Chapitre 10

Les distributions

La théorie des distributions a été introduite pour élargir la notion de fonction et pour étendre la notion de dérivation dans le cas de fonctions discontinues. Elle permet d'unifier l'étude des phénomènes discrets et des phénomènes continus, entre autre en mécanique, en électronique et en probabilité.

10.1 Motivation

Pour modéliser des impulsions, le physicien Paul Dirac a l'idée dans les années 20 d'utiliser une speudo-fonction, déjà introduite par Oliver Heaviside, connue maintenant sous le nom de distribution de Dirac et supposée vérifier :

$$\delta_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad x = a \\ 0 & \text{si} \quad x \neq a \end{cases}$$

et, pour toute fonction continue φ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)\varphi(x)\ dx = \varphi(a)$$

Cet objet δ_a n'est surement pas une fonction mais il faudra attendre les années 1945-1950 et les travaux de Laurent Schwartz pour qu'un sens mathématique précis soit donné à ce concept et pour que des règles précises d'utilisation soient rigoureusement établies.
L'idée fondamentale consiste à remarquer que pour connaître une fonction f il suffit de connaître les valeurs de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\ dx$ pour un ensemble bien choisi et assez grand de fonctions φ . Cet ensemble de fonctions φ est appelé l'ensemble des fonctions tests. Pour pouvoir intégrer par parties sans problème, les φ seront supposées indéfiniment dérivables. Pour que l'intégrale existe pour toute fonction f localement sommable, on supposera qu'il existe, pour chaque fonction φ, un intervalle borné en dehors duquel φ s'annule.

10.2 Définitions des distributions

Une **fonction test** φ est une fonction indéfiniment dérivable, nulle hors d'un intervalle borné (on dit aussi que φ est de classe C^∞ et à support borné).
L'ensemble des fonctions test est noté $\mathcal{D}$.

Définition 10.1 *L'ensemble des applications T linéaires, continues, définies pour toutes les fonctions test et à valeur dans le corps des complexes C, forme ce qu'on appelle l'ensemble des* ***distributions,*** *cet ensemble est noté $\mathcal{D}'$. On note*

$$\text{la distribution } T \text{ est telle que pour } \forall\varphi \in \mathcal{D} \qquad \varphi \longmapsto < T, \varphi > \quad \text{avec} \ < T, \varphi > \ \text{dans } C$$

Exemple 10.1 *On définit la distribution de Dirac en a par $< T, \varphi >= \varphi(a)$ et on note alors $T = \delta_a$.*
La distribution échelon U est définie par $< T_U, \varphi >= \int_0^{+\infty} \varphi(t)\ dt$
La distribution porte Π est définie par $< T_\Pi, \varphi >= \int_{-1/2}^{+1/2} \varphi(t)\ dt$
La distribution sinus est définie par $< T_{\sin}, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\ \varphi(t)\ dt$

Proposition 10.1 *Deux distributions T et S sont égales ssi $\forall\varphi \in \mathcal{D} \quad < T, \varphi >=< G, \varphi >$*

Définition 10.2 *Une distribution T est dite* ***régulière*** *si il existe une fonction f , sommable sur tout intervalle borné (ce qui ce dit encore : localement sommable et se note $f \in L^1_{loc}(I\!R)$) telle que* ***:***

$$\forall\varphi \in \mathcal{D} \qquad < T, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \varphi(t)\ dt$$

Pour montrer le lien entre la distribution régulière T et la fonction associée f , mais sans confondre la distribution et la fonction, on note alors $T = T_f$ ou $T = [f]$
.
Toute distribution qui n'est pas régulière est dite **singulière.**

Exemple 10.2 *La* ***distribution de Dirac*** *T définie par $\forall\varphi \in \mathcal{D} \quad < T, \varphi >= \varphi(a)$ est singulière car il n'existe pas de fonction f telle que pour toute fonction φ on ait $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \varphi(t)\ dt = \varphi(a)$.*

L'ensemble des distributions forme un espace vectoriel (on peut additionner les distributions et les multiplier par un scalaire).

