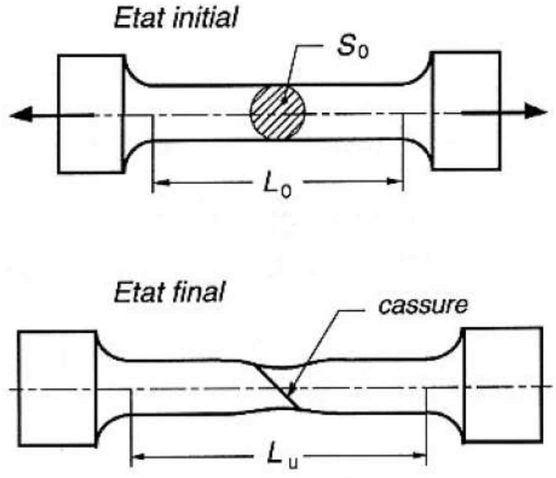
Résistance des matériaux 2 :
Sollicitation élémentaire : la traction - compression

1. Rappel : Essai de traction

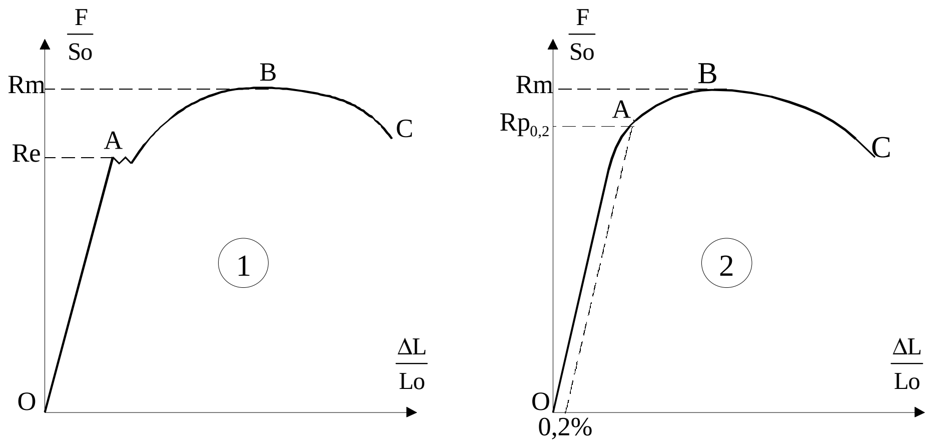
1.1. Protocole de l'essai

Pour déterminer les caractéristiques mécaniques d'un matériau, il est nécessaire de faire des essais sur des éprouvettes faites de ce matériau.



Si l'éprouvette est normalisée, on a $L_0 = 5{,}65\sqrt{S_0}$.

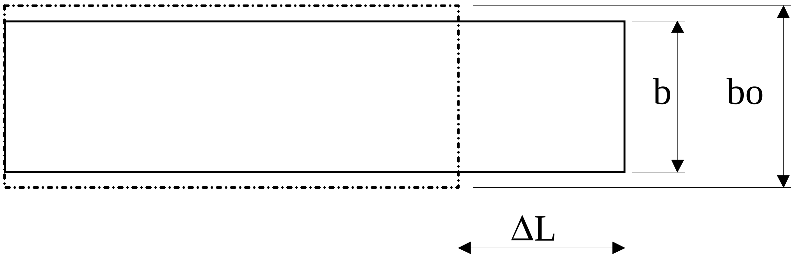
L'essai de traction consiste en la réalisation d'une éprouvette normalisée et à la traction de celle-ci. La machine impose le déplacement des mors ΔL et mesure la force F nécessaire au déplacement. On normalise ensuite le déplacement en une déformation notée $\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}}$ et une contrainte de traction notée $\boxed{\sigma = \frac{F}{S_0}}$ où L_0 est la longueur initiale utile de l'éprouvette (entre repères) et S_0 la section utile initiale de l'éprouvette. On obtient deux types de courbes :



On peut distinguer 3 phases de déformation :

- De O à A : c'est la phase élastique, où la déformation de l'éprouvette est homogène, réversible et proportionnelle à l'effort.

Dans cette zone, l'éprouvette s'allonge et la déformation longitudinale s'accompagne d'une déformation transversale :



$$\frac{b-bo}{bo}=\frac{\Delta b}{bo}$$

Dans la zone élastique les déformations transversales et longitudinales sont liées par la relation $\boxed{\frac{\Delta b}{bo}=-\nu\frac{\Delta L}{Lo}}$ où ν est appelé le coefficient de Poisson.

Dans la zone élastique, la section droite diminue lorsque ΔL augmente et la déformation de l'éprouvette se fait avec <u>variation de volume</u>.

- De A à B : la déformation est permanente et homogène et est appelée déformation plastique. Le matériau s'écrouit. La déformation n'est pas réversible et se fait <u>sans variation de volume</u>.
- De B à C : la déformation n'est plus homogène, elle se produit sur une petite partie de l'éprouvette, on appelle ce phénomène la striction. La rupture se produit en C.

