \xi) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}, \quad (t, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N,$$

où ξ désigne la variable duale de x .

Démonstration. Appliquons au problème vérifié par E la transformation de Fourier partielle en x .

On trouve ainsi que la transformée de Fourier partielle en x de E , notée \hat{E} , vérifie

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{E} + |\xi|^2 \hat{E} = \delta_{t=0} \otimes 1 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N), \\ \text{supp}(\hat{E}) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

Observons que ceci est la formulation au sens des distributions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{e}(t, \xi) + |\xi|^2 \hat{e}(t, \xi) = 0, & \xi \in \mathbf{R}^N, t > 0 \\ \hat{e}(0, \xi) = 0, & \partial_t \hat{e}(0, \xi) = 1, \end{cases}$$

— voir chapitre 7, section 7.3.1.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 paramétrée par $\xi \in \mathbf{R}^N$: on obtient donc sans difficulté la solution

$$\hat{e}(t, \xi) = \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}, \quad \xi \in \mathbf{R}^N, \quad t \geq 0.$$

Ceci suggère donc de vérifier que la distribution définie par la formule de l'énoncé

$$\hat{E}(t, \xi) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}, \quad (t, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$$

est bien solution au sens des distributions du problème ci-dessus pour \hat{E} .

Or ceci découle de la formule de Leibnitz (Proposition 3.4.14), qui montre que

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \right) &= \delta_{t=0} t \frac{\sin(t|\xi|)}{t|\xi|} + \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) \cos(t|\xi|) \\ &= \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) \cos(t|\xi|) \end{aligned}$$

au sens des distributions sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$. Remarquons à cet égard que la fonction $(t, \xi) \mapsto \cos(t|\xi|)$ est bien de classe C^∞ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$, ainsi que $(t, \xi) \mapsto \frac{\sin(t|\xi|)}{t|\xi|}$ prolongée par continuité pour $t|\xi| = 0$. Ce n'est pas évident a priori puisque la norme euclidienne $\xi \mapsto |\xi|$ n'est pas de classe C^∞ sur \mathbf{R}^N . Mais on a

$$\cos(t|\xi|) = C(t^2|\xi|^2) \quad \text{et} \quad \frac{\sin(t|\xi|)}{t|\xi|} = S(t^2|\xi|^2)$$

en posant

$$C(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^n \quad \text{et} \quad S(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^n.$$

Les deux séries entières ci-dessus sont évidemment de rayon de convergence infini, de sorte que les fonctions C et S sont de classe C^∞ (et même holomorphes) sur \mathbf{C} . Donc les fonctions $(t, \xi) \mapsto \cos(t|\xi|)$ et $(t, \xi) \mapsto \frac{\sin(t|\xi|)}{t|\xi|}$ prolongée par continuité en $t|\xi| = 0$ sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ en tant que composées des fonctions C et S et la fonction $(t, \xi) \mapsto t^2|\xi|^2$ qui est de classe C^∞ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ car polynomiale. Cette justification est nécessaire pour pouvoir appliquer la formule de Leibnitz au produit de la distribution $\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*} \otimes 1$ par chacune des deux fonctions de classe C^∞ ci-dessus.

En appliquant à nouveau le même raisonnement, on trouve que

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \left(\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \right) &= \partial_t \left(\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) \cos(t|\xi|) \right) \\ &= \delta_{t=0} \cos(t|\xi|) - |\xi| \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) \sin(t|\xi|) \\ &= \delta_{t=0} \otimes 1 - |\xi|^2 \left(\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \right), \end{aligned}$$

La formule de l'énoncé pour \hat{E} définit bien une solution de l'équation différentielle considérée au sens des distributions sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$.

Vérifions ensuite que E est bien une distribution tempérée sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$. Or cela est immédiat car sa transformée de Fourier partielle est tempérée, puisqu'elle satisfait la borne

$$|\hat{E}(t, \xi)| \leq |t|, \quad (t, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N.$$

Vérifions enfin que c'est la seule solution élémentaire tempérée dans le futur. S'il en existait une autre, disons F , la différence $G = E - F$ vérifierait

$$\begin{cases} \square_{t,x} G = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N), \\ \text{supp}(G) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

On conclut grâce au lemme ci-dessous que $G = E - F = 0$, d'où l'unicité de E .

■

Lemme 11.2.3 (Unicité dans le futur pour l'équation des ondes) *Soit $G \in \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$ telle que*

$$\begin{cases} \square_{t,x} G = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N), \\ \text{supp}(G) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

Alors $G = 0$.

Démonstration. Par transformation de Fourier partielle en la variable x , le problème ci-dessus est équivalent à

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{G} + |\xi|^2 \hat{G} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N), \\ \text{supp}(\hat{G}) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

La première équation s'écrit

$$(\partial_t + i|\xi|)(\partial_t - i|\xi|)\hat{G} = 0$$

ou encore, de façon équivalente

$$e^{-it|\xi|} \partial_t \left(e^{2it|\xi|} \partial_t (e^{-it|\xi|} \hat{G}) \right) = 0$$

au sens des distributions sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$. D'après la Proposition 3.4.5,

$$e^{2it|\xi|} \partial_t (e^{-it|\xi|} \hat{G}) \text{ est constante en } t$$

Comme G est à support dans $t \geq 0$, on en déduit, en localisant l'égalité ci-dessus dans $\mathbf{R}_-^* \times \mathbf{R}^N$, c'est-à-dire pour $t < 0$, que la constante au membre de droite est nulle. Donc

$$\partial_t (e^{-it|\xi|} \hat{G}) = 0$$

au sens des distributions sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$, de sorte qu'en appliquant de nouveau la Proposition 3.4.5, on conclut que

$$e^{-it|\xi|}\hat{G} \text{ est constante en } t.$$

Utilisant à nouveau le fait que \hat{G} est à support pour $t > 0$, on en tire que cette constante est nulle, c'est-à-dire que $\hat{G} = 0$.

Comme la transformation de Fourier partielle en x est un isomorphisme sur l'espace vectoriel des distributions tempérées (voir Théorème 5.5.2), on en conclut que $G = 0$. ■

11.2.3 Existence et unicité de la solution

Supposons que $u_I, u_{II} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ et que $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$, et cherchons U solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \square_{t,x} u = f, & x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_I, & \partial_t u|_{t=0} = u_{II}. \end{cases}$$

Pour toute distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$, notons \hat{T} sa transformée de Fourier partielle en la variable x , ainsi que ξ la variable de Fourier duale de x .

Après transformation de Fourier partielle en x , le problème de Cauchy ci-dessus au sens des distributions devient

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{U} + |\xi|^2 \hat{U} = \delta'_{t=0} \otimes \hat{u}_I + \delta_{t=0} \otimes \hat{u}_{II} + \hat{f} & \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_\xi^N) \\ \text{supp}(\hat{U}) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

Théorème 11.2.4 (Existence et unicité pour l'équation des ondes) *Supposons que $u_I, u_{II} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ et que $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$ avec $N \in \mathbf{N}^*$. Alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \square_{t,x} u = f, & x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_I, & \partial_t u|_{t=0} = u_{II}, \end{cases}$$

admet une unique solution au sens des distributions tempérées. Cette solution U est définie par la formule

$$U = \partial_t E \star (\delta_{t=0} \otimes u_I) + E \star (\delta_{t=0} \otimes u_{II}) + E \star \hat{f},$$

où E est la solution élémentaire tempérée dans le futur de l'opérateur d'Alembertien.

De façon équivalente, la transformée de Fourier partielle de U en la variable x est donnée par

$$\hat{U}(t, \xi) = \cos(t|\xi|)\hat{u}_I(\xi) + \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} u_{II}(\xi) + \left\langle \hat{f}(\cdot, \xi), \frac{\sin((t-\cdot)|\xi|)}{|\xi|} \right\rangle_{\mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^*), C^\infty(\mathbf{R}_+^*)}$$

pour tout $t > 0$.

De plus, supposons que le terme source $f \in C(\mathbf{R}_+, H^{s-1}(\mathbf{R}^N))$ et que les données initiales vérifient $u_I \in H^s(\mathbf{R}^N)$, $u_{II} \in H^{s-1}(\mathbf{R}^N)$. Alors on a

$$U \in C(\mathbf{R}_+; H^s(\mathbf{R}^N)) \text{ et } \partial_t U \in C(\mathbf{R}_+; H^{s-1}(\mathbf{R}^N)).$$

Le troisième terme dans le membre de droite de la formule ci-dessus pour la transformée de Fourier partielle \hat{U} s'écrit encore

$$\left\langle \hat{f}(\cdot, \xi), \frac{\sin((t - \cdot)|\xi|)}{|\xi|} \right\rangle_{\mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^*), C^\infty(\mathbf{R}_+^*)} = \hat{f}(\cdot, \xi) \star_t \left(\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \right)$$

où la notation \star_t désigne le produit ponctuel en la variable ξ duale de x et le produit de convolution en la variable t seulement. (On a utilisé, dans cette dernière formule, la Définition 4.2.1, mais dans le cas où c'est la distribution qui est à support compact, tandis que la fonction test est de classe C^∞ sur \mathbf{R} sans restriction de support; la validité de cette extension de la formule de la Définition 4.2.1 ne pose aucune difficulté.)

Lorsque \hat{f} est une fonction et pas seulement une distribution — par exemple si $f \in C_c(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$ — ce produit de convolution peut se mettre sous la forme plus parlante

$$\left\langle \hat{f}(\cdot, \xi), \frac{\sin((t - \cdot)|\xi|)}{|\xi|} \right\rangle_{\mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^*), C^\infty(\mathbf{R}_+^*)} = \int_0^t \frac{\sin((t - s)|\xi|)}{|\xi|} \hat{f}(s, \xi) ds.$$

Démonstration.

Vérifions tout d'abord que la formule

$$U = \partial_t E \star (\delta_{t=0} \otimes u_I) + E \star (\delta_{t=0} \otimes u_{II}) + E \star \dot{f}$$

définit bien une solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy pour l'équation des ondes. Comme u_I et $u_{II} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$, les distributions $\delta_{t=0} \otimes u_I$ et $\delta_{t=0} \otimes u_{II}$ sont toutes deux à support compact, ainsi que \dot{f} , de sorte que, d'après la formule de dérivation d'un produit de convolution de distributions vue au Théorème 4.4.6, l'on a

$$\begin{aligned} \square_{t,x} (\partial_t E \star (\delta_{t=0} \otimes u_I)) &= (\square_{t,x} \partial_t E) \star (\delta_{t=0} \otimes u_I) \\ &= (\partial_t \square_{t,x} E) \star (\delta_{t=0} \otimes u_I) \\ &= (\partial_t \delta_{(t,x)=(0,0)}) \star (\delta_{t=0} \otimes u_I) \\ &= (\delta'_{t=0} \otimes \delta_{t=0}) \star (\delta_{t=0} \otimes u_I) = \delta'_{t=0} \otimes u_I. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \square_{t,x} (E \star (\delta_{t=0} \otimes u_I + \dot{f})) &= (\square_{t,x} E) \star (\delta_{t=0} \otimes u_I + \dot{f}) \\ &= \delta_{(t,x)=(0,0)} \star (\delta_{t=0} \otimes u_I + \dot{f}) = \delta_{t=0} \otimes u_I + \dot{f} \end{aligned}$$

de sorte qu'en additionnant membre à membre ces deux égalités, on trouve que

$$\square_{t,x}U = \delta'_{t=0} \otimes u_I + \delta_{t=0} \otimes u_I + \dot{f} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N).$$

Comme $u_I, u_{II} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ et $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$, et que $E \in \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$, la distribution U et le membre de droite de cette dernière égalité appartiennent à $\mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$. Cette égalité vaut donc au sens de $\mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$ par densité de $C_c^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$ (cf. Proposition 5.1.4.)

La condition de support est immédiate : les distributions $\delta_{t=0} \otimes u_I$ et $\delta_{t=0} \otimes u_{II}$ ainsi que \dot{f} étant à support compact, on a

$$\begin{aligned} \text{supp}(\partial_t E \star (\delta_{t=0} \otimes u_I)) &\subset \text{supp}(\partial_t E) + \text{supp}(\delta_{t=0} \otimes u_I) \\ &\subset (\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N) + (\{0\} \times \mathbf{R}^N) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N, \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \text{supp}(E \star (\delta_{t=0} \otimes u_{II} + \dot{f})) &\subset \text{supp}(E) + \text{supp}(\delta_{t=0} \otimes u_{II} + \dot{f}) \\ &\subset (\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N) + (\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N, \end{aligned}$$

d'où l'inclusion annoncée.