10.3 Dérivation des distributions

Dans le cas d'une distribution régulière associée à une fonction f continuement dérivable sur $\mathbb{R}$, on voudrait que la notion de dérivation d'une distribution corresponde à la dérivation des fonctions, on voudrait donc que $(T_f)' = T_{f\ '}$, donc que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad < T_f\ ', \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f\ '(t)\ \varphi(t)\ dt$$

en intégrant par parties on obtient :

$$< T_f\ ', \varphi >= [f\ (t)\ \varphi(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f\ (t)\ \varphi'(t)\ dt = 0 - < T_f\ , \varphi' >$$

La définition de la dérivation des distributions doit donc généraliser à toutes les distributions la propriété ci-dessus qui a été obtenue dans le cas des distributions régulières.

Définition 10.3 *Toute distribution T est dérivable , et sa* ***dérivée*** *est la distribution notée T' définie par :*

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathcal{D} \qquad < T', \varphi >= - < T\ ,\ \varphi' >}$$

Donc toute distribution est indéfiniment dérivable et pour tout entier n , la dérivée n^{ième} de T est définie par :

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathcal{D} \qquad < T^{(n)}, \varphi >= (-1)^n < T\ ,\ \varphi^{(n)} >}$$

Exemple 10.3 *Calculons la dérivée de la distribution échelon (on sait que la fonction échelon n'est pas dérivable en 0 car elle présente une discontinuité)*
Par définition $\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad < T_U\ ', \varphi >= - < T_U\ ,\ \varphi' >= - \int_0^{+\infty} \varphi'(t)\ dt = -\ [\varphi(t)]_0^{+\infty}$
Or φ est à support borné donc nulle à $+\infty$ et donc $\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad < T_U\ ', \varphi >= -(0 - \varphi(0)) = \varphi(0) =< \delta_0, \varphi >$ et donc on vient de montrer que la dérivée de la distribution échelon est la distribution de Dirac en 0

Proposition 10.2 Exemple 10.4 *La* ***distribution dérivée*** *du Dirac en a, δ_a , est notée δ'_a et est définie par :*

$$\forall \varphi\ \in \mathcal{D} \qquad < \delta'_a\ , \varphi >= - < \delta_a, \varphi' >= -\varphi'(a)$$

Cette distribution intervient dans la modélisation de dipoles (ou d'aimants)

Le théorème suivant est fondamental, car il permet d'obtenir très simplement la dérivée d'une distribution régulière $[f]$ à condition que la fonction dérivée $f\,'$ soit aussi dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et puisse donc définir, elle aussi, une distribution régulière notée $[f\,']$.

Théorème 10.1 *Si f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et si $a_1, a_2, ..., a_n$ sont les points où f présente des discontinuités, et si de plus les fonctions f et $f\,'$, définies presque partout, sont dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ alors :*

$$[f]' = [f\,'] + \sum_{i=1}^{i=n} \Delta f(a_i)\ \delta_{a_i} \qquad \textit{avec } \Delta f(a_i) = f(a_i^+) - f(a_i^-) \textit{ saut de } f \textit{ en } a_i$$

autrement dit, dans ce cas, la dérivée au sens des distributions de f est la distribution régulière associée à la fonction dérivée plus une somme de Dirac aux points de discontinuité de f , chacun affecté d'un coefficient correspondant à l'amplitude du saut de la discontinuité.

10.4 Multiplication d'une distribution par une fonction de classe C$^\infty$

On ne pourra pas en général définir pas le produit de deux distributions, mais on peut définir le produit d'une distribution par une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ (on dit de classe C^∞.).

Définition 10.4 *Si T est une distribution et si g est une fonction de $C^\infty(\mathbb{R})$,* ***le produit de** g **par** T**,*** *noté gT , est défini par* ***:***

$$\boxed{\forall\varphi \in \mathcal{D} \qquad < gT\,, \varphi > = < T, g\varphi >}$$

