



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Christophe ANCEY

LABORATOIRE HYDRAULIQUE ENVIRONNEMENTALE (LHE)

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Écublens

CH-1015 Lausanne

---

**Notes de cours**

**Mécanique des fluides**

**Une introduction à l'hydraulique pour les ingénieurs civils**

---

version 12.1 du 2 mars 2016



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Propriétés des fluides</b>	<b>9</b>
1.1	Définition physique d'un fluide . . . . .	9
1.1.1	États de la matière . . . . .	9
1.1.2	Matière divisée: dispersions, suspensions, émulsions . . . . .	12
1.2	Définition rhéologique d'un fluide . . . . .	13
1.3	Viscosité des fluides . . . . .	17
1.3.1	Manifestation à l'échelle macroscopique . . . . .	17
1.3.2	Origine physique . . . . .	17
1.3.3	Fluides newtoniens et non newtoniens . . . . .	19
1.4	Tension de surface . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Similitude</b>	<b>29</b>
2.1	Analyse dimensionnelle et théorie de la similitude . . . . .	29
2.1.1	Objet de la théorie de la similitude . . . . .	29
2.1.2	Invariance d'échelle . . . . .	29
2.2	Unités de mesure . . . . .	32
2.3	Principaux nombres adimensionnels . . . . .	34
2.4	Théorème de Vaschy-Buckingham ou théorème $\Pi$ . . . . .	36
2.4.1	Méthode de Rayleigh . . . . .	36
2.4.2	Théorème de Vaschy-Buckingham . . . . .	38
2.4.3	Application n° 1 du théorème $\Pi$ : force de traînée . . . . .	39
2.4.4	Application n° 2 du théorème $\Pi$ : puissance d'une explosion nucléaire . . . . .	42
2.4.5	Application n° 3 du théorème $\Pi$ : loi de Manning-Strickler . . . . .	43
2.5	Analyse dimensionnelle et équations du mouvement . . . . .	44
2.6	Similitude en ingénierie . . . . .	47
2.6.1	Généralités . . . . .	47
2.6.2	Similitude en hydraulique . . . . .	47
2.6.3	Courbe maîtresse . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Statique des fluides</b>	<b>51</b>
3.1	Origine physique de la pression dans les fluides . . . . .	51
3.2	Loi de l'hydrostatique . . . . .	52
3.2.1	Loi de Pascal . . . . .	52
3.2.2	Principe d'Archimède . . . . .	54
3.2.3	Calcul des forces de pression en pratique . . . . .	54

3.3	Mesure de la pression . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Équations de bilan</b>	<b>57</b>
4.1	Théorèmes de transport . . . . .	57
4.1.1	Vue générale . . . . .	57
4.1.2	Théorème de transport en dimension 1 . . . . .	58
4.1.3	Généralisation et théorème de Reynolds . . . . .	63
4.1.4	Conservation de la masse . . . . .	64
4.1.5	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	64
4.1.6	Conservation de l'énergie, théorème de Bernoulli . . . . .	67
4.2	Quelques applications du théorème de Bernoulli . . . . .	72
4.2.1	Formule de Torricelli . . . . .	72
4.2.2	Intrusion d'un courant de gravité . . . . .	72
4.2.3	Tube de Pitot . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Écoulement à surface libre</b>	<b>75</b>
5.1	Introduction . . . . .	75
5.1.1	Généralités . . . . .	75
5.1.2	Un peu de vocabulaire et des notations . . . . .	75
5.2	Hydraulique des canaux . . . . .	91
5.2.1	Charge totale et charge spécifique . . . . .	91
5.2.2	Courbes de remous obtenues par l'équation de Bernoulli . . . . .	95
5.3	Régime permanent uniforme . . . . .	97
5.3.1	Relation d'équilibre pour un régime permanent uniforme . . . . .	97
5.3.2	Loi de frottement . . . . .	98
5.3.3	Justification physique . . . . .	102
5.3.4	Hauteur normale selon la section d'écoulement . . . . .	104
5.4	Régime permanent non-uniforme . . . . .	109
5.4.1	Canal large . . . . .	109
5.4.2	Canal quelconque . . . . .	109
5.4.3	Courbes de remous . . . . .	110
5.4.4	Classification des régimes d'écoulement . . . . .	111
5.4.5	Conditions aux limites . . . . .	113
5.5	Courbes de remous et écoulement critique . . . . .	113
5.5.1	Hauteur critique et régimes associés . . . . .	113
5.5.2	Ressaut hydraulique . . . . .	116
5.5.3	Conjugaison d'une courbe de remous . . . . .	120
5.5.4	Effet d'un obstacle . . . . .	126
<b>6</b>	<b>Écoulements laminaires et turbulents</b>	<b>133</b>
6.1	Équations de Navier-Stokes . . . . .	133
6.1.1	Bases théoriques . . . . .	133

6.1.2	Forme générique des équations de Navier-Stokes . . . . .	134
6.1.3	Conditions aux limites . . . . .	135
6.2	Base phénoménologique du comportement newtonien . . . . .	137
6.3	Méthodes de résolution des équations de Navier-Stokes . . . . .	139
6.3.1	Expérience de Newton . . . . .	139
6.3.2	Expérience de Trouton . . . . .	141
6.4	Adimensionalisation des équations . . . . .	145
6.4.1	Choix des échelles . . . . .	145
6.4.2	Régimes d'écoulement . . . . .	146
6.5	Écoulements dominés par la viscosité . . . . .	147
6.5.1	Sédimentation . . . . .	147
6.5.2	Écoulement dans les milieux poreux . . . . .	148
6.5.3	Effet coin d'huile . . . . .	150
6.6	Couche limite . . . . .	153
6.6.1	Définition . . . . .	153
6.6.2	Équation de la couche-limite . . . . .	154
6.6.3	Équation de Blasius . . . . .	155
6.7	La turbulence ou les limites du modèle newtonien (laminaire) . . . . .	157
6.8	Moyenne des équations de Navier-Stokes . . . . .	162
6.9	Problème de fermeture . . . . .	164
6.10	Exemple d'application : écoulement sur un plan incliné . . . . .	166
<b>Annexe</b>		<b>171</b>
<b>A Rappels de mathématiques</b>		<b>173</b>
A.1	Scalaire, vecteurs, et tenseurs . . . . .	173
A.1.1	Coordonnées cartésiennes, cylindriques, et sphériques . . . . .	173
A.1.2	Produits . . . . .	175
A.1.3	Surface et calcul de surface . . . . .	176
A.1.4	Calcul des volumes . . . . .	178
A.2	Quelques opérateurs . . . . .	179
A.2.1	Opérateur gradient . . . . .	179
A.2.2	Opérateur divergence . . . . .	180
A.2.3	Opérateur laplacien . . . . .	181
A.2.4	Dérivée totale ou dérivée matérielle ou dérivée particulaire . . . . .	182
A.2.5	Quelques relations sur les opérateurs . . . . .	184
<b>B Rappels de mécanique des milieux continus</b>		<b>185</b>
B.1	Quelques éléments de cinématique . . . . .	185
B.1.1	Description eulérienne ou lagrangienne . . . . .	185
B.2	Trajectoires et lignes de courant . . . . .	186
B.2.1	Écoulement permanent . . . . .	187

B.2.2	Écoulement non permanent . . . . .	188
B.3	Déformation et rotation d'un volume de fluide . . . . .	189
B.3.1	Principe . . . . .	189
B.3.2	Écriture matricielle de $\mathbf{W}$ et $\mathbf{D}$ . . . . .	191
B.3.3	Interprétation de $\mathbf{D}$ : taux de dilatation et cisaillement . . . . .	192
B.3.4	Interprétation de $\mathbf{W}$ : vitesse de rotation . . . . .	193
B.4	Quelques éléments de dynamique . . . . .	195
B.4.1	Types de force . . . . .	195
B.4.2	Tenseurs des contraintes et des extra-contraintes . . . . .	195
B.4.3	Interprétation . . . . .	196
B.5	Synthèse: équations de Navier-Stokes dans différents systèmes . . . . .	198
B.5.1	Coordonnées cartésiennes . . . . .	198
B.5.2	Coordonnées cylindriques . . . . .	199
<b>C</b>	<b>Propriétés thermodynamiques</b>	<b>201</b>
C.1	Premier et second principes . . . . .	201
C.2	Chaleurs spécifiques . . . . .	202
C.3	Chaleur latente . . . . .	203
C.4	Vaporisation et cavitation . . . . .	204
	<b>Bibliographie</b>	<b>207</b>

# Avant-propos

Il s'agit d'un recueil de notes contenant les principales notions du cours ainsi que les formules utiles à connaître. Il ne s'agit pas d'un cours complet de mécanique des fluides. Le support complet de mon cours peut être trouvé à travers :

- les deux ouvrages « Hydrodynamique » et « Hydraulique » de Graf & Altinakar ;
- le manuel de cours « Mécanique des fluides » de Rhyming ;
- le cours « mécanique des fluides : une introduction » par Botsis & Deville ;
- l'ouvrage « Constructions hydrauliques » de Sinniger & Hager.

tous publiés aux PPUR (collection Traités de Génie Civil pour les ouvrages de Graf & Altinakar et Sinniger & Hager). Un grand nombre des données biographiques données à travers les différents chapitres sont issues du livre du prof. Willi Hager de l'ETHZ « Hydraulicians in Europe 1800–2000 » publié par l'*International Association of Hydraulic Engineering and Research* (Delft, 2003).

J'emploie les notations usuelles modernes :

- les exemples sont le plus souvent introduits à l'aide de « ♣ **Exemple.** – » et on indique la fin d'un exemple par le symbole « qed » □ ;
- les parties qui peuvent poser des problèmes d'interprétation sont indiquées par le symbole ⚡ dans la marge ;
- les démonstrations un peu techniques (qui peuvent être sautées en première lecture) sont signalées par le symbole ⚡ ;
- les vecteurs, matrices, et tenseurs sont en gras ;
- les variables scalaires sont en italique ;
- les fonctions, opérateurs, et nombres sans dimension sont en roman ;
- le symbole  $O$  ( $O$  majuscule) signifie « est de l'ordre de » ;
- le symbole  $o$  ( $o$  minuscule) signifie « est négligeable devant » ;
- je n'emploie pas la notation  $D/Dt$  pour désigner la dérivée particulaire, mais  $d/dt$  (qu'il ne faudra donc pas confondre avec la différentielle ordinaire selon  $t$ ). Je considère que le contexte est suffisant pour renseigner sur le sens de la différentielle et préfère garder le symbole  $D/Dt$  pour d'autres opérations différentielles plus complexes ;
- le symbole  $\propto$  veut dire « proportionnel à » ;
- le symbole  $\sim$  ou  $\approx$  veut dire « à peu près égal à » ;
- les unités employées sont celles du système international : mètre [m] pour les longueurs, seconde [s] pour le temps, et kilogramme [kg] pour la masse. Les unités sont précisées entre crochets ;
- pour la transposée d'une matrice ou d'un vecteur, j'emploie le symbole † en exposant :  $\mathbf{A}^\dagger$  veut dire « transposée de  $\mathbf{A}$  ».

**Remerciements pour les relecteurs suivants :** Damien Bouffard, Steve Cochard, Nicolas Andreini, Sébastien Wiederseiner, Martin Rentschler, Maxime Trolliet, Madeleine Bouchez, Jonas Haller, Scott Favre, François Gallaire, Roberto Siccardi, Arnaud Eggimann.

Ce travail est soumis aux droits d'auteurs. Tous les droits sont réservés ; toute copie, partielle ou complète, doit faire l'objet d'une autorisation de l'auteur.

La gestion typographique du français a été réalisée avec L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X à l'aide du package *french.sty* de Bernard Gaulle. Les figures A.1, A.2, et 1.2 ont été réalisées à partir du code PSTricks de F. Vandenbrouck. La figure A.3 est de Manuel Luque.

## Nomenclature

---

variable	signification
$a$	rayon d'une particule
$B$	largeur au miroir
$C$	coefficient de Chézy
$C_f$	coefficient de frottement
$c$	célérité des ondes
$\mathbf{D}$	tenseur des taux de déformation
$D$	diamètre d'une conduite
$e$	énergie interne massique
$f$	coefficient de frottement (Darcy-Weissbach)
$g$	accélération de la gravité
$h$	hauteur d'écoulement
$h_c$	hauteur critique
$h_n$	hauteur normale
$H$	charge de l'écoulement
$H_s$	charge spécifique
$i$	pende d'un bief
$\mathbf{j}$	vecteur courant (p. ex. flux de chaleur)
$j_f$	pende de frottement
$\mathbf{k}$	vecteur normal unitaire
$k$	énergie cinétique massique
$k$	conductivité hydraulique
$k_s$	rugosité
$K$	coefficient de Manning-Strickler
$\ell$	échelle de longueur
$\ell$	largeur
$\ell_m$	longueur de mélange
$L_*$	longueur caractéristique
$m_p$	masse d'une particule
$\mathbf{n}$	vecteur normal unitaire
$p$	pression
$p$	hauteur de pelle (pour un seuil)
$P_*$	échelle de pression
$Q$	débit
$Q$	chaleur
$q$	débit par unité de largeur
$R$	rayon de courbure
$R$	constante des gaz parfaits
$R_H$	rayon hydraulique
Re	nombre de Reynolds
$S$	section d'écoulement
$S$	entropie
$\mathbf{T}$	tenseur des extra-contraintes (appelé encore partie déviatorique)
$t$	temps
$T$	température
$u$	vitesse, composante de la vitesse dans la direction $x$
$u_*$	vitesse de glissement, vitesse de cisaillement
$\bar{u}$	vitesse moyennée selon la hauteur d'écoulement
$\langle u \rangle$	vitesse moyennée dans le temps
$\mathbf{u}$	vitesse
$\mathbf{u}'$	fluctuation de vitesse

variable	signification
$U_*$	échelle de vitesse
$u_s$	vitesse de sédimentation
$v$	vitesse, composante de la vitesse dans la direction $y$
$v$	vitesse quadratique moyenne
$\mathbf{v}$	vitesse
$\mathcal{V}$	volume de contrôle
$\mathbf{W}$	tenseur des taux de rotation

## Symboles grecs et autres

variable	signification
$\alpha$	diffusion thermique
$\chi$	périmètre mouillé
$\delta$	fonction de Dirac
$\delta$	petite variation
$\gamma$	déformation
$\gamma$	tension de surface
$\dot{\gamma}$	taux de cisaillement
$\epsilon$	rapport d'aspect
$\kappa$	conductivité thermique
$\kappa$	constante de von Kármán
$\mu$	viscosité dynamique
$\phi$	potentiel de vitesse
$\Phi$	fonction de dissipation
$\psi$	fonction de vitesse
$\psi$	potentiel gravitaire
$\Psi$	énergie totale
$\Pi$	nombre sans dimension
$\rho$	masse volumique
$\boldsymbol{\sigma}$	contrainte
$\sigma$	contrainte normale
$\theta$	angle de pente
$\tau$	contrainte de cisaillement
$\tau_p$	contrainte de cisaillement à la paroi
$\xi$	variable de similitude
$\mathbf{1}$	tenseur identité
$\nabla$	opérateur nabla



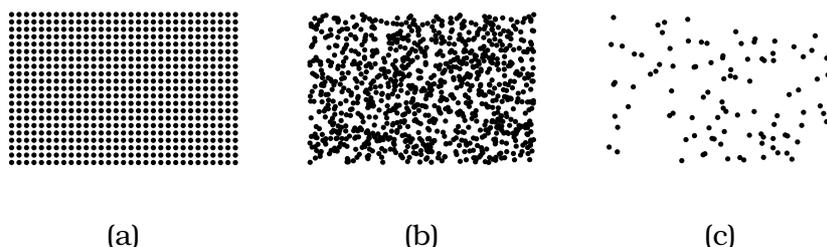
# 1 Propriétés des fluides

## 1.1 Définition physique d'un fluide

### 1.1.1 États de la matière

Il y a trois états de la matière (voir figure 1.1) pour un corps simple :

- solide: matériau à faible température ;
- liquide: matériau à température moyenne et pression suffisamment élevée ;
- gaz: matériau à température suffisamment élevée et à faible pression.