1.2. Caractéristiques mécaniques

On déduit de l'essai de traction les caractéristiques mécaniques suivantes :

- le module de Young E qui est la pente de la droite dans la zone élastique $E=\frac{\sigma}{\varepsilon}$ et s'exprime en MPa.
- Le coefficient de Poisson ν (sans unité)
- la limite d'élasticité :
  - ♦ $Re=\frac{Fe}{So}$ pour les matériaux de type 1
  - ♦ $Rp_{0,2}=\frac{Fp_{0,2}}{So}$ pour les matériaux de type 2. On l'obtient en traçant une droite parallèle à la partie linéaire de la zone de déformation élastique. Cette droite passe par un allongement 0,2%.
- La résistance maximale à la traction : $Rm=\frac{Fm}{So}$
- L'allongement après rupture : $A\%=100\frac{Lu-Lo}{Lo}$

2. Loi de comportement élastique linéaire homogène isotrope

2.1. Traction

Dans le domaine élastique, la contrainte normale dans un matériau est liée à la déformation longitudinale par la relation $\boxed{\sigma=E.\varepsilon}$. Les déformations longitudinales et transversales sont liées par la relation $\boxed{\varepsilon=\frac{\Delta L}{L_0}=-\nu\frac{\Delta b}{b_0}}$ appelée Loi de Hooke.

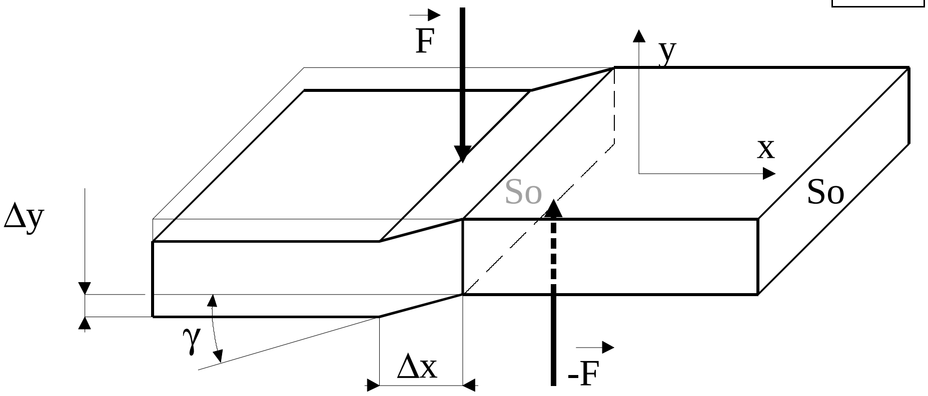
Pour des faibles variations de volumes :

$V=bhL$, $\frac{\Delta V}{V_0}=\frac{\Delta L}{L_0}+\frac{\Delta b}{b_0}+\frac{\Delta h}{h_0}=\frac{\Delta L}{L_0}(1\text{-}2\nu)$. On a donc :

- Si $\nu>0{,}5$, la déformation en traction s'opère avec diminution de volume (cas rare).
- Si $\nu=0{,}5$, la déformation aussi bien en traction qu'en compression s'opère sans variation de volume.
- Si $\nu<0{,}5$, la déformation en traction s'opère avec augmentation de volume (cas le plus courant).

2.2. Cisaillement

Considérons une plaque sollicitée en cisaillement. On définit par $\boxed{\gamma=\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ la déformation de cisaillement.



De même que pour l'extension, on peut établir, en cisaillement, une loi de proportionnalité entre la déformation et la contrainte :

$$\boxed{\tau=\frac{F_y}{So}=G\frac{\Delta y}{\Delta x}=G.\gamma}$$

(Loi de Hooke)

2.3. Caractéristiques mécaniques des matériaux courants

Matériau	Module d'Young E	Module de cisaillement G	Coefficient de Poisson ν	Limite d'élasticité Re
Acier	210000 MPa	80000 MPa	0,3	100 à 1000 MPa
Fontes	60 000 à 190 000 MPa	40000 Mpa		
Alliages d'aluminium	70000MPa	32000MPa	0,34	200 à 500 MPa
Verrre	60000 MPa	24000MPa	0,24	100 MPa

Lorsque la valeur de G n'est pas donnée, on utilise la relation $\boxed{G=\frac{E}{2(1+\nu)}}$.