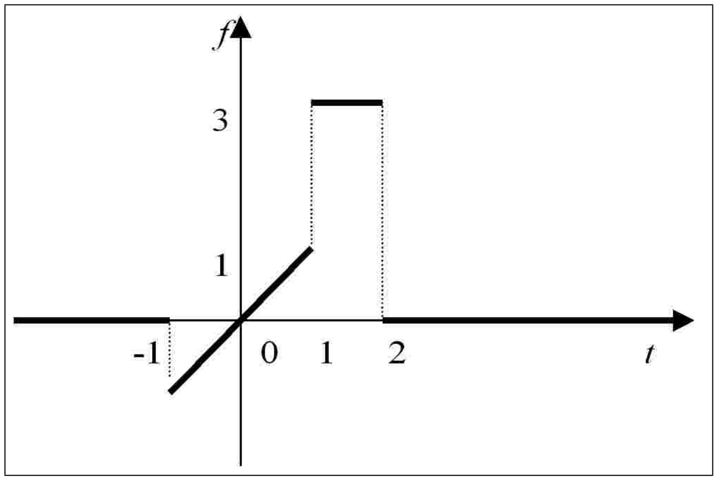
Exemple 10.5 ***Proposition 10.3*** *Soit $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ alors* $\boxed{g(t)\delta_a = g(a)\delta_a}$.
En particulier, si la fonction g s'annule en a alors $g(t)\delta_a = 0$.

Démonstration $\forall\varphi \in \mathcal{D} \quad < g\delta_a, \varphi > = < \delta_a, g\varphi > = g(a)\varphi(a) = < g(a)\delta_a, \varphi >$ *donc* $g(t)\delta_a = g(a)\delta_a$

Théorème 10.2 *Si T est une distribution et si g est une fonction de $C^\infty(\mathbb{R})$ alors :*

$$\boxed{(gT)\,' = g\,'\,T + g\,T\,'}$$

Exemple 10.6 *Soit $f(t) = t\ \mathbb{1}_{[-1,1]}(t) + 3\ \mathbb{1}_{[1,2]}(t)$ alors on a le graphe suivant :*



et donc en utilisant le premier théorème

$$[f]' = \left[\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)\right] - \delta_{-1} + 2\ \delta_1 - 3\ \delta_2$$

ou bien en utilisant le second :

$$[f]' = 1\ \left[\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)\right] + t(\delta_{-1} - \delta_1) + 3\ (\delta_1 -\ \delta_2)$$

et en simplifiant puisque d'après la proposition ci-dessus $t\ \delta_{-1} = -\ \delta_{-1}$

$$[f]' =\ \left[\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)\right] -\ \delta_{-1} + \delta_1 + 3\ \delta_1 - 3\ \delta_2)$$

10.5 Translation, changement d'échelle et parité des distributions

Pour une fonction localement sommable f on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)\ \varphi(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\ \varphi(u+a)\ du$$

On introduit donc la définition suivante :

Définition 10.5 *La **translatée de a d'une distribution** $T = T(t)$ est notée $\tau_a(T)$ ou $T(t-a)$ et est définie par :*

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathcal{D} \qquad < T(t-a)\,, \varphi(t) >= < T(t), \varphi(t+a) >}$$

Exemple 10.7 *La distribution de Dirac en 0 est notée indifféremment δ ou δ_0 ou $\delta(t)$ et donc δ_a est aussi noté $\delta(t-a)$. ou $\tau_a(\delta)$*

Définition 10.6 *Une distribution est périodique de période a ssi* $\tau_a(T) = T$

Exemple 10.8 *Le* ***Peigne de Dirac,*** *noté* $\lfloor|\rfloor(t) = \sum_{n \in Z} \delta(t-n)$ *, est périodique de période 1.*

Pour une fonction localement sommable f on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(kt)\ \varphi(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\ \varphi(\frac{t}{u})\ \frac{du}{|k|}$$

On introduit donc la définition suivante :

Définition 10.7 *Le* ***changement d'échelle*** *pour une distribution est défini par :*

$$\forall \varphi\ \in \mathcal{D} \qquad < T(kt)\,, \varphi(t) >=< \frac{1}{|k|} T(t), \varphi(\frac{t}{k}) >$$

Définition 10.8 *Une distribution* T *est paire si* $T(-t) = T(t)$, *c'est à dire si :*

$$\forall \varphi\ \in \mathcal{D}\ ,\quad < T(-t)\,, \varphi(t) >=< T(t), \varphi(-t) >$$

impaire si $T(-t) = -T(t)$ *, c'est à dire si :*

$$\forall \varphi\ \in \mathcal{D}\ ,\quad < T(-t)\,, \varphi(t) >= -\ < T(t), \varphi(-t) >$$

Comme pour les fonctions, on peut montrer que si T est paire alors $T\,'$ est impaire et $T\,''$ est paire, etc .

