

# Cours Concis de Mathématiques

Ce travail est mis à disposition selon les termes de la licence **Creative Commons Paternité - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 non transcrit**. Pour plus d'information, voir <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/> ou écrire à Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

Pierre Guillot

# Chapitres

Une table des matières détaillée se trouve à la fin du livre

<b>1</b>	<b>Ensembles</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Nombres</b>	<b>22</b>
<b>3</b>	<b>Polynômes</b>	<b>44</b>
<b>4</b>	<b>Suites</b>	<b>62</b>
<b>5</b>	<b>Matrices</b>	<b>84</b>
<b>6</b>	<b>Continuité</b>	<b>108</b>
<b>7</b>	<b>Déterminants</b>	<b>126</b>
<b>8</b>	<b>Compacité</b>	<b>146</b>
<b>9</b>	<b>Dérivées</b>	<b>154</b>
<b>10</b>	<b>L'exponentielle</b>	<b>176</b>
<b>11</b>	<b>Espaces vectoriels</b>	<b>195</b>
<b>12</b>	<b>Formules de Taylor</b>	<b>220</b>
<b>13</b>	<b>Applications linéaires</b>	<b>235</b>

<b>14 Intégrale de Riemann</b>	<b>262</b>
<b>15 Fractions rationnelles</b>	<b>298</b>
<b>16 Diagonalisation</b>	<b>317</b>
<b>17 Équations différentielles linéaires</b>	<b>342</b>

# Chapitre 1

## Ensembles

– Première lecture –

### Ensembles et appartenance

Les objets mathématiques peuvent être rangés dans des *ensembles*, que l'on écrit avec des accolades. Par exemple,

$$E = \{1, 2, 3\} \quad \text{et} \quad F = \{19, 11\}$$

sont des ensembles. On note  $x \in X$  pour signifier que  $x$  appartient à  $X$ , et dans le cas contraire on emploie le symbole  $\notin$  ; par exemple, on a  $2 \in E$  et  $3 \notin F$ .

Un ensemble ne comprend jamais de « répétition », et n'est pas ordonné : ainsi

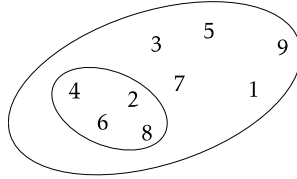
$$\{2, 2, 2, 3, 3\} = \{2, 3\} \quad \text{et} \quad \{3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}.$$

Il existe bien sûr des ensembles infinis, comme l'ensemble  $\mathbb{N}$  des nombres entiers, dont nous reparlerons au chapitre suivant. Il y a également un ensemble vide, qui ne contient aucun élément : on le note  $\emptyset$  ou, plus rarement,  $\{\}$ .

Lorsque tous les éléments d'un ensemble  $A$  sont aussi dans l'ensemble  $B$ , on dit que  $A$  est une *partie* de  $B$ , ou qu'il est inclus dans  $B$ , et on note  $A \subset B$ . Par exemple

$$\{2, 4, 6, 8\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Les ensembles sont souvent dessinés comme des bulles, et pour représenter l'inclusion on place ces bulles les unes dans les autres, comme ci-dessous :



Fixant  $B$ , on peut considérer l'ensemble  $\mathcal{P}(B)$  dont les éléments sont toutes les parties de  $B$ ; ainsi dans le cas où  $B = \{1, 2, 3\}$ , on a

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

(On n'oublie ni la partie vide, ni  $B$  lui-même.)

Enfin, étant donnés deux ensembles  $A$  et  $B$ , on peut former leur *produit cartésien* noté  $A \times B$ , dont les éléments sont les paires  $(a, b)$  avec  $a \in A$  et  $b \in B$ . Lorsque  $A = \{1, 3\}$  et  $B = \{2, 4, 6\}$  par exemple, on a

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6)\}.$$

On notera que pour les paires, l'ordre est important : ainsi l'élément  $(1, 2)$  de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  est différent de l'élément  $(2, 1)$ .

### Quelques constructions

Lorsqu'on dispose d'un ensemble  $E$ , on peut s'intéresser aux éléments de  $E$  qui vérifient une certaine propriété  $P$ . Ceux-ci forment à nouveau un ensemble, que l'on note ainsi :

$$\{x \in E \mid P(x)\}.$$

(Parfois le  $\mid$  est remplacé par deux points, ou par l'expression complète « tels que ». Il y a de nombreuses variantes et il faut s'habituer à des notations qui changent de temps en temps, en général pour éviter les lourdeurs.)

Par exemple, supposons que  $A \subset E$ . Alors le *complémentaire de A dans E* est par définition

$$\{x \in E \mid x \notin A\}.$$

On le note généralement  $E - A$  ou  $E \setminus A$ .

Autre exemple, si  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $E$ , alors leur *intersection* est

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\},$$

leur *union* est

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

EXEMPLE 1.1 – Prenons  $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , puis

$$A = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n = 0\},$$

et enfin

$$B = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = 0\}.$$

Alors  $A \cap B = \{(0, 0)\}$ . On peut également écrire

$$A \cup B = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid nm = 0\}.$$

Note : en pratique, on écrirait plutôt  $A = \{(0, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$  ou encore  $A = \{(0, m) \mid m \in \mathbb{N}\}$ , l'essentiel étant de se faire comprendre.

Il est très important de comprendre dès maintenant que la lettre  $x$  qui est employée ci-dessus dans la description des ensembles peut être remplacée par n'importe quelle autre : on obtient rigoureusement *les mêmes* ensembles. Par exemple si

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{il existe } y \in \mathbb{N} \text{ tel que } x = 2y\},$$

et si

$$B = \{a \in \mathbb{N} \mid \text{il existe } b \in \mathbb{N} \text{ tel que } a = 2b\},$$

alors  $A = B =$  les nombres entiers pairs.

## Propositions mathématiques

On ne peut pas utiliser tout et n'importe quoi pour décrire les ensembles. Pour se convaincre que les propriétés  $P$  comme ci-dessus ne peuvent pas être complètement arbitraires, voir l'encadré « Deux paradoxes ». Pour bien faire les choses, il conviendrait de définir précisément quelles sont les propriétés acceptables, ou en d'autres termes, définir ce qu'est un « énoncé mathématique ».

Cette théorie existe, et il existe même plusieurs systèmes concurrents. Cependant il serait complètement hors de pro-

### Deux paradoxes

L'énoncé selon lequel  $\{x \in E \mid P(x)\}$  est un ensemble lorsque  $E$  est un ensemble peut paraître anodin. En réalité il est bien plus fin qu'on pourrait le croire. Nous allons voir deux paradoxes célèbres, dont l'élucidation fait intervenir de manière subtile cette construction.

Voici le premier. Pour un entier  $n$ , considérons la propriété «  $n$  ne peut pas être décrit en moins de 16 mots ». Appelons cette propriété  $P(n)$ , et soit

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}.$$

Les mots de la langue française sont en nombre fini, donc en 16 mots on ne peut décrire qu'un nombre fini de nombres. Ainsi,  $A$  est infini et en particulier, non-vide. Soit alors  $a$  le plus petit élément de  $A$ . Ce nombre est « le plus petit nombre qui ne peut pas être décrit en moins de 16 mots ». On vient tout juste de décrire  $a$  en 15 mots!

C'est absurde. Et pour cause, la propriété  $P(n)$  ne fait pas partie des propriétés mathématiques acceptables.

Notre deuxième exemple utilise pour  $P(x)$  la propriété «  $x \notin x$  ». Celle-ci est parfaitement acceptable. C'est sa signification intuitive proche de zéro qui donne un parfum de paradoxe au raisonnement suivant, pourtant correct.

Montrons la chose suivante : pour tout ensemble  $E$ , il existe un ensemble  $A$  tel que  $A \notin E$ . En effet, soit

$$A = \{x \in E \mid x \notin x\}.$$

Si on avait  $A \in E$ , alors on constaterait que  $A \in A$  exactement lorsque  $A \notin A$ , par définition. C'est absurde, donc  $A \notin E$ .

On énonce souvent ce résultat sous la forme suivante : il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles. Nous venons bien de le démontrer. S'il est tentant d'écrire quelque chose comme  $U = \{x \mid x \text{ est un ensemble}\}$  pour essayer de le définir malgré tout, on se rend compte que cette expression n'est pas de la forme  $\{x \in E \mid P(x)\}$ , et donc ne désigne pas un ensemble. La présence de l'ensemble  $E$  pour « chapeauter » les  $x$  est essentielle.

pos de donner une description précise de l'un de ces système dès maintenant (les détails sont parfois donnés en troisième ou quatrième année, et encore). Nous allons nous contenter d'une discussion informelle qui suit les grandes lignes de ce que l'on appelle *la logique du premier ordre* (pour des raisons que l'on n'expliquera pas).

Nous avons rencontré des propositions mathématiques :  $x \in A$  par exemple, et on pourrait citer aussi les égalités comme  $x = y$ . La négation d'une proposition en est une, ainsi  $x \notin A$  est un énoncé mathématique.

On peut créer de nouveaux énoncés à l'aide de « ou » et de « et » : nous l'avons fait dans la définition des intersections et des unions. On peut aussi relier deux énoncés  $P$  et  $Q$  par le symbole  $\Rightarrow$ , qui se lit « implique ». On obtient l'énoncé  $P \Rightarrow Q$ , qui est faux lorsque  $P$  est vrai et  $Q$  est faux ; dans tous les autres cas  $P \Rightarrow Q$  est vrai. Voyons un exemple :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \neq 0 \Rightarrow y = 0\}.$$

Les éléments de  $A$  sont les paires  $(x, 0)$  avec  $x$  entier, ainsi que les paires  $(0, y)$  avec  $y$  entier.

Le symbole  $\Rightarrow$  est surtout pertinent lorsqu'on l'utilise en conjonction avec le *quantificateur universel*, c'est-à-dire le petit symbole  $\forall$  qui signifie « pour tout ». Nous pouvons par exemple utiliser ce symbole pour montrer que  $A \subset B$  est un énoncé mathématique : en effet il revient à dire

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B.$$

L'autre quantificateur à notre disposition est le *quantificateur existentiel*, qui s'écrit  $\exists$  et signifie « il existe ». On a déjà observé que, pour un nombre entier  $n$ , la propriété «  $n$  est pair » s'écrit

$$\exists m \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 2m.$$

(En toute rigueur, en logique du premier ordre on écrit plutôt  $\exists m, m \in \mathbb{N} \text{ et } n = 2m$ . On s'autorise un peu de souplesse pour plus de clarté.)

En règle générale, un « énoncé mathématique » est une phrase que l'on peut réduire à une suite de symboles combinant  $\forall, \exists, \in, =, \Rightarrow$ , des négations, des « ou » et des « et ». En



pratique cependant, la moindre définition, le moindre théorème, occuperaient des milliers de symboles si on voulait les décortiquer complètement. En conséquence, il faut veiller en permanence à ce que les énoncés que l'on produit soient *théoriquement* remplaçables par des symboles, sans jamais effectuer concrètement ce remplacement. Notons tout de même qu'à l'aide d'un ordinateur, on peut parfois rédiger certaines démonstrations jusqu'au moindre détail : c'est ce qu'on appelle les « preuves automatiques ».

Ajoutons enfin que dans certaines situations, nous utiliserons les symboles  $\forall$ ,  $\exists$  ou autres, lorsque l'on souhaite lever toute ambiguïté. Ainsi de la définition des limites, par exemple.

## Fonctions

Étant donnés deux ensembles  $A$  et  $B$ , une fonction  $f$  de  $A$  vers  $B$  associe à tout élément  $x \in A$  un élément  $f(x) \in B$  et un seul. On peut traduire cette définition (un peu vague) en termes d'ensembles. Si l'on souhaite être extrêmement précis, on dira :

DÉFINITION 1.2 – Une *fonction*, ou *application*, est un objet  $f$  déterminé par trois ensembles :

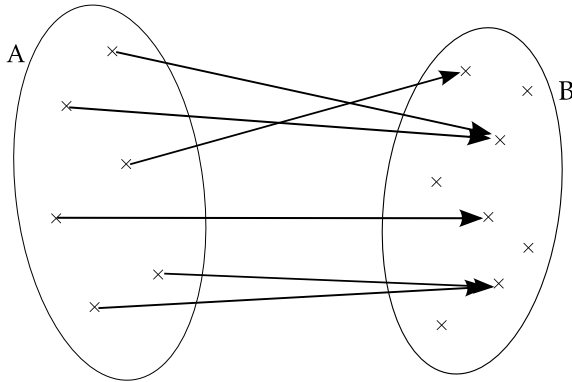
1. un ensemble  $A$ , appelé le domaine de définition de  $f$ , ou parfois la source de  $f$  ;
2. un ensemble  $B$ , appelé le but de  $f$  ;
3. un ensemble  $\Gamma$ , qui est une partie de  $A \times B$  et que l'on appelle *le graphe de  $f$* , ayant la propriété suivante : pour chaque  $x \in A$ , il existe un unique  $y \in B$  tel que  $(x, y) \in \Gamma$ . Ce  $y$  est noté  $f(x)$ .

On utilise la notation

$$f: A \longrightarrow B$$

pour indiquer que  $f$  est une fonction dont le domaine de définition est  $A$  et dont le but est  $B$ . ■

On représente typiquement une fonction  $A \rightarrow B$  de la manière suivante :



Chaque flèche sur ce dessin part d'un élément  $x \in A$  et pointe sur  $f(x)$ . La caractéristique importante est que chaque point de A marque le début d'une flèche, et d'une seule.

Voyons quelques exemples.

EXEMPLE 1.3 – Il y a une (et une seule) fonction  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $f(n) = 2n^2 + 1$ . On utilise parfois la notation

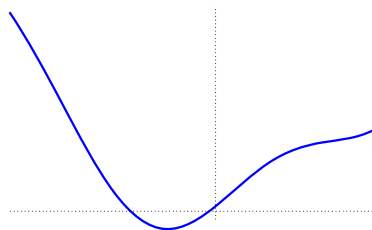
$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto 2n^2 + 1 \end{aligned}$$

pour désigner cette fonction. C'est très souvent par des formules, telles que  $2n^2 + 1$ , que l'on va définir les fonctions.

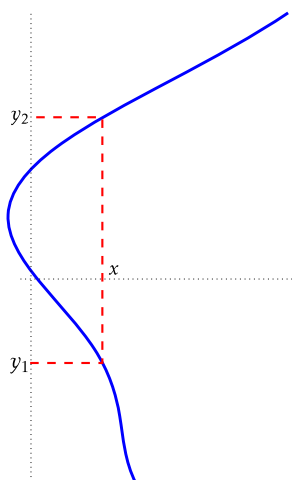
Ici le domaine de définition est  $A = \mathbb{N}$ , le but est  $B = \mathbb{N}$ , et le graphe de  $f$  est  $\Gamma = \{(n, 2n^2 + 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

EXEMPLE 1.4 – Soit  $p: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$  la fonction telle que  $p(n) =$  le  $n$ -ième nombre premier. Ainsi  $p(1) = 2$ ,  $p(2) = 3$ ,  $p(3) = 5$ ,  $p(4) = 7$  et ainsi de suite. Cette fonction  $p$  est bien définie, même si on n'a pas utilisé de formule. (Cela dit, il en existe.)

EXEMPLE 1.5 – Nous allons anticiper un peu et supposer que vous connaissez un minimum l'ensemble  $\mathbb{R}$ . On le représente par une droite, et  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  par un plan. Une fonction  $A \rightarrow B$  avec  $A \subset \mathbb{R}$  et  $B \subset \mathbb{R}$  est donnée par son graphe, qui ressemble de près ou de loin à une courbe dans le plan. Par exemple la figure suivante représente un tel graphe.



La propriété caractéristique des graphes se voit bien sur le dessin. Si maintenant on fait subir une rotation à cette figure, obtient-on encore le graphe d'une fonction ?



La réponse est visiblement non : pour le  $x$  indiqué, il y a deux couples  $(x, y_1)$  et  $(x, y_2)$  qui appartiennent à la courbe. Ce n'est donc pas un graphe. On retiendra la traduction géométrique simple : lorsque  $A \subset \mathbb{R}$  et  $B \subset \mathbb{R}$ , une partie  $\Gamma$  de  $A \times B$  est le graphe d'une fonction  $A \rightarrow B$  si et seulement si chaque droite verticale d'équation  $x = a$  (avec  $a \in A$ ) coupe  $\Gamma$  exactement en un point.

Dans la suite du chapitre nous allons étudier la propriété correspondante en utilisant cette fois des droites horizontales.

### Fonctions injectives

DÉFINITION 1.6 – Soit  $f : A \rightarrow B$  une fonction. Supposons que, pour tout choix de deux éléments distincts  $x_1 \neq x_2$  dans l'ensemble  $A$ , on ait également  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . On alors dit que  $f$  est *injective*, ou encore que  $f$  est une *injection*. ■

Il existe bien des façons de reformuler ceci. Par exemple,  $f$  est injective si et seulement si l'égalité  $f(x_1) = f(x_2)$  entraîne  $x_1 = x_2$ . Également, il est bon de noter que  $f$  est injective si et seulement si l'équation

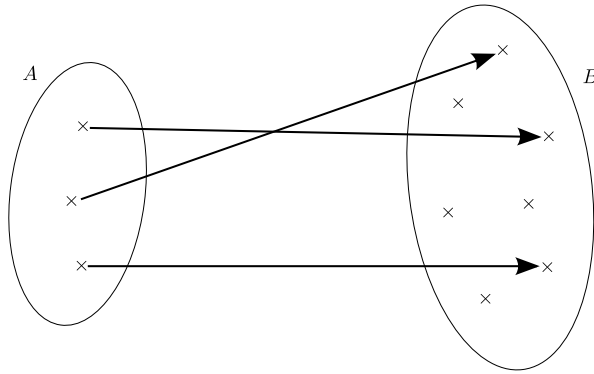
$$f(x) = b,$$

dont l'inconnue est  $x \in A$  et qui comporte le paramètre  $b \in B$ , possède *au maximum* une solution.

EXEMPLE 1.7 – La fonction  $d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $d(n) = 2n$ , est injective : en effet si  $2x_1 = 2x_2$ , alors  $x_1 = x_2$ . L'équation  $d(x) = b$  s'écrit  $2x = b$  ; elle a une solution  $x = \frac{b}{2}$  si  $b$  est pair, et aucune solution si  $b$  est impair.

EXEMPLE 1.8 – La fonction  $c : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $c(n) = n^2$ , n'est *pas* injective (ici  $\mathbb{Z}$  est l'ensemble de tous les nombres entiers, positifs ou négatifs). En effet  $c(n) = c(-n)$ , de sorte que l'équation  $c(x) = b$ , qui s'écrit  $x^2 = b$ , peut posséder deux solutions, comme par exemple 2 et  $-2$  qui sont solutions pour  $b = 4$ .

Voici comment on représente une fonction injective :

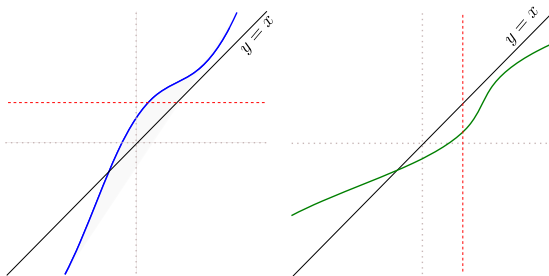


Cette fois-ci, les flèches pointent toutes vers des éléments différents.

EXEMPLE 1.9 – Revenons au cas particulier où  $f : A \rightarrow B$  avec  $A$  et  $B$  des parties de  $\mathbb{R}$ . L'équation  $f(x) = b$  possède une solution  $x$  lorsque le graphe de  $f$  comporte un point  $(x, f(x))$  qui est également sur la droite horizontale d'équation  $y = b$ . La condition pour que  $f$  soit injective est donc que les droites horizontales rencontrent le graphe de  $f$  en un point au maximum.

Soit  $\Gamma$  le graphe de  $f$ . Faisons subir à ce graphe une symétrie par rapport à la droite d'équation  $y = x$  (cette symétrie envoie le point  $(x, y)$  sur  $(y, x)$ ). On obtient un ensemble  $\Gamma'$ . Lorsque  $f$  est injective, ce  $\Gamma'$  ne rencontre les droites verticales qu'en un point au plus. C'est-à-dire que  $\Gamma'$  est le graphe d'une fonction !

Cette discussion est illustrée sur la figure suivante.



À gauche en bleu, le graphe d'une fonction injective ; à droite en vert, son symétrique.

Soyons plus précis. Pour définir une fonction  $g$  dont le graphe serait  $\Gamma'$ , il lui faut un ensemble de définition et un but. Les points de  $\Gamma'$  sont ceux de la forme  $(f(x), x)$ . Notons donc

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset B.$$

(Nous reviendrons sur cette notation (abrégée) dans le paragraphe suivant.) Alors on peut définir une fonction  $g : f(A) \rightarrow A$  dont le graphe est  $\Gamma'$ . Concrètement, on a  $g(f(a)) = a$ , ce qui a un sens puisque  $f$  est injective.

Cette fonction  $g$  est essentiellement ce qu'on appelle la *réci-proque de  $f$* , qui se note  $f^{-1}$ . Toutefois il nous reste un peu de vocabulaire à introduire avant de détailler ceci.

### Fonctions surjectives et bijectives

DÉFINITION 1.10 – Soit  $f : A \rightarrow B$  une fonction. On note  $f(A)$ , ou encore  $\text{Im}(f)$ , l'ensemble

$$\{b \in B \mid \exists x \in A \text{ tel que } b = f(x)\}.$$

(En plus concis  $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ .) On dit que  $f(A)$  est l'image de  $A$  par  $f$ .

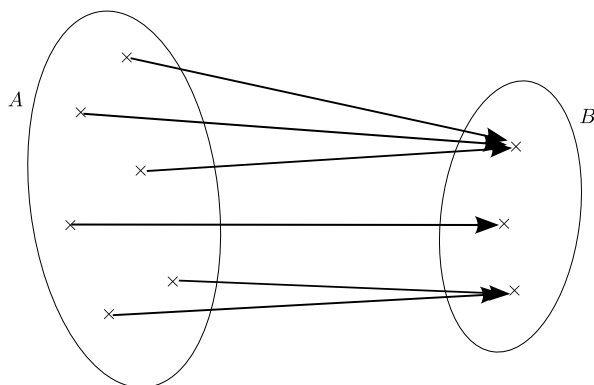
Lorsque  $f(A) = B$ , on dit que  $f$  est *surjective*, ou encore que  $f$  est une *surjection*. ■

Ainsi  $f$  est surjective lorsque l'équation  $f(x) = b$  possède au *minimum* une solution.

EXEMPLE 1.11 – La fonction  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $f(n, m) = n + m$  est surjective. En effet, si on se donne  $b \in \mathbb{N}$ , alors  $f(b, 0) = b$ . On a aussi  $f(0, b) = b$ , et même  $f(1, b - 1) = b$ , de sorte que  $f$  est loin d'être injective, par contre.

EXEMPLE 1.12 – La fonction  $d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $d(n) = 2n$  n'est pas surjective. En fait l'ensemble image  $d(\mathbb{N})$  est l'ensemble des nombres pairs.

Voici la représentation typique d'une fonction surjective :



Ici chaque élément de B est à l'extrémité d'au moins une flèche.

DÉFINITION 1.13 – Lorsqu'une fonction est à la fois injective et surjective, on dit qu'elle est *bijective*, ou encore que c'est une *bijection*. ■

Lorsque  $f : A \rightarrow B$  est bijective, l'équation  $f(x) = b$  possède une solution et une seule. Cette solution est notée  $f^{-1}(b)$ .

On obtient ainsi une fonction  $f^{-1} : B \rightarrow A$ , que l'on appelle la *réciproque* de  $f$ . On a alors :

PROPOSITION 1.14 – Lorsque  $f$  est bijective, la fonction  $f^{-1}$  vérifie

1.  $f^{-1}(f(a)) = a$  pour  $a \in A$ ,
2.  $f(f^{-1}(b)) = b$  pour  $b \in B$ .

Réciproquement si on a une paire de fonctions  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow A$  telles que  $g(f(a)) = a$  pour  $a \in A$  et  $f(g(b)) = b$  pour  $b \in B$ , alors  $f$  est une bijection et  $g = f^{-1}$ .

Enfin,  $f^{-1}$  est également une bijection lorsqu'elle existe, et

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Démonstration. 1. Étant donné  $a$ , soit  $b = f(a)$ ; puisque  $f$  est injective  $a$  est le seul élément de  $A$  qui vérifie cette équation, et c'est cet élément que l'on note  $f^{-1}(b)$ . Donc  $a = f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a))$ .

2. C'est la définition même de  $f^{-1}(b)$ .

Montrons la réciproque. Soient  $f$  et  $g$  comme dans la proposition. Si  $f(a_1) = f(a_2)$ , alors on a aussi  $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ , donc  $a_1 = a_2$ . Ainsi  $f$  est injective. De plus, si  $b \in B$  on a  $b = f(g(b))$  donc  $b$  est bien dans l'image de  $f$ , ce qui montre que  $f$  est surjective. Finalement  $f$  est une bijection.

Partant de  $f(f^{-1}(b)) = b = f(g(b))$ , on applique  $g$  pour obtenir

$$g[f(f^{-1}(b))] = g[f(g(b))].$$

Puisque  $g(f(a)) = a$  pour tout  $a \in A$  (et donc en particulier pour  $a = f^{-1}(b)$  ou pour  $a = g(b)$ ), cette dernière égalité se simplifie et donne  $f^{-1}(b) = g(b)$ . Donc  $f^{-1} = g$ .

Par symétrie, on peut inverser les rôles de  $f$  et de  $g$ . Donc  $g$  est bijective et  $g^{-1} = f$ , c'est-à-dire que  $f^{-1}$  est bijective et que  $(f^{-1})^{-1} = f$ .  $\square$

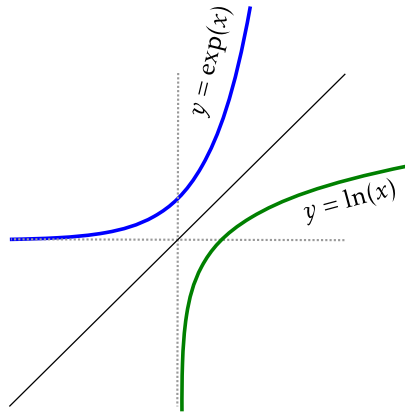
EXEMPLE 1.15 – La fonction  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $s(n) = -n$  est une bijection. De plus,  $s^{-1} = s$ .

## Galerie d'exemples

Nous allons passer en revue quelques exemples célèbres de paires de bijections réciproques. Nous n'allons pas démontrer que ces fonctions sont des bijections, et d'ailleurs nous n'allons pas les définir précisément pour l'instant : en effet ce sont des exemples largement traités au lycée. Au fur et à mesure que vous progresserez dans ce livre, vous trouverez les définitions et les démonstrations correspondantes.

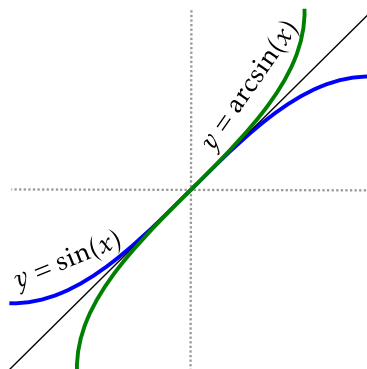
*Exponentielle & logarithme.* Voici en bleu le graphe de la fonction exponentielle. C'est une fonction  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$  (où  $\mathbb{R}^{>0}$  désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs), et nous reviendrons longuement sur sa définition dans ce livre. En vert, le graphe de sa réciproque, que l'on appelle le logarithme népérien ; il s'agit donc d'une fonction  $\ln : \mathbb{R}^{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ .





Notez qu'à côté du graphe bleu on a indiqué  $y = \exp(x)$  : c'est le raccourci habituel pour indiquer qu'un point  $(x, y)$  du plan se trouve sur le graphe si et seulement si  $y = \exp(x)$ . On aurait aussi bien pu inscrire  $x = \ln(y)$ . À côté du deuxième graphe, les rôles de  $x$  et  $y$  sont inversés.

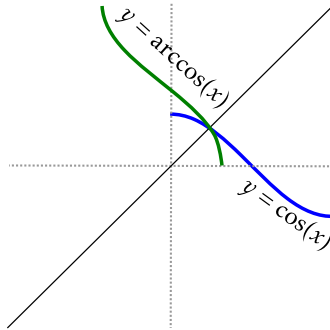
*Sinus & arcsinus.* La fonction sinus est ici vue comme une fonction  $\sin: [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  (le nombre  $\pi$ , qui doit vous être familier, sera étudié plus en détail dans la suite). C'est une bijection dont la réciproque s'appelle arcsinus ; on écrit  $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ .



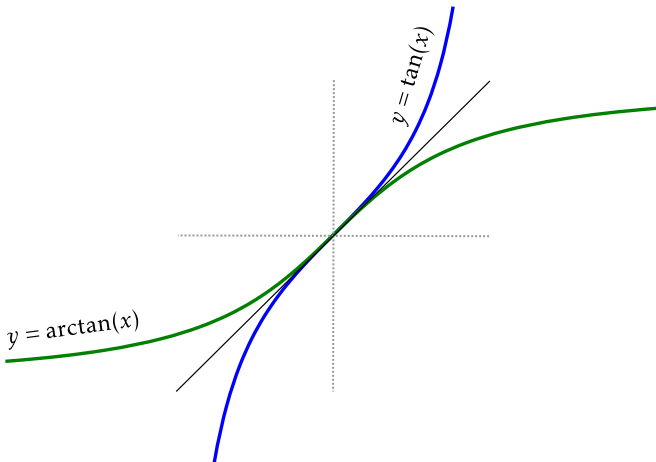
Attention, si l'on s'intéresse à d'autres intervalles, la fonction sinus ne sera pas forcément une bijection : par exemple ce

n'est pas le cas sur  $[0, 2\pi]$ .

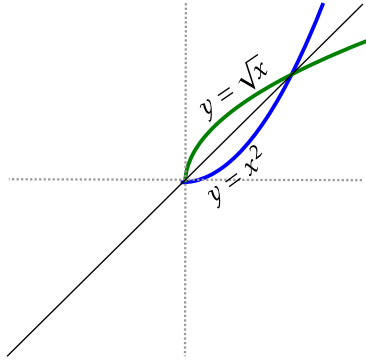
*Cosinus & arccosinus.* Le cosinus, vu comme une fonction  $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ , est une bijection. Sa réciproque  $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  est appelée arccosinus.



*Tangente & arctangente.* Rappelons que l'on note  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$  lorsque  $x$  n'est pas de la forme  $\frac{\pi}{2} + n\pi$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ . Ce faisant, on obtient une fonction  $\tan: ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  qui est une bijection. Sa réciproque, appelée arctangente, est une fonction  $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .



*Carré & racine.* La fonction  $f: [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  définie par  $f(x) = x^2$  est une bijection. Sa réciproque  $f^{-1}$  s'appelle la fonction « racine carrée » et se note  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ .



Attardons-nous un instant sur ce dernier exemple. Que sommes-nous capables de véritablement démontrer? Commençons par l'injectivité de  $f$ . Si  $f(x_1) = f(x_2)$ , on a  $x_1^2 = x_2^2$ , d'où

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0.$$

Or puisqu'on se restreint à  $x_1 \geq 0$  et  $x_2 \geq 0$ , on ne peut avoir  $x_1 + x_2 = 0$  que lorsque  $x_1 = x_2 = 0$ . Dans les autres cas, on simplifie par  $x_1 + x_2$  et on en conclut que  $x_1 = x_2$ , là encore. Donc  $f$  est injective.

La fonction  $f$ , dont le but est  $[0, +\infty[$  est-elle bien surjective? C'est une question bien plus difficile! Il s'agit de savoir si tout nombre réel  $b$  possède « une racine carrée », c'est-à-dire s'il existe  $x$  tel que  $b = x^2$ . En d'autres termes, est-ce qu'on peut toujours donner un sens à la notation  $\sqrt{b}$ ? Bien sûr nous venons d'affirmer ci-dessus que la réponse est oui, mais comment le démontrer?

C'est l'objet du chapitre suivant, et c'est aussi notre première rencontre avec un énoncé considéré comme évident jusqu'au lycée et qu'il va falloir élucider. Les exemples ci-dessus en contiennent bien d'autres (qu'est-ce que l'exponentielle, au juste? qu'est-ce qu'un cosinus? etc)

## La méthode axiomatique

S'il existe une distinction essentielle entre les mathématiques (en tout cas dans la vision idéalisée qu'on peut en avoir) et la plupart des autres disciplines, c'est sans doute qu'on y a tout le loisir de poser des questions. Qu'on essaie de demander à un physicien la définition d'une force, ou la définition de l'énergie (et non pas la formule qui calcule telle ou telle incarnation de l'énergie), et on rencontrera rapidement des difficultés, qui sont profondes et inévitables. Richard Feynman dans son « Cours de Physique » donne une belle définition de l'énergie, par ailleurs très mathématique et sans doute décevante par certains égards pour les physiciens. Il ne parvient pas à en faire autant pour les forces, et il est intéressant de lire ses explications.

*Richard Feynman, Le cours de Physique de Feynman, Dunod, 1999.*

En théorie, ceci n'arrive jamais en mathématiques. Vous pouvez demander à votre professeur de définir ce qu'est le logarithme, il le fera (par exemple) en disant que c'est une intégrale ; vous pouvez demander ce qu'est une intégrale, vous aurez une réponse qui fait intervenir des limites ; vous pouvez ensuite demander ce que signifie un « passage à la limite », etc. Mais que va-t'il arriver lorsqu'on en finit par demander ce qu'est un ensemble, ce que sont les nombres entiers, et pourquoi  $2 + 2 = 4$  ? Il va bien falloir trouver une réponse.

Cependant, a-t-on vraiment le désir de traiter cette question *maintenant*, dans le premier chapitre d'un livre destiné aux étudiants en première année ? Nous affrontons un véritable dilemme. D'un côté, par simple honnêteté (et pas seulement pour avoir des réponses à disposition d'un étudiant récalcitrant qui aurait l'idée incongrue de demander la définition des choses « évidentes »), on a bien envie de commencer par le commencement, et de définir tous les objets que l'on rencontre en partant « de rien ». D'un autre côté, on peut objecter que cette exigence serait aussi déraisonnable que d'imposer à chaque candidat au permis de conduire de connaître entièrement la mécanique automobile avant même sa première heure de conduite.

De fait, la vaste majorité des mathématiciens de profession ne connaissent pas et ne souhaitent pas connaître les détails des

fondements logiques des mathématiques. Ils en connaissent cependant les grands principes, que nous allons exposer dans la fin de ce chapitre.

Le principe de départ de la « méthode axiomatique » est simple. On *postule* l'existence de certains objets, vérifiant certaines propriétés appelées axiomes. Par « postuler », il faut comprendre qu'il s'agit de se donner des règles du jeu, que l'on accepte sans les questionner. Ensuite, les résultats que l'on peut démontrer à partir de ces axiomes sont considérés comme « vrais dans la théorie ».

Le premier exemple remonte à l'Antiquité, c'est celui des axiomes d'Euclide pour la géométrie. Euclide postule l'existence d'objets appelés points et droites (et d'autres encore), sachant qu'un point peut « appartenir » à une droite. Ceci dans le respect de certaines propriétés, comme « deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles » (et bien sûr, dans cette théorie l'expression « être parallèles » est elle-même définie, à l'aide de concepts premiers comme l'appartenance d'un point à une droite). Toute la géométrie est déduite de ces axiomes.

En principe, comme le disait Hilbert, on pourrait remplacer « point » par « table », « droite » par « chaise », et « appartenir » par n'importe quel verbe, et on pourrait toujours développer la théorie, de manière purement formelle. Ceci est vrai ; ce ne sont que des mots. Toutefois, il faut se garder de prendre ceci trop au sérieux : les axiomes ont été choisis parce qu'Euclide a l'intuition que le monde réel comporte des points et des droites (ou au moins des segments), et parce qu'il souhaite considérer chaque résultat « vrai dans la théorie » comme une assertion vraie sur le monde réel.

L'avantage de la méthode axiomatique est de couper court aux débats sur l'existence des objets de départ. On suppose qu'ils existent, vérifiant certaines propriétés, le reste n'est que déduction. Celui qui doute de l'existence de ces objets peut entrer dans un débat philosophique, par ailleurs intéressant, mais il ne peut pas critiquer le travail mathématique de ceux qui ont choisi ces axiomes (sauf à montrer que les axiomes sont contradictoires et que l'on peut en déduire des choses ab-

surdes, comme un énoncé et son contraire simultanément, par exemple).

On continue de nos jours à employer la méthode axiomatique, même si les mathématiques modernes ne reposent plus sur les axiomes d'Euclide. Il existe plusieurs systèmes d'axiomes possibles, et dans l'optique de ce livre il n'est absolument pas utile d'en comprendre les différences, ni même d'en décrire un en détail. Citons tout de même :

1. Le système de *l'arithmétique de Peano*. On choisit ici de prendre les nombres entiers comme objets de départ, et on suppose qu'ils vérifient certaines propriétés comme « tout nombre  $n$  possède un successeur  $n + 1$  ». On déduit tout le reste.
2. La *théorie des ensembles de Zermelo & Fraenkel*. Les objets de départ sont les ensembles et les axiomes sont, en gros, les propriétés décrites dans la première partie de ce chapitre.
3. Il existe aussi un système qui part des *fonctions* comme objets primaires.

Les théorèmes que l'on peut obtenir dans un système sont en général démontrables dans les autres systèmes. Ce n'est pas exactement vrai, et on obtient des résultats un peu plus forts avec la théorie des ensembles qu'avec l'arithmétique ; mais les différences sont subtiles et nous n'en parlerons pas plus. Ceci signifie qu'étant donné un système de départ, disons la théorie des ensembles, il faut pouvoir définir les objets des autres systèmes, comme les nombres entiers ou les fonctions.

Dans ce cours, on ne va pas s'encombrer de telles considérations, et nous considérerons comme « connus » aussi bien les ensembles que les nombres entiers.

# Chapitre 2

## Nombres

– Première lecture –

### Les premiers nombres

Le premier ensemble de nombres à notre disposition est celui des nombres naturels :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Puis vient l'ensemble des nombres relatifs  $\mathbb{Z}$ , qui contient  $\mathbb{N}$ , et comprend également les nombres négatifs comme  $-4$ . Enfin nous avons l'ensemble des nombres rationnels  $\mathbb{Q}$ , c'est-à-dire l'ensemble des fractions  $\frac{p}{q}$  avec  $p, q \in \mathbb{Z}$  et  $q \neq 0$ . Noter les inclusions  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ .

Dans le chapitre précédent nous avons expliqué que nous ne définirons pas l'ensemble  $\mathbb{N}$ , considéré comme naturel (d'où son nom). Par contre on peut parfaitement donner une définition des ensembles  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Q}$  à partir de  $\mathbb{N}$  : voir l'encadré « Une définition de  $\mathbb{Q}$  ». Quoi qu'il en soit, nous pouvons considérer que nous sommes à l'aise avec les nombres rationnels.

A-t-on besoin d'autres nombres que des rationnels ? La question remonte aux Grecs de l'Antiquité. Les difficultés apparaissent à peu près ainsi. Les nombres doivent au minimum

être capables de mesurer les aires et les longueurs des objets qui nous entourent (c'est un petit anachronisme car les Grecs ne pensaient pas (encore) aux aires comme à des nombres, mais

## Une définition de $\mathbb{Q}$

Imaginons quelqu'un qui connaisse l'ensemble  $\mathbb{Z}$  mais pas  $\mathbb{Q}$  : comment le lui décrire ? (À titre d'exercice vous pourriez ensuite décrire  $\mathbb{Z}$  à quelqu'un qui connaît  $\mathbb{N}$ ).

On peut facilement imaginer définir une fraction comme étant une paire de nombres  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  avec  $q \neq 0$ , avec la convention que  $(p, q)$  et  $(a, b)$  représentent la même fraction lorsque  $bp = aq$ , puisque

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow bp = aq.$$

En étant tout-à-fait précis, on est amené à la définition suivante, étonnamment compliquée : étant donnée une paire  $(p, q)$  de nombres avec  $q \neq 0$ , la fraction définie par ce couple est l'ensemble

$$F_{p,q} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid b \neq 0 \text{ et } pb = aq\}.$$

On décide d'écrire  $\frac{p}{q}$  au lieu de  $F_{p,q}$ , par simplicité.

Maintenant si  $(a, b)$  vérifie  $pb = aq$ , on peut démontrer que

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b}.$$

Faisons-le : montrons que  $F_{p,q} = F_{a,b}$ . C'est une égalité d'ensembles ! Soit donc  $(x, y)$  un couple de nombres entiers avec  $y \neq 0$ . Si  $(x, y) \in F_{p,q}$ , on a  $py = xq$ . Multipliant par  $b$ , on obtient  $psy = xbq$ . Or on a supposé que  $pb = aq$ , donc on a  $aqy = xbq$ . En simplifiant par  $q$  qui est non-nul, on en tire  $ay = xb$ , c'est-à-dire  $(x, y) \in F_{a,b}$ . Ceci montre que  $F_{p,q} \subset F_{a,b}$  ;

cet argument est visiblement symétrique, donc de la même manière on a  $F_{a,b} \subset F_{p,q}$ , et on conclut que  $F_{p,q} = F_{a,b}$  comme on le souhaitait.

Réciproquement, comme  $(a, b) \in F_{a,b}$ , l'égalité  $F_{p,q} = F_{a,b}$  entraîne  $pb = aq$ .

Nous avons donc donné une définition du symbole  $\frac{p}{q}$  qui obéit à au moins une règle que nous attendons, la règle du « produit en croix ». Pour définir  $\mathbb{Q}$ , il reste du travail : il faut expliquer l'addition et la multiplication.

On pourrait croire que c'est facile. Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux fractions. Choisissons  $(p, q)$  tels que  $F_1 = \frac{p}{q}$  (c'est possible par définition d'une fraction), puis choisissons  $(a, b)$  tels que  $F_2 = \frac{a}{b}$ .

On pose alors

$$F_1 + F_2 = \frac{pb + aq}{qb},$$

et

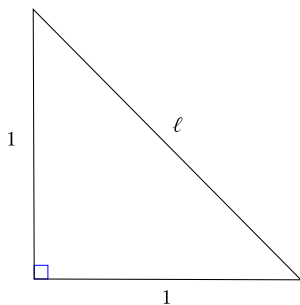
$$F_1 \times F_2 = \frac{pa}{qb}.$$

(On fait ceci évidemment en pensant aux formules pour  $\frac{p}{q} + \frac{a}{b}$  et  $\frac{p}{q} \times \frac{a}{b}$ .)

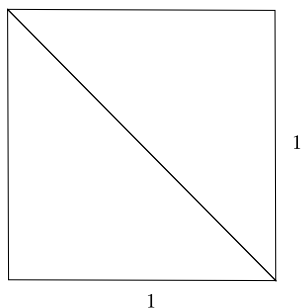
Malheureusement il reste des vérifications à faire : il faut bien s'assurer que le résultat ne dépend pas des choix que nous sommes obligés de faire pour  $(p, q)$  et  $(a, b)$ , qui ne sont pas les seuls représentants de leur fraction. Nous laissons ces détails au lecteur.



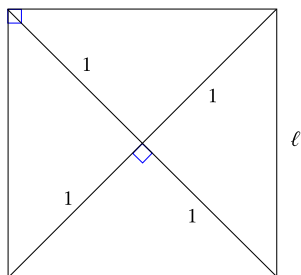
l'idée est la même). Imaginons donc un triangle rectangle et isocèle, dont le petit côté est de longueur 1, comme ci-dessous.



Le dessin suivant doit nous convaincre, si l'on sait que l'aire d'un rectangle s'obtient en multipliant les longueurs de ses côtés, que l'aire de notre triangle est  $\frac{1}{2}$  :



Maintenant, notons  $\ell$  la longueur de l'hypoténuse (le grand côté du triangle), et considérons ce dernier dessin, obtenu à partir de 4 copies du triangle initial :



L'aire du carré est  $\ell^2$  ; manifestement, c'est 4 fois l'aire du triangle, donc  $4 \times \frac{1}{2} = 2$ . On doit donc avoir

$$\ell^2 = 2.$$

C'est ici que les problèmes commencent :

**PROPOSITION 2.1** – *Il n'existe aucun nombre rationnel  $\ell \in \mathbb{Q}$  tel que  $\ell^2 = 2$ .*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que l'on ait  $\ell = \frac{p}{q}$  tel que  $\ell^2 = 2$ , donc  $p^2 = 2q^2$ . Quitte à simplifier la fraction un certain nombre de fois par 2, on peut supposer que  $p$  et  $q$  ne sont pas tous les deux pairs.

Maintenant si l'on observe la relation  $p^2 = 2q^2$ , on voit que  $p^2$  est pair ; donc  $p$  est pair également, ce que l'on va écrire  $p = 2r$ . Par suite  $p^2 = 4r^2 = 2q^2$ , donc  $q^2 = 2r^2$ .

On en conclut que  $q^2$  est pair, donc  $q$  aussi. C'est une contradiction.  $\square$

Que faut-il en conclure ? Tout simplement que les nombres rationnels ne sont pas assez compétents pour décrire le monde réel. Pour être plus précis, si l'on veut assigner des nombres aux longueurs et aux aires, de sorte que certaines propriétés souhaitables soient satisfaites (par exemple en s'assurant que l'aire d'un rectangle est le produit des longueurs), alors on ne peut pas utiliser (seulement) les nombres rationnels.

### **La propriété de la borne supérieure**

Nous venons de montrer qu'il n'y a pas de nombre rationnel digne d'être appelé  $\sqrt{2}$ , et on pourrait avoir envie de « rajouter » simplement ce nombre – au lycée on vous a bien appris à rajouter un nombre  $i$  tel que  $i^2 = -1$ . (Plus loin dans ce chapitre l'expression « rajouter » prendra un sens tout-à-fait précis et simple.) Mais nous aurions pu faire de même avec  $\sqrt{3}$  ou  $\sqrt{5}$ , de sorte qu'il semble y avoir une infinité de lacunes dans ce système de nombres qu'est  $\mathbb{Q}$ .

Nous allons maintenant décrire une propriété un peu abstraite des sous-ensembles de  $\mathbb{Q}$ . C'est un peu délicat, mais nous

allons mettre le doigt exactement sur « le » phénomène qui empêche, entre bien d'autres choses, les racines carrées de certains nombres d'exister dans  $\mathbb{Q}$ .

DÉFINITION 2.2 – Soit  $A \subset \mathbb{Q}$ .

- ◇ Soit  $M \in \mathbb{Q}$ . On dit que  $M$  est un *majorant* de  $A$  si  $\forall a \in A, a \leq M$ .
- ◇ Soit  $M \in \mathbb{Q}$ . On dit que  $M$  est le *plus grand élément* de  $A$  si c'est un majorant de  $A$  et si  $M \in A$ .
- ◇ En remplaçant  $\leq$  par  $\geq$ , on obtient les notions de *minorant* et de *plus petit élément*.
- ◇ Soit

$$B = \{M \in \mathbb{Q} \mid M \text{ est un majorant de } A\}.$$

Si  $B$  possède un *plus petit élément*  $b$ , on dit que c'est la *borne supérieure* de  $A$  et on note  $b = \sup A$ .

- ◇ De même, si l'ensemble des minorants de  $A$  possède un *plus grand élément*, celui-ci est appelé la *borne inférieure* de  $A$ , notée  $\inf A$ .



On retient que « le sup est le plus petit des majorants », de même que « l'inf est le plus grand des minorants ». Nous allons voir que le sup et l'inf n'existent pas toujours, et c'est bien là le problème. Voyons quelques exemples.

EXEMPLE 2.3 – Soit

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x < 1\}.$$

Les minorants de  $A$ , pour commencer, sont tous les nombres  $m$  tels que  $m \leq 0$ , c'est-à-dire qu'ils forment l'ensemble

$$C = \{m \in \mathbb{Q} \mid m \leq 0\}.$$

Cet ensemble possède un plus grand élément, à savoir 0. C'est donc le plus grand minorant de  $A$ , et par définition on peut écrire  $\inf A = 0$ . Ce nombre est également le plus petit élément de  $A$ .

Nous affirmons que l'ensemble des majorants de  $A$  est

$$B = \{M \in \mathbb{Q} \mid M \geq 1\}.$$

Montrons-le. Il est clair que les éléments de  $B$  sont des majorants de  $A$ , et il faut montrer qu'il n'y en a pas d'autres. Soit donc  $M$  un majorant quelconque, et supposons par l'absurde que  $M < 1$ . On a  $M \geq 0$  puisque  $0 \in A$ , donc  $0 \leq M < 1$ . Considérons alors  $a = \frac{1}{2}(M + 1)$ . On a  $M < a < 1$ , donc ce nombre s'est glissé entre  $M$  et  $1$ , ce qui est absurde : on a  $a \in A$  donc on devrait avoir  $a \leq M$ . Ainsi  $M \geq 1$  comme on souhaitait le montrer.

L'ensemble  $B$  possède un plus petit élément, à savoir  $1$ . C'est le plus petit majorant de  $A$ , de sorte que  $\sup A = 1$ . Par contre  $A$  n'a pas de plus grand élément.

Les bornes inférieure et supérieure de  $A$  sont donc  $0$  et  $1$  respectivement, et nous voyons sur cet exemple qu'il s'agit bien des « bornes » naturelles de  $A$  au sens intuitif. La différence  $\sup A - \inf A = 1 - 0 = 1$  donne une mesure de la taille de  $A$ .

EXEMPLE 2.4 – Soit maintenant

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}.$$

Intéressons-nous aux majorants de  $A$ , et notons comme d'habitude  $B$  l'ensemble qu'ils forment. Cet ensemble est non-vidé : on a par exemple  $10 \in B$  puisque tous les éléments de  $A$  sont  $\leq 10$ . En effet, un nombre  $x > 10$  satisfait  $x^2 > 10^2 = 100 > 2$  et ne peut pas être dans  $A$ .

Pour les mêmes raisons, on a  $3 \in B$  puisque  $3^2 = 9 > 2$ . Approchons nous encore : on voit que  $\frac{3}{2} \in B$  puisque  $(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} > 2$ .

Bien. Supposons que  $B$  possède un plus petit élément  $\ell$  ; en d'autres termes, supposons que  $A$  possède une borne supérieure. Que peut-on dire de  $\ell^2$  ? En particulier, ce nombre est-il plus grand ou plus petit que  $2$  ?

Examinons l'éventualité  $\ell^2 > 2$ . Notons  $\varepsilon = \ell^2 - 2 > 0$ , et prenons  $\delta = \frac{\varepsilon}{2\ell}$ . Si on calcule

$$(\ell - \delta)^2 = \ell^2 + \delta^2 - 2\delta\ell,$$

on s'aperçoit de la chose suivante : l'inégalité

$$2\delta\ell - \delta^2 < 2\delta\ell = \varepsilon = \ell^2 - 2$$

entraîne  $(\ell - \delta)^2 > \ell^2 + (2 - \ell^2) = 2$ . Le nombre  $M = \ell - \delta$  est donc un majorant de  $A$  puisque son carré est  $> 2$ , par le même raisonnement qui nous a servi à montrer que  $100$ ,  $3$  et  $\frac{3}{2}$  sont des majorants.

Mais c'est absurde puisque  $M < \ell$  et que  $\ell$  est censé être le plus petit majorant ! Cette contradiction réfute l'hypothèse selon laquelle  $\ell^2 > 2$ , et on en tire  $\ell^2 \leq 2$ .

On peut maintenant se demander si  $\ell^2 < 2$ . Dans cette hypothèse, notons  $\varepsilon = 2 - \ell^2 > 0$ . Choisissons n'importe quel nombre  $\delta > 0$  tel que l'on ait à la fois  $\delta < 2\ell$  et  $\delta < \frac{\varepsilon}{4\ell}$ . On note alors que  $\delta^2 < 2\delta\ell$  et donc que

$$\delta^2 + 2\delta\ell < 4\delta\ell < \varepsilon.$$

Par suite,  $(\ell + \delta)^2 < \ell^2 + \varepsilon = 2$ . Donc  $a = \ell + \delta$  est un élément de  $A$ . C'est de nouveau absurde puisque  $a > \ell$  alors que  $\ell$  est un majorant.

Il ne nous reste pas d'autre choix que d'envisager que  $\ell^2 = 2$ . Mais c'est également impossible en vertu de la proposition 2.1 !

Finalement, cette borne supérieure  $\ell$  ne pourrait satisfaire ni  $\ell^2 < 2$ , ni  $\ell^2 > 2$ , ni  $\ell^2 = 2$ . On en arrive à la conclusion que *l'ensemble  $A$  ne possède pas de borne supérieure.*

## L'ensemble des réels

Voici un théorème (très long !) qui affirme que l'on peut corriger les défauts de  $\mathbb{Q}$ .

**THÉORÈME 2.5** – *Il existe un ensemble  $\mathbb{R}$ , et un seul, ayant les propriétés suivantes.*

1. Propriétés arithmétiques.  $\mathbb{R}$  possède une addition et une multiplication, et deux éléments distingués notés  $0$  et  $1$ , tels que :

(a)  $x + y = y + x$ ,

(b)  $0 + x = x$ ,

(c)  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ,

(d) pour chaque  $x$  il existe un nombre noté  $(-x)$  tel que  $x + (-x) = 0$ ,

- (e)  $xy = yx$ ,
- (f)  $1x = x$ ,
- (g)  $(xy)z = x(yz)$ ,
- (h)  $x(y + z) = xy + xz$ .
- (i) pour tout  $y \neq 0$  il existe un nombre noté  $y^{-1}$  ou  $\frac{1}{y}$  tel que  $yy^{-1} = 1$ .

2. Propriétés d'ordre. Les éléments de  $\mathbb{R}$  peuvent être comparés. Plus précisément, il y a une relation notée  $\leq$  telle que :

- (a) étant donnés  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}$ , on a soit  $x \leq y$ , soit  $y \leq x$ ,
- (b) pour tout  $x$  on a  $x \leq x$ ,
- (c) si  $x \leq y$  et si  $y \leq z$ , alors  $x \leq z$ ,
- (d) si  $x \leq y$  et  $y \leq x$  alors  $x = y$ ,
- (e) si  $x \leq y$  alors  $x + z \leq y + z$ ,
- (f) si  $x \leq y$  et si  $0 \leq z$ , alors  $xz \leq yz$ .

De plus, on a la propriété fondamentale de la borne supérieure : si  $A \subset \mathbb{R}$  est une partie non-vide de  $\mathbb{R}$  possédant au moins un majorant, alors elle possède une borne supérieure.

De même toute partie non-vide minorée possède une borne inférieure.

3. Relation avec  $\mathbb{Q}$ . On a  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ , et les opérations usuelles d'addition, de multiplication et d'ordre dans  $\mathbb{Q}$  coïncident avec celles calculées dans  $\mathbb{R}$ .

De plus, pour tout  $a, b$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $a < b$ , il existe  $x \in \mathbb{Q}$  tel que  $a < x < b$ .

Nous allons commenter ce théorème point par point. Mais la première chose à remarquer, c'est qu'il s'agit d'un résultat très abstrait : on affirme qu'il existe un ensemble un peu plus gros que  $\mathbb{Q}$ , ayant toutes les qualités de ce dernier, et possédant en plus toutes les bornes supérieures que l'on puisse désirer. Pourquoi énoncer l'existence de cet objet plutôt que l'exhiber directement ?

Tout simplement, parce que c'est très difficile, et d'ailleurs nous ne parlerons pas de la démonstration du théorème (qui

donne une construction explicite, mais longue et pénible). Par contre le théorème est facile à utiliser, et vous le faites depuis longtemps.

Ce système de nombres appelé  $\mathbb{R}$  était inconnu des Grecs, même s'ils avaient conscience de l'imperfection de  $\mathbb{Q}$ . Il faut considérer la construction de cet objet, si abstrait et pourtant si concrètement utile, comme un exploit de la pensée humaine. Nous allons voir tout au long de ce livre que les nombres « réels » (les éléments de  $\mathbb{R}$ ) sont parfaitement adaptés à la description du monde réel : ils peuvent mesurer les longueurs et les aires sans mener à des contradictions, par exemple. Nous allons commencer par montrer que 2 possède une racine carrée dans  $\mathbb{R}$ , bien sûr.

Avant ça, voici quelques remarques supplémentaires :

1. Les propriétés arithmétiques vous sont familières. Il n'y a rien à retenir vraiment, puisque vous les appliqueriez sans réfléchir. Mais puisque  $\mathbb{R}$  est un ensemble abstrait, il faut bien lister ces choses.
2. Même remarque avec les propriétés d'ordre. Notez bien que nous avons employé les termes de majorants, bornes supérieures, etc, dans  $\mathbb{R}$ , et il est entendu qu'on donne à ces expressions le même sens que dans la définition 2.2.
3. La troisième série de propriétés est essentielle pour l'unicité de  $\mathbb{R}$  (en effet il existe des systèmes de nombres encore plus gros ayant encore toutes les autres propriétés). On dit parfois que «  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  » pour exprimer le fait qu'entre deux réels  $a$  et  $b$ , aussi proche que l'on veut, il y aura toujours un rationnel  $x$ .

Voici enfin le résultat qui indique que les racines carrées existent dans  $\mathbb{R}$ .

**PROPOSITION 2.6** – Soit  $a \in \mathbb{R}$  un nombre positif, c'est-à-dire  $a \geq 0$ . Alors il existe un nombre  $x \in \mathbb{R}$ , et un seul, tel que  $x \geq 0$  et  $x^2 = a$ .

On note ce nombre  $\sqrt{a}$  et on l'appelle la racine carrée de  $a$ .

*Démonstration.* Dans cette démonstration, nous allons à de nombreuses reprises indiquer quelles propriétés du théorème 2.5 nous sont utiles, même les plus évidentes, pour que vous

voyiez bien que les raisonnements habituels reposent toujours sur ces quelques règles. Par la suite on ne donnera pas tant de détails, évidemment. D'ailleurs vous allez voir que l'on ne va pas indiquer *toutes* les propriétés que l'on utilise : ça serait long et pénible à suivre, aussi vous laisse-t-on le soin de vérifier toutes les étapes.

Voyons d'abord l'unicité. Soit donc  $x_0 \geq 0$  tel que  $x_0^2 = a$ , et cherchons tous les  $x \geq 0$  tels que  $x^2 = a$ . On a

$$\begin{aligned} x^2 = a &\Leftrightarrow x^2 - x_0^2 = 0, \\ &\Leftrightarrow (x - x_0)(x + x_0) = 0. \end{aligned}$$

(Pourquoi cette factorisation est-elle valide ?) Lorsqu'un produit  $ab$  de deux nombres réels  $a$  et  $b$  vaut 0, l'un de ces nombres doit être nul : en effet si  $a \neq 0$ , alors  $\frac{1}{a}$  existe d'après le (1)(i) du théorème 2.5, et en multipliant par  $\frac{1}{a}$  on obtient  $\frac{1}{a}(ab) = (\frac{1}{a}a)b = 1b = b = \frac{1}{a}0 = 0$  (nous avons utilisé les propriétés (1)(g), puis (1)(i), puis (1)f ; le fait que  $x0 = 0$  pour tout  $x$  se montre à partir des propriétés : faites-le !) Donc  $b = 0$ .

Ici (avec  $a = x - x_0$  et  $b = x + x_0$ ) on voit que  $x = x_0$  ou  $x = -x_0$ . Comme  $0 \leq x_0$ , on observe en ajoutant  $-x_0$  de chaque côté que  $-x_0 \leq 0$  (propriété (2)(e) du théorème). Ainsi, dans le cas où  $x = -x_0$ , on constate que  $x$  est à la fois  $\leq 0$  et  $\geq 0$  ; c'est donc que  $x = 0$  par la propriété (2)(d), d'où  $x = x_0 = 0$ . Finalement  $x = x_0$  quoi qu'il arrive, et l'unicité est démontrée.

Passons à l'existence. Sans surprise, on pose

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq a\}.$$

Si l'on trouve un nombre  $M$  tel que  $M^2 > a$ , alors ce sera un majorant de  $A$ . (Pour vérifier ceci, démontrez que si  $x \geq M$ , alors  $x^2 \geq M^2$  lorsque  $M \geq 0$ .) Or on peut tout simplement prendre  $M = a$  si  $a > 1$ , et  $M = 1$  si  $a < 1$  (pour le cas  $a = 1$ , la proposition est évidemment vraie).

Puisque l'on est dans  $\mathbb{R}$ , on sait que  $A$  possède une borne supérieure, en tant qu'ensemble non vide (il contient 0) et majoré ; posons donc  $x = \sup A$ . Il faut montrer que  $x^2 = a$ . Nous avons déjà fait le raisonnement dans l'exemple 2.4 dans le cas où  $a = 2$  ; en procédant exactement de la même manière,



on trouve que  $x^2 < a$  et  $x^2 > a$  mènent à des contradictions. Donc  $x^2 = a$ .  $\square$

Par la suite, nous montrerons même que tout nombre positif  $a$  possède une unique « racine  $n$ -ième » notée  $\sqrt[n]{a}$  ou  $a^{\frac{1}{n}}$ , c'est-à-dire qu'il existe un unique nombre positif  $x$  tel que  $x^n = a$ . Vous pouvez essayer de démontrer ce résultat maintenant sur le même modèle : c'est un peu fastidieux, mais on y arrive. Nous allons préférer déduire le résultat du très utile « théorème des valeurs intermédiaires » (6.8), qui montrera tout son intérêt.

Terminons avec les réels en montrant la très utile « inégalité triangulaire ». On définit, pour  $x \in \mathbb{R}$ , sa *valeur absolue*  $|x|$  par  $|x| = x$  si  $x \geq 0$  et  $|x| = -x$  sinon. Autrement dit,  $|x|$  est le plus grand des deux nombres  $x$  et  $-x$  (ou encore,  $|x| = \sqrt{x^2}$  comme vous pouvez maintenant le montrer).

LEMME 2.7 (INÉGALITÉ TRIANGULAIRE) – Si  $a$  et  $b$  sont des réels, on a

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

*Démonstration.* Comme  $a \leq |a|$  et pareil pour  $b$ , en additionnant on trouve  $a + b \leq |a| + |b|$ . De même  $-a \leq |a|$  et pareil pour  $b$ , d'où  $-(a + b) \leq |a| + |b|$ . Comme  $|a + b|$  est soit  $a + b$  soit  $-(a + b)$ , l'inégalité est assurée dans tous les cas.  $\square$

COROLLAIRE 2.8 (DEUXIÈME INÉGALITÉ TRIANGULAIRE) – Si  $a$  et  $b$  sont des réels, on a

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

*Démonstration.* En appliquant l'inégalité triangulaire classique à  $a$  et  $b - a$ , on obtient

$$|b| = |a + (b - a)| \leq |a| + |b - a|,$$

d'où  $|b| - |a| \leq |b - a|$ . En inversant les rôles de  $a$  et  $b$ , on obtient  $|a| - |b| \leq |a - b|$ . Ceci donne bien le résultat puisque  $|b - a| = |a - b|$ , et  $||a| - |b|| = \pm(|a| - |b|)$ .  $\square$

## Les nombres complexes

Nous n'avons pas encore toutes les racines carrées que l'on pourrait souhaiter : il manque encore les racines des nombres négatifs. En effet si  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $x^2 \geq 0$ , et donc par exemple il n'y a pas de nombre réel dont le carré serait  $-1$ . Il nous faut donc un système de nombres encore plus étendu.

Cette fois-ci, les choses sont beaucoup plus simples. Nous allons voir qu'il suffit de « rajouter » un nombre  $i$  tel que  $i^2 = -1$ , et toutes les racines carrées imaginables sont obtenues – et même bien plus.

Comment donc « rajouter » ce  $i$  ? Si notre nouveau système de nombres contient  $\mathbb{R}$  et un tel nombre  $i$ , alors il doit contenir des nombres de la forme  $x+iy$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$ . De plus si les règles usuelles de calcul s'appliquent (ce que l'on souhaite), on doit avoir

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y'),$$

ainsi que

$$(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Ceci motive la définition suivante.

**DÉFINITION 2.9** – Sur le produit cartésien  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , on définit une addition par

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

et une multiplication par

$$(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y).$$

Muni de ces deux opérations, l'ensemble  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  est noté  $\mathbb{C}$ , et appelé ensemble des nombres complexes. ■

Voyons pourquoi cette définition est la bonne. Si  $x, x'$  sont réels, on a

$$(x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0) \quad \text{et} \quad (x, 0)(x', 0) = (xx', 0).$$

Donc l'ensemble des nombres complexes de la forme  $(x, 0)$  se comporte exactement comme l'ensemble  $\mathbb{R}$ . On peut identifier

ces deux ensembles sans risque de confusion, et lorsque  $x \in \mathbb{R}$  on écrira également  $x$  pour le nombre complexe  $(x, 0)$ . (Le lecteur qui a pris connaissance de la définition 1.13 parlera plutôt d'une bijection  $x \mapsto (x, 0)$ , qui se trouve être compatible avec les opérations arithmétiques.)

Ensuite, posons  $i = (0, 1)$ . On a bien

$$\begin{aligned} i^2 &= (0, 1)(0, 1) \\ &= (-1, 0) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Enfin, pour tout réel  $y$ , on a  $iy = (0, 1)(y, 0) = (0, y)$ . Finalement tout nombre complexe  $(x, y)$  peut s'écrire  $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$ .

On vient de montrer que  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , que  $\mathbb{C}$  contient une racine de  $-1$ , et visiblement  $\mathbb{C}$  ne pouvait pas être plus petit. Tout se passe décidément bien, puisqu'on a le résultat suivant :

**PROPOSITION 2.10** – *L'ensemble  $\mathbb{C}$  satisfait les neuf propriétés (1) (a-b-c-d-ef-g-h-i) du Théorème 2.5. En d'autres termes, les règles de calcul usuelles s'appliquent.*

*Démonstration.* Ce sont des vérifications évidentes, sauf la (1)(i). Étant donné  $z = x + iy$  un nombre complexe non-nul, il faut trouver un nombre complexe  $w$  tel que  $zw = 1$ . Un tel nombre, s'il existe, serait évidemment unique, et ce serait  $z^{-1}$ .

On appelle *conjugué* de  $z$  le nombre  $\bar{z} = x - iy$ . On a  $z\bar{z} = x^2 + y^2$ ; ce dernier nombre est un réel positif, on peut noter  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , que l'on appelle le *module* de  $z$ . Notons que lorsque  $z \neq 0$ , on a  $|z| > 0$ ; en particulier  $\frac{1}{|z|}$  existe.

Soit alors

$$w = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

C'est bien un nombre complexe, et on a  $zw = \frac{z\bar{z}}{z\bar{z}} = 1$ . Donc  $w = z^{-1}$ . □

*Remarque 2.11.* L'opération de conjugaison que nous venons d'utiliser possède de bonnes propriétés : en effet  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

et  $\overline{z\overline{w}} = \overline{z}\overline{\overline{w}}$  pour tout  $z, w \in \mathbb{C}$ , comme on le vérifie facilement. Par suite on a

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2.$$

En prenant les racines carrées de ces nombres réels, on a également  $|zw| = |z||w|$ .

Nous n'aurons plus besoin de chercher de système de nombres plus grand pour obtenir des racines carrées. En effet :

**PROPOSITION 2.12** – *Tout nombre complexe  $w \in \mathbb{C}$  non-nul possède exactement deux racines carrées, qui sont opposées.*

« Opposées » signifie que l'on a deux racines  $z$  et  $-z$ , et aucune autre.

*Démonstration.* Il est très facile de voir que si  $w$  possède une racine  $z_0$ , alors il en possède exactement deux : en effet

$$\begin{aligned} z^2 = w &\Leftrightarrow z^2 - z_0^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (z - z_0)(z + z_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = z_0 \text{ ou } z = -z_0. \end{aligned}$$

Pour l'existence, écrivons  $w = a + ib$ , et cherchons un nombre  $z = x + iy$  tel que  $z^2 = w$ . Ceci revient à résoudre

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2). \end{cases}$$

Il est astucieux ici de regarder les modules : on doit avoir  $|z|^2 = |z^2| = |w|$ , et donc

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3).$$

En faisant (1) + (3) on tire

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Le membre de droite est un réel  $\geq 0$ , donc cette dernière équation a bien des solutions, ce qui donne deux choix opposés pour  $x$ . De même en faisant (3) - (1) on obtient

$$y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Là encore on a deux possibilités pour  $y$ .

Quels que soient les choix, l'équation (1) est satisfaite ; quant à l'équation (2), on est seulement assuré d'avoir  $4x^2y^2 = b^2$  et donc  $2xy = \pm b$ . Il suffit alors d'ajuster le signe de  $x$  ou de  $y$  pour satisfaire (2).  $\square$

EXEMPLE 2.13 – Soit  $w = 1 - 2i$ , et cherchons  $z = x + iy$  tel que  $z^2 = w$ . Comme dans la démonstration, on constate que l'on doit avoir

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 1 \\ 2xy &= -2 \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{5}. \end{cases}$$

Toujours en suivant le modèle de la démonstration, on en déduit

$$x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

L'équation  $2xy = -2$  nous dit que  $x$  et  $y$  doivent être de signes opposés. On peut donc prendre

$$x = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \quad \text{et} \quad y = -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Les deux solutions sont alors  $x + iy$  et  $-x - iy$ .

On sait même résoudre dans  $\mathbb{C}$  des équations un peu plus compliquées :

PROPOSITION 2.14 – Soient  $a, b$  et  $c$  trois nombres complexes avec  $a \neq 0$ , soit  $\Delta = b^2 - 4ac$ , et enfin soit  $\delta \in \mathbb{C}$  tel que  $\delta^2 = \Delta$ .

Alors l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

possède exactement deux solutions lorsque  $\Delta \neq 0$ , données par :

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a}.$$

Dans le cas où  $\Delta = 0$ , ces deux solutions se confondent et il n'y en a pas d'autres.

*Démonstration.* On écrit simplement

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow 4a^2z^2 + 4abz + 4ac = 0 \\ &\Leftrightarrow (2az + b)^2 + 4ac - b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2az + b)^2 = \Delta, \end{aligned}$$

et donc  $2az + b$  doit être  $\pm\delta$ . □

À ce stade, vos souvenirs de Terminale vous poussent sans doute à attendre une description de la « forme polaire », la fameuse écriture  $z = \rho e^{i\theta}$ . En réalité, pour expliquer rigoureusement ce qu'il se passe, il va falloir patienter : il nous faut d'abord voir une quantité d'autres résultats. En contrepartie, quand nous arriverons enfin à écriture, nous aurons des vraies *définitions* du cosinus et du sinus, entre autres choses.

Vous pouvez toutefois aller voir tout de suite le passage intitulé « Forme polaire et racines  $n$ -ièmes », dans le chapitre « L'exponentielle » (page 185). Vous pourrez ainsi vous rappeler vos notations de Terminale, qui vous seront peut-être nécessaires très vite en Physique.

## – Deuxième lecture –

### Calculs sur machine et corps

Les systèmes de nombres  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  semblent répondre à tous nos besoins en théorie. En pratique par contre, les choses ne sont pas aussi simples. Dès que l'on commence à faire des calculs un peu longs, le besoin de confier la tâche à un ordinateur se fait sentir. Or, les nombres réels sont très abstraits, nous l'avons dit ; tout ce qu'une machine va savoir faire, c'est utiliser des approximations, comme par exemple

$$x = 1.414213 = \frac{1414213}{1000000}$$

pour approcher  $\sqrt{2}$ . En fait les machines ne connaissent que  $\mathbb{Q}$  (et encore, avec des limitations sur la taille des nombres entiers employés en fonction de la mémoire, mais on peut laisser

ce problème de côté). Ces approximations sont une source d'erreur importante. Ainsi si l'on calcule

$$x^{32} = 65535,1660562286\dots$$

on est bien loin de  $\sqrt{2}^{32} = 2^{16} = 65536$ . Même en sachant que  $x^{32}$  est censé approcher un nombre entier, arrondir à l'entier le plus proche ne donne pas la bonne réponse ! Aussi, notons que 7 chiffres de  $x$  sont corrects, alors que seulement 4 chiffres de  $x^{32}$  sont corrects.

Cependant, admettons que l'on entreprenne une série de calculs, dans lesquels on est certains de n'utiliser que des nombres rationnels et  $\sqrt{2}$ , mais rien d'autre. On peut tout simplement apprendre à l'ordinateur à manipuler les nombres de la forme  $a + b\sqrt{2}$  avec  $a, b \in \mathbb{Q}$ . En effet il suffit de stipuler les règles suivantes :

$$(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{2},$$

et

$$(a + b\sqrt{2})(a' + b'\sqrt{2}) = (aa' + 2bb') + (ab' + a'b)\sqrt{2}.$$

On conçoit bien comment un ordinateur peut considérer ces nombres comme des paires  $(a, b)$  de rationnels et opérer les additions et multiplications directement sur ces paires (un peu comme dans notre définition de  $\mathbb{C}$  avec des paires de réels). Voilà un nouveau système de nombres qui apparaît naturellement, et sur le même modèle on en entrevoit une infinité. Il est temps de leur donner des noms précis.

DÉFINITION 2.15 – On dit que l'ensemble  $\mathbb{K}$  est un *anneau* lorsqu'il est muni d'une addition

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

et d'une multiplication

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y \end{aligned}$$

« Anneau » est une mauvaise traduction de l'Allemand *Ringe*, qui signifie « cercle », dans le sens de « communauté ».

ainsi que de deux éléments notés 0 et 1, tels que les propriétés suivantes sont satisfaites :

- |   |                           |
|---|---------------------------|
| (a) $x + y = y + x$ ,                                 | (e) $x(y + z) = xy + xz$  |
| (b) $0 + x = x$ ,                                     | et $(x + y)z = xz + yz$ , |
| (c) $(x + y) + z = x + (y + z)$ ,                     | (f) $1x = x1 = x$ ,       |
| (d) $\forall x \exists (-x)$ tel que $x + (-x) = 0$ , | (g) $(xy)z = x(yz)$ .     |

Lorsque de plus on a

$$(h) \quad xy = yx,$$

on dit que  $\mathbb{K}$  est un *anneau commutatif*.

Finalement, si en plus des propriétés (a-b-c-d-e-f-g-h) on a également

$$(i) \quad \forall x \neq 0 \exists x^{-1} \text{ tel que } xx^{-1} = 1,$$

on dit que  $\mathbb{K}$  est un *corps*.

En d'autres termes, dans un corps les règles usuelles d'arithmétique doivent s'appliquer. ■

*L'expression « corps » à l'origine était comprise dans le sens d'un corps de métier, ou d'un corps d'armée.*

EXEMPLE 2.16 – Les ensembles  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ , avec les opérations usuelles, sont des corps.

EXEMPLE 2.17 – Soit  $\mathbb{K} = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  avec les opérations définies ci-dessus. On va montrer que  $\mathbb{K}$  est un corps. En fait les opérations sont « héritées » de celles de  $\mathbb{R}$  (notez que l'on a  $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ ), et par conséquent les propriétés a-b-c-d-e-f-g-h sont automatiquement satisfaites. Mais il en manque une !

En effet, il n'est pas évident que si  $x = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{K}$ , alors  $x^{-1} \in \mathbb{K}$  lorsque  $x \neq 0$  (on est simplement certain que  $x^{-1}$  existe dans  $\mathbb{R}$ ). Cependant un petit calcul nous rassure :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} \\ &= \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{b}{a^2 - 2b^2} \sqrt{2} \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Un avertissement. Nous avons multiplié numérateur et dénominateur par  $a - b\sqrt{2}$ , et ceci n'a un sens que si  $a - b\sqrt{2} \neq 0$ . Or



dans le cas contraire, on aurait  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  avec  $a$  et  $b$  rationnels, ce qui est impossible d'après la proposition 2.1.

Ce corps est noté généralement  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ .

EXEMPLE 2.18 – L'ensemble  $\mathbb{Z}$  est un anneau commutatif, mais ce n'est pas un corps. En effet la propriété (i) de l'inverse n'est pas satisfaite, par exemple  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ .

Il va falloir attendre le chapitre 5 pour avoir un exemple d'anneau non-commutatif.

### Arithmétique de l'horloge

Nous allons donner d'autres exemples de corps, qui ne possèdent qu'un nombre fini d'éléments. Ils sont utilisés extrêmement souvent en théorie des nombres, en informatique, en cryptographie, etc.

L'idée de départ est simple. Lorsqu'il est 23h et qu'on attend un événement qui doit se dérouler 4h plus tard, on calcule rapidement qu'il aura lieu à 3h du matin. S'il est 19h et que l'on a 7h à attendre, on sait bien que cela va nous amener à 2h du matin. Le raisonnement que l'on fait sans y penser consiste à additionner les deux nombres (on obtient 27 dans le premier cas, et 26 dans le deuxième), puis à retrancher 24 puisque les journées reprennent à 0 à ce moment-là.

On dit que l'on calcule *modulo* 24. Vous savez aussi spontanément calculer modulo 12 : il suffit de ne pas différencier le matin et l'après-midi, comme lorsqu'on vous demande d'attendre pendant 5h à partir de 11h et que vous savez presque immédiatement que vous en avez jusqu'à 4h (de l'après-midi). Là encore on fait  $11 + 5 = 16$  puis  $16 - 12 = 4$  puisque l'on veut un résultat entre 0 et 12.

On va définir maintenant des opérations modulo  $N$ , pour tout entier  $N \geq 2$ , sur le même modèle. Rappelons avant de commencer ce qu'est une *division euclidienne* : étant donnés deux nombres entiers  $a$  et  $b$ , vous savez que l'on peut trouver deux nombres entiers  $q$  (le quotient) et  $r$  (le reste), uniques, tels que

$$a = bq + r,$$

et  $0 \leq r < b$ . Par exemple, en faisant la division de 16 par 12 on écrit  $16 = 12 \times 1 + 4$  donc  $q = 1$  et  $r = 4$ .

DÉFINITION 2.19 – Sur l'ensemble  $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$  on définit une addition par

$$x \oplus y = \text{le reste dans la division euclidienne de } x + y \text{ par } N,$$

et une multiplication par

$$x \otimes y = \text{le reste dans la division euclidienne de } xy \text{ par } N.$$

On écrit  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  pour désigner l'ensemble  $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$  muni de ces opérations. ■

EXEMPLE 2.20 – Prenons  $N = 24$ . Si l'on voit 23 et 4 comme des éléments de  $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ , on peut calculer  $23 \oplus 4$ . Comme

$$23 + 4 = 27 = 24 \times 1 + 3,$$

on a  $23 \oplus 4 = 3$ . De même :

$$23 \times 4 = 92 = 24 \times 3 + 20,$$

donc  $23 \otimes 4 = 20$ .

EXEMPLE 2.21 – Prenons  $N = 2$  ; on a maintenant  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ . Le seul calcul un peu étonnant est  $1 \oplus 1 = 0$  : en effet

$$1 + 1 = 2 = 2 \times 1 + 0.$$

Sinon on a sans surprise  $0 \oplus 0 = 0$ , et  $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$ . La multiplication ne vous étonnera pas non plus. Écrivons les résultats complets sous forme de tableaux :

$$\begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c|cc} \otimes & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Peut-on appliquer les règles de calcul usuelles avec  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ? Pour vérifier ceci, définissons la fonction « reste » :

$$\begin{aligned} R : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ x &\longmapsto R(x) = \text{le reste dans la division de } x \text{ par } N. \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.22 – On a

$$R(x + y) = R(x) \oplus R(y) \quad \text{et} \quad R(xy) = R(x) \otimes R(y).$$

*Démonstration.* Écrivons les divisions euclidiennes  $x = Nq_1 + R(x)$  et  $y = Nq_2 + R(y)$ . En additionnant on trouve

$$x + y = N(q_1 + q_2) + (R(x) + R(y)).$$

Il se peut que  $R(x) + R(y)$  soit  $\geq N$ ; écrivons donc une nouvelle division

$$R(x) + R(y) = Nq_3 + r.$$

Ici par définition le reste  $r = R(x) \oplus R(y)$ . En regroupant :

$$x + y = N(q_1 + q_2 + q_3) + r,$$

et  $0 \leq r < N$ , donc  $r$  est bien le reste dans la division euclidienne de  $x + y$  par  $N$ . C'est-à-dire que  $r = R(x + y) = R(x) \oplus R(y)$ .

On procède de même pour la multiplication. □

COROLLAIRE 2.23 – Les propriétés de calcul (a-b-c-d-e-f-g-h) sont valables dans  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , pour l'addition  $\oplus$  et la multiplication  $\otimes$ .

(En d'autres termes,  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  est un anneau commutatif.)

*Démonstration.* Soit  $x, y$  et  $z$  des entiers. Puisque  $x(yz) = (xy)z$ , en appliquant la fonction  $R$  on a  $R(x(yz)) = R((xy)z)$ , ce qui donne en utilisant la proposition

$$R(x) \otimes R(yz) = R(xy) \otimes R(z),$$

puis

$$R(x) \otimes (R(y) \otimes R(z)) = (R(x) \otimes R(y)) \otimes R(z).$$

Par suite, la multiplication  $\otimes$  est associative (propriété (g)). On fait pareil pour les autres propriétés. □

L'ensemble  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  est-il un corps? En d'autres termes, que peut-on dire de la règle (i) de l'inverse? Voyons des exemples.

EXEMPLE 2.24 – Pour  $N = 2$ , le seul élément non-nul de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est  $x = 1$ . On a  $x \otimes x = 1$ , donc  $x^{-1}$  existe et on a même  $x^{-1} = x$ . Ainsi  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est un corps.

EXEMPLE 2.25 – Prenons  $N = 24$ . Comme

$$3 \times 8 = 24 = 24 \times 1 + 0,$$

on a  $3 \otimes 8 = 0$ . On en déduit que l'inverse de 3 n'existe pas : en effet si l'on avait un élément  $3^{-1}$  tel que  $3^{-1} \otimes 3 = 1$ , on aurait

$$3^{-1} \otimes (3 \otimes 8) = (3^{-1} \otimes 3) \otimes 8 = 1 \otimes 8 = 8 = 0.$$

Or  $8 \neq 0$ . Donc  $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$  n'est pas un corps.

Dans le chapitre suivant nous allons déterminer les valeurs de  $N$  telles que  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  est un corps. Vous pouvez essayer de deviner la réponse.

Nous allons conclure ce chapitre par une simplification des notations. Il est clair qu'écrire  $x \oplus y$  et  $x \otimes y$  va devenir fatigant très vite, donc on va noter  $x + y$  et  $xy$ . Ceci introduit quelques ambiguïtés (penser au fait que  $8 + 4 = 0$  dans  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  ...), mais une autre convention va compenser. On va en effet utiliser la notation  $\bar{x} = R(x)$ . Il ne faut pas confondre avec la conjugaison complexe, mais puisque la proposition 2.22 nous dit que

$$\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y} \quad \text{et} \quad \overline{xy} = \bar{x}\bar{y},$$

la notation se comporte comme prévu. On va alors s'astreindre à mettre la barre systématiquement sur les nombres, et donc à écrire

$$\bar{8} + \bar{4} = \bar{0},$$

dans  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ . Et ce, même si  $\bar{8} = 8$ ... C'est la présence des barres qui, par convention, signifie que les calculs sont faits avec un modulo. D'ailleurs on devrait penser à  $\bar{8}$  et à 8 comme à des objets totalement différents, l'un dans  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ , l'autre dans  $\mathbb{Z}$ .

# Chapitre 3

## Polynômes

Dans ce chapitre, la lettre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

– Première lecture –

### Définitions & Notations

DÉFINITION 3.1 – Donnons-nous un symbole  $X$ . Un *polynôme en  $X$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$*  est une expression formelle

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

avec  $a_n \neq 0$ . L'entier  $n$  est appelé le degré du polynôme.

L'ensemble de ces polynômes est noté  $\mathbb{K}[X]$ , et le sous-ensemble des polynômes de degré  $\leq n$  est noté  $\mathbb{K}_n[X]$ . ■

Les termes « symbole » et « expression formelle » sont à comprendre de manière intuitive : disons qu'un polynôme est une écriture. Si vous trouvez ça insatisfaisant, essayez l'encadré « Définition complète des polynômes ».

Par exemple,  $P = 3X^2 - 5X + 1$  est un polynôme de  $\mathbb{Q}[X]$ , et  $Q = X^3 + iX^2 - 7 \in \mathbb{C}[X]$ .

Lorsque l'on dispose d'un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  et d'un élément  $x \in \mathbb{K}$ , on peut donner un sens à  $P(x)$ . Sans surprise, si

$$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n,$$

*Le lecteur ayant assimilé la définition 2.15 peut prendre pour  $\mathbb{K}$  n'importe quel corps.*

alors

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

On dit que l'on évalue  $P$  en  $x$ . Si  $P = X^2 + 1$ , alors  $P(-2) = (-2)^2 +$

### Définition complète des polynômes

En deux mots, à un ordinateur nous dirions qu'un polynôme est défini par ses coefficients, et puis nous indiquerions les règles de calcul sur ces coefficients. Voici les détails. Considérons les fonctions  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ . Une telle fonction  $a$  sera notée

$$a = (a_0, a_1, a_2, \dots),$$

avec  $a_n = a(n)$ .