3. Traction – Compression

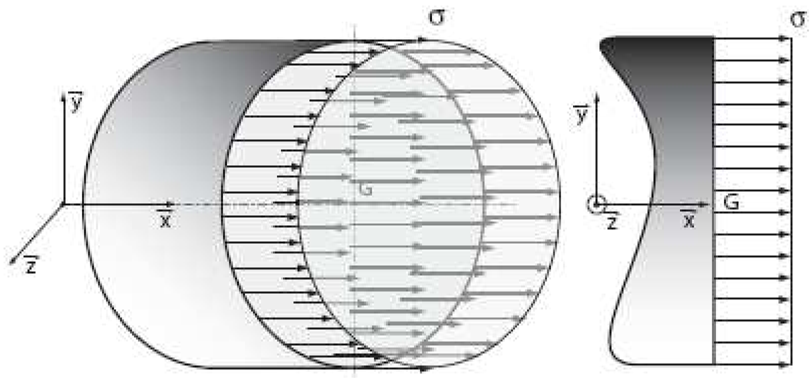
3.1. Définition

Une poutre droite d'axe $\vec{x}$ est en traction-compression au point G(x) si son torseur de cohésion est au point G égal à $T_{coh}(x)=\left\{N\vec{x} \quad \vec{0}\right\}_{G(x)}$. N est appelé l'effort normal.

- Si N est positif, on dit que la poutre est soumise à de la traction
- Si N est négatif, on dit que la poutre est soumise à de la compression.

Dans le cas de la traction pure, les efforts tranchants, le moment de torsion et les moments de flexion sont nuls : $T_y=T_z=0$ et $M_{tx}=M_{fy}=M_{fz}=0$.

3.2. Relation contrainte – Effort Normal



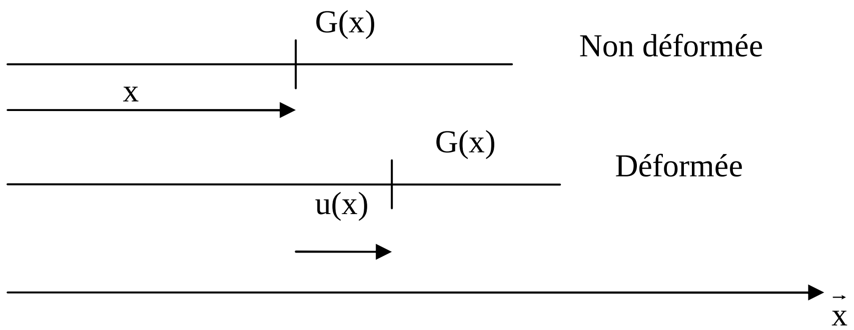
Dans le cas de la traction pure, la contrainte normale est uniforme sur toute une section droite.

On a $T_{coh,G(x)} = \left\{ \vec{R}(x) \quad \vec{M}(x) \right\}_{G(x)} = \left\{ \begin{matrix} N_x & M_{tx} \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{matrix} \right\}_{G(x)} = \left\{ \int_{M\in S} \overrightarrow{C(M,\vec{x})}\, dS \quad \int_{M\in S} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{C(M,\vec{x})}\, dS \right\}_{G(x)}$.

Avec $\overrightarrow{C(M,\vec{x})} = \sigma \vec{x}$. On a donc en traction – compression, $\boxed{N = \sigma S}$.

3.3. Déformation longitudinale

Considérons une poutre droite :



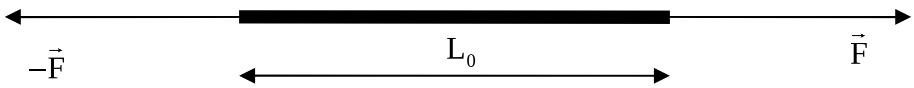
On appelle u(x) la fonction qui donne le déplacement du point G d'abscisse x.

On définit la déformation longitudinale $\boxed{\varepsilon_x = \frac{du}{dx}}$ qui n'a pas de dimension.

3.4. Relation effort normal - déformation

La loi de Hooke donne $\sigma = E\varepsilon$ et on a $N = \sigma S$. On obtient donc : $\boxed{N = ES\frac{du}{dx}}$.

<u>Cas d'une poutre uniquement chargée à ses extrémités :</u>



On a $N = F$ et $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$, donc $F = ES\frac{\Delta L}{L_0}$.

3.5. Critères de dimensionnement

Pour dimensionner une poutre, on peut utiliser deux types de critères :

- Des critères en contrainte,
- Des critères en déplacement.

3.5.1. Critères en contrainte

Le critère de dimensionnement se traduit par le fait que l'on souhaite que la poutre reste dans son domaine élastique $\boxed{\sigma_{xx} \le R_{pe} = \frac{R_e}{s}}$ avec :

- Re la limite élastique du matériau (en MPa),
- s le coefficient de sécurité (sans unité),
- Rpe la résistance pratique à la traction (en MPa).

3.5.2. Critères en déplacement

Le critère en déplacement traduit, moyennant un coefficient de sécurité s', que le déplacement en un point N (par exemple le point où le déplacement est maximum) doit rester inférieur à une valeur donnée dépendant des conditions d'utilisation u_{lim} :

$$\boxed{u(N) < \frac{u_{lim}}{s'}}$$