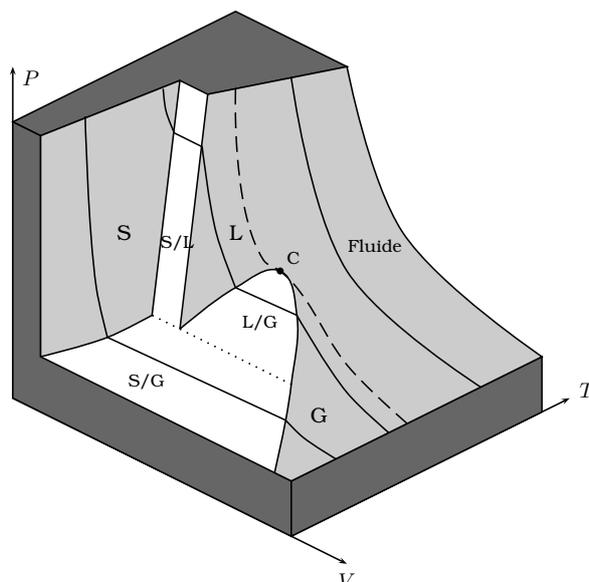
**Figure 1.1 :** représentation idéalisée des trois états de la matière: (a) solide (réseau ordonné de molécules/atomes), (b) fluide (collection dense et désordonnée de molécules), (c) gaz (collection diluée et très agitée de molécules).

Les différents états occupés par un corps simple peuvent être représentés dans un diagramme  $p, T, V$  comme le montre la figure 1.2. Les surfaces grisées représentent des états purs où un seul état subsiste, alors que la surface blanche représente l'ensemble des états où deux phases peuvent co-exister. Le point C est appelé *point critique*.

L'état solide est un état organisé de la matière: les arrangements entre molécules présentent un ordre relativement stable dans le temps. Les états gazeux et liquide représentent la matière en désordre: il n'existe pas d'ordre privilégié dans l'agencement des molécules car celles-ci sont perpétuellement en mouvement. Un fluide au repos à l'échelle humaine est en fait, à l'échelle moléculaire, en perpétuelle agitation.

Les états gazeux et liquide présentent des similarités: ce sont des fluides. Un fluide n'a pas de forme propre: placé dans un récipient, il adopte les formes du récipient. Il existe également des différences notables: un liquide a une surface libre; si l'on place un liquide dans un bol, on observe une interface nette, appelée *surface libre*, entre ce liquide et le gaz environnant. Un gaz a tendance à occuper tout le volume qui s'offre à lui. Un gaz n'a donc pas de surface libre.

À l'échelle atomique, ces différences peuvent s'expliquer assez simplement: un gaz est une collection très diluée de molécules ou d'atomes. Si  $d$  représente la taille d'une molécule, alors la distance entre deux molécules est de l'ordre de  $10d$ . Dans le cas d'un liquide, cette distance intermoléculaire est beaucoup plus faible, de l'ordre de  $d$  en général. Cela a des répercussions considérables sur les interactions



**Figure 1.2** : diagramme schématique des phases d'un corps simple dans un espace pression ( $p$ ), température ( $T$ ), et volume ( $V$ ).

entre molécules : pour un gaz, les molécules se rencontrent rarement et interagissent principalement au moment des collisions par des échanges de quantité de mouvement. Pour un liquide, les interactions sont bien plus fréquentes et sont d'une nature différente : il s'agit le plus souvent d'interaction électrostatique d'attraction ou de répulsion. La figure 1.3 montre le potentiel d'interaction  $V(r)$ , dit de Lennard-Jones<sup>1</sup>, et la force d'interaction qui en découle

$$V(r) = 4\epsilon \left( \left( \frac{d}{r} \right)^{12} - \left( \frac{d}{r} \right)^6 \right),$$

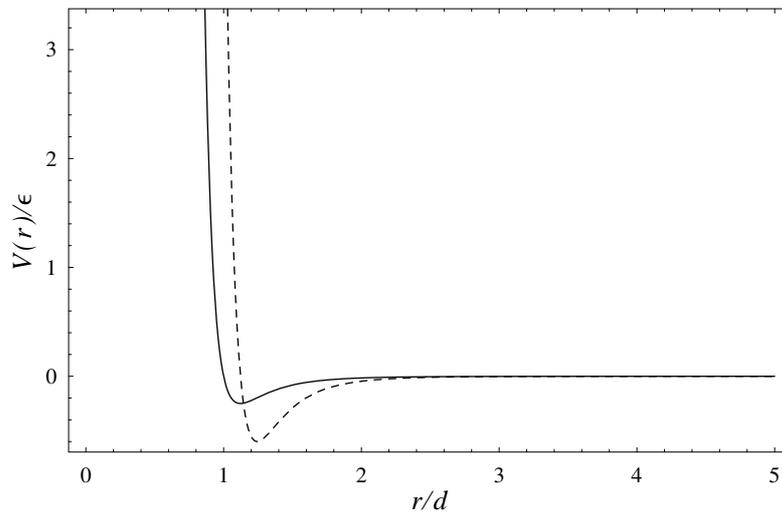
où  $r$  est la distance depuis le centre de la molécule et  $\epsilon$  est le potentiel d'adhésion de deux molécules ( $\epsilon \sim kT$  pour du méthane ou de l'argon). Aux faibles distances  $r/d < 1$ , l'interaction est une très forte répulsion qui s'oppose à l'interpénétration des atomes, puis vers  $r \approx d$  la force devient négative : deux molécules voisines se sentent attirées, mais cette force d'attraction diminue très rapidement avec  $r$ . Il s'agit des forces de Van der Waals<sup>2</sup>. Les molécules polyatomiques simples (comme l'eau) peuvent également porter des charges électriques, qui donnent naissance à des forces électrostatiques d'attraction ou de répulsion sensiblement plus fortes que les forces de Van der Waals dues aux atomes qui les composent.

Notre connaissance des propriétés d'un gaz est bien plus avancée que celle des liquides. Dès la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, reprenant des idées formulées par de nombreux physiciens de Bernoulli à Clausius, les physiciens Maxwell et Boltzmann<sup>3</sup> ont élaboré les bases de la théorie dite « théorie cinétique des

1. Edward Lennard-Jones (1894–1954) était un mathématicien anglais, considéré comme un des pionniers de la chimie moléculaire. Ses travaux ont porté sur les forces intermoléculaires, la valence, la catalyse de surface, et la structure moléculaire.

2. Johannes Diderik van der Waals (1837–1923) était un physicien hollandais. Instituteur, il s'est passionné pour la physique et a consacré son temps libre à ses recherches. Son mémoire de thèse présentait une théorie importante sur les gaz ; il fut honoré par le prix Nobel en 1910.

3. Les physiciens anglais et autrichien James Clerk Maxwell (1831–1879) et Ludwig Eduard Boltzmann (1844–1906) sont deux monuments de la physique. Ils sont les auteurs de véritables tours de force. Maxwell est surtout connu pour ses travaux sur le magnétisme ; les quatre équations connues aujourd'hui sous le nom d'équations de Maxwell sont la formalisation (par un mathématicien anglais, Oliver Heaviside) de ses travaux. Maxwell a fait aussi des avancées majeures en thermodynamique. Boltzmann est considéré comme le père de la mécanique statistique puisqu'il a créé la plupart des outils encore utilisés aujourd'hui. Même si l'idée des atomes est très vieille (Démocrite en parlait déjà cinq siècles avant notre ère), c'est bien Boltzmann qui a fourni une théorie complète et rigoureuse. Très critiqué par ses confrères (la théorie de l'éther prévalait à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle), Boltzmann s'en trouva très affecté et se suicida. Il fallut attendre les expériences de Planck sur le corps noir et d'Einstein sur l'effet photoélectrique pour qu'on rende justice à ses travaux.



**Figure 1.3 :** potentiel de Lennard-Jones (trait continu) et force dérivée  $f = -dV/dr$  (courbe en tireté) en fonction de la distance  $r$  du centre de la molécule. Pour un corps simple comme l'argon (Ar), on a  $d = 0,34$  nm et  $\epsilon = 120k_B K^2$ , avec  $k_B = 1,380 \cdot 10^{-23}$  J/K,  $k_B$  la constante de Boltzmann.

gaz », qui permet d'expliquer les propriétés macroscopiques des gaz (notamment la relation entre pression et température) en se fondant sur une description simplifiée des interactions moléculaires (mouvements aléatoires avec des échanges de quantité de mouvement lors des collisions). Cette théorie a également marqué le fondement de la mécanique statistique, branche de la physique qui vise à établir les propriétés macroscopiques de la matière à partir du comportement élémentaire des molécules. À ce jour, aucune théorie cinétique des liquides aussi simple et performante que la théorie cinétique des gaz n'existe. Cette difficulté à caractériser le comportement liquide se retrouve en thermodynamique lorsqu'on cherche à établir *une équation d'état*, c'est-à-dire une relation entre pression  $p$ , température  $T$ , et volume  $V$  (ou masse volumique) :  $f(V, p, T) = 0$ . La loi de Boyle-Mariotte<sup>4</sup> est l'équation d'état la plus simple qu'on puisse imaginer

$$pV = xRT,$$

avec  $p$  la pression,  $V$  le volume du gaz,  $x$  le nombre de moles,  $T$  la température, et  $R$  la constante des gaz parfaits ( $R = 8,31 = k_B \mathcal{N}_A$  J/K/mol, avec  $\mathcal{N}_A$  le nombre d'Avogadro). Elle a été établie à la fin du XVII<sup>e</sup> siècle indépendamment par les physiciens Boyle et Mariotte à partir d'expériences de laboratoire. De nos jours, on utilise une variante de cette loi, connue sous le nom de loi de Van der Waals, qui est plus précise

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = xRT,$$

avec  $a$  et  $b$  deux constantes, qui dépendent du gaz. Il n'existe pas d'équation pour un liquide car on ne peut pas relier simplement la pression et la température.

La manipulation des concepts de base de la théorie cinétique et de lois empiriques comme la loi des gaz parfaits permet d'aboutir à des ordres de grandeur très bons pour des gaz simples (gaz monoatomique comme l'argon) et relativement corrects pour des gaz plus complexes. Même si la théorie cinétique ne permet pas de prédire le comportement de tous les gaz, les explications qu'elles donnent sont qualitativement correctes et s'appliquent à la plupart des fluides. L'idée de base est que les particules sont sans cesse agitées. Ainsi, pour un gaz au repos, si la vitesse moyenne est nulle, la vitesse instantanée des particules ne l'est pas. On peut faire une décomposition de la vitesse instantanée  $\mathbf{u}$  en une vitesse moyenne  $\bar{\mathbf{u}}$  (nulle quand le gaz est au repos) et une vitesse fluctuante  $\mathbf{u}'$  :  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$ ,

4. Robert Boyle (1626–1691) était un aristocrate anglais passionné par la physique. Il est à l'origine de la Royal Society of London (l'équivalent de l'Académie des Sciences en France) et a fortement plaidé en faveur des sciences expérimentales. Edme Mariotte (1620–1684) était un ecclésiastique, physicien et botaniste français. La loi des gaz parfaits fut déterminée indépendamment par Boyle (1662) et Mariotte (1676).

avec  $\bar{\mathbf{u}} = \langle \mathbf{u} \rangle$  (moyenne dans le temps de la vitesse) et  $\langle \mathbf{u}' \rangle = 0$ . Si on calcule la vitesse quadratique

$$\mathbf{u}^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')^2 = \bar{\mathbf{u}}^2 + 2\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}' + \mathbf{u}'^2,$$

et qu'on prend la valeur moyenne

$$\langle \mathbf{u}^2 \rangle = \bar{\mathbf{u}}^2 + \underbrace{2\bar{\mathbf{u}} \cdot \langle \mathbf{u}' \rangle}_0 + \langle \mathbf{u}'^2 \rangle,$$

on peut définir la quantité  $v = \sqrt{\langle \mathbf{u}'^2 \rangle}$  comme étant la vitesse quadratique moyenne; pour un fluide au repos, cette vitesse donne une échelle de variation des fluctuations de vitesse et on l'appelle vitesse thermique ou *vitesse d'agitation thermique*. Pour un gaz dilué, les agitations des particules créent des fluctuations de quantité de mouvement, qui on le verra par la suite, peuvent être interprétées à l'échelle macroscopique comme une force. La force par unité de surface d'un gaz au repos s'appelle la pression et la théorie cinétique montre que s'il y a  $n$  atomes de masse  $m$  par unité de volume, alors la pression se définit à partir de la vitesse quadratique

$$p = \frac{1}{3}nmv^2,$$

or d'après la loi de Boyle-Mariotte, la pression à l'échelle macroscopique est  $p = nkT$  (puisque le nombre de moles  $x$  renferment  $xN_A$  molécules dans un volume  $V$ ), d'où l'on déduit immédiatement

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}},$$

ce qui montre que l'agitation thermique ne dépend que de la température et de la masse des atomes.

♣ **Exemple.** – Considérons un gaz de masse atomique 14 g/mol (azote) à la pression atmosphérique et à température ordinaire ( $T = 20 \text{ °C} = 293 \text{ K}$ ). On tire que la densité particulaire  $n$  vaut  $n = p/k_B T = 10^5/293/(1,38 \times 10^{-23}) = 2,47 \times 10^{25}$  atomes/m<sup>3</sup>. La vitesse d'agitation est donc

$$v = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 293 \cdot 6,02}{14 \times 10^{-3}}} \approx 720 \text{ m/s!}$$

□

On se rapportera à l'annexe C pour plus d'informations sur les propriétés thermodynamiques des fluides.