On définit une addition  $\oplus$  le plus simplement du monde : si  $b = (b_0, b_1, \dots)$ , alors nous définissons

$$a \oplus b = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots).$$

Définissons maintenant une multiplication  $\otimes$ , qui paraît bien plus tordue :  $a \otimes b = (c_0, c_1, c_2, \dots)$ , où

$$c_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}.$$

(On appelle ceci la « formule de Cartan ».)

On peut vérifier directement que l'ensemble des fonctions  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ , avec ces opérations, est un anneau commutatif (cf définition 2.15).

Première remarque : en identifiant  $x \in \mathbb{K}$  avec la suite  $(x, 0, 0, 0, \dots)$ , on peut considérer que  $\mathbb{K}$  est contenu dans cet ensemble de suites.

Soit maintenant  $X = (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ , c'est-à-dire  $X(n) = 0$  sauf si  $n = 1$ , et  $X(1) = 1$ . Essayons quelques calculs :

$$X^2 = X \otimes X = (0, 0, 1, 0, 0, \dots),$$

$$X^3 = X \otimes X^2 = (0, 0, 0, 1, 0, \dots),$$

et de même on constate que  $X^n$  est représenté par une suite de 0, sauf à la position  $n$  où l'on trouve un 1. Finalement, soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des éléments de  $\mathbb{K}$ . Si l'on calcule  $a_0 \oplus a_1 \otimes X \oplus \dots \oplus a_n \otimes X^n$ , on trouve

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots).$$

On peut finalement définir  $\mathbb{K}[X]$  comme étant l'ensemble des suites  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$  telles que  $a(k) = 0$  pour tous les  $k$  supérieurs à un certain  $n \in \mathbb{N}$  appelé le degré. Les opérations sont celles ci-dessus, et on va écrire  $P+Q$  et  $PQ$  au lieu de  $P \oplus Q$  et  $P \otimes Q$ , pour simplifier. On vérifie alors que tout polynôme  $P$  s'écrit de manière unique

$$P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n.$$

Par analogie, une suite *quelconque*  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$  peut être notée

$$\sum_{n \geq 0} a_n X^n,$$

et appelée une *série formelle*, lorsqu'on veut faire référence aux opérations d'addition et de multiplication que l'on vient de définir. Attention cependant : cette notation ne doit pas donner l'illusion d'une somme « infinie » ou d'un passage à la limite (d'ailleurs nous n'avons pas encore étudié les limites!).

On note  $\mathbb{K}[[X]]$  l'ensemble des séries formelles.

$1 = 5$ , par exemple. Cette opération est tellement commune que l'on note souvent  $P(X)$  (au lieu de  $P$  tout simplement) pour un élément de  $\mathbb{K}[X]$ , afin de rappeler cette possibilité d'évaluer.

Un polynôme donne naissance à plusieurs fonctions. Prenons  $P = 7X^5 - 12X^3$ ; on peut considérer la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto P(x) = 7x^5 - 12x^3. \end{aligned}$$

Mais on peut aussi regarder

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto P(z) = 7z^5 - 12z^3, \end{aligned}$$

et il y aurait aussi la fonction  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  qui à  $x$  associe  $P(x)$ , etc etc.

### La division Euclidienne

On peut additionner et multiplier les polynômes de façon naturelle. Il ne vous aura pas échappé qu'on ne peut pas toujours diviser : par exemple si  $P = X^2 - 1$  et  $Q = X + 2$ , il n'y a pas de polynôme  $R$  qui mériterait de s'appeler  $\frac{P}{Q}$ , c'est-à-dire qu'il n'y a pas de polynôme  $R$  tel que  $QR = P$ . Pour montrer ceci, on note que si  $R$  existait, il serait de degré 1, disons  $R = aX + b$ . Or l'équation  $QR = P$  donne en développant :

$$aX^2 + (2a + b)X + 2b = X^2 - 1,$$

et en comparant les coefficients, on obtient  $a = 1$ ,  $b = -\frac{1}{2}$ , et  $2a + b = \frac{3}{2} = 0$ , contradiction.

Parfois, on peut avoir de la chance : pour le même  $P$ , et pour  $Q = X + 1$ , on a  $P = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1) = (X + 1)Q$  donc  $\frac{P}{Q} = X - 1$ .

En général on dit que  $Q$  *divise*  $P$  lorsqu'il existe un polynôme  $R$  tel que  $P = QR$ . Dans ce cas, et dans ce cas seulement, on pourra noter  $R = \frac{P}{Q}$ . On utilise la notation  $Q \mid P$  pour indiquer que  $Q$  divise  $P$ . Il faut se méfier de cette notation (standard malheureusement) qui apparaît symétrique alors que les rôles de  $P$  et  $Q$  sont très différents.

La situation des polynômes est très similaire à celle des nombres entiers : on peut parfois diviser un entier par un autre, parfois « ça ne tombe pas juste ». Dans tout ce chapitre on va insister sur les similarités, et nous commençons par les divisions Euclidiennes.

Rappelons que, si  $a$  et  $b$  sont des nombres entiers, il existe deux nombres entiers  $q$  (le quotient) et  $r$  (le reste), uniques, tels que

$$a = bq + r,$$

avec  $0 \leq r < b$ .

PROPOSITION 3.2 – Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$ . Alors il existe deux polynômes  $Q$  (le quotient) et  $R$  (le reste), uniques, tels que

$$A = BQ + R,$$

avec  $\deg R < \deg B$ .

*Démonstration.* Montrons l'unicité. Si  $A = BQ + R$  et  $A = BQ' + R'$ , en faisant la différence on obtient

$$B(Q - Q') = R' - R.$$

Le degré de  $R' - R$  est  $< \deg B$ . On en déduit que  $Q - Q' = 0$ , sinon le degré de  $B(Q - Q')$  serait  $\geq \deg B$ . Donc  $Q = Q'$  et par suite  $R = R'$ .

Pour l'existence de  $Q$  et  $R$ , nous allons donner directement une méthode de calcul.  $\square$

EXEMPLE 3.3 – Prenons  $A = 4X^3 - 2X^2 + 1$  et  $B = X^2 + X + 1$ . On commence par présenter la division comme pour les nombres entiers :

$$\begin{array}{r|l} 4X^3 & -2X^2 & +1 & | & X^2 + X + 1 \\ \hline & & & & \end{array}$$



Puis on évalue « en  $4X^3$ , combien de fois  $X^2$ ? » Réponse,  $4X$ . On calcule alors  $4X \cdot B = 4X^3 + 4X^2 + 4X$ , et l'on soustrait ce résultat au polynôme A. On présente ces calculs de la manière suivante :

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} -4X^3 \quad -2X^2 \quad \quad \quad +1 \\ 4X^3 \quad +4X^2 \quad +4X \\ \hline \quad \quad -6X^2 \quad -4X \quad +1 \end{array} & \begin{array}{l} X^2 + X + 1 \\ 4X \end{array} \end{array}$$

On recommence avec « en  $-6X^2$ , combien de fois  $X^2$ ? », réponse  $-6$  :

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} -4X^3 \quad -2X^2 \quad \quad \quad +1 \\ 4X^3 \quad +4X^2 \quad +4X \\ \hline \quad \quad -6X^2 \quad -4X \quad +1 \\ - \quad -6X^2 \quad -6X \quad -6 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad 2X \quad +7 \end{array} & \begin{array}{l} X^2 + X + 1 \\ 4X - 6 \end{array} \end{array}$$

C'est terminé : lorsque l'on obtient à gauche un polynôme de degré inférieur à celui de B, c'est le reste, ici  $R = 2X + 7$ . Le quotient est  $Q = 4X - 6$ . On peut vérifier directement que  $A = BQ + R$ .

EXEMPLE 3.4 – Les divisions Euclidiennes vont être d'une grande utilité par la suite, mais pour l'instant vous vous demandez peut-être quel intérêt on pourrait bien avoir à diviser des polynômes. Voici alors une petite astuce de calcul qui les fait intervenir. Soit

$$j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

C'est une solution de  $X^2 + X + 1 = 0$ , c'est-à-dire que  $j^2 + j + 1 = 0$  (proposition 2.14). Combien vaut  $4j^3 - 2j^2 + 1$ ? Si l'on commence par développer  $(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^3$  de manière naïve, on va perdre pas mal de temps. Alors que nous venons de démontrer que

$$4X^3 - 2X^2 + 1 = (4X - 6)(X^2 + X + 1) + 2X + 7,$$

ce qui donne en évaluant en  $X = j$  la réponse  $4j^3 - 2j^2 + 1 = 2j + 7 = 6 + i\sqrt{3}$ .

Notez bien que la division Euclidienne ne fait intervenir que des nombres entiers (et aucune  $\sqrt{3}$ ), et qu'elle s'effectue très vite, avec l'habitude. Vous aviez peut-être réussi à calculer  $4j^3 - 2j^2 + 1$  rapidement en écrivant  $j^2 = -1 - j$ , donc  $j^3 = -j - j^2 = 1$ . Bravo, mais la méthode de la division Euclidienne ne fait rien d'autre que d'organiser ces calculs. Avec des nombres encore plus compliqués que ce  $j$ , il devient très difficile de trouver des astuces au coup d'œil.

## Racines

**DÉFINITION 3.5** – Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme, et soit  $r \in \mathbb{K}$ . On dit que  $r$  est une *racine* de  $P$  lorsque  $P(r) = 0$ . (Parfois on dit que  $r$  est une solution de  $P$ , et parfois on dit (assez curieusement, d'ailleurs) que  $r$  est un zéro de  $P$ .) ■

**PROPOSITION 3.6** – Le nombre  $r \in \mathbb{K}$  est une racine de  $P$  si et seulement si le polynôme  $X - r$  divise  $P$  dans  $\mathbb{K}[X]$ .

*Démonstration.* On écrit la division Euclidienne de  $P$  par  $X - r$  :

$$P = (X - r)Q + R.$$

Ici le degré de  $R$  doit être  $< 1$ , donc  $R$  est de degré 0 (on dit que c'est une « constante »). En faisant  $X = r$ , ceci devient  $P(r) = R$ , donc finalement

$$P = (X - r)Q + P(r).$$

Il est alors clair que  $P(r) = 0 \Leftrightarrow (X - r) \mid P$ . □

La démonstration indique clairement que pour trouver explicitement le polynôme  $\frac{P}{X-r}$ , le plus simple est d'effectuer une division Euclidienne.

**EXEMPLE 3.7** – Soit  $P = 5X^2 - 15X + 10$ . Ce polynôme a deux racines, à savoir 1 et 2. Il doit donc être divisible par  $X - 1$  en particulier, et en faisant la division Euclidienne on obtient

$$5X^2 - 15X + 10 = (X - 1)(5X - 10) = 5(X - 1)(X - 2),$$

ce qui confirme que  $P$  est également divisible par  $X - 2$ .

D'une manière générale, si  $P$  a une racine  $r_1$  on peut écrire  $P = (X - r_1)Q_1$ , et si  $Q_1$  a une racine  $r_2$  on peut écrire  $Q_1 = (X - r_2)Q_2$  donc  $P = (X - r_1)(X - r_2)Q_2$ ; si  $Q_2$  a une racine  $r_3$  on aboutit à  $P = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3)Q_3 \dots$ . Peut-on continuer comme ça indéfiniment? En d'autres termes, est-ce que chaque polynôme de  $\mathbb{K}[X]$  va toujours posséder au moins une racine dans  $\mathbb{K}$ ?

La réponse est non, tout d'abord parce que les polynômes constants, de la forme  $P(X) = c$ , avec  $c \in \mathbb{K}$ , n'ont aucune racine si  $c \neq 0$ . Si maintenant  $\deg P = n \geq 1$ , on observe que les degrés successifs de  $Q_1, Q_2, \dots$ , ne font que diminuer, donc si l'on peut trouver  $n$  racines successivement comme ci-dessus le polynôme  $Q_n$  sera de degré 0 donc constant et non-nul. On ne peut alors pas continuer avec  $Q_n$ .

Au passage nous avons presque démontré le résultat suivant :

**PROPOSITION 3.8** – *Un polynôme de degré  $n$  ne possède pas plus de  $n$  racines distinctes.*

*Démonstration.* Supposons en effet que l'on ait  $n + 1$  racines distinctes, disons  $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$ . On commence par écrire  $P = (X - r_1)Q_1$  comme ci-dessus. Ensuite, puisque  $P(r_2) = 0$ , on écrit

$$P(r_2) = (r_2 - r_1)Q_1(r_2) = 0,$$

et comme  $r_1 \neq r_2$  par hypothèse, on doit bien avoir  $Q_1(r_2) = 0$ . On peut donc factoriser et obtenir  $Q_1 = (X - r_2)Q_2$ . On recommence avec  $Q_2$ , et ainsi de suite on aboutit à

$$P = (X - r_1)(X - r_2) \cdots (X - r_{n+1})Q_{n+1}.$$

Cette dernière égalité est absurde puisque le membre de droite a un degré  $\geq n + 1$ . □

Mais il n'y a pas que les polynômes constants qui n'ont pas de racines. L'exemple le plus fameux est  $P = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$  et qui ne possède pas de racine dans  $\mathbb{R}$ , puisque le carré d'un réel est toujours positif et ne saurait valoir  $-1$ . Dans le même ordre d'idée, le polynôme  $Q = X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$  n'a pas de racine dans  $\mathbb{Q}$  d'après la proposition 2.1.

Dans un cas comme dans l'autre, on peut considérer ces polynômes comme des éléments de  $\mathbb{C}[X]$ , et ils ont bien sûr des racines dans  $\mathbb{C}$ . Rappelez-vous qu'en parlant de  $\mathbb{C}$  nous avons prédit que nous gagnerions bien plus que des racines carrées supplémentaires en travaillant avec les complexes. Le théorème suivant affirme en effet que toute équation polynomiale  $P(z) = 0$  a une solution dans  $\mathbb{C}$  !

**THÉORÈME 3.9 (THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE)** – *Tout polynôme de degré  $\geq 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$  possède une racine dans  $\mathbb{C}$ .*

On dit que «  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos ». Nous montrerons le théorème fondamental de l'algèbre plus loin, dans un chapitre d'analyse. On peut déjà en tirer des conséquences.

**COROLLAIRE 3.10** – *Tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  de degré  $n$  peut s'écrire de manière unique*

$$P = \lambda(X - r_1)(X - r_2) \cdots (X - r_{n+1}).$$

*Démonstration.* L'existence de cette écriture est claire à ce stade, mais comme nous énonçons l'unicité aussi on va prudemment faire une récurrence. Supposons le résultat vrai pour les polynômes de degré  $n - 1$  (pour  $n = 0$  c'est évident). Soit  $P$  de degré  $n$ .

On peut trouver une racine  $r_1$  pour  $P$  d'après le théorème, donc  $P = (X - r_1)Q$ . Par récurrence on sait que  $Q = \lambda(X - r_2)(X - r_3) \cdots (X - r_n)$ , d'où l'écriture annoncée pour  $P$ .

Vérifions qu'elle est unique. Si

$$P = \mu(X - y_1)(X - y_2) \cdots (X - y_m),$$

on sait déjà que  $m = n = \deg P$  et que  $\mu = \lambda =$  le coefficient de  $X^n$  dans  $P$ . Comme  $P(r_1) = 0$ , on peut écrire

$$\mu(r_1 - y_1)(r_1 - y_2) \cdots (r_1 - y_n) = 0,$$

donc  $r_1 - y_i = 0$  pour un certain indice  $i$ ; quitte à renuméroter, on peut supposer que  $i = 1$ , donc  $y_1 = r_1$ .

Le quotient dans la division de  $P$  par  $(X - r_1)$ , qui est uniquement déterminé, peut donc être calculé de deux façons différentes, ce qui donne l'égalité

$$Q = \lambda(X - y_2)(X - y_3) \cdots (X - y_n).$$

Par récurrence, on sait que cette écriture est unique, c'est-à-dire que (quitte à renuméroter) on a  $x_i = y_i$  pour tous les indices  $i$ .  $\square$

La situation pour les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  est à peine plus compliquée. Faisons une remarque simple :

**LEMME 3.11** – Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , et soit  $r \in \mathbb{C}$  une racine de  $P$ . Alors le nombre conjugué  $\bar{r}$  est également racine de  $P$ .

*Démonstration.* Si  $P(r) = 0$ , on a aussi  $\overline{P(r)} = \bar{0} = 0$ . Mais comme

$$P(r) = a_0 + a_1 r + \cdots + a_n r^n$$

avec  $\bar{a}_i = a_i$  (puisque  $a_i \in \mathbb{R}$ ), on constate que

$$\overline{P(r)} = a_0 + a_1 \bar{r} + \cdots + a_n \bar{r}^n = P(\bar{r}) = 0. \quad \square$$

**PROPOSITION 3.12** – Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ . On peut écrire de manière unique

$$P = \lambda(X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_i) Q_1 Q_2 \cdots Q_j$$

avec  $x_k \in \mathbb{R}$  et  $Q_k$  un polynôme de degré 2 dans  $\mathbb{R}[X]$  sans racine réelle.

*Démonstration.* D'après le corollaire, on peut écrire

$$P = \lambda(X - r_1)(X - r_2) \cdots (X - r_n),$$

avec  $r_k \in \mathbb{C}$ . Si certains de ces nombres sont en fait dans  $\mathbb{R}$ , appelons-les  $x_1, x_2, \dots, x_i$ . Les autres racines  $r_k$  qui ne sont pas réelles sont regroupées en paires : en effet d'après le lemme, si  $r_k$  est une racine de  $P$ , alors  $\bar{r}_k$  aussi (et  $\bar{r}_k \neq r_k$  dans ce cas). Le facteur

$$(X - r_k)(X - \bar{r}_k) = X^2 - 2\Re(r_k)X + |r_k|^2$$

est un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  de degré 2, sans racine réelle. La proposition s'en déduit.

L'unicité est laissé en exercice.  $\square$

## Diviseurs dans $\mathbb{C}[X]$

Que peut-on dire de l'ensemble des diviseurs d'un polynôme  $P$  donné? Tout d'abord, notons que si  $P = QR$ , on peut écrire pour tout scalaire  $\lambda \neq 0$  que  $P = (\lambda Q)(\frac{1}{\lambda}R)$ ; en d'autres termes, si  $Q$  divise  $P$ , alors  $\lambda Q$  divise aussi  $P$ , et en particulier  $P$  a un nombre infini de diviseurs.

Pour éviter cette complication inutile, nous dirons qu'un polynôme  $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$  est *unitaire* si  $a_n = 1$ . Une meilleure question est donc : que peut-on dire de l'ensemble des diviseurs unitaires d'un polynôme donné? Notons que, à regarder les définitions, il n'est pas *a priori* évident de savoir s'il en existe un nombre fini ou non.

Grâce au corollaire 3.10 cependant, on va pouvoir étudier facilement l'ensemble des diviseurs d'un polynôme complexe. Introduisons la notation suivante : pour un nombre complexe  $z$  et un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$ , le nombre  $m_z(P)$  est le plus grand entier tel que  $(X - z)^{m_z(P)}$  divise  $P$ . On va l'appeler la *multiplicité* de  $z$  comme racine de  $P$ . On remarque que  $m_z(P) > 0$  si et seulement si  $z$  est racine de  $P$ , ce qui n'arrive que pour un nombre fini de nombres  $z$ . Le corollaire 3.10 peut s'écrire

$$P = \lambda \prod_{z \in \mathbb{C}} (X - z)^{m_z(P)},$$

sachant que ce produit ne comporte qu'un nombre fini de termes (les autres sont égaux à 1). Le lemme suivant est alors évident.

LEMME 3.13 – *Les multiplicités ont les propriétés suivantes.*

1.  $m_z(P_1P_2) = m_z(P_1) + m_z(P_2)$ .
2.  $Q$  divise  $P$  si et seulement si  $m_z(Q) \leq m_z(P)$  pour tout nombre complexe  $z$ .
3.  $P$  ne possède qu'un nombre fini de diviseurs unitaires.

*Démonstration.* La démonstration (très simple) des points (1) et (2) est laissée en exercice. Pour le (3) notons qu'un polynôme unitaire  $Q$  s'écrit

$$Q = \prod_{z \in \mathbb{C}} (X - z)^{m_z(Q)},$$

et lorsque  $Q$  divise  $P$  le nombre entier  $m_z(Q)$  vérifie  $0 \leq m_z(Q) \leq m_z(P)$  d'après le point (2). Il n'y a qu'un nombre fini de nombres complexes  $z$  pour lesquels  $m_z(P) \neq 0$ , donc au total il n'y a qu'un nombre fini de choix pour  $Q$ .  $\square$

On peut alors poser la définition suivante.

**DÉFINITION 3.14** – Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{C}[X]$ . Le polynôme  $\text{pgcd}(P, Q)$  est par définition

$$\text{pgcd}(P, Q) = \prod_{z \in \mathbb{C}} (X - z)^{\min(m_z(P), m_z(Q))}.$$

■

**LEMME 3.15** – *Le polynôme  $\text{pgcd}(P, Q)$  divise  $P$  et divise  $Q$ . De plus si  $D$  est un polynôme qui divise  $P$  et  $Q$ , alors  $D$  divise  $\text{pgcd}(P, Q)$ . En particulier  $\text{pgcd}(P, Q)$  est l'unique diviseur unitaire de  $P$  et de  $Q$  de degré maximal.*

On comprend donc pourquoi  $\text{pgcd}(P, Q)$  est appelé le plus grand diviseur commun de  $P$  et  $Q$ .

*Démonstration.* D'après le (2) du lemme précédent, il est clair que si  $D \mid P$  et  $D \mid Q$ , alors  $D \mid \text{pgcd}(P, Q)$ , et donc que  $\deg(D) \leq \deg(\text{pgcd}(P, Q))$ .

Vérifions l'unicité. Soit  $D$  un diviseur unitaire de  $P$  et de  $Q$  dont le degré est maximal. On a  $D \mid \text{pgcd}(P, Q)$  donc  $\deg(D) \leq \deg(\text{pgcd}(P, Q))$  d'où par maximalité  $\deg(D) = \deg(\text{pgcd}(P, Q))$ . Par suite  $D = \text{pgcd}(P, Q)$  puisqu'ils sont tous les deux unitaires.  $\square$

Cette approche des pgcds a pas mal de défauts. Tout d'abord, il est difficile de calculer  $\text{pgcd}(P, Q)$  par la définition ci-dessus : il faut d'abord factoriser entièrement  $P$  et  $Q$  ! Ensuite, si  $\mathbb{K}$  n'est pas  $\mathbb{C}$ , on ne sait rien dire. Vous arrivez certainement à traiter le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  à l'aide de la proposition 3.12 (en lieu et place du corollaire 3.10), mais pour  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$  on est dans une impasse.

Dans la suite du chapitre on va indiquer une toute autre méthode, plus générale et entraînant des calculs assez faciles. Par contre les définitions sont moins directes.

### Plus grand diviseur commun

DÉFINITION 3.16 – Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes. L'ensemble des diviseurs communs à  $A$  et à  $B$  est noté  $\text{div}(A, B)$ . ■

Notez que  $\text{div}(A, 0)$  est l'ensemble des diviseurs de  $A$  (tout polynôme  $P$  divise le polynôme nul, puisque  $0 = 0 \times P$ ).

LEMME 3.17 – Soient  $A$  et  $B$  des polynômes (ou des nombres entiers). Écrivons la division euclidienne  $A = BQ + R$ . Alors

$$\text{div}(A, B) = \text{div}(B, R).$$

*Démonstration.* Si  $D$  divise  $A$  et  $B$ , alors il divise  $R = A - BQ$  (en effet si  $A = A'D$  et  $B = B'D$  alors  $R = (A' + B'Q)D$ ). Réciproquement si  $D$  divise  $R$  et  $B$ , alors il divise  $A$ , par le même raisonnement. Donc les diviseurs à considérer pour la paire  $(A, B)$  sont les mêmes que pour la paire  $(B, R)$ . □

Pourquoi est-ce utile ? Tout simplement parce qu'en passant à  $(B, R)$ , les degrés (ou les nombres) sont plus petits. On peut ensuite recommencer avec  $(B, R)$ , et recommencer encore, et on va finir par obtenir une paire de la forme  $(P, 0)$  : en effet tant que le deuxième terme n'est pas nul, on fait une nouvelle division euclidienne, et on obtient un nouveau terme strictement plus petit. En fait on a :

PROPOSITION 3.18 – Soient  $A$  et  $B$  des polynômes.

1. Il existe un unique polynôme unitaire  $P$  tel que

$$\text{div}(A, B) = \text{div}(P, 0).$$

On le note  $\text{pgcd}(A, B)$ .

2. Si  $D$  divise  $A$  et  $B$ , alors  $D$  divise également leur  $\text{pgcd}$ .
3. Le polynôme  $\text{pgcd}(A, B)$  est également caractérisé comme l'unique diviseur unitaire commun à  $A$  et à  $B$  dont le degré est maximal.



4. Si on effectue une division euclidienne  $A = BQ + R$ , alors

$$\text{pgcd}(A, B) = \text{pgcd}(B, R).$$

Cette définition du pgcd est cohérent avec la définition 3.14 lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  (à cause du point (3)).

*Démonstration.* (1) Nous venons d'expliquer comment, en appliquant le lemme précédent suffisamment souvent, on trouve un polynôme  $P$  tel que  $\text{div}(A, B) = \text{div}(P, 0)$ ; on peut supposer  $P$  unitaire. Montrons l'unicité. Si  $\text{div}(P, 0) = \text{div}(P', 0)$ , alors comme  $P \mid P'$  on a aussi  $P' \mid P$ ; et réciproquement comme  $P' \mid P'$  on a  $P' \mid P$ . Finalement  $P$  et  $P'$  se divisent l'un l'autre, et sont unitaires, donc  $P = P'$ . Le polynôme  $P$  est bien unique, et on peut le noter  $\text{pgcd}(A, B)$ .

(2) L'assertion sur  $D$  n'est qu'une traduction de l'égalité entre  $\text{div}(A, B)$  et  $\text{div}(P, 0)$ .

(3) Soit  $D \in \text{div}(A, B)$  de degré maximal. On a  $D \mid \text{pgcd}(A, B)$ , donc  $\text{deg}(D) \leq \text{deg}(\text{pgcd}(P, Q))$  d'où par maximalité  $\text{deg}(D) = \text{deg}(\text{pgcd}(P, Q))$ . Par suite, on a bien  $D = \text{pgcd}(P, Q)$  puisqu'ils sont tous les deux unitaires.

(4) D'après le lemme précédent, on a  $\text{div}(A, B) = \text{div}(B, R)$ , donc c'est évident.  $\square$

Avant de donner des exemples, remarquons que la situation avec les nombres entiers est exactement similaire. En fait on a :

PROPOSITION 3.19 – Soient  $a$  et  $b$  des nombres entiers.

1. Il existe un unique entier positif  $p$  tel que

$$\text{div}(a, b) = \text{div}(p, 0).$$

On le note  $\text{pgcd}(a, b)$ .

2. Si  $d$  divise  $a$  et  $b$ , alors  $d$  divise également leur pgcd.

3. Le nombre  $\text{pgcd}(a, b)$  est également caractérisé comme le plus grand diviseur commun à  $a$  et à  $b$  (!).

4. Si on effectue une division euclidienne  $a = bq + r$ , alors

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r).$$

La démonstration est la même. Voyons des exemples.

EXEMPLE 3.20 – Commençons par des nombres entiers, disons  $a = 77$  et  $b = 91$ . On écrit

$$91 = 77 \times 1 + 14,$$

donc  $\text{pgcd}(91, 77) = \text{pgcd}(77, 14)$ . Puis

$$77 = 14 \times 5 + 7,$$

donc  $\text{pgcd}(77, 14) = \text{pgcd}(14, 7)$ . Finalement

$$14 = 7 \times 2 + 0,$$

donc  $\text{pgcd}(14, 7) = \text{pgcd}(7, 0) = 7$ . Au total  $\text{pgcd}(77, 91) = 7$ .

EXEMPLE 3.21 – Prenons  $A = X^3 + 7X^2 + 2X + 14$  et  $B = X^4 + 4X^2 + 4$ , dans  $\mathbb{R}[X]$ . On calcule

$$B = (X - 7) \cdot A + (51X^2 + 102),$$

donc  $\text{pgcd}(B, A) = \text{pgcd}(A, R)$  avec  $R = 51X^2 + 102$  (on passe les détails du calcul de la division euclidienne). Puis on effectue

$$A = \left(\frac{1}{51}X + \frac{7}{51}\right) \cdot R + 0,$$

donc  $\text{pgcd}(A, R) = \text{pgcd}(R, 0)$ . Attention, comme le  $\text{pgcd}$  est un polynôme unitaire par définition, ici la réponse n'est pas  $R = 51(X^2 + 2)$  mais  $X^2 + 2$  : on divise simplement par le coefficient du terme en  $X^2$ . Finalement  $\text{pgcd}(A, B) = X^2 + 2$ .

### Le théorème de Bézout

C'est le suivant :

THÉORÈME 3.22 – Soient  $a$  et  $b$  deux nombres entiers. Alors il existe deux nombres  $u$  et  $v$  tels que

$$au + bv = \text{pgcd}(a, b).$$

Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$ . Alors il existe deux polynômes  $U, V \in \mathbb{K}[X]$  tels que

$$AU + BV = \text{pgcd}(A, B).$$

*Démonstration.* Dans l'algorithme d'euclide, on passe d'une paire à la suivante en ajoutant des multiples de  $a$  et des multiples de  $b$ .  $\square$

EXEMPLE 3.23 – Revenons à l'exemple 3.20, avec  $a = 77$  et  $b = 91$  ; on a vu que  $d = \text{pgcd}(a, b) = 7$ .

Reprenons les divisions euclidiennes que nous avons faites, en exprimant systématiquement les restes en fonction de  $a$  et  $b$ . Nous sommes partis de

$$91 = 77 \times 1 + 14 \quad \text{donc} \quad 14 = b - a.$$

Puis nous avons effectué

$$77 = 14 \times 5 + 7 \quad \text{donc} \quad 7 = a - 5(b - a) = 6a - 5b.$$

Enfin la dernière division nous a montré que le pgcd était bien  $d = 7$ . On a donc  $d = 6a - 5b$ , ce qui est bien la formule annoncée avec  $u = 6$  et  $v = -5$ .

EXEMPLE 3.24 – Cette fois, reprenons l'exemple 3.21. La première division était

$$B = (X - 7) \cdot A + 51D,$$

avec  $D = \text{pgcd}(A, B) = X^2 + 2$ . On a donc bien

$$D = -\frac{1}{51}(X - 7)A + \frac{1}{51}B,$$

qui est la forme annoncée avec  $U = -\frac{1}{51}(X - 7)$  et  $V = \frac{1}{51}$ .

## Premiers

Un nombre ou un polynôme va être appelé premier lorsqu'il n'a aucun diviseur à part ceux qui sont évidents. Précisons :

DÉFINITION 3.25 – Soit  $p \in \mathbb{Z}$  un nombre  $\neq \pm 1$ . On dit que  $p$  est *premier* lorsque la seule façon d'obtenir une factorisation  $p = ab$  (avec  $a, b \in \mathbb{Z}$ ) est de prendre  $a = \pm 1$  ou  $b = \pm 1$ .

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme de degré  $\geq 1$ . On dit que  $P$  est *premier*, ou plus souvent *irréductible*, lorsque la seule façon d'obtenir une factorisation  $P = AB$  (avec  $A, B \in \mathbb{K}[X]$ ) est de prendre  $A$  constant ou  $B$  constant. ■

EXEMPLE 3.26 – Un nombre  $p$  est donc premier si et seulement si la liste complète de ses diviseurs est  $\{1, -1, p, -p\}$ . Les nombres 17, 71,  $-277$ ,  $-733$  et 953 sont ainsi premiers. On adopte souvent la convention de ne parler que des nombres premiers positifs, de sorte que leur liste commence par 2, 3, 5, 7, 11, 13 ...

EXEMPLE 3.27 – Un polynôme de degré 1 est toujours irréductible (premier). Pour un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  de degré 2, la situation est encore assez simple. Si  $P = AB$  et si ni  $A$ , ni  $B$  n'est constant, alors  $\deg A = \deg B = 1$ . Comme un polynôme de degré 1 possède toujours une racine dans  $\mathbb{K}$ , le polynôme  $P$  en possède aussi une. Mais la réciproque est vraie : si  $P(r) = 0$ , alors en posant  $A = X - r$  on peut écrire  $P = AB$  avec  $B$  de degré 1 (proposition 3.6).

On retiendra qu'un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$  de degré 2 est irréductible si et seulement si il ne possède pas de racine dans  $\mathbb{K}$ . Ça reste vrai pour un polynôme de degré 3 (vérifiez-le).

Par exemple  $P = X^2 + 1$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ . Par contre dans  $\mathbb{C}[X]$  on a  $P = (X - i)(X + i)$ .

Le théorème de Bézout va permettre de démontrer des choses sur les nombres premiers et les polynômes irréductibles qui paraissent intuitives, mais qu'on ne saurait pas prouver autrement. Voici le meilleur exemple.

LEMME 3.28 (LEMME DE GAUSS) – Soit  $P$  un premier. Si  $P \mid AB$ , alors  $P \mid A$  ou  $P \mid B$ .

Ce résultat est valable pour les entiers comme pour les polynômes.

*Démonstration.* Supposons que  $P$  ne divise pas  $A$ , et montrons qu'il divise alors  $B$ . Notons que l'on a  $\text{pgcd}(P, A) = 1$ ,

et donc  $UA + PV = 1$  par Bézout. Par hypothèse on a  $AB = PR$ , donc  $UAB = UPR$ , et comme  $UA = 1 - PV$ , on en tire

$$(UA)B = B - PVB = UPR.$$

Ceci montre que  $B = P(VB + UR)$  est bien divisible par  $P$ .  $\square$

Nous pouvons finalement apporter une réponse à la question soulevée à la fin du chapitre 2 (cf corollaire 2.23) : quand est-ce que  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  est un corps ?

**PROPOSITION 3.29** – *Soit  $p$  un entier  $\geq 2$ . Alors  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est un corps si et seulement si  $p$  est un nombre premier.*

*Démonstration.* Si  $p$  n'est pas premier, on a  $p = ab$  avec  $a$  et  $b$  des nombres qui ne sont pas divisibles par  $p$ . En réduisant modulo  $p$ , on obtient

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{p} = \bar{0},$$

avec  $\bar{a} \neq \bar{0}$  et  $\bar{b} \neq \bar{0}$ . Il est donc impossible que  $\bar{a}$  ait un inverse (argumenter comme dans l'exemple 2.25).

Réciproquement, supposons que  $p$  soit premier, et soit  $\bar{a} \neq \bar{0}$  un élément de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . L'entier  $a$  est alors premier avec  $p$ , c'est-à-dire que  $\text{pgcd}(p, a) = 1$  puisque l'on suppose que  $p$  ne divise pas  $a$ . Par Bézout, on a  $au + pv = 1$ , et en réduisant modulo  $p$  on a

$$\bar{a}\bar{u} + \bar{p}\bar{v} = \bar{a}\bar{u} = \bar{1}$$

(étant donné que  $\bar{p} = \bar{0}$ ). C'est donc bien que  $(\bar{a})^{-1} = \bar{u}$ . Tout nombre non-nul de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  possède un inverse, et on a bien affaire à un corps.  $\square$

## Factorisation

Le théorème suivant généralise le corollaire 3.10 et la proposition 3.12.

**THÉORÈME 3.30** – *Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . On peut écrire de manière unique*

$$P = \lambda P_1 P_2 \cdots P_k,$$

*où chaque  $P_i$  est irréductible et unitaire.*

*Démonstration.* Montrons l'existence de cette écriture, par récurrence sur le degré de  $P$  (c'est évident si  $\deg(P) = 0$ ). On peut supposer que  $P$  est unitaire. Si  $P$  est lui-même irréductible, alors il n'y a rien à dire. Dans le cas contraire, on écrit  $P = QR$  avec  $\deg(Q) < \deg(P)$  et également  $\deg(R) < \deg(P)$ . Par récurrence on peut factoriser  $Q$  et  $R$  en produit d'irréductibles, donc  $P$  aussi.

Montrons l'unicité (c'est plus fin). On doit donc montrer que si on a deux écritures

$$\lambda P_1 P_2 \cdots P_k = \mu Q_1 Q_2 \cdots Q_\ell, \quad (*)$$

avec chaque  $P_i$  et chaque  $Q_i$  unitaire et irréductible, alors  $\lambda = \mu$ ,  $k = \ell$ , et les polynômes  $P_i$  sont les mêmes que les  $Q_i$ . On procède par récurrence sur le degré des deux membres de (\*) (les choses sont évidentes si le degré est 0).

Tout d'abord en regardant le coefficient de plus haut degré, on voit de suite que  $\lambda = \mu$ . Ensuite, on constate que  $P_1$  divise le produit  $Q_1 Q_2 \cdots Q_\ell$ . En conséquence du lemme de Gauss,  $P_1$  doit diviser l'un des  $Q_i$ , disons  $Q_1$  pour simplifier les notations. On simplifie (\*) par  $P_1 = Q_1$  pour obtenir

$$P_2 P_3 \cdots P_k = Q_2 Q_3 \cdots Q_\ell. \quad (**)$$

L'égalité (\*\*) est de degré plus petit que (\*), donc par récurrence on sait que  $k = \ell$  et que les polynômes  $P_2, \dots, P_k$  sont les mêmes que les polynômes  $Q_2, \dots, Q_\ell$ . Ceci termine la démonstration.  $\square$

Une fois de plus, ce théorème existe pour les nombres entiers, essentiellement avec la même démonstration, et vous le connaissez probablement déjà :

**THÉORÈME 3.31** – Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . On peut écrire de manière unique

$$n = \pm p_1 p_2 \cdots p_k,$$

où chaque  $p_i$  est un nombre premier positif.

# Chapitre 4

## Suites

– Première lecture –

### Suites de réels

DÉFINITION 4.1 – Une *suite* de nombres réels est simplement une fonction  $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . En général on écrit  $u_n$  au lieu de  $u(n)$ , et on écrit  $(u_n)_{n \geq 0}$  pour désigner la suite elle-même. ■

EXEMPLE 4.2 – La suite définie par  $u_n = n^2$  commence par

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$$

On emploie souvent une formule directe pour  $u_n$  en fonction de  $n$ , et dans ce cas on parlera directement de « la suite  $(n^2)_{n \geq 0}$  ».

On s'autorise aussi à parler de suites qui ne sont définies que pour des valeurs de  $n$  suffisamment grandes ; ainsi de la suite  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  par exemple. On veillera à toujours indiquer le domaine de définition, ici l'ensemble des entiers  $\geq 1$ . Évidemment l'étude de cette suite se ramène à celle de  $(\frac{1}{n+1})_{n \geq 0}$  : dans les deux cas il s'agit de comprendre la séquence de nombres

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

L'écriture  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  est donc juste une notation commode.

EXEMPLE 4.3 – Une autre façon commune de décrire une suite est d'utiliser une *relation de récurrence* : par exemple, on peut considérer la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = 2u_n$ . Elle commence par

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots$$

Dans cet exemple on voit tout de suite que  $u_n = 2^n$ . Pour le démontrer, sans surprise on procède par récurrence : on a bien  $u_0 = 2^0 = 1$  et si  $u_n = 2^n$  alors  $u_{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ .

Les choses sont en général bien plus compliquées. Que l'on considère la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  définie par à peu près n'importe quelle formule de récurrence choisie au hasard, disons  $v_{n+1} = \cos(v_n) + (\sin(v_n))^3$ , et l'on verra la difficulté qu'il peut y avoir à trouver une formule pour  $v_n$ .

EXEMPLE 4.4 – On peut aussi utiliser une relation de récurrence qui fait intervenir plusieurs termes antérieurs. La célèbre *suite de Fibonacci* est définie par  $u_0 = u_1 = 1$  et par  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ . Elle commence donc par

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Dans les exercices nous verrons comment trouver une expression pour  $u_n$  dans le cas de cette suite.

EXEMPLE 4.5 – Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une première suite. On définit  $(u_n)_{n \geq 0}$  par

$$u_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

On dit alors que  $(u_n)_{n \geq 0}$  est la *série de terme général*  $a_n$ .

Par exemple lorsque  $a_n = r^n$  pour un réel  $r$ , de sorte que  $u_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$ , on dit que  $(u_n)$  est une *série géométrique* (de raison  $r$ ). On peut très facilement trouver une expression pour  $u_n$  en remarquant

$$u_n(1 - r) = (1 + r + \dots + r^n) - (r + r^2 + \dots + r^{n+1}) = 1 - r^{n+1}.$$

Si  $r \neq 1$ , on en déduit

$$u_n = \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$



C'est une formule qui sert tout le temps, elle est donc à savoir.

## Convergence

C'est à l'aide des suites que l'on va pouvoir traduire mathématiquement diverses notions de rapprochement : quantité qui s'approche « infiniment près » de 0, courbes qui se rapprochent « à l'infini », droites et cercles tangents à une courbe, et tant d'autres idées intuitives vont d'une façon ou d'une autre se ramener à des questions de suites.

La définition ci-dessous est au cœur de nombreux concepts dans ce livre. Il est donc normal qu'elle paraisse un peu difficile à saisir au début, et il faut prendre le temps de l'appivoiser. Il s'agit de donner un sens à l'idée d'une suite qui se rapprocherait aussi près que l'on souhaite d'une valeur donnée. La formulation finale est due à Cauchy.

**DÉFINITION 4.6** – Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres réels, et soit  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , ou admet  $\ell$  pour limite, lorsque la condition suivante est satisfaite : pour tout  $\varepsilon > 0$  il doit y avoir un entier  $N_\varepsilon$  tel que  $|u_n - \ell| < \varepsilon$  dès que  $n \geq N_\varepsilon$ .

En d'autres termes, pour toute marge d'erreur  $\varepsilon$  donnée, la distance entre  $u_n$  et  $\ell$  va devenir inférieure à  $\varepsilon$  pour peu que l'on prenne des indices suffisamment grands.

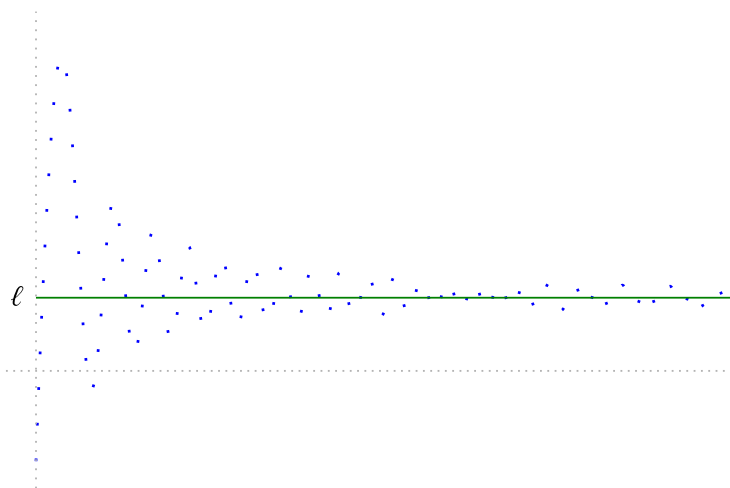
Dans ce cas on note

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell.$$

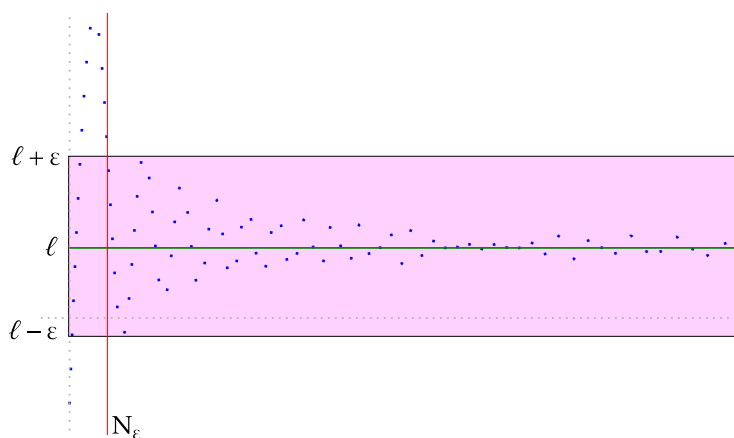


Essayons de comprendre cette définition graphiquement, pour commencer. Et d'abord, comment dessiner une suite ?

Nous allons procéder comme sur la figure ci-dessous. Les points représentés sont ceux de la forme  $(n, u_n)$ , c'est-à-dire que le diagramme se lit de la gauche vers la droite à mesure que les indices augmentent. On a tracé les axes dans le plan  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , ainsi qu'une droite d'équation  $y = \ell$  vers laquelle la suite semble s'accumuler. C'est une bonne façon de visualiser la convergence vers un nombre  $\ell$ .

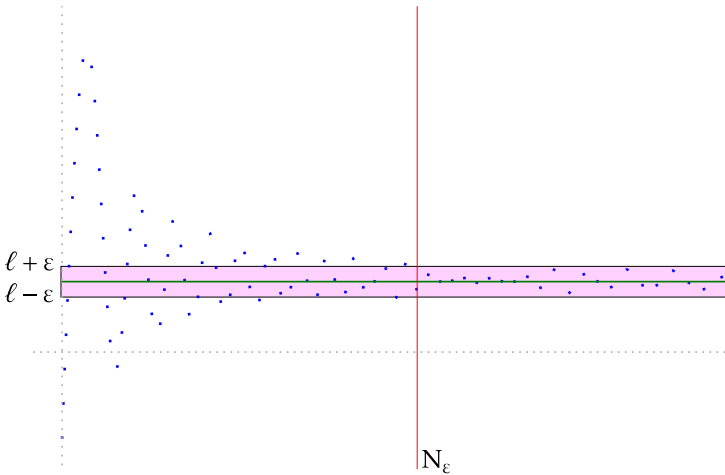


Revenons à la définition. Étant donné un réel  $\varepsilon$ , la condition  $|u_n - \ell| < \varepsilon$  est vérifiée lorsque  $(n, u_n)$  se trouve dans une bande horizontale délimitée par les droites  $y = \ell + \varepsilon$  et  $y = \ell - \varepsilon$ . Le nombre  $N_\varepsilon$  existe lorsqu'on peut tracer une droite verticale comme ci-dessous, d'équation  $x = N_\varepsilon$ , à la droite de laquelle tous les points  $(n, u_n)$  sans exception sont dans la bande.



Ce  $N_\varepsilon$  doit exister pour tout  $\varepsilon$ , et bien sûr les difficultés arrivent lorsque  $\varepsilon$  devient de plus en plus petit. La bande devient

plus étroite et la droite verticale se déplace vers la droite.



Voyons maintenant des exemples.

EXEMPLE 4.7 – Considérons la suite  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ , et montrons qu'elle converge vers 0. Notons  $u_n = \frac{1}{n}$ . Soit donc  $\varepsilon > 0$  comme dans la définition. Pour avoir  $|u_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ , il faut et il suffit que  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Soit donc  $N_\varepsilon$  n'importe quel entier tel que  $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ . On constate bien que lorsque  $n \geq N_\varepsilon$ , alors on a aussi  $n > \frac{1}{\varepsilon}$  et donc  $|u_n| < \varepsilon$ . Par définition, ceci montre que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

(Voir l'encadré «  $\mathbb{R}$  est archimédien » pour quelques commentaires sur cet exemple.)

EXEMPLE 4.8 – Maintenant voyons  $(\alpha^n)_{n \geq 0}$  pour un réel  $0 \leq \alpha < 1$ . Montrons que la suite tend encore vers 0. Puisque  $|\alpha^n - 0| = |\alpha^n| = \alpha^n$ , il s'agit de majorer les termes de la suite par quelque chose de facile à comprendre.

Prenons un nombre rationnel  $\frac{p}{q}$  tel que  $\alpha < \frac{p}{q} < 1$  (voir (3) du théorème 2.5). On a  $q > p$  et comme il s'agit d'entiers, on est même sûr que  $q \geq p + 1$  ; ainsi

$$\alpha^n < \frac{p^n}{q^n} < \frac{p^n}{(p+1)^n}.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}(p+1)^n &= (p+1)(p+1)\cdots(p+1) \\ &= p^n + np^{n-1} + (\text{termes} \geq 0) \\ &> p^n + np^{n-1}.\end{aligned}$$

On a donc  $\frac{(p+1)^n}{p^n} > 1 + \frac{n}{p} > \frac{n}{p}$ , et par suite

$$\alpha^n < \frac{p}{n}.$$

La suite  $(\frac{p}{n})_{n \geq 1}$  tend vers 0, exactement comme la suite  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  (la constante  $p$  ne change rien à l'affaire). Donc étant donné  $\varepsilon > 0$ , il existe bien  $N_\varepsilon$  tel que  $\frac{p}{n} < \varepsilon$  pour  $n \geq N_\varepsilon$ ; pour ces mêmes valeurs de  $n$ , on a donc aussi  $\alpha^n < \varepsilon$ , et finalement  $\alpha^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

EXEMPLE 4.9 – On note  $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \times 2 \times 1$ , et on appelle cette quantité « *factorielle n* ». C'est le produit de  $n$  termes qui sont tous  $\geq 2$  sauf le dernier; on a donc  $n! \geq 2^{n-1}$ .

Si l'on étudie la suite  $(\frac{1}{n!})_{n \geq 1}$ , il suffit de remarquer

$$0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

## $\mathbb{R}$ est archimédien

Dans l'exemple 4.7, on utilise le fait suivant : étant donné un réel  $x$ , il existe un entier  $N$  tel que  $N > x$  (dans l'exemple on avait  $x = \frac{1}{\varepsilon}$  et  $N = N_\varepsilon$ ).

D'abord, pourquoi est-ce vrai ? Le (3) du théorème 2.5 affirme qu'il existe un rationnel  $\frac{p}{q}$  tel que  $x < \frac{p}{q} < x+1$ ; il suffit alors de prendre  $N = p$ .

C'est Archimède qui le premier avait énoncé : « Pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple entier de la plus petite, supérieur à la plus grande. » En clair, étant donné  $a$  et  $b$  rationnels ou réels (mais Archimède pen-

sait seulement aux rationnels), tels que  $0 < a < b$ , alors il existe un entier  $n$  tel que  $na > b$ . (Ce qui revient à prendre  $n > \frac{b}{a}$ .) En particulier, la distance Terre-Lune peut être couverte par des allumettes mises bout-à-bout. Ou même côte à côte. C'est pour ces raisons historiques que l'on dit que  $\mathbb{R}$  est *archimédien* quand on veut faire référence à cette propriété.

À titre d'exercice, vous montrerez que le (3) du théorème 2.5 est en fait *équivalent* à l'énoncé selon lequel  $\mathbb{R}$  est archimédien – ce qui signifie que c'est une propriété fondamentale de  $\mathbb{R}$ .

En effet l'exemple précédent avec  $\alpha = \frac{1}{2}$  montre que  $\frac{1}{2^n}$  converge vers 0 ; or si on a une suite  $u_n$  qui tend vers 0, et si  $0 \leq v_n \leq u_n$ , alors  $v_n$  tend aussi vers 0. Vérifiez ceci à partir de la définition, puis habituez-vous à faire ce genre de petit raisonnement rapidement.

### Combiner les limites

Les exemples précédents sont presque les seuls pour lesquels vous verrez un  $\varepsilon$  cette année. La quasi-totalité des suites que l'on va rencontrer vont être des combinaisons de ces limites, pour lesquelles on va appliquer le résultat suivant.

**PROPOSITION 4.10** – Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  deux suites. On suppose que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$  et que  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell'$ . Alors on a :

1. (somme)  $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell + \ell'$  ;
2. (produit)  $u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \ell'$  ;
3. (inverse)  $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\ell}$  lorsque  $\ell \neq 0$ .

Avant de donner la démonstration, montrons un petit résultat intermédiaire :

**LEMME 4.11** – Toute suite qui converge est bornée. En d'autres termes, si  $(u_n)_{n \geq 0}$  admet une limite, alors il existe un nombre  $C$  tel que pour tout entier  $n$ , on a  $|u_n| \leq C$ .

De plus, si la limite est  $> 0$ , alors il existe une constante  $\rho > 0$  telle que  $u_n > \rho$  pour tous les  $n$  assez grands.

*Démonstration.* Soit  $\ell$  la limite. On écrit

$$|u_n| = |(u_n - \ell) + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell|.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , par exemple  $\varepsilon = 1$ . Il existe un entier  $N_\varepsilon$  tel que pour tous les  $n \geq N_\varepsilon$ , on a  $|u_n - \ell| < \varepsilon$ . Il suffit alors de prendre  $C$  plus grand que  $\varepsilon + |\ell|$ , et plus grand que tous les nombres  $|u_n|$  pour  $n < N_\varepsilon$  (qui sont en nombre fini).

Si maintenant  $\ell > 0$ , posons  $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ . Pour  $n \geq N_\varepsilon$ , on a  $|u_n - \ell| < \varepsilon$  ce qu'on va réécrire

$$\frac{\ell}{2} = \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon.$$

On peut donc prendre  $\rho = \varepsilon = \frac{\ell}{2}$ . □

*Démonstration de la proposition.* Commençons par la formule pour le produit. Une astuce que vous reverrez souvent est d'écrire  $u_n v_n - \ell \ell' = u_n(v_n - \ell') + \ell'(u_n - \ell)$ . Par suite

$$|u_n v_n - \ell \ell'| \leq |u_n| \cdot |v_n - \ell'| + |\ell'| \cdot |u_n - \ell|. \quad (*)$$

Soit donc  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse il existe  $N_1$  tel que

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \quad (1)$$

dès que  $n \geq N_1$ ; de même on a un  $N_2$  tel que

$$|v_n - \ell'| < \varepsilon \quad (2)$$

dès que  $n \geq N_2$ .

Si nous prenons  $N_\varepsilon$  n'importe quel nombre à la fois plus grand que  $N_1$  et plus grand que  $N_2$ , alors on a à la fois (1) et (2) lorsque  $n \geq N_\varepsilon$ . Prenons une constante  $C$  comme dans le lemme. Alors en reportant ces inégalités dans (\*), on aboutit à

$$|u_n v_n - \ell \ell'| \leq (C + |\ell'|)\varepsilon \quad \text{pour } n \geq N_\varepsilon. \quad (**)$$

Avec l'habitude, vous vous rendrez compte que ce genre d'argument est suffisant, et que l'on a essentiellement déjà montré que  $u_n v_n$  a pour limite  $\ell \ell'$ . Pourquoi ?

Simplement parce que pour tout  $\varepsilon > 0$ , on vient de montrer que l'on sait trouver  $N_\varepsilon$  tel que l'inégalité (\*\*) est valable. En particulier on peut faire ce travail pour  $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{C + |\ell'|}$ ; donc il existe  $N_{\tilde{\varepsilon}}$  tel que pour les entiers  $n \geq N_{\tilde{\varepsilon}}$  on a effectivement

$$|u_n v_n - \ell \ell'| \leq (C + |\ell'|)\tilde{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Vous montrerez la formule pour la somme sur le même modèle, en plus facile.

Pour l'inverse on écrit

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \left| \frac{\ell - u_n}{u_n \ell} \right| < \frac{1}{\rho|\ell|} |u_n - \ell|,$$

où  $\rho$  est comme dans le lemme (appliqué à la suite  $|u_n|$  qui converge vers  $|\ell| > 0$  (vérifiez-le)). Ainsi pour tout  $\varepsilon > 0$ , on trouve un  $N_\varepsilon$  tel que pour  $n \geq N_\varepsilon$  on a

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| < \frac{\varepsilon}{\rho|\ell|}.$$

Là encore, c'est suffisant pour affirmer que  $\frac{1}{u_n}$  converge vers  $\frac{1}{\ell}$ .  $\square$

EXEMPLE 4.12 – Voyons comment cette proposition nous simplifie la vie. Admettons que l'on souhaite connaître la limite de

$$u_n = \frac{4n^2 + 1}{5n^2 - n + 2}.$$

On commence par diviser par  $n^2$  au numérateur comme au dénominateur :

$$u_n = \frac{4 + \frac{1}{n^2}}{5 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}.$$

On a vu dans l'exemple 4.7 que  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ . Grâce à la formule pour le produit, on sait désormais que  $\frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$  converge également vers  $0 \times 0 = 0$ . De même  $\frac{2}{n^2} \rightarrow 2 \times 0 = 0$  et  $-\frac{1}{n} \rightarrow (-1) \times 0 = 0$ , encore par la formule pour le produit.

Maintenant, la formule pour la somme nous dit que  $4 + \frac{1}{n^2} \rightarrow 4$  et que  $5 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \rightarrow 5 \neq 0$ . On peut donc utiliser la formule pour l'inverse qui donne finalement

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{5}.$$

### Suites croissantes et décroissantes

DÉFINITION 4.13 – On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est *croissante* lorsque  $u_n \leq u_{n+1}$  pour tout  $n$ ; on dit qu'elle est *décroissante* lorsque  $u_{n+1} \leq u_n$ .

On dit que  $(u_n)$  est *majorée* lorsqu'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $u_n \leq M$ , pour tout  $n$ ; on dit qu'elle est *minorée* lorsqu'il existe  $m$  tel que  $m \leq u_n$ . ■

**THÉORÈME 4.14** – *Toute suite croissante et majorée est convergente. Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

*Démonstration.* Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite croissante et majorée. On pose

$$\ell = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

ce qui a un sens puisque cet ensemble est majoré par hypothèse.

Soit  $\varepsilon > 0$  et considérons  $\ell' = \ell - \varepsilon < \ell$ . Alors  $\ell'$  ne peut pas être un majorant de l'ensemble ci-dessus, puisque  $\ell$  est le plus petit. Ce qui revient à dire qu'il y a au moins un élément de l'ensemble, disons  $u_N$ , tel que  $u_N > \ell'$ .

Or la suite est croissante, donc  $u_n \geq u_N > \ell'$  pour tous les  $n \geq N$ . On a donc  $\ell - \varepsilon < u_n \leq \ell$  pour ces valeurs de  $n$ , et finalement  $|u_n - \ell| < \varepsilon$ . On peut donc prendre  $N_\varepsilon = N$  et la suite converge vers le sup de ses valeurs.

Si  $(u_n)$  est décroissante et minorée, on applique le résultat ci-dessus à  $(-u_n)$ , qui est croissante et majorée. □

**EXEMPLE 4.15** – Voici une deuxième façon, plus facile, de montrer que  $\alpha^n \rightarrow 0$  lorsque  $0 \leq \alpha < 1$ . Posons  $u_n = \alpha^n$ . Alors  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha < 1$ , donc  $u_{n+1} < u_n$  : la suite est décroissante. Tous les termes sont  $> 0$ , donc elle est minorée. Par le théorème,  $(u_n)$  admet une certaine limite  $\ell$ . Montrons que  $\ell = 0$ .

Soit  $v_n = \alpha^{n+1}$ . D'un côté nous avons  $v_n = \alpha \alpha^n = \alpha u_n$ . Par la formule pour les produits de suites, on en déduit  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha \ell$ .

D'un autre côté, nous avons  $v_n = u_{n+1}$ . Il est donc clair que  $v_n$  a la même limite que  $u_n$  puisque c'est la même suite avec simplement les termes décalés d'un cran. Donc  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ .

On doit donc avoir  $\ell = \alpha \ell$ . Si on avait  $\ell \neq 0$ , on en déduirait  $\alpha = 1$  ce qui contredit les hypothèses. Donc  $\ell = 0$ .



## Convergence vers $\pm\infty$

DÉFINITION 4.16 – On écrit

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty,$$

lorsque la condition suivante est remplie. Pour tout  $M > 0$ , il doit exister un entier  $N = N_M$  tel que  $u_n > M$  pour tous les entiers  $n \geq N$ .

De même on dit que  $u_n \rightarrow -\infty$  lorsque pour tout  $m < 0$ , il existe un entier  $N = N_m$  tel que  $u_n < m$  dès que  $n \geq N$ . ■

En d'autres termes, quand  $u_n \rightarrow +\infty$  les termes de la suite deviennent arbitrairement grands lorsque les indices sont suffisamment grands.

Les exemples vont provenir du résultat suivant. C'est une variante de la proposition 4.10, mais les choses ne marchent pas aussi bien.

PROPOSITION 4.17 – Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  deux suites. On suppose que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$  et que  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ , où l'on peut avoir aussi bien  $\ell \in \mathbb{R}$  que  $\ell = \pm\infty$ . Alors :

1. (somme) si  $\ell \neq -\infty$  alors  $u_n + v_n \rightarrow +\infty$  ;

2. (produit)

(a) si  $\ell > 0$  alors  $u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ , et

(b) si  $\ell < 0$  alors  $u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$  ;

3. (inverse)

(a)  $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  ;

(b) si  $\ell = 0$ , et si  $\forall n$  on a  $v_n > 0$ , alors  $\frac{1}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$  ;

(c) si  $\ell = 0$ , et si  $\forall n$  on a  $v_n < 0$ , alors  $\frac{1}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$ .

Vous montrerez cette proposition à titre d'exercice. Avant de passer aux exemples, notons que ce dernier énoncé ne couvre pas tous les cas : que dire de  $u_n + v_n$  lorsque  $\ell = -\infty$  ? Que dire

de  $u_n v_n$  lorsque  $\ell = 0$ ? Réponse : rien en général. On dit que ce sont les « formes indéterminées ». Toutes les situations sont envisageables.

EXEMPLE 4.18 – Puisque  $\frac{1}{n^k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  pour tout entier  $k$ , le 3(b) de la proposition nous dit que  $n^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ . On peut évidemment vérifier très facilement ceci à partir de la définition.

De la même manière,  $\beta^n \rightarrow +\infty$  si  $\beta > 1$  : en effet posons  $\alpha = \frac{1}{\beta} < 1$ , alors  $\alpha^n \rightarrow 0$ , et on applique encore le 3(b). Toujours pour les mêmes raisons, on a  $n! \rightarrow +\infty$ .

Enfin, nous avons vu un exemple de forme indéterminée dans l'exemple 4.12, en l'occurrence une « forme  $\frac{+\infty}{+\infty}$  ». Nous avons montré dans ce cas précis qu'il y avait bien une limite, à savoir  $\frac{4}{5}$ .

Il y a certaines formes indéterminées que l'on peut résoudre, et il est utile d'en mémoriser quelques unes au fur et à mesure qu'on les rencontre. En voici une première.

TO DO : ajouter la comparaison factorielle/puissances

LEMME 4.19 – Soit  $\alpha$  un réel tel que  $0 \leq \alpha < 1$ , et  $k$  un entier. Alors

$$n^k \alpha^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

*Démonstration.* C'est une forme indéterminée «  $+\infty \times 0$  ». Soit  $u_n = n^k \alpha^n$ . On fait l'estimation suivante :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \alpha \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha.$$

Prenons  $\varepsilon = \frac{1-\alpha}{2} > 0$ ; alors pour tous les  $n \geq N$ , pour un certain  $N = N_\varepsilon$ , on a

$$\alpha - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha + \varepsilon = \frac{\alpha + 1}{2} < 1.$$

En posant  $\rho = \frac{\alpha+1}{2}$ , on voit d'abord que  $u_{N+1} < \rho u_N$ ; puis  $u_{N+2} < \rho u_{N+1} < \rho^2 u_N$ ; et une récurrence nous mène immédiatement à

$$u_{N+n} < \rho^n u_N,$$

pour tous les  $n \geq 0$ . Comme  $\rho^n u_N \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  (le terme  $u_N$  n'est qu'une constante!), on en déduit bien que  $u_n$  converge vers 0.  $\square$

– Deuxième lecture –

**Convergence absolue**

Partant d'une première suite  $(a_n)_{n \geq 0}$ , on peut considérer la « série de terme général  $a_n$  », c'est-à-dire la suite

$$u_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

(Cf l'exemple 4.5.)

Le théorème suivant peut paraître surprenant : il dit que pour montrer la convergence de  $u_n$ , il suffit de montrer la convergence de la série de terme général  $|a_n|$  :

**THÉORÈME 4.20** – Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite. Si la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n |a_k|$$

existe, alors la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

existe également. On dit alors que la série de terme général  $a_n$  converge absolument.

*Démonstration.* On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n |a_k| \quad \text{et} \quad u_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

Par hypothèse  $S_n \rightarrow \ell$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , alors pour tous les  $n$  suffisamment grands on aura  $|S_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ , et donc

$$|S_n - S_m| = |(S_n - \ell) + (\ell - S_m)| \leq |S_n - \ell| + |S_m - \ell| < \varepsilon$$

lorsque  $n$  et  $m$  sont tous les deux supérieurs à un certain  $N$ . On en déduit pour la suite  $(u_n)$  que

$$|u_n - u_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| = S_n - S_m < \varepsilon,$$

lorsque  $n \geq m \geq N$ . On dit souvent que  $(u_n)$  est une suite *de Cauchy* pour exprimer cette propriété (à savoir que  $|u_n - u_m| < \varepsilon$  pour  $n$  et  $m$  suffisamment grands). La fin de la démonstration va établir qu'une suite de Cauchy de nombres réels converge toujours.

En effet, soient

$$\alpha_n = \inf\{u_k \mid k \geq n\} \quad \text{et} \quad \beta_n = \sup\{u_k \mid k \geq n\},$$

de sorte que  $\alpha_n \leq u_n \leq \beta_n$ . Par construction la suite  $\alpha_n$  est croissante et majorée; donc elle admet une limite  $\ell_1$  d'après le théorème 4.14. De même  $\beta_n$  converge vers une limite  $\ell_2$  parce qu'elle est décroissante et minorée.

Mais nous avons montré que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $N$  au-delà duquel  $|u_n - u_N| < \varepsilon$ ; pour ces valeurs de  $n$ , le nombre  $u_n$  est dans l'intervalle  $]u_N - \varepsilon; u_N + \varepsilon[$  de longueur  $2\varepsilon$ , et on en déduit que  $\beta_n - \alpha_n \leq 2\varepsilon$  pour  $n \geq N$ . Ceci montre que  $\beta_n - \alpha_n \rightarrow 0$  et donc que  $\ell_1 = \ell_2$ . Finalement l'encadrement  $\alpha_n \leq u_n \leq \beta_n$  garantit que  $u_n$  converge également vers cette limite.  $\square$

Notez bien que la démonstration ne dit pas du tout comment *calculer* la limite de  $\sum a_k$ , même si on connaît celle de  $\sum |a_k|$ . Notez également que ce théorème serait faux si on travaillait sur  $\mathbb{Q}$ ; d'ailleurs la démonstration utilise des bornes supérieures et inférieures, qui sont propres à  $\mathbb{R}$ .

Dorénavant, nous utiliserons la notation suivante, plus suggestive, pour les limites de sommes. On écrit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k,$$

lorsque cette limite existe.

EXEMPLE 4.21 (L'EXPONENTIELLE) – Soit  $x \in \mathbb{R}$  fixé. Posons

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Montrons que cette suite converge absolument. Nous devons donc montrer que

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{|x|^k}{k!}$$

admet une limite. La suite  $(S_n)$  est croissante, donc d'après le théorème 4.14 il suffit de montrer qu'elle est majorée.

Pour  $k$  suffisamment grand, disons  $k \geq K$ , on a  $|x| < k$ ; on peut même choisir  $\alpha < 1$  tel que  $\frac{|x|}{k} < \alpha$  pour  $k \geq K$ . On a alors

$$\frac{|x|^{K+1}}{(K+1)!} = \frac{|x|}{K+1} \cdot \frac{|x|^K}{K!} < \alpha \frac{|x|^K}{K!}.$$

De même on a

$$\frac{|x|^{K+2}}{(K+2)!} = \frac{|x|}{K+2} \cdot \frac{|x|^{K+1}}{(K+1)!} < \alpha \frac{|x|^{K+1}}{(K+1)!} < \alpha^2 \frac{|x|^K}{K!}.$$

Par récurrence on obtient

$$\frac{|x|^{K+k}}{(K+k)!} < \alpha^k \frac{|x|^K}{K!}.$$

Ceci va nous suffire, puisqu'en posant  $C = S_{K-1}$  on peut écrire

pour  $n \geq K$  :

$$\begin{aligned}
 S_n &= C + \sum_{k=0}^{n-K} \frac{|x|^{K+k}}{(K+k)!} \\
 &\leq C + \frac{|x|^K}{K!} (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-K}) \\
 &= C + \frac{|x|^K}{K!} \frac{1 - \alpha^{n+1-K}}{1 - \alpha} \\
 &\leq C + \frac{|x|^K}{K!} \frac{1}{1 - \alpha}.
 \end{aligned}$$

La suite  $(S_N)$  est donc bien majorée en plus d'être croissante, elle est donc convergente ; par suite  $(u_n)$  est absolument convergente, et donc elle-même convergente d'après le théorème. Sa limite, qui dépend de  $x$ , est notée  $\exp(x)$  ou  $e^x$ , et appelée *l'exponentielle* du nombre  $x$ . En clair

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Cette définition de l'exponentielle coïncide, heureusement, avec les définitions qui vous sont esquissées au lycée. Nous montrerons ça en tant voulu.

EXEMPLE 4.22 – Certaines séries convergent, mais sans converger absolument : il faut donc faire attention. Par exemple, nous pourrions montrer plus loin que pour  $a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$ , la série converge et on a même

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \ln(2).$$

Par contre en prenant les valeurs absolues, nous montrerons que l'on a en fait

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = +\infty,$$

c'est-à-dire qu'il n'y a pas de limite finie.

## Suites de complexes

Lorsque l'on se donne pour chaque entier  $n$  un nombre complexe  $z_n = a_n + ib_n$ , et lorsque  $a_n \rightarrow \ell_1$  et  $b_n \rightarrow \ell_2$ , on dit que  $(z_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\ell = \ell_1 + i\ell_2$ , et on note  $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ . Par exemple

$$\frac{3n^2}{2^n} + \frac{2n+5}{7n-12}i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{2i}{7}.$$

Cette définition a le mérite d'être simple. Cependant on peut donner une définition plus directe, sans référence aux suites réelles, en remplaçant simplement les valeurs absolues par les modules ; en clair :

**PROPOSITION 4.23** – *La suite  $(z_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\ell$  exactement lorsque la condition suivante est remplie. Pour chaque réel  $\varepsilon > 0$ , il doit y avoir un entier  $N_\varepsilon$  tel que  $|z_n - \ell| < \varepsilon$  dès que  $n \geq N_\varepsilon$ .*

Ici  $|z_n - \ell|$  est le module du nombre complexe  $z_n - \ell$ . À part ça, la condition est la même que pour les suites réelles.

*Démonstration.* Écrivons  $z_n = a_n + b_n i$ . Pour commencer, supposons que  $a_n \rightarrow \ell_1$  et  $b_n \rightarrow \ell_2$ . Étant donné  $\varepsilon > 0$ , on trouve  $N_1$  tel que  $|a_n - \ell_1| < \varepsilon$  pour  $n \leq N_1$ , et de même pour tous les  $n$  plus grands qu'un certain entier  $N_2$  on a  $|b_n - \ell_2| < \varepsilon$ . Lorsque  $n$  est à la fois plus grand que  $N_1$  et que  $N_2$ , on a

$$|z_n - (\ell_1 + i\ell_2)| = \sqrt{(a_n - \ell_1)^2 + (b_n - \ell_2)^2} \leq \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} \leq \sqrt{2}\varepsilon.$$

Ceci montre bien (en recommençant avec  $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ ) que la condition donnée est remplie pour  $\ell = \ell_1 + i\ell_2$ .

Réciproquement, supposons cette condition remplie pour un certain  $\ell = \ell_1 + i\ell_2$ , et étudions la convergence des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . En notant simplement que

$$|a_n - \ell_1| \leq |z_n - \ell|,$$

on constate que si  $|z_n - \ell| < \varepsilon$ , alors  $|a_n - \ell_1| < \varepsilon$ , et ceci établit que  $a_n \rightarrow \ell_1$ , clairement. De même  $(b_n)$  converge vers  $\ell_2$ .  $\square$

La convergence absolue fonctionne encore avec les complexes :

**THÉORÈME 4.24** – Soit  $(z_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres complexes. Si la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n |z_k|$$

existe, alors la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n z_k$$

existe également. On dit que la série converge absolument.

*Démonstration.* Écrivons  $z_n = a_n + ib_n$ . On a  $|a_n| \leq |z_n|$  et donc

$$S_n = \sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^n |z_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |z_k|.$$

La suite  $S_n$  est donc majorée. Elle est visiblement croissante, donc elle converge. D'après le théorème 4.20, on en déduit l'existence de

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k;$$

de même on montre l'existence de

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k.$$

Mais bien sûr on a

$$\Re \left( \sum_{k=0}^n z_k \right) = \sum_{k=0}^n a_k, \quad \text{Im} \left( \sum_{k=0}^n z_k \right) = \sum_{k=0}^n b_k.$$

Puisque ces parties réelles et imaginaires convergent, c'est bien que la somme elle-même converge.  $\square$



EXEMPLE 4.25 (L'EXPONENTIELLE COMPLEXE) – Soit  $z \in \mathbb{C}$  fixé. On pose

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}.$$

Soit  $x = |z|$ ; c'est un nombre réel  $\geq 0$ , et on a montré dans l'exemple 4.21 la convergence de

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

C'est donc que  $(u_n)$  converge absolument. D'après le théorème, elle converge. La limite dépend de  $z$ , on la note  $\exp(z)$  ou  $e^z$ . En clair

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Lorsque  $z = i\theta$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ , la notation  $e^{i\theta}$  coïncide avec celle que vous connaissiez au lycée, comme nous le montrerons plus loin.

Sur cette exemple on peut apprécier le secours qui nous est apporté par le théorème sur la convergence absolue : étudier les parties réelles et imaginaires de  $(u_n)$  directement serait bien difficile.

Pour travailler directement avec les complexes sans passer par les parties réelles et imaginaires, il nous manque encore un ingrédient : c'est la très utile inégalité triangulaire, que nous avons vu dans le cas de  $\mathbb{R}$  dans le lemme 2.7. Elle reste vraie sur  $\mathbb{C}$  :

LEMME 4.26 – Si  $a$  et  $b$  sont des nombres complexes, on a

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

et

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Nous allons donner une démonstration très générale dans le paragraphe suivant (voir le lemme 4.30).

## Suites de vecteurs

L'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes peut être identifié avec l'ensemble  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , que l'on va noter  $\mathbb{R}^2$ , en voyant  $a + ib$  comme la paire  $(a, b)$ . De même, on peut considérer l'ensemble  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  des triplets  $(a, b, c)$  de nombres réels ; on va noter cet ensemble  $\mathbb{R}^3$ . L'ensemble  $\mathbb{R}^4$  est composé des quadruplets  $(a, b, c, d)$ .

Rien de nous empêche de continuer : étant donné un entier  $r$ , l'ensemble  $\mathbb{R}^r$  est constitué des «  $r$ -uplets »  $(a, b, c, d, \dots)$  (séquence de  $r$  nombre réels). Ces éléments sont appelés *vecteurs*.

**DÉFINITION 4.27** – La *norme* (ou norme euclidienne) d'un vecteur est :

$$\|(a, b, c, d, \dots)\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots}.$$

■

En particulier, si  $z = a + ib$ , alors  $|z| = \|(a, b)\|$ . La norme est donc une généralisation du module.

Une suite de vecteurs est une fonction  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^r$ , c'est-à-dire que pour tout entier  $n$  on se donne un vecteur

$$u_n = (a_n, b_n, c_n, d_n, \dots) \in \mathbb{R}^r.$$

Exactement comme dans le cas des complexes, on a :

**PROPOSITION 4.28** – Soit  $u_n = (a_n, b_n, c_n, d_n, \dots)$  une suite de vecteurs de  $\mathbb{R}^r$ . Les deux énoncés ci-dessous sont équivalents :

1. Chacune des suites  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $(b_n)_{n \geq 0}$ ,  $(c_n)_{n \geq 0}$ ,  $\dots$ , converge respectivement vers  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots$
2. Soit  $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_r)$ . Pour chaque réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N_\varepsilon$  tel que pour  $n \geq N_\varepsilon$  on a  $\|u_n - \ell\| < \varepsilon$ .

**THÉORÈME 4.29** – Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite de vecteurs dans  $\mathbb{R}^r$ . Si la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \|a_k\|$$

existe (dans  $\mathbb{R}$ ), alors la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

existe également (et c'est un vecteur de  $\mathbb{R}^r$ ). On dit que la série converge absolument.

Les démonstrations sont les mêmes que dans le cas des complexes, et sont laissées en exercice. Nous avons également :

LEMME 4.30 – Si  $a$  et  $b$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^r$ , alors

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|,$$

et

$$|\|a\| - \|b\|| \leq \|a - b\|.$$

Montrons-le (ceci va établir le lemme 4.26 du même coup). Commençons par une inégalité célèbre :

LEMME 4.31 (INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ) – Soient  $x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_r$  des nombres réels. Alors :

$$\left| \sum_{i=1}^r x_i y_i \right|^2 \leq \left( \sum_{i=1}^r x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^r y_i^2 \right).$$

Supposons de plus que les nombres  $y_1, y_2, \dots, y_r$  ne sont pas tous nuls ; alors cette inégalité est une égalité exactement lorsqu'il existe un réel  $t$  tel que  $x_i + t y_i = 0$  pour tous les indices  $i$  à la fois.

*Démonstration.* Si tous les  $y_i$  sont nuls, les deux membres de l'inégalité sont nuls, et l'inégalité est donc satisfaite. On suppose maintenant qu'il ne sont pas tous nuls.

Pour  $t \in \mathbb{R}$ , considérons

$$P(t) = \sum_{i=0}^r (x_i + t y_i)^2 = At^2 + Bt + C,$$

avec

$$A = \sum_{i=0}^r y_i^2, \quad B = 2 \sum_{i=0}^r x_i y_i, \quad C = \sum_{i=0}^r x_i^2.$$

Faisons quelques observations sur  $P(t)$ . D'abord, puisque  $P(t)$  est une somme de carrés, on a  $P(t) \geq 0$ ; de plus  $P(t) = 0$  exactement lorsque  $x_i + ty_i = 0$  pour tous les indices  $i$  à la fois. Par hypothèse il y a un indice  $i_0$  tel que  $y_{i_0} \neq 0$ , donc une seule valeur de  $t$  au maximum peut convenir, à savoir  $t = -\frac{x_{i_0}}{y_{i_0}}$ .

Concluons. Ou bien le polynôme  $P(t)$  a une racine réelle et une seule, et donc son discriminant  $B^2 - 4AC = 0$ ; ou bien il n'a pas de racine réelle du tout, et donc son discriminant  $B^2 - 4AC < 0$ . Étant données les valeurs de  $A$ ,  $B$  et  $C$ , on a exactement ce que dit le lemme.  $\square$

*Démonstration du lemme 4.30.* Notons  $a = (x_1, x_2, \dots, x_r)$  et  $b = (y_1, y_2, \dots, y_r)$ . On calcule directement

$$\|a + b\|^2 = \sum_{i=0}^r (x_i + y_i)^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2(a, b),$$

avec

$$(a, b) = \sum_{i=0}^r x_i y_i \leq \|a\| \cdot \|b\|,$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Finalement

$$\|a + b\|^2 \leq \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\| \cdot \|b\| = (\|a\| + \|b\|)^2.$$

Ceci montre la « première » inégalité triangulaire  $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ . La deuxième se déduit de la première, exactement comme dans le corollaire 2.8.  $\square$

On en déduit enfin :

**LEMME 4.32** – Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  est une suite de vecteurs de  $\mathbb{R}^r$  qui converge vers  $\ell \in \mathbb{R}^r$ , alors on a également

$$\|u_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \|\ell\|.$$

*Démonstration.* On utilise la deuxième inégalité triangulaire :

$$|\|\ell\| - \|u_n\|| \leq \|\ell - u_n\|.$$

Le membre de droite tend vers 0 d'après le (2) de la proposition 4.28.  $\square$

# Chapitre 5

## Matrices

Dans ce chapitre, la lettre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

– Première lecture –

*Le lecteur ayant lu la définition 2.15 peut prendre pour  $\mathbb{K}$  n'importe quel corps.*

### Introduction

Une *matrice* n'est rien d'autre qu'un tableau de nombres. Si l'on s'intéresse mathématiquement aux tableaux, c'est toujours de près ou de loin parce qu'ils interviennent dans les *systèmes linéaires*, c'est-à-dire les équations du genre

$$\begin{cases} 3x - 7y + 9z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Ici on pourra associer à ce système la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 9 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que toutes les informations concernant le système sont contenues dans cette matrice, mais de plus on va voir (et vous en avez sans doute eu un aperçu au lycée) que la résolution du système gagne même en clarté lorsqu'elle est faite à partir de manipulations sur la matrice. L'observation clef que nous

allons voir tout de suite est que les matrices peuvent être *multipliées* entre elles. Il en résulte des notations simples et puis-  
santes.

Dans les chapitres suivants, nous montrerons que les systèmes linéaires, sous des formes plus sophistiquées, sont omniprésents en mathématiques, à un point qui devrait vous surprendre. Dans ce chapitre le but est simplement de se familiariser avec les matrices, et d'apprendre à résoudre les systèmes.

Commençons par les définitions.

**DÉFINITION 5.1** – Une *matrice* de type  $n \times m$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est un tableau d'éléments de  $\mathbb{K}$  comprenant  $n$  lignes et  $m$  colonnes. L'ensemble des matrices  $n \times m$  est noté  $M_{n,m}(\mathbb{K})$ . On utilise parfois la notation  $M_n(\mathbb{K})$  au lieu de  $M_{n,n}(\mathbb{K})$ , dans le cas des matrices « carrées ». ■

Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 9 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2-3i & -4 \\ \sqrt{17} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Les éléments de  $M_{1,n}(\mathbb{K})$  sont appelés *matrices-lignes* et ceux de  $M_{n,1}(\mathbb{K})$  sont les *matrices-colonnes*.

Notez bien la convention suivante. À partir de maintenant, nous allons identifier les *matrices-colonnes* avec les vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ ; c'est-à-dire que l'on identifie  $\mathbb{K}^n$  et  $M_{n,1}(\mathbb{K})$ . On se permet donc d'écrire

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

On fait ce choix particulier dans le but de simplifier (énormément) certaines formules qui vont apparaître dans la suite. Dans d'autres chapitres de ce livre, vous l'avez sans doute déjà remarqué, les éléments de  $\mathbb{K}^n$  sont notés  $(x_1, \dots, x_n)$ , donc en ligne : il faut voir ça comme une notation que l'on s'autorise dès qu'il n'y a pas d'ambiguïté, dans le but d'économiser la place. Mais dès lors qu'il y a des matrices en vue, et des opérations sur ces matrices, les vecteurs sont des *colonnes*.

On utilise parfois la notation

$$(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

ou plus simplement  $(a_{ij})_{i,j}$  lorsque  $n$  et  $m$  sont entendus, pour désigner la matrice de  $M_{n,m}(\mathbb{K})$  donc le coefficient sur la ligne  $i$ , dans la colonne  $j$ , est le nombre  $a_{ij}$ . Par exemple dans le cas de matrices  $2 \times 3$ , la matrice  $(a_{ij})_{i,j}$  est

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Autre exemple, avec des matrices  $3 \times 3$ , la « matrice donnée par  $(\cos(i)\sin(j))_{i,j}$  » est

$$\begin{pmatrix} \cos(1)\sin(1) & \cos(1)\sin(2) & \cos(1)\sin(3) \\ \cos(2)\sin(1) & \cos(2)\sin(2) & \cos(2)\sin(3) \\ \cos(3)\sin(1) & \cos(3)\sin(2) & \cos(3)\sin(3) \end{pmatrix}.$$

DÉFINITION 5.2 – Si  $A = (a_{ij})_{i,j}$  est une matrice  $n \times m$ , alors sa *transposée* est la matrice  ${}^tA$ , de type  $m \times n$ , donnée par

$${}^tA = (a_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

(Noter l'inversion de  $i$  et de  $j$  : sur la ligne  $i$  dans la colonne  $j$ , on trouve cette fois  $a_{ji}$ .) ■

Par exemple si  $A$  est la matrice  $2 \times 3$  ci-dessus, alors

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Si  $B$  est la matrice  $3 \times 3$  ci-dessus, alors

$${}^tB = \begin{pmatrix} \cos(1)\sin(1) & \cos(2)\sin(1) & \cos(3)\sin(1) \\ \cos(1)\sin(2) & \cos(2)\sin(2) & \cos(3)\sin(2) \\ \cos(1)\sin(3) & \cos(2)\sin(3) & \cos(3)\sin(3) \end{pmatrix}.$$

La transposée d'une matrice-ligne est une matrice-colonne, et vice-versa.

## Addition et multiplication

Pour commencer, on peut additionner deux matrices de même type « coefficient par coefficient » : par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(En d'autres termes  $(a_{ij})_{i,j} + (b_{ij})_{i,j} = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$ .)