La formule donnant \hat{U} s'obtient en appliquant la transformation de Fourier partielle en x aux deux membres de l'égalité

$$U = \partial_t E \star (\delta_{t=0} \otimes u_I) + E \star (\delta_{t=0} \otimes u_{II}) + E \star \dot{f}.$$

On trouve que

$$\hat{U} = \partial_t \hat{E} \star_t (\delta_{t=0} \otimes \hat{u}_I) \hat{E} \star_t (\delta_{t=0} \otimes \hat{u}_{II}) + \hat{E} \star_t \hat{f}$$

où \star_t désigne, comme ci-dessus, le produit ponctuel en la variable ξ duale de x et le produit de convolution en la variable t . (En effet, la transformation de Fourier partielle en la variable x transforme le produit de convolution par rapport à x en un produit ponctuel en la variable duale ξ de x : cf. Théorème 5.4.11.) Comme

$$\hat{E}(t, \xi) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}, \text{ et donc } \partial_t \hat{E}(t, \xi) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) \cos(t|\xi|),$$

et que la convolution avec $\delta_{t=0}$ correspond à l'évaluation au point t courant, on a

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{E} \star_t (\delta_{t=0} \otimes \hat{u}_I) &= \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) \cos(t|\xi|) \hat{u}_I \\ \hat{E} \star_t (\delta_{t=0} \otimes \hat{u}_{II}) &= \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \hat{u}_{II}. \end{aligned}$$

Enfin \hat{f} est une fonction de classe C^∞ en la variable x et une distribution à support compact dans \mathbf{R}_+ en la variable t , car la distribution f est à support compact dans $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$ — cf. Théorème 5.4.5. Ainsi

$$(\hat{E} \star_t \hat{f})(\cdot, \xi) = \hat{f}(\cdot, \xi) \star_t \left(\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \right),$$

comme expliqué après l'énoncé du théorème. En additionnant membre à membre les trois égalités ci-dessus, et en se restreignant à $t > 0$, on aboutit à la formule annoncée pour \hat{U} .

Quant à l'unicité de la solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy pour l'équation des ondes, supposons qu'il existe une autre solution V de ce même problème de Cauchy, de mêmes données de Cauchy u_I et u_{II} et avec le même second membre f . La différence $G = U - V$ vérifie alors les hypothèses du Lemme 11.2.3 : on en déduit donc que $G = U - V = 0$, d'où l'unicité.

Supposons maintenant que $f \in C(\mathbf{R}_+; H^{s-1}(\mathbf{R}^N))$ et que $u_I \in H^s(\mathbf{R}^N)$ tandis que $u_{II} \in H^{s-1}(\mathbf{R}^N)$.

Alors, par convergence dominée

la fonction $(t, \xi) \mapsto (1 + |\xi|)^s \cos(t|\xi|) \hat{u}_I(\xi)$ appartient à $C(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^N))$

de sorte que

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{E} \star_t (\delta_{t=0} \otimes \hat{u}_I) \Big|_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N} \text{ se prolonge par continuité en } t = 0 \\ \text{en un élément de } C(\mathbf{R}_+; H^s(\mathbf{R}^N)). \end{aligned}$$

De même, compte tenu de la borne

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \right| &\leq \frac{\mathbf{1}_{|\xi| \geq 1}}{|\xi|} + t \mathbf{1}_{|\xi| < 1} \\ &\leq \frac{2\mathbf{1}_{|\xi| \geq 1}}{1 + |\xi|} + t \frac{2\mathbf{1}_{|\xi| < 1}}{1 + |\xi|} \leq 2 \frac{1 + t}{1 + |\xi|}, \quad \xi \in \mathbf{R}^N, t > 0, \end{aligned}$$

on démontre par convergence dominée que

la fonction $(t, \xi) \mapsto (1 + |\xi|)^s \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \hat{u}_{II}(\xi)$ appartient à $C(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^N))$.

Enfin, grâce à la borne ci-dessus sur $\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}$, et au fait que $f \in C(\mathbf{R}_+; H^{s-1}(\mathbf{R}^N))$ on démontre encore par convergence dominée que

$$\text{la fonction } (t, \xi) \mapsto (1 + |\xi|)^s \int_0^t \frac{\sin((t-s)|\xi|)}{|\xi|} \hat{f}(s, \xi) ds$$

appartient à $C(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^N))$. ■

11.3 Solution élémentaire dans le futur du d'Alembertien en variables physiques

Jusqu'ici nous avons seulement utilisé l'expression de la solution élémentaire tempérée dans le futur de l'opérateur d'Alembertien en variables de Fourier.

Il est pourtant utile de connaître son expression dans les variables physiques. Toutefois, cette question est loin d'être simple, car dans le cas de l'équation des ondes, l'expression de la solution élémentaire tempérée dans le futur — ainsi que certaines propriétés qualitatives de l'équation des ondes qui en découlent — dépend fortement de la dimension de l'espace, comme on va le voir.

11.3.1 Le cas général en dimension $N \geq 2$.

Rappelons les solutions élémentaires du d'Alembertien obtenues au chapitre 7 (cf. section 7.2.2) : pour tout $N \geq 2$,

$$\begin{aligned}\square_{t,x}(t^2 - |x|^2 - i0)^{\frac{1-N}{2}} &= -(N-1)|\mathbf{S}^N| i^{+N} \delta_{(t,x)=(0,0)}, \\ \square_{t,x}(t^2 - |x|^2 + i0)^{\frac{1-N}{2}} &= -(N-1)|\mathbf{S}^N| i^{-N} \delta_{(t,x)=(0,0)}.\end{aligned}$$

Nous reviendrons plus loin sur le cas $N = 1$ qui ne pose aucune difficulté.

Aucune des deux solutions élémentaires ci-dessus n'est une solution dans le futur — c'est-à-dire à support dans $t \geq 0$. Toutefois, nous allons montrer qu'une combinaison linéaire appropriée de ces deux distributions est bien à support dans le futur.

Pour ce faire, nous utiliserons quelques notions de base sur les distributions homogènes que nous rappelons ici — cf. chapitre 3, section 3.6.

Pour $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que $\Re(\alpha) > -1$, on définit la fonction χ_+^α continue sur \mathbf{R}^* et localement intégrable

$$\chi_+^\alpha(z) = \frac{\max(x, 0)^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}.$$

Rappelons que, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ la fonction

$$\{\alpha \in \mathbf{C} \mid \Re(\alpha) > 0\} \ni \alpha \mapsto \langle \chi_+^\alpha, \phi \rangle$$

est holomorphe et vérifie

$$\langle \chi_+^\alpha, \phi' \rangle = -\langle \chi_+^{\alpha-1}, \phi \rangle.$$

On en déduit que

$$(\chi_+^\alpha)' = \chi_+^{\alpha-1} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}),$$

identité qui permet de définir χ_+^α , d'abord pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que $\Re(\alpha) > -2$, le membre de gauche définissant le membre de droite, puis, en itérant ce procédé, pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, en posant :

$$\chi_+^\alpha = (\chi_+^{\alpha+k})^{(k)} \text{ dans } \mathcal{D}(\mathbf{R}) \text{ pour tout } k \in \mathbf{N}.$$

Ainsi, étant donné $\alpha \in \mathbf{C}$, pour $k \in \mathbf{N}$ assez grand, $\Re(\alpha + k) > -1$, de sorte que le membre de droite de l'égalité ci-dessus est bien défini comme dérivée k -ième au sens des distributions d'une fonction localement intégrable sur \mathbf{R} . On rappelle en particulier les formules

$$\chi_+^{-k} = \delta_0^{(k-1)}, \quad \chi_+^{-k+1/2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(z_+^{-1/2} \right)^{(k-1)}, \quad k \in \mathbf{N}^*.$$

Rappelons également la formule exprimant la distribution χ_+^α comme différence de valeurs au bord de fonctions holomorphes sur les demi-plans au-dessus et au-dessous de l'axe réel dans \mathbf{C} : pour tout $a \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{N}$, on a

$$\chi_+^\alpha = \frac{i\Gamma(-\alpha)}{2\pi} (e^{i\pi\alpha}(y-i0)^\alpha - e^{-i\pi\alpha}(y+i0)^\alpha).$$

Composons à droite les distributions figurant dans chaque membre de cette égalité par l'application $(t, x) \mapsto y = t^2 - |x|^2$, dont la différentielle est non nulle, sauf pour $(t, x) = (0, 0)$:

$$\begin{aligned} & \chi_+^{(1-N)/2}(t^2 - |x|^2) \\ &= \frac{i\Gamma((N-1)/2)}{2\pi} \left(i^{1-N}(t^2 - |x|^2 - i0)^{(1-N)/2} - i^{N-1}(t^2 - |x|^2 + i0)^{(1-N)/2} \right) \\ &= \frac{\Gamma((N-1)/2)}{2\pi} \left(-i^{-N}(t^2 - |x|^2 - i0)^{(1-N)/2} - i^N(t^2 - |x|^2 + i0)^{(1-N)/2} \right). \end{aligned}$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \setminus \{(0, 0)\})$ — voir le chapitre 4, section 4.3.2, pour la définition de cette notion de composition d'une distribution par une application C^∞ .

Toutes les distributions apparaissant dans cette égalité étant homogènes de degré $1 - N$ dans $\mathbf{R}_{t,x}^{1+N}$, elles se prolongent de manière unique en des distributions homogènes sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$, que l'on notera de la même façon. (Pour ce résultat de prolongement, voir la Proposition 3.6.12.)

Revenant aux formules des solutions élémentaires rappelées au début de cette section, on déduit de cette dernière égalité que

$$\begin{aligned} \square_{t,x}\chi_+^{(1-N)/2}(t^2 - |x|^2) &= \frac{\Gamma((N-1)/2)}{2\pi} \\ &\times \left(-i^{-N}\square_{t,x}(t^2 - |x|^2 - i0)^{(1-N)/2} - i^N\square_{t,x}(t^2 - |x|^2 + i0)^{(1-N)/2} \right) \\ &= \frac{\Gamma((N-1)/2)}{2\pi} \left((N-1)|\mathbf{S}^N|\delta_{(t,x)=(0,0)} + (N-1)|\mathbf{S}^N|\delta_{(t,x)=(0,0)} \right) \\ &= \frac{1}{\pi}(N-1)|\mathbf{S}^N|\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)\delta_{(t,x)=(0,0)}. \end{aligned}$$

On peut simplifier un peu cette formule en rappelant que

$$|\mathbf{S}^N| = \frac{2\pi^{(N+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)} = \frac{4\pi^{(N+1)/2}}{(N-1)\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)},$$

(cf. Appendice du chapitre 3) si bien que

$$\square_{t,x}\chi_+^{(1-N)/2}(t^2 - |x|^2) = 4\pi^{(N-1)/2}\delta_{(t,x)=(0,0)}.$$

Posons

$$E_N = \frac{1}{4\pi^{(N-1)/2}}\chi_+^{(1-N)/2}(t^2 - |x|^2);$$

comme $\chi_+^{(1-N)/2}$ est une distribution homogène de degré $\frac{1-N}{2}$ à support dans \mathbf{R}_+ , il s'ensuit que

$$\begin{aligned} E_N &\text{ est une distribution homogène de degré } 1 - N \text{ dans } \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N, \\ \text{supp}(E_N) &\subset \{(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \mid |x| \leq |t|\}, \\ \square_{t,x}E_N &= \delta_{(t,x)=(0,0)} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N). \end{aligned}$$

Définissons alors $E_N^+ \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ comme l'unique distribution homogène de degré $1 - N$ telle que :

$$\text{supp}(E_N^+) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \text{ et } E_N^+|_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N} = 2E_N|_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N},$$

ainsi que $E_N^- \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ comme l'unique distribution homogène de degré $1 - N$ telle que :

$$\text{supp}(E_N^-) \subset \mathbf{R}_- \times \mathbf{R}^N \text{ et } E_N^-|_{\mathbf{R}_-^* \times \mathbf{R}^N} = 2E_N|_{\mathbf{R}_-^* \times \mathbf{R}^N}.$$

En effet, $2E_N|_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N}$ est à support dans le cône positif

$$\{(t, x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N \mid |x| \leq t\};$$

donc son prolongement par 0 en dehors de ce cône positif définit une distribution homogène de degré $1 - N$ dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \setminus \{(0, 0)\}$, grâce au principe de recollement (Proposition 3.4.17.)

D'après la Proposition 3.6.12, cette distribution admet un unique prolongement qui soit une distribution homogène de degré $1 - N$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$. Ce prolongement est précisément la distribution E_N^+ . On définit la distribution E_N^- par le même argument.