### 1.1.2 Matière divisée : dispersions, suspensions, émulsions

Tous les fluides ne sont pas de purs liquides ou gaz. On rencontre des fluides où deux phases en équilibre thermodynamique coexistent. Par rapport aux liquides purs, la présence de « particules » (bulles de gaz, particules solides, gouttelettes) induit la présence d'une multitude d'interfaces entre le liquide (phase continue) et les particules (phase dispersée), qui peuvent radicalement changer la nature du mélange. On distingue :

- les dispersions : ce sont des mélanges de particules très fines (taille inférieure à 1  $\mu\text{m}$ ). Ce sont souvent des particules colloïdales telles que des argiles. Les dispersions ne sédimentent pas spontanément et il est donc très difficile de filtrer une eau contenant des particules argileuses fines. En revanche, ce sont des mélanges très sensibles chimiquement à tout ce qui peut modifier la nature des interactions entre particules. La simple modification du pH d'une solution affecte considérablement le comportement des interfaces des particules, ce qui produit des variations brutales de comportement mécanique à l'échelle macroscopique. Par exemple, en ajoutant du sel de cuisine sur un gel pour cheveux, on peut liquéfier le gel (constitué de chaînes polymériques) ;
- les suspensions : ce sont des mélanges de particules fines ou grossières (taille supérieure à 1  $\mu\text{m}$ ), en général sans interaction colloïdale entre elles. Contrairement aux dispersions, les suspensions

sédimentent (plus ou moins rapidement selon la taille des particules et les conditions de sédimentation) et peuvent être filtrées mécaniquement. En général, les suspensions sont peu sensibles aux variations chimiques du liquide. Du sable fin (sable, limon, silt) peut être transporté en suspension dans un cours d'eau ;

- les émulsions : ce sont des mélanges de fines gouttelettes d'un liquide dans un autre. Les émulsions en gel sont des émulsions très concentrées où les gouttelettes ne peuvent quasiment plus se déplacer les unes par rapport aux autres. La plupart des liquides étant non miscibles, les émulsions sont très courantes. Le lait ou bien la mayonnaise sont des exemples d'émulsion de globules de graisse dans une phase aqueuse. Comme pour les dispersions colloïdales, la physique de ces mélanges est dictée par le comportement des interfaces. Un problème important est la stabilité des émulsions (coalescence des gouttelettes, séparation des phases). Les mousses sont des cas particuliers d'émulsion où les gouttelettes sont des bulles de gaz (voir figure 1.4). L'eau blanche qui se forme dans les cours d'eau à très forte pente ou bien l'écume des vagues sont des émulsions d'air dans de l'eau ; la cavitation dans les conduites peut amener à la formation d'émulsions.



Figure 1.4 : la mousse d'un café est un mélange de bulles de gaz dans un liquide.

## 1.2 Définition rhéologique d'un fluide

Un fluide est le plus souvent décrit comme un milieu continu, déformable, et s'écoulant. Ainsi, quoique discret à l'échelle moléculaire, un gaz comme l'air peut être décrit comme un milieu continu à notre échelle d'observation, c'est-à-dire que l'on peut négliger le comportement individuel des molécules (un cube de  $1 \mu\text{m}$  de côté contient  $3 \times 10^7$  molécules!) et décrire le comportement local à l'aide de champs vectoriels continus. Ainsi le champ *vitesse*  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  signifie la vitesse du fluide à la position  $\mathbf{x}$  et au temps  $t$  (ce que l'on mesure avec un appareil comme un tube de Pitot) et correspond physiquement à la vitesse moyenne des molécules contenues dans un voisinage infinitésimal autour de  $\mathbf{x}$ . Cette approximation de milieu continu est très utile car elle permet d'étudier le comportement mécanique des fluides à l'aide d'une relation liant contraintes et vitesses (taux) de déformation et qu'on appelle « loi de comportement ». La loi de comportement la plus simple est la loi newtonienne, selon laquelle les tenseurs des contraintes et des taux de déformation sont reliés linéairement par l'intermédiaire d'un paramètre appelé viscosité ; c'est ce que l'on va voir dans la section suivante. L'écoulement d'un fluide dépend foncièrement de la loi de comportement. Comme le montre la figure 1.5, les lignes de courant varient fortement selon que le fluide s'écoule comme un fluide newtonien en régime laminaire (à droite) ou que son écoulement prend la forme d'un écoulement potentiel (à gauche).

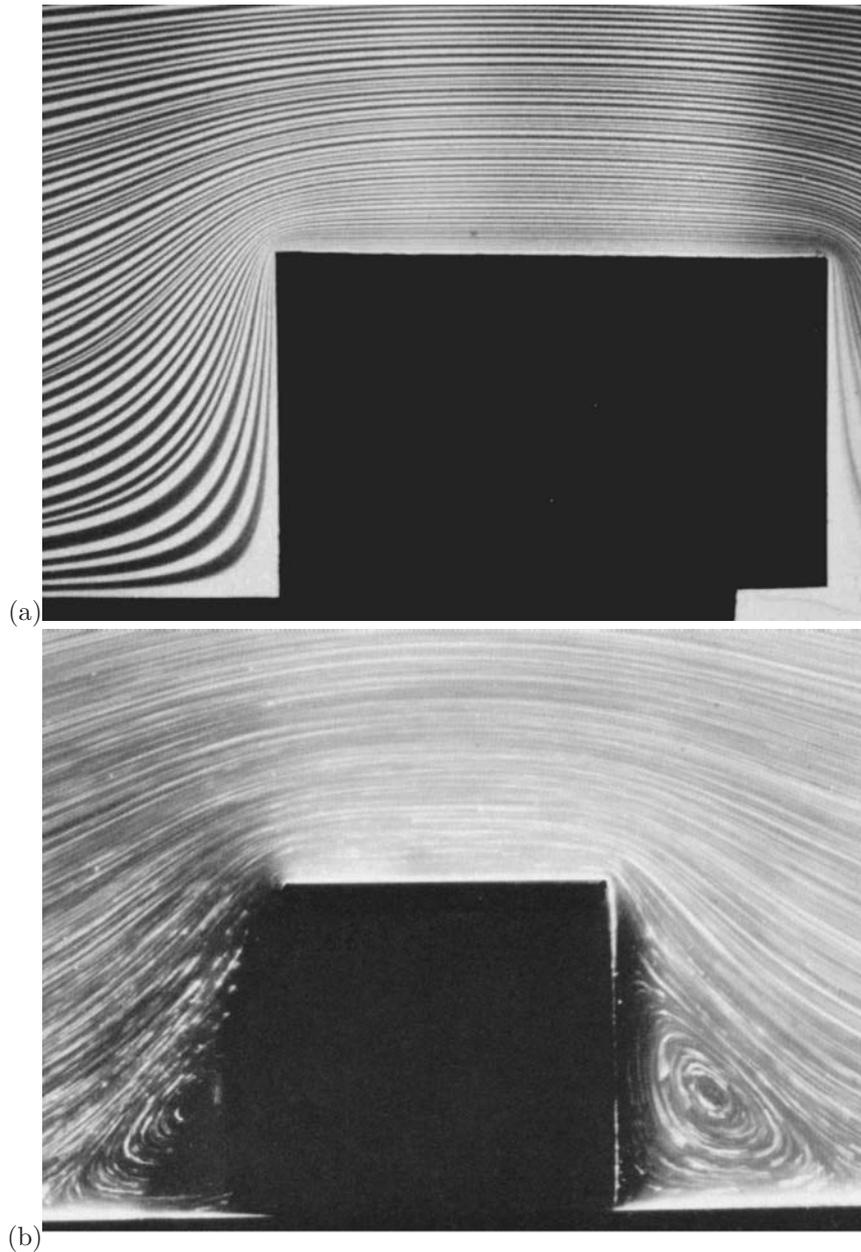
Tous les matériaux sont déformables et peuvent être considérés comme fluide si l'on attend suffisamment longtemps. C'est donc l'échelle de temps qui est importante. On introduit à cet effet un nombre sans dimension dit de Deborah<sup>5</sup> :

$$\text{De} = \frac{t_r}{t_e},$$

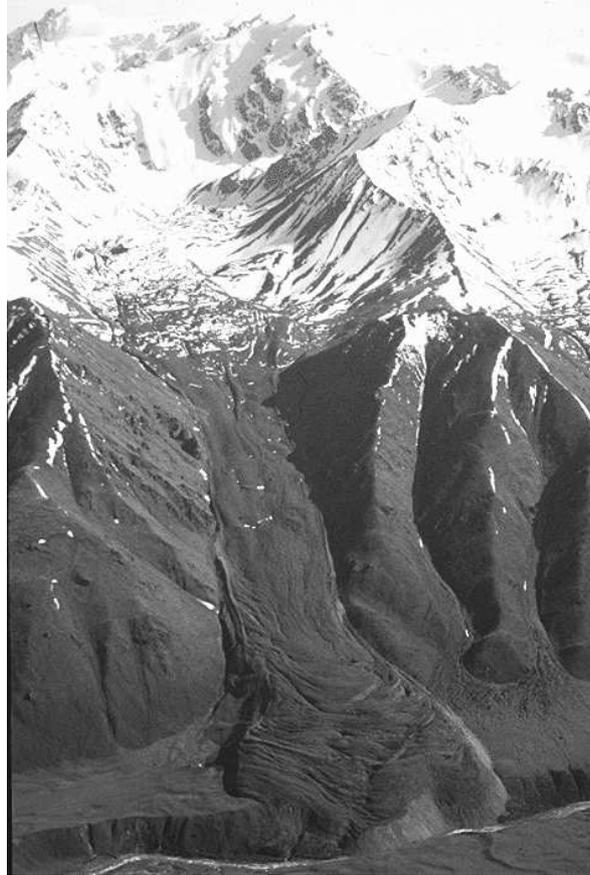
5. Ce nombre a été appelé ainsi en référence à un passage dans la Bible, où la prophétesse Déborah déclara « les montagnes s'écouleront avant le Seigneur », ce qui fut interprété par les rhéologues modernes comme la première affirmation que tout s'écoule si on attend suffisamment longtemps.

avec  $t_r$  temps de relaxation du matériau et  $t_e$  le temps de l'expérience (ou de l'observation). Si  $De \ll 1$ , le matériau se comporte comme un fluide et inversement si  $De \gg 1$ , il se comporte comme un solide. Par exemple, un glacier est fluide à l'échelle géologique (voir figure 1.6)!

Un fluide peut être *compressible*, c'est-à-dire le volume qu'il occupe change avec la pression appliquée. Ainsi, les gaz peuvent facilement changer de volume, mais les liquides sont caractérisés par une très faible compressibilité. Un fluide compressible peut s'écouler à volume constant. On dit alors que l'écoulement est *isochore*. À faible vitesse, un écoulement d'air est isochore: on peut négliger toute variation de volume du gaz. En revanche, à très grande vitesse, le gaz va se comprimer et on ne peut plus négliger la compressibilité de l'air; un phénomène caractéristique est l'onde de choc (une saute brutale de la masse volumique du gaz) lors du passage du mur du son par un avion supersonique. En aéronautique, on se sert ainsi du nombre de Mach, rapport de la vitesse de l'objet sur la vitesse du son, comme indice servant à caractériser l'importance de la compressibilité dans la dynamique du gaz.



**Figure 1.5 :** écoulement permanent d'un fluide visqueux autour d'un solide de section rectangulaire, avec à gauche (a) un écoulement potentiel dans une cellule de Hele-Shaw (fluide : eau) et à droite (b) un écoulement de Stokes tridimensionnel ( $Re = 0,02$ ; dans ce dernier cas, on note l'apparition de zones mortes, sièges de vortex (fluide : glycérine). Source : S. Taneda et D.H. Peregrine in (Van Dyke, 1982). Pour l'image (b) on visualise l'écoulement dans une cellule de Hele-Shaw, qui est un dispositif expérimental composé de deux plaques parallèles, très rapprochées, ce qui permet de créer des écoulements bidimensionnels. Quoique dans un régime laminaire (écoulement de Stokes), de tels écoulements présentent un champ cinématique similaire à celui d'un écoulement potentiel. Un écoulement est dit potentiel lorsque le champ de vitesse est le gradient d'une fonction scalaire appelée « potentiel »  $\phi$ . Ce type d'écoulement est très important sur le plan théorique car il sert à décrire des écoulements de fluide parfait (ou fluide d'Euler), c'est-à-dire des fluides pour lesquels il n'y a aucune dissipation d'énergie (par frottement visqueux). En pratique, un écoulement potentiel sert à décrire des écoulements en régime turbulent loin de toute paroi. Dans le cas présent, l'écoulement potentiel autour d'un obstacle rectangulaire est donc une idéalisation d'un écoulement turbulent autour d'un obstacle sans effet de couche limite et de sillage (c'est-à-dire précisément deux effets dus au frottement du fluide sur les parois de l'obstacle), des effets qui seront étudiés au chapitre 6; l'écoulement est alors gouverné par un équilibre entre gradient de pression et termes inertiels (accélération). Pour l'image(b), on visualise un écoulement laminaire dit de Stokes. C'est écoulement purement visqueux, sans effet inertiel. La dynamique de l'écoulement est alors entièrement commandée par l'équilibre entre termes de frottement visqueux et gradient de pression. On étudiera ces écoulements au chapitre 6.



**Figure 1.6** : *tout s'écoule, même les montagnes [DR]!*



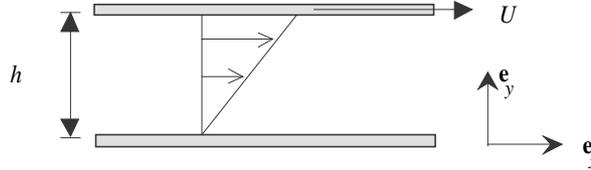
**Figure 1.7** : *passage du mur du son par un avion militaire [DR]. L'onde de choc induit un changement brutal de pression, qui provoque la condensation de la vapeur d'eau et la formation de micro-gouttelettes qui matérialise l'onde de choc aux abords de l'avion.*

## 1.3 Viscosité des fluides

### 1.3.1 Manifestation à l'échelle macroscopique

Beaucoup de fluides de l'environnement courant sont des fluides *newtoniens*. Ces fluides se caractérisent notamment par une dépendance linéaire des contraintes et des vitesses de déformation. Ainsi, Newton montra que lorsqu'on cisaille un fluide (voir figure 1.8)

- il se produit une force de résistance du fluide contre cette action de cisaillement ;
- cette force est proportionnelle au taux de cisaillement, ici  $U/h$  [1/s].



**Figure 1.8 :** cisaillement d'un fluide entre deux plaques parallèles espacées d'une distance  $h$  ; la plaque supérieure se déplace à la vitesse  $U$ .

Si on définit la contrainte de cisaillement  $\tau$  comme la force par unité de surface [ $\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$ ], alors on a la relation :

$$\tau = \mu \frac{U}{h},$$

où  $\mu$  est le coefficient de *viscosité dynamique* [en  $\text{Pa}\cdot\text{s}$ ]. On introduit aussi une *viscosité cinématique*  $\nu = \mu/\rho$  [en  $\text{m}^2/\text{s}$ ] (cette relation sert par exemple dans la définition du nombre de Reynolds). L'unité de mesure de la contrainte est le Pascal [Pa], c'est-à-dire  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}/\text{m}^2$ . On verra plus loin au chapitre 6 que cette loi empirique s'écrira

$$\tau = \mu \dot{\gamma}, \quad (1.1)$$

avec  $\dot{\gamma}$  le taux de cisaillement ou gradient de vitesse, qui dans le cas particulier examiné ici prend la valeur  $U/h$ .

La viscosité dépend foncièrement de la température du liquide : en général, elle diminue avec la température (plus la température est élevée, plus l'agitation moléculaire est grande, moins le fluide oppose de résistance). Ainsi, la viscosité de l'eau liquide vaut  $1,8 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$  pour  $T = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $1,0 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$  pour  $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $0,35 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$  pour  $T = 80 \text{ }^\circ\text{C}$ , et  $0,28 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$  pour  $T = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ . Pour un gaz, c'est l'inverse : on observe une augmentation de la viscosité avec la température. Le tableau 1.1 donne les valeurs des viscosités pour l'eau et l'air à température ambiante ainsi que la masse volumique. Le tableau 1.2 donne la viscosité dynamique pour des produits courants.