On peut aussi multiplier une matrice par un « scalaire », c'est-à-dire un élément de  $\mathbb{K}$ , en multipliant tous les coefficients par ce nombre : par exemple

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 18 & 54 \end{pmatrix}.$$

(En d'autres termes  $\lambda(a_{ij})_{i,j} = (\lambda a_{ij})_{i,j}$ .)

Multiplier deux matrices entre elles est plus compliqué. Commençons par un cas simple.

DÉFINITION 5.3 – Donnons-nous une matrice-ligne de type  $1 \times m$ , disons

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{pmatrix};$$

prenons également une matrice-colonne de type  $m \times 1$ , disons

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Alors le produit  $AB$  est par définition la matrice  $1 \times 1$  dont l'unique coefficient est

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_m b_m.$$

(Si le nombre de coefficients de  $A$  n'était pas égal au nombre de coefficients de  $B$ , le produit  $AB$  ne serait pas défini.) ■

Par exemple

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times (-1) + (-1) \times 0 + 10 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix};$$



ou encore

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \end{pmatrix}.$$

Dans le cas général, on définit la multiplication de la manière suivante.

DÉFINITION 5.4 – Soit A une matrice  $n \times m$ , et soit B une matrice  $m \times p$ . Alors le produit AB est la matrice  $n \times p$  dont le coefficient sur la ligne  $i$ , dans la colonne  $j$ , est le produit de la ligne  $i$  de A par la colonne  $j$  de B. ■

EXEMPLE 5.5 – Admettons que l'on souhaite multiplier

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

par

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -14 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -19 & -7 \end{pmatrix}.$$

Le produit est bien défini puisque le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Le produit AB va avoir autant de lignes que A et autant de colonnes que B; ce sera donc une matrice  $3 \times 4$ .

Pour faire le calcul, il est utile de présenter les choses comme ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -14 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -19 & -7 \end{pmatrix}$$

Pour calculer, par exemple, le coefficient sur la première ligne, dans la colonne 3, du produit AB, on regarde la ligne et la colonne correspondantes. Ensuite on les multiplie par la méthode déjà donnée, donc ici

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times (-5) + (-4) \times (-19) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 \end{pmatrix}.$$

On procède de même pour tous les autres coefficients. Après un certain temps, le calcul terminé ressemble à ceci :

$$\begin{pmatrix} -3 & -14 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -19 & -7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -14 & 71 & 29 \\ -1 & -14 & -43 & -13 \\ 4 & 14 & -14 & -8 \end{pmatrix}$$

La matrice en bas à droite est AB.

EXEMPLE 5.6 – Voyons comment la multiplication des matrices permet d'écrire les systèmes. Considérons par exemple

$$\begin{cases} 2x + 6y = -9 \\ -4x + 3y = 1 \end{cases}$$

Posons alors

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule facilement que

$$AX = \begin{pmatrix} 2x + 6y \\ -4x + 3y \end{pmatrix}.$$

Ainsi le système de départ est équivalent à une seule égalité de matrices-colonnes, à savoir :

$$AX = B.$$

Cette notation très compacte fait ressortir le plus important : on a bien envie de « diviser par A » des deux côtés, puisqu'on cherche X. Nous allons voir rapidement si oui ou non on peut donner un sens précis à cette intuition.

Il faut s'habituer à multiplier les matrices relativement vite et sans se tromper.

## Règles de calcul

Il y a deux matrices qui jouent des rôles particuliers dans les opérations arithmétiques. Tout d'abord la matrice dont tous les coefficients sont nuls : on la note simplement 0, quelle que soit sa taille. Dans le cas des matrices carrées de taille  $n$ , on a également la matrice « identité » ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

On la note  $\text{Id}_n$  ou  $\text{Id}$  ou encore  $I$ .

**PROPOSITION 5.7** – *Les règles de calcul suivantes sont valables dans  $M_n(\mathbb{K})$  :*

- |   |                                       |
|---|---------------------------------------|
| (a) $A + B = B + A$ ,                                 | (e) $A(B + C) = AB + AC$              |
| (b) $0 + A = A$ ,                                     | et $(A + B)C = AC + BC$ ,             |
| (c) $(A + B) + C = A + (B + C)$ ,                     | (f) $\text{Id} A = A \text{Id} = A$ , |
| (d) $\forall A \exists (-A)$ tel que $A + (-A) = 0$ , | (g) $(AB)C = A(BC)$ .                 |

(En d'autres termes,  $M_n(\mathbb{K})$  est un anneau, les rôles de 0 et 1 étant joués par les matrices nulle et identité. Cet anneau n'est pas commutatif.)

De plus l'opération de multiplication par un scalaire vérifie

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot \text{Id})A = A(\lambda \cdot \text{Id}).$$

La démonstration est facile et vous est laissée à titre d'exercice. Par exemple examinez bien l'égalité  $\text{Id} A = \text{Id} A = A$ . C'est à cause de cette règle que l'on écrit parfois 1 pour la matrice identité.

Cet énoncé signifie que les règles de calcul habituelles s'appliquent aux matrices, *sauf* les deux suivantes. D'abord la commutativité : on n'a pas toujours  $AB = BA$ , par exemple pour

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

on a

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

L'autre chose à laquelle il faut s'habituer, c'est qu'on ne peut pas toujours obtenir « l'inverse » d'une matrice. En d'autres termes, étant donnée  $A$ , il n'existe pas toujours de matrice  $A^{-1}$  telle que  $AA^{-1} = \text{Id}$ , même si  $A \neq 0$  (rappelons que le rôle de 1 est joué par  $\text{Id}$ !). En effet il suffit de prendre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

il est clair qu'un produit  $AB$  donne toujours une matrice dont la deuxième ligne est nulle, donc on n'obtiendra jamais l'identité. Ce phénomène est très important pour la suite, donc soyons plus précis.

**DÉFINITION 5.8 (ET PROPOSITION)** – Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est *inversible* lorsqu'il existe une matrice  $B \in M_n(\mathbb{K})$  telle que

$$AB = \text{Id} \quad \text{et} \quad BA = \text{Id}.$$

Une telle matrice  $B$ , lorsqu'elle existe, est unique. On la note  $A^{-1}$  et on l'appelle *l'inverse* de  $A$ . ■

*Démonstration.* Nous devons montrer l'unicité de  $B$ . Supposons donc que  $AB = BA = \text{Id}$  d'une part, et  $AC = CA = \text{Id}$  d'autre part. En multipliant  $AB = \text{Id}$  par  $C$  à gauche, on obtient

$$C(AB) = (CA)B = \text{Id}B = B = C\text{Id} = C.$$

On a donc bien  $B = C$ . □

On vient de voir un exemple de matrice non-inversible. Dans le cas des matrices  $2 \times 2$ , on peut décrire les matrices inversibles très facilement :

**PROPOSITION 5.9** – Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors  $A$  est inversible si et seulement si  $ad - bc \neq 0$ . Dans ce cas l'inverse est donnée par

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

La quantité  $ad - bc$  s'appelle le déterminant de  $A$ . Dans le chapitre du même nom, nous verrons comment étendre ceci aux matrices  $n \times n$ .

*Démonstration.* Soit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Alors

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}.$$

Si  $ad - bc = 0$ , alors  $A\tilde{A} = 0$ . Dans ce cas la matrice  $A$  ne peut pas être inversible : si elle l'était, on aurait  $A^{-1}A\tilde{A} = \tilde{A} = 0$ , donc  $a = b = c = d = 0$ , donc  $A = 0$ , et donc  $AA^{-1} = 0 = \text{Id}$ , contradiction !

Supposons maintenant que  $ad - bc \neq 0$ . On a

$$A\tilde{A} = (ad - bc)\text{Id},$$

donc en multipliant par le scalaire  $\frac{1}{ad - bc}$ , on obtient

$$A\left(\frac{1}{ad - bc}\tilde{A}\right) = \text{Id}.$$

De la même manière, vous vérifierez que dans l'autre sens on a aussi

$$\left(\frac{1}{ad - bc}\tilde{A}\right)A = \text{Id},$$

donc l'inverse de  $A$  existe et c'est bien  $\frac{1}{ad - bc}\tilde{A}$ , comme annoncé dans la proposition.  $\square$

EXEMPLE 5.10 – Revenons à l'exemple 5.6. On y trouvait la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est  $2 \times 3 + 4 \times 6 = 30$ , donc  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & -1/5 \\ 2/15 & 1/15 \end{pmatrix}.$$

Le système étudié était  $AX = B$ , et nous pouvons maintenant multiplier par  $A^{-1}$  pour obtenir

$$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = \text{Id}X = X = A^{-1}B = A^{-1} \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/10 \\ -17/15 \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes  $x = -11/10$  et  $y = -17/15$ .

### Matrices échelonnées

DÉFINITION 5.11 – Soit  $A$  une matrice. On dit que  $A$  est *échelonnée*, ou parfois *échelonnée en lignes*, lorsque les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. Dans chaque ligne de  $A$ , le premier coefficient non-nul (en partant de la gauche) est un 1. On l'appelle le *pivot* de la ligne.
2. À mesure que l'on descend dans les lignes, les pivots se décalent vers la droite.
3. Les lignes nulles de  $A$  sont situées en-dessous des lignes non-nulles.

De plus, on dit que  $A$  est *bien échelonnée* lorsqu'elle est échelonnée et que les pivots sont les seuls coefficients non-nuls dans leur colonne. ■

EXEMPLE 5.12 – Les matrices suivantes sont échelonnées (les pivots sont encadrés) :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

La première est *bien* échelonnée, mais pas la deuxième (il faudrait que le 2 soit un 0).

Les matrices  $A_i$  ci-dessous *ne sont pas* échelonnées, car elles violent les règles 1, 2, 3 respectivement :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Pourquoi prêter attention aux matrices (bien) échelonnées ? Tout simplement parce que les systèmes linéaires correspondants sont les plus simples possibles, en fait leurs solutions sont données sur un plateau.

EXEMPLE 5.13 – Prenons la matrice suivante, qui est bien échelonnée :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle a quatre colonnes, elle peut donc décrire un système à quatre inconnues sur le modèle de l'exemple 5.6. En clair, posons

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ et, par exemple, } B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

alors le système  $AX = B$  s'écrit

$$\begin{cases} \boxed{x} + 4y & & - 3t = 4 \\ & \boxed{z} & = 2 \\ & & 0 = 0 \end{cases}$$

Ici les inconnues  $x$  et  $z$  sont encore appelées « pivots », on les a d'ailleurs encadrées. La matrice étant bien échelonnée, les solutions sont sous nos yeux :

- ◊ les inconnues qui ne sont pas des pivots vont servir de paramètres,
- ◊ les pivots vont être exprimées en fonction de ces paramètres.

Les paramètres sont donc  $y$  et  $t$ , et on a  $z = 2$  et  $x = 4 - 4y + 3t$ . En d'autres termes l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \left( \begin{pmatrix} 4 - 4y + 3t \\ y \\ 2 \\ t \end{pmatrix} \text{ avec } y, t \in \mathbb{K} \right) \right\} \subset \mathbb{K}^4.$$

Il est souvent plus lisible d'écrire cet ensemble sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } y, t \in \mathbb{K} \right\}.$$

Cette méthode aurait fonctionné tout aussi bien pour n'importe quel second membre B, *sauf* dans les cas où c'est encore plus facile. Imaginons en effet que le dernier coefficient de B ne soit pas nul, disons

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

alors le système devient

$$\begin{cases} \boxed{x} + 4y & - 3t = 1 \\ & \boxed{z} & = 1 \\ & & 0 = 1 \end{cases}$$

L'équation  $0 = 1$  étant impossible à satisfaire, le système n'a pas de solution du tout.

On vient de voir un système avec une infinité de solutions, puis un système sans solution. Sans changer la matrice A, il est clair que l'on tombe dans l'une ou l'autre de ces situations, selon le second membre B.

Mais il existe aussi des systèmes possédant une solution unique, par exemple avec

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

alors le système  $A'X = B$  s'écrit

$$\begin{cases} x - 9y = b_1 \\ y = b_2 \end{cases}.$$

On a donc  $y = b_2$  et  $x = b_1 + 9y = b_1 + 9b_2$ . Notez bien qu'ici la matrice A' est échelonnée mais pas bien échelonnée (à cause



du  $-9$ ), et on a réussi à résoudre le système quand même. Ceci dit, on a dû faire une substitution supplémentaire (insérer la valeur de  $y$  dans  $x$ ).

Il est clair que si un système  $AX = B$  avec  $A$  bien échelonnée n'a *pas* une infinité de solutions (donc pas de paramètres), alors il y a un pivot dans chaque colonne ; la matrice  $A$  ressemble donc à la matrice identité à laquelle on a rajouté des lignes de zéros. Ainsi, selon  $B$ , on a soit une solution unique (si les dernières équations sont toutes  $0 = 0$ ), soit aucune (s'il y en a une du type  $0 = 1$  comme ci-dessus).

En particulier, avec une matrice bien échelonnée, on n'obtient jamais de système ayant, disons, six solutions. On va voir que toutes ces observations faites sur les matrices échelonnées se généralisent aux matrices quelconques.

### Opérations sur les lignes

Puisqu'il est si facile de résoudre les systèmes correspondant aux matrices échelonnées, on aimerait pouvoir se ramener toujours à ce cas. C'est effectivement possible.

**DÉFINITION 5.14** – Nous allons nous autoriser trois types d'opérations sur les lignes d'une matrice :

1. multiplier une ligne par un scalaire *non-nul*,
2. permuter deux lignes,
3. ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne.



**EXEMPLE 5.15** – Prenons la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

et faisons quelques opérations. Retrançons la première ligne à la dernière ligne (opérations de type (3)) :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

On a noté  $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$  pour indiquer l'opération effectuée ; d'autres abbréviations sont possibles mais en tout cas il est bon d'indiquer au lecteur comment on a obtenu la nouvelle matrice. Poursuivons par une autre opération de type (3) :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

Essayons une opération de type (1), puis une de type (2) :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 5/2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 1/2 L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 4 & 7 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

Essayons d'obtenir une matrice aussi simple que possible. Débarrassons-nous de ce 4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 5 & -11 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -11/5 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{5} L_3$$

C'est déjà une matrice échelonnée. On peut même poursuivre notre effort et obtenir une matrice bien échelonnée :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 18/5 \\ 0 & 0 & 1 & -11/5 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -22/5 \\ 0 & 1 & 0 & 18/5 \\ 0 & 0 & 1 & -11/5 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$$

et enfin

$$\left( \begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{11}{5} \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

**THÉORÈME 5.16** – *En faisant des opérations sur les lignes d'une matrice A, on peut toujours obtenir une matrice bien échelonnée, et une seule.*

On notera  $E_A$  la matrice bien échelonnée associée à A.

L'unicité de la matrice  $E_A$  sera démontrée dans la deuxième moitié de ce chapitre. Pour l'existence, il suffit de procéder comme dans l'exemple 5.15. On peut garder en tête les lignes directrices suivantes :

- ◊ On choisit une ligne avec un coefficient non-nul dans la première colonne, on met cette ligne en première position, puis avec des opérations de type (3) on fait apparaître des 0 dans la première colonne sur les autres lignes. On divise la première ligne par son premier coefficient pour que celui-ci devienne un 1.
- ◊ On oublie la première colonne et la première ligne complètement, et on continue avec le reste de la matrice. On obtient alors une matrice échelonnée.
- ◊ Pour obtenir une matrice *bien* échelonnée, on commence par le dernier pivot. Avec des opérations de type (3), on fait apparaître des 0 au-dessus de ce pivot. Puis on recommence avec les pivot précédent.

Ou alors, relisez l'exemple 5.15 soigneusement.

Toutes ces considérations n'auraient pas un grand intérêt vis-à-vis des systèmes si l'on n'avait pas le résultat suivant, qui affirme que les opérations sur les lignes ne changent pas les solutions :

**PROPOSITION 5.17** – *Considérons un système de la forme  $AX = B$ , où X et B sont des colonnes, et X contient les inconnues.*

*Soit A' obtenue à partir de A en faisant des opérations sur les lignes, et soit B' obtenue en faisant les mêmes opérations sur B. Alors le système  $A'X = B'$  a les mêmes solutions que  $AX = B$ .*

Là encore, la démonstration sera donnée plus loin dans ce chapitre (elle n'est pas difficile).

EXEMPLE 5.18 – Considérons le système

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 3x + y + z = -1 \\ x + y - z = 5 \end{cases}$$

Il est de la forme  $AX = B$  en posant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition, on ne change pas les solutions en faisant des opérations sur  $A$  et  $B$  en même temps. Il s'agit de faire les *mêmes* opérations sur ces deux matrices, et en pratique de nombreux étudiants préfèrent ajouter  $B$  comme colonne à  $A$ , de sorte que l'on fait des opérations sur la matrice

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right).$$

(La ligne verticale est juste là pour rappeler d'où vient la dernière colonne.) C'est la matrice sur laquelle nous avons travaillé dans l'exemple 5.15. Nous avons vu qu'après quelques opérations, on arrive à

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -4/5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 18/5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -11/5 \end{array} \right).$$

En faisant la traduction inverse, on retrouve un système, qui est particulièrement simple :

$$\begin{cases} x & & = & -4/5 \\ & y & & = & 18/5 \\ & & z & = & -11/5 \end{cases}$$

Ces trois valeurs de  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les solutions du système initial  $AX = B$ , comme vous pouvez le vérifier.

## Calcul de l'inverse d'une matrice

Nous allons donner une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice quand elle existe (ou démontrer que l'inverse n'existe pas lorsque c'est le cas). Nous ne dirons rien de la démonstration ici : c'est encore un résultat établi plus loin dans ce chapitre.

La méthode va paraître un peu magique. Donnons simplement l'indication suivante : nous venons d'expliquer comment résoudre les systèmes linéaires en faisant des opérations sur les lignes, alors que dans l'exemple 5.10 nous indiquions comment résoudre un système si l'on connaît l'inverse de sa matrice. C'est en comparant ces deux méthodes, qui doivent bien donner le même résultat, qu'on en déduit la méthode de calcul. Voici le principe.

PROPOSITION 5.19 – Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Alors :

1.  $A$  est inversible si et seulement si sa matrice bien échelonnée  $E_A$  est l'identité.
2. Étant donnée une suite d'opérations sur les lignes qui transforment  $A$  en  $E_A = \text{Id}$ , on obtient  $A^{-1}$  en faisant les mêmes opérations (dans le même ordre) sur la matrice identité.

EXEMPLE 5.20 – Voyons comment mettre ceci en pratique. Admettons que l'on s'intéresse à l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On va faire des opérations sur les lignes de  $A$  pour trouver sa forme bien échelonnée, et chaque opération est faite en parallèle sur la matrice identité. On commence donc par présenter les matrices côte à côte :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On commence :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{5}L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -6/5 & -3/5 & -1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1/5 & -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

On a obtenu une matrice bien échelonnée, c'est donc  $E_A$ . Ici on a  $E_A = \text{Id}$ , donc  $A$  est inversible d'après la proposition. Cette même proposition affirme aussi que la matrice  $A^{-1}$  est la dernière matrice écrite à droite, c'est-à-dire

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1/5 & -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Prenons un autre exemple, disons

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -6 & 16 & -2 \\ -11 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

C'est reparti :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 28 & -8 \\ 0 & 28 & -8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 11 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 11L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 28 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

Arrêtons-nous : on vient d'obtenir une ligne de zéros. En effet, si l'on poursuivait le calcul on obtiendrait une matrice bien échelonnée qui elle-même aurait une ligne de zéros, donc  $E_B \neq \text{Id}$ . D'après la proposition, la matrice B n'est pas inversible. Les calculs que l'on a fait sur la matrice identité n'auront servi à rien : c'est l'un des petits défauts de la méthode.

### – Deuxième lecture –

#### Un autre point de vue sur les opérations sur les lignes

L'observation suivante est riche de conséquences : faire une opération sur les lignes revient à multiplier à gauche par une matrice inversible. Plus précisément :

**PROPOSITION 5.21** – *Soit A une matrice, et A' obtenue en faisant une opération sur les lignes de A. Alors il existe une matrice inversible P telle que  $A' = PA$ .*

*De plus, on peut trouver une matrice P unique qui convient pour toutes les matrices A à la fois.*

*Démonstration.* Cherchons P qui convient pour toutes les matrices A. On n'a pas beaucoup de choix, puisqu'en faisant  $A = \text{Id}$ , on a  $A' = P\text{Id} = P$  : en d'autres termes, la matrice P elle-même doit être obtenue en faisant l'opération en question sur les lignes de la matrice identité.

Par exemple, pour multiplier la première ligne par  $\lambda \neq 0$ , on doit prendre

$$P = M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}.$$

Or on vérifie que pour toute matrice  $A$ , le produit  $M_\lambda A$  est effectivement obtenu en multipliant la première ligne de  $A$  par  $\lambda$ . De plus  $M_\lambda$  est bien inversible, d'inverse  $M_{\lambda^{-1}}$ . Donc la proposition est vraie pour cette opération. Pour multiplier une autre ligne, déplacer  $\lambda$  le long de la diagonale.

Pour permuter la première ligne et la deuxième, on doit prendre

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

On vérifie que cette matrice convient effectivement. Elle est inversible, et même égale à son inverse.

Pour ajouter  $\lambda$  fois la deuxième ligne à la première, prendre

$$P = C_\lambda^{12} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Cette matrice convient, et son inverse est  $C_{-\lambda}^{12}$ .

Les autres cas sont similaires. □

**COROLLAIRE 5.22** – *Pour chaque matrice  $A$ , il existe une matrice  $P$  inversible telle que  $E_A = PA$ .*

Attention, cette matrice  $P$  dépend de  $A$  fortement !

*Démonstration.* On peut obtenir  $E_A$  en faisant des opérations sur les lignes de  $A$  ; disons que cela nécessite  $k$  étapes. Si la première opération correspond à la matrice  $P_1$ , alors après une étape on travaille avec  $P_1 A$ . Si la deuxième opération est donnée par  $P_2$ , on se retrouve avec  $P_2 P_1 A$ . Après  $k$  opérations, on a  $P_k P_{k-1} \cdots P_1 A = E_A$ . La matrice  $P = P_k P_{k-1} \cdots P_1$  est inversible et son inverse est  $P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_k^{-1}$ . □

On peut maintenant démontrer très facilement la proposition 5.17 :



*Démonstration de la proposition 5.17.* Pour toute matrice inversible  $P$ , on a

$$AX = B \iff PAX = PB,$$

puisqu'on passe de l'égalité de gauche à celle de droite en multipliant par  $P$ , et dans l'autre sens en multipliant par  $P^{-1}$ . Or faire des opérations sur les lignes revient bien à multiplier par une matrice inversible.  $\square$

### Justification de la méthode de calcul de l'inverse

Commençons par un petit lemme utile.

LEMME 5.23 – Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées telles que

$$AB = \text{Id}.$$

Alors  $A$  et  $B$  sont toutes les deux inversibles, et inverses l'une de l'autre.

Rappelez-vous que dans la définition 5.8, on donnait deux conditions à vérifier :  $AB = \text{Id}$  et également  $BA = \text{Id}$ . Donc ce résultat affirme qu'une seule de ces conditions entraîne l'autre.

*Démonstration.* Soit  $P$  inversible telle que  $PA = E_A$ . On a donc

$$PAB = E_A B = P \text{Id} = P.$$

En particulier la matrice  $E_A B = P$  est inversible. On en conclut qu'il ne peut pas y avoir de lignes nulles dans  $E_A$ , sinon il en serait de même dans  $E_A B$ , et cette matrice ne pourrait pas être inversible.

Puisque  $E_A$  est bien échelonnée sans lignes nulles, et carrée, on doit avoir  $E_A = \text{Id}$ . Ainsi  $E_A B = \text{Id} B = B = P$ , et  $B$  est inversible. En multipliant  $AB = \text{Id}$  par  $B^{-1}$  à droite, on obtient  $A = B^{-1}$ , donc  $A$  est inversible également, et c'est l'inverse de  $B$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 5.19.* Si  $A$  est inversible, on a  $E_A = \text{Id}$  comme on vient de le voir dans la démonstration du lemme. Réciproquement si  $E_A = \text{Id}$ , alors on prend  $P$  inversible telle

que  $PA = E_A = \text{Id}$ . D'après le lemme  $A$  est inversible et son inverse est  $A^{-1} = P$ . Ceci établit déjà le (1) de la proposition 5.19.

Puisque  $P = A^{-1}$ , on a  $P\text{Id} = A^{-1}$ . Or multiplier à gauche par  $P$  revient à faire des opérations sur les lignes, et on constate bien que  $A^{-1}$  s'obtient en faisant sur la matrice identité les mêmes opérations que l'on a faites sur  $A$ . C'est ce que dit le (2) de la proposition.  $\square$

### L'unicité de la matrice bien échelonnée

**PROPOSITION 5.24** – Soient  $E_1$  et  $E_2$  des matrices bien échelonnées de même dimension. On suppose qu'il existe une matrice  $P$  inversible telle que  $E_2 = PE_1$ . Alors  $E_1 = E_2$ . De plus les coefficients de  $P$  sous la diagonale sont nuls, et les coefficients sur la diagonale sont tous des 1.

*Démonstration.* Supposons que  $E_1$  commence par  $k$  colonnes nulles (avec éventuellement  $k = 0$ ). La  $k + 1$ -ème colonne est donc

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

puisque  $E_1$  est bien échelonnée. En conséquence, la matrice  $PE_1$  commence également par  $k$  colonnes de 0, et sa  $k + 1$ -ème colonne est la  $k + 1$ -ème colonne de  $P$ . Mais  $PE_1 = E_2$  est échelonnée, donc cette colonne de  $P$  est elle aussi de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On voit donc déjà que  $E_1$  et  $E_2$  sont identiques dans les  $k + 1$

premières colonnes. Plus précisément on notera

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \boxed{F_i} \\ \\ \end{array}$$

pour  $i = 1$  ou  $2$ . On notera que la matrice  $F_i$  est bien échelonnée. De même on note

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \boxed{P'} \\ \end{array}.$$

Cette matrice  $P'$  est inversible ; en fait si  $P$  est de dimension  $n \times n$ , alors l'inverse de  $P'$  est le bloc  $(n-1) \times (n-1)$  en bas à droite de  $P^{-1}$ .

À partir de l'égalité  $E_2 = PE_1$ , on tire facilement  $F_2 = P'F_1$ . Faisons une récurrence sur la taille des matrices. Comme  $F_i$  est strictement plus petite que  $E_i$ , on peut supposer que l'on connaît la proposition dans ce cas, et donc que  $F_1 = F_2$  et que  $P'$  est de la forme annoncée. On voit déjà que  $P$  est aussi de la forme annoncée. Reste à montrer que  $E_1$  et  $E_2$  ont la même première ligne.

Si  $E_1$  a un pivot dans la ligne  $i > 1$ , alors  $E_2$  aussi puisque  $F_1 = F_2$ . Un pivot étant seul dans sa colonne, on constate que, dans la même colonne de  $PE_1$ , on trouve  $a_i$  sur la première ligne. Puisque  $PE_1 = E_2$  est bien échelonnée avec un pivot dans cette colonne, on doit avoir  $a_i = 0$  dans ce cas.

Si par contre la ligne  $i$  de  $E_1$  n'a pas de pivot, c'est qu'elle est nulle. Peu importe alors la valeur de  $a_i$  pour cet indice  $i$  : la première ligne de  $PE_1$  est égale à la première ligne de  $E_1$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 5.16.* Si  $E_1$  et  $E_2$  sont deux matrices bien échelonnées obtenues à partir de  $A$ , alors il existe des matrices inversibles  $P_1$  et  $P_2$  telles que  $P_1A = E_1$  et  $P_2A = E_2$  (pro-

position 5.21). Ainsi  $E_2 = P_2 P_1^{-1} E_1$ , donc la proposition précédente montre que  $E_2 = E_1$ . La matrice échelonnée associée à  $A$  est bien unique.  $\square$

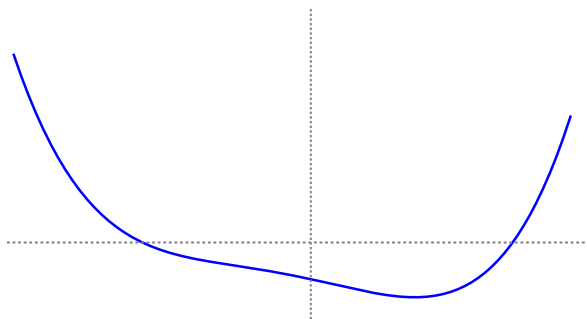
# Chapitre 6

## Continuité

– Première lecture –

### Introduction & Définitions

Une fonction *continue*, intuitivement, est une fonction que l'on peut dessiner sans lever le stylo, comme celle-ci :



Ci-dessous, un dessin d'une fonction qui n'est pas continue. On a même l'intuition, plus précisément, qu'elle n'est pas continue au point  $x_0$  :

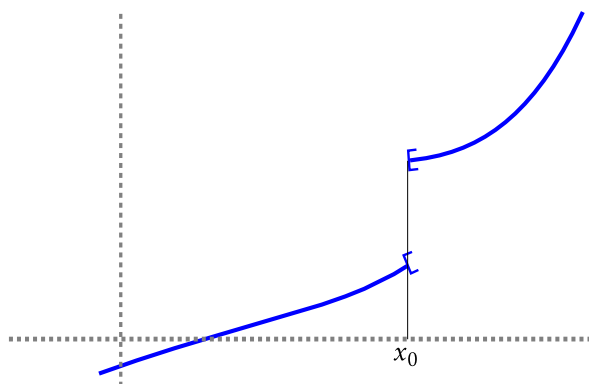


FIGURE 6.1 – Le graphe d’une fonction qui n’est pas continue en  $x_0$ . Les crochets sont simplement là pour indiquer que la valeur de la fonction au point  $x_0$  est celle indiquée sur la branche droite du graphe.

Pourquoi s’intéresser aux fonctions continues ? La propriété cruciale d’une fonction continue est la suivante : puisque le graphe est tracé d’un seul tenant, alors si la fonction prend des valeurs positives et des valeurs négatives, on est sûr qu’elle prend également la valeur 0. Sur le premier graphe ci-dessus, la fonction est d’abord positive, puis prend quelques valeurs négatives ; et bien sûr elle passe par la valeur 0 (comment éviter cela si on ne peut pas lever le stylo ?). De même, puisque cette fonction reprend des valeurs positives, elle s’annule une deuxième fois.

En d’autres termes, si l’on sait qu’une fonction  $f$  est continue, alors on peut *prédire l’existence de solutions* de l’équation  $f(x) = 0$ . De nombreuses équations qui nous concernent peuvent se mettre sous cette forme, donc la notion de continuité va être très utile.

Oui mais comment traduire mathématiquement l’idée de continuité ? Il y a plusieurs façons de le faire, toutes assez abstraites au premier abord, et nous devrions avoir un seul critère pour juger du bien-fondé d’une définition : elle doit nous permettre de démontrer rigoureusement la propriété ci-

dessus. Nous allons prendre la définition qui nous paraît la plus simple, et nous allons effectivement démontrer le célèbre « théorème des valeurs intermédiaires », qui en est la version précise.

**DÉFINITION 6.2** – Soit  $I \subset \mathbb{R}$ , et soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit que  $f$  est *continue* au point  $x_0 \in I$  lorsque, pour toute suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  qui converge vers  $x_0$ , la suite  $f(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $f(x_0)$ . ■

(Le lettre  $I$  est pour « intervalle », puisque la plupart de nos exemples sont sur un intervalle, et certains théorèmes ne fonctionnent que dans ce cas ; ceci dit, en toute généralité  $I$  peut être n’importe quoi.)

Voyons un exemple :

**LEMME 6.3** – Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme. Alors la fonction  $x \mapsto P(x)$  est continue (en tout point  $x_0$ ).

*Démonstration.* Soit donc une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  telle que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0$ . Puisque  $P$  est un polynôme, la suite  $(P(u_n))$  est obtenue à partir de  $(u_n)$  en faisant une série d’additions et de multiplications. Les limites de suites sont « compatibles » avec les sommes et les produits, comme la proposition 4.10 nous l’affirme, donc  $P(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} P(x_0)$ . Ce qui signifie par définition que  $P$  est continue. □

**EXEMPLE 6.4** – Le premier graphe de ce chapitre est celui de  $x \mapsto x^4 + x^3 - x^2 - 5x + 1$ . Dire que cette fonction est continue en  $x_0$  revient à dire que, si  $u_n \rightarrow x_0$ , alors  $u_n^4 + u_n^3 - u_n^2 - 5u_n + 1 \rightarrow x_0^4 + x_0^3 - x_0^2 - 5x_0 + 1$ , ce qui est clair. Le dessin a été obtenu à l’aide d’un ordinateur, qui procède à toutes sortes d’approximations pendant le tracé, donc on ne peut pas conclure grand’chose de l’aspect de ce graphe. Toutefois, il est rassurant que le résultat ne soit pas contraire à notre intuition des fonctions continues.

**EXEMPLE 6.5** – Voici un exemple de fonction qui n’est pas continue. Définissons  $f$  sur l’intervalle  $[0, 2]$  par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Le graphe de  $f$  fait donc un « saut » autour de la valeur 1. Pour montrer que  $f$  n'est pas continue, on va considérer la suite  $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ . On a bien  $u_n \rightarrow 1$ , mais  $f(u_n) = 0$  pour tout  $n$ , donc  $(f(u_n))$  ne risque pas de converger vers  $f(1) = 1$ . Par définition,  $f$  n'est pas continue.

### Le théorème des valeurs intermédiaires

Avant d'énoncer ce théorème, un petit rappel sur les intervalles. Jusqu'à présent nous avons utilisé le mot « intervalle » en nous basant sur les souvenirs du lycée. Voici une définition simple :

**DÉFINITION 6.6** – Soit  $I \subset \mathbb{R}$ . On dit que  $I$  est un *intervalle* lorsque, pour tous nombres  $a, b$  et  $c$  tels que  $a < b < c$  avec  $a \in I$  et  $c \in I$ , on a aussi  $b \in I$ . ■

**EXEMPLE 6.7** – On a les exemples suivants :

- ◇ Les intervalles *ouverts*, de la forme

$$]a, b[ = \{x \mid a < x < b\},$$

avec  $a, b \in \mathbb{R}$  ou même  $a = -\infty, b = +\infty$ .

- ◇ Les intervalles *fermés*, qui peuvent être « compacts » c'est-à-dire de la forme

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R},$$

ou bien « non-compacts », c'est-à-dire de la forme :

$$[a, +\infty[ \quad \text{ou} \quad ]-\infty, b].$$

- ◇ Les intervalles *semi-ouverts*, qui sont de la forme

$$]a, b] \quad \text{ou} \quad [a, b[.$$

En fait, cette liste est complète. Vous montrerez à titre d'exercice que tout intervalle  $I$  est de l'un des types ci-dessus, et que de plus  $a = \inf I$  et  $b = \sup I$ , lorsque l'une ou l'autre de ces bornes existe.



Voyons un contre-exemple. L'ensemble

$$I = [0, 1] \cup [3, 4]$$

n'est pas un intervalle. D'abord, il n'est pas dans la liste ci-dessus, et surtout on voit tout de suite que  $1 \in I$ , que  $3 \in I$  mais que  $2 \notin I$ , ce qui contredit bien la définition.

Nous pouvons maintenant énoncer :

**THÉORÈME 6.8 (THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES)** – Soit  $I$  un intervalle, et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Soient  $a < b$  deux éléments de  $I$ . Alors si  $y$  est un nombre quelconque compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe (au moins) un nombre  $x$  avec  $a \leq x \leq b$ , tel que  $f(x) = y$ .

(En d'autres termes, l'image d'un intervalle par une fonction continue est encore un intervalle.)

*Démonstration.* Supposons par exemple que  $f(a) < f(b)$ , de sorte que  $f(a) \leq y \leq f(b)$ . Posons

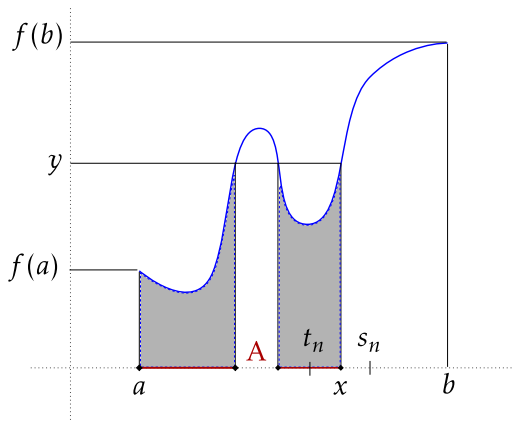
$$A = \{t \mid a \leq t \leq b \text{ et } f(t) \leq y\}.$$

C'est un ensemble non-vide ( $a \in A$ ) et majoré (par  $b$ ), donc il possède une borne supérieure  $x = \sup A$ .

Soit  $n$  un entier  $\geq 1$ . Considérons d'une part le nombre  $x - \frac{1}{n} < x$ . Ce n'est pas un majorant de  $A$  (puisque  $x$  est le plus petit), donc il existe  $t_n \in A$  avec  $x - \frac{1}{n} < t_n \leq x$ . On a  $t_n \rightarrow x$ . La fonction  $f$  étant continue, on a également  $f(t_n) \rightarrow f(x)$ . Puisque  $f(t_n) \leq y$ , on a  $f(x) \leq y$ .

D'autre part, le nombre  $s_n = x + \frac{1}{n} > x$  ne peut appartenir à  $A$ , donc  $f(s_n) > y$ . On a  $s_n \rightarrow x$  et, par continuité de  $f$ , il vient  $f(s_n) \rightarrow f(x)$  et  $f(x) \geq y$ .  $\square$

Notez bien que  $x$  n'est pas unique. Sur le dessin suivant on a représenté les éléments de la démonstration, et on voit qu'on avait trois choix dans ce cas pour  $x$ , celui retenu étant le plus grand.



EXEMPLE 6.9 (RACINE  $n$ -IÈMES) – Prenons l'exemple de la fonction  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^n$ , pour un entier  $n$ . C'est une fonction polynomiale, donc continue.

Prenons un nombre réel  $y \geq 0$ , et choisissons un nombre  $b$  tel que  $b^n > y$ . On a donc  $f(0) \leq y \leq f(b)$ , et le théorème des valeurs intermédiaires affirme donc l'existence d'un  $x$  tel que  $f(x) = y$ , c'est-à-dire  $x^n = y$ . On constate que tout nombre réel positif possède une racine  $n$ -ième.

De plus, si  $0 \leq x_1 < x_2$ , on a  $x_1^n < x_2^n$ ; cette remarque simple entraîne l'unicité du  $x \geq 0$  tel que  $x^n = y$ . La racine  $n$ -ième positive de  $y$  est bien définie, on la note  $\sqrt[n]{y}$ .

Nous avons démontré ce résultat pour  $n = 2$ , avec pas mal d'efforts (proposition 2.6). Le théorème des valeurs intermédiaires, maintenant qu'il est démontré, simplifie considérablement ce genre de questions.

Il nous reste à considérer les racines  $n$ -ièmes dans  $\mathbb{C}$ , ce qui nécessite de nouveaux outils.

### Autres exemples de fonctions continues

Les fonctions « usuelles » sont toutes continues :

PROPOSITION 6.10 – *Les fonctions suivantes sont continues en tout point de leur domaine de définition :*

◇  $x \mapsto e^x$  sur  $\mathbb{R}$ ,

- ◇  $x \mapsto \sin(x)$  sur  $\mathbb{R}$ ,
- ◇  $x \mapsto \cos(x)$  sur  $\mathbb{R}$ ,
- ◇  $x \mapsto \tan(x)$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$ ,
- ◇  $x \mapsto \ln(x)$  sur  $]0; +\infty[$ ,
- ◇  $x \mapsto \arcsin(x)$  sur  $[-1, 1]$ ,
- ◇  $x \mapsto \arccos(x)$  sur  $[-1, 1]$ ,
- ◇  $x \mapsto \arctan(x)$  sur  $\mathbb{R}$ ,
- ◇  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  sur  $]0; +\infty[$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour l'instant, on ne risque pas de donner une démonstration de cette proposition : on n'a même pas de définition rigoureuse de la plupart de ces fonctions ! Toutefois, dans le reste de ce chapitre, on va établir que  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  est continue, et montrer également qu'il suffit de montrer la continuité des quatre premières fonction dans la liste ci-dessus pour obtenir automatiquement la continuité des autres. Grâce à certaines formules de trigonométrie qu'il faudra établir et que vous devinez peut-être, on se ramènera à montrer seulement la continuité de l'exponentielle. Pour cela, on travaillera directement avec la définition donnée dans l'exemple 4.21. Nous traiterons ceci dans le chapitre intitulé « L'exponentielle ».

Pour construire encore plus de fonctions continues, on utilise le résultat suivant :

**PROPOSITION 6.11** – Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $I$  et continues en  $x_0 \in I$ . Alors

- ◇ (somme)  $x \mapsto f(x) + g(x)$  est continue en  $x_0$ ,
- ◇ (produit)  $x \mapsto f(x)g(x)$  est continue en  $x_0$ ,
- ◇ (inverse) si  $f(x) \neq 0$  sur  $I$ , alors  $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$  est continue en  $x_0$ .

En effet, ceci découle directement de la proposition 4.10.

**EXEMPLE 6.12** – Si l'on admet que le sinus et le cosinus sont des fonctions continues, alors

$$x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

est également continue là où elle est définie, c'est-à-dire là où le cosinus ne s'annule pas.

Par rapport aux suites, une nouveauté très simple :

**PROPOSITION 6.13** – Soit  $f : I \rightarrow J$  continue en  $x_0 \in I$ , et soit  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  continue en  $f(x_0) \in J$ . Alors la fonction  $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , qui à  $x$  associe  $g(f(x))$ , est continue en  $x_0$ .

*Démonstration.* Soit donc  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite qui converge vers  $x_0$ . Posons  $v_n = f(u_n)$ . La suite  $(v_n)$  converge vers  $f(x_0)$  car  $f$  est continue en  $x_0$ . La suite  $(g(v_n))$  converge vers  $g(f(x_0))$  car  $g$  est continue en  $f(x_0)$ . Donc  $g \circ f$ , par définition, est continue en  $x_0$ .  $\square$

**EXEMPLE 6.14** – Considérons une expression comme

$$x \mapsto \frac{e^{\cos(x)} - \ln(x)}{1 + (\arctan(x))^2}.$$

Les propositions ci-dessous permettent d'affirmer en un clin d'oeil que cette fonction est continue sur  $]0; +\infty[$ . En effet, commençons par

$$x \mapsto 1 + (\arctan(x))^2;$$

la fonction  $\arctan$  est continue (6.10), donc son carré aussi (6.11); la fonction constante égale à 1 est continue, donc la somme  $1 + (\arctan(x))^2$  est continue (6.11 encore).

Ce dénominateur ne s'annule pas, donc

$$x \mapsto \frac{1}{1 + (\arctan(x))^2}$$

est continue (6.11).

Ensuite  $x \mapsto e^{\cos(x)}$  est continue puisque c'est une composition de fonctions continues (6.13); l'expression  $x \mapsto -\ln(x)$  est le produit du logarithme et de la fonction constante égale à  $-1$ , c'est donc une fonction continue. La somme des deux aussi : le numérateur est continu.

Enfin, toute l'expression de départ étant le produit de deux fonctions continues, il est continu.

Il faut s'entraîner à reconnaître très vite que ce genre d'expression donne une fonction continue.

## Le langage des limites

DÉFINITION 6.15 – Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $x_0 \in \mathbb{R}$ , ou même  $x_0 = \pm\infty$ . On dit que  $f$  admet  $\ell$  pour *limite* en  $x_0$ , et on note

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell,$$

lorsque pour toute suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  qui converge vers  $x_0$ , avec  $u_n \in I$ , la suite  $(f(u_n))$  converge vers  $\ell$ . ■

Dans un premier temps, cette notion apparaît comme une reformulation de la continuité, notamment à cause du résultat suivant :

PROPOSITION 6.16 – Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ . Alors

$$f \text{ est continue en } x_0 \iff f \text{ admet une limite en } x_0.$$

De plus, la limite est automatiquement  $f(x_0)$ .

Démonstration. Si  $f$  est continue en  $x_0$ , alors par définition

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

donc on a l'implication  $\Rightarrow$ . Pour montrer  $\Leftarrow$ , supposons que  $f$  admette la limite  $\ell$  en  $x_0$ . Il suffit de prendre la suite constante  $u_n = x_0$  pour constater que  $(f(u_n))$  converge vers  $f(x_0)$  (cette suite est elle-même constante). Donc  $\ell = f(x_0)$ . Il est alors clair que  $f$  est continue en  $x_0$ . □

Mais il ne faut pas s'y méprendre. Les limites apportent une souplesse nouvelle, puisque l'on *ne suppose pas* que  $f$  est définie en  $x_0$  dans la définition des limites. Voyons des exemples.

EXEMPLE 6.17 – Considérons la fonction  $f: ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

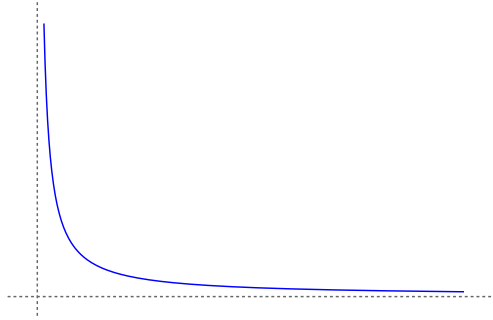
Regardons la limite en 0. Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers 0 avec  $u_n$  dans le domaine de définition de  $f$ , c'est-à-dire  $u_n > 0$ , on a  $f(u_n) = \frac{1}{u_n} \rightarrow +\infty$ . C'est donc que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

Le même raisonnement donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

En fait le graphe a l'allure suivante :



L'exemple suivant illustre ce qu'on appelle le « prolongement par continuité ».

EXEMPLE 6.18 – Soit  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cette fonction est continue en tout  $x_0 \neq 0$  comme on le voit facilement à partir des résultats ci-dessus.

Regardons la limite en 0, donc prenons  $(u_n)$  qui tend vers 0 avec  $u_n \neq 0$ . Alors  $|f(u_n)| \leq |u_n|$  puisque  $|\sin(\frac{1}{u_n})| \leq 1$ . On en déduit  $f(u_n) \rightarrow 0$ , et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

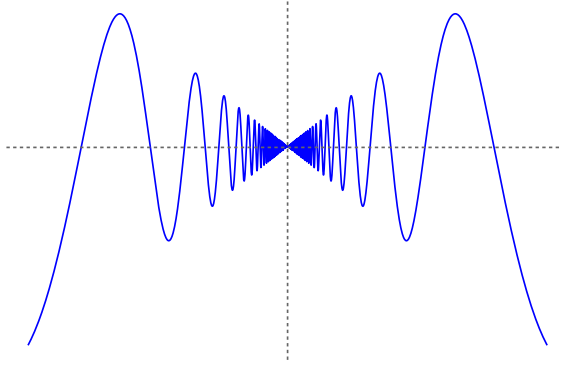
Définissons alors

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions  $f$  et  $\tilde{f}$  ont la même limite en tout point  $x_0 \in \mathbb{R}$  (prenez le temps de vous en convaincre). De plus cette limite vaut toujours  $\tilde{f}(x_0)$ . On conclut que  $\tilde{f}$  est continue.

On dit que  $\tilde{f}$  prolonge  $f$  par continuité, puisqu'elle coïncide avec  $f$  sur le domaine de définition de cette dernière, et qu'elle est continue. Vu la limite de  $f$  en 0, on n'aurait pas pu prendre une autre valeur pour  $\tilde{f}(0)$ , donc le prolongement est unique.

Voici le graphe de  $f$  sur  $[-0, 2; 0, 2]$  :



Pour l'instant nous ne sommes pas capables de calculer beaucoup de limites (pas plus qu'au lycée). Dans le chapitre « Formules de Taylor » nous verrons une méthode rapide et facile, qui fonctionne dans beaucoup de cas.

### Continuité et inégalités

Le résultat suivant est très utile. Il affirme que si une fonction continue satisfait une inégalité en un point, alors ceci reste vrai au « voisinage » du point :

**PROPOSITION 6.19** – Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue en  $x_0 \in I$ . On suppose que  $f(x_0) > 0$ . Alors il existe un intervalle ouvert  $J = ]a, b[$  avec  $x_0 \in J$  tel que  $f(x) > 0$  pour tout  $x \in J$ .

*Démonstration.* On va même montrer qu'on peut prendre  $a = x_0 - \frac{1}{n}$  et  $b = x_0 + \frac{1}{n}$  pour un certain entier  $n$ . En effet, si ce n'était pas le cas, par l'absurde on trouverait pour chaque  $n$  un  $x_n$  tel que

$$x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$$

et tel que  $f(x_n) \leq 0$ . La suite  $(x_n)$  converge vers  $x_0$ , et par continuité de  $f$  la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $f(x_0)$  : on en déduit  $f(x_0) \leq 0$  ce qui est absurde.  $\square$

En guise d'application nous allons montrer le théorème suivant, qui donne des définitions alternatives de la notion de continuité. Le (3) en particulier est utilisé dans de nombreux livres.

**THÉORÈME 6.20** – Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.

1.  $f$  est continue en  $x_0$ ;
2. pour tout intervalle ouvert  $J$  contenant  $f(x_0)$ , il existe un intervalle ouvert  $I'$  contenant  $x_0$  tel que  $f(I') \subset J$ ;
3. pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  pour tous les  $x$  tels que  $|x - x_0| < \delta$ .

*Démonstration.* Montrons que (1)  $\Rightarrow$  (2). L'intervalle  $J$  étant donné, il existe  $m$  et  $M$  tels que  $f(x_0) \in ]m, M[ \subset J$ . Soit alors  $g(x) = f(x) - m$ ; c'est une fonction continue telle que  $g(x_0) > 0$ , donc d'après la proposition précédente on a aussi  $g(x) > 0$  pour tous les  $x$  dans un intervalle  $]a_1, b_1[$ . De même en considérant  $h(x) = M - f(x)$ , on obtient  $h(x) > 0$  pour  $x$  dans un intervalle  $]a_2, b_2[$ . Sur l'intervalle  $I' = ]a_1, b_1[ \cap ]a_2, b_2[$ , on a  $m < f(x) < M$ , donc  $f(I') \subset ]m, M[ \subset J$ .

Montrons (2)  $\Rightarrow$  (3). Prenons  $J = ]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ , alors le (2) donne un intervalle  $I'$ , qui lui-même contient un intervalle de la forme  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ . L'inclusion  $f(I') \subset J$  donne la conclusion du (3).

Montrons (3)  $\Rightarrow$  (1). Soit donc  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite qui converge vers  $x_0$ ; on doit montrer que  $(f(u_n))$  converge vers  $f(x_0)$ . On prend donc  $\varepsilon > 0$ , et un  $\delta$  comme dans le (3). Pour  $n$  suffisamment grand, on a  $|u_n - x_0| < \delta$ , et donc  $|f(u_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ .  $\square$

– Deuxième lecture –



## Continuité et fonctions monotones

DÉFINITION 6.21 – Une fonction  $f$  est dite *croissante* lorsque, pour tout  $x$  et  $y$  dans son domaine de définition, l'inégalité  $x < y$  entraîne  $f(x) \leq f(y)$ . Elle est dite *décroissante* si  $x < y$  entraîne au contraire  $f(x) \geq f(y)$ . (Ainsi  $f$  ne peut être à la fois croissante et décroissante que si elle est constante.)

On dit d'une fonction  $f$  qu'elle est *monotone* si elle est ou bien croissante, ou bien décroissante. ■

Nous verrons beaucoup d'exemples dans le chapitre sur la dérivabilité. Notons simplement que l'exponentielle est croissante, la fonction cosinus est décroissante sur  $[0, \pi]$ , et la même fonction cosinus vue comme une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier n'est pas monotone.

Le comportement des fonctions monotones vis-à-vis de la continuité est particulièrement simple. Commençons par une sorte de réciproque au théorème des valeurs intermédiaires :

PROPOSITION 6.22 – Soit  $I$  un intervalle et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction monotone. Alors  $f$  est continue si et seulement si  $f(I)$  est un intervalle.

Par exemple, la fonction sur la figure 6.1 est croissante. Elle n'est pas continue, et son ensemble image est en deux morceaux.

*Démonstration.* Le théorème des valeurs intermédiaires affirme que si  $f$  est continue, alors  $f(I)$  est un intervalle. Supposons que  $f$  est croissante et montrons la réciproque (le cas où  $f$  est décroissante est similaire). Prenons  $x_0 \in I$  et supposons pour l'instant que  $f(x_0)$  n'est pas une borne de l'intervalle  $f(I)$ .

Soit  $J$  un intervalle ouvert contenant  $f(x_0)$ . Alors  $J \cap f(I)$  est un intervalle contenant  $f(x_0)$ , donc contenant un intervalle  $[m, M]$  avec  $m < f(x_0) < M$ . Par définition  $m = f(a)$  et  $M = f(b)$  pour  $a, b \in I$ . Comme  $f$  est croissante, on a  $a < x_0 < b$  d'une part, et d'autre part pour  $a < x < b$  on a  $m < f(x) < M$ . En posant  $I' = ]a, b[$ , on a en particulier  $f(I') \subset J$ . D'après le (2) du théorème 6.20, ceci montre que  $f$  est continue en  $x_0$ .

Lorsque  $f(x_0)$  est une borne de  $f(I)$ , on a  $m = f(x_0)$  ou  $M = f(x_0)$ , et selon le cas,  $f(x_0)$  est un minimum ou un maximum

de la fonction croissante  $f$ . On peut adapter facilement la démonstration (laissé en exercice).  $\square$

Dans le reste de ce chapitre, nous aurons besoin des notions de fonction injective, surjective, et bijective (définitions 1.6, 1.10, 1.13).

PROPOSITION 6.23 – Soit  $I$  un intervalle, et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors  $f$  est monotone si et seulement si elle est injective.

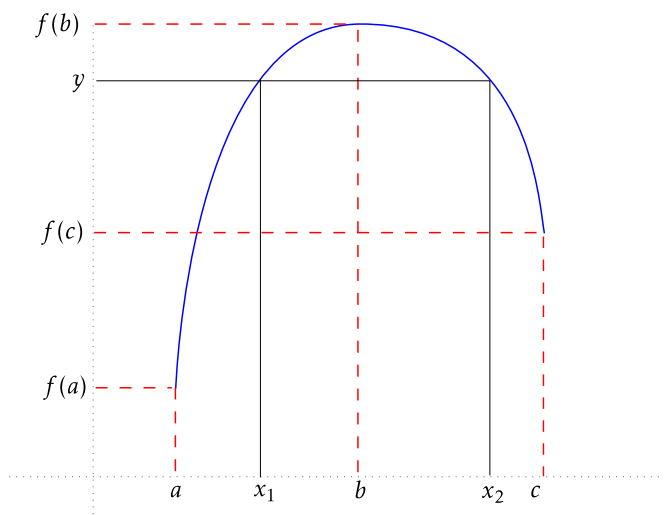
*Démonstration.* Si  $f$  est croissante (disons), alors en prenant deux éléments  $x_1 \neq x_2 \in I$  on doit avoir  $x_1 < x_2$  ou  $x_2 < x_1$ , donc  $f(x_1) < f(x_2)$  ou  $f(x_2) < f(x_1)$  selon le cas, et certainement  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Donc  $f$  est injective.

Voyons la réciproque. Supposons que  $f$  est continue et injective, et prenons  $a \in I$ . On va montrer que  $f$  est monotone sur  $[a, +\infty[$ ; comme  $a$  est arbitraire, on aura bien établi que  $f$  est monotone.

Soit  $g(x) = f(x) - f(a)$ , que l'on voit comme une fonction définie sur l'intervalle  $I \cap ]a; +\infty[$ . Par injectivité de  $f$ , la fonction  $g$  ne s'annule pas. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle ne peut pas changer de signe, donc disons par exemple que l'on a  $g(x) > 0$  pour tous les  $x > a$ , c'est-à-dire  $f(x) > f(a)$ . Dans ce cas on va montrer que  $f$  est croissante sur  $]a; +\infty[$ .

En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait deux valeurs  $b$  et  $c$  avec  $a < b < c$  telles que  $f(b) > f(c)$ . Mais alors, prenons n'importe quelle valeur  $y$  telle que  $f(c) < y < f(b)$  et  $f(a) < y < f(b)$ . En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle  $[a; b]$ , on trouve  $x_1 < b$  tel que  $f(x_1) = y$ . En faisant de même sur  $[b; c]$  on trouve  $x_2 > b$  tel que  $f(x_2) = y$ . Ceci est absurde puisque  $f$  est injective.  $\square$

La fin de la démonstration est illustrée sur la figure suivante.



**THÉORÈME 6.24** – Soit  $f: I \rightarrow J$  une bijection continue, où  $I$  et  $J$  sont des intervalles de  $\mathbb{R}$ . Alors sa réciproque  $f^{-1}$  est également continue.

*Démonstration.* La fonction  $f$  étant continue et injective, elle est monotone par la proposition précédente. Donc  $f^{-1}$  est également monotone. De plus  $f^{-1}(J) = I$ , qui est un intervalle par hypothèse, donc  $f^{-1}$  est continue d’après la proposition 6.22.

□

**EXEMPLE 6.25** – Lorsque nous aurons (enfin) montré que la fonction exponentielle est continue, nous déduirons du théorème ci-dessus que sa réciproque le logarithme est également continue. De même les fonctions arccosinus, arcsinus, et arctangente sont continues parce que les fonctions cosinus, sinus, et tangentes sont continues, comme nous le montrerons.

Pour l’instant, nous pouvons déjà établir fermement que  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  est continue sur  $[0; +\infty[$  : en effet, c’est la réciproque de la fonction  $x \mapsto x^n$ , qui est continue puisqu’elle est polynomiale.

## Fonctions de plusieurs variables

Puisque la continuité s'exprime en termes de convergence de suites, et que nous savons ce que signifie « converger » pour une suite de vecteurs (voir proposition 4.28), nous pouvons étendre sans problème la définition principale de ce chapitre :

**DÉFINITION 6.26** – Soit  $X \subset \mathbb{R}^n$ , et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction. On dit que  $f$  est *continue* en  $x \in X$  lorsque pour toute suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  qui converge vers  $x$  (dans  $\mathbb{R}^n$ ), la suite  $(f(u_n))$  converge vers  $f(x)$  (dans  $\mathbb{R}^m$ ).

On dit que  $f$  admet  $\ell$  pour limite en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  lorsque pour toute suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  qui converge vers  $x_0$ , la suite  $(f(u_n))$  converge vers  $\ell$  (ceci même si  $x_0 \notin X$ ). ■

Notons qu'une telle fonction est de la forme

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Chaque fonction  $f_i$  est définie sur  $X$  et prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On appelle ces fonctions les « composantes » de  $f$ .

Le résultat suivant se démontre exactement comme les énoncés correspondants pour les fonctions d'une seule variable.

**PROPOSITION 6.27** – *Les sommes, produits et inverses de fonctions continues, lorsqu'elles sont définies, sont continues. La composition de deux fonctions continues est encore continue.*

*Avec les notations ci-dessus, la fonction  $f$  est continue si et seulement si chaque composante  $f_i$  est continue.*

*De plus,  $f$  est continue en  $x \in X$  si et seulement si elle admet la limite  $f(x)$  en ce point.*

*Enfin, une fonction  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$  pour tous les  $x$  tels que  $\|x - x_0\| < \delta$ .*

Attention, par contre la réciproque d'une fonction continue de plusieurs variables n'est pas toujours continue, contrairement au cas traité dans le théorème 6.24.

EXEMPLE 6.28 – La projection  $p_i$ , définie sur  $\mathbb{R}^n$  par

$$p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i,$$

est continue : on le vérifie directement à partir des définitions.

Partant de là, on peut utiliser des sommes et produits, par exemple

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto 2x_1x_3 - x_2^5$$

est continue sur  $\mathbb{R}^3$  d'après la proposition précédente.

On peut aussi composer avec des fonctions usuelles :

$$(x_1, x_2) \mapsto \sin(x_1x_2)$$

est continue, ainsi que

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto e^{x_1^2 - x_3} - \arctan(x_2 - 1).$$

EXEMPLE 6.29 – Voici un exemple plus sophistiqué. On va identifier l'ensemble des matrices  $M_n(\mathbb{R})$  avec  $\mathbb{R}^{n^2}$  pour toutes les questions de continuité (le fait de disposer les nombres en tableau ne change rien à l'affaire). De même on va identifier  $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$  avec  $\mathbb{R}^{2n^2}$ .

Ceci étant fait, il est légitime de demander si la fonction suivante est continue :

$$\begin{aligned} f: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) &\longmapsto f(A, B) = AB. \end{aligned}$$

Et la réponse est oui : si  $A = (a_{ij})_{i,j}$  et  $B = (b_{ij})_{i,j}$ , alors sur la ligne  $i$ , dans la colonne  $j$  de  $f(A, B)$  on trouve

$$\sum_{k=0}^n a_{i,k} b_{k,j}.$$

Cette expression est continue (elle est obtenue à partir des projections en faisant des produits et des sommes). Puisque les composantes de  $f$  sont continues, c'est que  $f$  est elle-même continue.

Notons maintenant  $GL_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices *inversibles* de  $M_n(\mathbb{R})$  ; c'est une notation standard qui fait référence

à l'expression « groupe linéaire ». Que dire de la continuité de la fonction suivante ?

$$\begin{array}{ccc} g: \text{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \text{GL}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^{-1}. \end{array}$$

C'est loin d'être une question abstraite ou inutile. Lorsque vous confiez à un ordinateur la tâche de calculer l'inverse d'une matrice  $A$  à coefficients réels, dans de nombreux cas vous allez entrer une approximation  $B$  de la matrice  $A$  (disons en ne donnant qu'une dizaine de chiffres après la virgule). L'ordinateur vous donne la valeur de  $B^{-1}$ . Est-ce que, du fait que  $B$  était proche de  $A$ , on peut s'attendre à ce que  $B^{-1}$  soit proche de  $A^{-1}$  ? C'est ce qu'on demande lorsque la continuité de  $g$  est étudiée.

Dans le cas  $n = 2$ , nous pouvons répondre : en effet d'après la proposition 5.9, la fonction  $g$  s'écrit dans ce cas

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(La même proposition affirme que sur  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ , la quantité  $ad - bc$  ne s'annule pas.) Cette expression est visiblement continue.

Nous allons voir que  $g$  est continue pour tout  $n$ , mais pour cela il va nous falloir développer la théorie des *déterminants*, qui font l'objet du prochain chapitre.

# Chapitre 7

## Déterminants

Dans ce chapitre, la lettre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

– Première lecture –

*Le lecteur ayant lu la définition 2.15 peut prendre pour  $\mathbb{K}$  n'importe quel corps.*

### Méthode de calcul

L'objectif de ce chapitre est de montrer une généralisation de la proposition 5.9. Plus précisément, on cherche à associer à toute matrice carrée un nombre, son *déterminant*, qui soit facilement calculable et qui permette de décider si la matrice est inversible ou non. On aimerait aussi avoir une formule pour l'inverse (bien que l'on sache déjà calculer les inverses efficacement).

C'est dans la deuxième partie de ce chapitre que nous montrerons le théorème suivant :

**THÉORÈME 7.1** – *Il existe une unique fonction*

$$\begin{aligned} \det: M_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\longmapsto \det(A) \end{aligned}$$

*ayant les propriétés suivantes :*

1. Si  $A_1$  est obtenue à partir de  $A$  en multipliant une ligne par  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors  $\det(A_1) = \lambda \det(A)$ .

2. Si  $A_2$  est obtenue à partir de  $A$  en échangeant deux lignes, alors  $\det(A_2) = -\det(A)$ .
3. Si  $A_3$  est obtenue à partir de  $A$  en ajoutant à une ligne un multiple d'une autre ligne, alors  $\det(A_3) = \det(A)$ .
4.  $\det(\text{Id}) = 1$ .

De plus, pour toute matrice  $A$ , on a  $\det(A) = \det({}^t A)$ . Par suite, on peut remplacer « ligne » par « colonne » dans ce qui précède.

Enfin, si  $\phi: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  est une fonction ayant les propriétés (1), (2) et (3) ci-dessus (mais pas forcément (4)), alors il existe un nombre  $\alpha \in \mathbb{K}$  telle que  $\phi(A) = \alpha \det(A)$ .

C'est tout ce que nous avons besoin de savoir sur cette fonction, et le fait de rejeter la définition du déterminant à plus tard ne va nous empêcher ni de les calculer, ni de montrer leur utilité.

Commençons par quelques calculs. Ensuite nous montrons que les déterminants ont bien quelque chose à voir avec les inverses.

EXEMPLE 7.2 – Pour les matrices  $2 \times 2$ , la fonction que l'on a déjà vue

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$$

vérifie les quatre conditions : vérifiez-le ! Donc par unicité, c'est bien la fonction déterminant :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

EXEMPLE 7.3 – Prenons

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

et calculons  $\det(M)$ . On va utiliser les propriétés ci-dessus pour se ramener à une matrice échelonnée, comme nous savons le faire.



D'abord une notation : on va écrire

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La propriété (1) est souvent interprétée « à l'envers » par les étudiants, au début. Il s'agit bien de la chose suivante : la matrice M est obtenue en multipliant par 2 la première ligne de

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On a donc  $\det(M) = 2\det(N)$ . La règle est simple : on « sort » le 2 du déterminant. On va écrire les choses comme ceci (on continue avec les autres lignes) :

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ & = 2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Maintenant faisons une opération de type (3) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1.$$

Ces opérations ne changent pas le déterminant. On continue :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1.$$

Avec l'habitude, vous verrez immédiatement que ce dernier déterminant vaut  $-4$ . Pourquoi ? Voyons :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Pour les deux dernières égalités, on a fait successivement les opérations  $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$  puis  $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ .

Le déterminant de la matrice identité vaut 1 d'après le théorème, donc

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4,$$

comme annoncé. Quand au déterminant de  $M$ , il vaut finalement

$$\det(M) = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} \times (-4) = -12.$$

**EXEMPLE 7.4** – Avec des opérations sur les lignes, on peut toujours se ramener au calcul du déterminant d'une matrice bien échelonnée. Que dire s'il ne s'agit pas de l'identité ? Par exemple que vaut  $\det(A)$  lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

C'est bien simple : en multipliant la troisième ligne de  $A$  par 0, on obtient encore la matrice  $A$ . Donc  $\det(A) = 0 \times \det(A) = 0$ . *Le déterminant d'une matrice ayant une ligne nulle est nul.* Et pareil avec les colonnes.

Le résultat suivant est alors facile :

**PROPOSITION 7.5** – *Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul.*

*Démonstration.* Si  $A'$  est obtenue à partir de  $A$  en faisant une opération sur les lignes, on a  $\det(A') \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$  (on se rappellera que les opérations « autorisées » pour échelonner une matrice, données dans la définition 5.14, comprennent la multiplication d'une ligne par un scalaire *non-nul*). Si  $E_A$  désigne comme d'habitude la matrice bien échelonnée associée à  $A$ , on constate que  $\det(A) \neq 0$  si et seulement si  $\det(E_A) \neq 0$ .

De plus, pour une matrice bien échelonnée telle que  $E_A$ , on constate que son déterminant vaut 0 s'il y a une ligne nulle, et 1 sinon, puisque le seul cas dans lequel il n'y a pas de ligne nulle dans  $E_A$  se produit pour  $E_A = \text{Id}$ .

Pour finir on sait que  $A$  est inversible si et seulement si  $E_A = \text{Id}$  (proposition 5.19), donc si et seulement si  $\det(E_A) = 1$ , ce qui se produit si et seulement si  $\det(A) \neq 0$ .  $\square$

Par exemple, la matrice  $M$  de l'exemple 7.3 est inversible puisque son déterminant vaut  $-12 \neq 0$ . Pour montrer ça, nous avons en fait échelonné la matrice et trouvé au passage que  $E_M = \text{Id}$ , ce qui établit directement que  $M$  est inversible. On se demande si l'on y gagne. Il est vrai qu'avec l'habitude, on calcule les déterminants assez rapidement en multipliant les astuces et les raccourcis lorsqu'on reconnaît certaines matrices – ça sera particulièrement vrai lorsque nous donnerons la deuxième méthode de calcul, qui se prête au calcul mental rapide.

Il ne faut pas trop prendre ça au sérieux, cependant : calculatoirement, les déterminants ne sont pas un outil révolutionnaire. Pour une matrice un peu grosse (quelques milliers de lignes), dont on veut savoir si elle est inversible à l'aide d'un ordinateur, la meilleure méthode consiste à faire des opérations sur les lignes pour obtenir la matrice échelonnée, et les « raccourcis » que les déterminants permettent de prendre n'ont pas une influence sensible sur la durée du calcul.

Les déterminants ont pourtant de nombreuses applications. Donnons-en une simple.

EXEMPLE 7.6 – Soit  $t \in \mathbb{K}$ . Quand-est-ce que la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & t \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$$

est inversible ? Son déterminant vaut  $18 + t$ , donc la condition est précisément  $t \neq -18$ . On peut retrouver cette condition sans passer par le déterminant, mais c'est moins facile à suivre.

Pour un exemple plus compliqué, soit  $\theta$  un paramètre réel. Quand-est-ce que la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

est inversible ? En prenant le déterminant, on obtient  $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$ , donc la matrice est toujours inversible. En faisant des opérations sur les lignes pour trouver la matrice échelonnée, on se retrouve dans une discussion très pénible.

La proposition suivante rend souvent service.

**PROPOSITION 7.7** – Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de même taille. Alors

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

De plus si  $A$  est inversible alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

*Démonstration.* La matrice  $B$  étant fixée, considérons la fonction  $\phi$  définie par  $\phi(A) = \det(AB)$ . On voit tout de suite qu'elle vérifie les propriétés (1), (2) et (3) du théorème 7.1. (Noter que faire des opérations sur les lignes de  $AB$  revient à faire des opérations sur les lignes de  $A$ , puis multiplier par  $B$ .) D'après le théorème, il existe une constante  $\alpha$  tel que  $\phi(A) = \alpha \det(A)$ .

En prenant  $A = \text{Id}$ , on observe  $\phi(\text{Id}) = \det(\text{Id} B) = \det(B) = \alpha \det(\text{Id}) = \alpha$ , c'est-à-dire  $\alpha = \det(B)$ . Ceci montre que  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .

Si  $A^{-1}$  existe, on calcule  $\det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1}) = \det(\text{Id}) = 1$ . □

## Développements des déterminants

**DÉFINITION 7.8** – Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . On appelle *mineur* en  $i, j$ , et on note  $\Delta_{ij}$ , le déterminant de la matrice  $(n-1) \times (n-1)$  obtenue en supprimant la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de  $A$ . ■

**EXEMPLE 7.9** – Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}, \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}, \Delta_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

DÉFINITION 7.10 – Notons  $A = (a_{ij})_{i,j}$ . Le développement de  $\det(A)$  par la ligne  $i$  est

$$\det_i(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}.$$

Le développement de  $\det(A)$  par la colonne  $j$  est

$$\det^j(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}.$$

(Cette fois c'est l'indice  $i$  qui varie dans la somme.) ■

EXEMPLE 7.11 – Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour gérer le signe  $(-1)^{i+j}$ , le plus simple est de former un tableau :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

La règle est simple : on commence par + en haut à gauche, et on alterne de sorte qu'il n'y a jamais deux signes identiques côte à côte.

Pour développer par rapport à la première ligne, disons, on prend les mineurs et les coefficients dans la matrices, les signes dans le tableau, et on ajoute :

$$\begin{aligned} \det_1(A) &= +0 \times \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 17 + 0 = 17. \end{aligned}$$

Par rapport à la troisième colonne, on a

$$\begin{aligned} \det^3(A) &= +(-1) \times \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 - 5 \times (-3) - (-2) = 17. \end{aligned}$$

Ce n'est pas un hasard si on trouve le même résultat.

PROPOSITION 7.12 – Pour tout  $i$  et tout  $j$ , on a

$$\det_i(A) = \det^j(A) = \det(A).$$

En d'autres termes, le développement donne une formule pour calculer le déterminant, en fonction de déterminants plus petits.

*Démonstration.* Pour l'instant nous allons nous contenter d'une esquisse de démonstration. Dans la suite du chapitre un argument complet sera donné.

L'idée simple est que  $A \mapsto \det_i(A)$ , vue comme une fonction  $M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ , vérifie les propriétés (1), (2), (3) et (4) du théorème 7.1. D'après ce théorème, une telle fonction est unique, donc  $\det_i(A) = \det(A)$ . On procède de même pour  $\det^j(A)$ .

Il faut donc vérifier soigneusement ces quatre propriétés. Ce n'est pas difficile (c'est même un bon exercice), mais c'est un peu long.  $\square$

On a donc une nouvelle méthode, complètement différente, pour calculer les déterminants. Est-elle meilleure? En théorie la réponse est cinglante : non, elle est même bien pire. Pour s'en convaincre, comptons le nombre de multiplications nécessaires pour calculer un déterminant de taille  $n \times n$ . En échelonnant la matrice, on peut montrer qu'il faut quelque chose de l'ordre de  $n^2$  multiplications pour avoir le déterminant. En développant par une ligne, puis en développant les déterminants plus petits, etc, jusqu'à en arriver à des déterminants  $2 \times 2$ , on fait plus de  $n!$  opérations.

Prenons  $n = 50$ . À l'aide d'un ordinateur qui effectuerait un milliard de milliards d'opérations par seconde ( $10^{18}$ ), il faudrait plus de  $10^{38}$  ans pour compléter le calcul par la méthode des déterminants. L'univers selon les dernières estimations existe depuis  $15 \times 10^9$  ans. En échelonnant la matrice, les 2500 multiplications nécessaires sont faites presque instantanément.

En pratique, pour des matrices de très petite taille ( $n \leq 6$ ) comme vous en rencontrerez dans les exercices, et sans ordinateur, on combine souvent différentes méthodes : opérations sur les lignes, sur les colonnes, et quelques développements. Voyons un exemple.

EXEMPLE 7.13 – Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & 0 \\ 2 & 7 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer  $\det(A)$ , on peut commencer par retrancher la deuxième colonne à la dernière, ce qui ne change pas le déterminant. On obtient

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 9 & 1 \\ 2 & 7 & 4 & -12 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Maintenant on développe par la première ligne, évidemment, puisqu'elle a tellement de zéros :

$$\det(A) = - \begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & -12 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix},$$

en n'oubliant pas le signe  $-$  qui vient du tableau de signes correspondant.

On retranche la première ligne aux suivantes :

$$\det(A) = - \begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -13 \\ 0 & -10 & -2 \end{vmatrix},$$

puis on effectue  $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$  :

$$\det(A) = - \begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 24 \end{vmatrix}.$$

Nous sommes déjà habitués aux déterminants de cette forme « triangulaire ». On peut mentalement faire le développement suivant par la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -5 & -13 \\ 0 & 24 \end{vmatrix} = 2 \times (-5) \times 24 = -240.$$

(D'une manière générale, le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients sur la diagonale). Finalement  $\det(A) = 240$ .

### Les formules de Cramer

Nous allons maintenant voir une formule pour calculer l'inverse d'une matrice, qui est une généralisation de celle donnée dans la proposition 5.9.

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice. On pose

$$\tilde{A} = ((-1)^{i+j} \Delta_{ij})_{ij},$$

et on l'appelle la *comatrice* de  $A$ . (On rappelle que le « mineur »  $\Delta_{ij}$  a été introduit dans la définition 7.8).

PROPOSITION 7.14 – On a

$$A {}^t\tilde{A} = \det(A) \text{Id}.$$

*Démonstration.* Sur la ligne  $i$ , dans la colonne  $j$  du produit  $A {}^t\tilde{A}$ , on a par définition le nombre

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^n a_{ik} (-1)^{k+j} \Delta_{jk}.$$

Lorsque  $i = j$ , on reconnaît la formule pour le développement de  $\det(A)$  par la ligne  $i$ , donc  $c_{ii} = \det(A)$ . Lorsque  $i \neq j$  par contre, on obtient le développement de  $\det(A')$  par la ligne  $j$ , où  $A'$  est la matrice obtenue à partir de  $A$  en recopiant la ligne  $i$  dans la ligne  $j$ ; comme  $A'$  se retrouve avec deux lignes identiques, son déterminant est nul, donc  $c_{ij} = 0$  pour  $i \neq j$ .

Finalement  $A {}^t\tilde{A}$  n'a de coefficients non-nuls que sur la diagonale, où l'on trouve  $\det(A)$ , comme annoncé.  $\square$

COROLLAIRE 7.15 (FORMULES DE CRAMER) – Soit  $A$  une matrice inversible. Alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\tilde{A}.$$



*Démonstration.* D'après la proposition, on a

$$A \left( \frac{1}{\det(A)} {}^t \tilde{A} \right) = \text{Id},$$

ce qui donne le résultat (voir lemme 5.23). □

EXEMPLE 7.16 – Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer la comatrice, on commence par le coefficient en haut à gauche, qui doit être

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8.$$

Le coefficient sur la ligne 1, dans la colonne 2, est

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

(On n'oublie pas le signe.) Ainsi de suite, on finit par obtenir

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule  $\det(A) = -3$ . Finalement

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -8 & 5 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Cette méthode de calcul de l'inverse est déraisonnablement populaire auprès des étudiants. Pourtant, elle est beaucoup moins efficace que la méthode de la proposition 5.19 (on peut de nouveau compter le nombre d'opérations effectuées, et il est largement supérieur avec les formules de Cramer). C'est pourquoi nous n'insisterons pas sur les exemples.

Par contre les formules de Cramer ont des conséquences plus théoriques, par exemple :

LEMME 7.17 – Soit  $A$  une matrice à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Alors  $A$  possède une inverse à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  si et seulement si  $\det(A) = \pm 1$ .

*Démonstration.* Si  $\det(A) = \pm 1$ , la formule pour  $A^{-1}$  montre bien que ses coefficients sont des nombres entiers.

Réciproquement, si  $A^{-1}$  est à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , on note que  $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$  alors que  $\det(A)$  et  $\det(A^{-1})$  sont des nombres entiers. Ceci entraîne bien sûr que  $\det(A) = \pm 1$ .  $\square$

Autre application, nous pouvons maintenant répondre à la question posée dans l'exemple 6.29 :

LEMME 7.18 – La fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$$

est continue.

D'après l'expression pour  $A^{-1}$ , c'est évident.

– Deuxième lecture –

### Unicité du déterminant

Nous allons nous tourner vers la démonstration du théorème 7.1. La partie « unicité » est en fait très simple, et en réalité nous l'avons presque déjà vue.

En effet, si  $\phi: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  vérifie les fameuses propriétés (1), (2), (3) et (4), alors pour calculer  $\phi(A)$ , on peut faire des opérations sur les lignes dont on sait précisément comment elles changent la quantité  $\phi(A)$ , et se ramener à une matrice échelonnée. Mais pour une matrice échelonnée, on constate que  $\phi$  prend la valeur 0 s'il y a une ligne nulle, ou 1 sinon (voir la discussion dans l'exemple 7.4 et la démonstration de la proposition 7.5). Finalement, on n'a tout simplement pas le choix pour la valeur de  $\phi(A)$ . D'où l'unicité d'une fonction qui vérifierait les quatre propriétés.

Si  $\phi$  ne vérifie pas la propriété (4), on pose  $\alpha = \phi(\text{Id})$ . Si  $\alpha \neq 0$ , on travaille avec  $\psi(A) = \phi(A)/\alpha$  qui vérifie les quatre propriétés, et donc  $\psi(A) = \det(A)$  ce qui donne bien  $\phi(A) = \alpha \det(A)$ . Si par contre  $\alpha = 0$  on voit facilement que  $\phi(A) = 0$  pour toute matrice  $A$  en raisonnant comme ci-dessus; là encore  $\phi(A) = \alpha \det(A) = 0$ .

Toute la difficulté réside dans l'existence de la fonction déterminant. Avec la formule pour le développement du déterminant, on pourrait donner une définition par récurrence, en partant des matrices  $2 \times 2$ . C'est possible, mais certaines choses vont être difficiles à montrer, comme par exemple le fait que  $\det(A) = \det({}^t A)$ . Nous allons utiliser une autre approche, qui est plus instructive.

Faisons une observation sur les matrices  $3 \times 3$ . En développant par les lignes ou les colonnes, on obtient

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33}.$$

On constate que le déterminant (s'il existe!) est une somme de termes de la forme  $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$  précédés de signes convenables. Même si ça paraît compliqué, nous allons partir de là pour donner une définition générale.

## Permutations

**DÉFINITION 7.19** – Soit  $X$  un ensemble. Une *permutation* de  $X$  est une bijection  $\sigma: X \rightarrow X$ .

Nous allons particulièrement nous intéresser au cas  $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . On notera  $\mathfrak{S}_n$  l'ensemble des permutations de ce  $X$ , et on appelle  $\mathfrak{S}_n$  le *n*-ième *groupe symétrique*. ■

On trouve bien d'autres notations pour le groupe symétrique, comme par exemple  $S_n$  ou  $\Sigma_n$ .

**EXEMPLE 7.20** – Nous allons avoir besoin d'une notation pour

*le symbole  $\mathfrak{S}$  est un  $S$  majuscule en écriture gothique allemande.*

donner des exemples. Nous allons écrire

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix};$$

c'est-à-dire que, par exemple,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est un raccourci pour désigner la fonction  $\sigma$ , de l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$  vers lui-même, telle que  $\sigma(1) = 3$ ,  $\sigma(2) = 2$  et  $\sigma(3) = 1$ .

Pour vérifier que  $\sigma$  est bien une bijection, et donc un élément de  $\mathfrak{S}_3$ , le plus simple est de constater que  $\sigma(\sigma(i)) = i$  pour  $i = 1, 2, 3$ , donc  $\sigma^{-1} = \sigma$ .

Voyons un élément de  $\mathfrak{S}_5$  :

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que  $\tau$  est une bijection, donnons directement sa réciproque :

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que  $\tau(\tau^{-1}(i)) = i$  et  $\tau^{-1}(\tau(i)) = i$ , ce qui justifie la notation  $\tau^{-1}$ . Pour trouver ce  $\tau^{-1}$ , la recette que nous venons d'appliquer est simple : pour chaque  $i$  on cherche le nombre  $j$  tel que  $\tau(j) = i$ , qui doit exister et être unique (sinon  $\tau$  n'est pas une bijection) ; c'est ce nombre que l'on écrit en dessous de  $i$ , c'est-à-dire que  $j = \tau^{-1}(i)$ .

Voici une façon encore plus simple de le dire : échangeons les deux lignes de la matrice de  $\tau$ , puis déplaçons les colonnes pour que sur la première ligne on ait 1, 2, 3, 4, 5 dans cet ordre. On obtient la matrice de  $\tau^{-1}$ .

**DÉFINITION 7.21** – Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Pour deux entiers distincts  $i$  et  $j$  entre 1 et  $n$ , on pose

$$q_{ij} = \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

On a  $q_{ij} = q_{ji}$ , de sorte que  $q_{ij}$  ne dépend que de la paire  $\{i, j\}$ .  
On pose ensuite

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{\{i,j\}} q_{ij}.$$

On appelle  $\varepsilon(\sigma)$  la *signature* de  $\sigma$ . ■

EXEMPLE 7.22 – Prenons

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_3.$$

Les paires à considérer sont  $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ . On trouve

$$q_{12} = \frac{3-2}{2-1} = 1, \quad q_{13} = \frac{1-2}{3-1} = -\frac{1}{2}, \quad q_{23} = \frac{1-3}{3-2} = -2.$$

Finalement  $\varepsilon(\sigma) = 1 \times -\frac{1}{2} \times (-2) = 1$ .

Notons que la quantité  $q_{ij}$  est positive si  $\sigma(i)$  et  $\sigma(j)$  sont « dans le même ordre » que  $i$  et  $j$ , et négative sinon : on dit alors qu'il y a une *inversion* en  $i, j$ .

LEMME 7.23 – Pour toute permutation  $\sigma$ , on a  $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ .

*Démonstration.* Montrons que  $|\varepsilon(\sigma)| = 1$ . En posant  $d_{ij} = |j - i|$ , de sorte que  $d_{ij} = d_{ji}$ , on peut écrire  $\varepsilon(\sigma) = N/D$  avec

$$N = \prod_{\{i,j\}} d_{\sigma(i)\sigma(j)} \quad \text{et} \quad D = \prod_{\{i,j\}} d_{ij}.$$

On doit donc montrer que  $N = D$ . Or c'est une évidence : dans les deux cas, il s'agit du produit de *tous* les nombres  $d_{ij}$  pour toutes les paires  $\{i, j\}$ . Voici une autre formulation : pour chaque terme  $d_{ij}$  du produit  $D$ , considérons  $i' = \sigma^{-1}(i)$  et  $j' = \sigma^{-1}(j)$ . Alors  $N$  contient le terme  $d_{\sigma(i')\sigma(j')} = d_{ij}$ . Ainsi chaque terme du produit  $D$  correspond à un terme et un seul du produit  $N$ , et vice-versa, d'où  $N = D$ . □

COROLLAIRE 7.24 – Soit  $N$  le nombre d'inversions pour  $\sigma$ . Alors

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^N.$$

*Démonstration.* Seul le signe de  $q_{ij}$  compte, dans le calcul de  $\varepsilon(\sigma)$ , puisqu'en valeur absolue on sait déjà que  $|\varepsilon(\sigma)| = 1$ . Ce signe vaut  $(-1)$  si et seulement si on a une inversion en  $i, j$ , donc au total le signe est  $(-1)^N$ .  $\square$

EXEMPLE 7.25 – Fixons  $i$  et  $j$  et considérons la *transposition*  $\tau_{ij} \in \mathfrak{S}_n$ , définie par  $\tau_{ij}(i) = j$ ,  $\tau_{ij}(j) = i$  et  $\tau_{ij}(x) = x$  si  $x \neq i, j$ . En d'autres termes,  $\tau_{ij}$  échange  $i$  et  $j$  et fixe les autres éléments. Par exemple dans  $\mathfrak{S}_5$  on a

$$\tau_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculons la signature de  $\tau_{ij}$ . En comptant les inversions, on constate que l'on en obtient une pour la paire  $\{i, j\}$ , une pour chaque paire  $\{i, x\}$  avec  $i < x < j$ , et une pour chaque paire  $\{x, j\}$  avec  $i < x < j$ . On peut regrouper ces dernières inversions par deux en associant  $\{i, x\}$  et  $\{x, j\}$ , ce qui rassemble un nombre pair de signes  $(-1)$  dans le calcul de  $\varepsilon(\sigma)$ . L'inversion pour  $\{i, j\}$  reste seule, et au total

$$\varepsilon(\tau_{ij}) = -1.$$

DÉFINITION 7.26 – Soit  $\sigma$  et  $\tau$  des éléments de  $\mathfrak{S}_n$ . La composition  $\sigma \circ \tau$  définie par  $\sigma \circ \tau(i) = \sigma(\tau(i))$  est encore un élément de  $\mathfrak{S}_n$ , que l'on va noter  $\sigma\tau$  par simplicité. La composition est parfois appelée le *produit* de  $\sigma$  et  $\tau$ .  $\blacksquare$

PROPOSITION 7.27 – Pour  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ , on a

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau).$$

*Démonstration.* Écrivons

$$\frac{\sigma\tau(j) - \sigma\tau(i)}{j - i} = \frac{\sigma\tau(j) - \sigma\tau(i)}{\tau(j) - \tau(i)} \cdot \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i}.$$

Multiplions ces égalités pour toutes les paires  $\{i, j\}$ , on obtient

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \left( \prod_{\{i,j\}} \frac{\sigma\tau(j) - \sigma\tau(i)}{\tau(j) - \tau(i)} \right) \varepsilon(\tau).$$

Il ne reste qu'à montrer que le produit entre parenthèses est  $\varepsilon(\sigma)$ , c'est-à-dire que

$$\prod_{\{i,j\}} \frac{\sigma\tau(j) - \sigma\tau(i)}{\tau(j) - \tau(i)} = \prod_{\{i,j\}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Or chaque terme d'un de ces produits se retrouve une fois et une seule dans l'autre (comme dans la démonstration du lemme 7.23), donc ils sont bien égaux.  $\square$

### La définition du déterminant

La voici enfin :

DÉFINITION 7.28 – Soit  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ . Son *déterminant* est

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

■

Nous allons montrer toutes les propriétés (attendues depuis l'énoncé du théorème 7.1) sous forme de lemmes.

LEMME 7.29 – On a  $\det(A) = \det({}^t A)$ .

*Démonstration.* On doit vérifier que

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Fixons  $\sigma$ , et observons les nombres  $a_{\sigma(i)i}$ . En prenant  $i = \sigma^{-1}(j)$ , pour un entier  $j$  quelconque, on obtient  $a_{\sigma(i)i} = a_{j\sigma^{-1}(j)}$ ; et en prenant le produit on a

$$a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

De plus, de la relation  $\sigma\sigma^{-1} = \text{Id}$  (la permutation identité), on déduit  $\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma^{-1}) = 1$  et donc  $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ .

Finalement, le terme correspondant à  $\sigma$  dans le membre de droite ci-dessus est précisément le terme correspondant à  $\sigma^{-1}$  dans le membre de gauche. Donc les sommes sont égales.  $\square$

LEMME 7.30 – Si  $A_1$  est obtenue à partir de  $A$  en multipliant une ligne par  $\lambda$ , alors  $\det(A_1) = \lambda \det(A)$ .

Celui-ci est évident !

LEMME 7.31 – Si  $A_2$  est obtenue à partir de  $A$  en permutant deux lignes, alors  $\det(A_2) = -\det(A)$ .

*Démonstration.* Soient  $k$  et  $\ell$  les lignes qui sont permutées. Si  $A = (a_{ij})$ , alors  $A_2 = (a_{\tau(i)j})$ , où  $\tau = \tau_{k\ell}$  est la transposition comme dans l'exemple 7.25. Le déterminant de cette matrice est

$$\det(A_2) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\tau(1)\sigma(1)} a_{\tau(2)\sigma(2)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)}.$$

Notons que  $a_{\tau(i)\sigma(i)} = a_{j\sigma(\tau(j))}$  avec  $j = \tau(i)$ , ou ce qui revient au même  $i = \tau(j)$ . On en tire

$$a_{\tau(1)\sigma(1)} a_{\tau(2)\sigma(2)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)} = a_{1\sigma(\tau(1))} a_{2\sigma(\tau(2))} \cdots a_{n\sigma(\tau(n))}.$$

Combinons ça avec  $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$  encore d'après l'exemple 7.25. Finalement

$$\det(A_2) = - \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma\tau) a_{1\sigma(\tau(1))} a_{2\sigma(\tau(2))} \cdots a_{n\sigma(\tau(n))}.$$

Il reste à observer que la somme ci-dessus est  $\det(A)$  : en effet le terme correspondant à  $\sigma$  dans la définition de  $\det(A)$  se retrouve dans cette somme correspondant à  $\sigma\tau^{-1}$ .  $\square$

Pour le reste des démonstrations, fixons une matrice  $A$ , et choisissons une ligne  $i$ . Pour  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ , on va noter  $f(x_1, \dots, x_n)$  le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la ligne  $i$  de  $A$  par  $(x_1, \dots, x_n)$ . Par exemple si  $A = (a_{ij})$  est une matrice  $3 \times 3$  et que l'on regarde la ligne 2, cela signifie que

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

En particulier on a  $\det(A) = f(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ .



D'après la définition 7.28, il est clair qu'il existe des nombres que l'on va noter  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  tels que

$$f(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n. \quad (*)$$

En conséquence, on note que  $f(x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) = f(x_1, \dots, x_n) + f(y_1, \dots, y_n)$ .

LEMME 7.32 – Les formules de développement du déterminant par une ligne ou une colonne sont valides.

*Démonstration.* Puisque  $\det(A) = \det({}^t A)$ , il suffit de montrer ceci pour les lignes. D'après la définition 7.10, nous devons donc montrer que  $\lambda_j = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ , avec les notations ci-dessus.

Notons que  $\lambda_j = f(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ , avec le 1 en  $j$ -ième position, d'après (\*). On peut donc voir  $\lambda_j$  comme le déterminant d'une certaine matrice; en permutant  $i$  lignes et  $j$  colonnes, cette matrice devient

$$\left( \begin{array}{ccc|c} & & & * \\ & & & \vdots \\ & & & * \\ \hline & M & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

où  $M$  est obtenue à partir de  $A$  en supprimant la ligne  $i$  et la colonne  $j$ . Vous montrerez à titre d'exercice que le déterminant de cette matrice est  $\det(M)$  (c'est un cas archi-particulier de développement par une ligne, qui se déduit directement de la formule de la définition 7.28).

Par définition  $\Delta_{ij} = \det(M)$ , et les opérations sur les lignes et colonnes ont introduit le signe  $(-1)^{i+j}$ , donc le déterminant  $\lambda_j$  est bien  $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ .  $\square$

LEMME 7.33 – Lorsque la matrice  $A$  possède deux lignes identiques, on a  $\det(A) = 0$ .

*Démonstration.* En permutant ces deux lignes, on ne change pas  $A$ ; donc  $\det(A) = -\det(A)$ . On en déduit que  $\det(A) = 0$ .

Les plus observateurs auront noté que cet argument ne fonctionne que parce que  $1 \neq -1$ , on encore  $2 \neq 0$ . Or il se peut

très bien que  $2 = 0$  si l'on travaille avec  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , ce qui n'est pas exclu ! Pour couvrir ce cas, on peut faire une démonstration du lemme par récurrence, en partant des matrices  $2 \times 2$  et en développant par une ligne à l'aide du lemme précédent.  $\square$

Voici finalement la dernière propriété :

LEMME 7.34 – Si  $A_3$  est obtenue à partir de  $A$  en ajoutant un multiple de la ligne  $j$  à la ligne  $i$ , alors  $\det(A_3) = \det(A)$ .

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned}\det(A_3) &= f(a_{i1} + \lambda a_{j1}, a_{i2} + \lambda a_{j2}, \dots, a_{in} + \lambda a_{jn}) \\ &= f(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) + \lambda f(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}) \\ &= \det(A) + 0.\end{aligned}$$

En effet  $f(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}) = 0$ , puisque c'est le déterminant de la matrice obtenue en recopiant la ligne  $j$  dans la ligne  $i$  (et qui possède donc deux lignes identiques).  $\square$

# Chapitre 8

## Compacité

– Première lecture –

### Le théorème de Bolzano et Weierstrass

DÉFINITION 8.1 – Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite. Une *sous-suite* de  $(u_n)$  est une suite de la forme  $(u_{\sigma(n)})_{n \geq 0}$  où  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une fonction strictement croissante. ■

Les exemples typiques sont  $(u_{2n})_{n \geq 0}$  et  $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ .

THÉORÈME 8.2 (BOLZANO & WEIERSTRASS) – Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombre réels. On suppose qu'il existe deux nombres  $a$  et  $b$  tels que  $u_n \in [a, b]$  pour chaque indice  $n$ . Alors il existe une sous-suite  $(u_{\sigma(n)})_{n \geq 0}$  qui possède une limite  $\ell \in [a, b]$ .

Souvent on énonce : « de toute suite de réels bornée on peut extraire une sous-suite convergente ».

*Démonstration.* Posons  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$ , et  $m = \frac{a_0 + b_0}{2}$ , le milieu de  $[a_0, b_0]$ . Soit  $A \subset \mathbb{N}$  l'ensemble des entiers  $n$  tels que  $u_n \in [a_0, m]$ , et soit  $B$  l'ensemble des entiers  $n$  tels que  $u_n \in [m, b_0]$ .

Les ensembles  $A$  et  $B$  ne peuvent pas être tous les deux finis, puisque  $A \cup B = \mathbb{N}$ . Si  $A$  est infini, on pose  $a_1 = a_0$  et  $b_1 = m$ ; dans le cas contraire on pose  $a_1 = m$  et  $b_1 = b_0$ .

Par récurrence, on construit  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  à partir de  $a_n$  et  $b_n$  de la même manière, en s'arrangeant pour qu'il y ait une infinité de termes de la suite dans l'intervalle  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ .

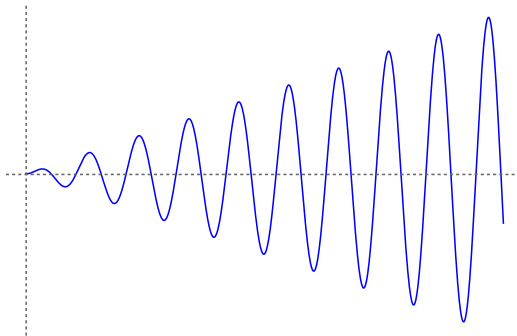
On finit avec deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que  $|b_n - a_n| = \frac{|b-a|}{2^n}$  (puisque l'on divise la longueur de l'intervalle par 2 à chaque étape), et en particulier  $b_n - a_n \rightarrow 0$ . De plus  $(a_n)$  est croissante et majorée, donc converge vers  $\ell_1$ , alors que  $(b_n)$  est décroissante et minorée et donc converge vers  $\ell_2$ . On en conclut que  $\ell_1 = \ell_2$ .

Pour chaque entier  $n$ , choisissons maintenant un entier  $\sigma(n)$  tel que  $a_n \leq u_{\sigma(n)} \leq b_n$  en s'arrangeant pour que  $\sigma$  soit croissante (c'est possible par construction). Il est clair que  $u_{\sigma(n)} \rightarrow \ell_1 = \ell_2$ .  $\square$

Les applications sont plus théoriques que pratiques, au moins dans un premier temps. Elles sont par contre fondamentales, et vont prendre de plus en plus d'importance au fur et à mesure de vos études en mathématiques.

## Fonctions continues et intervalles compacts

Nous avons vu avec le théorème des valeurs intermédiaires (6.8) que l'image d'un intervalle par une fonction continue est encore un intervalle. Il y a plusieurs types d'intervalles : ouverts, fermés, semi-ouverts... Est-ce que l'image d'un intervalle est du même type que celui-ci ? La réponse est non, comme sur la figure ci-dessous.



Ici on voit une portion du graphe d'une fonction continue définie sur l'intervalle semi-ouvert  $[0, +\infty[$ , et son image est visiblement l'intervalle ouvert  $] -\infty, +\infty[$  (il reste à imaginer la suite du graphe, évidemment). Méfiance donc.

Par contre on a le résultat suivant, qui est notre première application de Bolzano & Weierstrass.

**PROPOSITION 8.3** – *Soit  $f$  une fonction continue définie sur l'intervalle compact  $I = [a, b]$ . Alors  $f(I)$  est aussi un intervalle compact.*

*Démonstration.* Soit  $J = f(I)$ , on sait que c'est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Soit  $m = \inf(J)$  ou  $m = -\infty$  si l'inf n'existe pas; de même soit  $M = \sup(J)$  ou  $M = +\infty$  si le sup n'existe pas. On a donc  $J = (m, M)$  où les parenthèses signifient qu'on ne sait pas encore s'il s'agit de  $[$  ou  $]$ .

Prenons une suite  $(y_n)$  telle que  $y_n \rightarrow M$ , avec  $y_n \in J$ . Par définition on a  $y_n = f(x_n)$  pour un certain  $x_n \in I = [a, b]$ . D'après le théorème de Bolzano et Weierstrass, on peut « extraire » une sous-suite  $(x_{\sigma(n)})$  qui converge vers  $\ell \in [a, b]$ . Par continuité de  $f$ , on a  $f(x_{\sigma(n)}) = y_{\sigma(n)} \rightarrow f(\ell)$ . Comme  $(y_{\sigma(n)})$  est une sous-suite de  $(y_n)$ , elle doit converger vers  $M$ , et donc  $M = f(\ell)$ .

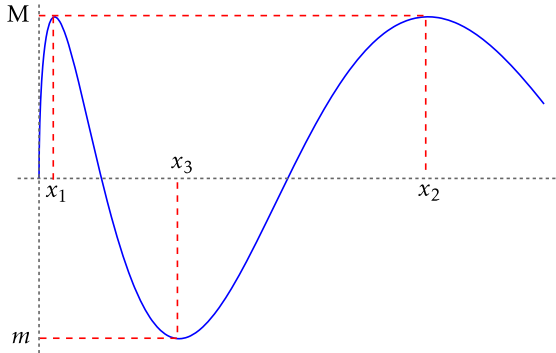
On en conclut que  $M \neq +\infty$ , et que  $M \in J$ . On procède de même pour montrer que  $m \neq -\infty$  et que  $m \in J$ . Finalement  $J = [m, M]$ . □

Notons bien, en particulier, que l'on a le résultat suivant :

**COROLLAIRE 8.4** – *Soit  $f$  une fonction continue définie sur un intervalle compact. Alors  $f$  atteint son maximum et son minimum.*

L'expression «  $f$  atteint son maximum et son minimum » contient plusieurs choses, qui sont toutes des conséquences du fait que l'image de  $f$  est de la forme  $[m, M]$ , mais qu'il est bon d'énoncer séparément. Tout d'abord le sup des valeurs prises par la fonction, que l'on note  $M$ , n'est pas  $+\infty$ ; mais plus précisément, on sait aussi qu'il existe un  $x$  dans l'ensemble de définition tel que  $f(x) = M$ . C'est pour cette raison que l'on parle du maximum de  $f$  et pas seulement de son sup, pour insister. De même avec le minimum  $m$ .

Il peut y avoir plusieurs valeurs pour lesquelles les extrema sont atteints, bien sûr. Sur la figure ci-dessous, le maximum de la fonction est atteint en  $x_1$  et  $x_2$ , et le minimum est atteint en  $x_3$ .



On comparera la situation avec celle de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$ , définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  (qui n'est pas compact) : elle ne possède ni maximum ni minimum. L'inf des valeurs de cette fonction est 0, mais cette valeur n'est pas atteinte.

Le corollaire prédit donc l'existence de valeurs maximales et minimales sous des hypothèses assez simples. Il est bien utile, comme on va le voir.

## – Deuxième lecture –

### Parties compactes

Les arguments utilisant le théorème de Bolzano et Weierstrass sont tellement efficaces que l'on en vient à donner un nom aux ensembles sur lesquels on peut l'adapter.

**DÉFINITION 8.5** – Soit  $X \subset \mathbb{R}^n$ . On dit que  $X$  est *compact* lorsque de toute suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  avec  $u_n \in X$  on peut extraire une sous-suite  $(u_{\sigma(n)})_{n \geq 0}$  qui converge vers  $\ell \in X$ . ■

Avec ce vocabulaire, le théorème de Bolzano et Weierstrass peut être interprété comme affirmant que les ensembles que nous avons d'ores et déjà appelés « intervalles compacts » sont effectivement compacts au sens de cette définition. Ce sont d'ailleurs les seuls intervalles ayant cette propriété. Par exemple  $[0, +\infty[$  n'est pas compact, puisque la suite  $(2^n)_{n \geq 0}$  n'a pas de sous-suite convergente ; de même  $]0, 1[$  n'est pas compact, puisque la suite  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  ne possède que des sous-suites qui convergent vers 0, et  $0 \notin ]0, 1[$  (noter la condition  $\ell \in X$ , très importante, dans la définition).

L'étude des compacts se fera plus en détails en deuxième voire troisième année. Nous allons cependant voir un exemple riche de conséquences.

**PROPOSITION 8.6** – Soit  $R \subset \mathbb{R}^2$  un rectangle de la forme

$$R = [a, b] \times [c, d].$$

Alors  $R$  est compact.

*Démonstration.* Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $R$ , et notons  $u_n = (x_n, y_n)$ .

D'après le théorème de Bolzano et Weierstrass, on peut trouver une sous-suite  $(x_{\sigma(n)})$  qui converge vers  $\ell \in [a, b]$ . Appliquons le même théorème à la suite  $(z_n)$  définie par  $z_n = y_{\sigma(n)}$  : il existe une sous-suite  $(z_{\tau(n)})$  qui converge vers  $\ell' \in [c, d]$ . Notons que  $z_{\tau(n)} = y_{\sigma(\tau(n))}$ .

Considérons la suite  $(x_{\sigma(\tau(n))})$  : c'est une sous-suite de  $(x_{\sigma(n)})$  donc elle converge vers  $\ell$ . Donc finalement  $u_{\sigma(\tau(n))}$  converge vers  $(\ell, \ell')$ .  $\square$

Citons un exemple de résultat dont la démonstration se déduit immédiatement de celle que nous avons donnée pour les intervalles compacts.

**PROPOSITION 8.7** – Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, où  $X \subset \mathbb{R}^n$  est un compact. Alors  $f$  atteint son maximum et son minimum.

À titre d'exercice vous montrerez ceci en adaptant l'argument donné pour le corollaire 8.4 : vous verrez qu'il n'y a essentiellement rien à changer.

## Autres études de minima et maxima

Pour montrer l'existence d'un maximum ou d'un minimum d'une fonction  $f$  dont on ne sait pas grand-chose, ou avec laquelle on ne souhaite pas faire de calculs compliqués (comme les dérivées du chapitre suivant), on essaie souvent de se ramener au corollaire 8.4. Lorsque la fonction en question n'est pas définie sur un compact, il faut faire des efforts supplémentaires. Voici un exemple simple.

**PROPOSITION 8.8** – Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

1. Supposons que pour toute suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  telle que  $\|u_n\| \rightarrow +\infty$ , on a  $f(u_n) \rightarrow +\infty$ . Alors  $f$  atteint son minimum sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Supposons que pour toute suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  telle que  $\|u_n\| \rightarrow +\infty$ , on a  $f(u_n) \rightarrow 0$ . Alors  $f$  atteint son maximum sur  $\mathbb{R}^2$ .

*Démonstration.* Montrons le (1), le (2) étant similaire. Soit

$$R_n = [-n, n] \times [-n, n].$$

Ce rectangle est compact d'après la proposition 8.6, donc sur  $R_n$  la fonction  $f$  atteint un minimum en  $u_n$  (proposition 8.7).

Puisque  $R_n \subset R_{n+1}$ , on a  $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$  (le minimum diminue quand on le prend sur une partie plus grande). Montrons maintenant qu'il existe un entier  $N$  tel que tous les termes  $u_n$  appartiennent à  $R_N$ . Par l'absurde, si ce n'était pas le cas, on aurait une sous-suite  $(u_{\sigma(n)})_{n \geq 0}$  telle que  $\|u_{\sigma(n)}\| \rightarrow +\infty$  : il suffit de prendre  $u_{\sigma(n)}$  à l'extérieur du rectangle  $R_n$ . Par hypothèse  $f(u_{\sigma(n)}) \rightarrow +\infty$ , ce qui est absurde puisque  $(f(u_{\sigma(n)}))$  est décroissante. Donc  $N$  existe.

Si maintenant  $x \in \mathbb{R}^2$ , on a  $x \in R_n$  pour un certain  $n$ , et donc  $f(x) \geq f(u_n)$ ; mais  $u_n \in R_N$ , donc  $f(u_n) \geq f(u_N)$ . Finalement  $f(u_N)$  est le minimum de  $f$ .  $\square$

## Continuité uniforme

La prochaine application du théorème de Bolzano et Weierstrass concerne une propriété fine des fonctions continues. Rappelons que dans le (3) du théorème 6.20, nous avons montré qu'une fonction  $f$  était continue au point  $x_0$  si et seulement



si la condition suivante était satisfaite : pour tout  $\varepsilon > 0$  on doit trouver un  $\delta > 0$  de telle sorte que  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  dès que  $|x - x_0| < \delta$ . Voyons ça sur un exemple.

EXEMPLE 8.9 – Prenons  $f(x) = \frac{1}{x}$  sur l'intervalle  $]0, 1]$ , et soit  $x_0$  dans cet intervalle. Montrons que  $f$  est continue en  $x_0$  directement à partir de la définition (c'est-à-dire sans utiliser le fait qu'il s'agit de l'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas). Soit donc  $\varepsilon > 0$ . Calculons :

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x - x_0}{xx_0} \right|.$$

On a donc  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  dès que  $|x - x_0| < \varepsilon x x_0$ . Mais on ne peut certainement pas prendre  $\delta = \varepsilon x x_0$ , puisque  $\delta$  ne doit pas dépendre de  $x$ , par définition.

Par contre, choisissons un nombre  $\rho > 0$  tel que  $\rho < x_0$ , et prenons  $\delta' = \varepsilon \rho^2$ . Pour tous les  $x$  dans l'intervalle  $[\rho, 1]$ , on a  $\delta' < \varepsilon x x_0$  donc l'inégalité  $|x - x_0| < \delta'$  entraîne bien  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Pour finir, nous devons prendre  $\delta$  tel que  $0 < \delta \leq \delta'$  d'une part, et  $\delta < x_0 - \rho$  d'autre part. Avec ce  $\delta$ , l'inégalité  $|x - x_0| < \delta$  entraîne  $x = x_0 - (x_0 - x) > x_0 - \delta > \rho$ , c'est-à-dire que  $x \in [\rho, 1]$ ; l'argument ci-dessus donne donc  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  dès que  $|x - x_0| < \delta$ .

Une chose à retenir de ce calcul, c'est que sur un intervalle de la forme  $[\rho, 1]$  on peut prendre *le même*  $\delta'$  pour tous les points  $x_0$  à la fois (à savoir  $\delta' = \varepsilon \rho^2$ ). Alors que sur  $]0, 1]$ , nous venons de la voir, il faut choisir un  $\delta$  qui dépend de  $x_0$ .

Ce phénomène porte un nom :

DÉFINITION 8.10 – Soit  $I \subset \mathbb{R}$ , et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est *uniformément continue* sur  $I$  lorsque pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  dès que l'on choisit  $x, x_0 \in I$  tels que  $|x - x_0| < \delta$ . ■

Avec ce langage, nous pouvons dire que la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est uniformément continue sur chaque intervalle compact de la forme  $[\rho, 1]$  pour  $0 < \rho < 1$ . Par contre, sur l'intervalle  $]0, 1]$ , la fonction définie par la même formule n'est pas uniformément continue. C'est l'essence de l'exemple 8.9.

On peut se demander pourquoi rentrer dans des considérations si précises. La réponse arrivera avec le chapitre sur les intégrales : il se trouve que, pour définir rigoureusement l'intégrale d'une fonction, nous aurons besoin de savoir que ladite fonction est uniformément continue. Heureusement, nous n'aurons pas à refaire un travail comme ci-dessus pour chaque fonction, puisque le théorème suivant nous épargne toutes les difficultés.

**THÉORÈME 8.11 (HEINE)** – *Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle compact. Alors elle est uniformément continue.*

*Démonstration.* Par l'absurde. Si  $f$  n'est pas uniformément continue, alors il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que pour chaque  $\delta > 0$ , on peut choisir  $x$  et  $y$  tels que  $|x - y| < \delta$  et cependant  $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ . Prenons  $\delta_n = \frac{1}{n}$  pour chaque entier  $n \geq 1$ , et notons  $x_n$  et  $y_n$  nos choix pour  $\delta_n$ .

Soit  $I = [a, b]$  l'intervalle sur lequel  $f$  est définie. D'après la proposition 8.6, le rectangle  $R = I \times I$  est compact. La suite définie par  $u_n = (x_n, y_n)$  possède donc une sous-suite  $u_{\sigma(n)} = (x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)})$  qui converge vers  $(\ell, \ell') \in R$ . En d'autres termes on a  $x_{\sigma(n)} \rightarrow \ell$  et  $y_{\sigma(n)} \rightarrow \ell'$ , et donc  $x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)} \rightarrow \ell - \ell'$ . De plus, puisque

$$|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| < \delta_{\sigma(n)} = \frac{1}{\sigma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

on constate  $\ell = \ell'$ .

Enfin, par continuité de  $f$ , on a  $f(x_{\sigma(n)}) \rightarrow f(\ell)$  et  $f(y_{\sigma(n)}) \rightarrow f(\ell)$ , donc

$$f(x_{\sigma(n)}) - f(y_{\sigma(n)}) \rightarrow 0.$$

Mais dans la mesure où

$$|f(x_{\sigma(n)}) - f(y_{\sigma(n)})| \geq \varepsilon > 0,$$

cette dernière convergence vers 0 est impossible. Cette conclusion absurde montre que  $f$  est uniformément continue.  $\square$

# Chapitre 9

## Dérivées

– Première lecture –

### Définitions & Premières propriétés

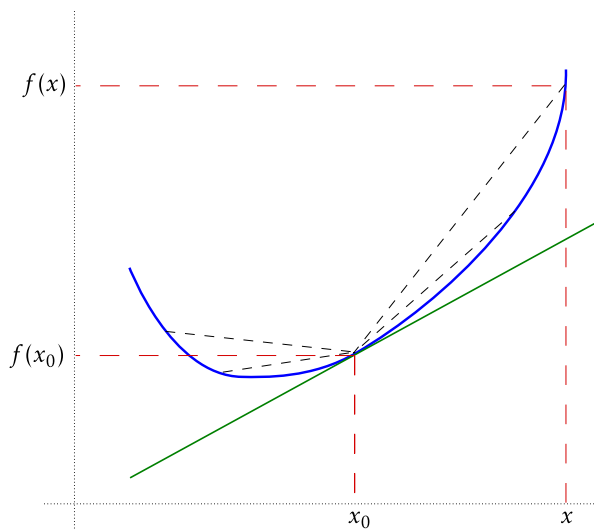
DÉFINITION 9.1 – Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . On dit que  $f$  est *dérivable* au point  $x_0 \in I$  lorsque le *taux d'accroissement*, c'est-à-dire la fonction définie par

$$T_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(pour  $x \neq x_0$ ) possède une limite (finie). Lorsque c'est le cas, cette limite est notée  $f'(x_0)$ , et ce nombre est appelée le *nombre dérivé* en  $x_0$ .

La fonction  $x \mapsto f'(x)$ , lorsqu'elle est définie en tout point de  $I$ , est appelée la *dérivée* de  $f$ . ■

Le taux d'accroissement  $T_{x_0}(x)$  ci-dessus est la « pente » de la droite qui passe par  $(x_0, f(x_0))$  et par  $(x, f(x))$ . En faisant varier  $x$ , avec  $x_0$  fixé, on obtient toute une famille de droites. Lorsque  $f$  est dérivable en  $x_0$ , ces droites atteignent une position « limite » lorsque  $x$  se rapproche de  $x_0$ . La droite passant par  $(x_0, f(x_0))$  et dont la pente est cette valeur limite  $f'(x_0)$  est appelée la *tangente* au graphe de  $f$  au point  $x_0$ . La situation est illustrée sur le dessin suivant.



Lorsque  $f'(x_0) > 0$ , la droite tangente est le graphe d'une fonction croissante ; il est raisonnable de penser alors à  $f$  elle-même comme à une fonction croissante au voisinage de  $x_0$ , et dans ce chapitre nous allons rendre cette intuition précise. Puisque vous connaissez le résultat (sans démonstration !) depuis le lycée, inutile de vous faire patienter : nous verrons que lorsque  $f'(x_0) > 0$  pour tous les  $x_0$ , alors la fonction est croissante.

Le plus étonnant avec les dérivées reste la facilité avec laquelle on peut les calculer.

EXEMPLE 9.2 – Prenons  $f(x) = x$ , sur  $\mathbb{R}$  tout entier par exemple. Pour tout  $x_0$ , on a

$$T_{x_0}(x) = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Cette fonction a donc certainement une limite, qui vaut 1. C'est-à-dire que  $f'(x_0) = 1$ , pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Autre exemple simple, si  $g(x) = c$  est une fonction constante, alors le taux d'accroissement est

$$\frac{c - c}{x - x_0} = 0,$$

et donc  $g'(x_0) = 0$ .

Un peu plus compliqué, prenons  $h(x) = \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}^*$ . Alors le taux d'accroissement est

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right) = -\frac{1}{xx_0}.$$

Cette expression tend vers  $-\frac{1}{x_0^2}$  lorsque  $x \rightarrow x_0$ , donc  $h$  est dérivable et  $h'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ .

Avant même de donner d'autres exemples, notons la chose suivante :

**LEMME 9.3** – Soit  $f$  une fonction dérivable en  $x_0$ . Alors  $f$  est également continue en  $x_0$ .

*Démonstration.* On écrit simplement

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \longrightarrow 0 \times f'(x_0) = 0,$$

donc  $f$  admet pour limite  $f(x_0)$  lorsque  $x \rightarrow x_0$ , ce qui signifie bien qu'elle est continue.  $\square$

**EXEMPLE 9.4** – Donnons maintenant quelques exemples de fonctions qui ne sont pas dérivables. Le plus simple est de prendre une fonction qui n'est pas continue : d'après le lemme, elle ne peut pas être dérivable non plus.

Mais il existe des fonctions continues qui ne sont pas dérivables. Prenons par exemple la « valeur absolue », c'est-à-dire la fonction  $x \mapsto |x|$ , définie sur  $\mathbb{R}$ . Prenons  $x_0 = 0$  et examinons le taux d'accroissement :

$$T_0(x) = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Cette expression n'a pas de limite en 0, puisque par exemple on a  $T_0\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  alors que  $T_0\left(-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$ . Donc la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. (Et en  $x_0$ , pour  $x_0 \neq 0$ ?)

Autre exemple, la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $x \mapsto \sqrt{x}$ . En  $x_0 = 0$ , le taux d'accroissement est

$$T_0(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

défini sur  $]0; +\infty[$ . On a donc  $T_0(x) \rightarrow +\infty$  lorsque  $x \rightarrow 0$ , et il n'y a pas de limite finie : la fonction n'est pas dérivable en 0 (et ailleurs?).

**PROPOSITION 9.5** – Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $I$  et dérivables en  $x_0 \in I$ . Alors

- ◇ (somme)  $x \mapsto f(x) + g(x)$  est dérivable en  $x_0$ , et sa dérivée en ce point est  $f'(x_0) + g'(x_0)$ .
- ◇ (produit)  $x \mapsto f(x)g(x)$  est dérivable en  $x_0$ , et sa dérivée en ce point est  $f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ .

*Démonstration.* Montrons la formule pour le produit (celle pour la somme est facile et laissée en exercice). On étudie le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f(x) \left( \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) + g(x_0) \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right).$$

Puisque  $f$  est continue en  $x_0$  en vertu du lemme précédent, cette expression a bien pour limite  $f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$ , comme annoncé.  $\square$

**EXEMPLE 9.6** – Prenons  $f(x) = g(x) = x$ . Alors la proposition indique que la dérivée de  $x \mapsto x^2$  est  $x \mapsto 1 \times x + x \times 1 = 2x$ . Continuons : la dérivée de  $x \mapsto x^3 = x^2 \times x$  est, toujours d'après la formule sur le produit, donnée par  $x \mapsto (2x) \times x + x^2 \times 1 = 3x^2$ .

En continuant de cette manière, on montre par récurrence (faites-le) que la dérivée de  $x \mapsto x^n$  est  $x \mapsto nx^{n-1}$ .

Si on se donne une constante  $c$ , et que l'on applique encore et toujours la formule pour le produit, on constate que la dérivée de  $x \mapsto cx^n$  est  $x \mapsto 0 \times x^n + c \times nx^{n-1} = cnx^{n-1}$ .

Enfin, grâce à la formule pour la somme, on constate que toute fonction polynomiale, c'est-à-dire de la forme

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

est dérivable, de dérivée

$$x \mapsto a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1}.$$

Voici une autre définition de la dérivabilité, qui va paraître artificielle pour l'instant mais dont on comprendra le caractère naturel dans le chapitre sur les formules de Taylor.

**LEMME 9.7** –  *$f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si il existe deux nombres  $a_0$  et  $a_1$  tels qu'on peut écrire*

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + h\varepsilon(h),$$

où  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ . De plus, lorsque ces nombres existent, on a  $a_0 = f(x_0)$  et  $a_1 = f'(x_0)$ .

Lisez soigneusement la démonstration ci-dessous, qui est particulièrement simple, afin de comprendre qu'il s'agit juste d'une reformulation des choses. Géométriquement, le lemme affirme que la fonction  $h \mapsto f(x_0) + f'(x_0)h$ , dont le graphe est une droite (la droite tangente), est une « bonne » approximation de la fonction  $h \mapsto f(x_0 + h)$ , puisque la différence entre les deux, qui vaut  $h\varepsilon(h)$ , est le produit de deux fonctions qui tendent vers 0.

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $f$  est dérivable en  $x_0$ , et posons (nous n'avons guère le choix)

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0),$$

pour  $h \neq 0$ , et  $\varepsilon(0) = 0$ . Par définition, on a bien  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0$ , et on a tout fait pour que  $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varepsilon(h)$ .

Montrons la réciproque ; supposons que  $a_0$  et  $a_1$  existent, tels que  $f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + h\varepsilon(h)$  avec  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ . Tout d'abord en faisant tendre  $h$  vers 0, on constate que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = a_0.$$

Mais alors, la proposition 6.16 nous dit que  $a_0 = f(x_0)$ .

Par suite le taux d'accroissement en  $x_0$  vaut

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a_1 + \varepsilon(h),$$

en posant  $h = x - x_0$ . Lorsque  $x \rightarrow x_0$ , ce taux d'accroissement tend donc vers  $a_1$ , ce qui par définition signifie que  $f$  est dérivable en  $x_0$  et que  $f'(x_0) = a_1$ .  $\square$

Avec cette nouvelle formulation, il devient facile de montrer un résultat sur la composition des fonctions :

**PROPOSITION 9.8** – Soit  $g: I \rightarrow J$  une fonction dérivable en  $x_0 \in I$ , et soit  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable en  $g(x_0) \in J$ . Alors  $f \circ g$  est dérivable en  $x_0$ , et de plus

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

*Démonstration.* D'après le lemme, on peut écrire

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + g'(x_0)h + h\varepsilon(h),$$

avec  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0$ , et de même en posant  $y_0 = g(x_0)$ ,

$$f(y_0 + u) = f(y_0) + f'(y_0)u + u\phi(u),$$

avec  $\phi(u) \rightarrow 0$  lorsque  $u \rightarrow 0$ . On commence donc par écrire

$$\begin{aligned} f \circ g(x_0 + h) &= f[g(x_0 + h)] \\ &= f[g(x_0) + g'(x_0)h + h\varepsilon(h)] \\ &= f(y_0 + u), \end{aligned}$$

en posant  $u = g'(x_0)h + h\varepsilon(h)$ . On peut donc poursuivre :

$$\begin{aligned} f \circ g(x_0 + h) &= f(y_0) + f'(y_0)u + u\phi(u) \\ &= f(y_0) + f'(y_0)[g'(x_0)h + h\varepsilon(h)] + u\phi(u) \\ &= f(y_0) + f'(y_0)g'(x_0)h + h\theta(h), \end{aligned}$$

où l'on a rassemblé tous les termes manquants dans  $\theta(h)$ , c'est-à-dire que l'on a posé

$$\theta(h) = f'(y_0)\varepsilon(h) + (g'(x_0) + \varepsilon(h))\phi[h(g'(x_0) + \varepsilon(h))].$$



Cette expression est peut-être compliquée, mais l'on retiendra simplement que  $\theta(h) \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0$ .

On donc trouvé  $a_0 = f(y_0)$  et  $a_1 = f'(y_0)g'(x_0)$  comme dans le lemme, et on conclut que  $f \circ g$  est dérivable en  $x_0$  comme annoncé.  $\square$

EXEMPLE 9.9 – Prenons  $f(t) = \frac{1}{t}$  sur  $J = \mathbb{R}^*$ . Nous avons vu dans l'exemple 9.2 que  $f'(t) = -\frac{1}{t^2}$ .

Si on se donne maintenant une fonction  $g$  définie sur  $I$  telle que  $g(x) \neq 0$  pour tout  $x \in I$ , alors on peut la voir comme une fonction  $I \rightarrow J$ . On peut donc considérer  $f \circ g$ , et on a tout simplement  $f \circ g(x) = \frac{1}{g(x)}$ .

La proposition affirme que cette fonction est dérivable, et que sa dérivée en  $x$  est

$$f'(g(x))g'(x) = -\frac{1}{g(x)^2}g'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Ce résultat est à savoir, donc nous allons l'énoncer séparément.

PROPOSITION 9.10 – Soit  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable qui ne s'annule pas. Alors la fonction  $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$  est dérivable, de dérivée  $x \mapsto -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$ .

PROPOSITION 9.11 – Les fonctions suivantes sont dérivables sur le domaine indiqué :

- ◇  $x \mapsto e^x$  sur  $\mathbb{R}$ , et sa dérivée est  $x \mapsto e^x$ ,
- ◇  $x \mapsto \sin(x)$  sur  $\mathbb{R}$ , et sa dérivée est  $x \mapsto \cos(x)$ ,
- ◇  $x \mapsto \cos(x)$  sur  $\mathbb{R}$ , et sa dérivée est  $x \mapsto -\sin(x)$ ,
- ◇  $x \mapsto \tan(x)$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$ , et sa dérivée est  $x \mapsto 1 + (\tan(x))^2$ ,
- ◇  $x \mapsto \ln(x)$  sur  $]0; +\infty[$ , et sa dérivée est  $x \mapsto \frac{1}{x}$ ,
- ◇  $x \mapsto \arcsin(x)$  sur  $[-1, 1]$ , et sa dérivée est  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,
- ◇  $x \mapsto \arccos(x)$  sur  $[-1, 1]$ , et sa dérivée est  $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,
- ◇  $x \mapsto \arctan(x)$  sur  $\mathbb{R}$ , et sa dérivée est  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ ,
- ◇  $x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$  sur  $]0; +\infty[$  pour  $n \geq 1$ , et sa dérivée est  $x \mapsto \frac{1}{n}(\sqrt[n]{x})^{1-n} = \frac{1}{n}x^{1/n-1}$ .

Ce n'est pas la première fois que nous sommes dans cette situation : nous n'avons pas de (vraie) définition des fonctions exponentielle, sinus et cosinus, donc aucun espoir de faire cette démonstration pour l'instant. Dans le chapitre suivant nous allons (enfin !) remédier à cela.

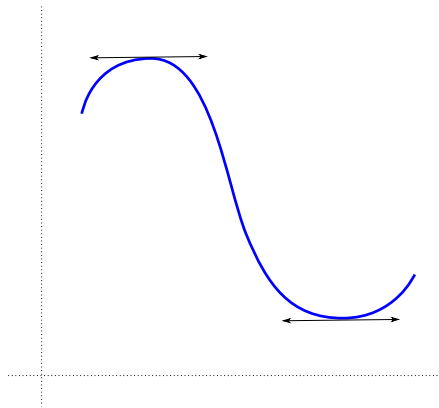
On peut par contre calculer la dérivée de la fonction tangente à l'aide des formules pour cosinus et sinus : faites-le. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous verrons un résultat sur la dérivée de la réciproque d'une fonction, à partir duquel nous pourrons démontrer les formules ci-dessus pour les cinq derniers exemples.

### Le théorème des accroissements finis

Le théorème des accroissements finis est aux fonctions dérivables ce que le théorème des valeurs intermédiaires est aux fonctions continues : c'est ce résultat qui justifie les définitions.

Commençons par une remarque simple et importante :

LEMME 9.12 – Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On suppose qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f$  est dérivable en  $c$ , et tel que  $f$  atteint un extremum (maximum ou minimum) en  $c$ . Alors  $f'(c) = 0$ .



*Démonstration.* Supposons que  $f$  atteint un minimum en  $c$ ,

donc que  $f(x) - f(c) \geq 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ . Alors

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \text{ pour } x > c.$$

En passant à la limite, on obtient  $f'(c) \geq 0$ . Mais

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \text{ pour } x < c,$$

et en passant à la limite on obtient  $f'(c) \leq 0$ .

Finalement  $f'(c) = 0$ , comme annoncé. On procède de manière similaire dans le cas d'un maximum.  $\square$

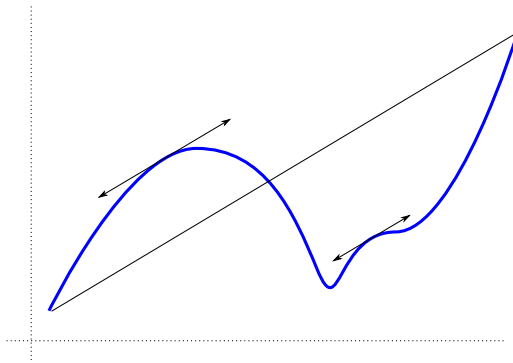
Attention à ne pas faire dire à ce lemme plus que ce qu'il ne dit vraiment. Tout d'abord il ne faut pas oublier la condition  $c \in ]a, b[$  : penser à la fonction  $f(x) = x$  sur  $[0, 1]$ , elle atteint un minimum en 0 et un maximum en 1, mais sa dérivée de s'annule pas. Ensuite, noter que la réciproque du lemme est fautive : par exemple la fonction  $f(x) = x^3$  sur  $\mathbb{R}$  vérifie  $f'(0) = 0$ , mais on ne peut trouver aucun intervalle  $[a, b]$  comme dans l'énoncé.

**THÉORÈME 9.13 (ACCROISSEMENTS FINIS)** – Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On suppose que  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ .

Alors il existe un nombre  $c$  avec  $a < c < b$  tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bien sûr le nombre  $c$  n'est pas unique.



*Démonstration.* Posons

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

et  $g(x) = f(x) - Ax$ , pour  $x \in [a, b]$ . La fonction  $g$  est dérivable et  $g'(x) = f'(x) - A$ . Nous allons montrer le théorème pour la fonction  $g$ ; puisque  $g(b) - g(a) = f(b) - f(a) - A(b - a) = 0$ , on a

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0,$$

et il s'agit de montrer qu'il existe  $c$  tel que  $g'(c) = 0$ . Mais alors  $g'(c) = f'(c) - A = 0$  et on a bien  $f'(c) = A$ , donc le théorème est montré pour  $f$  également.

(La fonction  $g$  vérifie  $g(b) = g(a)$ , et dans ce cas particulier le théorème s'appelle « théorème de Rolle ».)

D'après la proposition 8.3, on a  $g([a, b]) = [m, M]$ , puisque  $g$  est continue. Si  $g$  est constante, alors  $g'(x) = 0$  pour tout  $x$ , et il n'y a rien à montrer; on peut donc supposer que  $m < M$ . Soit  $x_1 \in [a, b]$  tel que  $g(x_1) = m$  et soit  $x_2$  tel que  $g(x_2) = M$ .

Si  $x_1 \in ]a, b[$ , on prend  $c = x_1$ . Puisque  $g$  atteint alors un minimum en  $c$ , on a  $g'(c) = 0$  d'après le lemme.

Si au contraire  $x_1 = a$  ou  $b$ , on a  $g(a) = g(b) = m$ . Mais alors  $x_2 \in ]a, b[$  puisque  $m \neq M$ . Dans ce cas on pose  $c = x_2$ , et puisque  $g$  atteint un maximum en  $c$ , le même lemme donne encore  $g'(c) = 0$ .  $\square$

La plus importante conséquence est bien sûr :

**COROLLAIRE 9.14** – Soit  $f$  une fonction dérivable définie sur l'intervalle  $I$ . Alors

- ◊ si  $f'(x) \geq 0$  pour tous les  $x \in I$ , alors la fonction  $f$  est croissante;
- ◊ si  $f'(x) > 0$  pour les  $x$ , alors  $f$  est strictement croissante;
- ◊ si  $f'(x) \leq 0$ , resp.  $f'(x) < 0$ , alors  $f$  est décroissante, resp. strictement décroissante;
- ◊ si  $f'(x) = 0$  pour tous les  $x \in I$ , alors  $f$  est constante.

*Démonstration.* Montrons le premier point, les autres étant similaires (le dernier est même une conséquence des autres).

Supposons donc que  $f'(x) \geq 0$  pour  $x \in I$ . Si  $a < b$  sont deux éléments de  $I$ , alors d'après le théorème il existe  $c$  tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \geq 0.$$

On en déduit que  $f(b) \geq f(a)$ . □

En Terminale vous avez normalement passé beaucoup de temps à étudier des fonctions à l'aide de ce résultat, ce qui nécessite un certain entraînement. Nous allons donner un exemple archi-simple pour rappeler un peu la méthode ; dans les exercices vous êtes invités à vous refaire la main. Dans le chapitre suivant nous verrons quelques exemples supplémentaires.

EXEMPLE 9.15 – Regardons la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

où  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Soit  $\delta \in \mathbb{C}$  un nombre tel que  $\delta^2 = b^2 - 4ac$  ; nous savons que les racines de  $f$ , qui peuvent être réelles ou complexes, sont

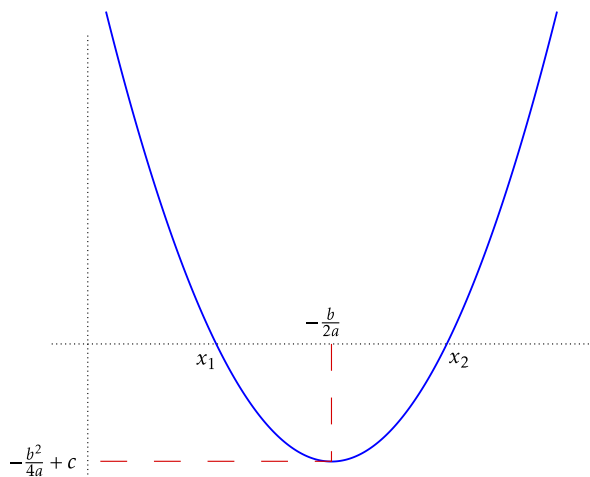
$$x_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

Regardons la dérivée :  $f'(x) = 2ax + b$ . Supposons que  $a > 0$ . On a donc  $f'(x) > 0$  pour  $x > -\frac{b}{2a}$ , et  $f'(x) < 0$  pour  $x < -\frac{b}{2a}$ , ainsi que  $f'(x) = 0$  pour  $x = -\frac{b}{2a}$ . La fonction est donc décroissante sur  $]-\infty, -\frac{b}{2a}]$  et croissante sur  $[-\frac{b}{2a}, +\infty[$  ; on en déduit qu'elle atteint un minimum en  $-\frac{b}{2a}$ , ce qui est cohérent avec le fait que la dérivée s'annule en ce point.

Noter que ce nombre  $-\frac{b}{2a}$  est la moyenne des deux racines  $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ . De plus, la valeur minimale prise par  $f$  est

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2}{4a} + c,$$

et cette valeur est négative si et seulement si  $b^2 - 4ac \geq 0$ . À l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, on retrouve le fait que les racines sont réelles si et seulement si le discriminant  $b^2 - 4ac$  est positif.



– Deuxième lecture –

### Le théorème du point fixe

DÉFINITION 9.16 – Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et soit  $k \geq 0$ . On dit que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $I$  lorsque

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|,$$

pour tous  $x, y \in I$ . ■

Lorsque  $0 < k < 1$ , on dit parfois d'une fonction lipschitzienne qu'elle est « contractante », c'est-à-dire qu'elle réduit les distances.

Vous montrerez à titre d'exercice très facile que si  $f$  est  $k$ -lipschitzienne, alors elle est continue, et même uniformément continue (définition 8.10).

Il est important de garder en tête que lorsque  $f$  est dérivable, alors cette notion nouvelle se ramène à un critère très simple :

LEMME 9.17 – Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. Alors  $f$  est  $k$ -lipschitzienne si et seulement si  $|f'(x)| \leq k$  pour tout  $x \in I$ .

Pour l'intuition il est donc raisonnable, dès lors qu'on a affaire à une fonction lipschitzienne, de penser à une fonction dérivable de dérivée bornée.

*Démonstration.* Si  $f$  est  $k$ -lipschitzienne, on écrit

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq k \left| \frac{x - x_0}{x - x_0} \right| = k,$$

d'où  $|f'(x_0)| \leq k$  en passant à la limite.

Réciproquement si  $|f'(x_0)| \leq k$  pour chaque  $x_0$ , alors on utilise le théorème des accroissements finis pour écrire

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(c)| \leq k$$

pour tous  $x, y$ . Le résultat en découle. □

**THÉORÈME 9.18 (THÉORÈME DU POINT FIXE)** – Soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction  $k$ -lipschitzienne, pour  $0 < k < 1$ . Alors  $f$  possède une unique « point fixe » dans  $I$ , c'est-à-dire qu'il existe un unique  $x_0 \in I$  tel que  $f(x_0) = x_0$ .

De plus, si  $u_0 \in I$  est choisi arbitrairement, et si l'on définit une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  par  $u_{n+1} = f(u_n)$ , alors  $(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ .

*Démonstration.* Commençons par l'unicité. Si  $x_0$  et  $x_1$  sont deux points fixes de  $f$ , alors  $|f(x_1) - f(x_0)| = |x_1 - x_0|$  d'une part, mais par hypothèse on a aussi  $|f(x_1) - f(x_0)| \leq k|x_1 - x_0|$ . On a donc  $|x_1 - x_0| = 0$  puisque  $k < 1$ , d'où  $x_1 = x_0$ .

Prenons maintenant  $u_0$  et définissons  $(u_n)$  comme dans l'énoncé. Si on peut montrer que  $(u_n)$  possède une limite  $\ell$ , alors la suite  $(f(u_n))$  doit converger vers  $f(\ell)$  par continuité de  $f$ ; mais  $f(u_n) = u_{n+1}$ , donc  $(f(u_n))$  est une sous-suite de  $(u_n)$ , et à ce titre elle converge vers  $\ell$ . Donc  $\ell = f(\ell)$  et par unicité,  $\ell = x_0$ .

Il faut donc montrer que  $(u_n)$  converge. Écrivons

$$u_n = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1}).$$

En d'autres termes en posant  $a_n = u_n - u_{n-1}$  on a

$$u_n = u_0 + \sum_{i=1}^n a_i.$$

Nous allons montrer que la série de terme général  $a_i$  converge absolument, et donc converge d'après le théorème 4.20. Pour cela, notons que

$$\begin{aligned} |a_i| &= |u_i - u_{i-1}| = |f(u_{i-1}) - f(u_{i-2})| \\ &\leq k|u_{i-1} - u_{i-2}| = k|f(u_{i-2}) - f(u_{i-3})| \\ &\leq k^2|u_{i-2} - u_{i-3}| \\ &\leq k^3|u_{i-3} - u_{i-4}| \\ &\leq \dots \\ &\leq k^{i-1}|u_1 - u_0|. \end{aligned}$$

Ceci montre que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |a_i| &\leq |u_1 - u_0|(1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1}) = |u_1 - u_0| \frac{1 - k^n}{1 - k} \\ &\leq |u_1 - u_0| \frac{1}{1 - k}. \end{aligned}$$

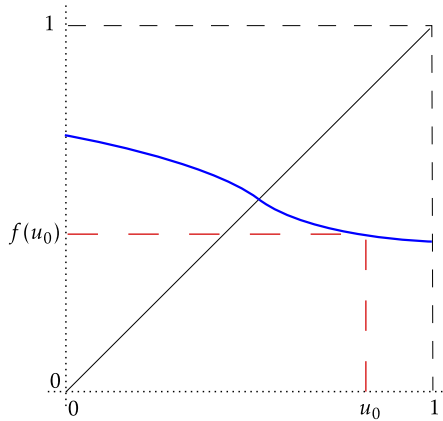
On a donc bien

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i| < +\infty,$$

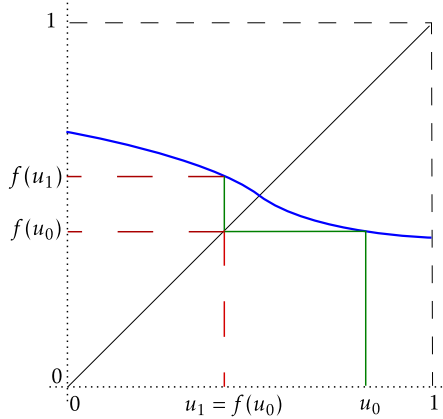
c'est-à-dire que la série est absolument convergente. □

Il est très facile de représenter la situation sur un dessin. Prenons  $I = [0, 1]$ , et traçons le graphe d'une fonction dérivable, telle que la pente de la tangente reste petite : d'après le lemme 9.17, elle est lipschitzienne. On fait en sorte que la fonction prenne ses valeurs dans  $[0, 1]$ , bien sûr. Ajoutons au dessin un point  $u_0$  et son image  $f(u_0)$ , ainsi que la diagonale (l'ensemble des points  $\{(x, x) \mid x \in [0, 1]\}$ ).



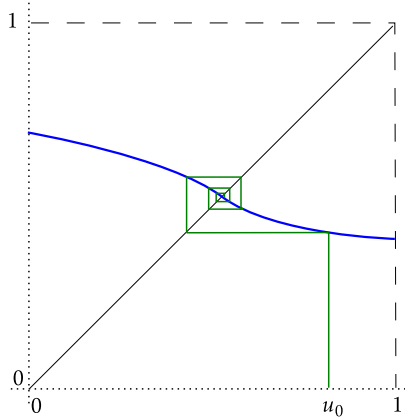


Pour dessiner les points suivants de la suite, on doit reporter  $f(u_0)$  sur l'axe des abscisses. Pour cela, nous devons en fait prendre le symétrique du point  $(0, f(u_0))$ , qui se trouve déjà sur la figure sur l'axe des ordonnées, par rapport à la diagonale.



Nous allons poursuivre en conservant uniquement les segments indiqués en traits pleins. La recette est simple : on part d'un point du graphe, on rejoint la diagonale, puis on vire à angle droit en direction du graphe. On obtient une figure en forme de spirale, qui montre bien la convergence de la suite

vers le point à l'intersection du graphe et de la diagonale, c'est-à-dire le point fixe.



À titre d'exercice, tentez l'expérience suivante : essayez de faire le même dessin mais avec un graphe tel que la dérivée au « point fixe » est  $-2$  ou  $-3$ . Que se passe-t-il ?

**EXEMPLE 9.19 (CALCUL NUMÉRIQUE DE RACINES CARRÉES)** – Il arrive parfois que l'intérêt du théorème ne soit pas dans l'existence et l'unicité du point fixe, qui peuvent être évidentes pour d'autres raisons, mais dans la méthode de calcul de ce point fixe qui est proposée, à l'aide de la suite  $(u_n)$ .

Voici un exemple. Considérons la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{\lambda}{x})$  pour  $x > 0$ , où  $\lambda$  est un réel positif. L'équation  $f(x_0) = x_0$  est équivalente à  $x_0^2 = \lambda$ , qui pour  $x_0 > 0$  possède la solution unique  $x_0 = \sqrt{\lambda}$ . Oui, mais comment évaluer numériquement  $\sqrt{\lambda}$  ? Il existe plusieurs façons de procéder évidemment, mais le théorème du point fixe en fournit déjà une qui est efficace.

Pour se ramener au cadre du théorème, prenons  $a = \sqrt{\lambda}$  et  $b > \sqrt{\lambda}$  quelconque, et posons  $I = [a, b]$ . La dérivée est donnée par  $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda}{x^2})$ , et on vérifie alors que  $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$  pour  $x \in I$ . On en déduit que  $f$  est  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur  $I$ . De plus,  $f$  est croissante sur cet intervalle ; comme  $f(a) = a$ , et

puisque l'on voit de suite que  $f(b) \leq b$ , l'intervalle  $I$  vérifie  $f(I) \subset I$ .

À partir de maintenant, on voit  $f$  comme une fonction  $I \rightarrow I$  à laquelle le théorème s'applique. En prenant par exemple  $u_0 = b$ , nous savons maintenant que la suite définie par récurrence par  $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2}(u_n + \frac{\lambda}{u_n})$  converge vers  $\sqrt{\lambda}$ .

Essayons pour  $\lambda = 2$ . En prenant  $b = 2$ , on en déduit que la suite vérifiant  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$  converge vers  $\sqrt{2}$ . Les premiers termes sont

$$u_0 = 2, \quad u_1 = \frac{3}{2} = 1,5, \quad u_2 = \frac{17}{12} = 1,41666\dots$$

puis

$$u_3 = \frac{577}{408} = 1,4121568627\dots, \quad u_4 = \frac{665857}{470832} = 1,41421356237\dots$$

La méthode est très bonne puisqu'on peut calculer la précision du résultat. En effet, on a

$$|u_{n+1} - x_0| = |f(u_n) - f(x_0)| \leq k|u_n - x_0|,$$

et on en déduit (un peu comme dans la démonstration du théorème) que

$$|u_n - x_0| \leq k^n |u_0 - x_0|.$$

Dans notre exemple, on a pris  $k = \frac{1}{2}$  et donc on sait que

$$|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n} |2 - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Comme  $2^{10} > 1000$ , on en déduit que l'écart entre  $u_{10}$  et  $\sqrt{2}$  est inférieur à 0,001, par exemple; puisque  $u_{10}$  commence par 1,414, on en déduit que  $\sqrt{2}$  commence également par 1,414. (Et sachant ceci, on en déduit *a posteriori* que  $u_4$  commence déjà par les 3 bons chiffres après la virgule. Mais il fallait bien le démontrer.)

## Dérivées et réciproques

PROPOSITION 9.20 – Soit  $f : I \rightarrow J$  une bijection, et soit  $f^{-1} : J \rightarrow I$  sa réciproque. On suppose que  $f$  est continue, et qu'elle est dérivable au point  $x_0 \in I$ , avec  $f'(x_0) \neq 0$ . Alors en notant  $y_0 = f(x_0)$ , la fonction  $f^{-1}$  est dérivable au point  $y_0$  et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Démonstration. Le taux d'accroissement pour  $f^{-1}$  au point  $y_0$  est la fonction  $T_{y_0}$  définie par

$$T_{y_0}(y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0},$$

pour  $y \neq y_0$ . On a donc

$$T_{y_0}(f(x)) = \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)},$$

et cette expression a un sens pour  $x \neq x_0$  puisqu'alors  $f(x) \neq f(x_0)$ . Par dérivabilité de  $f$ , on en déduit que  $T_{y_0}(f(x)) \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$  lorsque  $x \rightarrow x_0$ .

Comme la fonction  $f^{-1}$  est continue d'après le théorème 6.24, on a  $f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(y_0) = x_0$  lorsque  $y \rightarrow y_0$ . Par composition,

$$T_{y_0}(y) = T_{y_0}[f(f^{-1}(y))] \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$$

lorsque  $y \rightarrow y_0$ , ce qui signifie bien que  $f^{-1}$  est dérivable en  $y_0$ , et que le nombre dérivé est celui annoncé.  $\square$

En combinant plusieurs résultats déjà obtenus, on en arrive au théorème suivant, qui est facile à mémoriser.

THÉORÈME 9.21 – Soit  $f$  une fonction continument dérivable sur l'intervalle  $I$ , telle que  $f'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in I$ .

Alors  $f$  réalise une bijection  $I \rightarrow J$ . Sa réciproque  $f^{-1}$  est également continument dérivable, et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))},$$

pour tout  $y \in J$ .

Enfin, si  $I$  est ouvert, alors  $J$  l'est aussi.

Notez que l'on dit d'une fonction  $f$  qu'elle est *continument dérivable* pour indiquer qu'elle est dérivable et que  $f'$  est continue. On parle aussi parfois de « fonction de classe  $C^1$  ».

Avant 1990,  
l'orthographe  
recommandée  
était  
« continûment ».

*Démonstration.* Puisque la fonction  $f'$  est continue et ne s'annule pas, elle ne peut pas changer de signe en vertu du théorème des valeurs intermédiaires : ainsi, ou bien  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in I$  et  $f$  est croissante, ou bien  $f'(x) < 0$  et  $f$  est décroissante. Dans tous les cas,  $f$  est monotone. En notant  $J = f(I)$ , qui est un intervalle encore d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a donc établi que  $f: I \rightarrow J$  est une bijection.

La proposition précédente montre que  $f^{-1}$  est dérivable en tout point de  $J$ , et montre également la formule pour  $(f^{-1})'$ . Le théorème 6.24 montre que  $f^{-1}$  est continue, et on en conclut que  $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$  est elle-même continue.

Enfin, une fonction (strictement) monotone ne peut pas avoir de minimum ni de maximum sur un intervalle ouvert (vérifiez-le), donc  $J$  doit être ouvert si  $I$  est ouvert.  $\square$

EXEMPLE 9.22 – On peut retrouver certains des résultats de la proposition 9.11. Par exemple, sachant que la fonction exponentielle est dérivable, et que c'est même sa propre dérivée, on peut calculer la dérivée de sa réciproque, le logarithme, à partir du théorème :

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

Autre exemple, sachant que la fonction tangente est dérivable et que

$$\tan'(x) = 1 + (\tan(x))^2 > 0,$$

on en déduit que sa réciproque arctangente est dérivable et que

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan(\arctan(x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Sur le même modèle, vous pourrez traiter arcsinus et arccosinus.

Enfin, prenons  $f(x) = x^n$  (pour  $n \geq 1$ ), de sorte que  $f'(x) = nx^{n-1}$ . Cette dérivée s'annule en 0 (pour  $n \geq 2$ ), donc pour appliquer le théorème il faut se restreindre à  $]0; +\infty[$ . On en déduit que la réciproque, c'est-à-dire la fonction  $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ , est dérivable pour  $x > 0$  et que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}(\sqrt[n]{x})^{1-n}.$$

En 0, cette fonction n'est pas dérivable, voir l'exemple 9.4.

### Fonctions à valeurs vectorielles

Soit  $I \subset \mathbb{R}$ , et soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , qui est donc de la forme

$$t \mapsto f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)).$$

Pour définir la dérivée d'une telle fonction, deux choses peuvent venir à l'esprit ; et la proposition suivante affirme qu'elles coïncident.

**PROPOSITION 9.23** – *Avec les notations ci-dessus, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. chaque fonction  $f_i$  est dérivable au point  $t_0$  ;
2. la fonction

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

possède une limite lorsque  $t \rightarrow t_0$ .

Dans ce cas, la limite en question est

$$(f'_1(t_0), \dots, f'_n(t_0)),$$

que l'on appelle le vecteur dérivé de  $f$  en  $t_0$  ; on le note  $f'(t_0)$ .

Rappelons que la notion de limite de fonction à valeurs vectorielles a été donnée dans la définition 6.26. Il faut bien comprendre que lorsque l'on forme

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

le numérateur est une différence de vecteurs (ou de matrices-colonnes, si l'on veut), alors que le dénominateur est un scalaire. C'est-à-dire que

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0} \begin{pmatrix} f_1(t) - f_1(t_0) \\ \vdots \\ f_n(t) - f_n(t_0) \end{pmatrix}.$$

Ayant réalisé ceci, la démonstration est facile.

EXEMPLE 9.24 – Une fonction de la forme  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donc de la forme

$$t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

est appelée une *courbe*. La dérivée, lorsqu'elle existe, est

$$t \mapsto \gamma'(t) = (x'(t), y'(t)),$$

et  $\gamma'(t)$  est appelé le *vecteur-vitesse* à l'instant  $t$  : en effet on peut penser à  $\gamma$  comme à un point qui se déplace dans le plan. La *vitesse* à l'instant  $t$  est

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Par abus de langage, l'image de  $\gamma$ , c'est-à-dire l'ensemble

$$\gamma(I) = \{\gamma(t) \mid t \in I\},$$

est parfois également appelé une *courbe*. Au point  $\gamma(t)$ , on peut tracer la droite de vecteur directeur  $\gamma'(t)$ , qui est appelée la *tangente* à la courbe à l'instant  $t$ . Nous allons étudier quelques courbes dans les exercices. Ça se fait simplement en étudiant séparément les fonctions  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto y(t)$ .

Les propriétés usuelles des dérivées restent vraies pour les fonctions à valeurs vectorielles, par exemple il est clair que  $(f + g)' = f' + g'$ . Il n'y a pas de formule pour le produit, puisque le produit de deux vecteurs n'est pas en général défini.

Par contre, on peut considérer les fonctions dont les valeurs sont des *matrices*, c'est-à-dire les fonctions du type  $I \rightarrow M_{n,m}(\mathbb{R})$ . On peut identifier  $M_{n,m}(\mathbb{R})$  avec  $\mathbb{R}^{nm}$ , et ce qui précède s'applique. On a alors sans surprise :

LEMME 9.25 – Si  $f: I \rightarrow M_{n,m}(\mathbb{R})$  et  $g: I \rightarrow M_{m,\ell}(\mathbb{R})$  sont dérivables, alors  $fg: I \rightarrow M_{n,\ell}(\mathbb{R})$  est dérivable et

$$(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t).$$

La démonstration peut se faire directement par le calcul, en se basant sur la formule pour les fonctions à valeurs réelles (voir la proposition 9.5).

Par contre, il faut faire attention à une chose : le théorème des accroissements finis concerne strictement les fonctions à valeurs réelles, et n'a pas d'équivalent pour les fonctions vectorielles. Il reste néanmoins vrai que si une fonction dérivable  $f$  sur un intervalle  $I$  vérifie  $f'(t) = 0$  pour tout  $t \in I$ , alors  $f$  est constante : en effet il suffit de le vérifier pour chaque composante de  $f$ .

Enfin, concluons en indiquant que ces dernières remarques sur les fonctions à valeurs vectorielles ou matricielles restent vraies en remplaçant  $\mathbb{R}$  par  $\mathbb{C}$ .



# Chapitre 10

## L'exponentielle

– Première lecture –

### L'exponentielle complexe

DÉFINITION 10.1 – Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On note  $\exp(z)$  ou  $e^z$  le nombre

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}.$$

Le nombre complexe  $e^z$  est appelé *l'exponentielle* de  $z$ . ■

L'existence de la limite a été montrée dans l'exemple 4.25.

La plus importante propriété de l'exponentielle est sans conteste la suivante :

THÉORÈME 10.2 – Soient  $a$  et  $b$  deux nombres complexes. Alors

$$e^{a+b} = e^a e^b.$$

En particulier, pour tout nombre complexe  $z$ , on a  $e^z e^{-z} = e^0 = 1$ . On constate donc que  $e^z \neq 0$ .

*Démonstration.* On a  $e^{a+b} = \lim u_n$ , en posant

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(a+b)^k}{k!}.$$

En utilisant la formule de Newton pour le binôme, on peut développer et obtenir :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \frac{a^p b^{k-p}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \frac{a^p}{p!} \frac{b^{k-p}}{(k-p)!}. \end{aligned}$$

Si maintenant on pose  $\alpha_{p,q} = \frac{a^p}{p!} \frac{b^q}{q!}$ , et si on note

$$T_n = \{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 0 \leq p + q \leq n\},$$

alors le calcul précédent s'écrit

$$u_n = \sum_{(p,q) \in T_n} \alpha_{p,q}.$$

De même, on a  $e^a e^b = \lim v_n$  où

$$v_n = \left( \sum_{p=0}^n \frac{a^p}{p!} \right) \left( \sum_{q=0}^n \frac{b^q}{q!} \right).$$

On peut développer le produit :

$$v_n = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n \frac{a^p}{p!} \frac{b^q}{q!}.$$

Si on pose cette fois-ci

$$C_n = \{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 0 \leq p \leq n \text{ et } 0 \leq q \leq n\},$$

alors on a

$$v_n = \sum_{(p,q) \in C_n} \alpha_{p,q}.$$

On souhaite montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont la même limite, ou encore que  $v_n - u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . Cette différence s'écrit

$$v_n - u_n = \sum_{(p,q) \in C_n \setminus T_n} \alpha_{p,q}.$$

On a donc la majoration

$$|v_n - u_n| \leq \sum_{(p,q) \in C_n \setminus T_n} |\alpha_{p,q}|,$$

et  $|\alpha_{p,q}| = \frac{|a|^p}{p!} \frac{|b|^q}{q!}$ . On en tire la conclusion suivante : si on avait démontré le théorème pour  $|a|$  et  $|b|$  à la place de  $a$  et  $b$ , alors on saurait que le membre de droite de cette dernière inégalité tend vers 0, donc le membre de gauche aussi. Ainsi, il est suffisant de montrer le théorème pour tous les nombres réels  $\geq 0$ , l'argument ci-dessus montre qu'il est alors vrai pour tous les complexes.

Nous poursuivons donc en supposant que  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$ . Il suffit alors d'observer que  $C_N \subset T_{2N} \subset C_{2N}$  pour en déduire que

$$v_n \leq u_{2n} \leq v_{2n}.$$

Ces trois suites sont convergentes, il est donc clair qu'elles ont la même limite.  $\square$

Le résultat suivant va être utile pour calculer des dérivées.

PROPOSITION 10.3 – Pour tout nombre complexe  $z_0$ , on a

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} = e^{z_0}.$$

C'est bien une limite dans les complexes, pas seulement dans  $\mathbb{R}$ . Donc à strictement parler ce n'est pas un nombre dérivé.

*On dit parfois que la fonction  $z \mapsto e^z$  est « holomorphe ».*

*Démonstration.* Prenons d'abord  $z_0 = 0$ . On écrit

$$\begin{aligned} \frac{e^z - 1}{z} &= 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{(n+1)!} + \cdots \\ &= 1 + z \left( \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{(n+1)!} + \cdots \right). \end{aligned}$$

Lorsque  $|z| \leq 1$ , on a la majoration

$$\left| z \left( \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \dots + \frac{z^n}{(n+2)!} + \dots \right) \right| \leq |z| \left| \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \right| \\ = |z|(e-1) \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0.$$

On a donc bien  $\frac{e^z-1}{z} \rightarrow 1 = e^0$  lorsque  $z \rightarrow 0$ .

Maintenant si  $z_0$  est quelconque, on pose  $h = z - z_0$  et d'après le théorème précédent,

$$\frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} = \frac{e^{z_0+h} - e^{z_0}}{h} = e^{z_0} \left( \frac{e^h - 1}{h} \right) \rightarrow e^{z_0},$$

en utilisant le cas particulier déjà traité. □

## L'exponentielle réelle

Lorsque  $x \in \mathbb{R}$ , il est clair que  $e^x \in \mathbb{R}$ . Nous allons nous tourner vers l'étude de  $x \mapsto e^x$ , vue comme une fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , et bien sûr l'un de nos objectifs est de vérifier qu'il s'agit bien de la fonction abordée en Terminale.

Voici de quoi s'en convaincre :

**LEMME 10.4** – *La fonction  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable, et  $\exp' = \exp$ . De plus, il s'agit de l'unique fonction ayant cette propriété et prenant la valeur 1 en 0.*

Le mot-clef est peut-être « unique » : au Lycée on vous a certainement présenté l'exponentielle comme une fonction égale à sa dérivée, et telle que  $\exp(0) = 1$ , sans pouvoir *démontrer* son existence. D'après le lemme, la fonction exponentielle que nous avons présentée est la bonne.

*Démonstration.* Le fait que  $\exp' = \exp$  découle directement de la proposition 10.3.

Soit maintenant une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ . On considère la fonction  $g$  définie par  $g(x) = e^{-x}f(x)$ . On a alors  $g'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = 0$  puisque  $f'(x) = f(x)$ . Par suite, la fonction  $g$  est constante, disons  $g(x) = c$ .

Mais alors  $f(x) = e^x g(x)$  puisque  $e^x e^{-x} = e^0 = 1$ , donc  $f(x) = ce^x$ . Si nous prenons en compte  $f(0) = 1$ , on en déduit  $c = 1$ , et finalement  $f(x) = e^x$ .  $\square$

**PROPOSITION 10.5** – La fonction exponentielle réalise une bijection  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$ . Sa réciproque, que l'on appelle le logarithme népérien et que l'on note  $\ln: \mathbb{R}^{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ , est dérivable. De plus, on a  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ .

*Démonstration.* On a vu que l'exponentielle ne s'annulait pas. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle ne peut pas changer de signe sur  $\mathbb{R}$ , et comme  $e^0 = 1$ , on conclut que  $e^x > 0$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

Comme  $\exp' = \exp > 0$ , l'exponentielle est croissante. On a donc  $e^x \geq 1$  pour  $x \geq 0$ . En considérant  $g(x) = e^x - x - 1$ , qui satisfait  $g(0) = 0$  et  $g'(x) = e^x - 1 \geq 0$  pour  $x \geq 0$ , on s'aperçoit que  $g$  est croissante et donc reste positive pour  $x \geq 0$ . En d'autres termes  $e^x \geq x + 1$  pour  $x \geq 0$ , et en particulier

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

On en déduit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'image de  $\mathbb{R}$  par la fonction exponentielle est un intervalle, contenu dans  $]0, +\infty[$ . Vu les limites que nous venons de calculer, cette image doit être  $]0, +\infty[$  tout entier.

On a donc montré que l'exponentielle était une bijection comme annoncé. Les assertions sur la réciproque se montrent avec la proposition 9.20, et à vrai dire, nous l'avons déjà fait dans l'exemple 9.22.  $\square$

Voici une dernière propriété qui était familière au lycée.

**PROPOSITION 10.6** – Soit  $N$  un entier. Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^N} = +\infty,$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^N e^x = 0.$$

Enfin

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \ln(t) = 0.$$

*Démonstration.* Posons  $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ , de sorte que  $e^x = \lim_n P_n(x)$ . Pour  $x \geq 0$ , on a  $e^x \geq P_n(x)$  pour tout  $n$ ; or pour  $n > N$  on a déjà

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_n(x)}{x^N} = +\infty,$$

pour des raisons de degrés. La deuxième limite se calcule en prenant l'inverse, puisque  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ . Pour la troisième, on pose  $x = x(t) = e^t$ , de sorte que  $t \ln(t) = x e^x$  avec  $x(t) \rightarrow -\infty$  lorsque  $t \rightarrow 0$ , d'où le résultat.  $\square$

## Le cercle et le nombre $\pi$

Nous allons maintenant étudier la fonction  $\gamma$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\gamma(t) = e^{it}$ . En identifiant  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}^2$ , on pense à  $\gamma$  comme à une courbe dans le plan. Commençons par une remarque.

LEMME 10.7 – Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Alors  $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ .

*Démonstration.* Il faut noter que si  $(u_n)$  est une suite de complexes telle que  $u_n = a_n + ib_n \rightarrow \ell = \ell_1 + i\ell_2$ , alors  $\overline{u_n} = a_n - ib_n \rightarrow \bar{\ell} = \ell_1 - i\ell_2$  (puisque  $a_n \rightarrow \ell_1$  et  $b_n \rightarrow \ell_2$ ).

On obtient le lemme en appliquant cette remarque à

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!},$$

qui converge vers  $e^z$ , alors que

$$\overline{u_n} = \sum_{k=0}^n \frac{\bar{z}^k}{k!},$$

converge vers  $e^{\bar{z}}$ .  $\square$

Puisque  $\overline{it} = -it$  quand  $t \in \mathbb{R}$ , nous avons  $\overline{e^{it}} = e^{-it}$ , et donc

$$|e^{it}|^2 = e^{it} \overline{e^{it}} = e^0 = 1.$$

Par suite  $|\gamma(t)| = 1$  : la courbe  $\gamma$  prend ses valeurs dans

$$C = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\},$$

c'est-à-dire le cercle de centre  $(0,0)$  et de rayon 1. L'un de nos grands objectifs est de montrer que  $\gamma$  passe par chaque point du cercle  $C$ .

LEMME 10.8 – La fonction  $\gamma$  est dérivable et  $\gamma'(t) = ie^{it}$ .

*Démonstration.* On calcule

$$\frac{e^{it} - e^{it_0}}{t - t_0} = i \frac{e^{it} - e^{it_0}}{it - it_0} \longrightarrow ie^{it_0},$$

d'après la proposition 10.3 appliquée en  $z_0 = it_0$ . □

On a notamment  $|\gamma'(t)| = |ie^{it}| = 1$ . En termes plus géométriques : le point  $\gamma(t)$  se déplace à *vitesse constante* le long du cercle. Intuitivement, c'est peut-être déjà suffisant pour se convaincre que  $\gamma$  va faire tout le tour de  $C$ .

DÉFINITION 10.9 – On définit une fonction  $\cos$  sur  $\mathbb{R}$  par la formule

$$\cos(t) = \Re(e^{it}) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

On l'appelle le *cosinus*. De même on définit une fonction  $\sin$  sur  $\mathbb{R}$  par la formule

$$\sin(t) = \Im(e^{it}) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},$$

et on l'appelle le *sinus*. ■

On a donc  $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$ . De plus la relation  $|e^{it}|^2 = 1$  donne  $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$ .

À partir des définitions et du lemme précédent, on obtient tout de suite :

LEMME 10.10 – La fonction  $\cos$  est dérivable et  $\cos' = -\sin$ . De même la fonction  $\sin$  est dérivable et  $\sin' = \cos$ .

Voici un résultat fondamental.

THÉORÈME 10.11 – Il existe un unique nombre réel positif, noté  $\pi$ , tel que

$$e^{it} = 1 \iff t = 2n\pi \text{ avec } n \in \mathbb{Z}.$$

De plus, on a  $e^{i\pi} + 1 = 0$ .

*Démonstration.* Commençons par une petite étude du sinus au voisinage de 0. Puisque  $e^0 = 1$ , on a  $\sin(0) = 0$  et  $\sin'(0) = \cos(0) = 1$ . Comme la fonction cosinus est continue (et même dérivable), la proposition 6.19 nous assure qu'il existe un intervalle  $]a, b[$  avec  $a < 0 < b$  tel que  $\cos(t) > 0$  pour  $t \in ]a, b[$ . La fonction sinus est donc strictement croissante sur cet intervalle, et en particulier  $\sin(t) \neq 0$  si  $t \neq 0$  et  $t \in ]a, b[$ ; on en déduit également que  $e^{it} \neq 1$  pour  $t \neq 0$  et  $t \in ]a, b[$ .

Montrons maintenant que la fonction cosinus peut s'annuler. Procédons par l'absurde : si  $\cos(t) \neq 0$  pour tout  $t$ , alors on aurait  $\cos(t) > 0$  d'après le théorème des valeurs intermédiaires, et  $\sin$  serait croissante sur tout  $\mathbb{R}$ . En particulier, on aurait  $\sin(t) \geq \sin(b) > 0$  pour  $t \geq b$ . Mais alors, regardons la fonction  $g$  définie par  $g(t) = \cos(t) + \sin(b)t - 1$  qui vérifie  $g(0) = 0$  et  $g'(t) = -\sin(t) + \sin(b) \leq 0$ . Elle est donc décroissante, et par suite  $g(t) \leq 0$  pour  $t \geq 0$ , ce qui donne  $\cos(t) \leq 1 - \sin(b)t$ . C'est absurde, puisqu'on en déduit que  $\cos(t) \rightarrow -\infty$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , alors que bien sûr le cosinus prend ses valeurs dans  $[-1, 1]$  à cause de la relation  $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$ .

On peut donc trouver  $t_0$  tel que  $\cos(t_0) = 0$ . On a alors  $\sin(t_0)^2 = 1$  donc  $\sin(t_0) = \pm 1$  et  $e^{it_0} = \pm i$ . Comme  $i^4 = (-i)^4 = 1$ , on a  $e^{4it_0} = (e^{it_0})^4 = 1$ .

Passons au théorème proprement dit. Posons

$$K = \{t \in \mathbb{R} \mid e^{it} = 1\},$$

et

$$A = \{t \in K \text{ et } t > 0\}.$$

Nous avons prouvé que  $A \neq \emptyset$ , puisque cet ensemble contient l'élément  $4t_0 > 0$ . Nous avons également prouvé que  $A$  ne



contient aucun élément dans l'intervalle  $]a, b[$ . On peut donc poser  $\ell = \inf A$ , ce nombre est alors bien défini et  $\ell \geq b > 0$ . Enfin, on pose  $\pi = \frac{\ell}{2}$  (c'est la définition du nombre  $\pi$ ).

Il faut commencer par vérifier que  $2\pi = \ell$  appartient à  $K$  (et même à  $A$ ). En effet, par définition de l'inf il existe une suite  $(t_n)$  qui converge vers  $\ell$  avec  $t_n \in A$ , donc  $e^{it_n} = \gamma(t_n) = 1$ . Par continuité de  $\gamma$ , on a  $\gamma(t_n) \rightarrow \gamma(\ell)$ , et donc  $\gamma(\ell) = 1$ , ce qui signifie bien que  $\ell \in K$ .

Soit maintenant  $t \in K$  quelconque, et soit  $n$  l'unique nombre entier tel que

$$n \leq \frac{t}{2\pi} < n + 1,$$

de sorte que  $0 \leq t - 2n\pi < 2\pi$ . On note que

$$e^{i(t-2n\pi)} = e^{it} e^{-2ni\pi} = e^{it} (e^{2i\pi})^n = 1 \times 1^n = 1.$$

Ainsi  $t - 2n\pi \in K$ , mais par définition de  $2\pi = \ell = \inf A$ , le seul élément de  $K$  dans  $[0, 2\pi[$  est 0. On en conclut bien que  $t = 2n\pi$ , comme on souhaitait le montrer.

Enfin, le nombre  $e^{i\pi}$  vérifie  $(e^{i\pi})^2 = e^{2i\pi} = 1$ , donc  $e^{i\pi} = \pm 1$ . Mais  $\pi < 2\pi$  donc  $e^{i\pi} = 1$  est exclu. Finalement on a bien  $e^{i\pi} = -1$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**PROPOSITION 10.12** – Sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , la fonction cosinus est décroissante. Son image est l'intervalle  $[0, 1]$  entier.

Sur le même intervalle, la fonction sinus est croissante. Son image est également l'intervalle  $[0, 1]$  entier.

*Démonstration.* Le nombre  $x = e^{i\frac{\pi}{2}}$  vérifie  $x^2 = e^{i\pi} = -1$ , donc  $x = \pm i$ . On a donc  $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$  et  $\sin(\frac{\pi}{2}) = \pm 1$ . (Dans un instant nous allons trouver le bon signe.)

Le nombre  $\frac{\pi}{2}$  est le plus petit nombre réel pour lequel le cosinus s'annule : en effet si  $t_0$  est un tel nombre, nous avons vu au cours de la démonstration du théorème que  $4t_0$  vérifie  $e^{4it_0} = 1$  ; nous savons alors que  $4t_0$  est un multiple de  $2\pi$ , donc  $t_0$  est un multiple de  $\frac{\pi}{2}$ . Ainsi la fonction cosinus ne s'annule pas sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$ , et donc elle ne change pas de signe (valeurs intermédiaires). Comme  $\cos(0) = 1$ , on en déduit  $\cos(t) \geq 0$  sur cet intervalle.