Evidemment

$$E_N = \frac{1}{2}(E_N^+ + E_N^-);$$

d'autre part, en notant s la symétrie $s : (t, x) \mapsto (-t, -x)$, on a

$$E_N^- = E_N^+ \circ s.$$

Alors

$$\square_{t,x} E_N^- = \square_{t,x} (E_N^+ \circ s) = (\square_{t,x} E_N^+) \circ s$$

et comme

$$\square_{t,x} E_N = \frac{1}{2} (\square_{t,x} E_N^+ + \square_{t,x} E_N^-) = \delta_{(t,x)=(0,0)}$$

on en déduit que $\text{supp}(\square_{t,x} E_N^\pm) = \{(0, 0)\}$.

La distribution $\square_{t,x} E_N^\pm$ est donc une combinaison linéaire finie de $\delta_{(t,x)=(0,0)}$ et de ses dérivées partielles (cf. Théorème 4.1.7.) Comme de plus E_N^\pm est une distribution homogène de degré $1 - N$, la distribution $\square_{t,x} E_N^\pm$ est homogène de degré $-N - 1$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$. Elle est donc de la forme

$$\square_{t,x} E_N^\pm = c_\pm \delta_{(t,x)=(0,0)}$$

où c_\pm est une constante réelle. On déduit de la relation $\square_{t,x} E_N^- = (\square_{t,x} E_N^+) \circ s$ que $c_+ = c_-$. Enfin, l'égalité $\frac{1}{2} (\square_{t,x} E_N^+ + \square_{t,x} E_N^-) = \delta_{(t,x)=(0,0)}$ permet de conclure que

$$\square_{t,x} E_N^+ = \square_{t,x} E_N^- = \delta_{(t,x)=(0,0)} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N).$$

Proposition 11.3.1 (Solution élémentaire de $\square_{t,x}$ dans le futur) La distribution E_N^+ ainsi définie est l'unique solution élémentaire tempérée dans le futur de $\square_{t,x}$ dans $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N$.

Notons Q la forme quadratique de Lorentz :

$$Q(t, x) = t^2 - |x|^2, \quad (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N.$$

La distribution E_N^+ est donnée par les formules suivantes :

$$E_N^+ = \frac{\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t)}{2\pi^{(N-1)/2}} \delta_0^{((N-3)/2)} \circ Q \quad \text{pour } N > 1 \text{ impair,}$$

$$E_N^+ = \frac{\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t)}{2\pi^{N/2}} \left(\partial_z \frac{N-2}{2} z_+^{-\frac{1}{2}} \right) \circ Q \quad \text{pour } N > 1 \text{ pair.}$$

Dans les formules ci-dessus, le facteur $\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t)$ est un abus de notation signifiant que le membre de gauche est l'unique distribution homogène sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ nulle sur

$$\{(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \mid t < |x|\},$$

c'est-à-dire à support dans le cône d'onde

$$C = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \mid |x| \leq t\},$$

et dont la restriction à $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N$ — c'est-à-dire pour $t > 0$ — coïncide avec le membre de droite.

Démonstration. Que E_N^+ soit une solution élémentaire du d'Alembertien découle des calculs présentés avant l'énoncé de la proposition.

La condition $\text{supp}(E_N^+) \subset C$ est évidente par la construction même de E_N^+ .

La seule chose restant à vérifier est donc que $E_N^+ \in \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$.

Soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que

$$0 \leq \chi \leq 1, \quad \chi|_{[2, +\infty[} = 1 \text{ et } \chi|_{]-\infty, 1]} = 0.$$

Par construction, la distribution E_N^+ est à support dans le cône C , de sorte que la distribution $(1 - \chi(t))E_N^+$ vérifie

$$\text{supp}((1 - \chi(t))E_N^+) \subset [0, 2] \times \overline{B(0, 2)} \text{ qui est compact.}$$

En particulier, la distribution $(1 - \chi(t))E_N^+$ est tempérée.

D'autre part, pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$, on calcule, grâce au changement de variables

$$\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N \ni (t, x) \mapsto (s, x) = (t^2 - |x|^2, x)$$

l'action de la distribution $\chi(t)E_N^+$ pour $N > 1$ impair :

$$\langle \chi(t)E_N^+, \phi \rangle = \frac{(-1)^{(N-3)/2}}{2\pi^{(N-1)/2}} \int_{\mathbf{R}^N} \partial_s^{(N-3)/2} \left(\frac{\chi(\sqrt{s + |x|^2}) \phi(\sqrt{s + |x|^2}, x)}{\sqrt{s + |x|^2}} \right) \Big|_{s=0} dx.$$

La présence du facteur $\chi\left(\sqrt{s+|x|^2}\right)$ entraîne que $\sqrt{s+|x|^2} > 1$, ce qui fournit une estimation de la forme

$$|\langle \chi(t)E_N^+, \phi \rangle| \leq C_N \sup_{\substack{t > 1 \\ 0 \leq m \leq (N-3)/2}} |(1+t+|x|)^{N+1} \partial_t^m \phi(t, x)|$$

garantissant le caractère tempéré de la distribution $\chi(t)E_N^+$ pour $N > 1$ impair. La somme

$$E_N^+ = (1 - \chi(t))E_N^+ + \chi(t)E_N^+ \text{ est donc tempérée sur } \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N.$$

Le cas $N > 1$ pair se traite de la même manière. ■

11.3.2 Le cas de la dimension $N = 1$

Le cas de l'équation des ondes en dimension 1 est très simple dans la mesure où il se ramène, comme on va le voir, à la résolution de deux équations de transport.

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \partial_x^2)u(t, x) = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, & \partial_t u|_{t=0} = u_{II}, \end{cases}$$

et supposons que la condition initiale $u_{II} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

D'après le Théorème 11.2.4, ce problème de Cauchy admet pour unique solution (au sens des distributions tempérées)

$$u = E_1^+ \star (\delta_{t=0} \otimes u_{II}).$$

D'autre part, l'équation des ondes en dimension $N = 1$ s'écrit

$$(\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)u = 0,$$

de sorte que le problème de Cauchy ci-dessus se décompose en

$$\begin{cases} (\partial_t + \partial_x)u = v, & u|_{t=0} = 0, \\ (\partial_t - \partial_x)v = 0, & v|_{t=0} = \partial_t u|_{t=0} = u_{II}. \end{cases}$$

Il s'agit de deux problèmes de Cauchy pour des équations de transport à vitesse ± 1 . En appliquant la méthode des caractéristiques comme au chapitre 2, on trouve successivement que

$$v(t, x) = u_{II}(t + x), \quad x \in \mathbf{R}, t > 0,$$

puis que

$$u(t, x) = \int_0^t v(x + s - (t - s))ds = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v(z)dz, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0,$$

que l'on écrit encore

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-t,t]} \star_x u_{II}, \quad t > 0,$$

ou, de façon équivalente

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} \circ Q) \star_{t,x} (\delta_{t=0} \otimes u_{II}),$$

toujours en désignant par Q la forme quadratique de Lorentz

$$Q(t, x) = t^2 - |x|^2.$$

On résume cette discussion dans la

Proposition 11.3.2 (Formule de d'Alembert) *Pour $N = 1$, la solution élémentaire tempérée dans le futur de l'opérateur d'Alembertien $\partial_t^2 - \partial_x^2$ est*

$$E_1^+ = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} \circ Q,$$

où Q est la forme quadratique de Lorentz

$$Q(t, x) = t^2 - |x|^2.$$

Démonstration. Que E_1^+ soit solution élémentaire du d'Alembertien découle du calcul ci-dessus ; la condition $\text{supp}(E_1^+) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ est trivialement vérifiée.

La seule chose restant à montrer est que E_1^+ est tempérée. Mais cela est évident puisque E_1^+ est une fonction continue par morceaux vérifiant

$$\int_{\mathbf{R}} |E_1^+(t, x)| dx = \max(t, 0) \leq |t|.$$

■

Dans le contexte des applications d'origine physique, l'équation des ondes intervient en pratique seulement pour des dimensions d'espace $N = 1, 2$ ou 3 .

On va voir que, dans les cas $N = 2$ ou 3 , il est possible de retrouver les expressions explicites de la solution élémentaire tempérée dans le futur par des méthodes relativement simples évitant d'avoir à utiliser certains arguments un peu délicats sur les distributions — comme par exemple la représentation de distributions comme différence de valeurs au bord de fonctions holomorphes, ou encore le prolongement des distributions homogènes à tout l'espace euclidien.

Ces méthodes (méthode des moyennes sphériques en dimension $N = 3$ et méthode de descente en dimension $N = 2$) font l'objet des deux paragraphes suivants, qui sont tout particulièrement destinés aux lecteurs qui n'auraient pas assimilé les raisonnements conduisant à la Proposition 11.3.1 dans le cas d'une dimension N quelconque.

11.3.3 Le cas de la dimension $N = 3$: moyennes sphériques

Soit donc $u_{II} \in C_c^\infty(\mathbf{R}^3)$; d'après le Théorème 11.2.4, il existe une unique solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \square_{t,x} u(t, x) = 0, & x \in \mathbf{R}^3, t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, & \partial_t u|_{t=0} = u_{II}, \end{cases}$$

qui est donnée par la formule

$$u = E_3^+ \star (\delta_{t=0} \otimes u_{II}) \in C^\infty(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^3).$$

Etant donnée une fonction $f \in C(\mathbf{R}^3)$, notons sa moyenne sphérique

$$\bar{f}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{S}^2} f(r\omega) d\sigma(\omega), \quad r \geq 0,$$

où $d\sigma$ désigne l'élément de surface sur \mathbf{S}^2 .

Commençons par le

Lemme 11.3.3 (Laplacien et moyennes sphériques) *Pour toute fonction $f \in C^2(\mathbf{R}^3)$*

$$\overline{\Delta f}(r) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \bar{f}(r), \quad r > 0.$$

Démonstration. En effet, pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}_+^*)$, on a, d'une part

$$\int_{\mathbf{R}^3} \phi(|x|) \Delta f(x) dx = \int_0^\infty \int_{\mathbf{S}^2} \phi(r) \Delta f(r\omega) r^2 d\sigma(\omega) dr = \int_0^\infty \phi(r) \overline{\Delta f}(r) r^2 dr$$

en faisant le changement de variables des coordonnées sphériques dans l'intégrale au membre de gauche de la première égalité.

D'autre part, en intégrant deux fois par parties (ϕ étant à support compact, les termes de bord s'annulent) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^3} \phi(|x|) \Delta f(x) dx &= \int_{\mathbf{R}^3} f(x) \Delta(\phi(|x|)) dx \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbf{S}^2} f(r\omega) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \phi(r) r^2 d\sigma(\omega) dr, \end{aligned}$$

où la deuxième égalité utilise la formule donnant le laplacien d'une fonction radiale dans \mathbf{R}^N — voir Note 3 du chapitre 7 :

$$\Delta(\chi(|x|)) = \chi''(|x|) + \frac{N-1}{|x|} \chi'(|x|), \quad x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \phi(r) \overline{\Delta f}(r) r^2 dr &= \int_0^\infty \bar{f}(r) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \phi(r) r^2 dr \\ &= \int_0^\infty \bar{f}(r) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) \phi(r) r^2 dr \\ &= \int_0^\infty \phi(r) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) \bar{f}(r) r^2 dr \end{aligned}$$

en intégrant à nouveau deux fois par parties en r .

Comme cette égalité vaut pour toute fonction test radiale ϕ et que la fonction f est de classe C^2 , il s'ensuit que

$$\overline{\Delta f}(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) \bar{f}(r)$$

pour tout $r > 0$, d'où le résultat annoncé. ■

Revenons à la solution u du problème de Cauchy pour l'équation des ondes en dimension $N = 3$, et notons

$$\bar{u}(t, r) = \overline{u(t, \cdot)}(r), \quad r > 0.$$

D'après le lemme, en tenant compte du fait que la dérivation en t sous le signe de moyenne sphérique est ici légitime puisque u est de classe C^∞ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, on voit que la fonction \bar{u} vérifie

$$\partial_t^2 \bar{u} - \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right) \bar{u} = 0, \quad r > 0, \quad t > 0.$$

Posons alors

$$v(t, r) = r \bar{u}(t, |r|), \quad r \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

D'après la formule de Leibnitz, pour tout $t, r > 0$ on a

$$\partial_r^2 v(t, r) = r \partial_r^2 \bar{u}(t, r) + 2 \partial_r \bar{u}(t, r) = r \partial_t^2 \bar{u}(t, r) = \partial_t^2 v(t, r).$$

Comme la fonction $r \mapsto v(t, r) = r \bar{u}(t, |r|)$ est impaire par construction, la fonction $r \mapsto \partial_r^2 v(t, r)$ est également impaire, de sorte que l'EDP ci-dessus satisfaite par v vaut encore pour tout $t > 0$ et $r \neq 0$:

$$\partial_t^2 v(t, r) - \partial_r^2 v(t, r) = 0, \quad r \neq 0, \quad t > 0.$$

Par ailleurs, en dérivant deux fois sous le signe somme (la fonction u étant de classe C^∞ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$) on trouve que

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}(t, r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{S}^2} \nabla_x u(t, r\omega) \cdot \omega d\sigma(\omega) \rightarrow \nabla_x u(t, 0) \cdot \int_{\mathbf{S}^2} \omega \frac{d\sigma(\omega)}{4\pi} = 0$$

lorsque $r \rightarrow 0^+$, et de même

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2}(t, r) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k,l=1}^3 \int_{\mathbf{S}^2} \partial_{x_k} \partial_{x_l} u(t, r\omega) \omega_k \omega_l d\sigma(\omega) \\ &\rightarrow \sum_{k,l=1}^3 \partial_{x_k} \partial_{x_l} u(t, 0) \int_{\mathbf{S}^2} \omega_k \omega_l \frac{d\sigma(\omega)}{4\pi} = \frac{1}{3} \Delta u(t, 0), \end{aligned}$$

pour $r \rightarrow 0^+$.