**Tableau 1.1 :** quelques valeurs de viscosité à  $T = 20 - 30 \text{ }^\circ\text{C}$ .

	$\rho$ $\text{kg}/\text{m}^3$	$\mu$ $\text{Pa}\cdot\text{s}$	$\nu$ $\text{m}^2/\text{s}$
eau	1000	$10^{-3}$	$10^{-6}$
air	1,17	$2 \times 10^{-5}$	$1,6 \times 10^{-5}$

À retenir que l'unité de la viscosité dynamique est le  $\text{Pa}\cdot\text{s}$  (unité du système international ou USI). Auparavant on employait le poiseuille ( $1 \text{ Po} = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ) ou le poise (le plus souvent le centipoise) :  $1 \text{ Pa}\cdot\text{s} = 10 \text{ Po} = 100 \text{ cPo}$ . Pour la viscosité cinématique, on emploie le  $\text{m}^2/\text{s}$  ; certains ont recours au stokes (St)  $1 \text{ St} = 1 \text{ cm}^2/\text{s} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  et  $1 \text{ cSt} = 1 \text{ mm}^2/\text{s} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

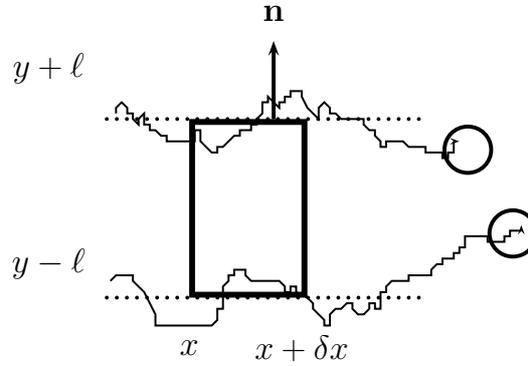
### 1.3.2 Origine physique

La viscosité des gaz monoatomiques dilués peut s'expliquer assez simplement à l'aide de la théorie cinétique. Pour des gaz polyatomiques ou concentrés, les prédictions de cette théorie sont un peu moins bonnes. Pour les liquides, le sujet a été abordé depuis longtemps, mais reste encore très débattu.

**Tableau 1.2** : quelques valeurs de viscosité de matériaux familiers à température ordinaire.

	$\mu$ (Pa·s)
air	$2 \times 10^{-5}$
eau	$10^{-3}$
huile d'olive	0,1
miel	1 – 10
sirop d'érable	100
bitume	$10^8$

Considérons l'expérience de Newton, où le gaz est cisailé entre deux plaques. À l'échelle atomique, les molécules vont en moyenne dans la direction  $x$ , mais sont également en perpétuelle agitation. Considérons deux couches voisines et parallèles de molécules, dont le mouvement moyen est un glissement relatif selon  $x$ . Si le libre parcours moyen<sup>6</sup> des molécules est  $\ell$ , alors l'ordre de grandeur de la séparation entre deux couches dans la direction  $y$  est  $2\ell$ . Une molécule est animée d'une vitesse fluctuante due à l'agitation thermique, qui est isotrope et qui prend donc une valeur  $v(T) \propto \sqrt{T}$  dans toutes les directions  $\mathbf{v} = (v, v)$ , et d'une vitesse moyenne  $u(y)$  selon la direction  $x$ . La vitesse instantanée est donc la somme de ces deux vitesses  $\mathbf{u} = (u + v, v)$ .

**Figure 1.9** : théorie cinétique très simplifiée : on considère un volume de contrôle compris entre deux couches de glissement à l'échelle moléculaire.

Considérons un petit volume de contrôle entre deux couches, long de  $\delta x$ , comme le montre la figure 1.9. Du fait de l'agitation thermique, à chaque instant, à peu près  $n/6$  molécules passent de l'altitude  $y + \ell$  à  $y$  (les autres vont dans les autres directions de l'espace), où  $n$  désigne le nombre moyen de molécules par unité de volume (à ne pas confondre avec la normale  $\mathbf{n}$ ). Le flux élémentaire de quantité de mouvement pour une particule entrant dans le volume s'écrit sur la face supérieure (à l'altitude  $y + \ell$ )

$$\delta\phi(y + \ell) = m(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}\delta x = m \begin{pmatrix} v(T)u(y + \ell) \\ v(T)^2 \end{pmatrix} \delta x,$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale à la facette. Comme il y a en  $n/6$  particules entrant dans le volume par unité de temps, on déduit que le flux tangentiel (dans la direction  $x$ ) s'écrit donc  $\delta\phi_x(y + \ell) = nmv u(y + \ell)\delta x/6$ . On fait de même avec la facette inférieure sachant que les flux latéraux ne comptent pas (flux nul car le volume est pris entre deux couches adjacentes) et on tire que le flux est  $\delta\phi_x(y - \ell) = -nmv u(y - \ell)\delta x/6$ . Le flux total tangentiel par unité de longueur est donc

$$\phi_t = \frac{\delta\phi_x(y + \ell) + \delta\phi_x(y - \ell)}{\delta x} = \frac{nmv}{6} (u(y + \ell) - u(y - \ell)) \approx \frac{nmv}{3} \frac{du}{dy} \ell + O(\ell),$$

quand on fait un développement limité au premier ordre. On peut faire de même avec le flux normal, mais comme la vitesse fluctuante ne dépend que de la température, on trouve que les deux composantes élémentaires du flux sont de signe opposé et il n'y a donc pas de flux de quantité de mouvement dans

6. Le libre parcours moyen est la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux collisions.

la direction  $y$ . Comme on peut interpréter un flux de quantité comme une contrainte, on en déduit que ce flux tangentiel équivaut à une contrainte de frottement tangentiel

$$\tau = \mu \frac{du}{dy},$$

avec

$$\mu = nmvl/3$$

le coefficient de viscosité. Grâce à la théorie cinétique, on peut expliquer le comportement newtonien des gaz, mais également calculer le coefficient de viscosité dynamique, notamment prévoir sa variation avec la température:  $\mu \propto T$ , ce qui est bien vérifié expérimentalement.

### 1.3.3 Fluides newtoniens et non newtoniens

Dans ce cours, on s'intéresse essentiellement à des fluides newtoniens. Pour un fluide newtonien à température constante et placé dans un écoulement dit en cisaillement simple, la contrainte de cisaillement est reliée au taux de cisaillement (gradient de vitesse) par la relation linéaire (1.1). Autrement dit, si l'on trace le rapport  $\mu = \tau/\dot{\gamma}$  en fonction du taux de cisaillement, on obtient une droite horizontale, comme le montre la figure 1.10.

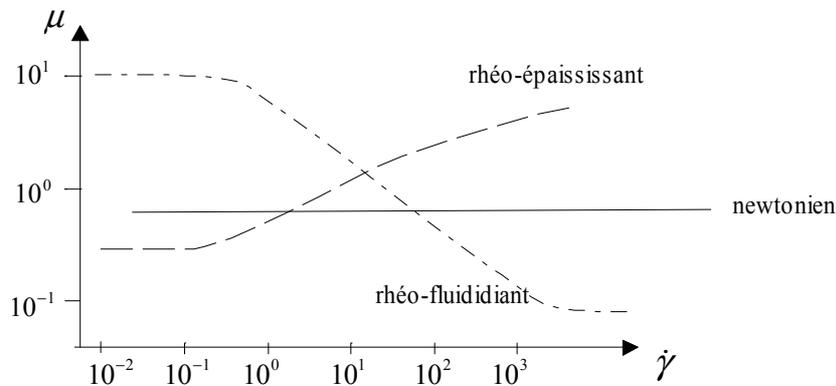
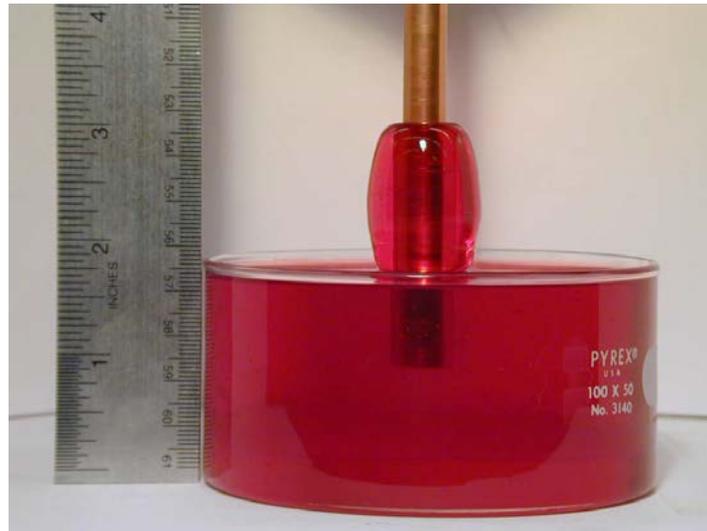


Figure 1.10 : loi de viscosité pour différents types de fluide.

Tous les fluides ne vérifient pas cette relation ou bien la vérifient partiellement. Par exemple, l'huile de cuisine est newtonienne, mais la mayonnaise ne l'est pas : si on place de la mayonnaise sur une assiette et qu'on incline légèrement cette assiette, rien ne se passe. En fait, il faut exercer une contrainte minimale pour que la mayonnaise s'écoule. On dit que la mayonnaise possède un *seuil de contrainte*. On peut faire une expérience en plaçant un objet à la surface de la mayonnaise : un cornichon a toutes les chances de rester à la surface tandis qu'on peut facilement y enfoncer une cuillère. Le seuil de contrainte peut empêcher la sédimentation d'un corps si la pression exercée par ce corps est inférieure à ce seuil. Si l'on trace la relation  $\tau = f(\dot{\gamma})$  pour un tel fluide, on obtient une courbe comme celle reportée sur la figure 1.12, avec une valeur non nulle de la contrainte de cisaillement quand le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  tend vers 0. Les fluides non newtoniens possèdent des propriétés parfois stupéfiantes qui les distinguent des fluides newtoniens. Par exemple, l'effet Weissenberg sert à caractériser de façon simple un comportement non newtonien : un fluide newtonien mis en rotation a tendance à se creuser sous l'effet des forces centrifuges, mais un liquide polymérique (constitué de longues chaînes de macromolécules) s'enroule autour du cylindre (voir figure 1.11) comme s'il était aspiré.

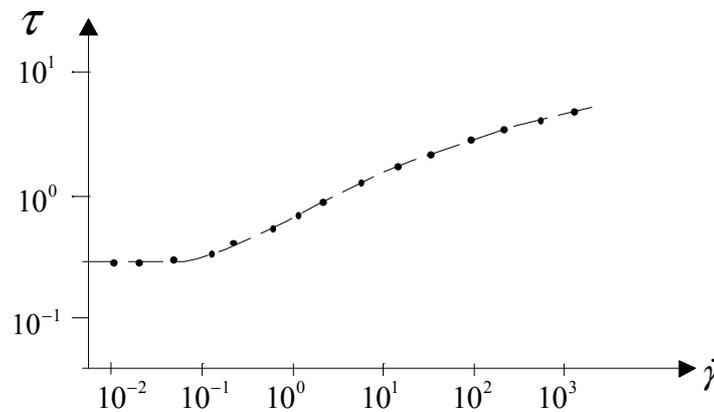
D'autres fluides n'ont pas de seuil de contrainte, mais une viscosité qui dépend du taux de cisaillement. On distingue ainsi deux classes de comportement (voir figure 1.10) :

- comportement rhéo-épaississant : plus le taux de cisaillement est important, plus la résistance du fluide est grande. Cela se traduit souvent par des comportements expérimentaux de la forme  $\tau \propto \dot{\gamma}^n$ , avec  $n > 1$ . Dans les produits alimentaires, les produits à base d'amidon sont le plus souvent rhéoépaississants (c'est aussi en partie pour cette raison qu'on les utilise pour « épaissir » une sauce) ;



**Figure 1.11** : effet Weissenberg. C'est la remontée d'un liquide polymérique le long d'un cylindre plongé dans un bain et mis en rotation.

- comportement rhéofluidifiant : plus le taux de cisaillement est important, plus la résistance du fluide est faible. Expérimentalement, on observe des variations de la forme  $\tau \propto \dot{\gamma}^n$ , avec  $n < 1$ . Le ketchup est un produit rhéofluidifiant. Certaines peintures possèdent cette propriété pour faciliter leur application ; elles peuvent également être *thixotropes* : l'application d'une contrainte provoque une déstructuration du matériau, entraînant une chute de viscosité, qui varie au cours du temps (si le matériau est laissé au repos, il retrouve sa structure originale et donc sa viscosité originale).

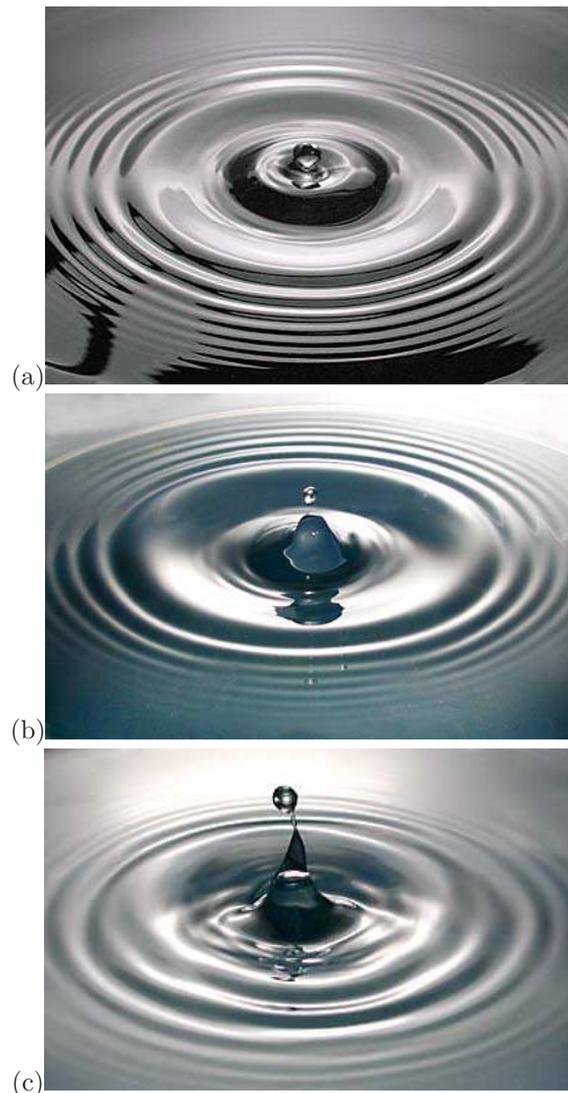


**Figure 1.12** : loi d'écoulement  $\tau = f(\dot{\gamma})$  pour un fluide à seuil.

À noter que la plupart des matériaux un tant soit peu complexes sont non newtoniens, mais on emploie fréquemment l'approximation de fluide newtonien car assez souvent on travaille sur une gamme restreinte de taux de cisaillement et que dans ce cas-là, l'approximation peut être correcte. Par exemple, on parle de viscosité d'un glacier lorsqu'on fait des calculs de fluage approximatifs sur de très grandes échelles de temps.