La fonction sinus est donc croissante sur le même intervalle puisque  $\sin' = \cos$ , et puisque  $\sin(0) = 0$ , on a  $\sin(t) \geq 0$  pour  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . En particulier  $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ .

Enfin, la relation  $\cos' = -\sin$  montre que la fonction cosinus est décroissante, toujours sur le même intervalle.

Pour conclure, c'est le théorème des valeurs intermédiaires qui garantit que les deux fonctions en question prennent bien toutes les valeurs entre 0 et 1.  $\square$

Nous avons atteint notre objectif :

**PROPOSITION 10.13** – *Tout point du cercle unité  $C$  est de la forme  $e^{it}$  pour au moins un nombre  $t \in \mathbb{R}$ . De plus, deux nombres  $t$  et  $u$  vérifient  $e^{it} = e^{iu}$  si et seulement si  $t = u + 2n\pi$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* Si  $e^{it} = e^{iu}$ , alors  $e^{i(t-u)} = 1$ , donc la dernière partie de l'énoncé est une conséquence du théorème.

Soit maintenant  $x + iy$  un nombre complexe de module 1, c'est-à-dire que  $x^2 + y^2 = 1$ . Dans un premier temps, supposons que  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ , de sorte que  $y = \sqrt{1-x^2}$ . Le nombre  $x$  appartient à  $[0, 1]$ , il est donc de la forme  $x = \cos(t)$  pour un unique nombre  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , d'après la proposition précédente. On a alors  $\sin(t) \geq 0$  et bien sûr  $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$ , donc  $\sin(t) = \sqrt{1-\cos(t)^2} = \sqrt{1-x^2} = y$ . Finalement  $e^{it} = x + iy$ , ce qui prouve le résultat dans ce cas.

Si  $y \leq 0$ , on prend d'abord un  $t$  tel que  $e^{it} = x - iy$  (cas précédent), et alors  $e^{-it} = x + iy$  (lemme 10.7). Et enfin, si  $x \leq 0$ , on prend  $t$  tel que  $e^{it} = -x - iy$ , et alors  $e^{i(\pi-t)} = -e^{it} = x + iy$ .  $\square$

## Forme polaire et racines $n$ -ièmes

**PROPOSITION 10.14** – *Tout nombre complexe non-nul  $z \in \mathbb{C}^*$  peut s'écrire  $z = \rho e^{i\theta}$  avec  $\rho > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Le nombre  $\rho$  est unique, et en fait  $\rho = |z|$ ; le nombre  $\theta$  est déterminé à un multiple de  $2\pi$  près.*

*En conséquence, tout nombre complexe non-nul  $z$  peut s'écrire  $z = e^w$  pour  $w \in \mathbb{C}$ .*

*Démonstration.* Il suffit de considérer  $\frac{z}{|z|}$  : c'est complexe de module 1, donc  $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$  d'après la proposition 10.13. Ainsi  $z =$

$|z|e^{i\theta}$ . La même proposition indique que  $\theta$  est déterminé à un multiple de  $2\pi$  près.

En prenant  $x = \ln(|z|)$ , et  $w = x + i\theta$ , nous avons bien  $e^w = e^x e^{i\theta} = |z|e^{i\theta} = z$ .  $\square$

Voici une application importante :

**COROLLAIRE 10.15** – Soit  $n \geq 1$  un entier. Tout nombre complexe  $z$  possède des racines  $n$ -ièmes.

Plus précisément, si  $z \neq 0$ , il existe exactement  $n$  nombres (distincts)  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  tels que  $\alpha_k^n = z$ .

La démonstration va indiquer comment trouver explicitement ces racines.

*Démonstration.* On écrit  $z = \rho e^{i\theta}$  et l'on prend  $\alpha = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}}$  ; on a alors effectivement  $\alpha^n = \rho e^{i\theta} = z$ .

Voyons les autres possibilités. Si  $\beta = r e^{i\phi}$  vérifie  $\beta^n = 1 = r^n e^{ni\phi}$ , alors on doit avoir  $r^n = \rho$  et  $n\phi = \theta + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Comme  $r \geq 0$ , on en déduit  $r = \sqrt[n]{\rho}$ . D'autre part

$$\phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n},$$

donc

$$e^{i\phi} = e^{i\frac{\theta}{n}} e^{\frac{2ki\pi}{n}},$$

de sorte que finalement  $\beta = \alpha e^{\frac{2ki\pi}{n}}$  pour un certain  $k \in \mathbb{Z}$ . Réciproquement si  $\beta$  est de cette forme alors  $\beta^n = z$ , puisque  $\left(e^{\frac{2ki\pi}{n}}\right)^n = 1$ .

Si  $k$  et  $\ell$  sont deux entiers, alors les nombres  $e^{\frac{2ki\pi}{n}}$  et  $e^{\frac{2\ell i\pi}{n}}$  sont égaux précisément lorsqu'il existe un entier  $m$  tel que  $\ell = k + mn$  (autrement dit, lorsque  $k$  et  $\ell$  sont égaux modulo  $n$ ). On en déduit que pour  $0 \leq k \leq n-1$ , les nombres  $e^{\frac{2ki\pi}{n}}$  sont distincts, et que tout nombre de la forme  $e^{\frac{2\ell i\pi}{n}}$  avec  $\ell$  entier est dans cette liste. Ce sont les  $n$  racines « de l'unité ».

Finalement on a bien  $n$  nombres qui conviennent, à savoir  $\alpha_k = \alpha e^{\frac{2ki\pi}{n}}$  pour  $0 \leq k \leq n-1$ .  $\square$

## Le théorème fondamental de l'algèbre

Pour l'instant nous avons cité ce théorème (3.9) sans démonstration. Revoici l'énoncé :

**THÉORÈME 10.16** – *Tout polynôme de degré  $\geq 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$  possède une racine dans  $\mathbb{C}$ .*

*Démonstration.* Soit donc  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $\geq 1$  ; écrivons

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n,$$

avec  $a_n \neq 0$ .

La fonction définie sur  $\mathbb{C}$  par  $z \mapsto P(z)$  est continue. De plus en écrivant

$$P(z) = a_n z^n \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} \right),$$

on voit que pour toute suite  $(z_n)_{n \geq 0}$  de nombres complexes tels que  $|z_n| \rightarrow +\infty$ , on a également  $|P(z_n)| \rightarrow +\infty$ . La fonction  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(z) = |P(z)|$  satisfait donc les hypothèses de la proposition 8.8, et on conclut qu'il existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $f(z) \geq f(z_0)$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . Nous allons montrer que  $f(z_0) = 0$ , donc  $P(z_0) = 0$ , ce qui établit le théorème.

Procédons par l'absurde, et supposons que  $P(z_0) \neq 0$ . Pour se faciliter les choses, considérons

$$Q = \frac{P(z_0 + X)}{P(z_0)};$$

alors  $Q$  est un polynôme de même degré que  $P$ , la quantité  $|Q(z)|$  atteint un minimum en 0, et ce minimum vaut  $Q(0) = 1$ . Écrivons

$$Q(z) = 1 + b_d z^d + b_{d+1} z^{d+1} + \cdots + b_n z^n,$$

avec  $b_d \neq 0$ , et  $d \geq 1$ . Maintenant, pour se débarrasser de  $b_d$ , passons au polynôme

$$R(X) = Q(\alpha X),$$

où  $\alpha$  vérifie  $\alpha^d = -\frac{1}{b_d}$  : un tel nombre existe d'après le corollaire 10.15. Ce  $R$  est un polynôme de degré  $n$ , la quantité  $|R(z)|$

atteint un minimum en 0, et ce minimum vaut encore  $R(0) = 1$  ; mais de plus

$$R(z) = 1 - z^d + c_{d+1}z^{d+1} + \cdots + c_n z^n,$$

pour des coefficients  $c_i$  dont la valeur n'a pas d'importance pour la suite.

Montrons que la relation  $R(z) \geq 1$  nous mène à une contradiction. Prenons  $x \in \mathbb{R}$  et écrivons

$$R(x) - 1 = -x^d (1 + c_{d+1}x + c_{d+2}x^2 + \cdots + c_n x^{n-d}) = -x^d g(x).$$

Il existe un intervalle  $I$  contenant 0 sur lequel la quantité  $g(x)$  reste  $> 0$ , d'après la proposition 6.19. Sur cet intervalle, on constate que  $R(x) - 1$  est du signe de  $-x^d$ , et donc prend des valeurs (strictement) négatives. Ceci est en contradiction avec l'inégalité  $R(x) \geq 1$ .  $\square$

– Deuxième lecture –

**Matrices et normes**

DÉFINITION 10.17 – Soit  $A = (a_{ij}) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ . Sa norme (euclidienne) est

$$\|A\| = \left( \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De même, soit  $A = (a_{ij}) \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ . Sa norme euclidienne est

$$\|A\| = \left( \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$



Quelques remarques s'imposent. Une matrice réelle de taille  $n \times m$  est constituée de  $nm$  coefficients, et on peut identifier l'ensemble  $M_{n,m}(\mathbb{R})$  avec  $\mathbb{R}^{nm}$ . Ceci étant fait, la norme d'une matrice n'est autre que la norme euclidienne du vecteur correspondant de  $\mathbb{R}^{nm}$ , que nous connaissons bien (définition 4.27). De même avec les matrices complexes, on identifie  $M_{n,m}(\mathbb{C})$  avec  $\mathbb{C}^{nm}$ ; de plus on peut identifier  $\mathbb{C}$  avec  $\mathbb{R}^2$ , de telle sorte que  $z = x + iy$  correspond à  $(x, y)$ , et alors  $|z|^2 = x^2 + y^2$ ; par suite  $\mathbb{C}^{nm}$  peut être vu comme  $\mathbb{R}^{2nm}$ , et au total la norme d'une matrice complexe n'est rien d'autre que la norme du vecteur de  $\mathbb{R}^{2nm}$  correspondant.

Pour les calculs, il va être utile de faire la remarque suivante. Si les colonnes de  $A$  sont  $C_1, C_2, \dots, C_m$ , alors

$$\|A\|^2 = \|C_1\|^2 + \dots + \|C_m\|^2;$$

de même si les lignes de  $A$  sont  $L_1, \dots, L_n$ , alors

$$\|A\|^2 = \|L_1\|^2 + \dots + \|L_n\|^2.$$

La différence entre les matrices et les vecteurs, évidemment, est que l'on peut multiplier les matrices. Le résultat suivant donne le lien entre les normes et la multiplication.

LEMME 10.18 – Soient  $A \in M_{n,m}(\mathbb{C})$  et  $B \in M_{m,\ell}(\mathbb{C})$ . Alors

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

*Démonstration.* Écrivons  $A = (a_{ij})$  et notons  $L_1, \dots, L_n$  les lignes de  $A$ ; de même écrivons  $B = (b_{ij})$  et notons  $C_1, \dots, C_\ell$  les colonnes de  $B$ . La matrice  $AB$  possède, sur sa ligne  $i$  et dans la colonne  $j$ , le coefficient

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}.$$

On a donc les inégalités

$$\begin{aligned}
 |c_{ij}| &\leq \sum_{k=1}^m |a_{ik}| |b_{kj}| \\
 &\leq \left( \sum_k |a_{ik}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_k |b_{kj}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \|L_i\| \cdot \|C_j\|.
 \end{aligned}$$

La première est l'inégalité triangulaire, la deuxième est l'inégalité de Cauchy-Schwarz (lemme 4.31). En prenant la somme, il vient

$$\begin{aligned}
 \|AB\|^2 &= \sum_{i,j} |c_{ij}|^2 \leq \sum_{i,j} \|L_i\|^2 \cdot \|C_j\|^2 \\
 &= \left( \sum_i \|L_i\|^2 \right) \left( \sum_j \|C_j\|^2 \right) \\
 &= \|A\|^2 \cdot \|B\|^2.
 \end{aligned}$$

Le résultat en découle. □

## L'exponentielle de matrice

LEMME 10.19 – Soit  $A$  une matrice carrée. On note

$$S_n(A) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k.$$

Alors la suite  $(S_n(A))_{n \geq 0}$  possède une limite.

Avant de donner la démonstration, indiquons tout de suite :

DÉFINITION 10.20 – Soit  $A$  une matrice carrée, à coefficients complexes. Son exponentielle est

$$\exp(A) = e^A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

■

*Démonstration.* On utilise la convergence absolue, c'est-à-dire le théorème 4.29, qui nous assure qu'il suffit de vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\|$$

existe. Or, on a

$$\left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \frac{1}{k!} \|A\|^k,$$

d'après le lemme 10.18. Si on note

$$u_n = \sum_{k=0}^n \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\|,$$

on a donc

$$u_n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \|A\|^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k = e^{\|A\|}.$$

La suite  $(u_n)$  est donc croissante et majorée, et on en conclut qu'elle possède bien une limite.  $\square$

Pour l'instant, on ne sait calculer que des exemples très simples :

EXEMPLE 10.21 – Prenons une matrice diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$A^n = \begin{pmatrix} x^n & 0 \\ 0 & y^n \end{pmatrix},$$

et

$$S_n(A) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^n \frac{y^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

En passant à la limite, on obtient :

$$e^A = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix}.$$



PROPOSITION 10.22 – L'exponentielle de matrice possède les propriétés suivantes :

1. Si  $P$  est inversible, alors

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^AP.$$

2. Si  $AB = BA$ , alors  $e^AB = Be^A$ .

3. Si  $AB = BA$  alors

$$e^{A+B} = e^Ae^B.$$

La propriété (3) est la plus importante, bien sûr. Attention, l'hypothèse  $AB = BA$  est nécessaire !

*Démonstration.* Pour le (1), on calcule d'abord

$$(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P,$$

et de même

$$(P^{-1}AP)^3 = P^{-1}AP(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}A^2P = P^{-1}A^3P.$$

Par récurrence on obtient pour tout  $n$  :

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP.$$

On voit que  $S_n(P^{-1}AP) = P^{-1}S_n(A)P$ , d'où la formule (1) en passant à la limite.

Pour le (2), on passe à la limite dans la relation évidente  $S_n(A)B = BS_n(A)$  (ou alors, si  $B$  est inversible, on utilise la relation  $B^{-1}AB = A$ , d'où  $B^{-1}e^AB = e^A$  d'après le (1)).

Pour le (3), c'est essentiellement la même démonstration que pour le théorème 10.2. L'hypothèse  $AB = BA$  est utilisée pour pouvoir utiliser la formule de Newton qui donne le développement de  $(A + B)^n$  (elle est fautive si  $AB \neq BA$ , par exemple  $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$  en général). On constate qu'il suffit de montrer la formule pour  $\|A\|$  et  $\|B\|$  au lieu de  $A$  et  $B$ , et nous savons que l'identité est vraie pour les nombres réels.  $\square$

EXEMPLE 10.23 – Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 18 \\ -6 & -10 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer  $e^A$ , on essaie de la mettre sous la forme  $P^{-1}BP$  où  $B$  est le plus simple possible. Dans le chapitre « Diagonalisation », nous verrons de nombreuses techniques pour faire ça ; pour l’instant, admettons que l’on nous ait soufflé que, en posant

$$P = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D.$$

On a donc

$$e^A = e^{PDP^{-1}} = Pe^DP^{-1},$$

d’après le (1) de la proposition. On peut calculer  $e^D$  sans peine comme dans l’exemple précédent, et finalement

$$\begin{aligned} e^A &= \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3e^{-1} + 4e^2 & -6e^{-1} + 6e^2 \\ 2e^{-1} - 2e^2 & 4e^{-1} - 3e^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Voici comment exploiter la propriété (3). Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

On pose alors  $A = D + N$  avec

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que  $DN = ND$ , donc  $e^A = e^D e^N$ . De nouveau, on peut calculer  $e^D$  facilement puisque la matrice est diagonale.

Pour  $N$ , on constate que  $N^2 = 0$ , ce qui ramène son exponentielle à  $e^N = 1 + N$ . Finalement

$$e^A = e^D(1 + N) = \begin{pmatrix} e^5 & 7e^5 \\ 0 & e^5 \end{pmatrix}.$$

### Exponentielle et dérivée

**PROPOSITION 10.24** – Soit  $A$  une matrice complexe, de taille  $n \times n$ . La fonction  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  définie par  $\gamma(t) = e^{tA}$  est dérivable, et sa dérivée est  $\gamma'(t) = Ae^{tA} = A\gamma(t)$ .

De plus, cette propriété caractérise  $\gamma$ , c'est-à-dire que si  $c: \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  vérifie  $c'(t) = Ac(t)$  et  $c(0) = \text{Id}$ , alors on a  $c(t) = \gamma(t)$  pour tout  $t$ .

Il faut noter que, si  $s$  et  $t$  sont deux nombres réels, alors les matrices  $sA$  et  $tA$  commutent, donc  $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$ . En d'autres termes  $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$ .

*Démonstration.* Le calcul de  $\gamma'(t)$  est tout-à-fait analogue à la démonstration de la proposition 10.3.

Montrons l'unicité. Supposons donc que  $c'(t) = Ac(t)$ , et définissons

$$f(t) = e^{-tA}c(t).$$

La dérivée de  $f$  est donnée par

$$f'(t) = (-A)e^{-tA}c(t) + e^{-tA}c'(t) = e^{-tA}[-Ac(t) + c'(t)] = 0.$$

On a utilisé le fait que  $Ae^{-tA} = e^{-tA}A$ , d'après le (2) de la proposition 10.22. Puisque  $f'(t) = 0$ , on en conclut que  $f$  est constante, donc pour tout  $t$  on a  $f(t) = f(0) = \text{Id}$ . Ceci donne  $e^{-tA}c(t) = \text{Id}$ , et en multipliant par  $e^{tA}$  on en tire bien  $c(t) = e^{tA} = \gamma(t)$ .  $\square$

# Chapitre 11

## Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, la lettre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

– Première lecture –

Au collège on vous a présenté les vecteurs, dans le cadre de la géométrie élémentaire dans le plan ou l'espace. Ces méthodes sont tellement efficaces que l'on souhaite les appliquer le plus largement possible, non seulement en « dimension » quelconque, mais également dans des cadres abstraits. Un « espace vectoriel » va être défini comme un ensemble sur lequel on peut faire ce type de géométrie.

Il se trouve que les calculs que nous allons être amenés à faire se ramènent presque tous à des opérations sur les matrices, que nous savons déjà faire. Ce chapitre présente une organisation abstraite de ces calculs, en quelque sorte. Au fur et à mesure de vos études en mathématiques, les espaces vectoriels vont prendre de plus en plus de place.

*Le lecteur ayant assimilé la définition 2.15 peut prendre pour  $\mathbb{K}$  n'importe quel corps.*

## Définitions & Exemples fondamentaux

DÉFINITION 11.1 – Un *espace vectoriel* sur  $\mathbb{K}$  est un ensemble  $E$  muni d'une opération d'addition

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

et d'une opération

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \cdot u \end{aligned}$$

satisfaisant les axiomes suivants :

- |   |   |
|---|---|
| (a) $u + v = v + u$ ,                                 | (e) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ ,                  |
| (b) $0 + u = u$ ,                                     | (f) $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ , |
| (c) $(u + v) + w = u + (v + w)$ ,                     | (g) $1 \cdot u = u$ ,   |
| (d) $\forall u \exists (-u)$ tel que $u + (-u) = 0$ , | (h) $(\lambda\mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$ ,      |

pour  $u, v, w \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ . ■

EXEMPLE 11.2 – L'exemple le plus fondamental, sans conteste, est celui de  $\mathbb{K}^n$ . On identifie, comme d'habitude, les éléments de  $\mathbb{K}^n$  avec les matrices-colonnes de  $M_{n,1}(\mathbb{K})$ , et les opérations sont celles que l'on connaît bien :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix},$$

et

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

On vérifie sans problème que les axiomes (a-b-c-d-e-f-g-h) sont satisfaits, donc  $\mathbb{K}^n$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . En fait la proposition 5.7 nous indique que l'ensemble  $M_{n,m}(\mathbb{K})$  des matrices est aussi un espace vectoriel.

EXEMPLE 11.3 – L'ensemble  $\mathbb{K}[X]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , la vérification des huit axiomes étant immédiate. C'est un premier pas vers l'abstraction : de par leurs bonnes propriétés, les polynômes peuvent être vus et manipulés comme des vecteurs !

EXEMPLE 11.4 – Soit  $A$  un ensemble quelconque. Notons  $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions  $A \rightarrow \mathbb{K}$ . Si  $f$  et  $g$  sont de telles fonctions, on définit leur somme  $f + g$  de la manière la plus simple, par la formule  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ , pour  $x \in A$ . De même si  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on définit  $\lambda f$  par  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ .

On vérifie que  $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ , avec ces opérations, est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Les fonctions sont donc aussi des vecteurs.

## Sous-espaces

La quasi-totalité des espaces vectoriels que nous allons rencontrer vont être bâtis à partir des trois exemples précédents, en ajoutant des conditions supplémentaires. Nous allons utiliser la notion suivante :

DÉFINITION 11.5 – Soit  $E$  un espace vectoriel et  $F \subset E$ . On dit que  $F$  est un *sous-espace vectoriel* de  $E$  lorsque les deux conditions suivantes sont remplies : pour  $u, v \in F$ , on doit avoir  $u + v \in F$ , et pour  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $v \in F$ , on doit avoir  $\lambda \cdot v \in F$ . ■

Il est clair qu'un sous-espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel, et c'est notre principale source d'exemple. Pour certains étudiants (par exemple certains chimistes), la seule notion « au programme » est celle de sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Et pour tout le monde, c'est l'exemple à comprendre en premier.

EXEMPLE 11.6 – Voici un exemple générique de sous-espace de  $\mathbb{K}^n$ . Donnons-nous une matrice  $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$  et considérons

$$E = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = 0\}.$$

(Là encore on identifie les éléments de  $\mathbb{K}^n$  avec des matrices-colonnes, donc le produit  $Au$  a un sens.) Alors  $E$  est un sous-espace de  $\mathbb{K}^n$ . En effet si  $u$  et  $v$  sont dans  $E$ , on a  $Au = Av = 0$ ,

donc  $A(u+v) = Au + Av = 0$ , donc  $u+v \in E$ . On vérifie de même que  $A(\lambda v) = \lambda Av = 0$  si  $Av = 0$ , donc  $\lambda v \in E$  si  $v \in E$ .

Par exemple, prenons

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}).$$

Définissons  $E$  comme ci-dessus, et prenons un élément

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Alors  $v \in E$  lorsque  $Av = 0$ , c'est-à-dire lorsque

$$\begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ 7x + 8z = 0 \end{cases}$$

On dit que ce sont les équations qui définissent  $E$ . On retiendra que les solutions d'un système linéaire, dont le « second membre » est 0, forment un espace vectoriel.

EXEMPLE 11.7 – On note  $\mathbb{K}_n[X]$  l'ensemble des polynômes dont le degré est  $\leq n$ . Alors  $\mathbb{K}_n[X]$  est un sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathbb{K}[X]$  (vérifiez-le).

Voyons un exemple plus abstrait.

EXEMPLE 11.8 – Soit  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle  $I$ . On a  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ , et la proposition 6.11 nous dit que c'est un sous-espace vectoriel.

On peut remplacer « continue » par « dérivable », ou encore « paire », ou « impaire ». . . On peut même considérer

$$E = \{f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \mid f \text{ est dérivable deux fois et } 3f'' - 5f' + f = 0\},$$

on vérifie que  $E$  est alors un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .

### Familles génératrices

Pour décrire un sous-espace vectoriel, il est très commun de donner des équations comme dans l'exemple 11.6, mais il y a une autre méthode également utile.

DÉFINITION 11.9 – Soit  $E$  un espace vectoriel, et soient  $e_1, e_2, \dots, e_n$  des éléments de  $E$ . Une *combinaison linéaire* de ces éléments est une somme de la forme

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n,$$

avec  $\lambda_i \in \mathbb{K}$ .

L'ensemble des combinaisons vectorielles de  $e_1, e_2, \dots, e_n$  est noté  $\mathcal{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ . ■

LEMME 11.10 – L'ensemble  $\mathcal{Vect}(e_1, \dots, e_n)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Nous dirons de  $\mathcal{Vect}(e_1, \dots, e_n)$  que c'est l'espace *engendré* par les vecteurs  $e_1, \dots, e_n$ .

*Démonstration.* On fait un calcul direct. Prenons

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n \in \mathcal{Vect}(e_1, \dots, e_n)$$

et

$$v = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n \in \mathcal{Vect}(e_1, \dots, e_n),$$

on a alors

$$x + y = (\lambda_1 + \mu_1)e_1 + (\lambda_2 + \mu_2)e_2 + \dots + (\lambda_n + \mu_n)e_n.$$

Ainsi  $u + v \in \mathcal{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ . De même on voit que  $\lambda v$  appartient au vect  $\mathcal{Vect}$  si c'est le cas de  $v$ . □

EXEMPLE 11.11 – Prenons  $E = \mathbb{R}^3$ , puis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Comment vérifier si un élément quelconque de  $\mathbb{R}^3$ , disons

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$



appartient à  $\text{Vect}(e_1, e_2)$ ? Par définition  $v \in \text{Vect}(e_1, e_2)$  si et seulement s'il existe deux nombres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tels que  $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ . En écrivant ceci, on tombe sur le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = x \\ 5\lambda_1 = y \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 = z \end{cases}$$

Nous savons faire ; commençons par  $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$  :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = x \\ -15\lambda_2 = y - 5x \\ 3\lambda_2 = z + 2x \end{cases}$$

Faisons  $L_2 \leftarrow L_2 + 5L_3$ , puis échangeons les deux dernières lignes :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = x \\ 3\lambda_2 = z + 2x \\ 0 = 5x + y + 5z \end{cases}$$

Pour que  $v \in \text{Vect}(e_1, e_2)$ , il est donc nécessaire que  $5x + y + 5z = 0$ . Mais réciproquement, si  $5x + y + 5z = 0$ , alors on peut résoudre le système (à savoir,  $\lambda_2 = \frac{1}{3}(z + 2x)$  et  $\lambda_1 = x - 3\lambda_2 = -x - z$ , mais peu important ces valeurs). Donc finalement l'espace vectoriel  $\text{Vect}(e_1, e_2)$  est complètement décrit par l'équation  $5x + y + 5z = 0$ .

Il est important de savoir passer d'un espace « décrit comme un vect » à une description « par des équations » comme dans l'exemple 11.6. On peut toujours le faire sur le modèle du calcul ci-dessus. Plus loin nous verrons comment faire la transition inverse (vous pouvez déjà essayer d'imaginer la méthode).

Les descriptions par des équations permettent de vérifier rapidement si un élément donné appartient au sous-espace en question ; les descriptions par les vects permettent d'obtenir facilement des vecteurs appartenant au sous-espace.

Un espace vectoriel donné peut être décrit comme un vect de plusieurs façons, et nous allons nous attacher à trouver les meilleures familles de vecteurs, notamment celles contenant le plus petit nombre d'éléments. Commençons par donner une définition :

DÉFINITION 11.12 – Soit  $E$  un espace vectoriel et  $e_1, e_2, \dots, e_n$  une famille d'éléments de  $E$ . On dit que c'est une *famille génératrice* de  $E$  lorsque  $E = \mathcal{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ . ■

EXEMPLE 11.13 – Prenons  $E = \mathbb{R}^2$  et

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Écrivons simplement

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2.$$

On constate bien que tout vecteur de  $\mathbb{R}^2$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire de  $e_1$  et  $e_2$ , donc  $e_1, e_2$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^2$ .

Il y en a d'autres, par exemple prenons

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La condition pour qu'un vecteur  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  appartienne à  $\mathcal{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  est l'existence de deux nombres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tels que

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = x \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = y \end{cases}$$

Le déterminant du système est  $2 \times 1 - 3 \times 1 = -1 \neq 0$ , donc la matrice correspondante est inversible (ou si vous préférez, la matrice bien échelonnée correspondante est l'identité), donc le système a une solution unique. On peut si on le souhaite trouver les valeurs de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , mais peu importe : de toute façon, nous savons que  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^2$ .

Enfin, notons que la famille  $e_1, e_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ , qui comporte 4 éléments, est également génératrice par définition. Et pour terminer, nous avons vu un exemple de famille qui n'est pas génératrice dans l'exemple 11.11, puisque le vecteur en question n'était pas  $\mathbb{R}^3$  tout entier mais un sous-espace décrit par une certaine équation.

En fait dans le cas où  $E = \mathbb{K}^n$ , on peut se ramener à des calculs simples sur des matrices :

**PROPOSITION 11.14** – Soit  $e_1, e_2, \dots, e_m$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ , et soit  $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs  $e_i$ . Enfin soit  $E_A$  la matrice bien échelonnée associée.

Alors  $e_1, e_2, \dots, e_m$  est une famille génératrice de  $\mathbb{K}^n$  si et seulement si  $E_A$  comporte un pivot dans chaque ligne.

Remarquons que la condition revient à demander que  $E_A$  ne comporte pas de ligne nulle.

*Démonstration.* Par définition, la famille est génératrice si et seulement si pour tout  $v \in \mathbb{K}^n$ , il existe

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

tel que  $A\Lambda = v$ .

Supposons que c'est le cas. Prenons une matrice inversible  $P$  telle que  $PA = E_A$  (corollaire 5.22), et choisissons

$$v = P^{-1}u \quad \text{avec} \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas le système  $A\Lambda = v$  équivaut, en multipliant par  $P$ , à  $PA\Lambda = Pv$ , soit  $E_A\Lambda = u$ . On constate que la dernière ligne de  $E_A$  ne peut pas être nulle, sinon  $E_A\Lambda$  se terminerait aussi par une ligne nulle, et ce n'est pas le cas de  $u$ . Donc aucune ligne de  $E_A$  n'est nulle, étant donné qu'elle est bien échelonnée.

Montrons la réciproque, et supposons que  $E_A$  n'a pas de ligne nulle. Nous devons montrer que le système  $A\Lambda = v$  a des solutions quel que soit  $v$ , ou ce qui revient au même en multipliant par  $P$ , que  $E_A\Lambda = Pv$  possède toujours des solutions.

Notons que dans ce cas, puisque  $E_A$  est bien échelonnée avec  $n$  lignes non-nulles, de taille  $n \times m$ , on peut l'obtenir à partir de la matrice identité de taille  $n \times n$  en rajoutant des colonnes nulles à droite. Mais alors

$$E_A \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \text{les } n \text{ premières lignes de } \Lambda,$$

et le système  $E_A \Lambda = P v$  possède certainement des solutions, puisqu'il s'écrit en fait  $\lambda_i =$  le coefficient sur la ligne  $i$  de  $P v$ , pour  $1 \leq i \leq n$ .  $\square$

La remarque suivante est très utile :

**COROLLAIRE 11.15** – Si  $e_1, e_2, \dots, e_m$  est une famille génératrice de  $\mathbb{K}^n$ , alors  $m \geq n$ .

De plus, si  $m = n$ , alors la famille est génératrice si et seulement si la matrice  $A$  est inversible.

*Démonstration.* Si  $m < n$  la matrice échelonnée  $E_A$ , ayant plus de lignes que de colonnes, est certaine d'avoir une ligne nulle, donc la famille ne pourrait pas être génératrice d'après la proposition. Donc  $m \geq n$ .

Si  $m = n$ , la matrice  $E_A$  est carrée; elle ne possède pas de ligne nulle exactement lorsqu'elle vaut l'identité, puisqu'elle est bien échelonnée. D'après la proposition 5.19, ceci équivaut à l'inversibilité de  $A$ .  $\square$

### Familles libres

**DÉFINITION 11.16** – Soit  $E$  un espace vectoriel et  $e_1, e_2, \dots, e_n$  une famille d'éléments de  $E$ . On dit que c'est une *famille libre* lorsque l'équation

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0,$$

avec  $\lambda_i \in \mathbb{K}$ , ne possède qu'une seule solution, à savoir  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .  $\blacksquare$

Nous allons voir que le concept de famille libre est en un certain sens le « dual » du concept de famille génératrice. Rapidement, nous verrons que les familles qui sont à la fois libres et génératrices sont particulièrement intéressantes. Mais commençons par des exemples.

EXEMPLE 11.17 – Prenons  $E = \mathbb{R}^2$ , puis

$$e_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Pour vérifier si la famille est libre, nous devons examiner l'équation  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$ , qui s'écrit comme le système

$$\begin{cases} -5\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 7\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Le déterminant étant  $-32 \neq 0$ , le système a une solution unique, qui est bien sûr  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Donc la famille est libre.

Si maintenant on pose  $e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ , la famille  $e_1, e_2, e_3$  est-elle libre ? Le système devient

$$\begin{cases} -5\lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 7\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

En faisant  $L_1 \leftarrow L_1 + 5L_2$ , puis en permutant les lignes, on obtient

$$\begin{cases} \lambda_1 + 7\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ 38\lambda_2 + 38\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Le système est échelonné, on prend  $\lambda_3$  comme paramètre, et on tire  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3$ . En particulier, on a la solution  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = -1$ , et d'ailleurs on vérifie effectivement que  $e_1 + e_2 - e_3 = 0$ . La famille n'est donc pas libre. (Ceux d'entre vous qui auraient repéré que  $e_1 + e_2 - e_3 = 0$  peuvent simplement faire cette remarque, et il est alors établi que la famille n'est pas libre).

EXEMPLE 11.18 – Voyons un exemple plus abstrait. On prend  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , l'espace vectoriel de toutes les fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , et on

essaie la famille constituée par  $e_1 = \cos$  (la fonction cosinus) et  $e_2 = \sin$ . Cette famille est-elle libre ?

On doit étudier l'équation  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$ . C'est une égalité de fonctions, et en particulier le 0 désigne la fonction nulle ; c'est-à-dire que l'équation est vraiment

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) = 0,$$

les inconnues étant  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Or pour  $x = 0$  on trouve  $\lambda_1 = 0$  et pour  $x = \frac{\pi}{2}$  on trouve  $\lambda_2 = 0$ , donc la famille est bien libre.

Pour étudier les familles libres dans  $\mathbb{K}^n$ , on dispose du résultat suivant, qu'il est instructif de comparer à la proposition 11.14.

**PROPOSITION 11.19** – Soit  $e_1, e_2, \dots, e_m$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ , et soit  $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs  $e_i$ . Enfin soit  $E_A$  la matrice bien échelonnée associée.

Alors  $e_1, e_2, \dots, e_m$  est une famille libre de  $\mathbb{K}^n$  si et seulement si  $E_A$  comporte un pivot dans chaque colonne.

*Démonstration.* Pour vérifier si la famille est libre, on doit étudier le système  $A\Lambda = 0$ , avec

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Il possède les mêmes solutions que le système échelonné  $E_A \Lambda = 0$ . À ce stade on doit se rappeler que les inconnues qui vont servir de paramètres dans l'écriture des solutions sont celles qui correspondent aux colonnes dans lesquelles il n'y a pas de pivot (relire au besoin l'exemple 5.13).

Ainsi la famille est libre  $\iff$  le système n'a qu'une solution  $\iff$  il n'y a pas de paramètres  $\iff$  il y a un pivot dans chaque colonne.  $\square$

**COROLLAIRE 11.20** – Si  $e_1, e_2, \dots, e_m$  est une famille libre de  $\mathbb{K}^n$ , alors  $m \leq n$ .

De plus, si  $m = n$ , alors la famille est libre si et seulement si la matrice  $A$  est inversible.

*Démonstration.* Si  $m > n$  la matrice échelonnée  $E_A$ , ayant plus de colonnes que de lignes, est certaine d'avoir une colonne sans pivot, donc la famille ne pourrait pas être libre. Donc  $m \leq n$ .

Si  $n = m$ , la matrice  $E_A$  est carrée; elle possède un pivot dans chaque colonne exactement lorsqu'elle vaut l'identité, puisqu'elle est échelonnée. D'après la proposition 5.19, ceci équivaut à l'inversibilité de  $A$ .  $\square$

En comparant ce dernier résultat avec le corollaire 11.15, on constate que

**COROLLAIRE 11.21** – *Considérons une famille comportant précisément  $n$  vecteurs dans  $\mathbb{K}^n$ . Alors elle est libre  $\iff$  elle est génératrice  $\iff$  la matrice  $A$  est inversible.*

Autre observation simple : une famille à la fois libre et génératrice de  $\mathbb{K}^n$  doit comporter  $n$  vecteurs, ni plus ni moins. Ces phénomènes sont généraux dans les espaces vectoriels, et nous allons tout de suite le montrer.

## Bases

**DÉFINITION 11.22** – *Lorsqu'une famille est à la fois libre et génératrice, on dit que c'est une *base* de l'espace vectoriel considéré.*  $\blacksquare$

**EXEMPLE 11.23** – Dans  $\mathbb{K}^n$ , nous venons juste de voir qu'une famille  $e_1, e_2, \dots, e_m$  ne peut pas être une base si  $m \neq n$ ; si  $n = m$  la famille est une base exactement lorsque la matrice  $n \times n$  dans laquelle on a rangé ces vecteurs en colonnes est inversible.

La *base canonique* de  $\mathbb{K}^n$  est celle pour laquelle la matrice en question est l'identité. En clair

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**EXEMPLE 11.24** – Considérons  $E = \mathbb{K}_n[X]$ , l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq n$ . Posons  $e_i = X^i$ , pour  $0 \leq i \leq n$ . Tout

polynôme s'écrit comme combinaison linéaire des puissances de  $X$ , donc la famille est génératrice ; de plus si

$$\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \cdots + \lambda_n X^n,$$

alors on a  $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$  (par définition même de ce qu'est le polynôme nul). Donc la famille est libre.

Finalement la famille  $1, X, X^2, \dots, X^n$  est une base, qu'on appelle encore la *base canonique* de  $\mathbb{K}_n[X]$ . Noter qu'elle comprend  $n + 1$  éléments.

EXEMPLE 11.25 – Lorsqu'un sous-espace de  $\mathbb{K}^n$  est donné par des équations (sur le modèle de l'exemple 11.6), on peut facilement en trouver une base. Considérons donc

$$E = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = 0\},$$

où  $A$  est une matrice. On peut échelonner la matrice sans changer les solutions de  $Av = 0$ , donc nous allons supposer que  $A$  est échelonnée et donner la méthode sur un exemple. Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix},$$

alors en étudiant  $Av = 0$  on constate que l'ensemble des solutions est

$$E = \left\{ y \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } y, t \in \mathbb{K} \right\}.$$

(Pour les calculs intermédiaires, reprendre l'exemple 5.13.) Prenons les notations

$$e_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$



alors nous venons d'écrire que  $E = \text{Vect}(e_1, e_2)$ , donc  $e_1, e_2$  est une famille génératrice de  $E$ . On peut vérifier directement que la famille est libre, puisque l'équation  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$  donne

$$\begin{pmatrix} -4\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . La famille est bien libre et c'est donc une base de  $E$ .

Ce n'est pas un hasard : lorsqu'on écrit les solutions de la manière décrite dans l'exemple 5.13, les vecteurs que l'on obtient forment toujours une base. On peut le vérifier rapidement dans chaque cas.

À la fin du chapitre nous verrons comment trouver une base d'un sous-espace présenté comme un vect. En attendant, vous pourriez écrire des équations pour l'espace et procéder comme ci-dessus (mais la méthode que nous verrons est plus efficace).

## Coordonnées

L'intérêt des bases est de permettre l'utilisation de *coordonnées*, de la façon suivante. Soit  $e_1, e_2, \dots, e_n$  une base de l'espace vectoriel  $E$ , et soit  $v \in E$  un vecteur quelconque. La famille étant génératrice, on peut trouver des nombres  $\lambda_i$  tels que

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n.$$

La famille étant libre, on peut voir que cette écriture est en fait *unique* : en effet, si on a également

$$v = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n,$$

alors en faisant la différence on obtient

$$v - v = 0 = (\lambda_1 - \mu_1)e_1 + (\lambda_2 - \mu_2)e_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)e_n.$$

Puisque la famille est libre, on doit avoir  $\lambda_i - \mu_i = 0$  et donc  $\lambda_i = \mu_i$ .

DÉFINITION 11.26 – Soit  $\mathcal{B} = e_1, e_2, \dots, e_n$  une base de l'espace vectoriel  $E$ . Si  $v \in E$ , les nombres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  tels que

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$$

sont appelés les *coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$* . On notera

$${}_B[v] = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Lorsque la base  $\mathcal{B}$  sera évidente d'après le contexte on écrira tout simplement  $[v]$ . ■

EXEMPLE 11.27 – Soit  $\mathcal{B} = e_1, e_2$  la base de  $\mathbb{R}^2$  donnée par

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

C'est bien une base, puisque si nous mettons ces vecteurs en colonnes dans

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

alors  $\det(A) = -2 \neq 0$ . Prenons maintenant un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^2$ , disons

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver ses coordonnées  $\lambda_1, \lambda_2$  dans la base  $\mathcal{B}$  nous devons résoudre  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = v$ , ce qui revient à

$$A \Lambda = v \quad \text{avec} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Puisque  $A$  est inversible on a

$$\Lambda = A^{-1}v = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}.$$

Finalement

$${}_B[v] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}$$

Par contre si nous appelons  $\mathcal{C}$  la base canonique (cf exemple 11.23), alors on a tout simplement

$${}_C[v] = v.$$

En effet le calcul est le même que ci-dessus, mais cette fois  $A = \text{Id}$  ; ou encore, cela découle du calcul suivant :

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 11.28 – Considérons maintenant  $E = \mathbb{K}_n[X]$  et sa base canonique, c'est-à-dire  $\mathcal{B} = 1, X, X^2, \dots, X^n$ . Si on prend un polynôme  $P \in E$  et qu'on l'écrit

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n,$$

alors par définition

$${}_B[P] = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

Les coordonnées vont nous permettre de ramener de nombreuses questions abstraites sur un espace vectoriel  $E$  à des questions sur  $\mathbb{K}^n$ , que l'on sait traiter. Considérons par exemple :

PROPOSITION 11.29 – Soit  $E$  un espace vectoriel, et soit  $\mathcal{B} = e_1, e_2, \dots, e_n$  une base. Écrivons  $[v]$  pour  ${}_B[v]$ . Alors

1.  $[u + v] = [u] + [v]$ ,
2.  $[\lambda v] = \lambda[v]$ ,
3. si  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$  est une famille de vecteurs de  $E$ , alors elle est libre si et seulement si la famille  $[\varepsilon_1], [\varepsilon_2], \dots, [\varepsilon_m]$  de vecteurs de  $\mathbb{K}^n$  est libre.

4. *idem* avec « génératrice » au lieu de « libre ».

La démonstration est extrêmement facile ; elle vous est laissée à titre d'exercice important.

Voici une première application. Le théorème suivant est le plus important du chapitre pour l'instant.

**THÉORÈME 11.30** – Soit  $E$  un espace vectoriel, muni d'une base  $\mathcal{B} = e_1, e_2, \dots, e_n$ . Enfin, soit  $\mathcal{F} = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$  une famille de vecteurs de  $E$ .

1. Si  $\mathcal{F}$  est génératrice, alors  $m \geq n$ .
2. Si  $\mathcal{F}$  est libre, alors  $m \leq n$ .
3. Si  $\mathcal{F}$  est une base, alors  $m = n$ .

Réciproquement, si  $m = n$ , alors  $\mathcal{F}$  est génératrice  $\iff \mathcal{F}$  est libre  $\iff \mathcal{F}$  est une base.

*Démonstration.* Elle est très simple. En effet nous avons démontré tout ceci dans le cas où  $E = \mathbb{K}^n$  : voir le corollaire 11.15 pour le (1), le corollaire 11.20 pour le (2) ; le (3) est alors évident, et la réciproque est également indiquée dans ces corollaires.

Pour le cas général, on utilise tout simplement la proposition précédente, qui nous ramène à  $\mathbb{K}^n$ .  $\square$

Nous constatons que *toutes les bases d'un espace vectoriel ont le même nombre d'éléments*. Ce nombre porte un nom :

**DÉFINITION 11.31** – La *dimension* d'un espace vectoriel est le nombre de vecteurs dans une base quelconque. La dimension de  $E$  est notée  $\dim E$ .  $\blacksquare$

**EXEMPLE 11.32** – La dimension de  $\mathbb{K}^n$  est  $n$  : prendre la base canonique.

**EXEMPLE 11.33** – La dimension de  $\mathbb{K}_n[X]$  est  $n + 1$  (attention !), là encore voir la base canonique  $1, X, X^2, \dots, X^n$ .

**EXEMPLE 11.34** – L'espace vectoriel  $\mathbb{K}[X]$  ne possède pas de base finie : en effet si  $P_1, P_2, \dots, P_n$  est une famille finie de polynômes, alors en prenant  $N = \sup\{\deg(P_i)\}$ , on voit facilement que tout

polynôme dans  $\text{Vect}(P_1, P_2, \dots, P_n)$  est de degré  $\leq N$ . En particulier  $\text{Vect}(P_1, \dots, P_n)$  n'est pas  $\mathbb{K}[X]$  tout entier.

Dans ce livre nous ne parlerons pas de familles infinies de vecteurs. Ceci dit, il existe des définitions que vous pouvez imaginer de « famille libre », « famille génératrice » et « base » ayant éventuellement un nombre infini de vecteurs. Avec ces définitions, on montre que la famille infinie  $1, X, X^2, \dots, X^k, \dots$  est une base de  $\mathbb{K}[X]$ .

Quoi qu'il en soit, nous dirons qu'un espace vectoriel est de *dimension finie* lorsqu'il possède une base finie. Ce n'est pas le cas de  $\mathbb{K}[X]$ , qui est de dimension infinie.

EXEMPLE 11.35 – Voici une application célèbre. Prenons  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , qui est de dimension  $n + 1$ . Choisissons un nombre  $x_0 \in \mathbb{R}$ , et considérons

$$e_i = (X - x_0)^i \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n.$$

Montrons que cette famille est libre : l'équation  $\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$  s'écrit

$$\lambda_0 + \lambda_1(X - x_0) + \lambda_2(X - x_0)^2 + \dots + \lambda_n(X - x_0)^n = 0.$$

Le terme en  $X^n$  dans le membre de gauche est  $\lambda_n X^n$ , donc  $\lambda_n = 0$ . Mais alors le terme en  $X^{n-1}$  dans le membre de gauche est  $\lambda_{n-1} X^{n-1}$ , donc  $\lambda_{n-1} = 0$ . De proche en proche, on en déduit que  $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_1 = \lambda_0 = 0$ . Donc la famille est libre.

Cette famille ayant  $n + 1$  éléments, c'est en fait une base d'après le théorème. Autre argument possible pour montrer la même chose : écrivons  $[e_i]$  pour les coordonnées de  $e_i$  dans la base canonique, alors il suffit de montrer que la famille  $[e_i]$  est une base de  $\mathbb{K}^{n+1}$  (cf proposition 11.29) ; or la matrice obtenue en mettant ces vecteurs en colonnes est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc son déterminant est 1 et donc elle est inversible, ce qui établit que les vecteurs forment une base.

Que l'on prenne un argument ou l'autre, essayez d'apprécier les efforts qui nous sont économisés : montrer directement

que la famille est génératrice par un calcul naïf serait bien pénible.

On en déduit que tout polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$P = \lambda_0 + \lambda_1(X - x_0) + \lambda_2(X - x_0)^2 + \cdots + \lambda_n(X - x_0)^n = 0. \quad (*)$$

Sachant que cette écriture existe, il est maintenant facile de calculer les nombres  $\lambda_i$ . En évaluant en  $X = x_0$ , on trouve déjà  $\lambda_0 = P(x_0)$ . Prenons maintenant la dérivée :

$$P' = \lambda_1 + 2\lambda_2(X - x_0) + \cdots + n\lambda_n(X - x_0)^{n-1}.$$

On en tire  $\lambda_1 = P'(x_0)$ . En dérivant une deuxième fois on voit  $2\lambda_2 = P''(x_0)$ , puis  $6\lambda_3 = P^{(3)}(x_0)$ , et par récurrence on montre (faites-le) que  $k!\lambda_k = P^{(k)}(x_0)$ .

L'équation (\*) s'appelle la *formule de Taylor*, qu'on écrit donc

$$P(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (X - x_0)^k.$$

– Deuxième lecture –

### Le théorème de la base incomplète

Nous avons vu que les bases sont très utiles pour étudier les espaces vectoriels, mais qu'il n'existe pas toujours de base finie (cf exemple 11.34). Nous aurions bien besoin de critères faciles pour garantir l'existence de bases, et c'est le théorème suivant qui va en donner. Commençons par un lemme très simple.

**LEMME 11.36** – Soit  $E$  un espace vectoriel, soit  $e_1, \dots, e_n$  une famille libre de  $E$ , et soit  $v \in E$  tel que la famille  $e_1, e_2, \dots, e_n, v$  n'est pas libre.

Alors  $v \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ .

*Démonstration.* Il existe une combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n + \alpha v = 0,$$

dont les coefficients ne sont pas tous nuls. On doit donc avoir  $\alpha \neq 0$  : en effet dans le cas où  $\alpha = 0$  on aurait

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$$

donc  $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$  puisque la famille est libre, ce qui est une contradiction.

On peut donc écrire

$$v = -\frac{1}{\alpha} (\lambda_1 \ell_1 + \cdots + \lambda_n \ell_n),$$

ce qui montre que  $v \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ . □

**THÉORÈME 11.37 (DE LA BASE INCOMPLÈTE)** – Soit  $E$  un espace vectoriel, soit  $\mathcal{L} = \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  une famille libre de vecteurs de  $E$ , et soit  $\mathcal{G} = g_1, g_2, \dots, g_m$  une famille génératrice de  $E$ . Alors on peut compléter  $\mathcal{L}$  par des vecteurs de  $\mathcal{G}$  pour en faire une base.

Plus précisément, il existe des indices  $i_1, i_2, \dots, i_k$  tels que

$$\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_k}$$

est une base de  $E$ .

*Démonstration.* Considérons l'ensemble des entiers  $s$  tels qu'il existe des indices (distincts)  $i_1, i_2, \dots, i_s$  pour lesquels

$$\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_s}$$

est libre ; notons  $S$  cet ensemble. Prenons  $k = \sup S$ , qui existe puisque  $S$  est fini (si  $S = \emptyset$  par contre, on prend  $k = 0$ ). Par définition on a une famille libre

$$\mathcal{F} = \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_k},$$

et nous allons montrer que c'est une base.

Prenons en effet un vecteur  $g_i$  de la famille  $\mathcal{G}$ . Si on l'ajoute à la famille  $\mathcal{F}$ , on obtient une famille de  $n + k + 1$  vecteurs ; par

maximalité de  $k$ , cette famille ne peut pas être libre. D'après le lemme 11.36, on a donc  $g_i \in \text{Vect}(\mathcal{F})$ .

C'est vrai pour tous les vecteurs de  $\mathcal{G}$ , donc  $\text{Vect}(\mathcal{G}) \subset \text{Vect}(\mathcal{F})$ . Mais  $\text{Vect}(\mathcal{G}) = E$  puisque  $\mathcal{G}$  est génératrice par définition, et donc  $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$  également, c'est-à-dire que  $\mathcal{F}$  est bien génératrice.  $\square$

**COROLLAIRE 11.38** – Si  $E$  possède une famille génératrice (finie), alors  $E$  possède une base (finie).

*Démonstration.* C'est ce que dit le théorème dans le cas où  $\mathcal{L}$  est la « famille vide » (vous pouvez vérifier que la démonstration du théorème est parfaitement adaptée au cas où il n'y a aucun vecteur dans  $\mathcal{L}$ ).  $\square$

Voici une autre conséquence (en toute rigueur c'est surtout une conséquence du lemme 11.36).

**COROLLAIRE 11.39** – Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, et soit  $F \subset E$  un sous-espace. Alors  $F$  est de dimension finie et  $\dim F \leq \dim E$ .

De plus, on a une équivalence  $F = E \iff \dim F = \dim E$ .

*Démonstration.* Si  $\mathcal{L}$  est une famille libre de  $F$ , alors c'est aussi une famille libre de  $E$ . Donc  $\mathcal{L}$  comprend moins de  $n$  éléments, où  $n = \dim E$  (théorème 11.30).

Prenons maintenant une famille libre  $\mathcal{L}$  de  $F$  ayant le plus grand nombre d'éléments, disons  $\mathcal{L} = \ell_1, \dots, \ell_m$ , avec donc  $m \leq n$ . Alors par le lemme 11.36, on voit que tout  $f \in F$  appartient à  $\text{Vect}(\mathcal{L})$  (puisque la famille  $\ell_1, \dots, \ell_m, f$  ne peut pas être libre, par maximalité de  $m$ ). Cette famille est donc une base, et  $\dim F = m \leq \dim E$ .

Si on a en fait  $\dim F = \dim E$ , alors prenons une base  $\mathcal{L} = \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  de  $F$ ; c'est une famille libre d'éléments de  $E$ , comprenant  $n = \dim E$  vecteurs, donc c'est une base de  $E$  d'après le théorème 11.30. Ainsi  $F = \text{Vect}(\mathcal{L}) = E$ .  $\square$



## Le rang d'une matrice

DÉFINITION 11.40 – Soit  $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ . On note  $\mathcal{Vect}(A)$  le sous-espace de  $\mathbb{K}^n$  engendré par les colonnes de  $A$ . La dimension de  $\mathcal{Vect}(A)$  est appelée le *rang* de la matrice  $A$ . ■

Nous allons voir comment calculer le rang. Du même coup, nous verrons comment trouver une base d'un espace vectoriel donné comme un vect dans  $\mathbb{K}^n$ . En fait, à l'aide de la théorie développée dans ce chapitre, nous allons donner *deux* méthodes profondément différentes ; le fait qu'elles donnent le même résultat est un théorème célèbre.

PROPOSITION 11.41 – *Le rang de  $A$  est le nombre de lignes non nulles dans la matrice bien échelonnée  $E_A$ .*

*Pour trouver une base de  $\mathcal{Vect}(A)$ , il suffit de prendre les colonnes de  $A$  qui correspondent aux pivots.*

Attention à la dernière phrase. Elle signifie que si les pivots de  $E_A$  sont dans les colonnes  $i_1, i_2, \dots, i_r$ , alors les colonnes de la matrice de départ  $A$  numérotées  $i_1, \dots, i_r$  forment une base de  $\mathcal{Vect}(A)$  (notez que le nombre de pivots est égal au nombre de lignes non nulles, bien sûr). De nombreux étudiants font l'erreur de proposer les colonnes de  $E_A$  comme base.

*Démonstration.* On note  $g_1, g_2, \dots, g_m$  les colonnes de  $A$ , qui forment une famille  $\mathcal{G}$  génératrice de  $\mathcal{Vect}(A)$ . Notons  $i_1, \dots, i_r$  les numéros des colonnes de  $E_A$  qui contiennent les pivots, et soit  $\mathcal{B} = g_{i_1}, \dots, g_{i_r}$ . Nous allons montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{Vect}(A)$ , ce qui prouve les deux assertions du même coup.

Soit  $B$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de  $\mathcal{B}$  ; en d'autres termes  $B$  est formée des colonnes de  $A$  numérotées  $i_1, \dots, i_r$ . Alors la matrice bien échelonnée  $E_B$  est elle aussi extraite de  $E_A$  en gardant les colonnes correspondantes. En particulier,  $E_B$  possède un pivot dans chaque colonne, par construction. D'après la proposition 11.19, la famille  $\mathcal{B}$  est libre.

Par contre, prenons un indice  $i$  qui n'est pas dans la liste  $i_1, \dots, i_r$ , et rajoutons le vecteur  $g_i$  à  $\mathcal{B}$  (à sa place dans l'ordre). La matrice de cette nouvelle famille, disons  $C$ , est obtenue à

partir de  $B$  en réinsérant la colonne de  $A$  correspondante. La même chose peut être dite de  $E_C$ , obtenus à partir de  $E_B$  en rajoutant une colonne de  $E_A$ . Cette colonne ne contient pas de pivot par construction, et c'est encore la proposition 11.19 qui nous permet de conclure que la famille obtenue en rajoutant  $g_i$  à  $\mathcal{B}$  n'est pas libre. D'après le lemme 11.36, on a  $g_i \in \mathcal{Vect}(\mathcal{B})$ .

Finalement, on a bien  $\mathcal{Vect}(A) = \mathcal{Vect}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{Vect}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{Vect}(A)$ , donc  $\mathcal{Vect}(\mathcal{B}) = \mathcal{Vect}(A)$ , et  $\mathcal{B}$  est une base.  $\square$

On en déduit la chose suivante :

**COROLLAIRE 11.42** – *On ne change pas le rang d'une matrice en faisant des opérations sur ses lignes.*

*Démonstration.* Si  $A'$  est obtenue à partir de  $A$  par de telles opérations, on a  $E_{A'} = E_A$  clairement.  $\square$

**EXEMPLE 11.43** – Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 51 \\ 5 & -5 & -12 & -102 \end{pmatrix}.$$

Après quelques opérations sur les lignes, nous obtenons la forme échelonnée :

$$E_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 16/15 & 17/5 \\ 0 & 1 & 52/15 & 119/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le rang de  $A$  est donc 2. Les pivots sont dans les colonnes 1 et 2 de  $E_A$ , donc on va prendre les colonnes 1 et 2 de  $A$  :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

La proposition nous dit que  $e_1, e_2$  est une base de  $\mathcal{Vect}(A)$ .

Passons à la deuxième méthode : les colonnes vont remplacer les lignes. Les choses se passent maintenant dans l'ordre inverse, car le résultat suivant est assez évident.

LEMME 11.44 – On ne change pas le rang d’une matrice  $A$  en faisant des opérations sur les colonnes. En fait on ne change même pas  $\mathcal{Vect}(A)$ .

*Démonstration.* Si  $A'$  est obtenue à partir de  $A$  par de telles opérations, chaque colonne de  $A'$  est visiblement dans  $\mathcal{Vect}(A)$ . Ainsi  $\mathcal{Vect}(A') \subset \mathcal{Vect}(A)$ . Mais bien sûr on peut retrouver  $A$  en faisant des opérations sur les colonnes de  $A'$ , donc de la même manière on a  $\mathcal{Vect}(A) \subset \mathcal{Vect}(A')$ .  $\square$

Dans l’énoncé suivant, on va dire qu’une matrice est *échelonnée en colonnes* lorsque c’est la transposée d’une matrice échelonnée. En d’autres termes, reprenez la définition de matrice échelonnée et remplacez « ligne » par « colonne ». En faisant des opérations sur les colonnes d’une matrice  $A$ , on peut la mettre sous une forme unique bien échelonnée en colonnes : pour s’en assurer, il suffit d’observer que cela revient à mettre la transposée  ${}^tA$  sous forme bien échelonnée en faisant des opérations sur les lignes.

PROPOSITION 11.45 – Le rang de  $A$  est le nombre de colonnes non-nulles dans la matrice bien échelonnée en colonnes associée à  $A$ .

Pour trouver une base de  $\mathcal{Vect}(A)$ , il suffit de prendre les colonnes non-nulles de cette matrice échelonnée en colonnes.

*Démonstration.* Soit  $B$  la matrice bien échelonnée en colonnes obtenue à partir de  $A$ . D’après le lemme  $\mathcal{Vect}(B) = \mathcal{Vect}(A)$ . Si  $g_1, g_2, \dots, g_r$  sont les colonnes non-nulles de  $B$ , il est clair que  $\mathcal{Vect}(g_1, \dots, g_r) = \mathcal{Vect}(B)$ , donc il suffit de s’assurer que c’est une famille libre. Or les pivots étant seuls dans leurs lignes, c’est clair (voir l’exemple).  $\square$

EXEMPLE 11.46 – Reprenons le même exemple, c’est-à-dire :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 51 \\ 5 & -5 & -12 & -102 \end{pmatrix}.$$

En faisant des opérations sur les colonnes, on peut mettre  $A$

sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et cette matrice est « bien échelonnée en colonnes ». On voit de nouveau que le rang est 2. Cette fois ci, la proposition nous dit de prendre

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La famille  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  est une base de  $\mathcal{Vect}(A)$ .

En comparant les deux méthodes, il vient le résultat suivant, qui est loin d'être évident si on part de la définition :

**THÉORÈME 11.47** – *Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.*

*Démonstration.* Le rang de  $A$  est le nombre de lignes non-nulles dans  $E_A$ , qui est égal au nombre de colonnes non-nulles dans  ${}^tE_A$ . Or  ${}^tE_A$  est bien échelonnée en colonnes, et obtenue à partir de  ${}^tA$  en faisant des opérations sur les colonnes, donc le nombre de ses colonnes non-nulles est bien le rang de  ${}^tA$ .  $\square$

# Chapitre 12

## Formules de Taylor

### Introduction

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  contenant  $0$ . Nous allons examiner les conditions de continuité et de dérivabilité en  $0$  sous un angle un peu nouveau.

La fonction  $f$  est continue en  $0$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$  lorsque  $x \rightarrow 0$ . Dans ce cas, on peut écrire, même si ça paraît artificiel pour l'instant, que

$$f(x) = f(0) + \varepsilon(x),$$

avec  $\varepsilon(x) = f(x) - f(0)$ ; on observe alors que  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow 0$ . En d'autres termes, la fonction  $f$  se rapproche de la valeur (constante)  $f(0)$  lorsque  $x$  approche de  $0$ . On ne sait pas à quelle vitesse cette approche se fait.

De la même manière, le lemme 9.7 nous dit que si  $f$  est dérivable en  $0$ , alors

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x),$$

où là encore  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow 0$ . Écrivons  $P(x) = f(0) + f'(0)x$ ; c'est un polynôme en  $x$ , de degré 1. Comme nous le faisons remarquer après le lemme 9.7, la différence  $f(x) - P(x) = x\varepsilon(x)$  est le produit de deux fonctions qui tendent vers  $0$  avec  $x$ ,

et on peut donc considérer que  $P$  est une approximation assez bonne de  $f$ .

Géométriquement, le graphe de  $P$  est la droite passant par  $(0, f(0))$  et dont le coefficient directeur est  $f'(0)$ ; c'est la droite tangente au graphe de  $f$ . On en sait donc un peu plus sur la façon dont  $f$  approche la valeur  $f(0)$  lorsque  $x \rightarrow 0$ .

Le but de ce chapitre est de montrer que l'on peut continuer dans cette voie : on peut trouver, en supposant que l'on peut dériver  $f$  au moins  $n$  fois, un polynôme  $P_n(x)$  de degré  $n$  tel que la différence  $f(x) - P_n(x)$  tende vers 0 encore plus vite.

C'est utile dans de nombreux calculs : nous allons être capables de calculer des limites qui restent inaccessibles par les autres méthodes classiques. En fait, presque n'importe quel calcul de limite va se ramener à une limite de polynômes !

## La formule de Taylor-Lagrange

Il y a un certain nombre de formules, dites « de Taylor », qui ont toutes pour objectif l'approximation d'une fonction par un polynôme, comme annoncé dans l'introduction. Nous en verrons deux, il en existe encore d'autres.

**THÉORÈME 12.1 (TAYLOR-LAGRANGE)** – Soit  $f$  une fonction dérivable  $n$  fois sur un intervalle  $I$  contenant 0. Alors  $\forall x \in I$  il existe  $\theta \in ]0; 1[$  tel que :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n.$$

(Attention :  $\theta$  dépend de  $x$  et de  $n$ .)

*Démonstration.* On va faire la démonstration pour  $x > 0$ , pour simplifier.

On peut toujours trouver un réel  $A$  (qui dépend de  $x$ !) tel que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{A}{n!}x^n.$$

(En effet il suffit de poser  $A = (f(x) - (f(0) + \dots))/(x^n/n!)$ .) On veut montrer que  $A = f^{(n)}(\theta x)$  pour un certain  $0 < \theta < 1$ .

Sur l'intervalle  $[0; x]$ , on définit

$$F : t \mapsto f(x) - \left[ f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \right] - \frac{A}{n!}(x-t)^n.$$

Cette fonction  $F$  est dérivable, on a  $F(0) = 0$  par choix de  $A$ , et  $F(x) = 0$ . Le théorème des accroissements finis donne l'existence de  $c \in ]0, x[$  tel que

$$F'(c) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 0.$$

En posant  $\theta = \frac{c}{x}$ , on a bien  $0 < \theta < 1$  et  $c = \theta x$ .

Calculons maintenant  $F'(t)$  (les détails vous sont confiés en exercice) :

$$F'(t) = \frac{A}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} = \left( A - f^{(n)}(t) \right) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Donc l'équation  $F'(\theta x) = 0$  que nous avons obtenue donne  $A = f^{(n)}(\theta x)$ , comme on le souhaitait.  $\square$

Pour  $n = 1$ , noter que cette formule redonne exactement le théorème des accroissements finis (un tout petit peu reformulé).

EXEMPLE 12.2 – Prenons la fonction  $f(x) = e^x$ . On a  $f' = f$ , et donc aussi  $f'' = f$  et par récurrence  $f^{(n)} = f$  pour tout  $n$ . En particulier  $f^{(n)}(0) = 1$ . La formule de Taylor-Lagrange donne donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout entier  $n$ , l'existence d'un nombre  $0 < \theta < 1$  (qui dépend de  $x$  et de  $n$ ) tel que

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n.$$

En guise d'application, essayons de fixer  $x$  et de faire tendre  $n$  vers l'infini. Si on observe que  $|e^{\theta x}| \leq e^{|\theta x|} \leq e^{|x|}$ , on en tire

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^{|x|} \frac{|x|^n}{n!}.$$

Puisque  $\frac{|x|^n}{n!} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  (toujours avec  $x$  fixé), on en déduit

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

On retrouve la définition de l'exponentielle telle que nous l'avons donnée (définition 10.1). De plus, nous avons simplement utilisé le fait que  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ , donc nous retrouvons la partie « unicité » du lemme 10.4.

EXEMPLE 12.3 – Prenons maintenant une fonction pour laquelle nous ne connaissons pas encore de développement en série : par exemple  $f(x) = \ln(1+x)$ , définie sur  $] -1; +\infty[$ . On a

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{donc} \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{et} \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

On peut montrer que  $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ ; en fait en dérivant cette formule on obtient tout de suite la forme de  $f^{(n+1)}(x)$ , d'où le résultat par récurrence. En particulier, on a  $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ .

La formule de Taylor-Lagrange donne l'existence pour tout  $x$  et tout  $n$  d'un nombre  $0 < \theta < 1$  tel que

$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+\theta x)^n}.$$

Là encore, fixons  $x$  et faisons tendre  $n$  vers  $+\infty$ , pour voir. On va se restreindre à  $x \in ] -1, 1]$ , pour avoir  $|x^n| \leq 1$ . Dans ce cas et pour  $x \geq 0$  on a

$$\left| \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+\theta x)^n} \right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

alors que pour  $x \leq 0$  on a  $(1+\theta x) \geq (1+x)$  donc

$$\left| \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+\theta x)^n} \right| \leq \frac{1}{n(1+x)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$



Dans les deux cas l'expression tend vers 0, et on a donc pour tout  $x \in ]-1, 1[$  :

$$\ln(1+x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

C'est cette formule qui est utilisée par les calculatrices pour calculer un logarithme ! Notons pour  $x = 1$  que l'on a

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Nous avons annoncé ce résultat dans l'exemple 4.22.

### La formule de Taylor-Young

Dans les exemples ci-dessus, nous avons fixé  $x$  et étudié le « reste », c'est-à-dire le terme en  $x^n$  ; c'est typique de l'utilisation de Taylor-Lagrange. Voici maintenant la formule de Taylor-Young, qui va être utilisée lorsque l'on veut faire tendre  $x$  vers 0 pour calculer une limite.

**THÉORÈME 12.4 (TAYLOR-YOUNG)** – Soit  $f$  une fonction dérivable  $n$  fois sur un intervalle  $I$  contenant 0. Alors on peut écrire

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x)$$

où  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0$ .

*Démonstration.* La démonstration complète sera donnée plus loin. Ici nous donnons une démonstration avec une toute petite restriction : on va supposer que, en plus des hypothèses ci-dessus, la fonction  $f^{(n)}$  est continue en 0. C'est par exemple le cas si  $f$  est dérivable  $n+1$  fois, et en pratique dans tous nos exemples nous serons dans cette situation.

On a alors  $f^{(n)}(x) \rightarrow f^{(n)}(0)$  ; en d'autres termes, si on pose  $h(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)$ , on peut écrire  $f^{(n)}(x) = f^{(n)}(0) + h(x)$  avec  $h(x) \rightarrow 0$ . La formule de Taylor-Lagrange donne alors :

$$f(x) = f(0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n h(\theta_x x).$$

On rappelle encore que  $\theta = \theta_x$  dépend de  $x$ . Posons alors  $\varepsilon(x) = h(\theta_x)$ . Comme  $0 < \theta_x < 1$ , on a  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow 0$ , ce qui conclut la démonstration.  $\square$

EXEMPLE 12.5 – Avant de connaître les formules de Taylor, calculer une limite relève souvent de l'astuce. Par exemple essayons de calculer la limite de  $\frac{\cos(x)-1}{x}$  lorsque  $x \rightarrow 0$ . L'astuce consiste à remarquer que, si  $f(x) = \cos(x)$ , alors la quantité étudiée est le taux d'accroissement de  $f$  :

$$\frac{\cos(x)-1}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \rightarrow f'(0) = 0.$$

Si maintenant nous essayons de calculer la limite de  $\frac{\cos(x)-1}{x^2}$  en 0, la même astuce ne donne rien. Pour parvenir à faire le calcul, écrivons la formule de Taylor-Young pour la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \cos(x)$  et pour  $n = 2$  (on dit souvent « Taylor-Young à l'ordre 2 »). On a  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 0$  et  $f''(0) = -1$ . Par conséquent :

$$f(x) = \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

avec  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ . Et donc :

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2} + \varepsilon(x) \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, la formule de Taylor nous a permis de « remplacer » la fonction  $\cos$  par le polynôme  $1 - \frac{x^2}{2}$  dans le calcul de la limite.

Au passage, il est très facile d'écrire la formule de Taylor-Young pour la fonction  $\cos$  à n'importe quel ordre, puisque les dérivées successives sont :

$$\cos' = -\sin, \quad \cos'' = -\cos, \quad \cos^{(3)} = \sin \quad \text{et} \quad \cos^{(4)} = \cos.$$

Les nombres  $\cos^{(n)}(0)$ , lorsque  $n$  augmente, sont donc

$$1, 0, -1, 0, \quad 1, 0, -1, 0, \quad 1, 0, -1, 0, \dots,$$

la séquence  $1, 0, -1, 0$  se répétant sans cesse. En particulier les termes « impairs » dans la formule de Taylor-Young sont nuls, et la formule à l'ordre  $2n + 1$  est

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x),$$

où  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow 0$ .

EXEMPLE 12.6 – On souhaite calculer la limite en 0 de  $\frac{\sin(x)-x}{x^2}$ . Écrivons d'abord la formule de Taylor-Young pour la fonction sinus : les dérivées successives sont

$$\sin' = \cos, \quad \sin'' = -\sin, \quad \sin^{(3)} = -\cos \quad \text{et} \quad \sin^{(4)} = \sin.$$

Les nombres  $\sin^{(n)}(0)$ , lorsque  $n$  augmente, sont donc

$$0, 1, 0, -1, \quad 0, 1, 0, -1, \quad 0, 1, 0, -1, \dots$$

En particulier les termes pairs dans la formule de Taylor-Young sont nuls, et la formule à l'ordre  $2n$  est

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n} \varepsilon(x),$$

où  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow 0$ . Pour notre limite, prenons l'ordre 4 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon(x),$$

où, vous l'aurez deviné, on a  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ . Ainsi

$$\frac{\sin(x) - x}{x^2} = \frac{x}{6} + x^2 \varepsilon(x) \rightarrow 0.$$

EXEMPLE 12.7 – Un dernier. Essayons de calculer la limite de

$$\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2},$$

lorsque  $x$  tend vers 0. Introduisons la notation  $f_\alpha(t) = (1+t)^\alpha$ , pour  $\alpha > 0$ , et calculons la formule de Taylor-Young pour  $f_\alpha$ . On a

$$f'_\alpha(t) = \alpha(1+t)^{\alpha-1}, \quad f''_\alpha(t) = \alpha(\alpha-1)(1+t)^{\alpha-2},$$

et par récurrence on a facilement

$$f_{\alpha}^{(n)}(t) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - n + 1)(1 + t)^{\alpha - n}.$$

Le coefficient qui apparaît dans Taylor-Young est donc

$$\frac{f_{\alpha}^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!},$$

et ce nombre est souvent noté  $\binom{\alpha}{n}$ , ce qui est cohérent avec la notation lorsque  $\alpha$  est un entier. On a donc

$$(1 + t)^{\alpha} = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} t^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} t^n + t^n \varepsilon(t),$$

avec  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ . Pour  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $n = 2$ , on obtient

$$\sqrt{1 + t} = (1 + t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{t^2}{8} + t^2 \varepsilon_1(t).$$

Pour  $t = 2x$  ceci donne

$$\sqrt{1 + 2x} = 1 + x - \frac{x^2}{2} + 4x^2 \varepsilon_1(2x).$$

Vous montrerez qu'en prenant  $\alpha = \frac{1}{3}$  on en arrive à

$$\sqrt[3]{1 + 3x} = 1 + x - x^2 + 9x^2 \varepsilon_2(x).$$

Finalement l'expression dont on cherche la limite est de la forme

$$\frac{\frac{1}{2}x^2 + x^2 h(x)}{x^2} = \frac{1}{2} + h(x),$$

où  $h(x)$  est une certaine expression qui tend vers 0 avec  $x$ . La limite vaut  $\frac{1}{2}$ .

Si vous avez trouvé ce dernier calcul un peu compliqué, alors vous conviendrez qu'on aurait besoin de notations plus simples, et de quelques conseils pratiques.

## Développements limités

Les expressions telles que  $4x^2\varepsilon_1(x)$  ci-dessus sont rapidement pénibles à manier. Donner des noms différents aux fonctions qui tendent vers 0 qui apparaissent ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ ) devient vite compliqué, et on se demande s'il est vraiment utile de baptiser toutes ces fonctions. On ne peut pourtant pas toutes les nommer de la même manière.

Pour résoudre ce problème, on introduit la *notation de Landau*, qui en toute rigueur est un peu ambiguë, mais en pratique économise bien des efforts. Elle fonctionne de la manière suivante : tout d'abord on écrit

$$o(1)$$

qui se prononce « petit o de 1 », pour désigner une fonction anonyme qui tend vers 0. On ne dit pas « quand qui tend vers quoi », c'est pourquoi la notation est ambiguë, mais c'est le contexte qui rend les choses claires.

Ensuite, étant donnée une fonction  $\phi$ , qui en pratique sera très souvent de la forme  $\phi(x) = x^n$ , on utilise le raccourci

$$o(\phi(x)) = \phi(x)o(1).$$

Par exemple  $o(x^n)$  désigne une expression de la forme  $x^n\varepsilon(x)$  avec  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  (et ces expressions sont beaucoup intervenues dans le début de ce chapitre !). Ainsi on peut énoncer la conclusion du théorème de Taylor-Young sous la forme

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

On peut penser à  $o(\phi(x))$  comme à « quelque chose de négligeable devant  $\phi(x)$  ».

Avant de voir cette notation à l'oeuvre dans un calcul, une petite définition :

**DÉFINITION 12.8** – On dit que  $f$  a un *développement limité* à l'ordre  $n$  au voisinage de 0 s'il existe  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tels que

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n).$$



Le théorème de Taylor-Young affirme donc que si  $f$  est dérivable  $n$  fois, alors elle possède un développement limité à l'ordre  $n$ , et de plus  $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ . Mais utiliser le théorème n'est pas toujours la meilleure façon de trouver un développement limité – en fait, presque jamais.

EXEMPLE 12.9 – En écrivant  $(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n) = 1-x^{n+1}$ , on tire

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\dots+x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \\ &= 1+x+x^2+\dots+x^n + o(x^n).\end{aligned}$$

Ici on a utilisé le fait que  $\frac{x}{1-x} \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow 1$ , ce qu'on résume en écrivant  $\frac{x}{1-x} = o(1)$ ; et donc  $\frac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$ .

Bien entendu on peut obtenir ce développement grâce à Taylor-Young, ou encore en utilisant celui de  $(1+t)^\alpha$  comme dans l'exemple 12.7 pour  $\alpha = -1$  et  $t = -x$ . Mais le plus simple pour le retrouver reste le calcul ci-dessus.

EXEMPLE 12.10 – Cherchons un développement limité de la fonction  $x \mapsto (e^x - 1)(\sin(x) - x)$  en 0 à l'ordre 4. On écrit

$$e^x - 1 = x + o(x) \quad \text{et} \quad \sin(x) - x = -\frac{x^3}{3!} + o(x^3);$$

en effet nous connaissons ces développements par coeur depuis les exemples 12.2 et 12.6.

En multipliant il vient

$$(e^x - 1)(\sin(x) - x) = -\frac{x^4}{3!} + \left[ -\frac{x^3}{3!}o(x) + xo(x^3) + o(x)o(x^3) \right].$$

Maintenant nous faisons une série de petites simplifications, qu'il va falloir s'habituer à faire de tête (c'est très facile). Tout d'abord

$$-\frac{x^3}{3!}o(x) = -\frac{x^4}{3!}o(1) = x^4o(1) = o(x^4).$$

Pour la deuxième égalité, on utilise le fait que  $-\frac{1}{3!}o(1) = o(1)$ , ce qui signifie seulement que  $-\frac{1}{3!}o(1)$  tend vers 0 avec  $x$ .

Deux autres petits calculs donnent  $x o(x^3) = o(x^4)$  et  $o(x) o(x^3) = o(x^4)$ . Enfin la somme des termes dans le crochet est

$$o(x^4) + o(x^4) + o(x^4) = x^4(o(1) + o(1) + o(1)) = x^4 o(1) = o(x^4).$$

Ici on utilise le fait que  $o(1) + o(1) = o(1)$  (ce qui surprend la première fois!). Finalement

$$(e^x - 1)(\sin(x) - x) = -\frac{x^4}{3!} + o(x^4).$$

PROPOSITION 12.11 – Si l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \\ &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

alors  $a_i = b_i$ . En d'autres termes, lorsqu'un développement limité existe, il est unique.

*Démonstration.* Par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$ , on prend la limite quand  $x$  tend vers 0, et on obtient  $a_0 = b_0$ .

Si l'unicité a été prouvée pour  $n - 1$  et que l'on a un développement limité à l'ordre  $n$ , on écrit  $a_n x^n + o(x^n) = o(x^{n-1})$  et de même pour  $b_n$ , et on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + o(x^{n-1}) \\ &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + o(x^{n-1}). \end{aligned}$$

Par récurrence on a  $a_i = b_i$  pour  $0 \leq i \leq n - 1$ .

On peut donc simplifier l'égalité ci-dessus, et il reste  $a_n x^n + o(x^n) = b_n x^n + o(x^n)$ . On divise par  $x^n$  et on prend la limite en 0 : il vient  $a_n = b_n$ .  $\square$

EXEMPLE 12.12 – Cette proposition est évidemment utile lorsque nous avons deux façons de trouver un développement limité. Par exemple, considérons la question suivante : soit  $f(x) = \frac{1}{1+2x^3}$  ; combien vaut  $f^{(6)}(0)$  ? On peut bien sûr répondre à cette question en dérivant 6 fois... mais c'est très long. Procédons autrement.

D'après Taylor-Young, nous savons que cette fonction possède un développement limité à tous les ordres, et le terme en  $x^k$  est précisément  $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ . Mais nous savons aussi que

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2),$$

depuis l'exemple 12.9, donc en prenant  $u = -2x^3$  :

$$\frac{1}{1+2x^3} = 1 - 2x^3 + 4x^6 + o(x^6).$$

Détaillons un peu ce qui vient de se passer avec le reste. Le terme  $o(u^2)$  s'écrit donc  $u^2\varepsilon(u)$  avec  $\varepsilon(u) \rightarrow 0$  lorsque  $u \rightarrow 0$ . Lorsque l'on fait  $u = -2x^3$ , ce terme devient  $4x^6\varepsilon(-2x^3)$ , et cette expression est bien de la forme  $x^6o(1) = o(x^6)$ . Là encore il faut faire ça de tête, avec l'habitude.

D'après la proposition, on peut comparer ce développement limité avec celui donné par Taylor-Young, et en particulier pour les termes en  $x^6$  la comparaison donne

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = 4 \quad \text{donc} \quad f^{(6)}(0) = 4 \times 6! = 2880.$$

## Méthodes de calcul des développements limités

Calculer les développements limités nécessite de l'entraînement, et nous allons lister quelques techniques à connaître. Évidemment la première méthode est d'appliquer le théorème de Taylor-Young, mais il est très rare que ce soit le meilleur choix. C'est bien sûr grâce à ce théorème que nous avons obtenu les développements des fonctions usuelles (exponentielle, sinus, cosinus...), mais ceux-ci sont à savoir par coeur absolument, de sorte qu'à partir de maintenant il sera exceptionnel d'appliquer directement Taylor-Young. (À la fin du chapitre nous résumons les choses à mémoriser).

EXEMPLE 12.13 (COMPOSITION) – Essayons de trouver un développement limité de  $\frac{1}{\cos(x)}$  à l'ordre 4 en 0. On utilise le fait que :

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2).$$



Ensuite on écrit  $\cos(x) = 1 + u(x)$  avec  $u(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$  (on a retenu le calcul de l'exemple 12.5 par coeur).

En combinant les résultats, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1 + u(x)} = 1 - u(x) + u(x)^2 + o(u(x)^2) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4). \end{aligned}$$

On a utilisé au passage  $o(u(x)^2) = o(x^4)$ . D'une manière générale le petit résultat suivant est à retenir : si  $u(x)$  possède un développement limité qui commence par un terme en  $x^m$ , alors  $o(u(x)^n) = o(x^{nm})$ .

EXEMPLE 12.14 (INTÉGRATION) – Le principe est le suivant. Soit  $f$  une fonction dérivable  $n+1$  fois. D'après Taylor-Young,  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n+1$ , donc  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})$ , avec  $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ .

Mais on sait aussi que  $f'$  est dérivable  $n$  fois, et donc admet un développement limité de la forme  $f'(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n)$ , avec cette fois

$$b_k = \frac{(f')^{(k)}(0)}{k!} = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} = (k+1)a_{k+1}.$$

On peut donc trouver les  $a_k$  à partir des  $b_k$  (et le contraire aussi d'ailleurs, mais en général c'est plus intéressant dans ce sens, et c'est pourquoi on parle de la méthode « d'intégration »). Il reste juste à calculer  $a_0 = f(0)$  directement, et on obtient  $n+1$  coefficients du développement limité de  $f$  à partir de  $n$  coefficients du développement de  $f'$ .

Voyons ça pour  $f(x) = \arctan(x)$ . On est bien plus à l'aide avec la dérivée  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , puisque l'on a

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$$

(On déduit celui-ci du développement de  $\frac{1}{1-u}$ , que l'on connaît par coeur). Pour revenir à  $f$ , il suffit « d'intégrer terme à terme »,

c'est-à-dire que l'on a

$$f(x) = f(0) - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

Et bien sûr  $f(0) = \arctan(0) = 0$ .

EXEMPLE 12.15 (TANGENTE) – Il y a de nombreuses façons de calculer le développement limité de  $f(x) = \tan(x)$ . La méthode que nous allons présenter est particulièrement rapide. C'est un classique qui peut donner des idées dans d'autres situations.

On commence par noter que  $f'(x) = 1 + \tan(x)^2 = 1 + f(x)^2$ . Ainsi  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1 + 0 = 1$ . Par Taylor-Young, nous avons le développement à l'ordre 1, à savoir  $f(x) = x + o(x)$ .

Mais alors

$$f'(x) = 1 + f(x)^2 = 1 + (x + o(x))^2 = 1 + x^2 + o(x^2).$$

Par la méthode d'intégration, on en déduit que

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Et on recommence :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \left( x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^2 \\ &= 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

On intègre de nouveau :

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

On peut continuer comme ça pendant longtemps. Vous pouvez vérifier que l'on a

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^9).$$

Il n'existe pas de formule générale pour l'ordre  $n$ .