On déduit alors du comportement asymptotique ci-dessus lorsque $r \rightarrow 0^+$ et des formules

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r}(t, r) &= |r| \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}(t, |r|) + \bar{u}(t, |r|), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(t, r) &= r \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2}(t, |r|) + 2\text{sign}(r) \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}(t, |r|), \end{aligned}$$

valables pour tout $t > 0$ et $r \neq 0$, que la fonction $r \mapsto v(t, r)$ est de classe C^2 sur \mathbf{R} pour tout $t > 0$.

Par conséquent

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \partial_r^2 v = 0, & r \in \mathbf{R}, t > 0, \\ v|_{t=0} = 0, & \partial_t v|_{t=0} = r \bar{u}_{II}(|r|). \end{cases}$$

On déduit de l'étude du cas de la dimension $N = 1$ (Proposition 11.3.2) que

$$v(t, r) = \frac{1}{2} \int_{r-t}^{r+t} z \bar{u}_{II}(|z|) dz$$

de sorte que

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \bar{u}(t, r) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{v(t, r)}{r} = \partial_r v(t, 0) = \frac{1}{2} (t \bar{u}_{II}(t) - (-t) \bar{u}_{II}(|t|)) \\ &= t \bar{u}_{II}(|t|) = \frac{t}{4\pi} \int_{\mathbf{S}^2} u_{II}(t\omega) d\sigma(\omega). \end{aligned}$$

Comme l'équation des ondes est invariante par les translations en la variable $x \in \mathbf{R}^3$, on déduit de l'unicité de la solution du problème de Cauchy (établie au Théorème 11.2.4) que

$$u(t, x) = \frac{t}{4\pi} \int_{\mathbf{S}^2} u_{II}(x + t\omega) d\sigma(\omega).$$

On résume cette analyse par la

Proposition 11.3.4 (Formule de Kirchhoff) *La solution élémentaire tempérée dans le futur de l'opérateur d'Alembertien en dimension d'espace $N = 3$ est*

$$E_3^+ = \frac{\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t)}{4\pi t} \delta_0(t - |x|).$$

Le terme $\delta_0(t - |x|)$ au membre de droite de cette formule est à comprendre comme la distribution de simple couche

$$C_c^\infty(\mathbf{R}^3) \ni \phi \mapsto \int_{S(0,t)} \phi(\omega) d\sigma(\omega),$$

où $d\sigma$ est l'élément de surface sur la sphère de centre 0 et de rayon t , notée ici $S(0, t)$.

Démonstration. En faisant le changement de variables $y = t\omega$, la formule ci-dessus donnant $u(t, x)$ s'écrit encore

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi t} \int_{S(0,t)} u_{II}(x + y) d\sigma(y),$$

ce qui justifie l'expression de E_3^+ donnée dans l'énoncé.

Que E_3^+ soit à support dans le futur c'est-à-dire pour $t \geq 0$ est une conséquence immédiate de la définition.

Par ailleurs

$$\begin{aligned} |\langle E_3^+, \phi \rangle| &= \left| \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_{\mathbf{S}^2} t\phi(t, t\omega) d\sigma(\omega) dt \right| \\ &\leq \sup_{(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3} |(1 + |t|)^3 \phi(t, x)| \int_0^\infty \frac{tdt}{1 + t^3} \end{aligned}$$

ce qui montre que E_3^+ est bien une distribution tempérée sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$.

L'unicité de la solution élémentaire tempérée dans le futur de l'opérateur d'Alembertien découle du Lemme 11.2.3. ■

11.3.4 Le cas de la dimension $N = 2$: méthode de descente

Une fois connue la solution élémentaire dans le futur en dimension $N = 3$, on en déduit le cas de la dimension 2 en intégrant sur la dernière variable. Cette procédure est habituellement connue sous le nom de méthode de descente.

L'idée est donc de considérer le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \square_{t,x} u = 0, & x \in \mathbf{R}^2, t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, & \partial_t u|_{t=0} = u_{II} \end{cases}$$

d'inconnue $(t, x_1, x_2) \mapsto u(t, x_1, x_2)$ sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)v = 0, \\ v|_{t=0} = 0, & \partial_t v|_{t=0} = u_{II}(x_1, x_2) \end{cases}$$

et de remarquer que la fonction $(t, x_1, x_2) \mapsto u(t, x_1, x_2)$ indépendante de x_3 est une solution de ce problème. On voudrait ensuite conclure par un argument d'unicité pour faire voir que

$$u(t, x_1, x_2) = v(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{t}{4\pi} \int_{\mathbf{S}^2} u_{II}(x_1 - t\omega_1, x_2 - t\omega_2) d\sigma(\omega).$$

Dans cette dernière expression, il suffit alors d'“intégrer en la variable ω_3 ”, variable dont l'intégrande $u_{II}(x_1 - t\omega_1, x_2 - t\omega_2)$ est évidemment indépendant.

Proposition 11.3.5 (Formule de Poisson) *La solution élémentaire tempérée dans le futur de l'opérateur d'Alembertien en dimension d'espace $N = 2$ est la fonction*

$$E_2^+ = \frac{\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t)}{2\pi} \frac{\mathbf{1}_{B(0,t)}(x)}{\sqrt{t^2 - |x|^2}}.$$

Démonstration. Le raisonnement ci-dessus ne rentre pas tout à fait dans le cadre des résultats déjà démontrés sur le problème de Cauchy — dans lesquels on a raisonné avec des données distributions à support compact.

On partira donc, pour tout $\epsilon > 0$ de la solution v_ϵ du problème de Cauchy en dimension $N = 3$

$$\begin{cases} \partial_t^2 v_\epsilon - (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2) v_\epsilon = 0, \\ v_\epsilon|_{t=0} = 0, \quad \partial_t v_\epsilon|_{t=0} = u_{II}(x_1, x_2) \chi(\epsilon x_3), \end{cases}$$

où $u_{II} \in C_c^\infty(\mathbf{R}^2)$ et $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$ est telle que

$$\chi|_{[-1,1]} = 1, \quad \text{supp}(\chi) \subset [-2, 2], \quad \text{et } 0 \leq \chi \leq 1.$$

D'après le Théorème 11.2.4 et la Proposition 11.3.4, la solution v_ϵ du problème de Cauchy en dimension $N = 3$ est

$$v_\epsilon(t, x) = \frac{t}{4\pi} \int_{\mathbf{S}^2} u_{II}(x' - t\omega') \chi(\epsilon(x_3 - t\omega_3)) d\sigma(\omega).$$

Puis

$$v_\epsilon(t, x) \rightarrow \frac{t}{4\pi} \int_{\mathbf{S}^2} u_{II}(x' - t\omega') d\sigma(\omega) = v(t, x)$$

par exemple au sens des distributions tempérées dans $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^3$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

Par continuité de la dérivation au sens des distributions, on en déduit que v est une solution indépendante de x_3 du problème de Cauchy tri-dimensionnel

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2) v = 0, \\ v|_{t=0} = 0, \quad \partial_t v|_{t=0} = u_{II}(x_1, x_2). \end{cases}$$

Par unicité de la solution du problème de Cauchy (Théorème 11.2.4), cette solution coïncide avec la solution u au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy bi-dimensionnel

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) u = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \partial_t u|_{t=0} = u_{II}(x_1, x_2). \end{cases}$$

On en déduit la formule explicite

$$u(t, x') = \frac{t}{4\pi} \int_{\mathbf{S}^2} u_{II}(x' - t\omega') d\sigma(\omega), \quad x' \in \mathbf{R}^2, t > 0.$$

Posons

$$\mathbf{S}_+^2 = \{\omega \in \mathbf{S}^2 \mid \omega_3 > 0\}, \quad \text{et } \mathbf{S}_-^2 = \{\omega \in \mathbf{S}^2 \mid \omega_3 < 0\},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} u(t, x') &= \frac{t}{4\pi} \int_{\mathbf{S}_+^2} u_{II}(x' - t\omega') d\sigma(\omega) \\ &\quad + \frac{t}{4\pi} \int_{\mathbf{S}_-^2} u_{II}(x' - t\omega') d\sigma(\omega), \quad x' \in \mathbf{R}^2, t > 0. \end{aligned}$$

Or \mathbf{S}_\pm^2 est définie par l'équation

$$\omega_3 = \pm \sqrt{1 - |\omega'|^2},$$

de sorte que l'élément de surface sur \mathbf{S}_\pm^2 est (cf. section 6.2) :

$$d\sigma(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - |\omega'|^2}} d\omega_1 d\omega_2.$$

Donc

$$\begin{aligned} u(t, x') &= \frac{t}{4\pi} \cdot 2 \int_{|\omega'| < 1} u_{II}(x' - t\omega') \frac{d\omega'}{\sqrt{1 - |\omega'|^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|y'| \leq t} u_{II}(x' - y') \frac{dy'}{\sqrt{t^2 - |y'|^2}}, \quad x' \in \mathbf{R}^2, t > 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.

Que la distribution ainsi définie soit à support dans $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^2$ est évident. Vérifions qu'elle est tempérée.

Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$; on a

$$\begin{aligned} |\langle E_2^+, \phi \rangle| &= \left| \int_0^\infty \int_{|\omega'| < 1} t\phi(t, t\omega') \frac{d\omega'}{\sqrt{1 - |\omega'|^2}} dt \right| \\ &\leq 2\pi \sup_{(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3} |(1 + |t|)^3 \phi(t, x)| \int_0^\infty \frac{tdt}{1 + t^3}, \end{aligned}$$

puisque

$$\int_{|\omega'| < 1} \frac{d\omega'}{\sqrt{1 - |\omega'|^2}} = |\mathbf{S}_\pm^2| = 2\pi,$$

de sorte que la distribution E_2^+ est bien une distribution tempérée sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$.

■

11.4 Propriétés qualitatives de l'équation des ondes

11.4.1 Conservation de l'énergie

L'équation des ondes est un modèle mathématique idéalisé décrivant la propagation sans absorption de phénomènes ondulatoires divers. Il est donc parfaitement naturel que cette absence d'absorption se traduise au niveau mathématique par l'existence de quantités particulières définies en fonction de la solution et invariantes au cours du temps — comme les intégrales premières du mouvement en mécanique classique.

La plus importante de ces quantités conservées est l'énergie.

Théorème 11.4.1 (Conservation de l'énergie pour l'équation des ondes)
Soient $u_I \in H^1(\mathbf{R}^N)$ et $u_{II} \in L^2(\mathbf{R}^N)$, et soit u la solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \square_{t,x} u = 0, & x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_I, & \partial_t u|_{t=0} = u_{II}. \end{cases}$$

Alors les distributions $\partial_t u$ et $\nabla_x u \in C(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^N))$ et de plus, l'énergie de la solution u , soit

$$\mathbf{E}_u(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} (\partial_t u(t, x)^2 + |\nabla_x u(t, x)|^2) dx$$

est constante :

$$\mathbf{E}_u(t) = \frac{1}{2} (\|\nabla_x u_I\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} + \|u_{II}\|_{L^2(\mathbf{R}^N)})^2, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Démonstration. D'après le Théorème 11.2.4, la transformée de Fourier partielle en x de la solution u est donnée par la formule

$$\hat{u}(t, \xi) = \cos(t|\xi|)\hat{u}_I(\xi) + \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{u}_{II}(\xi),$$

où ξ est la variable de Fourier duale de x .