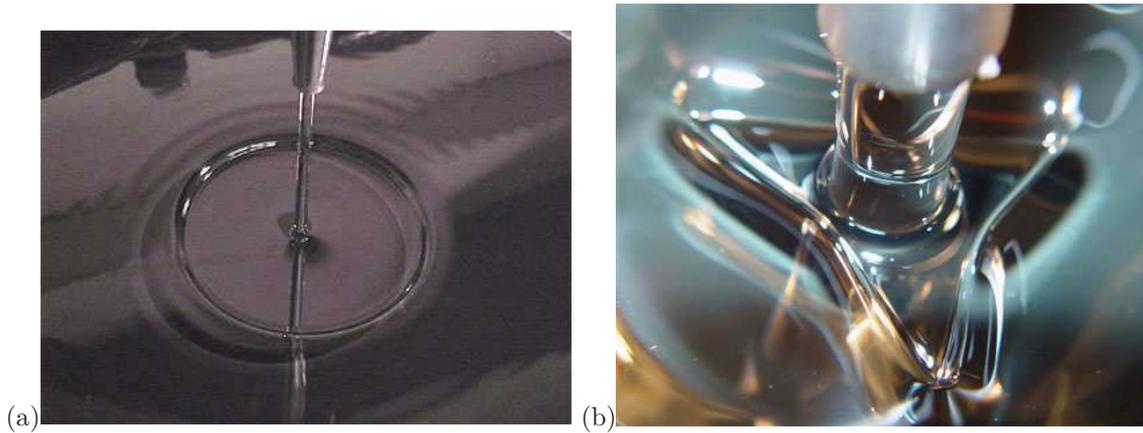
## 1.4 Tension de surface

La tension de surface est une propriété des fluides, qui sont attirés ou repoussés lorsqu'ils sont en contact avec un solide, un liquide, ou un gaz. Cette propriété est importante puisqu'elle explique la stabilité des gouttes de pluie dans l'atmosphère, les larmes du vin, le déplacement des insectes à la surface de l'eau, les propriétés anti-adhérence de certains ustensiles de cuisine, les émulsions en cuisine, l'effet du savon, les remontées capillaires dans les solides poreux, etc. La séquence de photographies 1.13 montre comment sous l'effet de la tension de surface, un jet liquide se scinde et forme une goutte. La tension de surface est un phénomène général que l'on rencontre pour tous les fluides ; toutefois, selon la nature du fluide, l'effet de la tension de surface peut amener à des phénomènes d'allure différente comme l'illustre la figure 1.14 dans le cas de ressauts capillaires avec des fluides newtonien et non newtonien.



**Figure 1.13 :** formation d'une goutte. Les ondes de surface ainsi que la rupture de la goutte sont commandées par les effets de tension de surface.

À l'interface entre deux fluides, il existe des interactions moléculaires en général de répulsion : les milieux n'étant pas miscibles, il existe une force à la surface de contact qui permet de séparer les deux fluides et éviter leur imbrication ou leur mélange. On appelle *tension de surface* ou *tension capillaire* cette force surfacique permettant de maintenir deux fluides en contact le long d'une interface commune.



**Figure 1.14 :** (a) formation d'un ressaut capillaire avec de l'eau dans un évier. (b) effet de la tension de surface provoquant une rupture de symétrie dans le ressaut circulaire dans le cas d'une fluide non newtonien [John W. M. Bush, <http://web.mit.edu/jeffa/Public/web/jump.htm>].

On la note  $\gamma$ ;  $\gamma$  a la dimension [Pa·m]. On l'exprime parfois aussi comme une énergie par unité de surface [J/m<sup>2</sup>]. La tension de surface de l'eau en contact avec l'air est  $\gamma = 70 \times 10^{-3}$  Pa·m; le tableau 1.3 fournit quelques valeurs de tension de surface.

**Tableau 1.3 :** tension de surface  $\gamma$  de quelques liquides à température ambiante ou à celle indiquée entre parenthèses

Fluide	$\gamma$ [Pa·m]
huile silicone	$20 \times 10^{-3}$
eau	$70 \times 10^{-3}$
éthanol	$23 \times 10^{-3}$
glycérol	$63 \times 10^{-3}$
mercure	0,485
hélium (à 4° K)	$10^{-4}$
verre fondu (1500° K)	0,3

Si l'on considère maintenant un liquide le long d'une paroi solide, on observe l'effet inverse : il existe des forces d'adhésion. On dira le plus souvent que le fluide est *mouillant* s'il est attiré par le solide : une goutte d'eau a ainsi le plus souvent le caractère d'un fluide mouillant. On dit qu'il est *non mouillant* lorsqu'il est repoussé par la surface solide ; c'est par exemple ce qu'on cherche à produire en fabriquant des ustensiles de cuisine avec des revêtements en téflon pour éviter l'adhésion des graisses ou bien quand on farte les skis avec des farts fluorés. La figure 1.15 montre un exemple d'application en le génie civil avec la couverture du stade de la Maracanã à Rio-de-Janeiro (Brésil). La figure 1.16 montre la forme d'une goutte sur un support plan en fonction de son caractère mouillant. L'angle que forme la goutte avec le support solide est appelé *angle de contact*. Pour un fluide en équilibre statique, c'est une grandeur constante, qui ne dépend que des propriétés (énergies de surface) du solide, du liquide, et du gaz. Si le fluide n'est plus au repos, la valeur de l'angle varie avec la vitesse et la direction de l'écoulement.

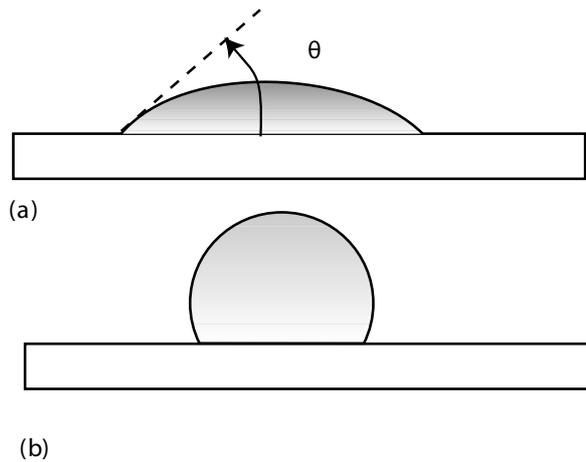
Considérons un cadre métallique surmonté d'une barre mobile. On plonge l'ensemble dans de l'eau savonneuse (la même solution qui sert à faire des bulles de savon), puis on le retire. On constate que la barre roule immédiatement vers la gauche. Il faut exercer une force

$$F = 2\gamma\ell,$$

pour immobiliser la barre. Le facteur 2 correspond aux deux interfaces liquide/air de part et d'autre du cadre.



**Figure 1.15 :** pour le projet de réhabilitation du stade Maracanã de Rio de Janeiro pour le Mondial de football et les Jeux Olympiques, les concepteurs ont prévu de couvrir les gradins à l'aide d'une enveloppe comportant un film plastique couvert de téflon pour éviter l'imprégnation (qui serait préjudiciable au poids que doivent supporter les poutres de la structures) et faciliter le drainage (dans un climat subtropical, les pluies peuvent être très intenses). Source: <http://placar.abril.com.br>.



**Figure 1.16 :** goutte sur une surface solide dans le cas d'un fluide au repos (a) mouillant et (b) non mouillant.

Cette expérience montre donc que la force de tension agit comme une force normale (à la barre) proportionnelle à la longueur de film (en contact avec la barre). De manière générale, la force résultant de la tension de surface sur tout élément de longueur  $ds$  de la surface libre orientée par la normale  $\mathbf{n}$  est

$$d\mathbf{F} = \gamma \mathbf{n} \times ds. \quad (1.2)$$

Si on prend par une surface solide en contact statique avec un liquide (voir figure 1.18), on trouve

$$\mathbf{F} = \ell \gamma \mathbf{t} = \ell \gamma \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec  $\ell$  le périmètre de l'objet en contact avec l'interface et  $\phi$  l'angle de l'interface; un facteur 2 peut être nécessaire lorsqu'il s'agit d'un film avec deux interfaces. On note ainsi que la composante verticale

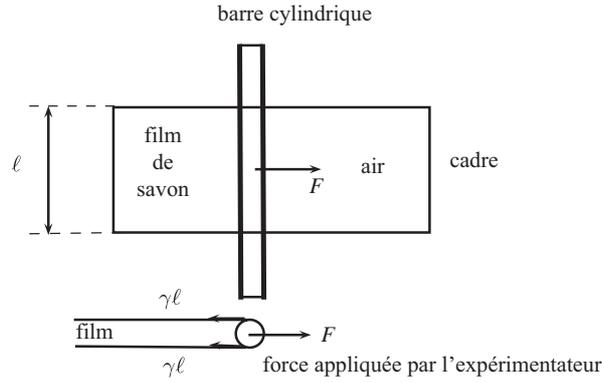


Figure 1.17 : la tension de surface crée une force normale à la tige.

de la force est maximale à l'arrachage, c'est-à-dire lorsqu'on retire l'objet du bain et que la force de tension est orientée verticalement ( $\phi \rightarrow 0$  dans l'équation ci-dessus). Dans le cas présent, l'angle de l'interface  $\phi$  correspond aussi à la définition de l'angle de contact  $\theta$ .

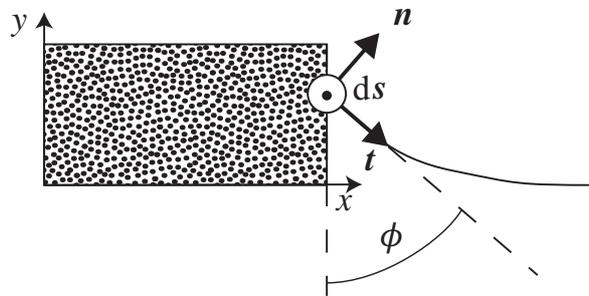


Figure 1.18 : la tension de surface crée une force normale au plan ( $ds, \mathbf{n}$ ). La direction de cette force est donc donnée par  $\mathbf{t}$ .

C'est ce principe qui est exploité dans un appareil appelé « tensiomètre » (de Lecomte du Noüy) qui sert à mesurer la tension de surface: il s'agit de placer un petit anneau à la surface du liquide dont on veut mesurer la tension, puis de mesurer la force nécessaire à son soulèvement. Si le rayon intérieur est  $R_1$ , le rayon extérieur  $R_2$ , l'épaisseur de l'anneau  $e$ , cette force s'écrit

$$F = 2\pi\gamma(R_1 + R_2) + \rho g e \pi(R_2^2 - R_1^2),$$

avec le second terme correspondant au poids de l'anneau. En général ce poids est très faible et  $R_2 - R_1 \ll R = \frac{1}{2}(R_2 + R_1)$  de telle sorte qu'on peut écrire :

$$F \approx 4\pi R \gamma.$$

On peut mesurer de façon très précise la tension de surface avec ce simple appareil.

Quand on place une petite entité de fluide dans un autre fluide, cette entité isolée prend la forme d'une goutte sphérique si rien ne vient (comme un mouvement du fluide environnant) s'opposer à cette forme. En effet, la forme sphérique est la forme qui minimise l'énergie de surface, c'est-à-dire l'énergie que doit dépenser la particule pour éviter que du fluide environnant ne pénètre dans la goutte. Considérons une goutte de rayon  $R$  d'un fluide au repos immergée dans un autre fluide au repos. La pression dans la goutte est  $p_i$ ; celle dans le fluide extérieur est  $p_e$ ; voir figure 1.20. La goutte est à l'équilibre si le travail des forces de surface est contrebalancé par le travail des forces de pression (on suppose qu'on augmente virtuellement le rayon d'un incrément  $dR$  et on impose que la goutte retrouve

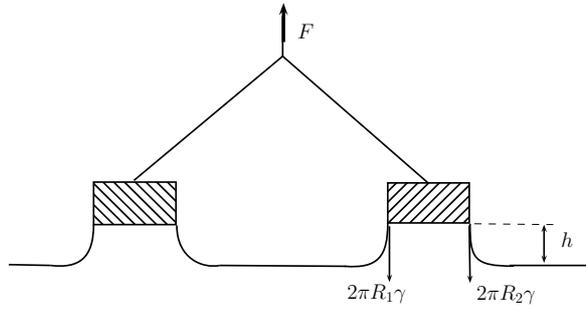


Figure 1.19 : tensiomètre de Noüy.

sa position d'équilibre, donc tous les travaux des différentes forces doivent se compenser) :

- travail élémentaire des forces  $\delta W_p$  de pression (force de volume) : pression  $\times$  incrément de volume =  $-\Delta p \times d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ , avec  $\Delta p = p_i - p_e$  ;
- travail élémentaire des forces  $W_t$  de tension (force de surface) : tension  $\gamma \times$  incrément de surface =  $\gamma \times d(4\pi R^2)$ .

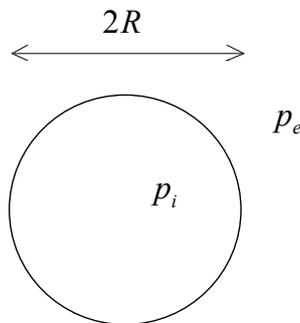


Figure 1.20 : goutte en équilibre.

On doit avoir  $\delta W_p + \delta W_t = 0$ . En différenciant, puis en simplifiant, on trouve :

$$\boxed{\Delta p = p_i - p_e = \frac{2\gamma}{R}} \tag{1.3}$$

C'est la *loi de Laplace*<sup>7</sup>. À travers toute interface entre deux fluides, il existe une saute de pression égale à  $2\gamma/R$ . Cette loi peut se généraliser à des surfaces libres non sphériques

$$\Delta p = p_i - p_e = \gamma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right), \tag{1.4}$$

avec  $R$  et  $R'$  les rayons de courbure principaux. Attention, si on considère une bulle sphérique au lieu d'une goutte, l'intérieur et l'extérieur de la bulle sont composés de gaz et ils sont séparés par un film avec deux interfaces, donc la loi de Laplace est dans ce cas particulier

$$\Delta p = p_i - p_e = 4\frac{\gamma}{R}.$$

Il faut aussi prendre garde à l'emploi de cette loi lorsque la surface libre est concave (comme dans le cas de la remontée capillaire d'un fluide mouillant, voir l'exemple de la loi de Jurin plus bas) : la

7. Pierre-Simon Laplace (1749–1827) a été un mécanicien et mathématicien français à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle et début du XIX<sup>e</sup> siècle. Ses travaux ont porté sur des problèmes de mécanique céleste, où il analysa l'interaction à l'aide d'équations différentielles, de mathématiques (loi de probabilité, transformée de Laplace), et de la thermomécanique des fluides (changement d'état des corps).



pression du fluide est alors plus petite qu'à l'extérieur. Il faut donc considérer que le rayon de courbure est algébrique :  $R > 0$  pour une surface convexe et  $R < 0$  pour une surface concave.

La tension de surface permet d'expliquer la remontée capillaire le long d'une paroi solide. En effet, expérimentalement on observe que la surface libre d'un liquide ne forme pas un angle droit avec une paroi, mais est légèrement incurvée vers le haut (liquide mouillant) ou vers le bas (liquide non mouillant). L'ordre de grandeur de la remontée capillaire est obtenu en égalant la pression (supposée hydrostatique) due à la gravité et la saute de pression due aux forces capillaires, ce qui donne d'après l'équation (1.4)

$$\rho gh \approx \frac{\gamma}{R}, \quad (1.5)$$

avec  $R$  le rayon de courbure et  $h$  la remontée capillaire,  $R' \rightarrow \infty$  et où l'on a négligé la pression atmosphérique (voir figure 1.21). En faisant l'approximation  $R \sim h$ , on déduit l'ordre de grandeur suivant

$$h^2 = O\left(\frac{\gamma}{\rho g}\right).$$

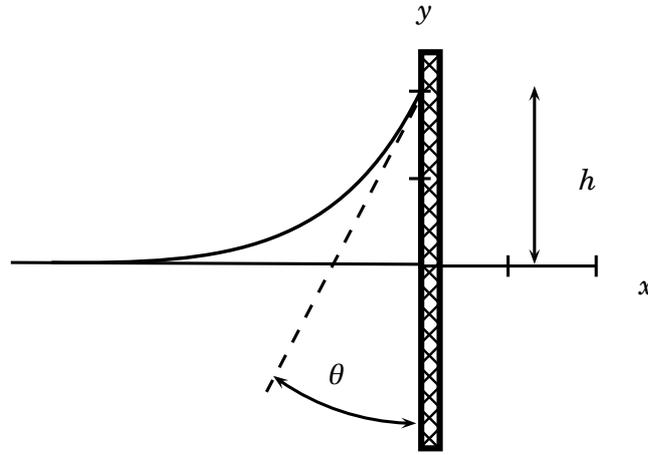


Figure 1.21 : remontée capillaire le long d'une paroi solide dans le cas d'un fluide mouillant.