## Le minimum à savoir par coeur

Plus on connaît de développements limités par coeur, plus les suivants sont faciles. Voici cependant une liste minimale de choses à savoir par coeur, sous peine d'être incapable d'affronter les exercices. Les démonstrations ont toutes été données au cours de ce chapitre. Nous indiquons des moyens mnémotechniques.

$$\diamond e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$\diamond \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

(On garde les termes pairs de l'exponentielle avec un signe une fois sur deux.)

$$\diamond \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$$

(Pareil avec les termes impairs.)

$$\diamond (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$$

(« Formule du binôme ».)

$$\diamond \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

(C'est un cas particulier de la formule précédente, mais il est tellement important qu'il faut savoir l'écrire rapidement.)

$$\diamond \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

(En dérivant on doit retrouver la formule pour  $(1+x)^{-1}$ .)

$$\diamond \text{Pour arctan, arcsin et arccos, on dérive et on fait un développement de la dérivée à l'aide de la formule pour } (1+x)^\alpha.$$

# Chapitre 13

## Applications linéaires

*Le lecteur ayant assimilé la définition 2.15 peut prendre pour  $\mathbb{K}$  n'importe quel corps.*

Dans ce chapitre, la lettre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

– Première lecture –

### Définition & Exemples

**DÉFINITION 13.1** – Soient  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ . Une *application linéaire* est une fonction  $f: E \rightarrow F$  telle que  $f(u + v) = f(u) + f(v)$  pour  $u, v \in E$ , et telle que  $f(\lambda v) = \lambda f(v)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ . ■

**EXEMPLE 13.2** – L'exemple le plus simple s'obtient en choisissant une matrice  $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ . On définit alors une application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^m \\ v &\longmapsto f(v) = Av. \end{aligned}$$

(Comme d'habitude, les vecteurs sont vus comme des matrices-colonnes.) On vérifie très simplement que  $f(u + v) = A \cdot (u + v) = Au + Av = f(u) + f(v)$ , et  $f(\lambda v) = A \cdot (\lambda v) = \lambda Av = \lambda f(v)$ . C'est donc bien une application linéaire.

Ainsi l'application  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x + 7y - z \\ x - y + 19z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

est linéaire.

EXEMPLE 13.3 – Prenons  $E = F = \mathbb{C}$ , qui est un espace vectoriel de dimension 1 sur  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Fixons un nombre réel  $\theta$ . L'application  $f(z) = e^{i\theta}z$  est alors linéaire, exactement comme dans l'exemple précédent.

On peut aussi identifier  $\mathbb{C}$  avec  $\mathbb{R}^2$  de la manière habituelle ; on le voit alors comme un espace vectoriel de dimension 2 sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . La même application  $f$  est toujours linéaire, bien sûr, quand on la voit comme une fonction  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . On l'appelle *la rotation d'angle  $\theta$* , ce qui doit correspondre à l'idée de rotation que vous avez étudiée au collège ou au lycée.

EXEMPLE 13.4 – Voyons un exemple plus abstrait. Prenons

$$E = \{ \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable} \},$$

l'espace vectoriel des fonctions dérivables, et

$$F = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

l'espace vectoriel de toutes les fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors on peut définir une application  $f : E \rightarrow F$  par  $f(\phi) = \phi'$ . Cette application  $f$  est linéaire, car  $(\phi + \psi)' = \phi' + \psi'$  et  $(\lambda\phi)' = \lambda\phi'$  pour toute constante  $\lambda$  (cf proposition 9.5).

DÉFINITION 13.5 (ET PROPOSITION) – Soit  $f : E \rightarrow F$  linéaire. On définit son *noyau*  $\ker(f)$  comme étant

$$\ker(f) = \{v \in E \mid f(v) = 0\}.$$

kernel en  
Anglais = noyau

On définit *l'image* de  $f$ , notée  $\text{Im}(f)$ , par

$$\text{Im}(f) = \{w \in F \mid \text{il existe } v \in E \text{ tel que } w = f(v)\}.$$

On utilise aussi la notation  $f(E)$  pour  $\text{Im}(f)$ .

Alors  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont des sous-espaces vectoriels (de  $E$  et  $F$  respectivement).

La dimension de  $\text{Im}(f)$  est appelée le *rang* de  $f$ . ■

La vérification que  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont bien des sous-espaces vectoriels vous est laissée.

EXEMPLE 13.6 – Prenons  $f(v) = Av$  comme dans l'exemple 13.2. Alors  $\ker(f)$  est l'ensemble des  $v$  tels que  $Av = 0$  : c'est l'ensemble des solutions d'un système linéaire. Réciproquement d'ailleurs, étant donné un système, on peut considérer sa matrice et l'application linéaire correspondante, dont le noyau est l'ensemble des solutions.

Avant de regarder  $\text{Im}(f)$  pour le même  $f$ , notons un résultat simple :

LEMME 13.7 – Soit  $f : E \rightarrow F$  linéaire. Si  $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ , alors  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ .

Démonstration. Chaque  $f(e_i)$  est dans  $\text{Im}(f)$  par définition, donc  $\text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \subset \text{Im}(f)$ . Réciproquement, si  $w = f(v)$ , alors on écrit  $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ , ce qui est possible par hypothèse, et on applique  $f$  :

$$w = f(v) = f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n).$$

Ceci montre bien que  $w \in \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ . □

EXEMPLE 13.8 – Reprenons encore  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  définie par  $f(v) = Av$  comme dans l'exemple précédent, et intéressons nous à  $\text{Im}(f)$ . On peut prendre la base canonique  $e_1, \dots, e_n$  de  $\mathbb{K}^n$ , et d'après le lemme on sait que  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ . Or on a

$$f(e_i) = Ae_i = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \text{la } i\text{-ème colonne de } A.$$

Donc  $\text{Im}(f)$  est l'espace engendré par les colonnes de  $A$ , c'est-à-dire que  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(A)$ . En particulier, par définition même le rang de  $f$  coïncide avec le rang de  $A$  (rappelez-vous la définition 11.40).

Ces deux derniers exemples montrent que les deux grands types de sous-espaces de  $\mathbb{K}^n$  qui nous sont familiers, à savoir

ceux définis par des équations et ceux donnés comme des vects, peuvent être vus comme des noyaux ou des images d'applications linéaires. Comprendre les applications linéaires permet donc de comprendre bien des choses.

EXEMPLE 13.9 – Reprenons l'application  $f(\phi) = \phi'$  comme dans l'exemple 13.4. Le noyau de  $f$  est constitué des fonctions  $\phi$  telles que  $\phi' = 0$  ; d'après le théorème des accroissements finis, ceci revient à dire que  $\phi$  est constante.

L'image de  $f$  est l'ensemble des applications  $\psi$  qui sont de la forme  $\psi = \phi'$ . En d'autres termes il s'agit des fonctions qui possèdent une primitive. Peut-on décrire facilement cet espace vectoriel ? C'est une question très difficile ! Dans le chapitre suivant nous montrerons au moins que toutes les fonctions continues possèdent une primitive (mais ça n'est qu'une description partielle de  $\text{Im}(f)$  bien sûr).

## Sommes directes

Nous souhaitons décrire deux types d'applications linéaires très courantes et de nature géométrique, les projections et les symétries. Ce sont des généralisations des projections et symétries « orthogonales » que vous aviez vues au collège. Pour préparer correctement la version la plus générale, il nous faut examiner un peu les relations qu'il peut y avoir entre deux sous-espaces d'un espace donné.

On part donc d'un espace vectoriel  $E$ , et on prend deux sous-espaces  $U$  et  $V$ . On peut tout d'abord considérer l'intersection  $U \cap V$ , constituée des vecteurs qui sont à la fois dans  $U$  et dans  $V$  : vous vérifierez sans peine que c'est encore un sous-espace vectoriel. Une autre opération possible est la suivante.

DÉFINITION 13.10 – La *somme* de  $U$  et  $V$ , notée  $U + V$  est l'ensemble des vecteurs de  $E$  de la forme  $u + v$  avec  $u \in U$  et  $v \in V$ .

■

Là encore, c'est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

EXEMPLE 13.11 – Lorsque  $U$  et  $V$  sont donnés par des équations, décrire  $U \cap V$  est facile. Par exemple dans  $E = \mathbb{R}^3$ , si  $U$  est décrit

par les équations

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

et si  $V$  est décrit par l'équation  $x - z = 0$ , alors  $U \cap V$  est l'ensemble des vecteurs dont les coordonnées vérifient toutes ces équations à la fois. En clair  $U \cap V$  est décrit par

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 3y + 5z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Si maintenant  $U$  et  $V$  sont donnés comme des vects, c'est  $U + V$  qui est facile à décrire. En effet, les définitions entraînent immédiatement que

$$\mathcal{Vect}(u_1, \dots, u_n) + \mathcal{Vect}(v_1, \dots, v_m) = \mathcal{Vect}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m).$$

(Vérifiez-le.)

Si maintenant on souhaite décrire  $U \cap V$  pour  $U$  et  $V$  donnés comme des vects, ou  $U + V$  pour  $U$  et  $V$  donnés par des équations, la seule solution est de faire d'abord une traduction des équations aux vects ou vice-versa, comme on sait le faire.

Il existe une relation simple entre les dimensions de  $U \cap V$  et  $U + V$  :

**PROPOSITION 13.12** – *Soit  $E$  un espace vectoriel et  $U, V$  deux sous-espaces de dimension finie. Alors  $U + V$  et  $U \cap V$  sont de dimension finie, et on a*

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

*Démonstration.* Puisque  $U \cap V$  est un sous-espace de  $U$ , il est de dimension finie par le corollaire 11.39. Prenons donc une base de  $U \cap V$ , disons  $e_1, e_2, \dots, e_d$ .

D'après le théorème de la base incomplète (11.37), on peut trouver  $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$  tels que  $\mathcal{B}_U = e_1, \dots, e_d, u_1, \dots, u_k$  est une base de  $U$ . De même, on peut trouver  $v_1, \dots, v_\ell \in V$  tels que  $\mathcal{B}_V = e_1, \dots, e_d, v_1, \dots, v_\ell$  est une base de  $V$ . Montrons que

$$\mathcal{B} = e_1, \dots, e_d, u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_\ell$$



est une base de  $U+V$ . Ceci montrera que  $U+V$  est de dimension finie, et que sa dimension est  $d+k+\ell = (d+k) + (d+\ell) - d = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$ , comme prévu.

Pour commencer, puisque  $U = \text{Vect}(\mathcal{B}_U)$  et  $V = \text{Vect}(\mathcal{B}_V)$ , il est clair que  $U+V = \text{Vect}(\mathcal{B})$  (voir l'exemple précédent). Donc  $\mathcal{B}$  est génératrice. Pour montrer qu'elle est libre, nous devons étudier l'équation

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_d e_d + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_k u_k + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_\ell v_\ell = 0,$$

que nous réécrivons

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_d e_d + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_k u_k = -(\gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_\ell v_\ell).$$

Le membre de gauche appartient à  $U$  et le membre de droite appartient à  $V$ ; pour qu'ils soient égaux, il faut donc qu'ils appartiennent tous les deux à  $U \cap V$ . L'espace  $U \cap V$  ayant pour base  $e_1, \dots, e_d$ , les deux membres de la dernière équation doivent donc être de la forme  $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_d e_d$  pour certains scalaires  $\lambda_j$ . Écrivons en particulier

$$-(\gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_\ell v_\ell) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_d e_d,$$

ou encore

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_d e_d + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_\ell v_\ell = 0.$$

La famille  $\mathcal{B}_V$  étant libre, tous les coefficients ci-dessus sont nuls :  $\lambda_1 = \cdots = \lambda_d = \gamma_1 = \cdots = \gamma_\ell = 0$ . Si nous revenons à l'équation de départ, il ne reste plus que

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_d e_d + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_k u_k = 0.$$

Et finalement, la famille  $\mathcal{B}_U$  étant libre, ces derniers coefficients sont également nuls :  $\alpha_1 = \cdots = \alpha_d = \beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$ . La famille  $\mathcal{B}$  est bien libre.  $\square$

**COROLLAIRE 13.13** – Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, et soient  $U, V$  deux sous-espaces. Alors, lorsque deux des trois conditions ci-dessous sont remplies, la troisième l'est également :

1.  $U \cap V = \{0\}$ ,

2.  $E = U + V$ ,
3.  $\dim(U) + \dim(V) = \dim(E)$ .

*Démonstration.* Il faut simplement se rappeler les choses suivantes : si  $F$  est un sous-espace de  $E$ , alors  $F = E \iff \dim(F) = \dim(E)$  (corollaire 11.39); en outre  $F = \{0\} \iff \dim(F) = 0$ . Donc on peut réécrire les trois conditions de la façon suivante :

1.  $\dim(U \cap V) = 0$ ,
2.  $\dim(E) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$ ,
3.  $\dim(U) + \dim(V) = \dim(E)$ .

(On a utilisé la proposition pour le (2)). Il est maintenant clair que si deux égalités sont vraies, alors la troisième aussi.  $\square$

**DÉFINITION 13.14** – On dit que  $E$  est la *somme directe* de  $U$  et  $V$ , et on écrit  $E = U \oplus V$ , lorsque l'on a  $U \cap V = \{0\}$  et  $E = U + V$ .  $\blacksquare$

Le corollaire indique donc que, dans le cas de la dimension finie qui est celui que nous recontrons presque toujours, on peut vérifier si  $E = U \oplus V$  de plusieurs façons. Typiquement, vérifier si  $E = U + V$  peut être plus difficile que de vérifier les deux autres conditions du corollaire.

**EXEMPLE 13.15** – Prenons  $E = \mathbb{R}^3$ , puis  $U$  défini par l'équation  $2x - y + 7z = 0$ , et enfin  $V = \text{Vect}(v)$  avec

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Alors  $\dim(U) = 2$  (on peut prendre  $y$  et  $z$  comme paramètres), et  $\dim(V) = 1$ , donc  $\dim(U) + \dim(V) = \dim(E)$ . D'après le corollaire, pour vérifier que  $E = U \oplus V$  il suffit de montrer que  $U \cap V = \{0\}$ . Ceci nous évite de montrer directement  $E = U + V$ , ce qui est un peu plus pénible.

Un vecteur de  $V$  est de la forme

$$\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix},$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ce vecteur est dans  $U$  lorsque

$$2\lambda - \lambda + 7 \times 2\lambda = 15\lambda = 0.$$

Ceci n'arrive que pour  $\lambda = 0$ , donc le seul vecteur à la fois dans  $U$  et dans  $V$  est le vecteur nul. On a bien  $U \cap V = \{0\}$ , et finalement  $E = U \oplus V$ .

EXEMPLE 13.16 – Une situation très simple est celle d'un espace vectoriel  $E$  muni d'une base  $e_1, \dots, e_n$ , dans lequel on choisit de « couper en deux » ces vecteurs, en posant  $U = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  et  $V = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ . Dans ce cas il est clair que  $E = U \oplus V$ , les deux conditions les plus facile à vérifier étant  $E = U + V$  et  $\dim(U) + \dim(V) = \dim(E)$ .

Il y a même une sorte de réciproque. Si  $E = U \oplus V$ , prenons une base  $u_1, \dots, u_k$  de  $U$  et une base  $v_1, \dots, v_\ell$  de  $V$ , et considérons  $\mathcal{B} = u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_\ell$ . Alors  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , le plus facile étant de repérer que c'est une famille génératrice ayant  $k + \ell = \dim(E)$  éléments.

La meilleure façon de comprendre de manière intuitive et géométrique les sommes directes reste d'étudier les *projections*, ce que nous allons faire maintenant.

## Projections et symétries

De même que les bases nous permettent de prendre des coordonnées, les sommes directes vont nous permettre de décomposer les vecteurs. En effet, supposons que  $E = U \oplus V$ , et prenons  $x \in E$ . Puisque  $E = U + V$ , on peut trouver  $u \in U$  et  $v \in V$  tels que  $x = u + v$ . Mais de plus,  $u$  et  $v$  sont *uniques*. Pour vérifier ceci, écrivons  $x = u' + v'$  avec  $u' \in U$  et  $v' \in V$ , puis

$$u + v = u' + v' \implies u - u' = v' - v.$$

On a  $u - u' \in U$  et  $v' - v \in V$ , donc pour que ces vecteurs soient égaux, il faut qu'ils soient dans  $U \cap V = \{0\}$ . Ainsi  $u - u' = 0 = v' - v$  et donc  $u = u'$ ,  $v = v'$ .

Les vecteurs  $u$  et  $v$  sont bien définis par  $x$ ; on pourrait les noter  $u_x$  et  $v_x$ . Nous allons pouvoir étudier la fonction qui à  $x$  associe  $u_x$  :

DÉFINITION 13.17 – Supposons que  $E = U \oplus V$ . La *projection* sur  $U$ , parallèlement à  $V$ , est l'application

$$p: E \longrightarrow E,$$

définie par  $p(x) = u_x$ , où  $x = u_x + v_x$  (comme ci-dessus). ■

EXEMPLE 13.18 – Prenons  $E = \mathbb{R}^2$ , et choisissons une base  $e_1, e_2$ . Enfin, posons  $U = \text{Vect}(e_1)$  et  $V = \text{Vect}(e_2)$ , de sorte que  $E = U \oplus V$  comme dans l'exemple 13.16. Soit  $p$  la projection sur  $U$ , parallèlement à  $V$ .

La situation se présente comme sur le dessin suivant, sur lequel on a indiqué  $x$  et  $p(x)$  sur un exemple. La construction se fait en prenant la parallèle à  $V$  passant par  $x$ ; l'intersection de cette droite avec  $U$  est  $p(x)$ .

PROPOSITION 13.19 – Soit  $p$  comme ci-dessus. Alors

1.  $p$  est linéaire,
2.  $p(p(x)) = p(x)$ ,
3. le noyau de  $p$  est  $V$ , l'image de  $p$  est  $U$ .

Réciproquement, si  $p$  est une application de  $E$  vers lui-même vérifiant (1) et (2), alors on a

$$E = \text{Im}(p) \oplus \ker(p),$$

et  $p$  est la projection sur  $\text{Im}(p)$  parallèlement à  $\ker(p)$ .

Sur la figure précédente, essayez de voir géométriquement pourquoi  $U = \ker(p)$  et  $V = \text{Im}(p)$ .

*Démonstration.* Si  $x = u + v$  et  $y = u' + v'$ , alors  $x + y = (u + u') + (v + v')$  avec  $u + u' \in U$  et  $v + v' \in V$ , donc par définition  $p(x + y) = u + u'$ , avec  $u = p(x)$  et  $u' = p(y)$ . On montre de même que  $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ . La projection  $p$  est bien linéaire.

En écrivant  $x = u + v$  comme ci-dessus, on a  $p(x) = u \in U$ . Si l'on écrit  $u = u + 0$ , alors c'est la décomposition de  $u$  sur  $U$  et  $V$  et par définition  $p(u) = u$ . Ainsi  $p(p(x)) = p(x)$ . Les points (1) et (2) sont montrés.

Passons au (3). Si  $x = u + v$  et si  $p(x) = u = 0$ , alors  $x = v \in V$ ; donc  $\ker(p) \subset V$ . Réciproquement si  $x \in V$ , on écrit  $x = 0 + x =$

$u + v$  pour constater que  $u = 0 = p(x)$  (et  $v = x$ ), donc  $x \in \ker(p)$  et finalement  $\ker(p) = V$ . L'image de  $p$  est clairement contenue dans  $U$ , et réciproquement si on prend  $u \in U$ , en l'écrivant  $u = u + 0$  on voit (comme ci-dessus) que  $p(u) = u$  donc  $u \in \text{Im}(p)$ . L'image de  $p$  est bien  $U$ .

Voyons la réciproque, et supposons que  $p$  est linéaire de  $E$  vers  $E$ , avec  $p(p(x)) = p(x)$ . Si on prend  $x \in E$  quelconque, on écrit simplement

$$x = p(x) + (x - p(x)). \quad (*)$$

Bien sûr  $p(x) \in \text{Im}(p)$ , et comme  $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0$ , on a  $x - p(x) \in \ker(p)$ . Ceci montre que  $E = \text{Im}(p) + \ker(p)$ .

Pour établir que la somme est directe, prenons  $x \in \ker(p) \cap \text{Im}(p)$ . Alors  $p(x) = 0$  puisque  $x \in \ker(p)$ . D'autre part  $x = p(y)$  pour un certain  $y$ , donc  $p(x) = p(p(y)) = p(y) = x$ . En comparant les deux on voit que  $x = 0$ , et  $\ker(p) \cap \text{Im}(p) = \{0\}$ . La somme est bien directe.

Enfin l'équation (\*) montre bien que la projection de  $x$  sur  $\text{Im}(p)$  parallèlement à  $\ker(p)$  est  $p(x)$ .  $\square$

Après les projections, les symétries. Cette fois-ci, au lieu de remplacer  $v_x$  par  $0$ , on le remplace par  $-v_x$ . Plus précisément :

**DÉFINITION 13.20** – Supposons que  $E = U \oplus V$ . La *symétrie* par rapport à  $U$ , dans la direction  $V$ , est l'application

$$s: E \longrightarrow E,$$

définie par  $s(x) = u_x - v_x$ , où  $x = u_x + v_x$  (comme ci-dessus).  $\blacksquare$

**PROPOSITION 13.21** – Soit  $s$  comme ci-dessus. Alors

1.  $s$  est linéaire,
2.  $s(s(x)) = x$ ,
3. on peut caractériser  $U$  et  $V$  par

$$U = \{x \in E \mid s(x) = x\},$$

et

$$V = \{x \in E \mid s(x) = -x\}.$$

Réciproquement, si  $s$  est une application de  $E$  vers lui-même vérifiant (1) et (2), et si on définit  $U$  et  $V$  par les égalités ci-dessus, alors  $E = U \oplus V$  et  $s$  est la symétrie par rapport à  $U$ , dans la direction  $V$ .

*Démonstration.* On vous laisse montrer les trois points, à titre d'exercice. Montrons la réciproque : on prend  $s$  linéaire telle que  $s(s(x)) = x$  et on définit  $U$  et  $V$  par les égalités proposées. Écrivons

$$x = \frac{1}{2}(x + s(x)) + \frac{1}{2}(x - s(x)).$$

En posant  $u_x = \frac{1}{2}(x + s(x))$  et  $v_x = \frac{1}{2}(x - s(x))$ , on a donc  $x = u_x + v_x$ . De plus

$$s(u_x) = \frac{1}{2}(s(x) + s(s(x))) = \frac{1}{2}(s(x) + x) = u_x,$$

donc  $u_x \in U$  par définition. Un calcul similaire donne  $s(v_x) = -v_x$ , soit  $v_x \in V$ . Ceci montre que  $E = U + V$ .

Si  $x \in U \cap V$ , alors  $s(x) = x = -x$ , donc  $2x = 0$  et  $x = 0$ . Par suite  $U \cap V = \{0\}$ , et  $E = U \oplus V$ .

Enfin  $s(x) = s(u_x + v_x) = u_x - v_x$ , donc  $s$  est bien la symétrie annoncée.  $\square$

## La matrice d'une application linéaire

Nous avons vu qu'une matrice  $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$  définissait une application linéaire  $f$  de  $\mathbb{K}^n$  vers  $\mathbb{K}^m$  par  $f(v) = Av$ . Nous allons voir maintenant que, réciproquement, si  $f: E \rightarrow F$  est linéaire, on peut lui associer une matrice *une fois que des bases ont été choisies pour  $E$  et  $F$ .*

Supposons donc que  $\mathcal{B} = e_1, \dots, e_n$  est une base de  $E$ , et que  $\mathcal{C} = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  est une base de  $F$ . Le lemme suivant contient une observation simple : pour définir une application linéaire dans cette situation, il suffit de spécifier chaque  $f(e_i)$ .

**LEMME 13.22** – Soient  $v_1, \dots, v_n$  des vecteurs quelconques de  $F$ . Alors il existe une application linéaire  $f: E \rightarrow F$  et une seule telle que  $f(e_i) = v_i$ .

*Démonstration.* Voyons l'unicité d'abord. Prenons  $u \in E$ , que l'on peut écrire  $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ . On doit avoir

$$\begin{aligned} f(u) &= \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n) \\ &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n. \end{aligned} \quad (*)$$

Il n'y a donc qu'un seul choix possible pour  $f(u)$ , et  $f$  est unique si elle existe.

Pour vérifier l'existence, on définit  $f$  par la formule (\*), et on doit simplement vérifier qu'elle est linéaire. C'est très facile, et on vous le confie à titre d'exercice.  $\square$

Exploitions maintenant le fait que nous avons aussi choisi une base  $\mathcal{C}$  pour  $F$ . En effet, pour spécifier  $f(e_i)$ , il suffit désormais de donner ses coordonnées dans  $\mathcal{C}$ ; c'est-à-dire que l'on peut écrire

$$f(e_i) = a_{1i} \varepsilon_1 + a_{2i} \varepsilon_2 + \dots + a_{mi} \varepsilon_m,$$

et l'application  $f$  est déterminée par les nombres  $a_{ij}$ . C'est la matrice  $(a_{ij})$  que l'on appelle la matrice de  $f$ , par rapport aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ .

En d'autres termes :

**DÉFINITION 13.23** – Soit  $f: E \rightarrow F$  une application linéaire, soit  $\mathcal{B} = e_1, \dots, e_n$  une base de  $E$ , et soit  $\mathcal{C}$  une base de  $F$ . Alors la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ , que l'on va noter

$${}_c[f]^{\mathcal{B}},$$

est construite de la manière suivante : dans la colonne  $i$ , on place les coordonnées de  $f(e_i)$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

Lorsque les bases sont évidentes d'après le contexte, on va écrire  $[f]$  plutôt que  ${}_c[f]^{\mathcal{B}}$ .  $\blacksquare$

**EXEMPLE 13.24** – Prenons  $E = F = \mathbb{R}^2$ , et

$$e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Alors  $\mathcal{B} = e_1, e_2$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . On pose  $U = \text{Vect}(e_1)$  et  $V = \text{Vect}(e_2)$ , de sorte que  $\mathbb{R}^2 = U \oplus V$ . Soit maintenant  $p$  la projection sur  $U$ , parallèlement à  $V$ .

Il y a au moins deux questions naturelles que l'on peut poser. Tout d'abord, quelle est

$${}_{\mathcal{B}}[p]^{\mathcal{B}} \quad ?$$

(On dira « la matrice de  $p$  dans la base  $\mathcal{B}$  » pour indiquer que l'on prend  $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ ). Pour cela, on revient à la définition. Dans la colonne 1, on écrit les coordonnées de  $p(e_1)$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On a  $p(e_1) = e_1 = 1 \times e_1 + 0 \times e_2$ , donc la première colonne est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la colonne 2, on indique les coordonnées de  $p(e_2)$ . Or  $p(e_2) = 0 = 0 \times e_1 + 0 \times e_2$ , donc la deuxième colonne est

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement

$${}_{\mathcal{B}}[p]^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, avec  $\mathbb{R}^2$  il est naturel de penser à la base canonique  $\mathcal{C} = \varepsilon_1, \varepsilon_2$  avec

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quelle est donc

$${}_{\mathcal{C}}[p]^{\mathcal{C}} \quad ?$$

Il faut calculer  $p(\varepsilon_1)$  et  $p(\varepsilon_2)$ , dans la base canonique, et ceci nous donnera les deux colonnes de la matrice que l'on cherche. Prenons donc un vecteur quelconque

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$



On va calculer ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ , puisque c'est avec cette base que l'on sait bien faire des calculs avec  $p$ . Pour cela introduisons

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de  $\mathcal{B}$ . On a alors

$$\mathcal{B}[x] = A^{-1}x = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7}x_1 + \frac{1}{7}x_2 \\ -\frac{1}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 \end{pmatrix}.$$

(Revoir l'exemple 11.27 si ce n'est pas clair.) En particulier on obtient donc

$$\mathcal{B}[\varepsilon_1] = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}[\varepsilon_2] = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

On a donc  $\varepsilon_1 = \frac{2}{7}e_1 - \frac{1}{7}e_2$ , ce qui permet de calculer que

$$p(\varepsilon_1) = \frac{2}{7}e_1 = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \frac{6}{7}\varepsilon_1 + \frac{2}{7}\varepsilon_2.$$

De la même manière, on a  $\varepsilon_2 = \frac{1}{7}e_1 + \frac{3}{7}e_2$  donc

$$p(\varepsilon_2) = \frac{1}{7}e_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \frac{3}{7}\varepsilon_1 + \frac{1}{7}\varepsilon_2.$$

Finalement

$$c[p]^C = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Pour vérifier si vous avez assimilé les définitions, assurez-vous que vous comprenez maintenant pourquoi

$$c[p]^B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}[p]^C = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vous trouvez cet exemple difficile à suivre, alors vous apprécierez la « formule du changement de base » que nous allons présenter très bientôt. C'est une formule simple et systématique pour organiser les calculs ci-dessus, mais il faudra

toujours être capable d'écrire au moins une matrice (pour certaines bases), la formule donnera les matrices dans les autres bases. Dans l'exemple, le plus simple est de commencer par

$${}_B[p]^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous commençons d'ailleurs avec cet exemple à voir l'intérêt de toutes ces matrices : puisqu'elles contiennent toutes la même information, à savoir une description de l'application  $p$ , libre à nous de choisir la plus simple. Et vous voyez bien que  ${}_B[p]^B$  est beaucoup plus simple que les autres ! Cette idée sera « poussée » dans le chapitre « Diagonalisation ».

Commençons par constater, avec la proposition suivante, que toutes les applications linéaires (entre espaces vectoriels de dimension finie) se ramènent à multiplier une matrice par un vecteur-colonne ; et la composition des applications se ramène à multiplier les matrices.

**PROPOSITION 13.25** – Soient  $E, F$  et  $G$  des espaces vectoriels, et soient  $B, C$  et  $D$  des bases de ces espaces respectifs.

1. Si  $f : E \rightarrow F$  est linéaire, et si  $x \in E$ , alors  $[f(x)] = [f][x]$ . Plus précisément

$$c[f(x)] = c[f]{}_B[x].$$

2. Si  $g : F \rightarrow G$  est linéaire, alors  $[g \circ f] = [g][f]$ . Plus précisément

$${}_D[g \circ f]^B = {}_D[g]^C c[f]^B.$$

Nous ne donnerons pas les détails de la démonstration : elle consiste seulement à vérifier les définitions.

**EXEMPLE 13.26** – Reprenons l'exemple précédent. Nous avons calculé

$$M = c[p]^C = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Ceci nous permet de calculer l'image d'un vecteur quelconque par l'application  $p$  (dans la base canonique). En effet si

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c[x],$$

alors

$$p(x) = {}_c[p(x)] = {}_c[p]{}_c[x] = Mx = \begin{pmatrix} \frac{6}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 \\ \frac{2}{7}x_1 + \frac{1}{7}x_2 \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, l'application  $p$  n'est autre que  $p(x) = Mx$ . Au départ il n'était pas clair à partir de la définition « géométrique » de la projection que l'on puisse l'écrire simplement avec une matrice.

### Formule du changement de base

Nous allons voir comment passer de la matrice d'une application linéaire, écrite dans certaines bases, à la matrice de la même application écrite dans d'autres bases. Notre point de départ est donc celui d'un espace vectoriel  $E$  muni de deux bases, disons  $\mathcal{B} = e_1, \dots, e_n$  et  $\mathcal{C} = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ .

DÉFINITION 13.27 – La matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ , que l'on va noter

$${}_cP^{\mathcal{B}},$$

est la matrice obtenue de la manière suivante : dans la colonne  $i$ , on place les coordonnées de  $e_i$  dans la base  $\mathcal{C}$ . ■

EXEMPLE 13.28 – Reprenons l'exemple 13.24, et conservons les notations. On a alors

$${}_cP^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En effet cette matrice contient bien dans la colonne 1 le vecteur  $e_1$  de  $\mathcal{B}$ , écrit dans la base canonique  $\mathcal{C}$ , et de même la colonne 2 contient  $e_2$ .

Pour calculer  ${}_B P^{\mathcal{C}}$ , on doit placer dans la colonne 1 le vecteur-colonne  ${}_B[\varepsilon_1]$ , et dans la colonne 2 on place  ${}_B[\varepsilon_2]$ . Nous avons fait ces calculs dans l'exemple, et finalement on a

$${}_B P^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 13.29 – Les matrices de passage ont les propriétés suivantes :

1.  ${}_B P^B = \text{Id}$  (matrice identité).
2.  ${}_D P^B = {}_D P^C {}_C P^B$ .
3.  ${}_B P^C = ({}_C P^B)^{-1}$ .

*Démonstration.* Le premier point est évident d'après les définitions. Pour le deuxième, le plus simple est de noter la chose suivante : si  $\iota: E \rightarrow E$  est l'application  $\iota(x) = x$ , alors les définitions entraînent que

$${}_C P^B = {}_C [\iota]^B .$$

On exploite ensuite le fait que  $\iota(\iota(x)) = x$  donc  $\iota \circ \iota = \text{Id}$  et par suite, en utilisant la proposition 13.25 :

$${}_D P^B = {}_D [\iota]^B = {}_D [\iota \circ \iota]^B = {}_D [\iota]^C {}_C [\iota]^B = {}_D P^C {}_C P^B .$$

Le troisième point est maintenant facile, puisque l'on a

$${}_B P^C {}_C P^B = {}_C P^C = \text{Id},$$

donc les matrices  ${}_C P^B$  et  ${}_B P^C$  sont bien inverses l'une de l'autre, comme annoncé.  $\square$

Voici maintenant la formule proprement dite :

PROPOSITION 13.30 – Soit  $f: E \rightarrow F$  linéaire, soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ , et soient  $\mathcal{C}'$  et  $\mathcal{C}$  deux bases de  $F$ . Alors

$${}_{\mathcal{C}'} [f]^{B'} = {}_{\mathcal{C}'} P^{\mathcal{C}} [f]_{\mathcal{B}}^B P^{\mathcal{B}'}$$

Cette formule est plus facile à mémoriser qu'il n'y paraît. Il suffit de se rappeler qu'il faut « mettre » des matrices de passage à gauche et à droite ; ensuite, pour écrire les bonnes bases, il suffit de s'assurer d'abord que les bases apparaissant côte-à-côte sont les mêmes (ci-dessus, on a écrit  $\mathcal{B}$  deux fois, côte-à-côte, et de même pour  $\mathcal{C}$ ) ; enfin, les bases « à l'extérieur » des formules (donc  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{C}'$ ) sont les mêmes des deux côtés de l'égalité.

*Démonstration.* On utilise la même astuce. Soit  $\iota_E: E \rightarrow E$  l'application  $\iota_E(x) = x$ , et soit  $\iota_F$  défini de la même manière. On a  $\iota_F(f(\iota_E(x))) = f(x)$ , donc  $\iota_F \circ f \circ \iota_E = f$ , ce qui donne en termes de matrices (en utilisant la proposition 13.25) :

$$c'[f]^{B'} = c'[\iota_F \circ f \circ \iota_E]^{B'} = c'[\iota_F]^C c[f]_{\mathcal{B}}^B c'[\iota_E]^{B'} = c'P^C c[f]_{\mathcal{B}}^B P^{B'},$$

puisque  $c'[\iota_F]^C = c'P^C$  et  $c'[\iota_E]^{B'} = P^{B'}$ . □

EXEMPLE 13.31 – Reprenons l'exemple 13.24 : les choses vont être maintenant beaucoup plus simples. Il s'agit donc de la projection  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sur  $U = \text{Vect}(e_1)$  parallèlement à  $V = \text{Vect}(e_2)$ . Dans la base  $\mathcal{B} = e_1, e_2$  on a

$$_{\mathcal{B}}[p]^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

puisque  $p(e_1) = e_1$  et  $p(e_2) = 0$  (pour l'instant les vecteurs  $e_1$  et  $e_2$  particuliers que l'on choisit ne changent rien à l'affaire). Si maintenant on considère la base canonique  $\mathcal{C}$  et que l'on veut la matrice de  $p$  dans cette base, on utilise la formule du changement de base :

$$c[p]^C = cP^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}[p]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}P^{\mathcal{C}}.$$

Dans l'exemple 13.28, nous avons vu que

$$cP^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour l'autre, on utilise le fait que  $_{\mathcal{B}}P^{\mathcal{C}} = (cP^{\mathcal{B}})^{-1}$ . Nous avons déjà fait ce calcul, et on trouve

$$_{\mathcal{B}}P^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne bien

$$c[p]^C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

On peut traiter sans peine le cas de la projection  $s$  par rapport à  $U$ , dans la direction  $V$ . En effet on a  $s(e_1) = e_1$  et  $s(e_2) = -e_2$ , donc

$${}_B[s]^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans la base canonique, on introduit exactement les mêmes matrices de passage, donc

$${}_C[s]^C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}.$$

Ce qui signifie que pour trouver l'image d'un vecteur quelconque par cette symétrie, on peut calculer simplement

$$s \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7}x_1 + \frac{6}{7}x_2 \\ \frac{4}{7}x_1 - \frac{5}{7}x_2 \end{pmatrix}.$$

– Deuxième lecture –

### Applications injectives, surjectives, bijectives

Le lecteur est invité à revoir les définitions des termes « injectif », « surjectif », et « bijectif », introduits dans le tout premier chapitre de ce livre.

Nous allons examiner ces concepts dans le cadre des applications linéaires. Il se trouve que la situation est bien plus simple que dans le cas général. Commençons par :

**LEMME 13.32** – Soit  $f: E \rightarrow F$  linéaire. Si  $f$  possède une réciproque  $f^{-1}: F \rightarrow E$ , alors  $f^{-1}$  est également linéaire.

*Démonstration.* Prenons  $u$  et  $v$  dans  $F$ , et soit  $x = f^{-1}(u + v)$ . On a  $f(x) = u + v = f(f^{-1}(u)) + f(f^{-1}(v)) = f(f^{-1}(u) + f^{-1}(v))$  puisque  $f$  est linéaire. En appliquant  $f^{-1}$ , on obtient  $x = f^{-1}(u) + f^{-1}(v) = f^{-1}(u + v)$ . On vous laisse montrer de la même manière que  $f^{-1}(\lambda v) = \lambda f^{-1}(v)$ .  $\square$

On utilise un mot savant pour les applications bijectives et linéaires :

DÉFINITION 13.33 – Une application linéaire et bijective est appelée un *isomorphisme*. Lorsqu'il existe un isomorphisme  $E \rightarrow F$ , on dit que  $E$  et  $F$  sont *isomorphes*. ■

Ce nouveau nom ne doit pas cacher un vieux calcul :

PROPOSITION 13.34 – Soit  $f: E \rightarrow F$  linéaire, soit  $\mathcal{B}$  une base (finie) de  $E$ , et soit  $\mathcal{C}$  une base (finie) de  $F$ . Alors

$f$  est un isomorphisme  $\iff$  la matrice  $c[f]^{\mathcal{B}}$  est inversible.

De plus la matrice de la réciproque  $f^{-1}$  est l'inverse de la matrice de  $f$ .

Ce qui veut dire que l'on peut se ramener à un calcul de déterminant.

*Démonstration.* Si  $f^{-1}$  existe, on note que  $f^{-1}(f(x)) = x$  donc la matrice de  $f^{-1} \circ f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est l'identité. Ainsi

$$\text{Id} = {}_{\mathcal{B}}[f^{-1} \circ f]^{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}[f^{-1}]^{\mathcal{C}} c[f]^{\mathcal{B}}.$$

De la même manière, on montre dans l'autre sens que

$$c[f]^{\mathcal{B}} {}_{\mathcal{B}}[f^{-1}]^{\mathcal{C}} = \text{Id},$$

ce qui montre que

$${}_{\mathcal{B}}[f^{-1}]^{\mathcal{C}} = (c[f]^{\mathcal{B}})^{-1}.$$

Réciproquement, si la matrice de  $f$  est inversible, on définit

$$M = c[f]^{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad N = M^{-1},$$

et on écrit  $g$  pour l'unique application  $F \rightarrow E$  dont la matrice est

$${}_{\mathcal{B}}[g]^{\mathcal{C}} = N.$$

Les relations  $MN = NM = \text{Id}$  entraînent  $g(f(x)) = x$  et  $f(g(x)) = x$ , donc  $g = f^{-1}$ . □

Une matrice inversible se doit d'être carrée, donc citons tout de suite :

**COROLLAIRE 13.35** – Deux espaces de dimension finie  $E$  et  $F$  sont isomorphes  $\iff$  ils ont la même dimension.

*Démonstration.* Pour toute application linéaire  $f: E \rightarrow F$ , sa matrice est de dimension  $m \times n$ , avec  $n = \dim(E)$  et  $m = \dim(F)$ . S'il en existe une qui est bijective, alors sa matrice doit être carrée, donc  $n = m$ . Réciproquement si  $n = m$ , prenons n'importe quelle matrice  $A$  inversible de taille  $n \times n$  (par exemple l'identité), prenons une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et une base  $\mathcal{C}$  de  $F$ , et enfin prenons  $f$  l'unique application linéaire  $f: E \rightarrow F$  telle que

$${}_{\mathcal{C}}[f]{}^{\mathcal{B}} = A.$$

C'est un isomorphisme d'après la proposition.  $\square$

**EXEMPLE 13.36** – Prenons  $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la rotation d'angle  $\theta$  autour de l'origine. Rappelons qu'en identifiant  $\mathbb{R}^2$  avec le plan complexe  $\mathbb{C}$ , on a  $r(z) = e^{i\theta}z$ . Choisissons la base  $\mathcal{B} = 1, i$ . On a  $r(1) = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ , et  $r(i) = ie^{i\theta} = -\sin(\theta) + i\cos(\theta)$ . Par définition on a donc

$${}_{\mathcal{B}}[r]{}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est  $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1 \neq 0$ , donc elle est inversible et son inverse est

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Donc  $r$  est bijective et sa réciproque est donnée par la matrice ci-dessus dans la base  $\mathcal{B}$ . Puisque  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$  et  $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ , on peut réécrire

$$[r^{-1}] = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}.$$

On constate que la réciproque de  $r$  est la rotation d'angle  $-\theta$ , ce qui est normalement évident du point de vue géométrique.



Les conditions de surjectivité et d'injectivité se vérifient également facilement. On a d'abord :

PROPOSITION 13.37 – Une application linéaire  $f: E \rightarrow F$  est surjective  $\iff$  le rang de  $f$  vaut  $\dim(F)$ .

*Démonstration.* Tout est dans les définitions. On a  $f$  surjective  $\iff \text{Im}(f) = F \iff \dim(\text{Im}(f)) = \dim(F)$ , et bien sûr  $\dim(\text{Im}(f))$  est par définition le rang de  $f$ .  $\square$

EXEMPLE 13.38 – Une application linéaire  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ne peut pas être surjective. En effet, si  $A$  désigne la matrice de  $f$  dans les bases canoniques, alors  $f(v) = Av$  et le rang de  $f$  est le rang de la matrice  $A$ . Or le rang d'une matrice  $3 \times 2$  ne saurait être égal à 3.

Pour l'injectivité, le résultat suivant est très utile :

PROPOSITION 13.39 – Une application linéaire  $f$  est injective  $\iff$  on a  $\ker(f) = \{0\}$ .

*Démonstration.* Si  $f$  est injective, alors pour  $x \in \ker(f)$  on a  $f(x) = 0 = f(0)$  donc  $x = 0$ , et  $\ker(f) = \{0\}$ . Réciproquement, supposons que  $\ker(f) = \{0\}$ . Si  $f(x_1) = f(x_2)$ , alors  $f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) = 0$ , donc  $x_1 - x_2 \in \ker(f)$ , d'où  $x_1 = x_2$ , et  $f$  est bien injective.  $\square$

EXEMPLE 13.40 – Voici la traduction en termes de matrices. Prenons  $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  définie par  $f(v) = Av$  pour une matrice  $A$ . Alors les éléments  $v$  de  $\ker(f)$  sont les solutions du système linéaire  $Av = 0$ .

Dire que  $\ker(f) = \{0\}$ , c'est affirmer que ce système n'a que la solution nulle. On s'aperçoit alors que l'injectivité de  $f$  revient à exiger que les colonnes de  $A$  forment une famille libre.

En particulier, c'est impossible pour  $n > m$  (théorème 11.30), et il n'y a par exemple aucune application linéaire injective  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

On voit que des considérations simples sur les matrices nous permettent de faire des liens entre l'injectivité ou la surjectivité d'une application linéaire et les dimensions des espaces qui sont en jeu. En fait il y a une façon très simple et très

générale de résumer toutes ces relations, qu'il faut retenir : c'est le « théorème du rang » que nous présentons maintenant.

### Le théorème du rang

C'est le suivant :

**THÉORÈME 13.41** – Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire, et supposons que  $E$  est de dimension finie. Alors  $\text{Im}(f)$  est de dimension finie, et on a

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)).$$

*Démonstration.* Soit  $e_1, \dots, e_k$  une base de  $\ker(f)$ . Par le théorème de la base incomplète, on peut trouver  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell$  tels que la famille  $\mathcal{B} = e_1, \dots, e_k, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell$  est une base de  $E$ . Posons  $f_i = f(\varepsilon_i)$ , et montrons que la famille  $\mathcal{C} = f_1, \dots, f_\ell$  est une base de  $\text{Im}(f)$ . Comme  $\dim(E) = k + \ell$ , le théorème sera établi.

Si  $y \in \text{Im}(f)$ , par définition  $y = f(x)$  pour un certain  $x \in E$ , et on peut écrire

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \mu_1 \varepsilon_1 + \dots + \mu_\ell \varepsilon_\ell,$$

d'où

$$y = f(x) = \mu_1 f(\varepsilon_1) + \dots + \mu_\ell f(\varepsilon_\ell) = \mu_1 f_1 + \dots + \mu_\ell f_\ell.$$

(car  $f(e_i) = 0$  bien sûr). Donc  $\mathcal{C}$  est génératrice de  $\text{Im}(f)$ .

Si maintenant on a une combinaison linéaire nulle :

$$\mu_1 f_1 + \dots + \mu_\ell f_\ell = 0 = \mu_1 f(\varepsilon_1) + \dots + \mu_\ell f(\varepsilon_\ell) = f(\mu_1 \varepsilon_1 + \dots + \mu_\ell \varepsilon_\ell),$$

on en conclut que  $\mu_1 \varepsilon_1 + \dots + \mu_\ell \varepsilon_\ell \in \ker(f)$ . Nous avons une base de  $\ker(f)$  à notre disposition, écrivons donc qu'il existe des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  tels que

$$\mu_1 \varepsilon_1 + \dots + \mu_\ell \varepsilon_\ell = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k.$$

On en déduit

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k - \lambda_1 \varepsilon_1 - \dots - \mu_\ell \varepsilon_\ell = 0,$$

et comme  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , on a finalement  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \mu_1 = \dots = \mu_\ell = 0$ . En particulier, la famille  $\mathcal{C}$  est libre.  $\square$

EXEMPLE 13.42 – Pour une application  $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ , de la forme  $f(v) = Av$ , où  $A$  est une matrice, ce théorème dit une chose bien concrète en termes du système  $Av = 0$ . En effet  $\dim(E) = n$  est le nombre d'inconnues en jeu,  $\dim(\ker(f))$  est le nombre (minimal) de paramètres nécessaires pour décrire l'ensemble des solutions, et  $\dim(\text{Im}(f))$  est le rang de la matrice  $A$ . On a donc

$$\left( \begin{array}{c} \text{nombre} \\ \text{d'inconnues} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{nombre de} \\ \text{paramètres} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{rang de} \\ \text{la matrice} \end{array} \right).$$

Avec un peu d'expérience vis-à-vis des systèmes, ça n'a rien de surprenant. Il est toutefois appréciable d'avoir une formulation très précise de cette égalité – par exemple la notion de dimension d'un espace vectoriel rend précise l'idée de nombre minimal de paramètres nécessaires pour décrire les solutions.

Le théorème du rang a de nombreuses conséquences immédiates.

COROLLAIRE 13.43 – Soit  $f: E \rightarrow F$  linéaire. Alors

1. Si  $f$  est injective, on a  $\dim(E) \leq \dim(F)$ .
2. Si  $f$  est surjective, on a  $\dim(E) \geq \dim(F)$ .
3. Si  $f$  est un isomorphisme, on a  $\dim(E) = \dim(F)$ .

Nous avons observé ces phénomènes un peu plus haut, mais la démonstration est maintenant plus directe :

*Démonstration.* Si  $f$  est injective, alors  $\dim(\ker(f)) = 0$  (proposition 13.39), d'où  $\dim(E) = \dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(F)$  puisque  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace de  $F$ .

Si  $f$  est surjective, alors  $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(F) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) \leq \dim(E)$ . □

Le prochain résultat met également au clair quelque chose que nous avons observé sur des exemples :

COROLLAIRE 13.44 – Soit  $f: E \rightarrow F$  linéaire. Si deux des propriétés ci-dessous sont satisfaites, alors la troisième l'est également :

1.  $f$  est injective,

2.  $f$  est surjective,
3.  $\dim(E) = \dim(F)$ .

*Démonstration.* Dans le précédent corollaire on a vu que (1) et (2) entraînent (3). Supposons que l'on ait (1) et (3). Alors

$$\dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) = \dim(F) - 0 = \dim(F),$$

donc  $\text{Im}(f) = F$  et  $f$  est surjective. Si l'on a (2) et (3), alors

$$\dim(\ker(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f)) = \dim(F) - \dim(F) = 0,$$

donc  $\ker(f) = \{0\}$  et  $f$  est injective. □

Nous verrons de nombreuses applications dans les exercices.

### **Vieux résultats, nouvelles démonstrations**

Le théorème du rang occupe une place centrale en algèbre linéaire. À tel point que dans certains livres sur le sujet, on trouve une démonstration de ce théorème très tôt dans l'exposition, avec les autres résultats présentés comme conséquences. Ce genre d'approche est plus concis mais plus difficile à suivre pour les débutants. Il est probable qu'en deuxième année, on vous donne un résumé de l'algèbre linéaire de première année qui soit de ce genre.

Pour se faire une idée, voici de nouvelles démonstrations de résultats déjà obtenus, qui font usage du théorème du rang. Notez la concision des arguments – en contrepartie de leur côté abstrait. Il est naturel que ces démonstrations soient plus difficiles à suivre pour l'instant.

**LEMME 13.45** – Soit  $A$  et  $B$  des matrices carrées telles que  $AB = \text{Id}$ . Alors on a également  $BA = \text{Id}$ , et  $B = A^{-1}$

Nous avons vu ça en tant que lemme 5.23, et la démonstration faisait appel à la notion de matrice bien échelonnée.



*Démonstration.* La matrice  $A$  donne une application linéaire que l'on va noter  $f_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ , définie par  $f_A(v) = Av$ . De même on note  $f_P$  et  $f_Q$  pour les applications linéaires correspondant à  $P$  et  $Q$ .

Montrons le (1). Le rang de  $A$  est  $\dim(\text{Im}(f_A)) = \dim(f_A(\mathbb{K}^n))$ , et de même le rang de  $AP$  est  $\dim(f_A(f_P(\mathbb{K}^n)))$ . Puisque  $f_P$  est un isomorphisme, elle est surjective, et donc  $f_P(\mathbb{K}^n) = \mathbb{K}^n$ . D'où le (1).

Pour le (2), on note que le rang de  $QA$  est  $\dim(f_Q(f_A(\mathbb{K}^n)))$ . L'application  $g: f_A(\mathbb{K}^n) \rightarrow f_Q(f_A(\mathbb{K}^n))$  donnée par  $g(v) = f_Q(v)$  est surjective par définition, et injective parce que  $f_Q$  est elle-même injective (comme application définie sur  $\mathbb{K}^m$  tout entier). Donc  $g$  est un isomorphisme et on en conclut que  $\dim(f_A(\mathbb{K}^n)) = \dim(f_Q(f_A(\mathbb{K}^n)))$ . D'où le (2).

Pour le (3), si  $QAP = I_r$  alors  $\text{rang}(A) = \text{rang}(QAP) = \text{rang}(I_r)$  d'après les points (1) et (2), et bien sûr  $\text{rang}(I_r) = r$ . Réciproquement, supposons que le rang de  $A$  est  $r$ . Comme dans la démonstration du théorème du rang, prenons  $e_1, \dots, e_k$  une base de  $\ker(f_A)$ , que l'on complète en une base de  $\mathbb{K}^n$  avec des vecteurs  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ ; on a vu que l'on obtient une base de  $\text{Im}(f_A)$  en prenant  $f_1, \dots, f_r$  où  $f_i = f(\varepsilon_i)$ . Enfin, complétons  $f_1, \dots, f_r$  en une base de  $\mathbb{K}^m$  en ajoutant des vecteurs  $f_{r+1}, \dots, f_m$ . Si  $\mathcal{B} = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, e_1, \dots, e_k$  et  $\mathcal{C} = f_1, \dots, f_m$ , alors par définition

$$c[f_A]^{\mathcal{B}} = I_r.$$

Mais alors  $c[f_A]^{\mathcal{B}} = QAP$  où  $Q$  et  $P$  sont des matrices de passages bien choisies (et en particulier inversibles). Ceci donne le (3).

Le (4) est maintenant évident. En effet si  $A$  est de rang  $r$ , on a  $QAP = I_r^{m \times n}$  d'où  ${}^t P {}^t A {}^t Q = {}^t I_r^{m \times n} = I_r^{n \times m}$ . D'après le (3) appliqué à  ${}^t A$ , on en déduit que  ${}^t A$  est de rang  $r$  également.  $\square$

# Chapitre 14

## Intégrale de Riemann

– Première lecture –

### Introduction

Le problème de départ que nous nous proposons de résoudre dans ce chapitre est le suivant. Étant donnée une fonction  $f$ , existe-t-il une fonction  $F$  telle que

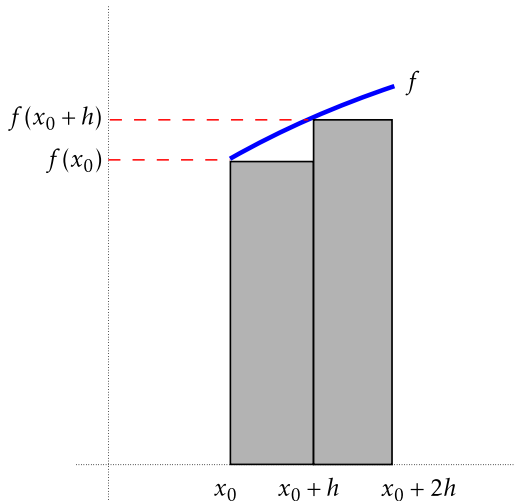
$$F' = f \quad ? \quad (*)$$

L'équation (\*) est le premier exemple *d'équation différentielle* que nous rencontrons. Il s'agit d'une équation dans laquelle « l'inconnue » est une fonction, ici  $F$ , et la condition sur  $F$  fait intervenir sa dérivée. Nous verrons que résoudre (\*) est une première étape importante pour résoudre des équations différentielles plus compliquées. Notons qu'une solution de (\*) est appelée une *primitive* de  $f$ .

Il est facile d'étudier l'unicité des solutions, s'il y en a. En effet, supposons que  $f$  soit définie sur un *intervalle*  $I$ , et que nous cherchions  $F$  sur  $I$ . En présence de deux primitives  $F$  et  $G$ , on observe que  $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$ . La fonction  $F - G$  est alors constante : deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante, c'est-à-dire que  $G(x) = F(x) + c$  pour  $x \in I$ .

Le point délicat est de montrer que, sous certaines conditions, il existe au moins une primitive. On aimerait également pouvoir calculer explicitement les valeurs prises par  $F$ . Dans ce chapitre nous allons démontrer qu'une primitive existe lorsque la fonction  $f$  est continue.

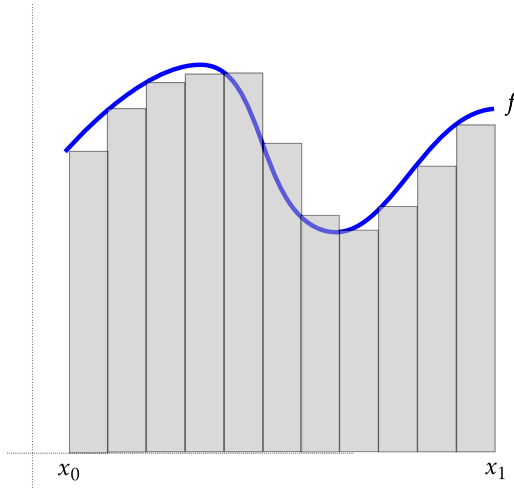
La stratégie est la suivante. Supposons que  $F' = f$ , que  $F(x_0) = 0$ , et examinons la condition  $F'(x_0) = f(x_0)$ . Si l'on s'écarte un peu de  $x_0$  pour atteindre le point  $x_0 + h$  avec  $h$  « petit », alors  $F(x_0 + h)$  est proche de  $F(x_0) + F'(x_0)h = f(x_0)h$  (on remplace la fonction par son développement limité à l'ordre 1). L'idée est d'interpréter la quantité  $F(x_0 + h) \simeq f(x_0)h$  comme l'aire du rectangle de hauteur  $f(x_0)$  et de largeur  $h$ . De même la différence  $F(x_0 + 2h) - F(x_0 + h)$  devrait être proche de  $F'(x_0 + h)h = f(x_0 + h)h$ , qui est l'aire du rectangle de hauteur  $f(x_0 + h)$  et de largeur  $h$ . Au total  $F(x_0 + 2h) = (F(x_0 + 2h) - F(x_0 + h)) + F(x_0 + h)$  est proche de la somme des aires des deux rectangles considérés sur le dessin ci-dessous.



De même pour tout entier  $k$ , la valeur  $F(x_0 + kh)$  est proche de la somme des aires de  $k$  rectangles. Pour trouver une approximation de  $F(x_1)$  pour  $x_1 > x_0$ , on peut découper l'intervalle  $[x_0, x_1]$  en morceaux de largeur  $h$ , et calculer l'aire des



rectangles obtenus. Lorsque  $h$  devient de plus en plus petit, intuitivement, on obtient l'aire de la zone située entre le graphe de  $f$  et l'axe des abscisses, et entre les droites verticales d'équations  $x = x_0$  et  $x = x_1$ .



Cette analyse étant faite, pour *définir* la fonction  $F$ , il reste à définir rigoureusement ce qu'on entend par « aire ». C'est ce que nous allons faire, et nous l'appellerons *l'intégrale* de  $f$ , entre deux bornes données (sur le dessin,  $x_0$  et  $x_1$ ). Nous pourrions alors poser  $F(x) =$  l'intégrale de  $f$  entre  $x_0$  et  $x$ , et nous montrerons (assez facilement) que ce procédé donne bien une primitive de  $f$ .

Nous obtenons au passage une application intéressante, qui est celle que vous avez étudiée en Terminale : dans de nombreux cas, c'est le calcul de l'aire qui nous intéresse, alors que l'on peut trouver une primitive directement. La relation entre « aire » et « primitive » est utile dans les deux sens.

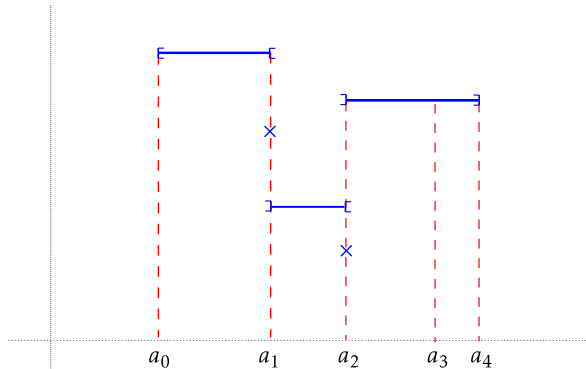
### Fonctions intégrables au sens de Riemann

On fixe un intervalle compact  $[a; b]$ . Les premières fonctions pour lesquelles on peut définir facilement ce qu'est « l'aire sous la courbe » sont les fonctions « en escaliers » :

DÉFINITION 14.1 – Une fonction  $\phi$  sur  $[a, b]$  est dite *en escaliers* lorsqu'il existe des nombres  $a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$  tels que  $\phi$  est constante sur chaque intervalle ouvert  $]a_i, a_{i+1}[$ .

La famille  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  est appelée une *subdivision* (*adaptée à  $\phi$* ). ■

Voici un exemple de fonction en escaliers.



Notez que la valeur de  $\phi$  en  $a_i$  peut être quelconque, indépendamment des valeurs prises sur  $]a_{i-1}, a_i[$  et  $]a_i, a_{i+1}[$ . Sur cet exemple on voit bien que la subdivision  $a = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$  n'est pas unique : en effet  $\phi$  est en réalité constante sur  $]a_2, a_4[$ , et on aurait pu prendre la subdivision  $a' = (a_0, a_1, a_2, a_4)$ .

On peut alors poser la définition suivante :

DÉFINITION 14.2 – Soit  $\phi$  en escaliers, et  $a = (a_0, \dots, a_n)$  une subdivision adaptée. Soit  $\alpha_i$  la valeur de  $\phi$  sur  $]a_i, a_{i+1}[$ . On pose :

$$I(\phi, a) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \alpha_i.$$

■

Ce nombre est bien « l'aire » des rectangles définis par  $\phi$  (avec cependant la possibilité que  $\alpha_i$  soit négatif). Géométriquement on s'attend donc à ce que  $I(\phi)$  ne dépende pas du choix de la subdivision. C'est le cas :

LEMME 14.3 – Le nombre  $I(\phi, a)$  ne dépend que de  $\phi$  et pas du choix de la subdivision  $a$ .

On va donc pouvoir utiliser la notation  $I(\phi)$ .

*Démonstration.* Étudions un premier cas simple : si  $a'$  est obtenue à partir de  $a$  en retirant un point  $a_i$ , comme dans l'exemple ci-dessus, nous allons montrer que  $I(\phi, a') = I(\phi, a)$ . En effet, la fonction  $\phi$  est alors constante sur  $]a_{i-1}, a_{i+1}[$  de sorte que dans la somme définissant  $I(\phi, a)$ , on a deux termes que se simplifient :

$$(a_{i+1} - a_i)\alpha_i + (a_i - a_{i-1})\alpha_{i-1} = (a_{i+1} - a_{i-1})\alpha_{i-1},$$

puisque  $\alpha_{i-1} = \alpha_i$ . L'égalité  $I(\phi, a') = I(\phi, a)$  est alors claire.

En répétant l'opération, on constate que si  $a'$  est obtenue à partir de  $a$  en retirant plusieurs points, alors on a  $I(\phi, a') = I(\phi, a)$  là encore.

Finalement, soient  $a$  et  $a'$  deux subdivisions quelconques (adaptées à  $\phi$ ). On définit une nouvelle subdivision  $a''$  en prenant *tous* les points de  $a$  et de  $a'$ , et en les rangeant dans l'ordre. Alors  $a''$  est obtenue à partir de  $a$  en retirant les points de  $a'$ , donc  $I(\phi, a'') = I(\phi, a)$ ; et  $a''$  est obtenue à partir de  $a'$  en retirant les points de  $a$ , donc  $I(\phi, a'') = I(\phi, a')$ . Finalement  $I(\phi, a) = I(\phi, a')$ .  $\square$

Lorsque  $\phi$  et  $\psi$  sont deux fonctions (quelconques) sur  $[a; b]$  telles que  $\phi(x) \leq \psi(x)$  pour chaque  $x \in [a; b]$ , on écrira simplement  $\phi \leq \psi$ . La propriété suivante est très utile :

LEMME 14.4 – Si  $\phi$  et  $\psi$  sont en escaliers, et si  $\phi \leq \psi$ , alors  $I(\phi) \leq I(\psi)$ .

*Démonstration.* Soit  $a_0 < a_1 < \dots < a_n$  une subdivision telle que  $\phi$ , resp  $\psi$ , est constante de valeur  $\alpha_i$ , resp  $\alpha'_i$ , sur  $]a_i; a_{i+1}[$ . Grâce au lemme précédent, on peut utiliser cette subdivision (qui n'est pas forcément minimale) pour calculer les  $I$ . Par hypothèse on a  $\alpha_i \leq \alpha'_i$ , donc

$$I(\phi) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\alpha_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\alpha'_i = I(\psi),$$

comme annoncé. □

Il est bon de noter qu'on ne change pas  $I(\phi)$  si on change la fonction  $\phi$  en un nombre fini de points. De même, si  $\phi(x) \leq \psi(x)$  pour tous les  $x$  dans  $[a; b]$  sauf pour un nombre fini de valeurs  $x = x_1, \dots, x = x_k$ , alors on peut quand même conclure que  $I(\phi) \leq I(\psi)$ . Dans ce qui suit, on va utiliser ce genre de simplifications de manière implicite.

Nous arrivons à la définition de l'intégrale de Riemann. Soit  $f$  une fonction quelconque, bornée, sur  $[a; b]$ . On définit

$$I^+(f) = \inf \{I(\psi) \mid \psi \text{ en escalier telle que } \psi \geq f\}$$

et

$$I^-(f) = \sup \{I(\phi) \mid \phi \text{ en escalier telle que } \phi \leq f\}.$$

D'après le lemme précédent, la relation  $\phi \leq f \leq \psi$  donne  $I(\phi) \leq I(\psi)$ , et par suite  $I^-(f) \leq I^+(f)$ .

**DÉFINITION 14.5** – Lorsque  $I^-(f) = I^+(f)$ , on dit que  $f$  est *intégrable au sens de Riemann*, et on note

$$\int_a^b f$$

la valeur de  $I^\pm(f)$ , que l'on appelle *intégrale de  $f$  sur  $[a; b]$* . On note aussi parfois

$$\int_a^b f(t) dt.$$

Ici la variable  $t$  est muette, et peut être remplacée par n'importe quelle lettre, souvent  $x$  ou  $y$  ou  $u$ ... ■

Noter que la définition contient un sup, et un inf. Ceci est possible car les sup et les inf existent dans  $\mathbb{R}$ , comme nous l'avons vu. La théorie des intégrales atteste, à nouveau, de l'importance de cette propriété des nombres réels.

**LEMME 14.6** – Lorsque  $f$  est en escaliers, on a

$$\int_a^b f = I(f).$$

*Démonstration.* On peut prendre  $\phi = f$ , et  $\phi \leq f$  donne  $\Gamma^-(f) \geq I(\phi) = I(f)$ . De même, en prenant  $\psi = f$  on obtient  $I^+(f) \leq I(\psi)$ . Ainsi, on a  $\Gamma^-(f) \geq I^+(f)$ , d'où  $\Gamma^-(f) = I^+(f) = I(f)$ .  $\square$

### Premiers exemples de fonctions intégrables

Notre premier objectif est de trouver d'autres exemples de fonctions intégrables, en dehors des fonctions en escaliers. La définition ci-dessus est très concise, et montre de manière explicite l'utilisation de sup et de inf, mais pour montrer concrètement qu'une fonction donnée est intégrable on va utiliser le critère simple suivant.

**LEMME 14.7** – Soit  $f$  une fonction sur  $[a; b]$ . Alors  $f$  est intégrable  $\iff$  il existe deux suites  $(\phi_n)_{n \geq 0}$  et  $(\psi_n)_{n \geq 0}$  de fonctions en escaliers telles que  $\phi_n \leq f \leq \psi_n$ , et telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n - \int_a^b \phi_n = 0.$$

On a alors

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n.$$

*Démonstration.* Commençons par  $\Leftarrow$ . De  $\phi_n \leq f$  on tire  $\Gamma^-(f) \geq \int_a^b \phi_n$  par définition ; de même  $I^+(f) \leq \int_a^b \psi_n$ . On tire

$$0 \leq I^+(f) - \Gamma^-(f) \leq \int_a^b \psi_n - \int_a^b \phi_n.$$

En passant à la limite sur  $n$ , on obtient bien  $I^+(f) = \Gamma^-(f)$ , c'est-à-dire que  $f$  est intégrable.

Maintenant regardons  $\Rightarrow$ . Soit  $n$  un entier  $\geq 1$ . Comme  $\Gamma^-(f) - \frac{1}{n} < \Gamma^-(f)$ , on sait par définition du sup (= le plus petit des majorants d'un ensemble) qu'il existe une fonction en escaliers  $\phi_n$  telle que  $\phi_n \leq f$  et telle que  $I(\phi_n) \geq \Gamma^-(f) - \frac{1}{n}$ . De la même manière, il existe  $\psi_n$  en escaliers telle que  $\psi_n \geq f$  et

telle que  $I(\psi_n) \leq I^+(f) + \frac{1}{n}$ . Si  $f$  est intégrable on a  $I^+(f) = I^-(f)$  et donc

$$0 \leq \int_a^b \psi_n - \int_a^b \phi_n \leq \left( I^+(f) + \frac{1}{n} \right) - \left( I^-(f) - \frac{1}{n} \right) = \frac{2}{n}$$

(la première inégalité provient du lemme 14.4). En passant à la limite, on obtient le résultat.

Pour finir, de l'inégalité  $\phi_n \leq f \leq \psi_n$ , on tire

$$\int_a^b \phi_n \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \psi_n$$

par définition même de l'intégrale. En écrivant ceci sous la forme

$$0 \leq \int_a^b f - \int_a^b \phi_n \leq \int_a^b \psi_n - \int_a^b \phi_n$$

et en faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient bien la formule souhaitée.  $\square$

Par exemple on peut utiliser ce résultat pour montrer :

**PROPOSITION 14.8** – Soit  $f$  une fonction monotone sur  $[a; b]$ . Alors  $f$  est intégrable.

*Démonstration.* On va faire la preuve dans le cas où  $f$  est croissante. Le cas où elle est décroissante est similaire.

Soit  $n$  un entier  $\geq 1$ . On va découper  $[a; b]$  en  $n$  morceaux en posant  $a_i = a + i \left( \frac{b-a}{n} \right)$ , pour  $0 \leq i \leq n$ . On définit maintenant deux fonctions en escaliers  $\phi_n$ , resp.  $\psi_n$ , qui sont constantes sur chaque intervalle  $]a_i : a_{i+1}[$  de valeur  $f(a_i)$ , resp.  $f(a_{i+1})$ . Par croissance de  $f$ , on a  $\phi_n \leq f \leq \psi_n$ . Calculons maintenant  $\int_a^b \phi_n = I(\phi_n)$  directement avec la formule définissant  $I$  : comme  $a_{i+1} - a_i = \frac{1}{n}$ , on obtient

$$\int_a^b \phi_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i).$$

De même

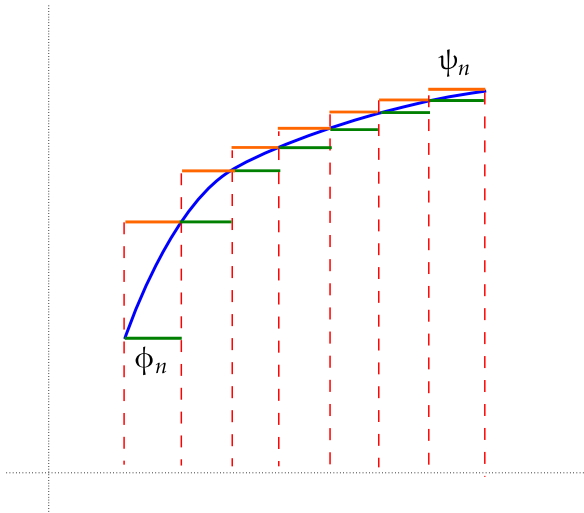
$$\int_a^b \psi_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}).$$

On tire

$$\int_a^b \psi_n - \int_a^b \phi_n = \frac{f(b) - f(a)}{n}.$$

On fait ensuite tendre  $n$  vers l'infini, et les conditions du lemme 14.7 sont réunies. Donc  $f$  est intégrable.  $\square$

Cette démonstration est illustrée sur le dessin suivant.



EXEMPLE 14.9 – Prenons  $f(t) = t$  sur  $[0, 1]$ . Elle est croissante, donc intégrable, et on peut même calculer son intégrale grâce au procédé décrit dans la démonstration. En effet dans ce cas on a  $\phi_n(t) = \frac{i}{n}$  sur l'intervalle  $]\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[$ . Par suite

$$I(\phi_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \times \left( \frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i.$$

Or comme vous le savez on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ceci donne

$$I(\phi_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n},$$

et

$$\int_0^1 t \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} I(\phi_n) = \frac{1}{2}.$$

EXEMPLE 14.10 – Prenons maintenant  $f(t) = e^t$  sur  $[0, 1]$ . Là encore  $f$  est croissante donc intégrable, et cette fois on a (toujours avec les notations de la démonstration)  $\phi_n(t) = e^{\frac{i}{n}}$  sur  $]\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[$ . Ici

$$I(\phi_n) = \sum_{i=0}^{n-1} e^{\frac{i}{n}} \times \left( \frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{\frac{i}{n}}.$$

Si on pose  $\alpha = e^{\frac{1}{n}}$ , on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left( e^{\frac{1}{n}} \right)^i = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1} = \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} = \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}}.$$

Utilisons le développement limité  $e^u = 1 + u + o(u)$ . On en tire  $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ , d'où

$$I(\phi_n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - e}{-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1 - e}{-1 + o(1)}.$$

En passant à la limite, on obtient

$$\int_0^1 e^t \, dt = e - 1.$$

On a donc déjà un grand nombre d'exemples de fonctions qui sont intégrables, comme l'exponentielle, le logarithme, etc. Noter que l'on ne suppose même pas que  $f$  est continue dans la proposition.



Pour ce qui est des autres fonctions « usuelles », comme le sinus et le cosinus par exemple, on peut remarquer que sur un intervalle compact  $[a; b]$ , même si elles ne sont pas forcément monotones, on peut découper  $[a; b]$  en un nombre *fini* de sous-intervalles sur lesquels ces fonctions sont monotones. Les propriétés élémentaires des intégrales, que nous allons voir tout de suite, vont alors montrer que ces fonctions sont également intégrables.

### Propriétés élémentaires

Commençons par la « relation de Chasles » :

PROPOSITION 14.11 – Soit  $f$  une fonction sur  $[a; b]$ , et soit  $x \in [a; b]$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $[a; b] \iff f$  est intégrable sur  $[a; x]$  et sur  $[x; b]$ .

De plus, on a la relation dite de Chasles :

$$\int_a^b f = \int_a^x f + \int_x^b f.$$

Le schéma de la démonstration est à retenir : on va le réutiliser constamment.

*Démonstration.* On commence par traiter le cas où  $f$  est en escaliers. Alors  $f$  est intégrable partout, donc il y a seulement la relation de Chasles à montrer. En utilisant la formule pour  $I$ , on s'aperçoit que le résultat est évident.

On passe au cas général. Montrons  $\implies$ . On suppose que  $f$  est intégrable sur  $[a; b]$ , et on prend  $\phi_n$  et  $\psi_n$  comme dans le lemme 14.7. La relation  $\phi_n \leq f \leq \psi_n$  étant valable sur  $[a; b]$ , elle est aussi valable sur  $[a; x]$  et  $[x; b]$ . De plus, comme  $\phi_n$  et  $\psi_n$  sont en escaliers et que l'on a une relation de Chasles dans ce cas, on a :

$$\int_a^b \psi_n - \int_a^b \phi_n = \left( \int_a^x \psi_n - \int_a^x \phi_n \right) + \left( \int_x^b \psi_n - \int_x^b \phi_n \right).$$

Les termes entre parenthèses sont  $\geq 0$  car  $\phi_n \leq \psi_n$  et on a le lemme 14.4.

En particulier on a

$$0 \leq \int_a^x \psi_n - \int_a^x \phi_n \leq \int_a^b \psi_n - \int_a^b \phi_n$$

et en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x \psi_n - \int_a^x \phi_n = 0.$$

Donc le lemme 14.7 (dans le sens  $\Leftarrow$  !) nous dit que  $f$  est intégrable sur  $[a; x]$ . De même entre  $x$  et  $b$ .

Montrons maintenant  $\Leftarrow$ . Notons  $f_1$  la restriction de  $f$  à  $[a; x]$ . On suppose  $f_1$  intégrable, donc on peut choisir des suites  $\phi_{n,1}$  et  $\psi_{n,1}$  comme dans le lemme 14.7. De même, on définit  $f_2$ ,  $\phi_{n,2}$  et  $\psi_{n,2}$  sur  $[x; b]$ . On recolle les morceaux, en définissant  $\phi_n$  sur  $[a; b]$  par  $\phi_n(t) = \phi_{n,1}(t)$  si  $t \in [a; x]$ , et  $\phi_n(t) = \phi_{n,2}(t)$  si  $t \in ]x; b]$ ; de même on définit  $\psi_n$ .

On veut utiliser encore le lemme 14.7 pour conclure. Vérifions les hypothèses :  $\phi_n$  et  $\psi_n$  sont en escaliers ; on a bien  $\phi_n \leq f \leq \psi_n$ , car on peut vérifier ceci séparément sur  $[a; x]$  et sur  $[x; b]$  et on a supposé que  $\phi_{n,i} \leq f \leq \psi_{n,i}$  pour  $i = 1$  ou  $2$  ; enfin, la relation de Chasles pour les fonctions en escaliers donne encore :

$$\int_a^b \psi_n - \int_a^b \phi_n = \left( \int_a^x \psi_n - \int_a^x \phi_n \right) + \left( \int_x^b \psi_n - \int_x^b \phi_n \right).$$

Le terme dans la première parenthèse est en fait

$$\int_a^x \psi_{n,1} - \int_a^x \phi_{n,1}$$

puisque par construction,  $\phi_n = \phi_{n,1}$  sur  $[a; x]$  ; de même le terme dans la deuxième parenthèse peut s'écrire avec  $\psi_{n,2}$  et  $\phi_{n,2}$ . Donc les termes entre parenthèses tendent vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , en on a finalement réuni toutes les hypothèses du lemme 14.7, qui nous dit que  $f$  est intégrable sur  $[a; b]$ .

De plus, on sait aussi que

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \phi_n, \text{ que } \int_a^x f = \int_a^x f_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x \phi_{n,1}$$

et que

$$\int_x^b f = \int_x^b f_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_x^b \phi_{n,2}.$$

En écrivant la relation de Chasles pour  $\phi_n$  (qui est en escaliers) et en passant à la limite, on obtient la relation de Chasles pour  $f$  quelconque.  $\square$

EXEMPLE 14.12 – Supposons que  $f$  soit une fonctions sur  $[a; b]$ , et qu'il existe une subdivision  $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$  telle que  $f$  est monotone sur  $[a_i; a_{i+1}]$  (par exemple les fonctions sinus et cosinus ont cette propriété sur n'importe quel intervalle compact). Alors d'après la proposition 14.8,  $f$  est intégrable sur  $[a_i; a_{i+1}]$ . En utilisant la proposition 14.11 (plusieurs fois!), on obtient que  $f$  est intégrable sur  $[a; b]$ .

On a donc montré que toutes les fonctions dites « usuelles » sont intégrables. Par contre nous n'avons encore rien dit sur la façon de calculer les intégrales, bien sûr.

Toutes les autres propriétés élémentaires de l'intégrale se démontrent de la même manière. On a principalement :

PROPOSITION 14.13 – *Propriétés de l'intégrale :*

1. (Linéarité) Si  $f$  et  $g$  sont intégrables, et si  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , alors  $\lambda f + \mu g$  est intégrable et on a :

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

En d'autres termes, l'ensemble  $E$  des fonctions intégrables est un espace vectoriel, et l'intégrale est une application linéaire  $E \rightarrow \mathbb{R}$ .

2. (Croissance) Si  $f$  et  $g$  sont intégrables, et si  $f \leq g$ , alors

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Esquisse. Le principe est le même que pour la proposition précédente : on vérifie les propriétés pour les fonctions en escaliers d'abord (par exemple le point 2 est donné dans ce cas par

le lemme 14.4), et on utilise le lemme 14.7 pour montrer par passage à la limite que les propriétés sont en fait vérifiées pour des fonctions quelconques.  $\square$

Sur le même modèle, nous allons conclure en établissant la très utile « inégalité triangulaire » pour les intégrales. Nous aurons besoin des définitions suivantes : si  $f$  est une fonction quelconque, on pose

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie que l'on a  $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$  et aussi  $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ . Aussi, on note que si  $f \leq g$ , alors  $f^+ \leq g^+$  et  $g^- \leq f^-$ .

PROPOSITION 14.14 – Si  $f$  est intégrable sur  $[a; b]$ , alors  $|f|$  est également intégrable et on a l'inégalité dite triangulaire

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

*Démonstration.* On commence par montrer que  $f^+$  est intégrable. Puisque  $f$  est intégrable, on peut trouver  $\phi_n$  et  $\psi_n$  comme dans le lemme 14.7. Les fonctions  $\phi_n^+$  et  $\psi_n^+$  sont en escaliers, et on a  $\phi_n^+ \leq f^+ \leq \psi_n^+$ . On vérifie (exercice) que  $\psi_n^+ - \phi_n^+ \leq \psi_n - \phi_n$ . Donc finalement

$$0 \leq \int_a^b \psi_n^+ - \int_a^b \phi_n^+ \leq \int_a^b \psi_n - \int_a^b \phi_n.$$

(On a utilisé la linéarité de l'intégrale.) En passant à la limite, on voit que l'on peut appliquer le lemme 14.7 dans le sens  $\Leftarrow$ , et on conclut que  $f^+$  est intégrable.

De même, on montre que  $f^-$  est intégrable. Donc  $|f| = f^+ + f^-$  est intégrable, comme somme de fonctions intégrables.

Enfin, de  $f \leq |f|$  on tire

$$\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

par croissance de l'intégrale. De même de  $-f \leq |f|$  on tire

$$-\int_a^b f \leq \int_a^b |f|.$$

On a bien prouvé l'inégalité triangulaire. □

### Intégrales et fonctions continues

Nous allons maintenant montrer le résultat théorique principal du chapitre, à savoir l'intégrabilité des fonctions continues.

**THÉORÈME 14.15** – Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ . Alors  $f$  est intégrable.

*Démonstration.* On commence comme dans la proposition 14.8. Soit  $n$  un entier  $\geq 1$ . On va découper  $[a; b]$  en  $n$  morceaux en posant  $a_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)$ , pour  $0 \leq i \leq n$ . On définit maintenant deux fonctions en escaliers  $\phi_n$ , resp.  $\psi_n$ , qui sont constantes sur chaque intervalle  $]a_i; a_{i+1}[$  de valeur  $\alpha_i$ , resp  $\beta_i$ , avec

$$\alpha_i = \min\{f(t) \mid t \in [a_i; a_{i+1}]\}$$

et

$$\beta_i = \max\{f(t) \mid t \in [a_i; a_{i+1}]\}.$$

(Ceci a un sens d'après le corollaire 8.4, qui garantit que  $\beta_i \neq +\infty$  par exemple.) Ainsi  $\phi_n \leq f \leq \psi_n$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f$  est uniformément continue (d'après le théorème de Heine 8.11), il existe  $\delta > 0$  tel que, si  $x$  et  $y$  sont dans  $[a; b]$  et vérifient  $|x - y| < \delta$ , alors  $f(x) - f(y) < \varepsilon$ . Mais pour  $n$  suffisamment grand, on a  $\frac{1}{n} < \delta$ ; fixons un tel  $n$ . Comme  $a_{i+1} - a_i = \frac{1}{n}$ , on voit que si  $x$  et  $y$  sont pris tous les deux dans  $]a_i; a_{i+1}[$ , alors  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ . On en conclut que  $\beta_i - \alpha_i \leq \varepsilon$  pour chaque  $i$ .

Si on calcule maintenant  $\int_a^b (\psi_n - \phi_n)$  directement avec la formule pour I, on obtient :

$$\int_a^b (\psi_n - \phi_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)(\beta_i - \alpha_i) \leq \frac{\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon}{n} + \dots + \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a  $0 \leq \int_a^b (\psi_n - \phi_n) \leq \varepsilon$  dès que  $n$  est suffisamment grand ; c'est dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\psi_n - \phi_n) = 0.$$

Le lemme 14.7 nous dit alors que  $f$  est intégrable. □

On s'aperçoit *a posteriori* qu'on aurait pu considérer d'autres fonctions en escaliers dans cette démonstration, et obtenir la même limite. Pour être précis, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 14.16 – Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ . Pour chaque entier  $n \geq 1$ , on pose  $a_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)$  pour  $0 \leq i \leq n$ , et on choisit  $x_{i,n} \in [a_i; a_{i+1}]$ . Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i,n}) = \int_a^b f(t) dt.$$

*Démonstration.* On reprend alors les notations de la démonstration du théorème 14.15.

Soit alors  $\theta_n$  la fonction en escaliers, constante sur  $]a_i; a_{i+1}[$ , de valeur  $f(x_{i,n})$ . La formule pour  $I$  montre que  $I(\theta_n)$  est bien la somme dont on cherche la limite.

Par définition, on a alors  $\phi_n \leq \theta_n \leq \psi_n$ , et donc

$$I(\phi_n) \leq I(\theta_n) \leq I(\psi_n).$$

Les termes de gauche et de droite de cette inégalité tendent vers  $\int_a^b f$  comme on l'a observé, et donc le terme du milieu converge vers la même limite. □

Les sommes de cette forme sont appelées « sommes de Riemann ». Comme on vient de le voir dans la démonstration, elles expriment l'intégrale de certaines fonctions en escaliers qui s'approchent de  $f$ , et la proposition affirme qu'à la limite on obtient l'intégrale de  $f$ . Il est clair qu'on aurait pu trouver des fonctions en escaliers plus générales pour lesquelles le résultat est encore vrai (notamment avec des subdivisions de l'intervalle  $[a, b]$  plus compliquées) et c'est parfois sous cette forme

que l'on énonce un résultat sur les sommes de Riemann dans certains livres. D'une manière générale, lorsqu'on étudie certaines sommes, il faut garder en tête l'idée d'utiliser des fonctions en escaliers et des intégrales.