Par conséquent, comme

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{u}(t, \xi) &= -\sin(t|\xi|)|\xi|\hat{u}_I(\xi) + \cos(t|\xi|)\hat{u}_{II}(\xi), \\ \widehat{\nabla_x u}(t, \xi) &= \cos(t|\xi|)|\xi|\hat{u}_I(\xi) + \sin(t|\xi|)\hat{u}_{II}(\xi), \end{aligned}$$

et que, par hypothèse sur les données initiales,

$$|\xi|\hat{u}_I \text{ et } \hat{u}_{II} \in L^2(\mathbf{R}^N),$$

on en déduit que

$$\partial_t \hat{u} \text{ et } \widehat{\nabla_x u} \in C(\mathbf{R}_+, L^2(\mathbf{R}_\xi^N)).$$

En appliquant le théorème de Plancherel, on voit que ceci équivaut à

$$\partial_t u \text{ et } \nabla_x u \in C(\mathbf{R}_+, L^2(\mathbf{R}_x^N)).$$

Toujours en appliquant le théorème de Plancherel, on voit que

$$\mathbf{E}_u(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} \left(|\partial_t \hat{u}(t, \xi)|^2 + |\widehat{\nabla_x u}(t, \xi)|^2 \right) \frac{d\xi}{(2\pi)^N}.$$

Puis on observe que

$$\begin{pmatrix} \widehat{\nabla_x u}(t, \xi) \\ \partial_t \hat{u}(t, \xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t|\xi|) & \sin(t|\xi|) \\ -\sin(t|\xi|) & \cos(t|\xi|) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\xi| \hat{u}_I(\xi) \\ \hat{u}_{II}(\xi) \end{pmatrix}$$

et comme la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(t|\xi|) & \sin(t|\xi|) \\ -\sin(t|\xi|) & \cos(t|\xi|) \end{pmatrix}$$

est celle d'une rotation de \mathbf{R}^2 , elle préserve la norme hermitienne canonique de \mathbf{C}^2 , de sorte que

$$|\partial_t \hat{u}(t, \xi)|^2 + |\widehat{\nabla_x u}(t, \xi)|^2 = |\xi|^2 |\hat{u}_I(\xi)|^2 + |\hat{u}_{II}(\xi)|^2$$

La conservation de l'énergie en découle par intégration en ξ . ■

11.4.2 Propagation à vitesse finie

Comme nous l'avons montré au début de ce chapitre, l'équation des ondes est le modèle mathématique qui régit — entre autres — la propagation des ondes électromagnétiques. On sait que cette propagation s'effectue avec une vitesse finie — la vitesse de la lumière, qui n'est que la partie visible du rayonnement électromagnétique, sachant que la vitesse de propagation d'une onde monochromatique dans le vide ne dépend pas de sa fréquence.

Dans ces conditions, le résultat mathématique suivant est donc parfaitement naturel.

Théorème 11.4.2 (Propagation à vitesse finie) *Soient u_I et $u_{II} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ telles que*

$$\text{supp}(u_I) \subset B(0, R), \quad \text{et } \text{supp}(u_{II}) \subset B(0, R).$$

Soit u la solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \square_{t,x} u = 0, & x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_I, & \partial_t u|_{t=0} = u_{II}. \end{cases}$$

Alors

$$\text{supp}(u) \subset \{(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \mid t \geq 0 \text{ et } |x| \leq R + t\}.$$

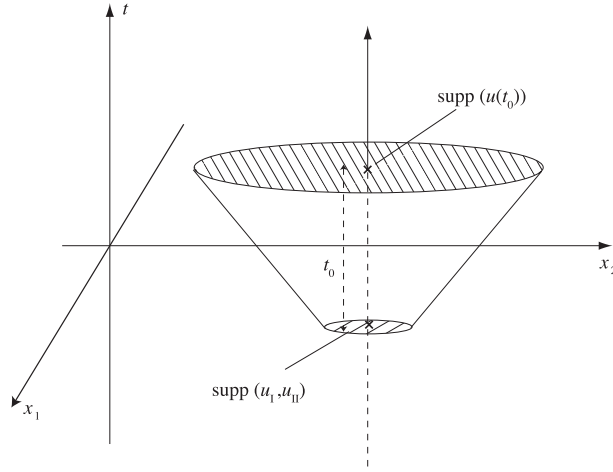


FIGURE 11.1 – Si les données de Cauchy sont à support dans le petit disque hachuré, la solution de l'équation des ondes à l'instant t_0 est à support dans le grand disque hachuré.

Démonstration. Partons de la formule du Théorème 11.2.4 donnant l'expression de la solution u sous la forme

$$u = \partial_t E_N^+ \star (\delta_{t=0} \otimes u_I) + E_N^+ \star (\delta_{t=0} \otimes u_{II}) .$$

Comme u_I et u_{II} sont à support compact dans $B(0, R)$ et que

$$\text{supp}(E_N^+) \subset C = \{(t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \mid |x| \leq t\}$$

on a

$$\begin{aligned} \text{supp}(\partial_t E_N^+ \star (\delta_{t=0} \otimes u_I)) &\subset \text{supp}(\partial_t E_N^+) + (\{0\} \times \text{supp}(u_I)) \\ &\subset C + (\{0\} \times B(0, R)), \\ \text{supp}(E_N^+ \star (\delta_{t=0} \otimes u_{II})) &\subset \text{supp}(E_N^+) + (\{0\} \times \text{supp}(u_{II})) \\ &\subset C + (\{0\} \times B(0, R)). \end{aligned}$$

On conclut en observant que

$$C + (\{0\} \times B(0, R)) = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \mid t \geq 0 \text{ et } |x| \leq R + t\}.$$

■

Corollaire 11.4.3 (Domaine de dépendance) Soient u_I et $u_{II} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ et $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$, et soit u la solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \square_{t,x} u = f, & x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_I, & \partial_t u|_{t=0} = u_{II}. \end{cases}$$

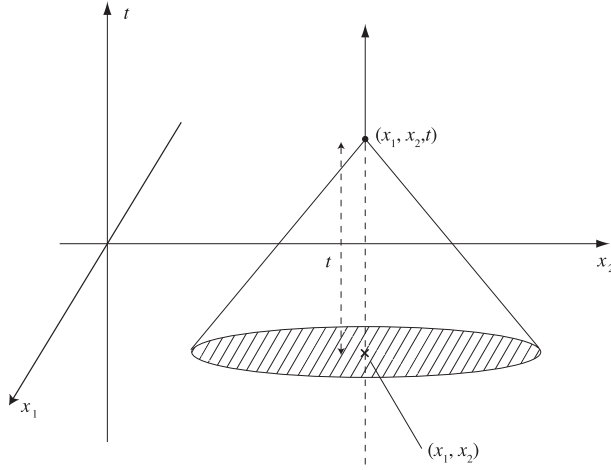


FIGURE 11.2 – La valeur de la solution au point (x_1, x_2, t) de l'espace-temps ne dépend que de la restriction des données de Cauchy au disque hachuré.

Considérons dans $\mathbf{R}_t^+ \times \mathbf{R}^N$ le (tronc de) cône de sommet (t, x)

$$C_{t,x} = \{(s, y) \in [0, t] \times \mathbf{R}^N \mid |x - y| \leq t - s\}.$$

Alors si u_I et u_{II} sont nulles sur un voisinage de $\overline{B(x, t)}$ et si f est nulle sur un voisinage de $C_{t,x}$, la solution u est nulle au voisinage du point (t, x) .

Lorsque les distributions u, u_I, u_{II} et f sont des fonctions, on résume souvent cet énoncé en disant que la valeur de u au point (t, x) ne dépend que des valeurs prises par f sur $C_{t,x}$ et par u_I et u_{II} sur $\overline{B(x, t)} = C_{t,x} \cap \{t = 0\}$, ce qui explique le nom de “cône de dépendance” pour $C_{t,x}$. Autrement dit, si (u_I, u_{II}) et (v_I, v_{II}) coïncident au voisinage de $\overline{B(x, t)}$, alors les solutions u et v des problèmes de Cauchy pour l'équation des ondes de données initiales respectives (u_I, u_{II}) et (v_I, v_{II}) sont égales au voisinage du point (t, x) .

Démonstration. Le (tronc de) cône $C_{t,x}$ est compact dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$; par conséquent, un voisinage de $C_{t,x}$ dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ contient forcément un (tronc de) “cône épaissi” de la forme

$$C_{t,x}^\epsilon = C_{t,x} + B((0, 0), \epsilon).$$

Soit donc $\epsilon > 0$ tel que

$$f|_{C_{t,x}^\epsilon} = 0, \quad u_I|_{B(x, t+\epsilon)} = u_{II}|_{B(x, t+\epsilon)} = 0,$$

et soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$ telle que

$$\text{supp}(\phi) \subset B((t, x), \epsilon).$$

Posons

$$\Phi(s, y) = (E_N^+ \star \phi)(-s, -y), \quad \text{pour tout } (s, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N.$$

Cette définition entraîne que $\Phi \in C^\infty(\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_y^N)$ et que

$$\text{supp}(\Phi) \cap (]-\epsilon, +\infty[\times \mathbf{R}^N) \subset C_{t,x}^\epsilon.$$

De plus

$$\square_{s,y} \Phi = \phi \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_y^N).$$

Calculons alors

$$\langle u, \phi \rangle = \langle u, \square \Phi \rangle = \langle \square u, \Phi \rangle = \langle \delta'_{t=0} \otimes u_I + \delta_{t=0} \otimes u_{II} + f, \Phi \rangle = 0$$

puisqu'il par hypothèse

$$\delta'_{t=0} \otimes u_I + \delta_{t=0} \otimes u_{II} + f$$

est nulle sur l'ouvert $C_{t,x}^\epsilon$ contenant le support de Φ (cf. Proposition 4.1.2 (b).)

On a ainsi montré que $\langle u, \phi \rangle = 0$ pour toute fonction test ϕ de classe C^∞ à support dans $B((t, x), \epsilon)$. On en déduit que $u = 0$ sur $B((t, x), \epsilon)$. ■

11.4.3 Principe de Huygens

Dans le cas particulier où la dimension N de l'espace est impaire et où $N \geq 3$, la condition de propagation à vitesse finie peut être considérablement précisée par le résultat suivant.

Théorème 11.4.4 (Principe de Huygens) *Supposons que N est un entier impair ≥ 3 . Soient u_I et $u_{II} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ telles que*

$$\text{supp}(u_I) \subset B(0, R), \quad \text{et } \text{supp}(u_{II}) \subset B(0, R).$$

Soit u la solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \square_{t,x} u = 0, & x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_I, & \partial_t u|_{t=0} = u_{II}. \end{cases}$$

Soit

$$C' = \{(t, x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N \mid t > R + |x|\}.$$

Alors

$$u|_{C'} = 0.$$

Démonstration. Les formules explicites de la Proposition 11.3.1 donnant E_N^+ montrent que

$$\text{supp}(E_N^+) \subset \partial C = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \mid |x| = t\},$$

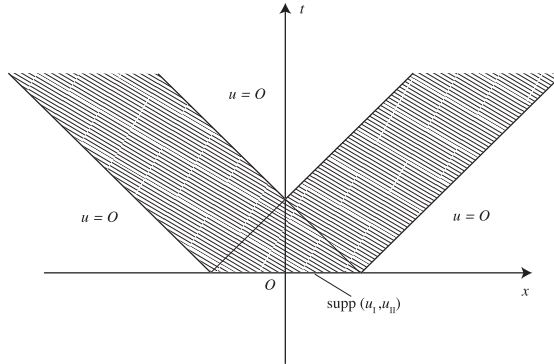


FIGURE 11.3 – En dimension impaire, si les données de Cauchy sont à support dans la boule de rayon R centrée à l'origine, le signal s'éteint (autrement dit la solution de l'équation des ondes est nulle) dans n'importe quelle boule centrée à l'origine pour t assez grand. Plus précisément, la solution est nulle dans la boule $B(0, R')$ pour tout $t > R + R'$. Autrement dit, lorsque $t > 0$, la solution est à support dans la zone hachurée — qui, en dimension 3, est la zone comprise entre deux cônes de révolution de même axe (l'axe des temps) et de génératrices parallèles.

pour N impair et $N \geq 3$. En raisonnant comme dans la preuve du Théorème 11.4.2 de propagation à vitesse finie à partir de la formule explicite donnant la solution

$$u = \partial_t E_N^+ \star (\delta_{t=0} \otimes u_I) + E_N^+ \star (\delta_{t=0} \otimes u_{II}) ,$$

on trouve que

$$\begin{aligned} \text{supp}(\partial_t E_N^+ \star (\delta_{t=0} \otimes u_I)) &\subset \text{supp}(\partial_t E_N^+) + (\{0\} \times \text{supp}(u_I)) \\ &\subset \partial C + (\{0\} \times B(0, R)) , \\ \text{supp}(E_N^+ \star (\delta_{t=0} \otimes u_{II})) &\subset \text{supp}(E_N^+) + (\{0\} \times \text{supp}(u_{II})) \\ &\subset \partial C + (\{0\} \times B(0, R)) . \end{aligned}$$

On conclut en observant cette fois que

$$(\partial C + (\{0\} \times B(0, R))) \cap C' = \emptyset .$$

■

Ce résultat est évidemment faux en dimension paire. Il suffit pour s'en convaincre de considérer la solution élémentaire tempérée dans le futur E_2^+ , par exemple. En effet, E_2^+ est la solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy ci-dessus avec $u_I = 0$ et $u_{II} = \delta_0$ qui est à support dans $B(0, R)$ pour tout $R > 0$. Or E_2^+ est une fonction vérifiant

$$E_2^+(t, x) > 0 \text{ pour tout } (t, x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^2 \text{ tel que } |x| < t .$$

11.5 Equation des ondes et transformation de Radon

Nous avons déjà montré comment, dans le cas de la dimension d'espace $N = 3$, la méthode des moyennes sphériques permet de ramener la résolution de l'équation des ondes au cas de la dimension $N = 1$, cas particulier très simple qui se ramène à résoudre deux équations de transport par la méthode des caractéristiques.