Ce calcul peut se faire plus rigoureusement en intégrant l'équation (1.5) et en se servant de la définition du rayon de courbure

$$R(x) = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''},$$

où  $y(x)$  est l'équation de la surface libre. Pour résoudre cette équation, on a besoin d'une condition aux limites. Celle-ci est donnée expérimentalement par l'angle que forme le liquide avec la paroi solide, angle qui est appelé *angle de contact*. En partant de l'équation différentielle  $\rho gy(x) = \gamma/R(x)$  associée à la condition aux limites  $y'(0) = -\cotan\theta$ , en la multipliant par  $y'$ , puis en intégrant une fois, on obtient

$$d\left(\frac{1}{2}y'^2 + \frac{\gamma}{\rho g} \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0$$

ce qui veut dire que la quantité  $\psi = y'^2 + 2\gamma/(\rho g\sqrt{1 + y'^2})$  se conserve. Comme la surface libre doit devenir horizontale quand  $x$  croît, on trouve que  $\psi$  doit être nul (car  $y' \rightarrow 0$  et  $y \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow -\infty$ ). L'équation différentielle du premier ordre qui en résulte est assez compliquée, mais on peut obtenir la remontée capillaire sans la résoudre. En se servant de la condition aux limites  $y'(0) = -\cotan\theta$ , on trouve finalement

$$h^2 = 2\frac{\gamma}{\rho g} \sin\theta.$$

Une manifestation des effets de tension de surface est la remontée capillaire due à la dépression locale causée par la courbure de la surface libre. Considérons un tube de petites dimensions (diamètre

$2r$  petit devant la hauteur du tube) plongé dans un liquide de masse volumique  $\rho$ . La pression sous l'interface (point A sur la figure 1.22) est

$$P_A = P_a - 2\frac{\gamma}{R},$$

où  $R$  désigne le rayon de courbure (en valeur absolue) de la surface libre supposée de forme hémisphérique et  $P_a$  est la pression atmosphérique. Il y a un signe négatif devant le rayon de courbure car il faut tenir compte de la concavité de la surface libre (le ménisque de fluide forme une surface concave). Ce rayon de courbure peut être relié au diamètre du tube et à l'angle de contact de la façon suivante :  $r = R \cos \theta$ . Au point B, la pression vaut donc :

$$P_B = P_A + \rho gh,$$

or ce point étant à la même altitude que la surface libre non perturbée du liquide, la pression doit être égale à la pression atmosphérique. On en déduit donc la remontée capillaire

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r}. \quad (1.6)$$

C'est la *loi de Jurin*.

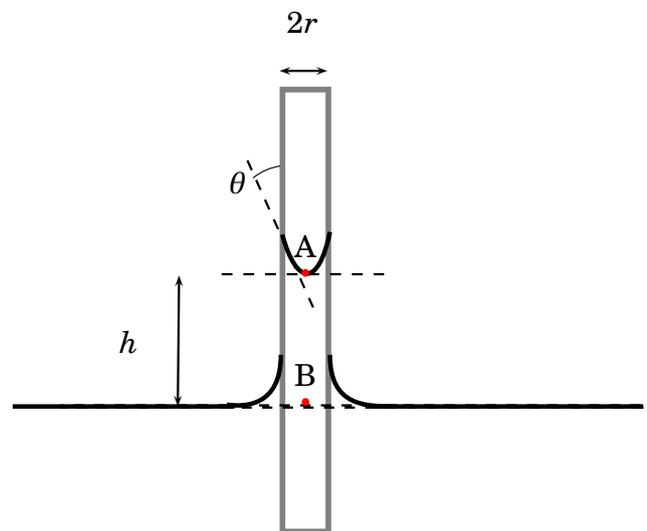


Figure 1.22 : remontée capillaire le long d'un tube cylindrique.



# 2 Similitude

## 2.1 Analyse dimensionnelle et théorie de la similitude

### 2.1.1 Objet de la théorie de la similitude

Par *théorie de la similitude*, on entend aussi bien l'analyse des dimensions (unités physiques) des paramètres d'un problème, l'usage de nombres sans dimension que le support théorique permettant d'interpréter les expériences réalisées à petite échelle et visant à reproduire des phénomènes complexes (à grande échelle). La « théorie de la similitude » est donc un ensemble de règles qui vise à :

- proposer des nombres sans dimension<sup>1</sup> tels que le nombre de Reynolds ou le nombre de Froude ;
- simplifier les équations de base en supprimant les termes négligeables ;
- diminuer le nombre de paramètres pertinents nécessaires à l'étude expérimentale (mais également numérique ou théorique) des phénomènes ;
- établir les critères à respecter pour qu'une expérience à échelle réduite soit représentative d'un phénomène en grandeur réelle (on dit alors que l'expérience est en *similitude* avec le phénomène) ;
- fournir les relations de changement d'échelle entre expériences.

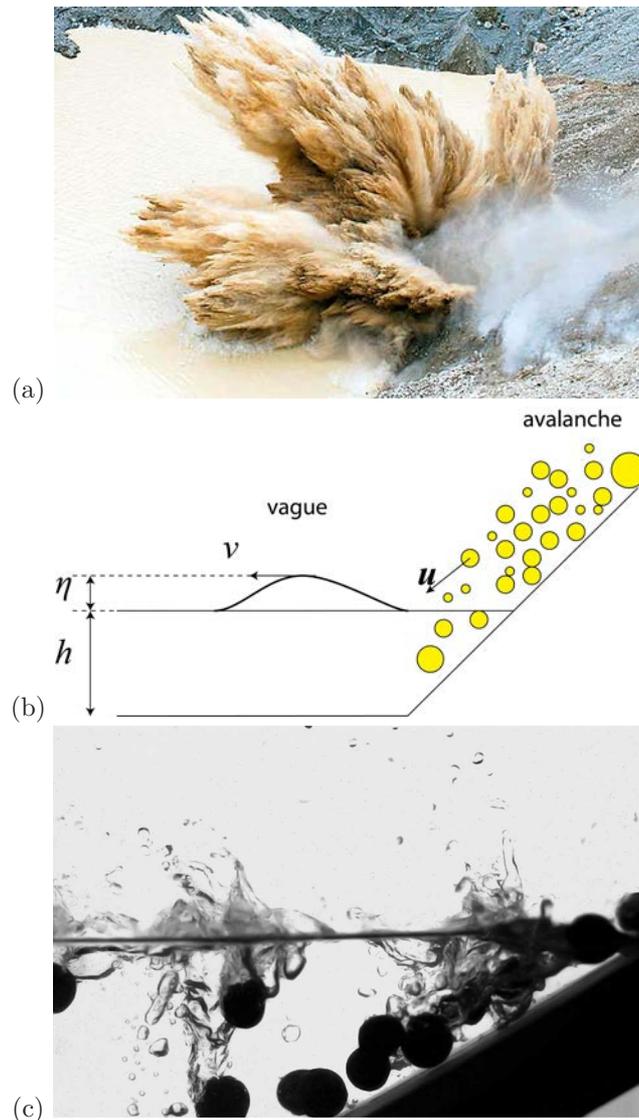
♣ **Exemple.** – Par exemple, il est souvent très difficile de calculer numériquement ou théoriquement le fonctionnement d'un ouvrage hydraulique ou le comportement d'un écoulement. Si cela est possible, il peut être très coûteux (en temps, en argent) de faire une étude complète. Il peut alors être intéressant de procéder à des essais à échelle réduite en laboratoire sur des maquettes. La question est comment utiliser les données obtenues à échelle réduite pour déduire les caractéristiques du phénomène en grandeur réelle. Par exemple, une avalanche de neige ou de rochers peut provoquer, en cas d'impact avec une étendue d'eau, une vague dite d'impulsion. Le phénomène est difficile à étudier, notamment à cause du couplage complexe entre l'écoulement gravitaire et l'eau. Si dans le cadre d'une étude d'ingénierie, par exemple pour dimensionner une hauteur de remblai suffisante, on souhaite calculer les caractéristiques de la vague, une façon de procéder est de réaliser un modèle réduit (voir figure 2.1). Le problème est alors de savoir comment passer des mesures réalisées en laboratoire aux grandeurs réelles. □

### 2.1.2 Invariance d'échelle

En filigrane, il existe une notion essentielle en physique : la notion d'*invariance*. C'est parce que les lois de la physique sont invariantes par rapport à tout changement d'unité qu'elles peuvent se mettre sous des formes sans dimension ou bien qu'elles peuvent être valables pour une large plage d'échelles de temps et d'espace. Cette notion d'invariance permet de déboucher sur l'*auto-similarité* de certains phénomènes physiques. Un phénomène qui varie au cours du temps est dit *auto-similaire* si les variations spatiales de ses propriétés à différents moments se déduisent les unes des autres par

---

1. c'est-à-dire qui n'ont pas de dimension (unité) physique.



**Figure 2.1 :** (a) vague d'impulsion créée par un éboulement rocheux de  $300\,000\text{ m}^3$  dans un lac morainique sous le glacier de Grindelwald (BE) le 22 mai 2009; source: [Tages Anzeiger](#). (b) schématisation du calcul de la vague d'impulsion. (c) essai en laboratoire.

une simple transformation similaire. En bref, si par simple translation, rotation, et étirement, toutes les courbes peuvent être ramenées à une seule courbe maîtresse, alors le phénomène est auto-similaire.

Les solutions auto-similaires sont intéressantes à plus d'un titre :

- l'existence d'une solution auto-similaire permet de comprendre analytiquement un processus physique complexe, notamment le comportement à court/long terme d'une solution ;
- la mise en évidence de l'auto-similarité fournit un moyen pratique de représenter une fonctions à plusieurs variables d'une façon simple et riche en interprétation physique ;
- expérimentalement, les données issues de conditions expérimentales différentes tombent sur une courbe unique si on choisit de les représenter à l'aide des variables auto-similaires ;
- il est possible de réduire une équation aux dérivées partielles en différentielle ordinaire et/ou de réduire l'ordre de l'équation différentielle, ce qui permet parfois d'arriver à des solutions analytiques.

Pour bien comprendre cette notion d'invariance, on peut se servir des connaissances acquises en géométrie. Par exemple, des triangles sont dits *semblables* géométriquement si le rapport de leurs longueurs reste identique (voir figure 2.2)

$$\lambda = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

avec  $\lambda$  le rapport de similitude, le facteur d'échelle, ou l'échelle. On parle de *transformation isomorphe* quand on transforme un triangle en un autre par élongation de ses côtés d'un facteur identique  $\lambda$ .

Il est possible de généraliser cette notion en considérant des rapports de longueur différents selon les axes du plan. Ainsi, une transformation affine conserve les rapports de longueur, avec des rapports différents selon les axes (voir figure 2.2)

$$\lambda_x = \frac{a'}{a} \text{ et } \lambda_y = \frac{b'}{b},$$

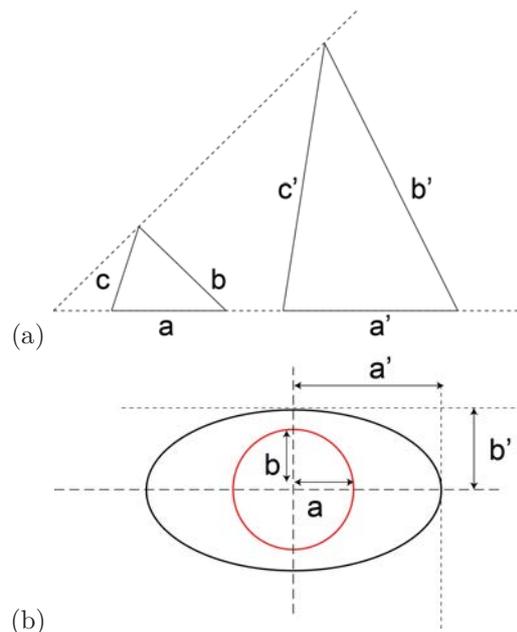
avec  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$  les rapports selon l'horizontale et la verticale. Lors d'une transformation affine, on note que

- certaines quantités sont conservées. On parle d'*invariant*. Par exemple le rapport de la surface  $S$  et du produit des demis axes :

$$s = \frac{S}{ab} = \frac{S'}{a'b'} = \pi.$$

- d'autres quantités ne le sont pas. Par exemple le périmètre n'est pas invariant

$$P = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta$$



**Figure 2.2 :** (a) transformation isomorphe de triangles. (b) transformation affine d'une ellipse.

Pourquoi certaines quantités se conservent et d'autres non? On parle de *loi d'échelle* pour définir la relation de proportionnalité entre une certaine grandeur et l'échelle (ici géométrique) du problème :

- le périmètre  $P \propto \ell$ ,
- la surface  $S \propto \ell^2$ ,
- le volume  $V \propto \ell^3$ ,

avec  $\ell$  une *échelle caractéristique* de l'objet (voir figure 2.3). Selon la dimension de la grandeur et le degré de liberté de la transformation, il est possible d'obtenir plus ou moins simplement la relation qui lie cette grandeur à l'échelle ou bien aux rapports de changement d'échelle. Par exemple, dans le cas de la transformation cercle (rayon  $a = b$ ) en ellipse (de demi grand et petit axes  $a$  et  $b$ ) par une transformation affine (avec deux degrés de liberté  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$ ), on trouve que le périmètre de l'ellipse vaut

$$P' = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a'^2 \cos^2 \theta + b'^2 \sin^2 \theta} d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \lambda_x^2 \cos^2 \theta + a^2 \lambda_y^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

En introduisant  $r = \lambda_y/\lambda_x$  et  $P = 2\pi a$ , on peut écrire ce périmètre sous la forme d'un rapport :

$$\frac{P'}{P} = f(\lambda_x, \lambda_y) = \frac{2\lambda_x}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} d\theta = \frac{2\lambda_x}{\pi} E(1 - r^2),$$

avec  $E$  une fonction spéciale dite *intégrale elliptique complète*. Le périmètre  $P'$  est donc proportionnel à  $P$  via un coefficient  $f$  qui dépend des deux paramètres d'échelle  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$ . Dans ce cas-ci, il n'est pas possible de relier simplement par un simple argument dimensionnel la grandeur (périmètre) aux échelles de transformation.

↪ La théorie de la similitude cherche à prédéterminer la structure des dépendances entre variables et paramètre(s) d'échelle du problème.

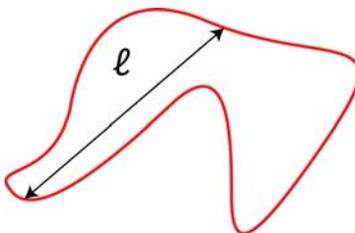


Figure 2.3 : longueur caractéristique d'un objet.