Exemple 10.9 *On peut vérifier que* $\delta(t)$ *est paire,* $\delta'(t)$ *est impaire et que le peigne de Dirac* $\sum_{n \in Z} \delta(t-n)$ *est pair.*

10.6 Convergence d'une suite de distributions

On peut introduire différentes notions de convergence pour les suites de fonctions : la convergence simple, la convergence uniforme, la convergence presque partout, la convergence au sens de la norme $L^1(\mathbb{R})$. ou au sens de la norme $L^2(\mathbb{R})$. Mais il s'avère qu'aucune de ces notions n'est satisfaisante. Seule la notion de convergence au sens des distributions permet de prendre en compte de façon satisfaisante, par exemple, la convergence d'une suite de fonctions porte $\{n\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n}]}\}$ (qui permettent d'approcher une impulsion unité). C'est cette notion qui permettra de définir la convergenge de suites de distributions de probabilité et entre autre de passer des probabilités discrètes aux probabilités continues et réciproquement.

Définition 10.9 *On dit qu'une* ***suite de distributions*** $\{T_n\}$ *converge vers une distribution* T *si et seulement si :*

$$\boxed{\forall\varphi\in\mathcal{D} \qquad < T_n(t)\,,\varphi(t) > \underset{n\to\infty}{\to} < T(t),\varphi(t) >}$$

On écrit alors

$$T_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\overset{\mathcal{D}'}{\longrightarrow}} T$$

Exemple 10.10 *Vérifions que la suite* $\{n\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n}]}\}$ *tend vers* δ_0 .
$\forall\varphi\in\mathcal{D} \qquad < T_n(t)\,,\varphi(t) >= n\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n}]}(t)\,,\varphi(t) >= \int_0^{1/n} n\varphi(t)\ dt = n(\Phi(\frac{1}{n}) - \Phi(0))$ *où* Φ *est une primitive de* φ.
Lorsque n *tend vers l'infini* $\Phi(\frac{1}{n})$ *tend vers* $\Phi(0)$ *et donc* $\Phi(\frac{1}{n})-\Phi(0)\to 0$ *. Or en multipliant par* n *qui tend vers* $+\infty$*, on obtient une indétermination. Pour enlever celle-ci on fait un développement limité en 0 de la fonction* Φ*. D'après la formule bien connue de Taylor on a*

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi(0)+x\Phi'(0)+x\varepsilon(x)\\ \Phi(\frac{1}{n}) &= \Phi(0)+\frac{1}{n}\Phi'(0)+\frac{1}{n}\varepsilon(\frac{1}{n})\end{aligned}$$

d'où

$$n(\Phi(\frac{1}{n})-\Phi(0)) = n(\frac{1}{n}\Phi'(0)+\frac{1}{n}\varepsilon(\frac{1}{n}))$$

Or si Φ *est une primitive de* φ*, alors* $\Phi'=\varphi$ *et donc*

$$\forall\varphi\in\mathcal{D} \qquad < T_n(t)\,,\varphi(t) >\to \varphi(0) =< \delta_0,\varphi >$$

Théorème 10.3 *Si la suite* $\{T_n\}$ *converge vers une distribution* T *alors la suite des distributions dérivées converge vers la distribution dérivée* $T\,'$*.*

$$T_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\overset{\mathcal{D}'}{\longrightarrow}} T \quad\Longrightarrow\quad T\,'_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\overset{\mathcal{D}'}{\longrightarrow}} T\,'$$

Démonstration En utilisant la définition de la dérivation et de la convergence, on a :

$$\forall\varphi\in\mathcal{D} \qquad < T\,'_n\,,\varphi >= -< T_n,\varphi' > \underset{n\to\infty}{\to} -< T,\varphi' >=< T\,',\varphi >$$