En pratique ceci dit, même la version ci-dessus est trop générale. Dans presque tous les cas que l'on rencontre, le choix est  $x_{i,n} = a_i$ ; et très souvent, on a même  $a = 0$  et  $b = 1$ . Ainsi, il est bon de mémoriser la formule suivante : lorsque  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt.$$

EXEMPLE 14.17 – Soit

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{i^2 + n^2}.$$

La suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  a-t-elle une limite? Si on pense à utiliser une somme de Riemann, il faut trouver une bonne fonction  $f$ . Commençons par faire apparaître le  $\frac{1}{n}$ , puis mettons la quantité  $\frac{i}{n}$  en évidence :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n^2}{i^2 + n^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}}.$$

On a donc bien envie d'introduire la fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ , puisqu'alors :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

Donc  $S_n$  est une somme de Riemann, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}.$$

Reste à calculer cette intégrale! Nous allons maintenant voir comment.

**La fonction**  $x \mapsto \int_a^x f$

Il existe une hiérarchie des fonctions sur  $[a; b]$  :

$$f \text{ dérivable} \implies f \text{ continue} \implies f \text{ intégrable.}$$

On a déjà vu la première implication ; la deuxième est le contenu du théorème 14.15. On va maintenant montrer qu'en intégrant une fonction, on remonte dans la hiérarchie.

Soit donc  $f$  intégrable sur  $[a; b]$ . On note

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

D'après la proposition 14.11,  $F$  est bien définie.

**PROPOSITION 14.18** – *Pour toute fonction  $f$  intégrable, la fonction  $F$  est continue.*

*Démonstration.* Soit donc  $x_0 \in [a; b]$ . D'après la relation de Chasles, on a :

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

La fonction  $f$  est bornée par hypothèse : écrivons  $|f(t)| \leq M$  pour  $t \in [a; b]$ . Utilisons maintenant l'inégalité triangulaire :

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \int_{x_0}^x |f(t)| dt \leq \int_{x_0}^x M dt = M(x - x_0).$$

(On a supposé  $x \geq x_0$ , le cas  $x \leq x_0$  est similaire.) Ceci montre que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) - F(x_0) = 0,$$

c'est-à-dire que  $F$  est continue en  $x_0$ . □

Dans le même genre, on a le résultat annoncé depuis l'introduction de ce chapitre :

**PROPOSITION 14.19** – *Si  $f$  est continue,  $F$  est dérivable. De plus, on a  $F' = f$ .*



*Démonstration.* Soit  $x_0 \in [a; b]$ . En utilisant la relation

$$\int_{x_0}^x f(x_0) dt = f(x_0)(x - x_0)$$

et la relation de Chasles, on peut écrire :

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f$  est continue en  $x_0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $|x - x_0| < \delta$  entraîne  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Fixons un tel  $x$ , et pour simplifier disons  $x > x_0$ . Si maintenant  $t \in [x_0; x]$ , on a aussi  $|t - x_0| < \delta$  et donc  $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &\leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \\ &\leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \varepsilon dt \\ &\leq \frac{\varepsilon(x - x_0)}{x - x_0} = \varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = 0.$$

Donc  $F$  est dérivable en  $x_0$ , et  $F'(x_0) = f(x_0)$ . □

On a donc bien démontré, comme annoncé dans l'introduction, que toute fonction continue  $f$  admet une primitive, ici notée  $F$ . Notons que le point délicat était vraiment de montrer que  $f$  est intégrable : le reste de la preuve ci-dessus n'utilise que des propriétés élémentaires de l'intégrale.

La proposition a une conséquence que l'on appelle, en toute simplicité, le « théorème fondamental de l'analyse » :

**THÉORÈME 14.20** – *Si  $f$  est une fonction continument dérivable sur  $[a; b]$ , alors*

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

*Démonstration.* C'est une reformulation de la proposition précédente. Dire que  $f$  est continument dérivable signifie que  $f'$  est continue, on peut donc appliquer la proposition 14.19 avec  $f'$  à la place de  $f$ . On en déduit que l'application définie par

$$g(x) = \int_a^x f'(t) dt$$

est dérivable de dérivée  $f'$ . Donc  $g$  a la même dérivée que  $f$ , et ceci entraîne  $f(x) = g(x) + c$  pour une constante  $c$ . En évaluant en  $a$ , on obtient  $f(a) = g(a) + c = c$ , d'où  $f(x) = g(x) + f(a)$ . En  $x = b$ , on obtient  $f(b) - f(a) = g(b)$ , ce qu'on voulait.  $\square$

EXEMPLE 14.21 – Revenons à l'intégrale rencontrée à la fin de l'exemple 14.17 :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = ?$$

Pour utiliser le théorème 14.20, il nous faut trouver une fonction  $f$  telle que

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Passant en revue les dérivées des fonctions que l'on connaît, on constate que l'on peut prendre

$$f(t) = \arctan(t)$$

(et les autres primitives sur  $[0, 1]$  sont donc de la forme  $t \mapsto \arctan(t) + c$ ). Donc

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

En particulier, grâce à l'exemple 14.17, on a une formule pour calculer  $\pi$  :

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{i^2 + n^2}.$$

La convergence est très lente. Il faut attendre  $n = 119$  pour avoir 3 chiffres corrects (3,149984...) et pour  $n = 100000$  on obtient 3,141602..., donc seulement 4 chiffres corrects.

EXEMPLE 14.22 – On peut retrouver les résultats des exemples 14.9 et 14.10 très facilement. En effet la fonction  $t \mapsto t$  admet pour primitive  $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ , d'où

$$\int_0^1 t \, dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Ici on a utilisé la notation avec les crochets qui vous est familière depuis la Terminale, à savoir

$$[f(t)]_a^b = f(b) - f(a).$$

De même on a

$$\int_0^1 e^t \, dt = [e^t]_0^1 = e - 1.$$

On retrouve bien les mêmes valeurs.

EXEMPLE 14.23 – La méthode des primitives pour calculer les sommes est très puissante ; c'est précisément pour cela que les intégrales sont plus faciles à calculer que les sommes. Voyons une application. On considère la suite  $(H_n)_{n \geq 1}$  définie par

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

(On appelle parfois  $(H_n)$  la « série harmonique », d'où la notation.) Nous allons montrer que  $H_n$  tend vers  $+\infty$ . À partir de la définition, c'est difficile.

Essayons donc d'utiliser des intégrales. Nous n'avons pas une somme de Riemann, mais nous pouvons malgré tout essayer d'introduire certaines fonctions en escaliers. En l'occurrence, considérons l'intervalle  $[1, n]$  et la fonction en escaliers  $\phi_n$  qui vaut  $\frac{1}{i}$  sur l'intervalle  $]i, i + 1[$ . En comptant l'aire des rectangles, on constate que

$$\int_1^n \phi_n = H_n.$$

Soit maintenant  $f(t) = \frac{1}{t}$  sur le même intervalle. On a alors  $\phi_n \geq f$ , ce qui est une conséquence du fait que  $f$  est décroissante. Par suite

$$\int_1^n \phi_n \geq \int_1^n f.$$

Mais grâce à la méthode des primitives, nous pouvons facilement calculer l'intégrale de  $f$  : en effet le logarithme  $\ln$  vérifie  $\ln' = f$ . Ainsi

$$\int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n).$$

Or nous savons que  $\ln(n) \rightarrow +\infty$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , donc l'inégalité  $H_n \geq \ln(n)$  que nous venons d'obtenir garantit que  $H_n \rightarrow +\infty$ .

### La formule du changement de variables

Une autre conséquence plus ou moins immédiate de la proposition 14.19 est la « formule du changement de variables » qui est très pratique dans les calculs :

**PROPOSITION 14.24** – Soit  $u$  une fonction continument dérivable sur  $[a; b]$ , et supposons que l'image de  $[a; b]$  par  $u$  soit l'intervalle  $[u(a); u(b)]$ . Soit  $f$  une fonction continue sur  $[u(a); u(b)]$ . Alors :

$$\int_a^b f(u(t)) u'(t) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) dx.$$

*Démonstration.* Pour  $X \in [u(a); u(b)]$ , soit

$$F(X) = \int_{u(a)}^X f(x) dx$$

et soit  $g(T) = F(u(T))$  pour  $T \in [a; b]$ . Puisque  $f$  est continue, la proposition 14.19 permet de calculer la dérivée de  $F$ , à savoir  $F' = f$  ; et la formule pour la dérivée d'une fonction composée donne au total :

$$g'(T) = F'(u(T)) u'(T) = f(u(T)) u'(T).$$

D'un autre côté, soit

$$h(T) = \int_a^T f(u(t))u'(t) dt$$

pour  $T \in [a; b]$ . L'expression  $t \rightarrow f(u(t))u'(t)$  est bien continue, donc la proposition 14.19 (encore) donne  $h'(T) = f(u(T))u'(T)$ .

Ainsi, les fonctions  $g$  et  $h$  ont la même dérivée. Elles sont toutes les deux nulles en  $T = a$ , donc elles sont finalement égales. En écrivant  $g(b) = h(b)$ , on obtient la formule.  $\square$

Pour retenir correctement la formule, nous suggérons un petit abus de notation. Dans le membre de droite de la formule du changement de variables, l'écriture  $f(x)dx$  peut être évidemment remplacée par  $f(y)dy$  ou  $f(z)dz$ . Si vous pensez que l'on peut utiliser *n'importe quelle lettre*, demandez-vous quand même ce que donnerait la formule avec la lettre  $f$  ou pire, avec  $d$ . Nous proposons d'utiliser la lettre  $u$ , et donc de mémoriser

$$\int_a^b f(u(t))u'(t) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du.$$

À strictement parler, c'est un abus de notation, puisque la lettre  $u$  désigne déjà une certaine fonction. Mais l'intuition derrière ce choix est assez correcte. Si on lit la formule « de la droite vers la gauche », on constate que « en faisant varier  $u$  », donc en remplaçant  $u$  par  $u(t)$ , on doit remplacer  $du$  par  $u'(t)dt$ , ce qui est cohérent avec la notation  $u'(t) = du/dt$  utilisée en Physique.

La plupart du temps, on utilise cependant la formule de la « gauche vers la droite ». Dans ce sens, on retient que l'expression  $u(t)$ , éventuellement très compliquée, peut être remplacée simplement par  $u$  pour peu que l'on ait quelque part un  $u'(t)dt$ , qui va devenir  $du$ . Voici un exemple.

EXEMPLE 14.25 – Calculons

$$\int_0^1 \frac{dt}{1 + e^t}.$$

On va poser  $u(t) = e^t$ , pour voir. Il nous faudrait un  $u'(t) dt$  quelque part ; or  $u'(t) = e^t$ . On peut donc artificiellement écrire

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t} = \int_0^1 \frac{e^t dt}{e^t(1+e^t)} = \int_0^1 \frac{u'(t) dt}{u(t)(1+u(t))} = \int_1^e \frac{du}{u(1+u)}.$$

On va pouvoir finir ce calcul facilement. Avant de le faire, remarquons que si les choses se sont bien passées, c'est surtout parce que  $u'(t)$  peut s'exprimer facilement en termes de  $u(t)$ . C'est la grande qualité que l'on cherche dans un changement de variables. Faites l'expérience suivante : essayez le changement de variables  $v(t) = 1/(1+e^t)$ . Vous vous rendrez compte que pour faire apparaître le  $v'(t) dt$ , on est amené à exprimer  $v'(t)$  en fonction de  $v(t)$ . C'est faisable, mais moins facile que pour  $u$  ; au total on finit avec la même expression, mais après bien plus d'efforts.

Terminons tout de même. On écrit

$$\frac{1}{u(1+u)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}.$$

Vous vérifierez cette égalité sans peine ; au chapitre suivant nous verrons comment systématiser ce genre d'astuce. Maintenant il vient :

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{du}{u(1+u)} &= \int_1^e \frac{du}{u} - \int_1^e \frac{du}{1+u} \\ &= [\ln(u)]_1^e - [\ln(1+u)]_1^e \\ &= 1 + \ln(2) - \ln(1+e). \end{aligned}$$

– Deuxième lecture –

### Fonctions à valeurs vectorielles

DÉFINITION 14.26 – Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^r$  une fonction, et écrivons

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_r(t)).$$

On dit que  $f$  est *Riemann-intégrable* lorsque chaque fonction  $f_k$  est Riemann-intégrable (au sens déjà défini dans ce chapitre). De plus, l'*intégrale* de  $f$  est le vecteur

$$\int_a^b f = \left( \int_a^b f_1, \int_a^b f_2, \dots, \int_a^b f_r \right).$$

■

Par exemple, si nous identifions comme d'habitude le plan  $\mathbb{C}$  des nombres complexes avec  $\mathbb{R}^2$ , en voyant  $x + iy$  comme  $(x, y)$ , alors cette définition signifie que nous avons la convention suivante : pour une fonction  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  de la forme  $f(t) = x(t) + iy(t)$ , son intégrale est

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt.$$

C'est évidemment la définition la plus naturelle.

PROPOSITION 14.27 – *On a les propriétés suivantes.*

1. Si  $f$  et  $g$  sont intégrables, à valeurs dans  $\mathbb{R}^r$ , et si  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes réelles, alors  $\lambda f + \mu g$  est intégrable et

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

De plus, si  $v \in \mathbb{R}^r$  est un vecteur (constant), et si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable, alors la fonction  $t \mapsto f(t)v$  est intégrable et

$$\int_a^b f(t)v dt = \left( \int_a^b f(t) dt \right) v.$$

2. La relation de Chasles est vérifiée.
3. Si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^r$  est continue, alors elle est intégrable.
4. Si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^r$  est continument dérivable, alors

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

La démonstration de cette proposition est laissée en exercice ; c'est une conséquence directe des définitions. Nous allons nous contenter de la remarque suivante. Si  $e_1, \dots, e_r$  est une base de  $\mathbb{R}^r$ , alors pour chaque  $t$  on peut écrire

$$f(t) = \lambda_1(t)e_1 + \dots + \lambda_r(t)e_r.$$

En utilisant les deux propriétés énoncées dans le (1) de la proposition, on en déduit, si  $f$  est intégrable, que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \int_a^b \lambda_1(t)e_1 dt + \dots + \int_a^b \lambda_r(t)e_r dt \\ &= \left( \int_a^b \lambda_1(t) dt \right) e_1 + \dots + \left( \int_a^b \lambda_r(t) dt \right) e_r. \end{aligned}$$

Si maintenant on prend pour  $e_1, \dots, e_r$  la base canonique, on retrouve la définition même de l'intégrale de  $f$  ; en d'autres termes, pour que le (1) de la proposition soit vrai, la seule définition possible est celle que nous avons donnée. Dans le même temps, nous observons que l'intégrale se comporte « comme prévu » dans toutes les bases, donc notre définition ne privilégie pas la base canonique.

Pour travailler avec les fonctions à valeurs vectorielles, il serait utile de montrer que l'on peut se ramener aux fonctions en escaliers, comme dans le cas des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . La définition de fonction « en escaliers » ne change pas : il s'agit toujours d'une fonction  $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^r$  qui est constante sur  $]a_k, a_{k+1}[$  pour une certaine subdivision (à ceci près que la valeur constante est bien sûr un vecteur).

Il y a une difficulté : écrire  $\phi \leq f$  n'a pas de sens pour les fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^r$ . Pour cette raison, on a un résultat moins précis que le lemme 14.7, mais qui va suffire.

**PROPOSITION 14.28** – Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^r$  une fonction intégrable. Alors il existe une suite de fonctions en escaliers  $(\phi_n)_{n \geq 0}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^r$  telle que

$$\int_a^b \phi_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt. \quad (1)$$



Si de plus  $f$  est continue, alors on a

$$\int_a^b \|f(t) - \phi_n(t)\| dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (2)$$

et enfin

$$\int_a^b \|\phi_n(t)\| dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \|f(t)\| dt. \quad (3)$$

Remarquons que l'hypothèse «  $f$  continue » est uniquement là pour nous simplifier la vie. En effet, pour que les relations (2) et (3) aient un sens, il faut que la fonction  $t \mapsto \|f(t)\|$  soit intégrable, et même la fonction  $t \mapsto \|f(t) + v\|$  pour tout vecteur constant  $v$  (ainsi en utilisant la relation de Chasles on voit que  $t \mapsto \|f(t) - \phi_n(t)\|$  est également intégrable). Ceci est automatique lorsque  $f$  est continue (cf (3) de la proposition). Dans la démonstration vous verrez bien que la continuité n'est pas utilisée pour autre chose.

*Démonstration.* Pour chaque indice  $k$  on applique le lemme 14.7 à  $f_k$ , et on trouve une suite  $(\phi_{k,n})$  de fonctions en escaliers telles que  $\phi_{k,n} \leq f_k$  et

$$\int_a^b \phi_{k,n}(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(t) dt. \quad (*)$$

Posons  $\phi_n(t) = (\phi_{1,n}(t), \dots, \phi_{r,n}(t))$ . Alors  $\phi_n$  est en escaliers, à valeurs dans  $\mathbb{R}^r$ . La relation (1) est alors une conséquence immédiate des définitions.

Pour montrer (2), qui est plus difficile à établir, soit  $e_1, \dots, e_r$  la base canonique de  $\mathbb{R}^r$ . Écrivons

$$f(t) - \phi_n(t) = (f_1(t) - \phi_{1,n}(t))e_1 + \dots + (f_r(t) - \phi_{r,n}(t))e_r.$$

D'après l'inégalité triangulaire pour les vecteurs, on a

$$\|f(t) - \phi_n(t)\| \leq |f_1(t) - \phi_{1,n}(t)| \|e_1\| + \dots + |f_r(t) - \phi_{r,n}(t)| \|e_r\|.$$

Puisque  $f_k \geq \phi_{k,n}$  et  $\|e_k\| = 1$ , on peut réécrire ceci

$$\|f(t) - \phi_n(t)\| \leq (f_1(t) - \phi_{1,n}(t)) + \dots + (f_r(t) - \phi_{r,n}(t)),$$

d'où

$$\int_a^b \|f(t) - \phi_n(t)\| dt \leq \int_a^b f_1(t) dt - \int_a^b \phi_{1,n}(t) dt + \dots \\ + \int_a^b f_r(t) dt - \int_a^b \phi_{r,n}(t) dt.$$

Ainsi la relation (\*) entraîne bien la relation (2).

Pour la (3), on utilise tout simplement la « deuxième » inégalité triangulaire, celle qui affirme que  $\| \|a\| - \|b\| \| \leq \|a - b\|$  (cf lemme 4.30). Ceci donne

$$\left| \int_a^b (\|f(t)\| - \|\phi_n(t)\|) dt \right| \leq \int_a^b \| \|f(t)\| - \|\phi_n(t)\| \| dt \\ \leq \int_a^b \|f(t) - \phi_n(t)\| dt.$$

(On a utilisé aussi l'inégalité triangulaire pour les intégrales de fonctions réelles.) On constate que (3) est une conséquence de (2).  $\square$

À l'aide de la proposition 14.28, nous pouvons montrer l'inégalité triangulaire pour les fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^r$ . Il ne vous aura pas échappé qu'il nous a fallu plus d'efforts pour l'obtenir que dans le cas des fonctions réelles.

PROPOSITION 14.29 – Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^r$  continue. Alors

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $f$  est en escaliers. Son intégrale est alors de la forme

$$\sum_k (a_{k+1} - a_k) \alpha_k,$$

où  $f$  est constante de valeur  $\alpha_k$  sur  $]a_k, a_{k+1}[$ . L'inégalité triangulaire pour les vecteurs donne

$$\left\| \sum_k (a_{k+1} - a_k) \alpha_k \right\| \leq \sum_k (a_{k+1} - a_k) \|\alpha_k\|.$$

Or le membre de droite n'est autre que l'intégrale de la fonction en escaliers  $t \mapsto \|f(t)\|$ . Donc l'inégalité triangulaire est vraie pour les intégrales de fonctions en escaliers.

Pour  $f$  continue, on prend une suite  $(\phi_n)$  comme dans la proposition 14.28. Pour chaque  $n$  on a

$$\left\| \int_a^b \phi_n(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\phi_n(t)\| dt,$$

puisque  $\phi_n$  est en escaliers. Le membre de droite tend vers l'intégrale de  $t \mapsto \|f(t)\|$  d'après le (3) de la proposition. Le membre de gauche tend vers

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\|,$$

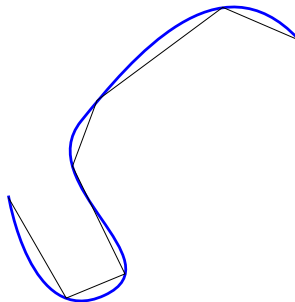
d'après le (1) de la proposition et le lemme 4.32. En passant à la limite sur  $n$ , on a donc l'inégalité annoncée.  $\square$

Nous allons utiliser ceci pour montrer que « le plus court chemin entre deux points, c'est la ligne droite ».

### Longueur d'une courbe

Une *courbe* est tout simplement une application  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^r$ . On utilise surtout le mot « courbe » dans les cas  $r = 2$  (courbes planaires) ou  $r = 3$  (courbes dans l'espace), mais leur étude peut se faire en général.

Comment définir la longueur d'une courbe  $\gamma$ ? Une idée naturelle est de chercher une approximation de la courbe par des segments de droite, comme dans la figure ci-dessous.



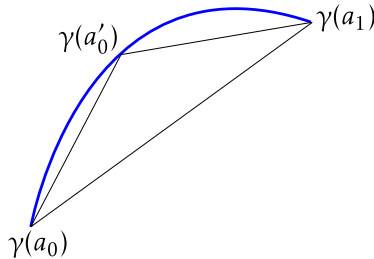
Plus précisément, on choisit une subdivision  $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$  de  $[a, b]$ , et on considère le segment qui joint  $\gamma(a_k)$  à  $\gamma(a_{k+1})$ , pour  $0 \leq k < n$ . La longueur de ce segment est  $\|\gamma(a_{k+1}) - \gamma(a_k)\|$ , donc une première approximation de la longueur de  $\gamma$  est

$$\ell(\gamma, a) = \sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma(a_{k+1}) - \gamma(a_k)\|.$$

Si on insère un nouveau point dans la subdivision, disons si on ajoute un point  $a'_0$  entre  $a_0$  et  $a_1$ , alors on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\gamma(a_1) - \gamma(a_0)\| &= \|\gamma(a_1) - \gamma(a'_0) + \gamma(a'_0) - \gamma(a_0)\| \\ &\leq \|\gamma(a_1) - \gamma(a'_0)\| + \|\gamma(a'_0) - \gamma(a_0)\|, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité triangulaire. Si on appelle  $a'$  la nouvelle subdivision, on aura donc  $\ell(\gamma, a') \geq \ell(\gamma, a)$  : la longueur augmente à mesure que la subdivision devient plus fine.



Ceci motive la définition suivante.

DÉFINITION 14.30 – La *longueur* de la courbe  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^r$  est

$$\ell(\gamma) = \sup \{ \ell(\gamma, a) \mid a \text{ subdivision de } [a, b] \}.$$

On pose  $\ell(\gamma) = +\infty$  lorsque le sup n'existe pas dans  $\mathbb{R}$ . ■

On dit parfois d'une courbe  $\gamma$  telle que  $\ell(\gamma) < +\infty$  qu'elle est *rectifiable*.

Le résultat qui va rendre les choses calculables est le suivant :

PROPOSITION 14.31 – Soit  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^r$  une courbe continument dérivable. Alors

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Démonstration. Soit  $a$  une subdivision. On écrit

$$\begin{aligned} \|\gamma(a_{k+1}) - \gamma(a_k)\| &= \left\| \int_{a_k}^{a_{k+1}} \gamma'(t) dt \right\| \\ &\leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} \|\gamma'(t)\| dt, \end{aligned} \quad (*)$$

en utilisant le théorème fondamental de l'analyse puis l'inégalité triangulaire. En faisant la somme sur tous les indices  $k$ , par la relation de Chasles il vient

$$\ell(\gamma, a) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

et donc

$$\ell(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Soit maintenant  $\varepsilon > 0$ . On va montrer qu'il existe une subdivision  $a$  telle que

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq \ell(\gamma, a) + \varepsilon,$$

ce qui terminera la démonstration. Pour cela, examinons un cas simple dans lequel l'inégalité triangulaire est en fait une égalité : lorsque  $v$  est un vecteur constant, on a bien

$$\left\| \int_a^b v dt \right\| = \|(b-a)v\| = (b-a)\|v\| = \int_a^b \|v\| dt.$$

Prenons deux points  $a_k$  et  $a_{k+1}$  dans  $[a, b]$ , et appliquons cette dernière remarque avec  $v = \gamma'(a_k)$ . Intuitivement, l'idée est la suivante : lorsque  $a_k$  et  $a_{k+1}$  sont très proches, la fonction continue  $\gamma'$  ne varie pas beaucoup sur  $[a_k, a_{k+1}]$ , donc elle est

presque constante, égale à  $\gamma'(a_k)$ ; l'inégalité (\*) ci-dessus est alors presque une égalité. Pour mettre en forme ceci, notons

$$M_k = \sup \{ \|\gamma'(t) - \gamma'(a_k)\| \mid t \in [a_k, a_{k+1}] \},$$

et écrivons :

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \|\gamma'(t)\| dt &= \int_{a_k}^{a_{k+1}} \|\gamma'(a_k) + (\gamma'(t) - \gamma'(a_k))\| dt \\ &\leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} \|\gamma'(a_k)\| dt + \int_{a_k}^{a_{k+1}} \|\gamma'(t) - \gamma'(a_k)\| dt \\ &= \left\| \int_{a_k}^{a_{k+1}} \gamma'(a_k) dt \right\| + \int_{a_k}^{a_{k+1}} \|\gamma'(t) - \gamma'(a_k)\| dt \\ &\leq \left\| \int_{a_k}^{a_{k+1}} \gamma'(a_k) dt \right\| + M_k(a_{k+1} - a_k) \\ &= \left\| \int_{a_k}^{a_{k+1}} [\gamma'(t) + (\gamma'(a_k) - \gamma'(t))] dt \right\| + M_k(a_{k+1} - a_k) \\ &\leq \left\| \int_{a_k}^{a_{k+1}} \gamma'(t) dt \right\| + \int_{a_k}^{a_{k+1}} \|\gamma'(a_k) - \gamma'(t)\| dt \\ &\quad + M_k(a_{k+1} - a_k) \\ &\leq \|\gamma(a_{k+1}) - \gamma(a_k)\| + 2M_k(a_{k+1} - a_k). \end{aligned}$$

Puisque  $\gamma'$  est continue sur l'intervalle compact  $[a, b]$ , elle est uniformément continue d'après le théorème de Heine. Ainsi, il existe un  $\delta > 0$  tel que  $\|\gamma'(x) - \gamma'(y)\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$  dès que  $|x - y| < \delta$ .

On peut alors choisir  $n$  un entier tel que  $\frac{b-a}{n} < \delta$ , et poser  $a_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$ , de sorte que  $|a_{k+1} - a_k| = \frac{b-a}{n} < \delta$  et donc  $M_k \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ .

Si on fait la somme des inégalités

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \|\gamma'(t)\| dt \leq \|\gamma(a_{k+1}) - \gamma(a_k)\| + \frac{\varepsilon}{n}$$

pour tous les indices  $k$ , on termine avec

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq \ell(\gamma, a) + \varepsilon,$$

comme annoncé. □

**COROLLAIRE 14.32** – Soient  $p$  et  $q$  deux points dans  $\mathbb{R}^r$ . Alors le plus court chemin continument dérivable entre  $p$  et  $q$  est la ligne droite, dont la longueur est  $\|q - p\|$ .

*Démonstration.* Soit donc  $\gamma$  un chemin continument dérivable sur  $[a, b]$ , tel que  $\gamma(a) = p$  et  $\gamma(b) = q$ . Comme on l'a déjà observé dans la démonstration précédente, on a

$$\begin{aligned} \|q - p\| &= \|\gamma(b) - \gamma(a)\| \\ &= \left\| \int_a^b \gamma'(t) dt \right\| \\ &\leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \ell(\gamma). \end{aligned}$$

Donc la longueur de la courbe  $\gamma$  est toujours supérieure ou égale à la distance euclidienne  $\|q - p\|$ . Prenons maintenant la ligne droite, disons  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^r$  définie par

$$\gamma(t) = (1 - t)p + tq \quad (= p + t(q - p)).$$

(C'est bien un déplacement en ligne droite de  $p$  vers  $q$ .) La dérivée est  $\gamma'(t) = q - p$ , un vecteur constant, donc

$$\int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \|q - p\| = \ell(\gamma).$$

Ainsi dans le cas de la ligne droite le minimum est atteint.  $\square$

**EXEMPLE 14.33 (CIRCONFÉRENCE D'UN CERCLE)** – Considérons, dans le plan complexe identifié à  $\mathbb{R}^2$ , le cercle de centre  $p$  et de rayon  $R$ . On peut le parcourir avec la courbe  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\gamma(t) = p + Re^{it},$$

comme expliqué dans le chapitre « L'exponentielle ». Calculons la longueur de cette courbe, qui est continument dérivable. On a  $\gamma'(t) = Ri e^{it}$  d'où  $\|\gamma'(t)\| = R$ . Ainsi

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

La circonférence d'un cercle de rayon  $R$  est  $2\pi R$ , en particulier ça ne dépend pas du centre. Évidemment c'était la première définition historique du nombre  $\pi$ .

Il peut vous paraître surprenant qu'une courbe soit définie comme une *fonction* et pas un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^r$ , et que la longueur d'une courbe  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^r$  ne soit pas déterminée par l'image  $\gamma([a, b])$ . Par exemple, dans le cas du cercle, est-ce que la longueur change si l'on considère une courbe  $\gamma$  qui se déplace sur le cercle à une vitesse différente? Et lorsque nous parlions ci-dessus de « la ligne droite » entre  $p$  et  $q$ , est-ce que l'on aurait pu considérer une autre paramétrisation que  $t \mapsto (1-t)p + tq$ , et trouver une autre longueur?

La première réponse à ces questions est que la longueur dépend en effet en général de la fonction. L'exemple le plus bête est celui de la courbe  $\gamma: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $\gamma(t) = p + Re^{it}$  : en effet cette courbe fait « deux fois le tour » du cercle de centre  $p$  et de rayon  $R$ , et vous pouvez vérifier que sa longueur est  $4\pi R$ . Alors que l'image  $\gamma([0, 4\pi])$  est le cercle, qui peut être parcouru par une courbe de longueur  $2\pi R$  comme on l'a vu. Ici les deux courbes sont très différentes dans leur comportement.

Cependant, voici un petit résultat qui exprime l'idée que des changements simples de paramétrisation ne vont pas changer la longueur.

**LEMME 14.34** – Soit  $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^r$  une courbe continument dérivable, et soit  $u: [c, d] \rightarrow [a, b]$  une bijection, également supposée continument dérivable. Soit enfin  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ u$ , qui est encore une courbe. Alors

$$\ell(\gamma_1) = \ell(\gamma_2).$$

*Démonstration.* La fonction  $u$  est monotone d'après la proposition 6.23, on va supposer qu'elle est croissante (le cas décroissant est similaire), d'où  $u(c) = a$ ,  $u(d) = b$ , et  $u'(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [c, d]$ .

On applique alors simplement le théorème du changement



de variables :

$$\begin{aligned}
 \ell(\gamma_2) &= \int_c^d \|\gamma_2'(t)\| dt \\
 &= \int_c^d \|\gamma_1'(u(t)) u'(t)\| dt \\
 &= \int_c^d \|\gamma_1'(u(t))\| |u'(t)| dt \\
 &= \int_a^b \|\gamma_1'(u)\| du \\
 &= \ell(\gamma_1). \quad \square
 \end{aligned}$$

Pour en revenir au cercle, la courbe  $\gamma_1: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $\gamma_1(t) = p + Re^{it}$  et la courbe  $\gamma_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $\gamma_2(t) = p + Re^{2i\pi t}$  sont liées comme ci-dessus, avec  $u(t) = 2\pi t$ , donc elles ont la même longueur (comme on le vérifie tout de suite).

### Démonstration de Taylor-Young

Nous allons conclure ce chapitre avec la démonstration du théorème de Taylor-Young dans sa forme générale (dans le chapitre sur les formules de Taylor nous avons une petite hypothèse restrictive). À l'aide des intégrales, c'est très facile.

**LEMME 14.35** – Soit  $I$  un intervalle contenant 0 et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable. On suppose que  $f(t) = o(t^n)$  pour un certain entier  $n$ . Si on pose

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

pour  $x \in I$ , alors  $F(x) = o(x^{n+1})$ .

*Démonstration.* Par hypothèse  $f(t) = t^n h(t)$  avec  $h(t) \rightarrow 0$ , donc si on se donne un  $\varepsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  tel que  $|h(t)| < \varepsilon$

pour  $|t| < \delta$ . Si on prend également  $0 < x < \delta$  on a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x f(t) dt \right| &\leq \int_0^x |f(t)| dt \\ &\leq \int_0^x t^n \varepsilon dt \\ &= \varepsilon \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \varepsilon \frac{x^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

On traite de la même façon le cas  $-\delta < x < 0$ , et finalement on constate que si  $|x| < \delta$ , alors

$$\left| \frac{F(x)}{x^{n+1}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+1}.$$

C'est donc que

$$\frac{F(x)}{x^{n+1}} \rightarrow 0$$

lorsque  $x \rightarrow 0$ , comme on le souhaitait.  $\square$

On peut alors montrer facilement

**THÉORÈME 14.36 (TAYLOR-YOUNG)** – Soit  $f$  une fonction dérivable  $n$  fois sur un intervalle  $I$  contenant  $0$ . Alors on peut écrire

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

*Démonstration.* Par récurrence. Le cas  $n = 1$  est donné par le lemme 9.7. Supposons le théorème vrai pour  $n$ , et soit  $f$  dérivable  $n+1$  fois. Appliquons le résultat au rang  $n$  à la fonction  $f'$ , qui est dérivable  $n$  fois :

$$f'(t) = f'(0) + (f')'(0)t + \dots + \frac{(f')^{(n)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + o(t^{n-1}).$$

En intégrant ceci entre  $0$  et  $x$ , et en utilisant le lemme précédent, on obtient la formule pour  $f$  au rang  $n$ .  $\square$

# Chapitre 15

## Fractions rationnelles

*Le lecteur ayant assimilé la définition 2.15 peut prendre pour  $\mathbb{K}$  n'importe quel corps.*

Dans ce chapitre, la lettre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Fractions rationnelles

DÉFINITION 15.1 – Une *fraction rationnelle*  $F$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est un quotient de deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  :

$$F = \frac{P}{Q},$$

avec  $Q \neq 0$ . L'ensemble des fractions rationnelles est noté  $\mathbb{K}(X)$ .



Les règles de calcul usuelles s'appliquent. Dans le jargon de la définition 2.15, on dira que  $\mathbb{K}(X)$  est un corps. Des informations supplémentaires sont apportées dans l'encadré « Les corps de fractions ».

Le nombre  $\deg P - \deg Q$  est appelé le *degré* de  $F$ , noté  $\deg F$ . Il faut vérifier qu'il est bien défini, puisque la paire  $(P, Q)$  n'est pas unique : en fait on a

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'} \iff PQ' = P'Q,$$

et ainsi  $\deg P + \deg Q' = \deg P' + \deg Q$ , d'où  $\deg P - \deg Q = \deg P' - \deg Q'$ , comme souhaité.

Notre objectif est de mettre les fractions rationnelles sous une forme particulière, qui facilite le calcul des primitives lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Tout part de l'observation suivante :

LEMME 15.2 – Soit  $F = \frac{P}{Q}$  une fraction rationnelle. Supposons que l'on ait une factorisation  $Q = AB$  avec  $\text{pgcd}(A, B) = 1$ . Alors il existe des polynômes  $P_1$  et  $P_2$  tels que

$$F = \frac{P_1}{A} + \frac{P_2}{B}.$$

*Démonstration.* On utilise le théorème de Bézout (3.22), qui nous donne l'existence de  $U$  et  $V$  tels que  $AU + BV = 1$ . Par

## Les corps de fractions

La question désormais classique revient : comment donner une définition « complète » des fractions rationnelles, suffisamment complète pour qu'un ordinateur puisse faire des calculs ?

Il se trouve que le procédé est totalement identique, quasiment mot pour mot, à celui décrit dans l'encadré « Une définition de  $\mathbb{Q}$  » dans le chapitre « Nombres » ; à ceci près qu'il faut remplacer  $\mathbb{Z}$  par  $\mathbb{K}[X]$ . En fait cette construction porte un nom : on dit que  $\mathbb{Q}$  est le *corps des fractions* de l'anneau  $\mathbb{Z}$ , et que  $\mathbb{K}(X)$  est le corps des fractions de l'anneau  $\mathbb{K}[X]$ . C'est la raison pour laquelle avec SAGE, on construit  $\mathbb{Q}(X)$  avec la commande `QQ['X'].fraction_field()`

Pour faire cette construction à partir d'un anneau  $A$  quelconque, il y a une petite restriction technique : il faut pouvoir « simplifier » dans  $A$ .

Plus précisément, on dit qu'un anneau  $A$  est *intègre* lorsque l'égalité  $ab = 0$  avec  $a, b \in A$  et  $a \neq 0$ , entraîne  $b = 0$ . C'est vrai pour  $A = \mathbb{Z}$  et  $A = \mathbb{K}[X]$ , mais pas pour  $A = M_n(\mathbb{K})$ .

Vous pourrez montrer alors facilement, en copiant ce que l'on a fait pour  $\mathbb{Q}$ , qu'à partir de n'importe quel anneau  $A$  qui est commutatif et intègre, on peut construire un corps, noté  $\text{Fr}(A)$  et appelé le corps des fractions de  $A$ .

Il y aura peu d'exemples en première année, hormis  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{K}(X)$ . On peut en donner un tout de même en considérant  $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ , qui par définition est l'ensemble des nombres de la forme  $a + b\sqrt{2}$  avec  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Vous montrerez que cet anneau est commutatif et intègre, et que son corps des fractions est  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ , c'est-à-dire l'ensemble des nombres de la forme  $a + b\sqrt{2}$  avec cette fois  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

suite

$$\frac{1}{AB} = \frac{AU + BV}{AB} = \frac{U}{B} + \frac{V}{A}.$$

En multipliant par  $P$ , il vient

$$F = \frac{P}{AB} = \frac{PV}{A} + \frac{PU}{B},$$

d'où le résultat avec  $P_1 = PV$  et  $P_2 = PU$ .  $\square$

On sait donc « couper » une fraction rationnelle en deux lorsque son dénominateur se factorise en deux termes premiers entre eux. À l'opposé, on a une autre remarque calculatoire :

LEMME 15.3 – Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes, soit  $\alpha$  un entier, et soit

$$F = \frac{P}{Q^\alpha}.$$

Alors il existe des polynômes  $P_j$ , pour  $0 \leq j \leq \alpha$ , tels que

$$F = P_0 + \frac{P_1}{Q} + \frac{P_2}{Q^2} + \cdots + \frac{P_\alpha}{Q^\alpha},$$

et tels que  $\deg P_j < \deg Q$  pour  $j \geq 1$ .

Attention, il n'y a pas de condition sur le degré de  $P_0$ .

*Démonstration.* Faisons une division euclidienne

$$P = AQ + R,$$

avec  $\deg R < \deg Q$ . Alors

$$\frac{P}{Q^\alpha} = \frac{AQ + R}{Q^\alpha} = \frac{A}{Q^{\alpha-1}} + \frac{R}{Q^\alpha}.$$

On peut alors poser  $P_\alpha = R$  et faire une récurrence sur  $\alpha$ .  $\square$

On en déduit le théorème principal de ce chapitre.

THÉORÈME 15.4 (DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES) – Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ . Écrivons

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{Q_1^{\alpha_1} Q_2^{\alpha_2} \cdots Q_n^{\alpha_n}},$$

avec chaque  $Q_i$  irréductible, et avec  $\text{pgcd}(Q_i, Q_j) = 1$  pour  $i \neq j$ . Alors il existe des polynômes  $P_{i,j}$  pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq \alpha_i$ , et un polynôme  $P_0$ , tels que

$$F = P_0 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{P_{i,j}}{Q_i^j},$$

avec  $\text{deg } P_{i,j} < \text{deg } Q_i$ .

De plus, si  $\text{deg } P < \text{deg } Q$ , alors  $P_0 = 0$ .

Cet énoncé peut paraître compliqué, mais nous verrons qu'il est facile à mettre en pratique. L'essentiel est que chaque terme

$$\frac{P_{i,j}}{Q_i^j},$$

que l'on appelle « élément simple », possède une primitive assez facile à calculer (lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ). On va donc être capable de calculer une primitive de n'importe quelle fraction rationnelle  $F$ .

*Démonstration.* C'est la combinaison des deux lemmes précédents. Le deuxième lemme traite le cas  $n = 1$ . Dans le cas général, on pose  $A = Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$  et  $B = Q_n^{\alpha_n}$ , de sorte que  $\text{pgcd}(A, B) = 1$ . Le premier lemme donne alors

$$F = \frac{P_1}{A} + \frac{P_2}{B},$$

et l'on peut faire une récurrence sur  $n$ .

Reste à montrer le « de plus ». Notons une chose simple : si  $F$  et  $G$  sont deux fractions rationnelles, on a

$$\text{deg}(F + G) \leq \max(\text{deg } F, \text{deg } G).$$

Dans notre théorème, si  $\text{deg } F < 0$ , on en déduit que  $\text{deg } P_0 < 0$ . Or  $P_0$  est un polynôme, donc ceci impose  $P_0 = 0$ .  $\square$

Avant de donner des exemples de calculs, donnons des versions de ce théorème spécialisées à  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ .

COROLLAIRE 15.5 (ÉLÉMENTS SIMPLES SUR  $\mathbb{C}$ .) – Soit

$$F = \frac{P}{(X - x_1)^{\alpha_1} \cdots (X - x_n)^{\alpha_n}} \in \mathbb{C}(X),$$

où les nombres  $x_i$  sont distincts. Alors on peut écrire

$$F = P_0 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X - x_i)^j},$$

où  $P_0$  est un polynôme et  $\lambda_{i,j} \in \mathbb{C}$ . De plus si  $\deg F < 0$  alors  $P_0 = 0$ .

EXEMPLE 15.6 – Prenons

$$F = \frac{X^3 - X}{X^2 + 1}.$$

Le premier réflexe est de faire une division euclidienne du numérateur par le dénominateur. Ici on a  $X^3 - X = X(X^2 + 1) - 2X$ , de sorte que

$$F = X - \frac{2X}{X^2 + 1}.$$

On va maintenant appliquer le théorème au dernier terme à droite. Puisque  $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ , on sait qu'il existe  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$\frac{2X}{X^2 + 1} = \frac{\lambda}{X - i} + \frac{\mu}{X + i}.$$

Le plus simple pour trouver les valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$  n'est pas de procéder comme dans la démonstration du théorème, mais simplement d'identifier les numérateurs :

$$\frac{\lambda}{X - i} + \frac{\mu}{X + i} = \frac{(\lambda + \mu)X + (\mu - \lambda)i}{X^2 + 1} = \frac{2X}{X^2 + 1}.$$

On a donc  $\mu - \lambda = 0$  et  $\lambda + \mu = 2$ , donc  $\lambda = \mu = 1$ . Finalement

$$F = X - \frac{1}{X - i} - \frac{1}{X + i}.$$

Voici maintenant la version sur  $\mathbb{R}$ , qui est celle qui nous intéresse le plus pour calculer des primitives.

**COROLLAIRE 15.7 (ÉLÉMENTS SIMPLES SUR  $\mathbb{R}$ .)** – Soit

$$F = \frac{P}{(X - x_1)^{\alpha_1} \cdots (X - x_n)^{\alpha_n} Q_1^{\beta_1} \cdots Q_m^{\beta_m}} \in \mathbb{R}(X),$$

où les nombres  $x_i$  sont distincts, chaque polynôme  $Q_i$  est de degré 2 sans racine réelle, et  $\text{pgcd}(Q_i, Q_j) = 1$  si  $i \neq j$ . Alors on peut écrire

$$F = P_0 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X - x_i)^j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{\mu_{i,j}X + \gamma_{i,j}}{Q_i^j},$$

où  $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ , et  $\lambda_{i,j}, \mu_{i,j}, \gamma_{i,j} \in \mathbb{R}$ . De plus si  $\deg F < 0$  alors  $P_0 = 0$ .

**EXEMPLE 15.8** – Si on reprend l'exemple précédent, c'est-à-dire

$$F = \frac{X^3 - X}{X^2 + 1},$$

alors on a vu qu'après une simple division euclidienne on a

$$F = X - \frac{2X}{X^2 + 1}.$$

Sur  $\mathbb{R}$ , on s'arrête là : on ne peut pas factoriser plus le dénominateur  $X^2 + 1$ , et l'expression obtenue est bien de la forme annoncée dans le corollaire. Notons d'ailleurs que l'on a assez travaillé pour calculer une primitive, en effet

$$\int_a^b F(x) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \ln(x^2 + 1) \right]_a^b.$$

Voyons un exemple beaucoup plus compliqué. Prenons

$$F = \frac{1}{X^5 - 2X^4 + 6X^3 - 12X^2 + 9X - 18}.$$

Il faut d'abord factoriser le dénominateur. Nous avons de la chance, puisque 2 est une racine « évidente ». En faisant une division euclidienne, on obtient  $(X - 2)(X^4 + 6X^2 + 9)$ . De plus  $X^4 +$



$6X^2 + 9 = (X^2 + 3)^2$ , de sorte que

$$F = \frac{1}{(X-2)(X^2+3)^2}.$$

Le corollaire nous annonce donc que nous pouvons écrire

$$F = \frac{\lambda}{X-2} + \frac{\mu_1 X + \gamma_1}{X^2 + 3} + \frac{\mu_2 X + \gamma_2}{(X^2 + 3)^2}. \quad (*)$$

Il est possible, bien que très long, de mettre le membre de droite au même dénominateur. On obtient au numérateur

$$(\lambda + \mu_1)X^4 + (-2\mu_1 + \gamma_1)X^3 + (6\lambda + 3\mu_1 - 2\gamma_1 + \mu_2)X^2 + (-6\mu_1 + 3\gamma_1 - 2\mu_2 + \gamma_2)X + 9\lambda - 6\gamma_1 - 2\gamma_2. \quad (**)$$

En écrivant que ce numérateur doit valoir 1, on obtient alors un système à 5 inconnues et 5 équations, dont on sait qu'il possède des solutions, et on peut les trouver par les techniques habituelles. À l'aide d'un ordinateur, c'est une méthode très efficace.

Bien sûr pour finir le calcul « à la main », on peut utiliser des astuces. Voici une compilation des plus connues. Multiplions l'équation (\*) par le polynôme  $X - 2$  :

$$(X-2)F = \frac{1}{(X^2+3)^2} = \lambda + \frac{(\mu_1 X + \gamma_1)(X-2)}{X^2+3} + \frac{(\mu_2 X + \gamma_2)(X-2)}{(X^2+3)^2}.$$

On peut voir ça comme une égalité de fonctions, et on va regarder la valeur en  $X = 2$  : il reste simplement  $\lambda = \frac{1}{49}$ . On a déjà trouvé  $\lambda$  !

Maintenant multiplions (\*) par  $(X^2 + 3)^2$  ; nous obtenons

$$\frac{1}{X-2} = \frac{1}{49} \frac{(X^2+3)^2}{X-2} + (\mu_1 X + \gamma_1)(X^2+3) + (\mu_2 X + \gamma_2).$$

On évalue en  $X = i\sqrt{3}$  (pour que  $X^2 + 3 = 0$ ), et il reste simplement

$$\frac{1}{i\sqrt{3}-2} = \mu_2 i\sqrt{3} + \gamma_2.$$

Pour trouver les parties réelles et imaginaires du membre de gauche on écrit bien sûr

$$\frac{1}{i\sqrt{3}-2} = \frac{-2-i\sqrt{3}}{7},$$

d'où  $\gamma_2 = -\frac{2}{7}$  et  $\mu_2 = -\frac{1}{7}$ .

Ensuite, on peut choisir d'évaluer (\*) en  $X = 0$ , parce que c'est relativement facile : on obtient

$$-\frac{1}{18} = \frac{1}{3}\gamma_1 - \frac{37}{882},$$

d'où  $\gamma_1 = -\frac{2}{49}$ .

Regardons le numérateur (\*\*) ci-dessus. Il commence par  $(\lambda + \mu_1)X^4$ , ce que l'on peut vérifier de tête très vite sans tout mettre au même dénominateur. On a donc  $\lambda + \mu_1 = 0$  d'où  $\mu_1 = -\lambda = -\frac{1}{49}$ .

Finalement

$$F = \frac{1}{49} \left( \frac{1}{X-2} - \frac{X+2}{X^2+3} - \frac{7X+2}{(X^2+3)^2} \right).$$

Ce calcul était relativement compliqué. Pourrait-on en confier une partie à un ordinateur? La seule chose qui n'était pas purement mécanique dans le raisonnement ci-dessus était... de trouver que 2 était une racine du dénominateur. Ceci étant, un ordinateur peut (au pire) mettre les deux membres de (\*) au même dénominateur et résoudre un système, et ce, en une fraction de seconde. Retenons :

*PROPOSITION 15.9 – Lorsque l'on sait factoriser complètement le dénominateur d'une fraction rationnelle, trouver la décomposition en éléments simples est une procédure automatisable, que l'on peut confier à une machine.*

Par contre, vous aurez peut-être besoin de savoir décomposer une fraction à la main, pour les besoins d'un concours ou d'un examen ! Dans l'absolu, il est utile de savoir traiter les cas très simples, mais il est absurde de devenir expert.

## Intégration des éléments simples

Nous fixons désormais  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . La décomposition en éléments simples est censée nous aider à calculer les primitives, et pour mettre cela en oeuvre il faut savoir intégrer chacun des termes apparaissant dans le corollaire 15.7.

Les plus simples sont bien sûr

$$\int_p^q \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha} = \left[ \frac{(x-x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_p^q$$

pour  $\alpha > 1$  et

$$\int_p^q \frac{dx}{x-x_0} = [\ln|x-x_0|]_p^q$$

(ne pas oublier la valeur absolue). Il nous reste donc à traiter

$$\int_p^q \frac{\lambda x + \mu}{(ax^2 + bx + c)^\alpha} dx.$$

Il y a toute une série d'étapes pour y arriver. Le premier réflexe est de « faire apparaître la dérivée du dénominateur au numérateur ». En effet on sait calculer

$$\int_p^q \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^\alpha} dx = \left[ \frac{(ax^2 + bx + c)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_p^q$$

pour  $\alpha > 1$  et

$$\int_p^q \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = [\ln|ax^2 + bx + c|]_p^q.$$

Donc on va se débrouiller pour faire apparaître  $2ax + b$ .

EXEMPLE 15.10 – À la fin de l'exemple 15.8 nous avons le terme

$$\frac{x+2}{x^2+3}.$$

On écrit alors

$$\frac{x+2}{x^2+3} = \frac{1}{2} \left( \frac{2x}{x^2+3} + \frac{4}{x^2+3} \right),$$

de sorte que l'on sait intégrer une partie au moins de l'expression :

$$\begin{aligned}\int_p^q \frac{x+2}{x^2+3} dx &= \frac{1}{2} \int_p^q \frac{2x}{x^2+3} dx + 2 \int_p^q \frac{1}{x^2+3} dx \\ &= [\ln(x^2+3)]_p^q + 2 \int_p^q \frac{dx}{x^2+3}.\end{aligned}$$

De la même manière si nous avons à intégrer l'expression

$$\frac{5x-3}{x^2+x+1},$$

la première chose à faire est d'écrire

$$\frac{5x-3}{x^2+x+1} = \frac{5}{2} \left( \frac{2x+1}{x^2+x+1} \right) - \frac{11}{2(x^2+x+1)}.$$

On a alors

$$\int_p^q \frac{5x-3}{x^2+x+1} dx = \frac{5}{2} [\ln(x^2+x+1)]_p^q - \frac{11}{2} \int_p^q \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Retournons au cas général. Nous sommes ramenés à calculer les intégrales de la forme

$$\int_p^q \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n},$$

avec  $b^2 - 4ac < 0$  puisqu'on suppose que le dénominateur ne s'annule pas. On en connaît une :

$$\int_p^q \frac{dx}{x^2+1} = [\arctan(x)]_p^q.$$

Nous allons voir que l'on peut toujours se ramener à ce cas-là (ce qui explique la présence abondante de la fonction arctangente dans toutes les questions de primitives). La prochaine étape est de faire un changement de variables pour mettre le dénominateur sous la forme  $u(x)^2 + 1$ .

EXEMPLE 15.11 – Reprenons les exemples ci-dessus. On a

$$\frac{1}{x^2+3} = \frac{1}{3\left(\frac{x^2}{3}+1\right)} = \frac{1}{3\left(\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)} = \frac{1}{3(u(x)^2+1)}$$

avec  $u(x) = \frac{x}{\sqrt{3}}$ . On a  $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et donc

$$\begin{aligned} \int_p^q \frac{dx}{x^2+3} &= \frac{\sqrt{3}}{3} \int_p^q \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} dx}{u(x)^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_p^q \frac{u'(x) dx}{u(x)^2+1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{p/\sqrt{3}}^{q/\sqrt{3}} \frac{du}{u^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[ \arctan(u) \right]_{p/\sqrt{3}}^{q/\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Plutôt que de refaire ce changement de variables à chaque fois, on peut décider de mémoriser qu'une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}$  est  $x \mapsto \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$  (tout dépend de la quantité de primitives que l'on souhaite garder en tête). Pour  $a = \sqrt{3}$  on retrouve le résultat ci-dessus évidemment (noter que  $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ). Cependant, il est parfois préférable de refaire le changement de variables, notamment lorsque le dénominateur est élevé à une puissance (voir plus bas).

Essayons maintenant  $x^2+x+1$  au dénominateur. La présence du terme de degré 1 nous force à une étape préliminaire :

$$x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = t(x)^2 + \frac{3}{4}$$

avec  $t(x) = x + \frac{1}{2}$ . On peut faire un premier changement de variables :

$$\int_p^q \frac{dx}{x^2+x+1} = \int_p^q \frac{t'(x) dx}{t(x)^2 + \frac{3}{4}} = \int_{p+\frac{1}{2}}^{q+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}}.$$

Ou bien on change encore de variables, ou bien on utilise la primitive que l'on connaît, pour en arriver à :

$$\int_{p+\frac{1}{2}}^{q+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) \right]_{p+\frac{1}{2}}^{q+\frac{1}{2}}.$$

En utilisant ce genre de changements de variables, on arrive finalement toujours à calculer une intégrale de la forme

$$I_n = \int_p^q \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}.$$

Nous savons faire pour  $n = 1$ , et la dernière chose que nous devons apprendre est le calcul de  $I_n$  pour tout entier  $n$ .

C'est le moment d'utiliser la technique, que vous avez vue au Lycée, de *l'intégration par parties*. Le principe est très simple : de la formule

$$(fg)' = f'g + fg',$$

on tire  $f'g = (fg)' - fg'$  et donc

$$\int_p^q f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_p^q - \int_p^q f(x)g'(x) dx.$$

(Cette formule est valable dès que  $f$  et  $g$  sont continument dérivables.)

EXEMPLE 15.12 – Pour trouver une primitive de  $x \mapsto \ln(x)$ , on peut faire une intégration par parties avec  $f(x) = 1$  et  $g(x) = \ln(x)$ , d'où

$$\begin{aligned} \int_p^q \ln(x) dx &= [x \ln(x)]_p^q - \int_p^q dx \\ &= [x \ln(x) - x]_p^q. \end{aligned}$$

Une primitive est donc  $x \mapsto x \ln(x) - x$ .

Pour en revenir au calcul de  $I_n$ , on a la formule de récurrence suivante.

LEMME 15.13 – Pour  $n \geq 1$  on a

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{2n} \left[ \frac{x}{(x^2+1)^n} \right]_p^q.$$

Plutôt que d'apprendre cette relation par coeur, il vaut mieux retenir que la démonstration, que voici, s'appuie sur une intégration par parties.

*Démonstration.* On prend  $f(x) = 1$  et  $g(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}$ , d'où

$$I_n = \left[ \frac{x}{(x^2+1)^n} \right]_p^q + 2n \int_p^q \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^n}.$$

En écrivant  $x^2 = x^2 + 1 - 1$ , on constate que la dernière intégrale à droite est  $I_n - I_{n+1}$ . On en tire le résultat en arrangeant les termes.  $\square$

EXEMPLE 15.14 – Pour calculer

$$\int_p^q \frac{dx}{(x^2+3)^2}$$

on commence par poser  $u(x) = \frac{x}{\sqrt{3}}$  comme dans l'exemple précédent, de sorte que

$$\int_p^q \frac{dx}{(x^2+3)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{p'}^{q'} \frac{du}{(u^2+1)^2}$$

avec  $p' = \frac{p}{\sqrt{3}}$  et  $q' = \frac{q}{\sqrt{3}}$ . On fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{p'}^{q'} \frac{du}{(u^2+1)^2} &= \left[ \frac{u}{(u^2+1)^2} \right]_{p'}^{q'} + 4 \int_{p'}^{q'} \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^2} \\ &= \left[ \frac{u}{(u^2+1)^2} + 4 \arctan(u) \right]_{p'}^{q'} - 4 \int_{p'}^{q'} \frac{du}{(u^2+1)^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{p'}^{q'} \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{1}{5} \left[ \frac{u}{(u^2+1)^2} + 4 \arctan(u) \right]_{p'}^{q'}.$$

Finalement

$$\int_p^q \frac{dx}{(x^2+3)^2} = \frac{\sqrt{3}}{15} \left[ \frac{u}{(u^2+1)^2} + 4 \arctan(u) \right]_{p/\sqrt{3}}^{q/\sqrt{3}}.$$

Ces calculs sont difficiles. Cependant, nous pouvons à nouveau remarquer que rien n'empêche un ordinateur de les faire pour nous : toutes les étapes sont parfaitement mécaniques.

**PROPOSITION 15.15** – *Lorsque l'on sait factoriser complètement le dénominateur d'une fraction rationnelle, trouver une primitive est une procédure automatisable, que l'on peut confier à une machine.*

Là encore, renseignez-vous pour savoir si l'on attend de vous, à l'occasion d'un concours ou d'un examen, que vous sachiez calculer ces primitives « à la main ». C'est très probable ! En tout cas il est souhaitable de savoir traiter quelques exemples.

### Fractions rationnelles trigonométriques

Nous allons apprendre à calculer des intégrales d'un certain type précis, à savoir de la forme

$$\int_p^q F(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta.$$

Ici on suppose que l'on a une fonction  $(x, y) \mapsto F(x, y)$ , à deux variables, définie au moins au point  $(x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$  pour  $p \leq \theta \leq q$ . L'ensemble de ces points est un arc de cercle, et en faisant un peu de géométrie nous allons trouver un changement de variables judicieux. En particulier, l'intégrale ci-dessus va se ramener à une intégrale de fraction rationnelle lorsque  $F(x, y)$  est une expression utilisant seulement des opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication et division), disons par exemple

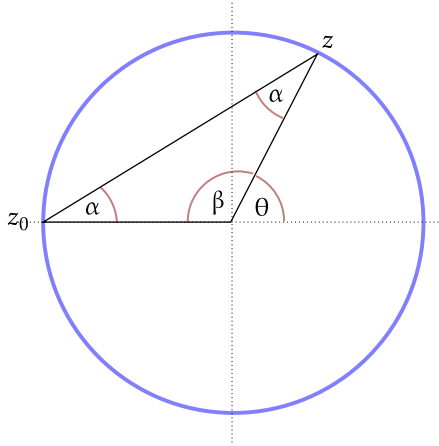
$$F(\cos(\theta), \sin(\theta)) = \frac{3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) - 1}{\sin(\theta)^3 + \cos(\theta)}.$$

On dit parfois alors que  $F(\cos(\theta), \sin(\theta))$  est une « fraction rationnelle trigonométrique ».

Pour les impatientes, il est très simple de résumer la méthode : utiliser le changement de variables  $t(\theta) = \tan(\frac{\theta}{2})$ . Vous pouvez de suite aller voir l'exemple 15.17 ci-dessous, en prenant connaissance des équations (\*\*\*) au passage. Mais il est instructif de prendre le temps de comprendre pourquoi cette astuce fonctionne.



Considérons le dessin ci-dessous. On indentifie le plan  $\mathbb{R}^2$  avec  $\mathbb{C}$ , et sur le dessin on a placé le point  $z_0 = -1$  ainsi qu'un point  $z = x + iy = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$  sur le cercle unité.



L'idée très simple est la suivante : au lieu de repérer le point  $z$  à l'aide de l'angle  $\theta$  qu'il fait avec l'horizontale depuis l'origine, on peut utiliser l'angle  $\alpha$ , entre l'horizontale et la droite passant par  $z_0$  et  $z$ . Remarquons que le triangle représenté sur le dessin est isocèle, donc possède deux angles égaux, et  $2\alpha + \beta = \pi$  ; mais  $\theta + \beta = \pi$  donc  $\alpha = \frac{\theta}{2}$ .

On peut retrouver ceci par le calcul. Écrivons  $z = x + iy$ , alors le vecteur  $u = z - z_0$  est simplement  $u = z + 1 = x + 1 + iy$ . Par définition de  $\alpha$ , on a aussi  $u = re^{i\alpha} = r \cos(\alpha) + ri \sin(\alpha)$  pour un certain  $r > 0$ , donc  $\tan(\alpha) = \frac{y}{x+1}$ . Puisque  $z$  est de module 1, on peut également écrire  $x = \cos(\theta)$  et  $y = \sin(\theta)$ , de sorte que

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) + 1} = \frac{2 \cos(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\theta}{2})}{2 \cos(\frac{\theta}{2})^2 - 1} = \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})} = \tan(\frac{\theta}{2}).$$

On retrouve bien  $\alpha = \frac{\theta}{2}$ , si l'on prend  $\theta$  dans l'intervalle  $]-\pi, \pi[$  et  $\alpha$  dans  $]-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}[$ .

Nous venons d'utiliser quelques formules de trigonométrie bien connues. C'est en faisant un petit effort de calcul supplémentaire que l'on va comprendre l'intérêt d'utiliser  $\alpha$  au lieu

de  $\theta$ . Posons  $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{y}{x+1}$ , et calculons

$$1 + t^2 = \frac{y^2 + x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{x+1},$$

puisque  $x^2 + y^2 = 1$ . On en tire

$$x + 1 = \frac{2}{1 + t^2}, \quad (*)$$

d'où

$$x = \cos(\theta) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad y = \sin(\theta) = \frac{2t}{1 + t^2}. \quad (**)$$

(La deuxième en multipliant (\*) par  $t$ , puisque  $y = t(x+1)$ .) Ces relations sont très intéressantes, puisqu'elles nous poussent à utiliser en réalité  $t$ , et non pas  $\alpha$  lui-même, pour repérer le point  $z$  sur le cercle : l'avantage est alors que les coordonnées  $x$  et  $y$  de  $z$  sont des fractions rationnelles en  $t$ . Par contraste, lorsque l'on exprime  $x$  et  $y$  en fonction de  $\theta$ , on fait appel aux fonctions cosinus et sinus, qui sont bien plus compliquées (la différence va devenir très claire dans le calcul des primitives, ci-dessous).

Pour résumer, nous avons montré la chose suivante.

**PROPOSITION 15.16** – *Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe ; on suppose  $z \neq -1$ . Alors  $z$  est de module 1 si et seulement s'il existe un nombre réel  $t$  tel que*

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Dans ce cas, on a

$$t = \frac{y}{x+1},$$

donc en particulier  $t$  est uniquement déterminé par  $z$ .

Ce résultat n'est pas seulement intéressant pour les primitives (voir l'encadré « Triplets pythagoriciens »). Mais pour l'instant, faisons donc le lien avec le calcul des intégrales, dont

nous nous sommes écartés temporairement. Rappelons que nous cherchons à calculer

$$\int_p^q F(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta.$$

La petite étude géométrique ci-dessus nous pousse à introduire

### Triplets pythagoriciens

La proposition 15.16 établit une bijection entre l'ensemble  $\mathbb{R}$  d'une part, et l'ensemble des points sur le cercle unité (sauf  $(-1, 0)$ ) d'autre part. Cette bijection étant donnée par la formule explicite

$$t \mapsto \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right),$$

on constate qu'elle possède la propriété remarquable d'établir également une bijection entre  $\mathbb{Q}$  et l'ensemble des points  $(x, y)$  sur le cercle tels que  $x \in \mathbb{Q}$  et  $y \in \mathbb{Q}$  (et  $(x, y) \neq (-1, 0)$ ).

Voici une application célèbre. Un *triplet pythagoricien* est donné par trois nombres entiers  $(a, b, c)$  tels que  $a^2 + b^2 = c^2$ . Grâce au théorème de Pythagore, on peut interpréter un tel triplet comme donnant les longueurs (entières!) d'un triangle rectangle. Par exemple  $(3, 4, 5)$  est un triplet pythagoricien.

Connaissant un triplet  $(a, b, c)$ , on peut en fabriquer une infinité en multipliant par un même nombre  $n$ , c'est-à-dire en considérant  $(na, nb, nc)$ , mais les triangles correspondants ont le même aspect. Peut-on construire une infinité de triplets pythagoriciens, y compris en considérant comme identiques deux triplets « proportionnels » ? Sans parler d'infinité, peut-on déjà

en construire beaucoup ? Combien pouvez-vous en citer ?

On commence par associer à tout triplet  $(a, b, c)$  la paire  $(x, y)$  avec  $x = \frac{a}{c}$  et  $y = \frac{b}{c}$ . On a alors  $x^2 + y^2 = 1$ , c'est-à-dire que  $(x, y)$  est sur le cercle unité, et  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $y \in \mathbb{Q}$ . Vous montrerez à titre d'exercice que si un autre triplet  $(a', b', c')$  donne la paire  $(x', y')$ , alors  $(x', y') = (x, y)$  si et seulement si  $(a', b', c')$  et  $(a, b, c)$  sont proportionnels. De plus, à partir de  $(x, y)$  on peut retrouver au moins un triplet  $(a, b, c)$  correspondant en multipliant par le produit des dénominateurs de  $x$  et  $y$  (ou leur PPCM).

Or d'après ce qui précède, se donner la paire  $(x, y)$  revient à se donner un nombre  $t \in \mathbb{Q}$ ; de plus les conditions  $x > 0$  et  $y > 0$  (qui s'imposent à nous lorsque l'on prend  $a, b$  et  $c$  positifs) sont équivalentes à  $0 < t < 1$ . Nous avons donc une bijection entre les triplets pythagoriciens « à proportionnalité près » et les nombres rationnels entre 0 et 1 ! Il y en a donc bien une infinité.

Pour  $t = \frac{1}{2}$ , on trouve  $x = \frac{3}{5}$  et  $y = \frac{4}{5}$  d'où le triplet pythagoricien  $(3, 4, 5)$  que nous connaissons déjà. Pour  $t = \frac{1}{3}$  on tombe sur  $(4, 3, 5)$  qui n'est pas vraiment différent. Par contre pour  $t = \frac{1}{4}$  on obtient  $(15, 8, 17)$  et pour  $t = \frac{1}{5}$  on découvre le triplet  $(12, 5, 13)$ .

le nombre  $t$ , qui a l'air de donner des formules simples. Plus précisément, posons

$$t(\theta) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Est-ce un bon changement de variables? Tout d'abord, d'après (\*\*\*) nous avons

$$F(\cos(\theta), \sin(\theta)) = F\left(\frac{1-t(\theta)^2}{1+t(\theta)^2}, \frac{2t(\theta)}{1+t(\theta)^2}\right).$$

Quant à la dérivée  $t'(\theta)$ , nous sommes chanceux car elle vaut

$$t'(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2(\frac{\theta}{2})) = \frac{1}{2}(1 + t(\theta)^2).$$

On peut donc toujours écrire

$$\begin{aligned} \int_p^q F(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta &= 2 \int_p^q F\left(\frac{1-t(\theta)^2}{1+t(\theta)^2}, \frac{2t(\theta)}{1+t(\theta)^2}\right) \frac{t'(\theta)}{1+t(\theta)^2} d\theta \\ &= 2 \int_{t(p)}^{t(q)} F\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Lorsque  $F$  est une fraction rationnelle trigonométrique, l'expression que nous avons à intégrer est une fraction rationnelle en  $t$ . Nous savons donc comment en trouver une primitive.

EXEMPLE 15.17 – Essayons de calculer

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta) d\theta}{\cos(\theta) + \sin(\theta)}.$$

Nous avons bien une expression en  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$ . Comme nous l'avons dit, la seule chose à retenir est que poser  $t(\theta) = \tan(\frac{\theta}{2})$  est une bonne idée. Écrivons  $t$  pour  $t(\theta)$ , et remplaçons  $\cos(\theta)$  par  $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ , puis  $\sin(\theta)$  par  $\frac{2t}{1+t^2}$ . Il vient

$$\frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} = \frac{1-t^2}{-t^2 + 2t + 1} = \frac{\frac{1}{2}(1-t^2)(1+t^2)}{\frac{1}{2}(-t^2 + 2t + 1)(1+t^2)}.$$

La deuxième manoeuvre est là pour faire apparaître  $\frac{1}{2}(1+t^2) = t'(\theta)$ . On a donc

$$I = 2 \int_0^1 \frac{(1-t^2) dt}{(-t^2+2t+1)(1+t^2)},$$

le  $t'(\theta)d\theta$  devenant  $dt$ . Nous avons donc une fraction rationnelle en  $t$ .

Le facteur  $-t^2+2t+1$  au dénominateur s'annule pour  $t = 1 \pm \sqrt{2}$ , ce qui permet de factoriser. La décomposition en éléments simples s'écrit alors

$$\frac{1-t^2}{-(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})(1+t^2)} = \frac{1}{4(t-1-\sqrt{2})} + \frac{1}{4(t-1+\sqrt{2})} - \frac{t-1}{2(1+t^2)}.$$

D'où la primitive

$$\frac{1}{4} \ln|t-1-\sqrt{2}| + \frac{1}{4} \ln|t-1+\sqrt{2}| - \frac{1}{4} \ln(1+t^2) + \frac{1}{2} \arctan(t).$$

Cette expression vaut 0 pour  $t = 0$  (noter que  $\ln(\sqrt{2}-1) + \ln(\sqrt{2}+1) = \ln(\sqrt{2}^2-1) = \ln(1) = 0$ ), et elle vaut  $\frac{\pi}{8}$  pour  $t = 1$ . Finalement  $I = \frac{\pi}{4}$ .

# Chapitre 16

## Diagonalisation

Dans ce chapitre, la lettre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

– Première lecture –

### Motivation

Dans ce chapitre, les concepts d'algèbre linéaire des chapitres précédents vont être mis en application. Nous allons décrire la technique générale de la *diagonalisation*, qui sera utilisée dans ce livre dans le cadre de problèmes très concrets : lors de l'étude de certaines équations différentielles d'une part (décrite dans le chapitre suivant), et d'autre part pour analyser certaines suites récurrentes. Voyons ce dernier point tout de suite.

Imaginons une suite de vecteurs  $(X_n)_{n \geq 0}$ , avec  $X_n \in \mathbb{R}^d$ , définie par récurrence de la manière suivante : on se donne  $X_0$ , on fixe une matrice  $A$  de dimension  $d \times d$ , et on pose

$$X_{n+1} = AX_n. \quad (*)$$

Pour être très concret, nous allons prendre un exemple célèbre. Commençons par la *suite de Fibonacci*  $(u_n)_{n \geq 0}$ , qui est la suite de réels définie par  $u_0 = u_1 = 1$  et  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ . On peut

*Le lecteur ayant assimilé la définition 2.15 peut prendre pour  $\mathbb{K}$  n'importe quel corps.*

alors poser pour tout  $n \geq 0$  :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

On a alors

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+1} + u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = AX_n,$$

où  $A$  est la matrice  $2 \times 2$  ci-dessus. On est donc bien en présence d'une suite de la forme (\*). Nous allons voir que l'on sait bien mieux étudier  $(X_n)$  que  $(u_n)$ . En fait en passant par  $(X_n)$ , nous allons trouver une expression directe pour  $u_n$  en fonction de  $n$ , ce qui n'est *a priori* pas évident du tout.

Commençons par quelques calculs :

$$X_1 = AX_0, \quad X_2 = AX_1 = A^2X_0, \quad X_3 = AX_2 = A^3X_0,$$

et par récurrence on obtient immédiatement  $X_n = A^nX_0$ . Nous devons donc calculer les puissances successives de la matrice  $A$ . Par le calcul direct, c'est difficile (essayez quelques valeurs de  $n$  pour tenter de deviner la formule).

Soit alors maintenant

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où sort cette matrice ? Tout le but de ce chapitre, justement, et d'expliquer d'où provient  $P$ , et comment la trouver par vous-même. Pour l'instant, supposons donc que l'on ait envie d'essayer cette matrice, et de calculer  $P^{-1}AP$ . On trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

puis

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

Voilà qui nous arrange bien. En effet, la matrice  $P^{-1}AP$  est *diagonale*, c'est-à-dire que seuls les coefficients sur sa diagonale sont non-nuls ; on peut donc calculer les puissances de cette matrice sans effort :

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Bien sûr ce que nous cherchons, ce sont les puissances de  $A$ . Mais à y bien regarder on a :

$$(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P,$$

et de même

$$(P^{-1}AP)^3 = P^{-1}AP(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}A^2P = P^{-1}A^3P.$$

Par récurrence on obtient pour tout  $n$  :

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP.$$

Ainsi la matrice que l'on cherche est tout simplement

$$A^n = P(P^{-1}AP)^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Il n'y a plus qu'à multiplier ces trois matrices. Pour le faire sans douleur, introduisons

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

de sorte que

$$P = \begin{pmatrix} -\lambda_2 & -\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ -1 & -\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

En tenant compte de la relation  $\lambda_1\lambda_2 = -1$ , on obtient finalement

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}.$$



Récoltons le fruit de nos efforts, et retournons à la suite de Fibonacci. Nous avons

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_n = A^n X_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sur la première ligne de cette égalité de matrices-colonnes, on a la relation

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} + \lambda_1^n - \lambda_2^n),$$

ce qui est donc une formule donnant le  $n$ -ième nombre de Fibonacci. Il est remarquable que ce soit un nombre entier, de ce point de vue. Noter qu'en utilisant les relations  $1 + \lambda_1 = \lambda_1^2$  et  $1 + \lambda_2 = \lambda_2^2$ , on peut même simplifier cette expression en

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}).$$

Pouvez-vous utiliser cette expression pour  $u_n$  afin de calculer la limite de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  ?

Le calcul ci-dessus a été rendu possible par l'arrivée dramatique de la matrice  $P$ , ayant la propriété que  $P^{-1}AP$  est diagonale. Trouver  $P$ , étant donnée la matrice  $A$ , est ce qu'on appelle *diagonaliser*  $A$ . Dans ce chapitre nous allons voir comment procéder (lorsque c'est possible). Nous aurons besoin d'utiliser les concepts d'espace vectoriel, d'application linéaire, mais aussi de déterminant, développés dans les chapitres précédents. En un sens, nous voyons une mise en oeuvre de toute cette théorie.

### Matrices conjuguées

Nous allons commencer par donner des noms aux phénomènes observés dans l'exemple précédent. Ce chapitre introduit beaucoup de vocabulaire !

**DÉFINITION 16.1** – Deux matrices carrées  $A$  et  $B$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  sont dites *conjuguées*, ou *semblables*, s'il existe une matrice inversible  $P$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  telle que  $B = P^{-1}AP$  (ou ce qui revient au même,  $A = PBP^{-1}$ ).

On dit qu'une matrice  $A$  est *diagonalisable* lorsqu'il existe une matrice diagonale  $D$  telle que  $A$  et  $D$  sont conjuguées. ■

EXEMPLE 16.2 – Nous avons vu ci-dessus que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

sont conjuguées : en effet  $D = P^{-1}AP$  avec

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, la matrice  $A$  est diagonalisable.

En présence de deux matrices  $A$  et  $B$ , il est difficile de savoir si elles sont conjuguées, et dans ce chapitre nous allons apprendre quelques techniques. Voici déjà un premier critère simple.

LEMME 16.3 – Si  $A$  et  $B$  sont conjuguées, alors  $\det(A) = \det(B)$ .

*Démonstration.* En effet, si  $B = P^{-1}AP$ , alors

$$\det(B) = \det(P)^{-1} \det(A) \det(P) = \det(A). \quad \square$$

EXEMPLE 16.4 – Dans l'exemple précédent, on a bien  $\det(A) = \det(D) = -1$ . Par contre les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas conjuguées, puisque  $\det(A) = 2$  et  $\det(B) = 0$ .

Après le déterminant, voici la « trace » :

DÉFINITION 16.5 – Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice carrée. La *trace* de  $A$ , notée  $\text{Tr}(A)$ , est la somme des coefficients sur la diagonale de  $A$ . ■

EXEMPLE 16.6 – En reprenant les notations de l'exemple 16.2, on a  $\text{Tr}(A) = 0 + 1 = 1$ . Pour  $D$ , on obtient

$$\text{Tr}(D) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1.$$

On obtient le même résultat, et ce n'est pas un hasard.

LEMME 16.7 – *La trace possède les propriétés suivantes :*

1. Si  $M$  et  $N$  sont carrées, alors  $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$ .
2. Si  $A$  et  $B$  sont conjuguées, alors  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$ .

*Démonstration.* Pour le (1), on fait un calcul direct. Si  $M = (m_{ij})_{i,j}$  et  $N = (n_{k\ell})_{k,\ell}$ , on trouve en fait

$$\text{Tr}(MN) = \sum_{i,k} m_{ik}n_{ki} = \text{Tr}(NM).$$

Pour le (2), supposons que  $B = P^{-1}AP$ , et posons  $M = P^{-1}$ , puis  $N = AP$ . Alors

$$\text{Tr}(B) = \text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM) = \text{Tr}(APP^{-1}) = \text{Tr}(A). \quad \square$$

EXEMPLE 16.8 – Nous allons pouvoir donner des exemples de matrices qui ne sont *pas* diagonalisables. Commençons par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Supposons que  $A$  soit diagonalisable, donc qu'il existe une matrice inversible  $P$  telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D.$$

On doit alors avoir  $\det(A) = 1 = \det(D) = \lambda_1\lambda_2$ , et  $\text{Tr}(A) = 2 = \text{Tr}(D) = \lambda_1 + \lambda_2$ . Nous connaissons donc la somme et le produit de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , et il est alors facile de trouver ces nombres : l'astuce habituelle est de regarder le polynôme

$$(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2 = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2.$$

On en déduit que  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Mais alors, la matrice  $D$  n'est autre que la matrice identité! Par suite

$$A = P^{-1}DP = P^{-1} \text{Id} P = P^{-1}P = \text{Id},$$

ce qui est absurde puisque  $A \neq \text{Id}$ . Cette contradiction montre que  $P$  ne peut pas exister, c'est-à-dire que  $A$  n'est pas diagonalisable.

Voyons maintenant la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Celle-ci est-elle diagonalisable? De nouveau, supposons qu'il existe  $P$  telle que  $P^{-1}AP = D$ , avec  $D$  ayant les coefficients  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sur la diagonale, comme ci-dessus. Cette fois-ci, on doit avoir  $\lambda_1\lambda_2 = \det(A) = 1$  et  $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(A) = 0$ . Ceci donne

$$(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) = X^2 + 1.$$

Les nombres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , qui sont des éléments de  $\mathbb{K}$ , doivent donc être les racines du polynôme  $X^2 + 1$ . Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , nous avons déjà une contradiction, puisque les racines sont  $i$  et  $-i$ , qui ne sont pas dans  $\mathbb{R}$ : on dit que  $A$  n'est pas diagonalisable « sur  $\mathbb{R}$  ».

Mais on peut considérer  $A$  comme une matrice de  $M_2(\mathbb{C})$ , à coefficients complexes, et rechercher  $P$  également à coefficients complexes. Dans ce cas on peut prendre

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \text{ et alors } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Donc  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ . Là encore, nous allons expliquer dans la suite du chapitre comment trouver cette matrice  $P$ , que nous avons sortie de nulle part.

### Interprétation à l'aide des applications linéaires

La proposition que voici donne des exemples de matrices conjuguées, et en un sens elle les donne même tous.

PROPOSITION 16.9 – Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, et soit  $f : E \rightarrow E$  une application linéaire. Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux bases de  $E$ . Les matrices de  $f$  dans ces bases respectives sont notées

$$A = {}_{\mathcal{A}}[f]^{\mathcal{A}} \quad \text{et} \quad B = {}_{\mathcal{B}}[f]^{\mathcal{B}}.$$

Alors  $A$  et  $B$  sont conjuguées, et plus précisément on a même  $B = P^{-1}AP$  où  $P$  est la matrice de passage

$$P = {}_{\mathcal{A}}P^{\mathcal{B}}.$$

Réciproquement, si  $C$  est une matrice de la même taille que  $A$ , telle que  $A$  et  $C$  sont conjuguées, alors il existe une base  $\mathcal{C}$  de  $E$  telle que

$$C = {}_{\mathcal{C}}[f]^{\mathcal{C}}.$$

Démonstration. C'est la formule du changement de base (proposition 13.30), qui affirme précisément que

$${}_{\mathcal{B}}[f]^{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}P^{\mathcal{A}} {}_{\mathcal{A}}[f]^{\mathcal{A}} {}_{\mathcal{A}}P^{\mathcal{B}}.$$

Rappelons que si  $P = {}_{\mathcal{A}}P^{\mathcal{B}}$ , alors  $P^{-1} = {}_{\mathcal{B}}P^{\mathcal{A}}$ .

Pour la réciproque, soit  $P$  telle que  $C = P^{-1}AP$ . Soient  $e_1, e_2, \dots, e_n$  les vecteurs de  $E$  dont les coordonnées dans la base  $\mathcal{A}$  sont les colonnes de la matrice  $P$ . Puisque  $P$  est inversible, ses colonnes forment une base de  $\mathbb{K}^n$  (corollaire 11.21), donc la famille  $\mathcal{C} = e_1, \dots, e_n$  est une base de  $E$  (proposition 11.29). D'après la formule du changement de base on a

$${}_{\mathcal{C}}[f]^{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}P^{\mathcal{A}} {}_{\mathcal{A}}[f]^{\mathcal{A}} {}_{\mathcal{A}}P^{\mathcal{C}} = P^{-1}AP = C. \quad \square$$

Conclusion : deux matrices sont conjuguées exactement lorsqu'elles représentent la même application linéaire dans deux bases différentes. De nouveau, les techniques matricielles et le concept d'application linéaire vont s'enrichir mutuellement.

Pour diagonaliser, il va être très utile de réfléchir en termes d'application linéaires. En effet :

PROPOSITION 16.10 – Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , et soit  $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  l'application linéaire définie par  $A$ , c'est-à-dire  $f(v) = Av$ . Alors  $A$  est diagonalisable  $\iff$  il existe une base  $e_1, e_2, \dots, e_n$  de  $\mathbb{K}^n$  avec la propriété que  $f(e_i) = \lambda_i e_i$  pour un certain scalaire  $\lambda_i \in \mathbb{K}$ .

Lorsque c'est le cas, soit  $P$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs  $e_i$ ; on a alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Démonstration. Soit  $\mathcal{C}$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , de sorte que  $A = {}_{\mathcal{C}}[f]^{\mathcal{C}}$ . Supposons que la base  $\mathcal{B} = e_1, \dots, e_n$  existe avec la propriété ci-dessus, alors par définition même de la matrice d'une application linéaire, on a

$${}_{\mathcal{B}}[f]^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (**)$$

Mais d'après la formule du changement de base, on a  ${}_{\mathcal{B}}[f]^{\mathcal{B}} = P^{-1}AP$  avec  $P = {}_{\mathcal{C}}[f]^{\mathcal{B}}$ . Donc (\*) est vérifiée, et  $A$  est diagonalisable.

Réciproquement, si (\*) est vérifiée, on procède à l'envers : on appelle  $e_1, \dots, e_n$  les colonnes de  $P$ , qui forment une base  $\mathcal{B}$  puisque  $P$  est inversible ; la formule du changement de variable nous dit que (\*\*) est vérifiée ; et par définition même cela signifie que  $f(e_i) = \lambda_i e_i$ .  $\square$

De nouveau, ces choses portent des noms classiques :

DÉFINITION 16.11 – Soit  $f: E \rightarrow E$  une application linéaire. Un vecteur propre de  $f$  est un vecteur  $v \neq 0$  tel que  $f(v) = \lambda v$  pour un certain scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On dit que  $v$  et  $\lambda$  sont associés.

Lorsque  $\lambda \in \mathbb{K}$  est associé à au moins un vecteur propre, on dit que c'est une valeur propre de  $f$ .

Enfin, la valeur propre  $\lambda$  étant fixée, l'ensemble des  $v \in E$  tels que  $f(v) = \lambda v$  est appelé *l'espace propre* associé à  $\lambda$ . Nous le noterons  $E_\lambda$ . ■

Notez bien la condition  $v \neq 0$ , qui est essentielle ; elle garantit que  $v$  détermine  $\lambda$ , puisque  $\lambda v = \mu v$  entraîne bien  $\lambda = \mu$ , lorsque  $v \neq 0$ .