## 2.2 Unités de mesure

Dans ce cours, on utilise les unités du système international ou système métrique décimal<sup>2</sup>. Ce système repose sur 7 unités fondamentales :

- longueur : le mètre [m] ;
- masse : le kilogramme [kg] ;
- temps : la seconde [s]
- intensité électrique : l'ampère [A] ;
- température : le kelvin [K] ;
- intensité lumineuse : le candela [cd] ;
- quantité de matière : la mole [mol].

Chaque mesure est associée à un symbole, dont la typographie a été fixée. On se sert soit de noms propres (le symbole commence alors par une majuscule), soit des unités de base. Par exemple :

- force : le newton [N] ( $1 \text{ N} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$ ) ;
- pression : le pascal [Pa] ( $1 \text{ Pa} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$ ) ;

<sup>2</sup> Le système métrique fut instauré sous la Révolution française pour remplacer les unités employées sous l'Ancien Régime (poise, pied, etc.). La définition et l'usage des mesures ont été fixés à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et au XX<sup>e</sup> siècle par la Conférence générale des poids et mesures. Seuls quelques pays, dont le Royaume-Uni et les États-Unis, n'ont pas encore adopté le système métrique.

- vitesse : [m/s] ;
- masse volumique : [kg/m<sup>3</sup>] ;
- accélération : [m/s<sup>2</sup>] ;
- surface : [m<sup>2</sup>] ;
- débit : [m<sup>3</sup>/s] ;
- énergie : le joule (1 J = 1 kg·m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>) ;
- puissance : le watt (1 W = 1 kg·m<sup>2</sup>/s<sup>3</sup>).

On introduit des puissances de 10 pour pondérer l'unité. Les plus usuelles en mécanique sont données dans le tableau 2.1.

**Tableau 2.1** : nom des puissances de 10 et symbole associé.

Nom	Puissance de 10	symbole
micro	10 <sup>-6</sup>	μ
milli	10 <sup>-3</sup>	m
centi	10 <sup>-2</sup>	c
déci	10 <sup>-1</sup>	d
déca	10 <sup>1</sup>	da
hecto	10 <sup>2</sup>	h
kilo	10 <sup>3</sup>	k
mega	10 <sup>6</sup>	M

Quelques rappels :

- les unités sont en caractère roman et non en italique : 12 m et non *12m* ;
- les unités sont séparées par un espace du nombre qui les précède : 12 m et non 12m ;
- les noms propres qui ont servi à fabriquer des unités deviennent des noms ordinaires et s'accordent en conséquence. Il faut ainsi noter qu'il n'y a pas de majuscule pour la première lettre du nom. La seule exception concerne les degrés : on écrit « degré Celsius » et « degré Fahrenheit » ;
- on écrit 0 °C (0 degrés Celsius<sup>3</sup>) et 273 K (273 kelvins) ;
- certains noms d'unité coïncident avec leur symbole ; c'est le cas du bar par exemple. Dans ce cas-là, il est possible d'écrire 10 bar ou bien 10 bars selon que bar est pris comme un symbole (invariable) ou un nom (à accorder en conséquence).

Dans la vie courante, on emploie souvent des unités différentes : le litre [*ℓ*, l, ou L] pour les volumes, le bar [bar] pour la pression atmosphérique, etc. À noter que pour le litre admet plusieurs symboles. Initialement, le symbole était la lettre « l » minuscule, mais pour la plupart des polices de caractères, elle se distingue mal du chiffre 1. Aussi, on lui substitue souvent la lettre L majuscule ou la lettre *ℓ* rond. Certaines unités qui n'appartiennent pas au système international restent d'un emploi courant. Par exemple, pour la quantité d'énergie absorbée ou dépensée par des êtres vivants, on parle plus souvent en *calories* (symbole cal) qu'en joules. Initialement, la calorie a été introduite comme la quantité de chaleur qu'il faut apporter pour élever de 1 °C la température d'un gramme d'eau. Toutefois, cette définition est peu rigoureuse car la quantité de chaleur nécessaire dépend en fait de la pression et de la température initiale de l'eau. Aujourd'hui, il est courant d'employer la définition suivante

$$1 \text{ cal} = 4,184 \text{ joules.}$$

On considère que la ration alimentaire d'un homme sédentaire de 70 kg est voisine de 2800 kcal (11,7 kJ) s'il veut couvrir ses besoins journaliers. Pour les unités de puissance, principalement des véhicules automobiles, on parle souvent en *chevaux-vapeur* (CV)<sup>4</sup>, dont l'origine remonte au XIX<sup>e</sup> siècle quand

3. Anders Celsius (1701–1744) est un savant suédois, professeur d'astronomie à l'université d'Uppsala. Il est à l'origine d'une échelle relative des températures dont l'unité, le degré Celsius (°C), honore son nom. Il participa également à une expédition dirigée par l'astronome français Pierre Louis Maupertuis dans la vallée de la Torne, dans le nord de la Suède (Laponie). L'objectif était de mesurer la longueur d'un arc de méridien de 1° afin de savoir si la terre était aplatie ou non au niveau des pôles ; il fut montré que, conformément aux prédictions de Newton, la terre était bien un sphéroïde aplati.

4. En France et en Belgique, il existe un cheval-vapeur fiscal, qui sert à établir une grille de taxation en fonction de la puissance et du rejet en CO<sub>2</sub> des véhicules. Les Anglais emploient le « horse power » (hp), avec 1 hp = 746 W.

les machines à vapeur ont commencé à être substituées aux chevaux pour la traction des véhicules. Le taux de conversion est :

$$1 \text{ CV} = 736 \text{ W}.$$

On peut utiliser un petit moyen mnémotechnique pour décomposer une unité physique quelconque en unités fondamentales. Prenons l'exemple du joule ; le joule sert comme unité pour l'énergie et le travail. Le travail d'une force, c'est une force multipliée par une distance, donc on a :

$$\text{travail} = \text{force} \times \text{longueur} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

## 2.3 Principaux nombres adimensionnels

En mécanique des fluides, on est souvent amené à manipuler des groupes de variables sans dimension, appelés « nombre adimensionnel » ou « rapport de similitude ». Ces groupes sont construits en faisant des rapports entre des termes apparaissant dans les équations du mouvement, ce qui permet de les interpréter physiquement. On distingue ainsi

– le nombre de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\rho u \ell}{\mu}, \quad (2.1)$$

avec  $\ell$  une échelle de longueur,  $u$  une échelle de vitesse,  $\mu$  la viscosité du fluide, et  $\rho$  sa masse volumique. Le nombre de Reynolds est le plus souvent interprété comme le rapport des forces d'inertie sur les forces de viscosité. Il sert notamment à classer le régime d'écoulement en distinguant les écoulements laminaires ( $\text{Re} \ll 1$ ) et les écoulements turbulents ( $\text{Re} \gg 1$ ). Si on introduit  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide ( $\nu = \mu/\rho_f$  avec  $\rho_f$  la masse volumique du fluide), alors on a aussi :  $\text{Re} = u\ell/\nu$  ;

– le nombre de Stokes

$$\text{St} = \frac{t_p}{t_f},$$

avec  $t_p$  le temps de relaxation de la particule (le temps typique de variation de la vitesse quand on perturbe l'état d'équilibre de la particule) et le temps caractéristique du fluide (l'échelle de temps sur laquelle le fluide s'ajuste à tout changement de la particule). Ce nombre sert dans l'étude des écoulements biphasiques (par exemple, une suspension de particules) à quantifier les effets biphasiques, c'est-à-dire le couplage entre phases. Lorsque  $\text{St} \ll 1$ , la phase solide est entièrement gouvernée par la phase fluide tandis que pour  $\text{St} \gg 1$ , les deux phases sont découplées. Notons que dans bien des problèmes d'intérêt pratique (sédimentation de particules par exemple), le nombre de Stokes est trouvé être proportionnel au nombre de Reynolds. Par exemple, pour une particule de rayon  $a$ , de masse  $m$  et de masse volumique  $\rho_p$ , sédimentant à la vitesse  $u_s$  dans un fluide newtonien au repos, on a  $t_f = a/u_s$  et  $t_p = mu_s/F_v$ , où  $F_v = 6\pi a\mu u_s$  est la force de frottement visqueux. On aboutit alors à :

$$\text{St} = \frac{2}{9} \frac{\rho_p}{\rho_f} \frac{u_s a}{\nu} = \frac{2}{9} \frac{\rho_p}{\rho_f} \text{Re} ;$$

– le nombre de Froude

$$\text{Fr} = \frac{u}{\sqrt{gh}}, \quad (2.2)$$

avec  $h$  une échelle de hauteur,  $u$  une échelle de vitesse,  $g$  l'accélération de la gravité. Le nombre de Froude est le plus souvent interprété comme le rapport de l'énergie cinétique sur l'énergie potentielle. Il sert notamment en hydraulique à classer le régime d'écoulement en distinguant les écoulements supercritiques ( $\text{Fr} > 1$ ) et les écoulements subcritiques ( $\text{Fr} < 1$ ) ;

– le nombre de Mach

$$\text{M} = \frac{u}{c},$$

avec  $u$  une échelle de vitesse et  $c = \sqrt{dp/d\rho}$  la célérité du son (ou célérité des ondes dans l'air). Le nombre de Mach sert en aérodynamique à évaluer la compressibilité de l'air. On distingue ainsi les écoulements supersoniques ( $\text{M} > 1$ ) et subsoniques ( $\text{M} < 1$ ) ;

– le nombre de Péclet

$$\text{Pe} = \frac{u\ell}{D},$$

où  $\ell$  est une échelle caractéristique du système étudié (taille de la particule ou libre parcours moyen),  $u$  une échelle de vitesse, et  $D$  un coefficient de diffusion. Le nombre de Péclet sert en rhéologie et dans l'étude de la diffusion à évaluer l'effet respectif de la convection et de la diffusion. Lorsque  $\text{Pe} \gg 1$ , la convection l'emporte sur la diffusion. Les particules sont donc transportées (advectées) par le fluide. Dans le cas contraire, lorsque  $\text{Pe} \ll 1$ , la diffusion l'emporte sur la convection. En diffusion turbulente ou bien thermique, on emploie le nombre de Schmidt et le nombre de Prandtl;

– le nombre de capillarité ou nombre capillaire

$$\text{Ca} = \frac{\mu u}{\gamma},$$

avec  $u$  une échelle de vitesse,  $\mu$  la viscosité du fluide, et  $\gamma$  la tension de surface. Ce nombre sert à évaluer les effets de tension de surface, par exemple lorsqu'on étale un fluide ou bien dans un milieu poreux. Lorsque  $\text{Ca} \ll 1$ , les effets de tension l'emportent sur les forces visqueuses et réciproquement quand  $\text{Ca} \gg 1$ , la viscosité est tellement grande que les effets de tension de surface à la surface libre sont négligeables. Le nombre de Bond, de Weber, et de Kapitza sont également des variantes courantes du nombre de capillarité.

Dans ces différentes expressions, les échelles sont en général des grandeurs macroscopiques caractérisant le système étudié. Par exemple, le nombre de Reynolds d'un écoulement d'eau dans une rivière est  $\text{Re} = \bar{u}h/\nu$ , avec  $\bar{u}$  la vitesse moyenne de l'eau,  $h$  la profondeur d'eau, et  $\nu$  la viscosité cinématique. On parle de « nombre de Reynolds macroscopique » ou bien de « nombre de Reynolds de l'écoulement ». Si maintenant dans cette rivière, on étudie la sédimentation de particules fines de rayon moyen  $a$ , on introduit un « nombre de Reynolds local » appelé encore « nombre de Reynolds particulaire » :  $\text{Re} = u_s a/\nu$ , avec  $u_s$  la vitesse de sédimentation. Notons que le nombre de Reynolds de l'écoulement peut être très grand (écoulement turbulent) alors que le nombre de Reynolds particulaire peut être petit (écoulement localement laminaire dans le proche voisinage de la particule).

Les échelles sont généralement des grandeurs constantes, c'est-à-dire des grandeurs qui ne varient pas significativement au cours du temps ou dans l'espace. On peut parfois être amené à introduire des nombres adimensionnels dont les échelles varient. Par exemple, dans l'étude de la couche limite le long d'une paroi, on introduit un nombre de Reynolds  $\text{Re} = uy/\nu$ , avec  $y$  la distance par rapport à la paroi, qui varie avec la distance.

Généralement tout nombre sans dimension peut être interprété comme un rapport soit de longueurs, soit de forces (contraintes), soit de temps. Un même nombre peut souvent s'interpréter de différentes façons. Par exemple le nombre de Reynolds est :

$$\text{Re} = \frac{\rho u \ell}{\mu} = \frac{\rho u^2}{\mu \frac{u}{\ell}} \propto \frac{\text{inertie}}{\text{contrainte de cisaillement}},$$

on peut donc définir le nombre de Reynolds comme le rapport des forces d'inertie sur les forces visqueuses. On peut également, dans le cas particulier du nombre de Reynolds, interpréter le nombre sans dimension comme un rapport de temps caractéristiques :

$$\text{Re} = \frac{\rho u \ell}{\mu} = \frac{u \ell^2}{\ell \nu} = \frac{t_{\text{turb.}}}{t_{\text{ec.}}},$$

avec  $t_{\text{ec.}} = \ell/u$  le temps de relaxation de la particule ou de la structure turbulente (temps représentatif mis par la particule pour parcourir une distance égale à son diamètre) et  $t_{\text{turb.}} = \ell^2/\nu$  un temps caractéristique de diffusion de la turbulence. Toujours avec le nombre de Reynolds, on peut montrer qu'il s'agit aussi d'un rapport de longueurs caractéristiques :

$$\text{Re} = \frac{\rho u \ell}{\mu} = \ell \frac{u}{\nu} = \frac{\ell_{\text{part.}}}{\ell_{\text{turb.}}},$$

avec  $\ell_{\text{part.}} = \ell$  la longueur caractéristique de la particule et  $\ell_{\text{turb.}} = \nu/u$  la taille caractéristique des tourbillons de la turbulence.

## 2.4 Théorème de Vaschy-Buckingham ou théorème $\Pi$

Le théorème de Vaschy-Buckingham est fondamental dans la théorie de la similitude. Il permet de dire combien de nombres sans dimension indépendants peuvent être construits dans un problème physique qui implique  $n$  variables. Son énoncé est un peu technique et sa mise en œuvre laisse croire qu'il s'agit d'une procédure mathématique qu'il suffit d'appliquer méthodiquement. En fait, son utilisation à l'aveugle peut conduire à de graves erreurs et il faut de la pratique pour éviter les nombreux pièges. Son application est relativement aisée quand on a déjà une idée du résultat, c'est-à-dire de la nature des nombres adimensionnels qui peuvent jouer un rôle dans le problème étudié. Avant d'aborder ce théorème, on présente la méthode de Rayleigh qui permet d'obtenir la structure (dimensionnelle) du résultat recherché dans un grand nombre de cas simples.

### 2.4.1 Méthode de Rayleigh

Lord Rayleigh<sup>5</sup> a proposé une variante plus simple d'emploi. Supposons qu'on souhaite exprimer une variable  $x$  en fonction de  $n$  paramètres  $y_i$ . On écrit que dimensionnellement on a :

$$[x] = [y_1]^a [y_2]^b \cdots [y_n]^s,$$

où  $a, b, \dots, s$  sont des coefficients à déterminer de telle sorte que le produit des unités des  $a_i$  soit cohérent avec l'unité de  $x$ .