Il existe une autre manière très directe de ramener l'équation des ondes en dimension d'espace quelconque au cas de la dimension d'espace $N = 1$: c'est d'employer la transformation de Radon, que nous allons présenter maintenant.

11.5.1 La transformation de Radon

Comme nous l'avons déjà expliqué plus haut, la transformation de Fourier consiste à décomposer une fonction comme superposition d'ondes planes harmoniques, c'est-à-dire de fonctions de la forme

$$x \mapsto e^{i\xi \cdot x},$$

pour $\xi \neq 0$, où $2\pi/|\xi|$ est la longueur d'onde et le vecteur unitaire $\frac{\xi}{|\xi|}$ la direction de propagation.

La transformation de Radon fournit une autre manière de décomposer une fonction en ondes planes, mais qui ne sont en général pas des ondes planes harmoniques.

Dans ce qui suit, on supposera toujours que $N \geq 2$.

Définition 11.5.1 Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$; pour tout $\omega \in \mathbf{S}^{N-1}$ et tout $l \in \mathbf{R}$, posons

$$\mathcal{R}f(l, \omega) = \int_{x \cdot \omega = l} f(x) dH(x),$$

où $dH(x)$ désigne l'élément de surface sur l'hyperplan d'équation $x \cdot \omega = l$.

La fonction $\mathcal{R}f$ ainsi définie sur $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{N-1}$ est appelée la transformée de Radon de f .

Autrement dit, pour tout vecteur unitaire $\omega \in \mathbf{R}^N$, la transformée de Radon $l \mapsto \mathcal{R}f(l, \omega)$ est une fonction constante sur tous les hyperplans orthogonaux à ω : c'est donc bien une onde plane.

Evidemment, toute fonction définie sur $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{N-1}$, même très régulière (même de classe C^∞) n'est pas toujours la transformée de Radon d'une fonction de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$.

Lemme 11.5.2 (Régularité et symétrie de la transformée de Radon) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$. Alors sa transformée de Radon $\mathcal{R}f$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}^N \times \mathbf{S}^{N-1}$ et

(a) pour tout $l \in \mathbf{R}$ et $\omega \in \mathbf{S}^{N-1}$, on a

$$\mathcal{R}f(-l, -\omega) = \mathcal{R}f(l, \omega);$$

(b) la fonction $l \mapsto \mathcal{R}f(l, \omega)$ est dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ et y est bornée uniformément en ω :

$$\sup_{|\omega|=1} \sup_{l \in \mathbf{R}} (1 + |l|)^m |\partial_l^n \mathcal{R}f(l, \omega)| < \infty \text{ pour tout } m, n \in \mathbf{N}.$$

Démonstration. Le point (a) est une conséquence triviale de la définition de $\mathcal{R}f$.

Pour le point (b) : supposons que $\omega_0 = (1, 0, \dots, 0)$ est le premier vecteur de la base canonique de \mathbf{R}^N . Alors

$$\mathcal{R}f(l, \omega_0) = \int_{\mathbf{R}^{N-1}} f(l, x_2, \dots, x_N) dx_2 \dots dx_N.$$

Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$,

$$\int_{\mathbf{R}^{N-1}} \sup_{l \in \mathbf{R}} |\partial_{x_1}^n f(l, x_2, \dots, x_N)| dx_2 \dots dx_N < \infty,$$

de sorte que la dérivation sous le signe somme est licite (voir Note 3 du chapitre 1). Ainsi

$$\partial_l^n \mathcal{R}f(l, \omega_0) = \int_{\mathbf{R}^{N-1}} \partial_{x_1}^n f(l, x_2, \dots, x_N) dx_2 \dots dx_N, \quad l \in \mathbf{R}.$$

Puis, comme $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, on a

$$|\partial_{x_1}^n f(x_1, \dots, x_N)| \leq C_{N+m} (1 + |x|)^{-N-m},$$

d'où on tire que

$$|\partial_{x_1}^n f(l, x_2, \dots, x_N)| \leq C_{N+m} (1 + |x'|)^{-N} (1 + |l|)^{-m}$$

où $x' = (x_2, \dots, x_N)$. Donc

$$(1 + |l|)^m |\partial_l^n \mathcal{R}f(l, \omega_0)| \leq C_{N+m} \int_{\mathbf{R}^{N-1}} \frac{dx'}{(1 + |x'|)^N}.$$

Le cas d'un $\omega \in \mathbf{S}^{N-1}$ quelconque se ramène à celui-ci par un changement de variables ; en effet, pour toute matrice orthogonale $R \in O_N(\mathbf{R})$ telle que

$$R(1, 0, \dots, 0) = \omega,$$

on a

$$\mathcal{R}f(l, \omega) = \int_{\mathbf{R}^{N-1}} f(l\omega + R(0, x')) dx' = (\mathcal{R}(f \circ R))(l, R^{-1}\omega).$$

Remarquons d'ailleurs que, par convergence dominée (en utilisant le fait que f est à décroissance rapide sur \mathbf{R}^N), l'intégrale au membre de droite de la première égalité dépend de manière continue de $(l, R) \in \mathbf{R} \times O_N(\mathbf{R})$, ce qui entraîne que $\mathcal{R}f \in C(\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{N-1})$. ■

Dans ce qui suit, nous allons étudier en détail le problème de l'inversion de la transformation de Radon, c'est-à-dire de la reconstruction de la fonction f connaissant sa transformée de Radon $\mathcal{R}f$.

Une première étape consiste à étudier le lien entre transformation de Fourier et transformation de Radon.

Soit donc $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$; on notera \hat{f} sa transformée de Fourier, et ξ la variable duale de x . En décomposant l'intégrale de Fourier comme somme de contributions sur la famille des hyperplans d'équation $x \cdot \frac{\xi}{|\xi|} = \text{Const.}$, on trouve que

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i|\xi| \frac{\xi}{|\xi|} \cdot x} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i|\xi|l} \left(\int_{x \cdot \frac{\xi}{|\xi|} = l} f(x) dH(x) \right) dl \end{aligned}$$

où dH est l'élément de surface sur l'hyperplan d'équation $x \cdot \frac{\xi}{|\xi|} = l$.

Or l'intégrale interne au membre de droite de la dernière égalité ci-dessus est la transformée de Radon de f . On en déduit donc la

RELATION ENTRE TRANSFORMÉES DE FOURIER ET DE RADON

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i|\xi|l} \mathcal{R}f \left(l, \frac{\xi}{|\xi|} \right) dl.$$

Proposition 11.5.3 (Inversion de la transformation de Radon) *Supposons que $N \geq 2$ est impair. Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, on a*

$$f(x) = \frac{(-1)^{(N-1)/2}}{2(2\pi)^{N-1}} \int_{\mathbf{S}^{N-1}} \partial_l^{N-1} \mathcal{R}f(x \cdot \omega, \omega) dS(\omega)$$

où $dS(\omega)$ est l'élément de surface sur la sphère unité \mathbf{S}^{N-1} .

Démonstration. Notons

$$\phi(r, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ir l} \mathcal{R}f(l, \omega) dl.$$

La fonction ϕ est continue sur $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{N-1}$ et vérifie la relation

$$\phi(r, \omega) = \phi(-r, -\omega), \quad r \in \mathbf{R}, \quad \omega \in \mathbf{S}^{N-1},$$

d'après le Lemme 11.5.2 (a).

D'après la formule d'inversion de Fourier pour la fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, et la relation entre la transformée de Fourier et la transformée de Radon de f ci-dessus, qui s'écrit

$$\hat{f}(\xi) = \phi \left(|\xi|, \frac{\xi}{|\xi|} \right),$$

on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^\infty \int_{\mathbf{S}^{N-1}} e^{irx \cdot \omega} \phi(r, \omega) r^{N-1} dS(\omega) dr \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{S}^{N-1}} \left(\int_0^\infty e^{irx \cdot \omega} \phi(r, \omega) r^{N-1} dr \right) dS(\omega) \end{aligned}$$

en passant en coordonnées sphériques ($r = |\xi|$ et $\omega = \xi/|\xi|$) dans la transformée de Fourier inverse, puis en appliquant le théorème de Fubini, car l'intégrande est à décroissance rapide en r uniformément en $\omega \in \mathbf{S}^{N-1}$ — d'après le Lemme 11.5.2 (b).

Considérons maintenant l'intégrale interne

$$I_+(x, \omega) = \int_0^\infty e^{irx \cdot \omega} \phi(r, \omega) r^{N-1} dr.$$

et posons

$$I_-(x, \omega) = \int_{-\infty}^0 e^{irx \cdot \omega} \phi(r, \omega) r^{N-1} dr$$

Grâce à la relation

$$\phi(r, \omega) = \phi(-r, -\omega), \quad r \in \mathbf{R}, \quad \omega \in \mathbf{S}^{N-1},$$

et au fait que $N - 1$ est pair, on a

$$I_+(x, \omega) = I_-(x, -\omega)$$

en utilisant le changement de variables $r \mapsto -r$ dans l'intégrale $I_-(x, \omega)$ — comme $N - 1$ est pair, le terme r^{N-1} dans cette intégrale reste inchangé.

Par conséquent la formule d'inversion de Fourier ci-dessus s'écrit encore

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{S}^{N-1}} \frac{1}{2} (I_+(x, \omega) + I_-(x, -\omega)) dS(\omega) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{S}^{N-1}} \frac{1}{2} (I_+(x, \omega) + I_-(x, \omega)) dS(\omega) \end{aligned}$$

grâce au changement de variables $\omega \mapsto -\omega$ sur la seconde intégrale. Or, en revenant à la relation entre transformée de Fourier et transformée de Radon de f , on voit que

$$\begin{aligned} I_+(x, \omega) + I_-(x, \omega) &= \int_{\mathbf{R}} e^{irx \cdot \omega} \phi(r, \omega) r^{N-1} dr = 2\pi \mathcal{F}_{r \rightarrow l}^{-1} (\phi(\cdot, \omega)) \Big|_{l=x \cdot \omega} \\ &= 2\pi (-i\partial_l)^{N-1} \mathcal{R}f(l, \omega) \Big|_{l=x \cdot \omega}. \end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = \frac{1}{2(2\pi)^N} 2\pi(-i)^{N-1} \int_{\mathbf{S}^{N-1}} \partial_i^{N-1} \mathcal{R}f(x \cdot \omega, \omega) dS(\omega)$$

d'où la formule d'inversion annoncée. ■

11.5.2 Transformation de Radon et équation des ondes

Considérons maintenant le problème de Cauchy pour l'équation des ondes

$$\begin{cases} \square_{t,x} u(t, x) = 0, & x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_I, & \partial_t u|_{t=0} = u_{II}. \end{cases}$$

Supposons que u_I et $u_{II} \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ pour simplifier notre analyse.

D'après le Théorème 11.2.4, la solution de ce problème de Cauchy est donnée, pour tout $t \geq 0$, par la formule

$$\hat{u}(t, \xi) = \cos(t|\xi|) \hat{u}_I(\xi) + \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \hat{u}_{II}(\xi)$$

où \hat{u} désigne la transformée de Fourier partielle en la variable x de u et ξ la variable duale de x .

Comme u_I et $u_{II} \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, \hat{u}_I et \hat{u}_{II} sont toutes les deux dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, et la formule ci-dessus montre que $u \in C^\infty(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N)$ avec $u(t, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ pour tout $t \geq 0$. En fait, on sait même, par propagation à vitesse finie (cf. Théorème 11.4.2) que la fonction $x \mapsto u(t, x)$ est à support compact pour tout $t \geq 0$.