10.7 Convolution des distributions

Comme précédemment, étudions l'expression de la distribution T_{f*g} lorsque f et g sont localement sommables et que leur produit de convolution est défini et également localement sommable. On a :

$$\begin{aligned} < \ T_{f*g}, \varphi >= & \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-y) g(y) \ dy \right) \ \varphi(t) \ dt \\ = & \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-y) \ \varphi(t) \ dt \right) \ dy \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $x = t - y$ dans l'intégrale en dt on obtient en utilisant $dx = dt$:

$$< T_{f*g}, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ \varphi(x+y) \ dx \right) \ dy$$

Si $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ \varphi(x+y) \ dx \right)$ est une fonction test par rapport à y, on peut écrire :

$$< T_{f*g}, \varphi >=< T_{g(y)} \ , < T_{f(x)}, \varphi(x+y) >>$$

On peut écrire, de la même façon, en utilisant la commutativité du produit de convolution :

$$< T_{f*g}, \varphi >=< T_{f(x)} \ , < T_{g(y)}, \varphi(x+y) >>$$

Définition 10.10 *Soient T et S deux distributions le* ***produit de convolution*** *de T par S est défini par*

$$\boxed{< T * S, \varphi >=< T(x) \ , < S(y), \varphi(x+y) >>}$$

ou par

$$\boxed{< T * S, \varphi >=< S(y) \ , < T(x), \varphi(x+y) >>}$$

lorque l'on peut donner un sens à l'une ou l'autre expression.

Exemple 10.11 *Pour toute fonction test φ on a*

$$\begin{aligned} < \ & \delta_a * \delta_b, \varphi >=< \delta_a(x) \ , < \delta_b(y), \varphi(x+y) >> \\ = \ & < \delta_a(x) \ , \varphi(x+b) >= \varphi(a+b) =< \delta_{a+b}, \varphi > \end{aligned}$$

Conclusion $\boxed{\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}}$.

Lorsqu'il est défini, le produit de convolution des distributions est commutatif, distributif par rapport à l'addition mais il peut ne pas être associatif (contre exemple $(1 * \delta') * U \neq 1 * (\delta' * U)$ où U est la distribution régulière associée à la fonction échelon.

Théorème 10.4 *Sous réserve que les produits de convolution intervenant soient définis et en notant $\tau_a(T)$ la distribution translatée de a, on a les propriétés suivantes :*

$$\boxed{\tau_a(T) = T * \delta_a}$$

$$\boxed{\tau_a(T * S) = T * \tau_a(S) = \tau_a(T) * S}$$

$$\boxed{T * \delta\,' = T\,'}$$

$$\boxed{(T * S)\,' = T\,' * S = T * S\,'}$$

Démonstration Pour toute fonction φ on a en utilisant la définition de la translation et de la convolution :

$$< (T*S)(t-a), \varphi >=< (T*S)(t), \varphi(t+a) >=< T(x)\ , < S(y), \varphi(x+y+a) >>$$

ce qui donne en utilisant de nouveau la translation

$$< (T * S)(t - a), \varphi >=< T(x)\ , < S(y - a), \varphi(x + y) >>=< T(t) * S(t - a), \varphi >$$

La démonstration des autres propriétés est similaire.

Corollaire 10.1 *Plus généralement on a :*

$$T * \delta^{\,(n)} = T^{\,(n)}$$

$$(T * S)^{(n)} = T^{(n)} * S = T * S^{(n)}$$

10.8 Echantillonnage et périodicité

Le **peigne de Dirac** est un outil fondamental pour passer d'un signal analogique à un signal dicret.
Echantillonner une fonction f revient à la **multiplier par un peigne de Dirac** de période égale à la période d'échantillonnage T_e.

$$f(t)\sum_{n\in Z}\delta(t - nT_e) = \sum_{n\in Z} f(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

On obtient un peigne modulé par les valeurs discrètes $f(nT_e)$.

A partir d'une fonction g , on construit une **distribution périodique** de période θ en faisant le **produit de convolution de g par un peigne de Dirac** $\sum_{n\in Z}\delta(t-n\theta)$.

$$g(t) * \sum_{n\in Z}\delta(t-n\theta) = \sum_{n\in Z} g(t-n\theta)$$

Si le support de la fonction g est de longueur inférieure à θ , il est possible de retrouver la fonction g à partir de la fonction périodisée en la multipliant par une porte de longueur θ .