EXEMPLE 16.12 – Prenons deux vecteurs  $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$  qui forment une base, et posons  $U = \text{Vect}(e_1)$ , puis  $V = \text{Vect}(e_2)$ , de sorte que  $\mathbb{R}^2 = U \oplus V$ . Soit maintenant  $s$  la symétrie par rapport à  $U$ , dans la direction  $V$ .

Par définition, on a  $s(e_1) = e_1$ , donc  $e_1$  est un vecteur propre de  $s$  associé à la valeur propre 1. De même  $s(e_2) = -e_2$ , donc  $e_2$  est un vecteur propre de  $s$  associé à la valeur propre  $-1$ . Enfin, en écrivant  $\mathcal{B} = e_1, e_2$ , on a

$${}_{\mathcal{B}}[s]^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et cette matrice est diagonale. Par suite, la matrice de  $s$  dans n'importe qu'elle base est de la forme

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P,$$

c'est-à-dire qu'elle est diagonalisable.

Nous pouvons complètement terminer les calculs présentés dans l'introduction de ce chapitre :

EXEMPLE 16.13 – Retournons à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de l'introduction (et de l'exemple 16.2). Pour trouver (seuls !) une matrice  $P$  telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

on utilise d'abord la même astuce que dans l'exemple 16.8 : on doit avoir  $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(A) = 1$  et  $\lambda_1 \lambda_2 = \det(A) = 1$ . Donc

$$(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1 \lambda_2 = X^2 - X - 1.$$

Ainsi,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les racines du polynôme  $X^2 - X - 1$  ; supposons qu'on les ait numérotées de la façon suivante :

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

On comprend déjà mieux d'où provenaient ces  $\sqrt{5}$ !

Maintenant, soit  $f$  l'application  $f(v) = Av$ , comme dans la proposition 16.10. Cherchons les vecteurs propres associés à  $\lambda_1$  : c'est un calcul de système linéaire. En effet, l'équation  $f(v) = \lambda_1 v$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{en posant } v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ceci donne le système

$$\begin{cases} -\lambda_1 x + y = 0 \\ x + (1 - \lambda_1)y = 0 \end{cases}$$

et en faisant  $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{\lambda_1} L_1$  on obtient  $0 = 0$  sur la deuxième ligne. L'ensemble des solutions est donc décrit par la seule équation  $-\lambda_1 x + y = 0$ , on peut prendre  $y$  comme paramètre, et on constate que l'on a un espace vectoriel de dimension 1, avec comme base par exemple (en prenant  $y = 1$ ) le vecteur

$$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En procédant de la même manière pour  $\lambda_2$ , on montre que l'espace propre associé, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs tels que  $f(v) = \lambda_2 v$ , est un espace de dimension 1 avec pour base le vecteur

$$e_2 = \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Il se trouve que  $e_1, e_2$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ , comme on le voit tout de suite. Si alors  $P$  est la matrice dont les colonnes sont  $e_1$  et  $e_2$ , la proposition 16.10 nous dit que  $P^{-1}AP$  est la matrice diagonale annoncée. Voici comment on était venu à bout de la suite de Fibonacci.

### Le polynôme caractéristique

Nous savons désormais diagonaliser les matrices  $2 \times 2$ , du moins lorsque c'est possible, en procédant comme nous l'avons fait dans l'exemple 16.13. Ce qui semble nous empêcher de faire de même avec des matrices quelconques, c'est que l'on ne sait pas *a priori* quelles sont les valeurs propres potentielles, alors que pour les  $2 \times 2$  on exploite l'astuce de calcul  $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A)$ . Il se trouve qu'il existe un polynôme jouant le même rôle pour les matrices de n'importe quelle taille.

PROPOSITION 16.14 – Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , et  $f$  l'application  $f(v) = Av$ . Alors  $\lambda$  est valeur propre de  $f \iff \det(A - \lambda \text{Id}) = 0$ .

L'expression  $\det(A - \lambda \text{Id})$  est un polynôme en  $\lambda$ , que l'on appelle le *polynôme caractéristique de  $A$*  (ou de  $f$ ). On le note  $\chi_A$ , ou  $\chi_f$ .

*Démonstration.* Cette démonstration est facile en soi, mais il est intéressant de noter la quantité de résultats non-triviaux des chapitres précédents qui entrent en jeu.

Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ , notons  $f - \lambda \text{Id}$  l'application définie par  $(f - \lambda \text{Id})(v) = f(v) - \lambda v$ . Alors par définition  $\lambda$  est une valeur propre de  $f \iff$  il existe  $v \neq 0$  tel que  $(f - \lambda \text{Id})(v) = 0 \iff \ker(f - \lambda \text{Id}) \neq \{0\}$ .

D'après la proposition 13.39, cette condition équivaut à dire que  $f - \lambda \text{Id}$  n'est pas injective. D'après le théorème du rang (ou plus précisément le corollaire 13.44), ceci équivaut encore à dire que  $f - \lambda \text{Id}$  n'est pas bijective.

D'après la proposition 13.34, ceci revient à affirmer que la matrice de  $f - \lambda \text{Id}$  dans la base canonique n'est pas inversible. Or cette matrice est  $A - \lambda \text{Id}$ , et finalement la proposition 7.5 affirme que cette condition se ramène à  $\det(A - \lambda \text{Id}) = 0$ .  $\square$

EXEMPLE 16.15 – Prenons une matrice  $2 \times 2$  :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est alors

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(A - \lambda \text{Id}) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc), \end{aligned}$$

ce qui donne dans ce cas particulier

$$\chi_A = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A).$$

On retrouve donc le polynôme de degré 2 qui était apparu dans nos calculs avec les matrices  $2 \times 2$ .

EXEMPLE 16.16 – Prenons maintenant

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est donné par :

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 2 & 1 \\ -6 & -1 - \lambda & -2 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda) \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 2 \\ -6 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc 2 et 3, et on dit que 3 a une « multiplicité » de 2 puisque le polynôme caractéristique a  $(\lambda - 3)^2$  en facteur.

Examinons les vecteurs propres. Pour trouver ceux associés à la valeur propre 2, on résoud comme d'habitude le système  $Av = 2v$ . Faites le calcul, vous trouverez un espace de dimension 1, avec pour base par exemple

$$e_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la valeur propre 3, on résoud  $Av = 3v$ . L'ensemble des solutions est de dimension 2, avec pour base par exemple

$$e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Vérifiez ceci.)

Il se trouve que  $e_1, e_2, e_3$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Nous avons donc une base de vecteurs propres, ce qui signifie que  $A$  est diagonalisable. Plus précisément, si  $P$  est la matrice dont les colonnes sont  $e_1, e_2, e_3$ , on sait sans calcul supplémentaire que

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P.$$

Donnons quelques propriétés générales du polynôme caractéristique.

PROPOSITION 16.17 – Soient  $A$  et  $B$  des matrices de  $M_n(\mathbb{K})$ .

1. Si  $A$  et  $B$  sont conjuguées, alors  $\chi_A = \chi_B$ .
2. Si  $A$  est diagonalisable, alors son polynôme caractéristique  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

Rappelons qu'un polynôme en  $\lambda$  est dit *scindé* si c'est un produit de facteurs de degré 1, c'est-à-dire s'il est de la forme

$$c(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n).$$

*Démonstration.* Si  $B = P^{-1}AP$  alors

$$P^{-1}(A - \lambda \text{Id})P = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P = A - \lambda \text{Id},$$

donc  $B - \lambda \text{Id}$  et  $A - \lambda \text{Id}$  sont conjuguées. Elles ont donc le même déterminant, ce qui donne le (1).

Pour le (2), on utilise le (1) dans le cas où  $B$  est diagonale. On a alors

$$\chi_A = \chi_B = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda).$$

Donc  $\chi_A$  est bien scindé dans ce cas.  $\square$

### Compter les vecteurs propres

Nous avons essentiellement décrit toutes les étapes nécessaires pour diagonaliser une matrice. Mais on peut faire une remarque supplémentaire qui va nous simplifier la tâche.

Après avoir trouvé des vecteurs propres pour les diverses valeurs propres, nous devons vérifier si l'on peut trouver une base complète, formée de ces vecteurs propres. Il s'ensuit un travail de vérification, pour savoir si certaines familles sont libres. Vous aurez peut-être remarqué que dans les exemples jusqu'à présent, on n'avait jamais de mauvaise surprise : ce n'est pas un hasard, comme nous allons le montrer.

Commençons par

**LEMME 16.18** – Soit  $f : E \rightarrow E$  une application linéaire, et soit  $e_1, \dots, e_n$  une famille de vecteurs propres de  $f$ . On suppose que  $e_i$  est associé à  $\lambda_i$ , et que les nombres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont distincts.

Alors la famille  $e_1, \dots, e_n$  est libre.

*Démonstration.* Par récurrence sur  $n$ , le résultat étant évident pour  $n = 1$  (un vecteur propre est non-nul par définition).

Supposons donc que l'on ait  $n + 1$  vecteurs propres, et une combinaison linéaire nulle, disons

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{n+1} e_{n+1} = 0. \quad (*)$$

Appliquons  $f$  aux deux membres de  $(*)$ ; en utilisant  $f(e_i) = \lambda_i e_i$ , il vient

$$\alpha_1 \lambda_1 e_1 + \dots + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} e_{n+1} = 0. \quad (**)$$

Multiplions  $(*)$  par  $\lambda_{n+1}$ , et retranchons le résultat à  $(**)$ ; il vient

$$(\lambda_1 - \lambda_{n+1})\alpha_1 e_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda_{n+1})\alpha_n e_n = 0.$$

Par récurrence, tous les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls, donc  $(\lambda_i - \lambda_{n+1})\alpha_i = 0$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Comme  $\lambda_i - \lambda_{n+1} \neq 0$  par hypothèse, on en tire  $\alpha_i = 0$  pour ces valeurs de  $i$ . Ensuite il est clair que  $\alpha_{n+1} = 0$  également, et la famille est donc libre.  $\square$

Du coup, l'entreprise de diagonalisation s'en trouve simplifiée : en deux mots, lorsque l'on réunit des bases des différents espaces propres, on obtient une famille qui est automatiquement libre. Si elle comporte suffisamment de vecteurs, et seulement dans ce cas, on a réussi à diagonaliser. Plus précisément :

**PROPOSITION 16.19** – Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , et soit  $f$  l'application linéaire associée. Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  les racines distinctes du polynôme caractéristique de  $A$ .

Pour chaque  $\lambda_i$ , soit  $n_i$  la dimension de l'espace propre associé  $\ker(f - \lambda_i \text{Id})$ , et soit

$$e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{in_i}$$

une base de cet espace.

Alors  $A$  est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{i=1}^m n_i = n.$$

Lorsque c'est le cas, la famille comprenant tous les vecteurs  $e_{ij}$  est une base de  $\mathbb{K}^n$ , formée de vecteurs propres de  $f$ .

*Démonstration.* Montrons que la famille formée de tous les  $e_{ij}$  est libre. Si on a une combinaison linéaire nulle de la forme

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} e_{ij} = 0,$$

alors on pose  $e_i = \sum_j \alpha_{i,j} e_{ij}$ . On a  $f(e_i) = \lambda_i e_i$  (puisque chaque  $e_{ij}$  est un vecteur propre associé à  $\lambda_i$ ). De plus on a  $e_1 + e_2 + \dots + e_m = 0$ .

Cette relation donnerait une contradiction au lemme précédent, à moins que tous les vecteurs  $e_i$  soient nuls (et ne sont donc pas des vecteurs propres). On a donc  $e_i = 0$  et donc chaque  $\alpha_{i,j} = 0$  puisque la famille  $e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{in_i}$  est libre.

Comme annoncé, la famille formée de tous les  $e_{ij}$  est libre. Elle comporte  $\sum_i n_i$  éléments, donc si  $\sum_i n_i = n = \dim \mathbb{K}^n$ , c'est une base. Dans ce cas, on est en présence d'une base formée de vecteurs propres, donc  $A$  est diagonalisable.

Pour finir, supposons que  $\sum_i n_i < n$ . Un vecteur propre  $v$  de  $f$  doit appartenir à un  $\ker(f - \lambda_i \text{Id})$  pour un certain  $i$ , donc en particulier  $v \in \text{Vect}(e_{ij})$ . Mais l'espace  $\text{Vect}(e_{ij})$  est de dimension  $\sum_i n_i < n$ , et il ne peut pas contenir une base de  $\mathbb{K}^n$ . Donc il n'existe pas de base de  $\mathbb{K}^n$  formée de vecteurs propres de  $f$ , et  $A$  n'est pas diagonalisable.  $\square$

En particulier, on a le résultat suivant, étonnamment simple :

**COROLLAIRE 16.20** – Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Si le polynôme caractéristique de  $A$  possède  $n$  racines distinctes dans  $\mathbb{K}$ , alors  $A$  est diagonalisable.

*Démonstration.* Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres (distinctes). Chaque espace  $\ker(f - \lambda_i \text{Id})$  est  $\neq \{0\}$ , par définition, donc il est de dimension  $\geq 1$ . Ainsi, la somme  $\sum_i n_i$  du corollaire précédent est  $\geq n$ ; mais bien sûr cette somme est aussi  $\leq n$  puisque l'on a vu que c'est le nombre de vecteurs dans une certaine famille libre.

Finalement  $\sum_i n_i = n$ , donc  $A$  est diagonalisable (et de plus chaque  $n_i = 1$ ).  $\square$

Lorsque l'on souhaite montrer qu'une matrice est diagonalisable, mais que l'on n'a pas besoin de trouver expressément les vecteurs propres, ce corollaire est évidemment idéal. Nous verrons une application dans le chapitre sur les équations différentielles.

Avant de donner des exemples d'utilisation de ces derniers résultats, nous allons résumer la méthode développée dans ce chapitre.

## Résumé

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , soit  $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  l'application linéaire définie par  $f(v) = Av$ . Pour tenter de diagonaliser  $A$ , on suit les étapes suivantes.

1. On calcule le polynôme caractéristique  $\chi_A = \det(A - \lambda \text{Id})$ , et on trouve ses racines  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  dans  $\mathbb{K}$ .
  - ◊ Si  $\chi_A$  n'est pas scindé, alors  $A$  n'est pas diagonalisable, et on s'arrête.

- ◇ Si  $\chi_A$  est scindé, on passe à l'étape suivante. Si les valeurs propres sont distinctes, on sait déjà que  $A$  est diagonalisable.
2. Pour chaque  $\lambda_i$ , on calcule une base de  $\ker(f - \lambda_i \text{Id})$ . On en déduit sa dimension  $n_i$ .
    - ◇ Si  $\sum_i n_i < n$ , la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable, et on s'arrête.
    - ◇ Si  $\sum_i n_i = n$ , la matrice est diagonalisable, et on passe à l'étape suivante.
  3. Soit  $e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{in_i}$  une base de  $\ker(f - \lambda_i \text{Id})$ . Alors la réunion de tous ces vecteurs est une base de  $\mathbb{K}^n$ . Soit  $P$  la matrice dont les colonnes sont, dans l'ordre :

$$e_{11}, \dots, e_{1n_1}, \dots, e_{m1}, \dots, e_{mn_m}.$$

Alors sans calcul supplémentaire on sait que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

À droite on a une matrice diagonale, où  $\lambda_1$  apparaît  $n_1$  fois, puis  $\lambda_2$  apparaît  $n_2$  fois, etc.

EXEMPLE 16.21 – Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le calcul du polynôme caractéristique donne

$$\chi_A = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 2\lambda - 24.$$

Selon la façon de calculer le déterminant, ce polynôme peut vous apparaître factorisé, ce qui est évidemment une bonne chose pour calculer les racines. En règle générale, les opérations sur les lignes ou les colonnes, plutôt que les développements, ont tendance à produire des polynômes factorisés.

Mais admettons que nous ayons obtenu le polynôme sous la forme ci-dessus. Il faut trouver une racine « évidente ». Dans cette situation, il est souvent utile de revenir à la matrice : n'est-il pas clair que si on ajoute 2 sur la diagonale de A, alors la première colonne devient égale à la troisième ? Donc  $\det(A + 2\text{Id}) = 0$ , ce qui signifie que  $-2$  est valeur propre, et  $\chi_A(-2) = 0$ . On termine ensuite facilement la factorisation :

$$\chi_A = -(\lambda + 2)(\lambda^2 - 7\lambda + 12) = -(\lambda + 2)(\lambda - 4)(\lambda - 3).$$

Les valeurs propres sont  $-2$ ,  $4$  et  $3$ . On a trois valeurs propres distinctes, donc on sait que la matrice est diagonalisable. (Ceci conclut l'étape 1).

Avant de poursuivre les calculs, dressons la liste de ce que nous pouvons déjà prévoir. Nous allons trouver des vecteurs  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$ , vecteurs propres associés à  $-2$ ,  $4$  et  $3$  respectivement ; ces vecteurs vont former une base de  $\mathbb{R}^3$ , automatiquement. Soit P la matrice dont les colonnes sont  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ . Alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ce sont les conclusions de l'étape 3. Si les valeurs propres n'avaient pas été distinctes, on n'aurait pas pu prévoir le résultat de l'étape 2.

Cette étape 2 reste à faire, de toute façon. Pour la valeur propre  $-2$  par exemple, on cherche  $\ker(f + 2\text{Id})$  ce qui revient à résoudre

$$\begin{cases} 3x - y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \\ 3x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

En quelques étapes on constate que ce système équivaut aux équations  $y = 0$  et  $x + z = 0$ . En prenant  $z = 1$  par exemple, on



obtient

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De la même manière, on obtient

$$e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

– Deuxième lecture –

### Trigonalisation

Nous l'avons vu, la diagonalisation ne fonctionne pas toujours. À défaut de pouvoir diagonaliser, on tente parfois de *trigonaliser*.

DÉFINITION 16.22 – Une matrice carrée est dite *triangulaire* (supérieure) lorsque les coefficients sous la diagonale sont nuls.

On dit qu'une matrice carrée  $A$  est *trigonalisable* lorsqu'elle est conjuguée à une matrice triangulaire, c'est-à-dire lorsqu'il existe  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  est triangulaire. ■

EXEMPLE 16.23 – La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est triangulaire (donc trigonalisable !). On peut voir facilement qu'elle n'est pas diagonalisable : en effet  $\chi_A = (\lambda - 3)^2$ , donc la seule valeur propre est 3, et l'espace propre correspondant n'est que de dimension 1.

Il est quand même possible de faire des calculs avec  $A$ , par exemple de calculer  $A^n$ , même si c'est plus difficile que pour une matrice diagonale. Posons

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de sorte que  $A = D + N$ . On a  $N^2 = 0$ , ce qui va grandement nous aider. Notons également que  $DM = MD = 3M$  pour toute matrice  $M$ . On peut donc calculer

$$A^2 = (D + N)^2 = (D + N)(D + N) = D^2 + ND + DN + N^2 = D^2 + 6N.$$

De même

$$\begin{aligned} A^3 &= (D^2 + 6N)(D + N) = D^3 + 6ND + D^2N + 6N^2 \\ &= D^3 + 18N + 9N = D^3 + 27N. \end{aligned}$$

Visiblement  $A^n$  est de la forme  $D^n + a_n N$ . On a  $a_2 = 6 = 2 \times 3$  et  $a_3 = 27 = 3 \times 3^2$ . Supposons que  $a_n = n3^{n-1}$ , alors

$$A^{n+1} = (D^n + n3^{n-1}N)(D + N) = D^{n+1} + (n+1)3^n N.$$

Par récurrence, ceci montre que  $a_n = n3^{n-1}$  pour tout  $n$  (dans les exercices nous verrons une autre méthode pour trouver cette expression pour  $a_n$ , sans avoir à « deviner »). Finalement la matrice  $A^n$  vaut

$$D^n + n3^{n-1}N = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} + 3^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Lorsqu'une matrice est triangulaire, avec  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sur la diagonale, son polynôme caractéristique est  $(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$ . En particulier il est scindé; toute matrice dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé ne peut donc pas être trigonalisable.

Sur  $\mathbb{C}$ , tous les polynômes sont scindés d'après le théorème fondamental de l'algèbre, donc on ne risque pas de trouver de matrices non-trigonalisables en procédant comme ça. Et en fait, il n'y en a pas! En effet :

**PROPOSITION 16.24** – Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Alors  $A$  est trigonalisable.

*Démonstration.* On va procéder par récurrence sur  $n$  (pour  $n = 1$  il n'y a rien à prouver).

Soit  $\chi_A$  le polynôme caractéristique de  $A$ . Comme on est sur  $\mathbb{C}$ , ce polynôme possède au moins une racine, disons  $\lambda_1$ .

Si  $f$  est l'application  $f(v) = Av$ , alors par définition, on a donc un vecteur propre  $e_1$  tel que  $f(e_1) = \lambda_1 e_1$ .

D'après le théorème de la base incomplète, on peut trouver une base  $\mathcal{B} = e_1, e_2, \dots, e_n$  de  $\mathbb{C}^n$  dont le premier vecteur est  $e_1$ . La matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme

$${}_B[f]^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \boxed{\phantom{A'}} & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix},$$

où  $A'$  est une matrice  $(n-1) \times (n-1)$  (et  $*$  est un coefficient quelconque).

Par récurrence, il existe une matrice inversible  $Q$  telle que la matrice  $T' = Q^{-1}A'Q$  est triangulaire. Posons alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{Q} & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

L'inverse de  $P$  est de la même forme, avec  $Q$  remplacée par  $Q^{-1}$ . Un petit calcul montre alors que

$$P^{-1}{}_B[f]^{\mathcal{B}}P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \boxed{Q^{-1}A'Q = T'} & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

En particulier cette matrice est triangulaire, puisque  $T'$  l'est; notons-la  $T$ , de sorte que  ${}_B[f]^{\mathcal{B}} = PTP^{-1}$ .

Enfin, notons  $\mathcal{C}$  la base canonique, ce qui permet d'écrire  $A = {}_{\mathcal{C}}[f]^{\mathcal{C}}$ . Notons également  $R = {}_B P^{\mathcal{C}}$ . La formule du changement de base nous dit que

$$A = R^{-1}{}_B[f]^{\mathcal{B}}R = R^{-1}PTP^{-1}R = S^{-1}TS,$$

avec  $S = P^{-1}R$ . Ainsi, la matrice  $A$  est bien conjuguée à la matrice triangulaire  $T$ .  $\square$

Le théorème montre donc qu'il existe P telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est donc

$$(\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda),$$

et les nombres  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de A. On observe alors que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \text{Tr}(A)$ , et  $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det(A)$ , formules que nous connaissions pour  $n = 2$ . En d'autres termes :

**COROLLAIRE 16.25** – *La somme des valeurs propres d'une matrice complexe, comptées avec leurs multiplicités, est égale à sa trace ; le produit de ces valeurs propres est égale à son déterminant.*

On a une notion évidente de matrice *triangulaire inférieure*, lorsque les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls. On déduit du théorème précédent que :

**COROLLAIRE 16.26** – *Toute matrice complexe est conjuguée à une matrice triangulaire inférieure.*

*Démonstration.* On applique le théorème à la matrice transposée  ${}^tA$  : il existe donc P telle que  $T = P^{-1}({}^tA)P$  est triangulaire supérieure. En transposant, on obtient  ${}^tPA{}^tP^{-1} = {}^tT$ . Posant  $Q = {}^tP^{-1}$ , on a bien montré que  $Q^{-1}AQ = {}^tT$  était triangulaire inférieure.  $\square$

## Approximations

À l'aide de la proposition 16.24, on peut montrer que « la plupart » des matrices sont diagonalisables. Plus précisément, nous allons montrer :

**PROPOSITION 16.27** – *Soit A une matrice à coefficients complexes. Alors il existe une suite  $(A_n)_{n \geq 0}$  de matrices diagonalisables, telle que*

$$A_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A.$$

Rappelons un peu ce que la convergence signifie. Si  $A \in M_N(\mathbb{C})$ , alors chaque  $A_n \in M_N(\mathbb{C})$ ; dire que  $A_n$  converge vers  $A$  signifie que les  $N^2$  coefficients de  $A_n$  convergent les  $N^2$  coefficients de  $A$ . Mais on peut identifier une matrice de  $M_N(\mathbb{C})$  avec un vecteur de  $\mathbb{C}^{N^2}$  (ou encore de  $\mathbb{R}^{4N^2}$ , en voyant  $\mathbb{C}$  comme  $\mathbb{R}^2$ ), et penser à la convergence en termes de norme comme dans la proposition 4.28, si l'on préfère.

Cette proposition est à rapprocher de ce que font les ordinateurs lorsqu'ils effectuent des calculs numériques approchés. Étant donnée une matrice à coefficients réels ou complexes, et quelle que soit la précision requise, un ordinateur (auquel on ne demande pas explicitement de faire des calculs exacts) va toujours annoncer qu'elle est diagonalisable (sur  $\mathbb{C}$ ). Concrètement, les valeurs propres, dont seule une valeur approchée sera calculée, seront toujours considérées comme distinctes, et dans ce cas on a le corollaire 16.20.

C'est cette même idée qui va guider la démonstration.

*Démonstration.* D'après la proposition 16.24, on peut trouver  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  est triangulaire; utilisons les notations suivantes :

$$T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ & \lambda_2 & \cdots & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{pmatrix}. \quad (\dagger)$$

Soit maintenant  $T_n$  obtenue en prenant les coefficients de  $T$  mais avec les changements suivants sur la diagonale :

$$T_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{n} & * & * & * \\ & \lambda_2 + \frac{2}{n} & \cdots & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N + \frac{N}{n} \end{pmatrix}.$$

(Les coefficients  $*$  sont les mêmes que dans  $(\dagger)$ ; seule la diagonale est changée.) Donc sur la ligne  $i$  on rencontre le coefficient  $\mu_i = \mu_{i,n} = \lambda_i + \frac{i}{n}$ .

Nous allons voir que les coefficients  $\mu_i$  sont tous distincts, pour  $n$  suffisamment grand. En effet, si  $i$  et  $j$  sont deux indices,

alors nous avons deux cas à considérer : d'abord, si  $\lambda_i = \lambda_j$ , alors  $\mu_i - \mu_j = \frac{i-j}{n} \neq 0$  si  $i \neq j$ ; si par contre  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , alors puisque  $\mu_i$  converge vers  $\lambda_i$ , et  $\mu_j$  converge vers  $\lambda_j$ , il est clair que  $\mu_i \neq \mu_j$  dès que  $n$  est suffisamment grand.

D'après le corollaire 16.20, la matrice  $T_n$  est diagonalisable, pour tous les  $n$  suffisamment grands. Or il est clair que

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} T \quad \text{et que} \quad PT_nP^{-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} PTP^{-1} = A.$$

Enfin, nous notons que  $PT_nP^{-1}$  est diagonalisable pour  $n$  suffisamment grand, comme  $T_n$ . □

# Chapitre 17

## Équations différentielles linéaires

– Première lecture –

Une *équation différentielle* est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction, souvent notée  $y$  dans ce chapitre. Par exemple, si  $f$  est une fonction quelconque, on peut considérer l'équation différentielle très simple

$$y' = f,$$

dont les solutions sont les primitives de  $f$ . Nous avons étudié cette équation dans le chapitre sur les intégrales. Autre exemple : l'équation

$$y' = y$$

a pour solutions (définies sur  $\mathbb{R}$ ) les fonctions de la forme  $y(x) = ce^x$  avec  $c \in \mathbb{R}$ , et aucune autre. Nous avons vu ce résultat à l'occasion du lemme 10.4, et nous allons le redémontrer sous peu.

Dans ce chapitre, nous donnons un certain nombre de recettes pour résoudre des équations bien particulières, qui sont parmi celles que l'on rencontre le plus souvent. Nous aurons besoin du calcul de primitives, et aussi de l'algèbre linéaire

pour les équations les plus compliquées. Dans le chapitre suivant, nous donnerons quelques résultats généraux, notamment sur l'existence et l'unicité des solutions. Cette théorie générale n'est pas nécessaire pour l'instant.

## Équations linéaires d'ordre 1

Ce sont les équations de la forme

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x). \quad (E)$$

L'équation homogène associée est

$$y'(x) = a(x)y(x). \quad (H)$$

En général on a une restriction à  $x \in I$ , où  $I \subset \mathbb{R}$  est souvent un intervalle (voir les exemples ci-dessous).

La proposition suivante justifie l'adjectif « linéaire » :

**PROPOSITION 17.1** – *L'ensemble  $S_H$  des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel.*

*De plus, si  $y_0$  est une solution particulière de l'équation (E), alors n'importe quelle solution  $y_1$  de (E) peut s'écrire*

$$y_1 = y_0 + y$$

où  $y$  est solution de (H).

Notons une chose : on peut considérer les solutions  $y$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , ou bien celles à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . L'espace vectoriel  $S_H$  est lui-même réel ou complexe selon le choix que l'on fait. La théorie est la même dans les deux cas (alors que dans la suite du chapitre, vous serez peut-être surpris de voir que l'on travaille avec  $\mathbb{C}$  en général).

*Démonstration.* Si  $y$  et  $z$  sont des solutions de (H) alors on calcule tout simplement

$$(y + z)' = y' + z' = ay + az = a(y + z),$$

donc  $y + z \in S_H$ . On vérifie également facilement que si  $y \in S_H$  et si  $\lambda$  est un scalaire, alors  $\lambda y \in S_H$ . Donc  $S_H$  est un espace



vectoriel. (En langage plus savant : l'application  $y \mapsto y' - ay$  est linéaire, et  $S_H$  est son noyau.)

Pour la deuxième partie, soient  $y_0$  et  $y_1$  deux solutions de (E), alors

$$(y_1 - y_0)' = y_1' - y_0' = (ay_1 + b) - (ay_0 + b) = a(y_1 - y_0),$$

donc la fonction  $y = y_1 - y_0$  est bien solution de (H).  $\square$

Nous connaissons donc la structure de l'ensemble des solutions de (E), et l'on est poussé à commencer par résoudre (H). C'est assez facile.

Voyons d'abord l'idée intuitive (qui va aussi servir de moyen mnémotechnique). On souhaite résoudre l'équation  $y' = ay$ . On a bien envie d'écrire

$$\frac{y'}{y} = a, \tag{*}$$

mais alors il faut se restreindre aux fonctions  $y$  qui ne s'annulent pas. Ceci étant, on peut intégrer les deux membres de l'équation (\*), pour peu que  $a$  soit continue. Il vient

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(t) dt}{y(t)} = [\ln |y(t)|]_{x_0}^x = \int_{x_0}^x a(t) dt.$$

Ici nous avons supposé que  $y$  était définie sur un intervalle  $I$  contenant  $x_0$  et  $x$ . On va réécrire un peu cette égalité. Posons

$$\alpha(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt,$$

de sorte que l'on a

$$\ln |y(x)| = \alpha(x) + c_0,$$

où  $c_0$  est une constante. Il vient

$$|y(x)| = e^{\alpha(x)} e^{c_0}.$$

Débarrassons-nous de cette valeur absolue. On a supposé que  $y$  ne s'annulait pas, et était définie sur un intervalle ; de plus,

on suppose dès le départ que  $y$  est dérivable donc continue. D'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $y$  ne change pas de signe. On a donc ou bien  $y(x) = |y(x)|$  pour tout  $x \in I$ , ou bien  $y(x) = -|y(x)|$  pour tout  $x$ . En posant  $c = \pm e^{c_0}$ , on en conclut que

$$y(x) = ce^{\alpha(x)}, \quad (**)$$

pour une certaine constante  $c$ , et pour tout  $x \in I$ .

Nous avons donc montré que les solutions de (H) qui ne s'annulent pas sur un intervalle  $I$  sont de la forme (\*\*). On imagine assez difficilement comment une solution pourrait s'annuler, et prendre la forme (\*\*) là où elle ne s'annule pas. C'est en effet impossible, comme le montre le résultat suivant.

**PROPOSITION 17.2** – *Supposons que  $a$  est continue sur un intervalle  $I$ , et que  $y$  est une solution définie sur  $I$  de l'équation*

$$y'(x) = a(x)y(x) \quad (x \in I)$$

*Alors il existe une constante  $c$  telle que*

$$y(x) = ce^{\alpha(x)},$$

*où  $\alpha$  est une primitive de  $a$ , c'est-à-dire que  $\alpha' = a$ . Réciproquement pour tout  $c$  cette expression donne une solution.*

Notez que maintenant que nous avons pressenti ce résultat, nous en donnons une démonstration complètement détournée (et très efficace).

*Démonstration.* Soit  $\alpha$  une telle primitive, qui existe puisque  $a$  est continue. Considérons la fonction  $f$  définie sur  $I$  par  $f(x) = y(x)e^{-\alpha(x)}$ . Alors

$$f'(x) = y'(x)e^{-\alpha(x)} - \alpha'(x)y(x)e^{-\alpha(x)} = (a(x)y(x) - a(x)y(x))e^{-\alpha(x)} = 0.$$

Donc la fonction  $f$  est constante sur l'intervalle  $I$ , disons  $f(x) = c$ . D'où le résultat (la réciproque est évidente).  $\square$

En particulier, la seule fonction qui s'annule est obtenue en prenant  $c = 0$ , et alors  $y$  est la fonction nulle.

EXEMPLE 17.3 – Si on revient à l'équation  $y' = y$  sur  $I = \mathbb{R}$ , la proposition nous dit que ses solutions sont de la forme  $y(x) = ce^x$ , comme on le savait.

EXEMPLE 17.4 – Considérons maintenant  $y'(x) = xy(x)$ , sur  $I = \mathbb{R}$ . Pour se rappeler l'énoncé de la proposition, il est très courant de refaire les premières étapes du calcul que nous avons fait en préliminaire. On écrit donc

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = x,$$

d'où

$$\ln|y(x)| = \frac{x^2}{2} + \text{constante},$$

puis

$$y(x) = ce^{\frac{x^2}{2}}.$$

(On retient que « la valeur absolue est passée dans  $c$  ».)

### Trouver une solution particulière

Nous savons désormais résoudre (H). Pour résoudre (E), reste à trouver une solution de (E), et à appliquer la proposition 17.1. À cette fin, il existe un principe général, qui servira dans tout le chapitre (et mérite d'être tenté avec n'importe quelle équation différentielle). Cette méthode porte le nom troublant de *variation des constantes*.

Le principe est le suivant. Après avoir trouvé les solutions de l'équation homogène, on constate qu'elles s'écrivent avec un certain nombre de paramètres (les « constantes »). On peut alors essayer de trouver une solution de l'équation générale en remplaçant ces paramètres par des fonctions (donc en les faisant « varier »).

C'est une recette assez vague, qui s'applique dans de nombreuses situations. Dans le cas des équations linéaires d'ordre 1, les choses sont très simples. Les solutions de (H) sont de la forme  $y(x) = ce^{\alpha(x)}$ . Pour trouver une solution de (E), on peut alors essayer une fonction de la forme  $y(x) = c(x)e^{\alpha(x)}$ .

EXEMPLE 17.5 – Cherchons une fonction  $y$  telle que

$$y'(x) = y(x) + 1 \quad (\text{E})$$

On a vu que les solutions de  $y'(x) = y(x)$  sont de la forme  $y(x) = ce^x$ ; d'après le principe de variation de la constante, on a intérêt à chercher une solution sous la forme  $y(x) = c(x)e^x$ .

On a alors  $y'(x) = c'(x)e^x + c(x)e^x = (c'(x) + c(x))e^x$ . Si nous remplaçons  $y'$  par sa valeur dans (E), on trouve

$$(c'(x) + c(x))e^x = c(x)e^x + 1,$$

ce qui revient à  $c'(x)e^x = 1$  ou encore  $c'(x) = e^{-x}$ . On en déduit  $c(x) = -e^{-x} + \text{constante}$ ; comme on cherche juste une solution (et non pas toutes les solutions), on prend la constante égale à 0. Finalement  $c(x) = -e^{-x}$ , et  $y(x) = -e^{-x}e^x = -1$ . La fonction constante égale à  $-1$  est solution de (E), comme on aurait pu le remarquer tout de suite!

Pour finir le travail, appliquons la proposition 17.1. Elle affirme que la « solution générale » de (E) (selon l'expression consacrée) et de la forme  $-1 + ce^x$ , avec  $c \in \mathbb{R}$ .

Dans le cas qui nous préoccupe des équations linéaires d'ordre 1, on a en fait le résultat suivant.

LEMME 17.6 – *Pour les équations linéaires d'ordre 1, la méthode de la variation de la constante fonctionne toujours, et se ramène à un calcul de primitive.*

C'est pourquoi vous entendrez les gens parler « d'intégrer » une équation différentielle, au lieu de la « résoudre ».

*Démonstration.* Les solutions de  $y' = ay$ , lorsque  $a$  est continue, sont de la forme  $y(x) = ce^{\alpha(x)}$ , où  $\alpha'(x) = a(x)$ . Cherchons une solution de l'équation  $y' = ay + b$  sous la forme  $y(x) = c(x)e^{\alpha(x)}$ .

On a  $y'(x) = (c'(x) + a(x)c(x))e^{\alpha(x)} = a(x)y(x) + c'(x)e^{\alpha(x)}$ . Donc l'équation  $y' = ay + b$  revient à  $c'(x)e^{\alpha(x)} = b(x)$ , ou encore  $c'(x) = b(x)e^{-\alpha(x)}$ . On s'est donc bien ramené à calculer une primitive de  $b(x)e^{-\alpha(x)}$ .  $\square$

*Une astuce est possible ici : on note que si  $y$  est solution de (E), alors la fonction  $z(x) = y(x) + 1$  vérifie  $z' = z$ .*

EXEMPLE 17.7 – Prenons l'équation

$$y'(x) = \frac{y(x)}{1+x^2} + e^{\arctan(x)}. \quad (\text{E})$$

Commençons par l'équation homogène

$$y'(x) = \frac{y(x)}{1+x^2} \quad (\text{H})$$

qui donne

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{1+x^2},$$

d'où

$$\ln|y(x)| = \arctan(x) + c,$$

et

$$y(x) = ce^{\arctan(x)}.$$

Maintenant, cherchons une solution particulière de (E), sous la forme  $y(x) = c(x)e^{\arctan(x)}$ . On peut faire un calcul direct de  $y'$  et remplacer dans (E); on peut aussi si l'on préfère retenir la formule obtenue dans la démonstration du lemme; enfin on peut aussi redémontrer rapidement le lemme, lorsque le cas général est plus clair que le cas particulier considéré (dériver  $c(x)e^{\arctan(x)}$  n'est pas tellement plus agréable que dériver  $c(x)e^{\alpha(x)}$ ). Bref, on constate que  $y(x) = c(x)e^{\arctan(x)}$  est solution de (E) lorsque

$$c'(x) = e^{\arctan(x)}e^{-\arctan(x)} = 1.$$

On prend donc  $c(x) = x$ , et alors  $y(x) = xe^{\arctan(x)}$ . On peut vérifier rapidement que c'est bien une solution de (E).

La solution générale de (E) est alors

$$y(x) = xe^{\arctan(x)} + ce^{\arctan(x)},$$

où  $c$  est une constante.

## Équations linéaires d'ordre supérieur

Sans se restreindre à l'ordre 1, une *équation différentielle linéaire* est par définition de la forme

$$y^{(n+1)}(x) = a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) + b(x). \quad (\text{E})$$

L'équation homogène associée, sans surprise, est

$$y^{(n+1)}(x) = a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x). \quad (\text{H})$$

La structure générale des solutions ne change pas :

**LEMME 17.8** – La proposition 17.1 est valable pour les équations d'ordre supérieur.

*Démonstration.* Si  $y$  est une fonction dérivable  $n + 1$  fois sur un ensemble  $I$ , alors on note  $D(y)$  la fonction

$$D(y) = y^{(n+1)} - a_n y^{(n)} - \cdots - a_0 y;$$

alors  $D(y)$  est encore une fonction définie sur  $I$ . On vérifie tout de suite que  $D(y + z) = D(y) + D(z)$  et  $D(\lambda y) = \lambda D(y)$  si  $\lambda$  est une constante. Comme  $S_H$  est l'ensemble des fonctions  $y$  telles que  $D(y) = 0$ , on voit de suite que c'est un espace vectoriel.

En d'autres termes, on peut voir  $D$  comme une application  $E \rightarrow F$  où  $E$  est l'espace vectoriel des fonctions dérivables  $n + 1$  fois sur  $I$ , et  $F$  est l'espace vectoriel de toutes les fonctions sur  $I$ ; alors  $S_H = \ker(D)$ , c'est donc un espace vectoriel.  $\square$

Nous avons vu comment résoudre les équations d'ordre 1 dans le début du chapitre. Il y a un autre cas particulier que l'on sait traiter : celui des équations « à coefficients constants », c'est-à-dire de la forme

$$y^{(n+1)}(x) = a_n y^{(n)}(x) + \cdots + a_0 y(x) + b(x), \quad (\text{E})$$

l'équation homogène associée étant

$$y^{(n+1)}(x) = a_n y^{(n)}(x) + \cdots + a_0 y(x). \quad (\text{H})$$

On commence par une remarque simple : il est facile de trouver des solutions de la forme  $y(x) = e^{\lambda x}$ . En effet dans ce cas on a  $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ , puis  $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$ , et on voit immédiatement que  $y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x}$  pour tout  $k \geq 0$ . Si nous insérons ceci dans l'équation (H), on obtient

$$\lambda^{n+1} e^{\lambda x} = [a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0] e^{\lambda x},$$

ce qui revient en simplifiant l'exponentielle à  $\chi(\lambda) = 0$ , en posant

$$\chi(X) = X^{n+1} - [a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0].$$

On appelle  $\chi(X)$  le *polynôme caractéristique* de l'équation (H).

Puisque  $S_H$  est un espace vectoriel, on peut obtenir d'autres solutions en considérant des combinaisons linéaires, c'est-à-dire des fonctions de la forme

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_m e^{\lambda_m x},$$

où  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  sont des racines du polynôme caractéristique. Nous allons maintenant montrer que, sous l'hypothèse que ce polynôme admet  $n + 1$  racines distinctes, il n'y a pas d'autres solutions :

**PROPOSITION 17.9** – *Supposons que le polynôme caractéristique  $\chi$  admette  $n + 1$  racines distinctes  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  dans  $\mathbb{C}$ . Alors toute solution  $y$  à valeurs complexes de l'équation homogène, définie sur un intervalle, est de la forme*

$$y(x) = c_0 e^{\lambda_0 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x},$$

où  $c_k \in \mathbb{C}$ . En particulier une telle solution peut s'étendre en une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

Avant de donner la démonstration, voyons tout de suite quelques exemples simples.

**EXEMPLE 17.10** – Considérons l'équation homogène

$$y'' = y.$$

Le polynôme caractéristique est  $\chi(X) = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ . La solution générale est donc

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

EXEMPLE 17.11 – Voyons maintenant

$$y'' = -y.$$

Cette fois le polynôme caractéristique est  $\chi(X) = X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$ . La solution générale est donc

$$y(x) = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}. \quad (*)$$

Mais cette fois-ci, on peut se demander quelle forme particulière est prise par les solutions à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Écrivons simplement que  $y(x) \in \mathbb{R}$  si et seulement si  $y(x) = \Re(y(x))$ . En prenant la partie réelle de (\*), on constate alors que  $y(x)$  est de la forme

$$y(x) = a \cos(x) + b \sin(x), \quad (**)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles. (Si vous faites le calcul vous verrez que l'on a précisément

$$a = \Re(c_1) + \Re(c_2) \quad \text{et} \quad b = \Im(c_2) - \Im(c_1),$$

mais ces valeurs importent peu.) Réciproquement, toute fonction de la forme (\*\*) est solution de (H), clairement. Finalement l'expression (\*\*) est la forme générale des solutions de l'équation  $y'' = -y$  qui sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On peut retenir que les solutions réelles s'obtiennent en prenant les parties réelles et imaginaires des solutions complexes.

Passons à la démonstration de la proposition.

*Démonstration.* Soit  $y$  une fonction définie sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Définissons alors

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n)}(x) \end{pmatrix}, \quad (*)$$



de sorte que

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ y^{(n+1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions, la fonction  $y$  est solution de (H) exactement lorsque

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 y(x) \end{pmatrix}.$$

Il se trouve que l'on peut écrire ceci à l'aide d'une matrice. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Alors  $y$  est solution de (H) si et seulement si  $Y$  est solution de

$$Y'(x) = AY(x). \quad (V)$$

Notons d'ailleurs que si une fonction  $Y$  quelconque est solution de (V), alors elle doit être de la forme (\*).

Conclusion : avec cette astuce (l'introduction de la bonne matrice  $A$ ), nous avons ramené l'étude de l'équation (H) à l'étude de l'équation (V), qui a l'avantage d'être d'ordre 1, même si les fonctions en jeu sont cette fois à valeurs vectorielles.

L'idée est de diagonaliser  $A$  (dans la suite du chapitre nous verrons que c'est systématiquement la chose à faire). Si  $\chi_A$  est le polynôme caractéristique de  $A$ , et si  $\chi$  est le polynôme caractéristique de l'équation différentielle, il se trouve que l'on a

$$\chi_A = (-1)^{n+1} \chi.$$

Vous montrerez ceci, à titre d'exercice. En particulier,  $\chi_A$  et  $\chi$  ont les mêmes racines, et par hypothèse ce sont  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ , qui sont distinctes. D'après le corollaire 16.20, la matrice  $A$  est diagonalisable.

Nous savons donc qu'il existe une matrice  $P$  telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Appelons  $D$  cette matrice diagonale, de sorte que  $A = PDP^{-1}$ . L'équation différentielle peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} Y'(x) = PDP^{-1}Y(x) &\iff P^{-1}Y'(x) = DP^{-1}Y(x) \\ &\iff Z'(x) = DZ(x), \end{aligned}$$

en posant  $Z(x) = P^{-1}Y(x)$ .

Comme  $D$  est diagonale, cette nouvelle équation est très simple. Écrivons

$$Z(x) = \begin{pmatrix} z_0(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix}.$$

(Si on calculait  $P$ , on pourrait exprimer  $z_k$  en fonction de  $y$ , mais nous n'aurons même pas besoin de faire ce calcul). L'équation  $Z'(x) = DZ(x)$  s'écrit  $z'_k(x) = \lambda_k z_k(x)$  pour chaque  $k$ , équation que l'on sait résoudre : on a  $z_k(x) = c_k e^{\lambda_k x}$ .

Pour récupérer  $Y$ , et donc  $y$ , on utilise  $Y = PZ$ . On constate bien que  $y(x)$  est une combinaison linéaire des  $e^{\lambda_k x}$ , comme annoncé.  $\square$

Pour résoudre complètement l'équation (E), il faut savoir trouver une solution particulière. À cette fin, on peut appliquer des techniques du type « variation des constantes », mais les calculs sont souvent compliqués. Il convient de connaître un certain nombre d'astuces, et elles seront explorées dans les exercices. C'est également dans les exercices que nous verrons

comment gérer les équations pour lesquelles le polynôme caractéristique a des racines multiples.

– *Deuxième lecture* –

### Systèmes d'équations différentielles

Un système d'équations différentielles linéaires, à coefficients constants, est par définition une équation différentielle de la forme

$$Y'(x) = AY(x) + B(x), \quad (E)$$

où  $Y$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$ , ainsi que  $B$ , et  $A$  est une matrice  $n \times n$ . L'équation homogène associée est

$$Y'(x) = AY(x). \quad (H)$$

EXEMPLE 17.12 – Si l'on souhaite trouver deux fonctions  $y_1$  et  $y_2$  telles que

$$\begin{cases} y_1'(x) = -15y_1(x) + 44y_2(x) \\ y_2'(x) = -10y_1(x) + 27y_2(x), \end{cases}$$

alors il s'agit bien d'un système d'équations différentielles linéaires. En effet en notant

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} -15 & 44 \\ -10 & 27 \end{pmatrix},$$

alors on cherche bien à résoudre  $Y'(x) = AY(x)$ .

Noter qu'en pratique les notations peuvent être très différentes, par exemple le système peut se présenter sous la forme (parfaitement équivalente)

$$\begin{cases} x'(t) = -15x(t) + 44y(t) \\ y'(t) = -10x(t) + 27y(t). \end{cases}$$

Ça sera notamment le cas si l'on pense à  $t$  comme au « temps », et à  $t \mapsto (x(t), y(t))$  comme à une courbe. Toutefois dans ce chapitre nous garderons des notations uniformes.

EXEMPLE 17.13 – Au cours de la démonstration de la proposition 17.9, nous avons vu que les équations linéaires d'ordre supérieur, à coefficients constants, peuvent se ramener à un système (très particulier). Tout ce que nous allons maintenant démontrer sur les systèmes s'applique donc à cette situation.

De nouveau, la proposition 17.1 s'applique : le soin vous est laissé de faire cette démonstration très facile. Nous allons surtout nous intéresser aux équations homogènes, dans un premier temps du moins, et voir quelques techniques pour l'équation (E) dans les exercices.

La méthode pour résoudre l'équation homogène est simple et tient en un mot : diagonaliser. Plus précisément :

1. On commence par tenter de diagonaliser  $A$ , donc de trouver  $P$  telle que la matrice  $D = P^{-1}AP$  est diagonale. Si c'est impossible, on cherchera une matrice  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  est la plus simple possible (en première année on vous donnera des indications pour ça).
2. L'équation  $Y'(x) = AY(x)$ , puisque  $A = PDP^{-1}$ , se réécrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Y'(x) = PDP^{-1}Y(x) &\iff P^{-1}Y'(x) = DP^{-1}Y(x) \\ &\iff Z'(x) = DZ(x), \end{aligned}$$

en posant  $Z(x) = P^{-1}Y(x)$ .

3. On note

$$Z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix},$$

puis on résout l'équation  $Z'(x) = DZ(x)$ . Lorsque  $D$  est diagonale, ceci revient à résoudre une équation simple pour chaque  $z_k$ , et on trouve  $z_k$  immédiatement.

4. On retrouve  $Y(x)$  par la formule  $Y(x) = PZ(x)$ .

Il est important de noter que *l'on a pas besoin de calculer l'inverse de la matrice  $P$* , à aucun moment. En effet les techniques de diagonalisation que l'on a vues permettent de trouver  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  est diagonale sans calculer  $P^{-1}$ .

EXEMPLE 17.14 – Revenons à l'exemple 17.12. La matrice est

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 44 \\ -10 & 27 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est  $\chi_A = \lambda^2 - 12\lambda + 35 = (\lambda - 7)(\lambda - 5)$ , les valeurs propres sont 7 et 5, la matrice est diagonalisable. On cherche les vecteurs propres, on trouve par exemple

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

associés à 7 et 5 respectivement. On en conclut qu'en posant

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},$$

alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = D.$$

On pose alors

$$Z(x) = P^{-1}Y(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}.$$

(On n'a pas calculé  $P^{-1}$ .) Alors  $Z$  satisfait l'équation  $Z'(x) = DZ(x)$ , ce qui s'écrit

$$\begin{cases} z_1'(x) = 7z_1(x) \\ z_2'(x) = 5z_2(x). \end{cases}$$

On sait bien faire ça :  $z_1(x) = c_1 e^{7x}$  et  $z_2(x) = c_2 e^{5x}$ .

Pour finir  $Y(x) = PZ(x)$  donc

$$\begin{cases} y_1(x) = 2c_1 e^{7x} + 11c_2 e^{5x} \\ y_2(x) = c_1 e^{7x} + 5c_2 e^{5x} \end{cases}$$

EXEMPLE 17.15 – Parfois la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable (ça sera évidemment plus rare). Par exemple on peut considérer le système

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) = -y_1(x) + 3y_2(x). \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique est  $(\lambda - 2)^2$ , et l'espace propre associé à l'unique valeur propre 2 est de dimension 1, avec pour base par exemple

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice n'est pas diagonalisable. Prenons n'importe quel vecteur  $e_2$  tel que  $e_1, e_2$  est une base, par exemple

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et soit P la matrice dont les colonnes sont  $e_1$  et  $e_2$ . Calculons

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D.$$

(Un peu de réflexion montre que, quel que soit notre choix pour  $e_2$ , la matrice  $P^{-1}AP$  doit être triangulaire, et en calculant la trace ou le déterminant on s'assure que la diagonale doit être (2, 2). La méthode qui suit ne dépend pas vraiment du choix de  $e_2$ .)

On continue d'appliquer la méthode. On pose

$$Z(x) = P^{-1}Y(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}.$$

On a  $Z'(x) = DZ(x)$ , ce qui s'écrit

$$\begin{cases} z_1'(x) &= 2z_1(x) - z_2(x) \\ z_2'(x) &= 2z_2(x) \end{cases}$$

On peut résoudre la deuxième d'abord :  $z_2(x) = c_2 e^{2x}$ . En remplaçant dans la première, nous obtenons

$$z_1'(x) = 2z_1(x) - c_2 e^{2x}. \quad (*)$$

C'est une équation d'ordre 1, que l'on sait résoudre ! L'équation homogène est  $z_1'(x) = 2z_1(x)$  qui a pour solutions les fonctions de la forme  $c_1 e^{2x}$ . En appliquant la méthode de variation de

la constante, on cherche une solution de (\*) de la forme  $c(x)e^{2x}$  ; on constate que l'équation revient à  $c'(x) = -c_2 e^{2x} e^{-2x} = -c_2$ . On prend  $c(x) = -c_2 x$  ce qui donne la solution  $-c_2 x e^{2x}$ . Finalement la solution générale de (\*) est

$$z_1(x) = c_1 e^{2x} - c_2 x e^{2x}.$$

On retrouve finalement  $y_1$  et  $y_2$  d'après la relation  $Y(x) = PZ(x)$ , c'est-à-dire  $y_1(x) = z_1(x) + z_2(x) = c_1 e^{2x} + c_2(1-x)e^{2x}$  et  $y_2(x) = z_1(x) = c_2 e^{2x}$ .

### Étude qualitative des systèmes

Nous avons toutes les clefs en main pour résoudre les systèmes d'équations différentielles en pratique. À présent, nous allons montrer quelques propriétés qualitatives : le calcul de la dimension de l'espace vectoriel des solutions, leur forme générale, et les intervalles sur lesquelles on peut les définir. En deux mots, nous trouverons que pour un système  $n \times n$ , les solutions forment un espace de dimension  $n$ , on peut les exprimer avec des exponentielles et des polynômes, et par conséquent on peut naturellement les étendre à  $\mathbb{R}$  tout entier. Les démonstrations font surtout appel à de l'algèbre linéaire.

Commençons par un petit lemme de calcul.

**LEMME 17.16** – Soit  $f(x) = P(x)e^{\lambda x}$ , où  $P$  est un polynôme. Alors  $f$  possède une primitive de la forme  $Q(x)e^{\lambda x}$ , où  $Q$  est encore un polynôme. Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\deg Q \leq \deg P$ , alors que si  $\lambda = 0$ , alors  $\deg Q = \deg P + 1$ .

*Démonstration.* Le cas  $\lambda = 0$  est évident donc on se tourne vers  $\lambda \neq 0$ . La dérivée de  $Q(x)e^{\lambda x}$  est  $(\lambda Q(x) + Q'(x))e^{\lambda x}$ . Il suffit donc de montrer que pour tout polynôme  $P$ , il existe un polynôme  $Q$  de degré  $\leq \deg P$  tel que  $P = \lambda Q + Q'$ .

Pour montrer ceci, soit  $n = \deg P$ , et soit

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{C}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{C}_n[X] \\ Q &\longmapsto \lambda Q + Q'. \end{aligned}$$

C'est une application linéaire ; regardons  $\ker(\phi)$ . On a  $\phi(Q) = 0 \iff \lambda Q = -Q'$ , et si  $Q \neq 0$  c'est impossible pour des raisons de degré. Donc  $\ker(\phi) = \{0\}$ . Par suite,  $\phi$  est injective, et

donc surjective aussi (corollaire 13.44). Ainsi il existe  $Q$  tel que  $\phi(Q) = P$ .  $\square$

THÉORÈME 17.17 – On considère une équation différentielle de la forme

$$Y'(x) = AY(x), \quad (H_A)$$

où  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Alors l'espace vectoriel  $S_A$  des solutions est de dimension  $n$ .

De plus, les solutions ont la forme suivante. Écrivons

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

et soit

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \dots (\lambda_s - \lambda)^{m_s}$$

le polynôme caractéristique de  $A$ , factorisé sur  $\mathbb{C}$ . Alors  $y_k(x)$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des expressions

$$x^j e^{\lambda_i x}$$

avec  $j < m_i$ .

En particulier  $y_k$  s'étend naturellement en une solution définie sur  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* On va procéder par récurrence sur  $n$ . Le cas  $n = 1$  est celui des équations linéaires d'ordre 1 que l'on connaît bien, et le théorème est alors évidemment vrai. Supposons donc le théorème démontré pour  $n - 1$  et montrons-le pour  $n$ .

Le point essentiel est de comprendre ce qui se passe lorsqu'on « remplace » la matrice  $A$  par une matrice conjuguée  $B = P^{-1}AP$ . Comme nous l'avons vu dans les exemples, si  $Y$  est une solution de  $Y' = AY$ , alors  $Z = P^{-1}Y$  est solution de  $Z' = BZ$ , et *vice-versa*. De manière plus savante, on a un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} S_A & \longrightarrow & S_B \\ Y & \longmapsto & P^{-1}Y. \end{array}$$



L'inverse est donné par  $Z \mapsto PZ$ , bien sûr. On en déduit que  $\dim S_A = \dim S_B$ . D'autre part, chaque composante  $z_k$  de  $Z$  est une combinaison linéaire des composantes  $y_k$  de  $Y$  (et réciproquement), donc elles ont la même « forme » (combinaisons de certains polynômes et d'exponentielles). Conclusion : il suffit de montrer le théorème pour  $B$ , il sera alors vrai pour  $A$ .

Choisissons donc  $P$  telle que la matrice  $B = P^{-1}AP$  est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{A_{n-1}} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

C'est possible d'après le corollaire 16.26 (qui dit même que l'on peut prendre  $A_{n-1}$  triangulaire inférieure, mais ça ne sera pas utile). Notons que

$$\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda) = (\lambda_n - \lambda)\chi_{A_{n-1}}(\lambda),$$

comme on le voit en développant par la dernière colonne.

Soit donc  $Z$  une solution de  $Z'(x) = BZ(x)$ , et notons

$$Z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix}.$$

Enfin notons

$$Z_{n-1}(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ \vdots \\ z_{n-1}(x) \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que  $Z_{n-1}$  est obtenu en ne gardant que les  $n-1$  premières composantes de  $Z$ . D'après la forme de  $B$ , on constate que  $Z_{n-1}$  vérifie  $Z'_{n-1}(x) = A_{n-1}Z_{n-1}(x)$  (c'est ce que l'on voit en ne regardant que les  $n-1$  premières équations du système  $Z'(x) = BZ(x)$ ). On a donc une application linéaire

$$\begin{aligned} \phi: S_B &\longrightarrow S_{A_{n-1}} \\ Z &\longmapsto Z_{n-1}. \end{aligned}$$

Nous allons montrer deux choses : d'une part, que  $\phi$  est surjective, et d'autre part que  $\dim \ker(\phi) = 1$ . En effet, supposons ces deux choses établies, et appliquons le théorème du rang. Nous avons

$$\dim S_B = \dim \ker(\phi) + \dim(\tilde{\text{Im}}(\phi)),$$

et par récurrence, on sait que  $\dim \tilde{\text{Im}}(\phi) = \dim S_{A_{n-1}} = n - 1$ . On a donc  $\dim S_B = 1 + (n - 1) = n = \dim S_A$ . Ceci donne bien le calcul de la dimension au rang  $n$ .

Le plus simple est l'étude de  $\ker(\phi)$ . Si  $\phi(Z) = 0$ , alors  $Z$  est de la forme

$$Z(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

et l'équation  $Z'(x) = BZ(x)$  équivaut à  $z'_n(x) = \lambda_n z_n$ ; cette dernière équation est un système d'ordre 1, donc ses solutions forment un espace de dimension 1 (et concrètement,  $z_n(x) = ce^{\lambda_n x}$ ). Ceci montre que  $\dim \ker(\phi) = 1$ .

Montrons que  $\phi$  est surjective. Il faut montrer que, étant données des fonctions  $z_1, \dots, z_{n-1}$  qui forment une solution de  $Z'_{n-1}(x) = A_{n-1}(x)Z_{n-1}$ , on peut les compléter en une solution  $Z$  de  $Z'(x) = BZ(x)$  en ajoutant une fonction bien choisie  $z_n$ . Or la seule équation du système  $Z'(x) = BZ(x)$  faisant intervenir  $z_n$  est la dernière, qui est de la forme

$$z'_n(x) = \lambda_n z_n(x) + b(x). \quad (*)$$

On sait étudier les équations d'ordre 1 ; en particulier, une telle équation possède toujours des solutions lorsque  $b$  est continue, ce qui est le cas (voir plus bas la forme de  $b$ ). Donc on peut trouver  $z_n$ , et  $\phi$  est surjective. Ceci conclut la démonstration que l'espace des solutions est de dimension  $n$ .

Pour finir la démonstration, il reste à établir que les solutions ont la forme annoncée, et par récurrence on le sait pour  $Z_{n-1}$  ; reste donc à voir la forme de  $z_n$ , ce qui va se faire

en regardant de plus près l'équation (\*). Puisque les fonctions  $z_k$  sont des combinaisons de polynômes et d'exponentielles, pour  $1 \leq k \leq n-1$ , on a

$$b(x) = \sum_i P_i(x)e^{\lambda_i x}.$$

La solution générale de (\*) est donc

$$z_n(x) = ce^{\lambda_n x} + c(x)e^{\lambda_n x},$$

où  $c(x)$  vérifie

$$c'(x) = b(x)e^{-\lambda_n x} = \sum_i P_i(x)e^{(\lambda_i - \lambda_n)x}.$$

On peut maintenant appliquer le lemme 17.16. Il nous dit que l'on peut choisir  $c(x)$  sous la forme

$$c(x) = \sum_i Q_i(x)e^{(\lambda_i - \lambda_n)x},$$

où  $Q_i$  est un polynôme, avec  $\deg Q_i \leq \deg P_i$ , sauf si  $\lambda_n = \lambda_i$  pour un certain  $i$ , et alors  $\deg Q_i = \deg P_i + 1$ . Notons alors que le produit  $c(x)e^{\lambda_n x}$  peut s'écrire

$$c(x)e^{\lambda_n x} = \sum_i Q_i(x)e^{\lambda_i x}.$$

Ceci montre que  $z_n(x)$  a précisément la forme annoncée.  $\square$

Nous pouvons revisiter les exemples étudiés ci-dessus à la lumière du théorème.

EXEMPLE 17.18 – Le système de l'exemple 17.12 était

$$\begin{cases} y_1'(x) &= -15y_1(x) + 44y_2(x) \\ y_2'(x) &= -10y_1(x) + 27y_2(x), \end{cases}$$

la solution était donnée dans l'exemple 17.14. On a vu que le polynôme caractéristique était  $(\lambda - 7)(\lambda - 5)$ . Le théorème nous affirme alors que  $y_1$  est de la forme

$$y_1(x) = ae^{7x} + be^{5x},$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes, et que  $y_2$  est de la forme

$$y_2(x) = ce^{7x} + de^{5x}.$$

Attention : le théorème ne dit certainement pas que, réciproquement, on obtient des solutions en prenant  $a, b, c, d$  arbitrairement ; d'ailleurs on ne s'attend pas à avoir 4 paramètres libres alors que le théorème nous dit également que l'espace des solutions est de dimension 2.

En fait, nous avons fait les calculs et trouvé que

$$\begin{cases} y_1(x) = 2c_1e^{7x} + 11c_2e^{5x} \\ y_2(x) = c_1e^{7x} + 5c_2e^{5x} \end{cases}$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes *arbitraires* (il y en a bien 2!).

Regardons de même l'exemple 17.15, pour lequel le système est

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) = -y_1(x) + 3y_2(x). \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique est  $(\lambda - 2)^2$ . Le théorème affirme donc que

$$y_1(x) = ae^{2x} + bxe^{2x},$$

et

$$y_2(x) = ce^{2x} + dxe^{2x},$$

où  $a, b, c, d$  sont des constantes ; l'espace des solutions est de dimension 2 donc il doit y avoir des relations entre ces constantes. Nous avons fait les calculs et trouvé que

$$y_1(x) = (c_1 + c_2)e^{2x} - c_2xe^{2x},$$

et que

$$y_2(x) = c_2e^{2x},$$

avec deux constantes *arbitraires*  $c_1$  et  $c_2$ .

Les résultats prédits par le théorème sont donc cohérents avec ceux que l'on avait obtenus directement. Le théorème à lui seul ne donne pas assez d'information pour résoudre le système, et d'ailleurs on s'en passe. Mais l'intérêt de cet énoncé

abstrait est de dire au moins quelque chose dans les cas où un calcul direct n'est pas envisageable, par exemple si la matrice est très grande, où si elle dépend elle-même de paramètres d'une manière compliquée.

### Retour sur les équations d'ordre supérieur

Pour se convaincre de l'intérêt du théorème 17.17, voici une conséquence concrète : nous pouvons maintenant résoudre toutes les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur, à coefficients constants. Rappelons que dans la proposition 17.9 nous avons seulement traité le cas où les racines du polynôme caractéristique étaient distinctes.

PROPOSITION 17.19 – On considère l'équation homogène

$$y^{(n+1)}(x) = a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y(x). \quad (H)$$

Soit

$$\chi(\lambda) = \lambda^{n+1} - [a_n \lambda^n + \dots + a_0] = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

le polynôme caractéristique, factorisé sur  $\mathbb{C}$ . Alors toute solution  $y$  de (H) peut s'écrire de manière unique

$$y(x) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} x^j e^{\lambda_i x},$$

et réciproquement pour tout choix de coefficients  $c_{ij}$ , une fonction de cette forme est solution.

*Démonstration.* On reprend le début de la démonstration de la proposition 17.9 : on pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

et alors on constate que  $Y$  est solution de  $Y'(x) = AY(x)$  si et seulement si elle est de la forme

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n)}(x) \end{pmatrix}, \quad (*)$$

avec  $y$  solution de (H).

Si on note  $S_A$  l'espace des solutions de  $Y' = AY$ , et  $S_H$  l'espace des solutions de (H), alors on a un isomorphisme  $S_A \rightarrow S_H$  donné par  $Y \mapsto y$ ; l'inverse envoie  $y$  sur la fonction  $Y$  définie par (\*). On en conclut, d'après le théorème 17.17, que  $\dim S_H = \dim S_A = n$ .

Or, d'après le même théorème, on sait que  $y$  doit avoir précisément la forme annoncée dans la proposition (rappelons que le polynôme caractéristique de  $A$  est, au signe près, le polynôme caractéristique considéré dans l'énoncé).

Il est facile de conclure. Soit  $e_{ij}$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $e_{ij}(x) = x^j e^{\lambda_i x}$ , pour  $1 \leq i \leq s$  et  $0 \leq j < m_i$ . Ces fonctions sont au nombre de  $n$ , qui est le degré du polynôme  $\chi$ . Considérons alors l'espace vectoriel  $E = \text{Vect}(e_{ij})$  (c'est un sous-espace de l'espace de toutes les fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ). Il est donc de dimension  $\leq n$ . Mais on vient de voir que  $S_H \subset E$  et que  $\dim S_H = n$ . On en conclut que  $S_H = E$  et que  $\dim E = n$ ; de plus la famille des  $e_{ij}$  doit donc être libre.

On a donc bien montré que chaque  $e_{ij} \in S_H$ , donc est solution de (H), et que chaque solution de (H) s'écrivait de manière unique comme combinaison linéaire de ces fonctions.  $\square$

EXEMPLE 17.20 – Considérons l'équation

$$y^{(3)}(x) + 3y''(x) + 3y'(x) + y(x) = 0.$$

Le polynôme caractéristique est  $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$ . On en conclut que les solutions sont précisément les fonctions de la forme

$$(a + bx + cx^2)e^{-x},$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des constantes arbitraires.

## Utilisation de l'exponentielle matricielle

Le lecteur ayant parcouru la deuxième partie du chapitre « L'exponentielle » connaît les exponentielles de matrices. Rappelons que si  $A$  est une matrice, alors par définition

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

La proposition 10.24 affirme alors que la fonction  $\gamma(x) = e^{xA}$  vérifie  $\gamma'(x) = Ae^{xA}$ . On aperçoit alors une nouvelle façon de produire des solutions de nos systèmes d'équations différentielles : en effet, pour tout vecteur  $v \in \mathbb{C}^n$ , si on pose  $Y(x) = e^{xA} v$ , alors  $Y'(x) = Ae^{xA} v = AY(x)$ .

Et toutes les solutions sont en fait de cette forme :

**PROPOSITION 17.21** – Soit  $Y$  une solution du système  $Y'(x) = AY(x)$ . Alors  $Y$  est de la forme  $Y(x) = e^{xA} v$  pour un certain vecteur  $v$  ; par suite  $v = Y(0)$ . Réciproquement toutes les fonctions de cette forme sont solutions.

En particulier, une solution  $Y$  de ce système est entièrement déterminée par le vecteur  $Y(0)$ .

*Démonstration.* Nous avons déjà vu la partie « réciproque ». On doit montrer que toute solution  $Y$  est de cette forme.

Il y a deux démonstrations faciles. La première consiste à adapter la démonstration de la proposition 17.2, en remplaçant l'exponentielle usuelle par l'exponentielle de matrice. Il n'y a presque rien à changer (et le peu qu'il y a à changer a en fait été vu lors de la démonstration de la proposition 10.24).

Voici la deuxième démonstration. On considère l'application  $\phi: S_A \rightarrow \mathbb{C}^n$  définie par  $\phi(Y) = Y(0)$  (comme d'habitude  $S_A$  est l'espace vectoriel des solutions du système). L'application  $\phi$  est évidemment linéaire. De plus, elle est surjective, puisque pour tout  $v \in \mathbb{C}^n$ , la solution  $Y \in S_A$  définie par  $Y(x) = e^{xA} v$  vérifie  $Y(0) = v$ . D'après le théorème 17.17, la dimension de  $S_A$  est  $n$ , et on en conclut que  $\phi$  est injective également. Ceci montre que  $Y$  est déterminée par  $v = Y(0)$ . Ainsi, la seule solution  $Y$  telle que  $Y(0) = v$  est  $Y(x) = e^{xA} v$ .  $\square$

Il semblerait que nous ayons donné une formule simple pour exprimer les solutions de  $Y'(x) = AY(x)$ , et en un sens c'est le cas. Mais il ne faudrait pas croire que cette formule va nous dispenser de la méthode que nous connaissons pour résoudre un tel système en pratique. En effet, le calcul de  $e^A$  est compliqué, et se fait... en diagonalisant  $A$  (voir l'exemple 10.23). On ne gagne pas vraiment de temps en procédant ainsi.

Par contre, le fait qu'une solution  $Y$  est déterminée par  $Y(0)$  est nouveau. Nous verrons dans le prochain chapitre qu'il y a là un phénomène général dans la théorie des équations différentielles.

EXEMPLE 17.22 – De nouveau, retournons à l'exemple 17.12, donc au cas où

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 44 \\ -10 & 27 \end{pmatrix}.$$

Les solutions de  $Y'(x) = AY(x)$  sont, d'après la proposition, de la forme  $e^{xA}v$ , et nous devons donc commencer par calculer  $e^{xA}$ . On a vu (exemple 17.14) que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = D \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

On en tire  $xA = P(xD)P^{-1}$  et

$$e^{xA} = Pe^{xD}P^{-1},$$

voir la proposition 10.22. De plus comme  $xD$  est diagonale, on a évidemment

$$e^{xD} = \begin{pmatrix} e^{7x} & 0 \\ 0 & e^{5x} \end{pmatrix}.$$

On veut s'éviter le calcul de  $P^{-1}$  (rappelons que nous n'avons pas eu besoin de faire ce calcul pour diagonaliser  $A$ ). On va donc garder le résultat sous cette forme, et écrire qu'il existe un vecteur  $v$  tel que

$$Y(x) = e^{xA}v = Pe^{xD}P^{-1}v = \begin{pmatrix} 2e^{7x} & 11e^{5x} \\ e^{7x} & 5e^{5x} \end{pmatrix} w,$$



en posant  $w = P^{-1}v$ . On sait que  $v$  peut être choisi librement, donc  $w$  peut être choisi librement ; en posant

$$w = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

on retrouve le résultat de l'exemple 17.14, à savoir que  $Y$  est de la forme

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 2c_1 e^{7x} + 11c_2 e^{5x} \\ c_1 e^{7x} + 5c_2 e^{5x} \end{pmatrix}.$$

Cette méthode n'est ni plus rapide, ni plus lente que la précédente.

# Table des matières

<b>1 Ensembles</b>	<b>3</b>
<i>Première lecture</i>	3
Ensembles et appartenance	3
Quelques constructions	4
Propositions mathématiques	6
Fonctions	8
<i>Deuxième lecture</i>	11
Fonctions injectives	11
Fonctions surjectives et bijectives	13
Galerie d'exemples	15
La méthode axiomatique	19
<b>2 Nombres</b>	<b>22</b>
<i>Première lecture</i>	22
Les premiers nombres	22
La propriété de la borne supérieure	25
L'ensemble des réels	28
Les nombres complexes	33
<i>Deuxième lecture</i>	37
Calculs sur machine et corps	37
Arithmétique de l'horloge	40
<b>3 Polynômes</b>	<b>44</b>
<i>Première lecture</i>	44
Définitions & Notations	44
La division Euclidienne	46

	Racines . . . . .	49
	Diviseurs dans $\mathbb{C}[X]$ . . . . .	53
	<i>Deuxième lecture</i> . . . . .	55
	Plus grand diviseur commun . . . . .	55
	Le théorème de Bézout . . . . .	57
	Premiers . . . . .	58
	Factorisation . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Suites</b> . . . . .	<b>62</b>
	<i>Première lecture</i> . . . . .	62
	Suites de réels . . . . .	62
	Convergence . . . . .	64
	Combiner les limites . . . . .	68
	Suites croissantes et décroissantes . . . . .	70
	Convergence vers $\pm\infty$ . . . . .	72
	<i>Deuxième lecture</i> . . . . .	74
	Convergence absolue . . . . .	74
	Suites de complexes . . . . .	78
	Suites de vecteurs . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Matrices</b> . . . . .	<b>84</b>
	<i>Première lecture</i> . . . . .	84
	Introduction . . . . .	84
	Addition et multiplication . . . . .	87
	Règles de calcul . . . . .	90
	Matrices échelonnées . . . . .	93
	Opérations sur les lignes . . . . .	96
	Calcul de l'inverse d'une matrice . . . . .	100
	<i>Deuxième lecture</i> . . . . .	102
	Un autre point de vue sur les opérations sur les lignes . . . . .	102
	Justification de la méthode de calcul de l'inverse . . . . .	104
	L'unicité de la matrice bien échelonnée . . . . .	105
<b>6</b>	<b>Continuité</b> . . . . .	<b>108</b>
	<i>Première lecture</i> . . . . .	108
	Introduction & Définitions . . . . .	108
	Le théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	111

	Autres exemples de fonctions continues . . . . .	113
	Le langage des limites . . . . .	116
	Continuité et inégalités . . . . .	118
	<i>Deuxième lecture</i> . . . . .	119
	Continuité et fonctions monotones . . . . .	120
	Fonctions de plusieurs variables . . . . .	123
<b>7</b>	<b>Déterminants</b>	<b>126</b>
	<i>Première lecture</i> . . . . .	126
	Méthode de calcul . . . . .	126
	Développements des déterminants . . . . .	131
	Les formules de Cramer . . . . .	135
	<i>Deuxième lecture</i> . . . . .	137
	Unicité du déterminant . . . . .	137
	Permutations . . . . .	138
	La définition du déterminant . . . . .	142
<b>8</b>	<b>Compacité</b>	<b>146</b>
	<i>Première lecture</i> . . . . .	146
	Le théorème de Bolzano et Weierstrass . . . . .	146
	Fonctions continues et intervalles compacts . . . . .	147
	<i>Deuxième lecture</i> . . . . .	149
	Parties compactes . . . . .	149
	Autres études de minima et maxima . . . . .	151
	Continuité uniforme . . . . .	151
<b>9</b>	<b>Dérivées</b>	<b>154</b>
	<i>Première lecture</i> . . . . .	154
	Définitions & Premières propriétés . . . . .	154
	Le théorème des accroissements finis . . . . .	161
	<i>Deuxième lecture</i> . . . . .	165
	Le théorème du point fixe . . . . .	165
	Dérivées et réciproques . . . . .	171
	Fonctions à valeurs vectorielles . . . . .	173
<b>10</b>	<b>L'exponentielle</b>	<b>176</b>
	<i>Première lecture</i> . . . . .	176
	L'exponentielle complexe . . . . .	176
	L'exponentielle réelle . . . . .	179

Le cercle et le nombre $\pi$ . . . . .	181
Forme polaire et racines $n$ -ièmes . . . . .	185
Le théorème fondamental de l'algèbre . . . . .	187
<i>Deuxième lecture</i> . . . . .	188
Matrices et normes . . . . .	188
L'exponentielle de matrice . . . . .	190
Exponentielle et dérivée . . . . .	194
<b>11 Espaces vectoriels</b> . . . . .	<b>195</b>
<i>Première lecture</i> . . . . .	195
Définitions & Exemples fondamentaux . . . . .	196
Sous-espaces . . . . .	197
Familles génératrices . . . . .	198
Familles libres . . . . .	203
Bases . . . . .	206
Coordonnées . . . . .	208
<i>Deuxième lecture</i> . . . . .	213
Le théorème de la base incomplète . . . . .	213
Le rang d'une matrice . . . . .	216
<b>12 Formules de Taylor</b> . . . . .	<b>220</b>
Introduction . . . . .	220
La formule de Taylor-Lagrange . . . . .	221
La formule de Taylor-Young . . . . .	224
Développements limités . . . . .	228
Méthodes de calcul des développements limités . . . . .	231
Le minimum à savoir par coeur . . . . .	234
<b>13 Applications linéaires</b> . . . . .	<b>235</b>
<i>Première lecture</i> . . . . .	235
Définition & Exemples . . . . .	235
Sommes directes . . . . .	238
Projections et symétries . . . . .	242
La matrice d'une application linéaire . . . . .	245
Formule du changement de base . . . . .	250
<i>Deuxième lecture</i> . . . . .	253
Applications injectives, surjectives, bijectives . . . . .	253
Le théorème du rang . . . . .	257

	Vieux résultats, nouvelles démonstrations . . . . .	259
<b>14</b>	<b>Intégrale de Riemann</b>	<b>262</b>
	<i>Première lecture</i> . . . . .	262
	Introduction . . . . .	262
	Fonctions intégrables au sens de Riemann . . . . .	264
	Premiers exemples de fonctions intégrables . . . . .	268
	Propriétés élémentaires . . . . .	272
	Intégrales et fonctions continues . . . . .	276
	La fonction $x \mapsto \int_a^x f$ . . . . .	279
	La formule du changement de variables . . . . .	283
	<i>Deuxième lecture</i> . . . . .	285
	Fonctions à valeurs vectorielles . . . . .	285
	Longueur d'une courbe . . . . .	290
	Démonstration de Taylor-Young . . . . .	296
<b>15</b>	<b>Fractions rationnelles</b>	<b>298</b>
	Fractions rationnelles . . . . .	298
	Intégration des éléments simples . . . . .	306
	Fractions rationnelles trigonométriques . . . . .	311
<b>16</b>	<b>Diagonalisation</b>	<b>317</b>
	<i>Première lecture</i> . . . . .	317
	Motivation . . . . .	317
	Matrices conjuguées . . . . .	320
	Interprétation à l'aide des applications linéaires . . . . .	323
	Le polynôme caractéristique . . . . .	328
	Compter les vecteurs propres . . . . .	331
	Résumé . . . . .	333
	<i>Deuxième lecture</i> . . . . .	336
	Trigonalisation . . . . .	336
	Approximations . . . . .	339
<b>17</b>	<b>Équations différentielles linéaires</b>	<b>342</b>
	<i>Première lecture</i> . . . . .	342
	Équations linéaires d'ordre 1 . . . . .	343
	Trouver une solution particulière . . . . .	346
	Équations linéaires d'ordre supérieur . . . . .	349
	<i>Deuxième lecture</i> . . . . .	354

Systemes d'équations différentielles . . . . .	354
Étude qualitative des systèmes . . . . .	358
Retour sur les équations d'ordre supérieur . . . . .	364
Utilisation de l'exponentielle matricielle . . . . .	366

# Index

- algorithme d'Euclide, 53
- anneau, 38
- application, 8
- application linéaire, 231
- arccosinus, 17
- archimédien, 63
- arcsinus, 16
- arctangente, 17
  
- base, 202
- base canonique, 202, 203
- Bézout (théorème), 54
- bijection, 14
- Bolzano-Weierstrass  
    (théorème de), 142
- borne inférieure, 26
- borne supérieure, 26
- but (d'une fonction), 8
  
- $C^1$  (fonction), 168
- Cauchy (suite de), 71
- Cauchy-Schwarz (inégalité de),  
    78
- changement de variables, 279
- Chasles (relation de), 268
- circonférence, 290
- combinaison linéaire, 195
- compact, 145
- complexe (nombre), 33
- conjugué (d'un complexe), 34
  
- continue (fonction), 106, 119
- continuité uniforme, 148
- continuum dérivable, 168
- convergence, 60
- convergence absolue, 70, 75,  
    77
- coordonnées, 205
- corps, 38
- cosinus, 17
- courbe, 286
- Cramer (formules de), 131
- croissante (fonction), 116
- croissante (suite), 66
  
- décomposition en éléments  
    simples, 297
- dense ( $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ ), 30
- dérivée, 150
- déterminant, 122, 138
- développement des  
    déterminants, 128
- développement limité, 224
- diagonalisable, 316
- dimension, 207
- division euclidienne, 40, 47
- domaine de définition, 8
  
- échelonnée (matrice), 89
- éléments simples, 297
- ensemble, 3



escaliers (fonction en), 261  
 espace engendré, 195  
 espace propre, 321  
 espace vectoriel, 192  
 exponentielle, 15, 72, 76  
  
 famille génératrice, 197  
 famille libre, 199  
 Fibonacci (suite de), 59, 313  
 fonction, 8  
 formes indéterminées, 69  
 formule du changement  
     de base, 247  
 fraction rationnelle, 294  
 fraction rationnelle  
     trigonométrique, 307  
  
 Gauss (lemme), 56  
 graphe, 8  
 groupe symétrique, 134  
  
 Heine (théorème), 149  
  
 inégalité triangulaire, 32, 76, 78  
 inégalité triangulaire pour les  
     intégrales, 285  
 inf, 26  
 injection, 11  
 intégrable (fonction), 263  
 intégrale, 263  
 intervalle, 107  
 inverse (d'une matrice), 87, 96  
 irréductible (polynôme), 56  
 isomorphisme, 250  
  
 Landau (notation de), 224  
 limite, 112  
 limite (d'une suite), 60  
  
 lipschitzienne (fonction), 161  
 logarithme, 15  
 longueur d'une courbe, 287  
  
 majorant, 26  
 matrice, 81  
 matrice de passage, 246  
 matrice d'une application  
     linéaire, 242  
 matrices conjuguées, 316  
 matrices semblables, 316  
 mineur, 127  
 minorant, 26  
 module (d'un complexe), 34  
 modulo, 40  
 monotone (fonction), 116  
 multiplication des  
     matrices, 84  
  
 norme, 77  
 notation de Landau, 224  
 noyau, 232  
  
 opérations sur les lignes, 92  
  
 partie (d'un ensemble), 3  
 permutation, 134  
 pgcd, 53  
 polynôme, 44  
 polynôme caractéristique, 324  
 premier (nombre), 56  
 produit cartésien, 4  
 projection, 239  
  
 quantificateur, 7  
  
 $\mathbb{R}$ , 28  
 racine (d'un polynôme), 49  
 racine carrée, 18, 30, 35

rang (d'une application linéaire), 232  
rang (d'une matrice), 212  
rationnel (nombre), 22  
réciproque, 14  
réel (nombre), 28  
Riemann-intégrable, 263  
Riemann (somme de), 273  
Rolle (théorème), 159  
rotation, 232  
  
série, 59  
signature (d'une permutation), 135  
sinus, 16  
somme directe, 237  
somme de sous-espaces, 234  
sommés de Riemann, 273  
sous-espace vectoriel, 193  
sous-suite, 142  
suite (de réels), 58  
sup, 26  
surjection, 13  
symétrie, 240  
  
tangente, 17  
Taylor (formule pour les polynômes), 209  
Taylor-Lagrange, 217  
Taylor-Young, 220, 293  
théorème des accroissements finis, 158  
théorème de la base incomplète, 210  
théorème des valeurs intermédiaires, 108  
théorème du rang, 253  
théorème fondamental de l'analyse, 276  
théorème fondamental de l'algèbre, 51, 183  
théorème du point fixe, 162  
trace, 317  
transposée (d'une matrice), 82  
transposition, 137  
triangulaire (matrice), 332  
trigonalisable, 332  
triplet pythagorien, 310  
  
valeur absolue, 32  
valeur propre, 321  
*Vect*, 195  
vecteur propre, 321  
  
 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , 40