Notons

$$\mathcal{R}u(t, l, \omega) = \int_{x \cdot \omega = l} u(t, x) dH(x)$$

la transformée de Radon de la fonction $x \mapsto u(t, x)$.

Comme u est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$ et à décroissance rapide en la variable x , la dérivation par rapport à t sous le signe somme est licite et on a

$$\partial_t^k \mathcal{R}u(t, l, \omega) = \mathcal{R}(\partial_t^k u)(t, l, \omega), \quad \omega \in \mathbf{S}^{N-1}, l \in \mathbf{R}, t > 0.$$

Lemme 11.5.4 (Transformation de Radon et Δ) Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\mathcal{R}(\Delta f)(l, \omega) = \partial_l^2 \mathcal{R}f(l, \omega), \quad \omega \in \mathbf{S}^{N-1}, l \in \mathbf{R}.$$

Démonstration. Soit $\omega \in \mathbf{S}^{N-1}$ fixé; choisissons une matrice orthogonale R telle que $R(1, 0, \dots, 0) = \omega$. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f(l, \omega) &= \int_{\mathbf{R}^{N-1}} f(l\omega + R(0, x_2, \dots, x_N)) dx_2 \dots dx_N \\ &= \int_{\mathbf{R}^{N-1}} f \circ R(l(1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, x_N)) dx_2 \dots dx_N. \end{aligned}$$

Par ailleurs, rappelons que le laplacien est un opérateur différentiel invariant sous l'action des matrices orthogonales

$$\Delta(f \circ R) = (\Delta f) \circ R \text{ sur } \mathbf{R}^N .$$

Notant $x' = (x_2, \dots, x_N)$, et $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ le premier vecteur de la base canonique, on aboutit alors à la formule

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\Delta f)(l, \omega) &= \int_{\mathbf{R}^{N-1}} (\Delta f)(l\omega + R(0, x')) dx' \\ &= \int_{\mathbf{R}^{N-1}} (\Delta f) \circ R(le_1 + (0, x')) dx' \\ &= \int_{\mathbf{R}^{N-1}} \Delta(f \circ R)(l, x_2, \dots, x_N) dx_2 \dots dx_N . \end{aligned}$$

Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, il en est de même pour $f \circ R$ et

$$\int_{\mathbf{R}^{N-1}} \partial_{x_k}^2 (f \circ R)(l, x_2, \dots, x_N) dx_2 \dots dx_N = 0$$

lorsque $k = 2, \dots, N$. D'autre part, toujours parce que $f \circ R$ est dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, la dérivation en l sous le signe somme est licite et on a

$$\begin{aligned} \partial_l^2 \int_{\mathbf{R}^{N-1}} (f \circ R)(l, x_2, \dots, x_N) dx_2 \dots dx_N \\ = \int_{\mathbf{R}^{N-1}} \partial_{x_1}^2 (f \circ R)(l, x_2, \dots, x_N) dx_2 \dots dx_N . \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathcal{R}(\Delta f)(l, \omega) = \partial_l^2 \int_{\mathbf{R}^{N-1}} (f \circ R)(l, x_2, \dots, x_N) dx_2 \dots dx_N = \partial_l^2 \mathcal{R}f(l, \omega) .$$

■

Ainsi, en appliquant la transformation de Radon à chaque membre des égalités apparaissant dans le problème de Cauchy pour l'équation des ondes, on trouve que

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \partial_l^2) \mathcal{R}u(t, l, \omega) = 0, & \omega \in \mathbf{S}^{N-1}, l \in \mathbf{R}, t > 0, \\ \mathcal{R}u|_{t=0} = \mathcal{R}u_I, & \partial_t \mathcal{R}u|_{t=0} = \mathcal{R}u_{II} . \end{cases}$$

Ce problème est maintenant un problème de Cauchy pour une équation des ondes en dimension d'espace $N = 1$, paramétrée par $\omega \in \mathbf{S}^{N-1}$.

On le résoud par la formule de d'Alembert — voir Proposition 11.3.2 :

$$\mathcal{R}u(t, l, \omega) = \frac{1}{2} (\mathcal{R}u_I(l+t, \omega) + \mathcal{R}u_I(l-t, \omega)) + \frac{1}{2} \int_{l-t}^{l+t} \mathcal{R}u_{II}(z, \omega) dz .$$

Il faut maintenant reconstruire la solution u pour tout $t > 0$ connaissant sa transformée de Radon $\mathcal{R}u(t, l, \omega)$, qui est toujours donnée par la résolution d'une équation des ondes en dimension d'espace $N = 1$.

Autrement dit, la méthode de résolution de l'équation des ondes que nous proposons ici se résume au moyen du diagramme

$$\begin{array}{ccc} (u_I, u_{II}) & \longrightarrow & (\mathcal{R}u_I, \mathcal{R}u_{II}) \\ & & \downarrow \\ \mathcal{R}u_\epsilon(t, l, \omega) & \longleftarrow & u(t, x) \end{array}$$

où les deux flèches horizontales représentent les transformations de Radon directe et inverse, tandis que la flèche verticale correspond à la formule de d'Alembert pour la résolution de l'équation des ondes en dimension 1 d'espace.

Supposons que $N \geq 2$ est impair, et appliquer la formule d'inversion de la transformation de Radon en dimension impaire (Proposition 11.5.3 ci-dessus). On trouve que

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \\ & \frac{(-1)^{(N-1)/2}}{4(2\pi)^{N-1}} \int_{\mathbf{S}^{N-1}} (\partial_l^{N-1} \mathcal{R}u_I(x \cdot \omega + t, \omega) + \partial_l^{N-1} \mathcal{R}u_I(x \cdot \omega - t, \omega)) dS(\omega) \\ & + \frac{(-1)^{(N-1)/2}}{4(2\pi)^{N-1}} \int_{\mathbf{S}^{N-1}} (\partial_l^{N-2} \mathcal{R}u_{II}(x \cdot \omega + t, \omega) - \partial_l^{N-2} \mathcal{R}u_{II}(x \cdot \omega - t, \omega)) dS(\omega). \end{aligned}$$

Cette formule montre que la solution de l'équation des ondes est une superposition d'ondes planes se propageant à vitesse ± 1 dans toutes les directions.

11.5.3 Transformation de Radon et scanner

Il ne sera pas question d'équation des ondes dans ce paragraphe final, qui est une digression plutôt qu'une conclusion au présent chapitre. Mais on ne saurait parler de transformation de Radon sans évoquer l'une de ses applications principales, à savoir la tomographie en imagerie médicale — c'est-à-dire le principe du scanner.

L'idée de base est la suivante : le corps du patient, dont une section est représentée sur la figure 10.4 par le domaine borné Ω inclus dans $B(0, R)$, est traversé par des pinceaux de rayons X créés par des émetteurs disposés sur une moitié du cylindre de section $B(0, R)$, l'autre moitié étant couverte de récepteurs.

Ce dispositif permet de mesurer l'atténuation de l'intensité des rayons X lorsqu'ils traversent le corps. Notons $A(x)$ le facteur d'absorption du corps au point x .

La valeur $A(x)$ dépend fortement du type de tissu (osseux, grasseux ou autre...) présent au point x dans le corps du patient. Le scanner fournit une évaluation du facteur d'absorption $A(x)$ en tout point x du corps du patient, c'est-à-dire une carte des valeurs de $A(x)$ dans le corps du patient, ce qui donne une image de sa constitution interne. Cette technique permet des explorations

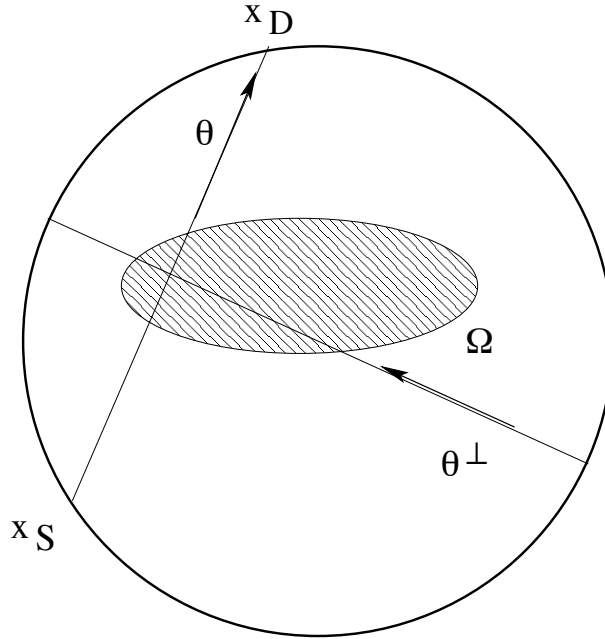


FIGURE 11.4 – Principe du scanner.

vasculaires, la détection de tumeurs (par exemple pulmonaires) de très petite taille etc...

L'intensité mesurée sur le détecteur D lorsque la direction des rayons est $\theta \in \mathbf{S}^1$ s'écrit, dans les notations de la figure,

$$\begin{aligned} I(D, \theta) &= I \exp \left(- \int_{[x_S, x_D]} A(x) ds(x) \right) \\ &= I \exp \left(- \int_{-\infty}^{\infty} A(s\theta + l\theta^\perp) ds \right) \end{aligned}$$

où $ds(x)$ est l'élément de longueur sur le segment $[x_S, x_D]$. (On a supposé ici que le facteur d'absorption de l'air est 0.)

En lisant les intensités mesurées par tous les détecteurs D dans toutes les directions θ , on a donc accès à

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(s\theta + l\theta^\perp) ds = -\ln \left(\frac{I(D, \theta)}{I} \right), \quad |l| < R$$

pour tout $l \in \mathbf{R}$ et tout $\theta \in \mathbf{S}^1$. Notons que, comme le coefficient d'absorption de l'air est nul et que le corps du patient est supposé contenu dans le cylindre de section $B(0, R)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(s\theta + l\theta^\perp) ds = 0, \quad |l| \geq R.$$

En conclusion, on obtient donc ainsi

$$\mathcal{R}A(l, \theta^\perp) = \int_{-\infty}^{\infty} A(s\theta + l\theta^\perp) ds$$

pour tout $l \in \mathbf{R}$ et tout $\theta^\perp \in \mathbf{S}^1$.

On reconstruit A par inversion de la transformation de Radon — le lecteur prendra garde au fait qu'il s'agit ici d'inverser la transformation de Radon en dimension paire, de sorte que la Proposition 11.5.3 ne s'applique pas.

La formule d'inversion de la transformation de Radon en dimension paire est très semblable au cas de la dimension impaire, mais un peu plus compliquée. On doit y remplacer le monôme différentiel ∂_t^{N-1} apparaissant dans la formule de la Proposition 11.5.3 par un opérateur d'un type plus compliqué, qui n'est plus un opérateur différentiel.

De toute façon, cette formule s'obtient à partir de la relation entre transformation de Fourier et transformation de Radon, par un argument tout à fait analogue à la preuve de la Proposition 11.5.3.

11.6 Exercices.

Exercice 1.

Pour tout $\omega \in \mathbf{S}^2$, on note $(t, x) \mapsto f(t, x, \omega)$ la solution de l'équation de transport

$$\begin{cases} \partial_t f + \omega \cdot \nabla_x f = 0, & x \in \mathbf{R}^3, \omega \in \mathbf{S}^2, t > 0, \\ f(0, x, \omega) = \phi(x), & x \in \mathbf{R}^3, \omega \in \mathbf{S}^2, \end{cases}$$

où $\phi \in L^2(\mathbf{R}^3)$.

a) Quelle relation existe-t-il entre

$$F(t, x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{S}^2} f(t, x, \omega) d\sigma(\omega)$$

— où $d\sigma$ est l'élément de surface sur \mathbf{S}^2 , et la solution u du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \square_{t,x} u = 0, & x \in \mathbf{R}^3, t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \\ \partial_t u|_{t=0} = \phi? \end{cases}$$

b) Dédurre du a) que

$$\partial_t F \text{ et } \partial_{x_j} F \in C([0, \infty[; L^2(\mathbf{R})) \quad j = 1, 2, 3.$$

Exercice 2.

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \square_{t,x} u = 0, & x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ u|_{t=0} = g, \\ \partial_t u|_{t=0} = f, \end{cases}$$

où $f, g, \nabla_x g \in L^2(\mathbf{R}^N)$. On note dans toute la suite

$$\mathbf{E}_c(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\partial_t u(t, x)|^2 dx \quad \text{l'énergie cinétique}$$

$$\mathbf{E}_p(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla_x u(t, x)|^2 dx \quad \text{l'énergie potentielle}$$

pour tout $t \geq 0$.

a) On suppose que $N = 1$, et que $f, g, g' \in C_c(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $T > 0$ — que l'on précisera en fonction de f et g — tel que

$$\mathbf{E}_c(t) = \mathbf{E}_p(t) \text{ pour tout } t > T.$$

(Indication : utiliser la formule de d'Alembert.)

b) Montrer que, dans le cas général (où on suppose que $N \geq 2$, que $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$ et que $g \in H^1(\mathbf{R}^N)$), l'on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_c(t) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{E}_c(0) + \mathbf{E}_p(0)) \\ \mathbf{E}_p(t) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{E}_c(0) + \mathbf{E}_p(0))\end{aligned}$$

lorsque $t \rightarrow \infty$. (Indication : utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue.)

Rappelons que

$$\mathbf{E}_c(t) + \mathbf{E}_p(t) = \mathbf{E}_c(0) + \mathbf{E}_p(0), \quad \text{pour tout } t > 0$$

(conservation de l'énergie pour l'équation des ondes : cf. Théorème 11.4.1.) On vient donc de montrer que, pour t grand, l'énergie totale se partage donc pour moitié en énergie potentielle et pour moitié en énergie cinétique. Cette propriété porte le nom d'**équipartition de l'énergie** pour l'équation des ondes. Il en existe de nombreux analogues pour diverses variantes de l'équation des ondes.

Exercice 3.

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \square_{t,x} u = 0, & x \in \mathbf{R}^3, t > 0, \\ u|_{t=0} = g, \\ \partial_t u|_{t=0} = f, \end{cases}$$

avec $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3)$.

a) Montrer que

$$\left| \int_{\mathbf{S}^2} f(x + t\omega) d\sigma(\omega) \right| \leq \int_t^\infty \int_{\mathbf{S}^2} |\nabla f(x + s\omega)| d\sigma(\omega) ds$$

où $d\sigma$ est l'élément de surface sur \mathbf{S}^2 .

b) En déduire que, lorsque $g = 0$, l'on a, pour tout $t > 0$,

$$|u(t, x)| \leq \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla f(z)| dz.$$

c) Comment ce résultat se généralise-t-il lorsque g n'est pas identiquement nulle ?

Exercice 4.

Soit u la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \square_{t,x} u = 0, & x \in \mathbf{R}^3, t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \\ \partial_t u|_{t=0} = f, \end{cases}$$

où $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^3)$. Montrer qu'il existe une fonction $F : \mathbf{R} \times \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ — appelée **champ de radiation de Friedlander** — telle que, pour tout $\rho \in \mathbf{R}$ et tout $\omega \in \mathbf{S}^2$, l'on ait

$$u(r - \rho, r\omega) \sim \frac{1}{4\pi} \frac{F(\rho, \omega)}{r} \quad \text{lorsque } r \rightarrow +\infty.$$

Bibliographie

- [1] G. Allaire : *Analyse numérique et optimisation* Editions de l'Ecole polytechnique, (2005)
- [2] J.-L. Basdevant, J. Dalibard : *Mécanique quantique* Editions de l'Ecole polytechnique, (2002).
- [3] J.-M. Bony : *Cours d'analyse : théorie des distributions et analyse de Fourier*, Les Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2001.
- [4] J.-M. Bony : *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Les Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2001.
- [5] H. Brezis : *Analyse fonctionnelle ; Théorie et applications*, Dunod, Paris, 1999.
- [6] P. Colmez : *Eléments d'analyse et d'algèbre* Cours de 1ère année, Ecole polytechnique (2009).
- [7] N. El Karoui, E. Gobet : *Modèles stochastiques en finance. Partie I : introduction au calcul stochastique* Cours de 3ème année, Ecole polytechnique (2004).
- [8] L.C. Evans : *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics 19. American Math. Society, Providence RI, 1998.
- [9] F. Golse, Y. Laszlo, C. Viterbo : *Analyse réelle et complexe* Cours de 1ère année, Ecole polytechnique (2009).
- [10] L. Hörmander : *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis*, Second edition. Springer Study Edition. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [11] P.D. Lax : *Functional Analysis*, Wiley-Interscience, New-York, 2002.
- [12] P. Markowich, C. Ringhofer, C. Schmeiser : *Semiconductor Equations* Springer-Verlag, Wien, 1990.
- [13] S. Méléard : *Aléatoire* Cours de 1ère année, Ecole polytechnique (2009).
- [14] W. Rudin : *Functional Analysis*, 2ème édition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.
- [15] L. Schwartz : *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Enseignement des Sciences Hermann, Paris, 1961.

- [16] L. Schwartz : *Théorie des distributions*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg. Hermann, Paris 1966.
- [17] C. Viterbo : *Equations différentielles et systèmes dynamiques* Cours de 2ème année, Ecole polytechnique (2010).
- [18] C. Zuily : *Distributions et équations aux dérivées partielles*, 2ème édition. Collection Méthodes. Hermann, Paris, 1986.

Index

- Borne supérieure essentielle, 29
- Cône d'onde, 365
- Caractérisation des
 - distributions tempérées, 165
- Changement de variables
 - dans \mathcal{D}' , 83
 - dans une masse de Dirac, 84
- Classe de Schwartz, 150
- Coefficients de Fourier, 182
- Composition d'une distribution et d'une application C^∞ , 136
- Condition
 - de Dirichlet, 269
 - de Dirichlet, 255
 - de jauge de Lorentz, 353
 - de Neuman, 270
 - initiale, 242
- Conservation locale
 - de l'énergie, 275
 - de la charge, 352
 - de la masse, 296
- Convergence
 - dans l'espace de Schwartz, 151
 - des distributions, 66
 - des distributions tempérées, 165
 - des fonctions test, 59
 - vers une masse de Dirac, 69
- Convolution
 - d'une distribution par une fonction test, 127
 - des distributions, 140
 - des fonctions, 11
 - par la masse de Dirac, 140
 - par les dérivées de la masse de Dirac, 144
- Courbe caractéristique, 36
- d'Alembertien, 219, 353
- Dérivation
 - des distributions, 72
 - et convolution, 16, 128, 143, 144
 - fractionnaire, 144
 - sous le crochet de dualité, 85
 - sous le signe somme, 16
- Densité
 - de \mathcal{S} dans L^p , 152
 - de C_c^∞ dans \mathcal{D}' , 130
 - de C_c^∞ dans \mathcal{S} , 151
 - de C_c^∞ dans C_c , 22
 - de C_c^∞ dans L^p , 23, 25
- Distribution, 55
 - à support compact, 119
 - à support dans un singleton, 121
 - de la forme $\delta_0 \circ f$, 139
 - de simple couche, 58
 - homogène, 102
 - périodique, 180
 - positive, 60
 - tempérée, 162
- Distributions
 - harmoniques, 262
 - holomorphes, 264
 - tempérées harmoniques, 264
- Divergence, 4
- Domaine de dépendance, 376
- Effets dispersifs, 331
- Egalité d'énergie, 287, 374
- Equation
 - de Burgers, 302
 - de Burgers sans viscosité, 45
 - de Cauchy-Riemann, 256
 - de continuité, 296, 352
 - de Faraday, 348

- de Gauss, 221, 254, 348
- de Hopf, 45
- de Laplace, 253
- de Maxwell-Ampère, 348
- de Poisson, 221, 253, 255
- de Schrödinger, 325
- de transport, 35
- des milieux poreux, 295
- Equations
 - de Hamilton, 322
 - de Maxwell, 348
- Espace
 - de Schwartz \mathcal{S} , 150
 - de Sobolev H^s , 185
 - de Sobolev $W^{k,p}$, 184
- Flot caractéristique, 39
- Fonction
 - Γ , 105, 209
 - d'onde, 322
 - de Heaviside, 74
 - harmonique, 256
- Formule
 - de d'Alembert, 367
 - de Duhamel, 283
 - de Green, 94
 - de Green dans \mathcal{D}' , 96
 - de Lax-Oleinik, 308
 - de Leibnitz, 5
 - de Leibnitz dans \mathcal{D}' , 79
 - de Plancherel, 161
 - de Poisson, 372
 - de Taylor, 6
 - des compléments, 210
 - des sauts en dimension 1, 89
 - des sauts en dimension N , 96
 - du binôme, 4
 - du multinôme, 5
 - sommatoire de Poisson, 178
- Formule de Kirchhoff, 370
- Gaussiennes, 156
- Gradient, 4
- Groupe de Schrödinger, 330
- Hamiltonien
 - de la mécanique classique, 322, 324
 - de la mécanique quantique, 324
- Inégalité
 - de Gronwall, 41
 - de Hölder, 28, 31
 - de Hausdorff-Young, 18
 - de Minkowski, 31
- inégalité
 - de Lax-Oleinik, 313
- Intégration
 - sous le crochet de dualité, 86
- Irréversibilité, 291
- Laplacien, 5, 219
 - des fonctions radiales, 228
- Lemme
 - de Schwarz, 3
 - de Schwarz pour les distributions, 75
- Limite semi-classique, 338
- Loi
 - de Darcy, 296
 - de Fourier, 276
- Méthode de descente, 371
- Majoration du support d'un produit de convolution, 13, 127, 140
- Masse de Dirac, 58
- Mesure
 - de Radon, 61
- Moyennes sphériques, 368
- Multi-indice, 4
- Onde de choc, 98, 100
- Opérateur
 - de Cauchy-Riemann, 220, 256
 - de la chaleur, 219
 - de Schrödinger, 220
 - de transport, 219
 - des ondes, 219, 353
- Opérateur différentiel, 218
- Ordre
 - d'un opérateur différentiel, 219
 - d'une distribution, 56
- Ouvert à bord de classe C^1 , 93

- Paquet d'ondes, 338
- Parties finies, 104
- Partitions de l'unité, 27
- Potentiel
 - électromagnétique, 350
 - électrostatique, 221, 350
 - scalaire, 350
 - vecteur, 350
- Principe
 - d'incertitude de Heisenberg, 191
 - de bornitude uniforme, 70
 - de Huygens, 378
 - de recollement, 80
 - du maximum, 261, 286
- Problème d'évolution, 241
- Problème de Cauchy, 241
 - dans \mathcal{D}' pour les équations différentielles ordinaires, 243, 245
 - dans \mathcal{S}' pour les ondes, 355
 - dans \mathcal{S}' pour une EDP, 246
- Produit
 - d'une distribution par une fonction C^∞ , 78
 - de distributions, 88
 - tensoriel de deux distributions, 133
 - tensoriel de deux fonctions, 133
- Prolongement
 - d'une distribution à support compact, 121
 - en 0 des distributions homogènes, 110, 125
- Propagation
 - à vitesse finie pour l'équation des ondes, 375
 - à vitesse infinie pour l'équation de la chaleur, 293
- Propriété de la moyenne, 257
- Régularisation
 - des distributions, 129
 - des fonctions, 22, 23
- Régularité
 - analytique et équation de la chaleur, 289
 - et laplacien, 268
- Relation
 - d'Euler, 109
 - de Rankine-Hugoniot, 97
- Rotationnel, 114
- Semi-groupe de la chaleur, 279
- Solution
 - auto-similaire, 297
 - de Barenblatt, 300
- Solution élémentaire, 220
 - dans le futur, 248, 249, 355, 361, 365
 - de l'opérateur de la chaleur, 235
 - de l'opérateur de Schrödinger, 237, 326
 - du d'Alembertien, 231
 - du laplacien, 226, 229
- Structure des distributions à support compact, 172
- Suites régularisantes, 21
- Support
 - d'un élément de $L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$, 13
 - d'une distribution, 116
 - d'une fonction, 6
- Surface de la sphère unité, 213
- Symbole
 - complet d'un opérateur différentiel, 219
 - principal d'un opérateur différentiel, 219
- Théorème
 - d'inversion de Fourier dans la classe de Schwartz, 156
 - d'inversion de Fourier pour les distributions tempérées, 171
 - de Borel, 34
 - de Liouville, 260
 - de Paley-Wiener, 171
 - de Plancherel, 161, 175
 - de plongement de Sobolev, 187
 - de trace, 189
- Transformation
 - de Cole-Hopf, 303, 304
 - de Radon, 380
 - de Wigner, 335
- Transformation de Fourier

- des distributions à support compact, 169
 - des distributions tempérées, 166
 - des fonctions de L^1 , 167
 - et convolution, 173
 - et dérivation, 154, 168
 - et séries de Fourier, 181
 - partielle, 176
 - pour les gaussiennes, 156
 - pour les gaussiennes complexes, 239
 - sur la classe de Schwartz, 154
- Valeur principale, 58, 126