♣ **Exemple.** – Un exemple commun est le calcul de la période des oscillations d'un pendule de longueur  $\ell$  et de masse  $m$  dans un champ de gravité  $g$  (voir figure 2.4). On pose

$$T \propto \ell^a m^b g^c,$$

soit en termes de dimensions :

$$[T] = [\ell]^a [m]^b [g]^c \Rightarrow s = \text{m}^a \text{kg}^b (\text{m/s}^2)^c.$$

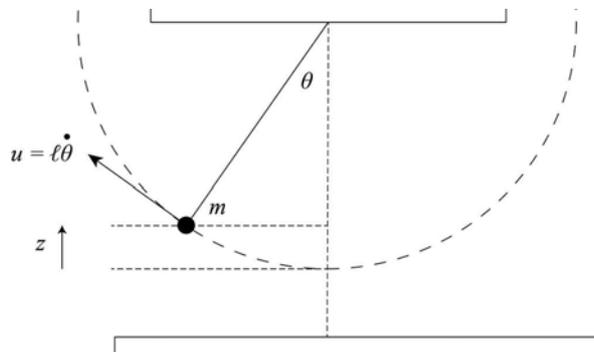


Figure 2.4 : pendule en oscillation.

On déduit pour chaque unité fondamentale :

- masse (kg) :  $0 = b$  ;
- longueur (m) :  $0 = a + c$  ;
- temps (s) :  $1 = -2c$ .

5. John William Strutt, plus connu sous son titre de Lord Rayleigh, était un physicien anglais (1842–1919). Il a étudié plusieurs branches de la physique et la mécanique (acoustique, optique, électrodynamique, électromagnétisme, viscosité des fluides, photographie). On lui doit notamment la découverte d'un gaz rare, l'argon, pour laquelle le prix Nobel lui a été décerné en 1904.

Soit  $c = -\frac{1}{2}$ ,  $a = \frac{1}{2}$ , et  $b = 0$ . Donc :

$$T \propto \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Si l'on résout l'équation du mouvement pour un pendule, on trouve  $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ , ce qui est cohérent avec le résultat trouvé ci-dessus. En effet, l'équation du mouvement s'obtient à partir de la conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2}mu^2 + mgz = \text{cste},$$

avec  $u = \ell\dot{\theta}$ , et  $z = \ell(1 - \cos\theta)$ ,  $\dot{\theta} = d\theta/dt$ . En différentiant par rapport au temps et simplifiant par  $m$  et  $\dot{\theta}$ , on trouve :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta.$$

L'adimensionalisation de l'équation du mouvement permet de passer d'une équation dimensionnelle

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$$

à une équation sans dimension physique et donc invariante :

$$\frac{d^2\theta}{d\tilde{t}^2} = -\Pi\sin\theta \text{ avec } \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0, \text{ et } \Pi = \frac{gT^2}{\ell},$$

et où l'on a introduit le temps adimensionnel :  $\tilde{t} = t/T$ . Le paramètre  $\Pi$  est une constante qui ne peut dépendre ici que de  $\theta_0$ . Posons  $\Pi = f^2(\theta_0)$ , ce qui montre que :

$$T = \sqrt{\frac{\ell}{g}}f(\theta_0).$$

Dans la limite  $\theta \ll 1$ , on peut trouver une solution approchée en posant  $\sin\theta \sim \theta$ , soit

$$\frac{d^2\theta}{d\tilde{t}^2} = -\Pi\theta \text{ avec } \theta(0) = \theta_0, \text{ et } \dot{\theta}(0) = 0,$$

soit encore :

$$\theta = \theta_0 \cos(\sqrt{\Pi}\tilde{t}) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\Pi}\frac{t}{T}\right) = \theta_0 \cos\left(f(\theta_0)\frac{t}{T}\right),$$

or par définition de la période  $\theta = \theta_0 \cos(2\pi t/T)$ , on trouve que :

$$f(\theta_0) = 2\pi \text{ quand } \theta \rightarrow 0,$$

et

$$T_0 = \lim_{\theta_0 \rightarrow 0} T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

L'expression analytique exacte de la période d'oscillation est trouvée être

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi}K\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right) \text{ avec } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

avec  $K$  une fonction spéciale dite *intégrale elliptique complète de première espèce*. On retrouve que lorsque  $\theta_0 \rightarrow 0$ , alors la période  $T$  tend vers  $T_0$  (voir figure 2.5).

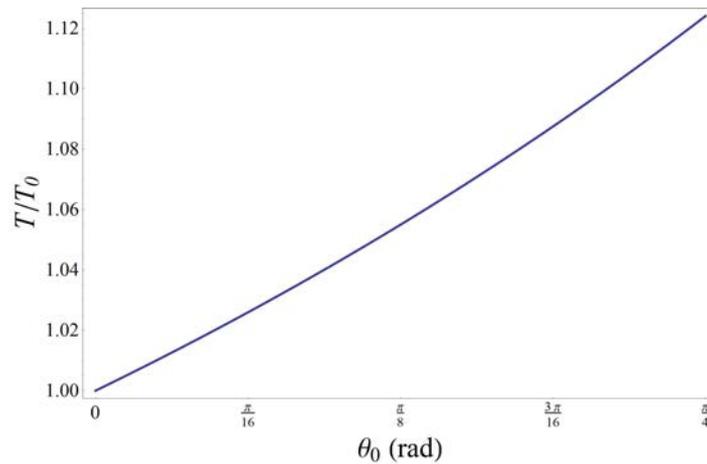


Figure 2.5 : période d'oscillation d'un pendule en fonction de l'angle initial.

### 2.4.2 Théorème de Vaschy-Buckingham

Nous cherchons à calculer une variable  $a_1$  dépendant de  $n - 1$  autres variables indépendantes  $a_k$ . On doit résoudre un problème implicite

$$\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0,$$

ou bien explicite

$$a_1 = \phi(a_2, a_3, \dots, a_n),$$

ces variables sont définies dans un système de  $m$  mesures faisant appel à  $p$  unités fondamentales  $D_i$  (en général,  $p = 3$  avec comme unités fondamentales: le mètre, la seconde, le kilogramme). Chaque variable  $a_j$  est dimensionnellement homogène à un produit de monômes des unités de base

$$[a_j] = D_1^{\alpha_j} D_2^{\beta_j} \dots D_p^{\gamma_j}.$$

Par exemple, lorsque  $p = 3$ , on a en général une longueur  $D_1 = L$ , une masse  $D_2 = M$ , et un temps  $D_3 = T$  comme unités de base  $[a] = M^\alpha L^\beta T^\gamma$ , ce qui donne pour les  $n$  variables

$$\begin{aligned} [a_1] &= M^{\alpha_1} L^{\beta_1} T^{\gamma_1}, \\ [a_2] &= M^{\alpha_2} L^{\beta_2} T^{\gamma_2}, \\ &\vdots \\ [a_n] &= M^{\alpha_n} L^{\beta_n} T^{\gamma_n}, \end{aligned}$$

avec  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$ , et  $\gamma_j$  des coefficients déterminés à l'avance en examinant la dimension des variables. Il est possible de former des nombres sans dimension en faisant des produits de monômes

$$\Pi_i = a_1^{k_1^i} a_2^{k_2^i} \dots a_n^{k_n^i}.$$

La question qui se pose est : si ces nombres sans dimension existent, de combien en a-t-on besoin pour représenter la solution du problème?

#### Énoncé

Le théorème de Vaschy-Buckingham ou théorème II répond à cette question en affirmant que  $k = n - r$  nombres sans dimension indépendants sont nécessaires, avec  $r$  le rang de la matrice dimensionnelle

associée au problème<sup>6</sup>. Au lieu d'étudier un problème de dimension  $n$  :  $a_1 = \phi(a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$ , on peut se ramener à un problème de dimension  $k < n$  exprimé en termes de nombres sans dimension :

$$\Pi_1 = \psi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_k).$$

☞ **Démonstration.** La dimension de  $\Pi_j$  est

$$[\Pi_j] = (D_1^{\alpha_1} D_2^{\beta_1} \dots D_p^{\gamma_1})^{k_1^j} (D_1^{\alpha_2} D_2^{\beta_2} \dots D_p^{\gamma_2})^{k_2^j} \dots (D_1^{\alpha_n} D_2^{\beta_n} \dots D_p^{\gamma_n})^{k_n^j}.$$

Or on veut que  $[\Pi_j] = 0$ . On est donc amené à résoudre le système

$$\begin{aligned} \text{Pour } D_1 & : 0 = \alpha_1 k_1^j + \alpha_2 k_2^j + \dots + \alpha_n k_n^j, \\ \text{Pour } D_2 & : 0 = \beta_1 k_1^j + \beta_2 k_2^j + \dots + \beta_n k_n^j, \\ & \vdots \\ \text{Pour } D_m & : 0 = \gamma_1 k_1^j + \gamma_2 k_2^j + \dots + \gamma_n k_n^j. \end{aligned}$$

Ces équations définissent un système d'équations linéaires de  $p$  équations et  $n$  inconnues  $k_i^j$  ( $1 \leq i \leq m$ ). Si le déterminant

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \vdots & & & \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{bmatrix}$$

est différent de 0 et le rang de cette matrice est  $r$ , alors il existe  $n - r$  solutions linéairement indépendantes.  $\square$

### Mise en œuvre

En pratique, on procède ainsi :

1. isoler les quantités physiques du problème donné et leur nombre  $n$  ;
2. écrire les dimensions de chaque variable dans le système de base (en général,  $p = 3$  unités de base sont nécessaires en mécanique) ;
3. déterminer le rang  $r$  de la matrice dimensionnelle associée (on a souvent  $r = 2$  ou  $r = 3$ ) ;
4. rechercher les  $n - r$  nombres sans dimension.

On prendra soin de définir des nombres sans dimension ayant une signification physique. À noter que ces nombres sans dimension peuvent être obtenus sans passer par le théorème  $\Pi$  en examinant les équations du mouvement et en les rendant sans dimension, c'est typiquement ce qui sera fait au § 6.4.1 pour les équations de Navier-Stokes. C'est très souvent préférable car cela permet d'identifier et définir proprement les nombres sans dimension pertinents. 

### 2.4.3 Application n° 1 du théorème $\Pi$ : force de traînée

On veut calculer la force dite de traînée exercée par un fluide newtonien (incompressible) sur une particule sphérique de diamètre  $2r$  et de masse volumique  $\varrho_p$  ; voir figure 2.6. La force se calcule comme :

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} dS,$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale à la surface  $\mathcal{S}$  de la particule et  $\boldsymbol{\Sigma}$  le tenseur des contraintes du fluide, c'est-à-dire  $\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D}$ , avec  $p$  la pression,  $\mathbf{D}$  le tenseur des taux de déformation,  $\mu$  la viscosité dynamique. C'est un problème complexe à résoudre puisqu'il faudrait résoudre en même temps les équations de Navier-Stokes pour décrire la phase fluide animée d'une vitesse  $\mathbf{u}_f$  :

$$\varrho \left( \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} + \mathbf{u}_f \nabla \mathbf{u}_f \right) = \varrho \mathbf{g} - \nabla p + 2\mu \nabla \cdot \mathbf{D},$$

6. Rappel : en algèbre linéaire, le rang d'une matrice est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants ; c'est aussi la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs lignes (ou colonnes).

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

et l'équation de la quantité de mouvement pour la particule :

$$m_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = m_p \mathbf{g} + \mathbf{F},$$

avec  $m_p$  la masse la particule et  $\mathbf{u}_p$  sa vitesse. Les conditions aux limites sont de plus :  $\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_p + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  sur la surface  $\mathcal{S}$  de la particule, avec  $\boldsymbol{\omega}$  la vitesse de rotation de la particule donnée par l'équation de conservation du moment cinétique :

$$J_p \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{n}) dS.$$

avec  $J_p = 2mr^2/5$  le moment d'inertie.

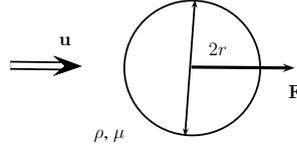


Figure 2.6 : écoulement d'un fluide autour d'une sphère.

On a 5 variables : la force  $F$  que l'on cherche à calculer, la viscosité dynamique  $\mu$ , la masse volumique  $\rho$  de l'eau, le rayon de la particule  $r$ , et sa vitesse relative par rapport au fluide  $u = |\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_f|$ . On ne prend pas en compte la masse volumique de la particule car la force exercée par le fluide ne peut pas être influencée par cette variable, mais elle l'est par les dimensions géométriques de la sphère (d'où le fait que l'on retienne  $r$  et non  $\rho_p$ ).

La première chose à faire est de déterminer les unités de ces grandeurs physiques dans le système international en ne faisant appel qu'aux grandeurs fondamentales, à savoir :

- unité de distance : le mètre [m],
- unité de temps : la seconde [s],
- unité de masse : la masse [kg].

Les unités ou dimensions physiques sont reportées dans le tableau suivant.

Tableau 2.2 : tableau des unités.

variable	$F$	$u$	$\rho$	$\mu$	$r$
unité (SI)	kg m s <sup>-2</sup>	m s <sup>-1</sup>	kg m <sup>-3</sup>	kg m <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup>	m
exposant	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$

On recherche la force  $F$  en fonction de  $r$ ,  $\mu$ ,  $u$ , et  $\rho$  :  $F = \phi(u, \rho, \mu, r)$  s'il existe une relation univoque ou bien, de façon plus générale,  $\psi(F, u, \rho, \mu, r) = 0$ . Il semble évident, sans même faire de physique, qu'on ne peut pas prendre n'importe quelle fonction  $\phi$  pour des raisons d'homogénéité des dimensions physiques. Par exemple :

$$F = u\rho\mu r,$$

n'est pas possible car cela n'est pas homogène : [kg m s<sup>-2</sup>]  $\neq$  [kg<sup>2</sup> m<sup>-2</sup> s<sup>-2</sup>] ! Il faut donc que la combinaison des différentes unités donne un résultat cohérent du point de vue dimensionnel. L'*analyse dimensionnelle* n'est, d'une certaine façon, que la recherche des combinaisons possibles entre variables physiques respectant les contraintes d'homogénéité dimensionnelle.

Quelles sont les possibilités ? Pour cela, recherchons les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , et  $e$  permettant de former des combinaisons homogènes du point des dimensions physiques. Si on a une relation générale de la forme  $\psi(F, u, \rho, \mu, r) = 0$ , cela veut dire que les combinaisons des unités doivent vérifier :

$$[F]^a [u]^b [\rho]^c [\mu]^d [r]^e = 0,$$

soit encore en se servant des unités des variables (voir tableau ci-dessus) :

$$\begin{aligned} a + c + d &= 0, \\ a + b - 3c - d + e &= 0, \\ -2a - b - d &= 0. \end{aligned}$$

On a 3 équations pour 5 inconnues ; on ne peut donc en déterminer que 3 et les 2 inconnues restantes doivent être considérées comme des variables libres (ou ajustables). Prenons par exemple  $a$  et  $d$  comme variables libres<sup>7</sup> et déterminons les autres paramètres  $b$ ,  $c$ , et  $e$ . On trouve :

$$b = -(2a + d), \quad c = -(a + d), \quad e = b = -(2a + d).$$

Une implication de cette analyse est également que la relation générale  $\psi(F, u, \rho, \mu, r) = 0$  de dimension 5 peut en fait se réduire à une relation de dimension 2 (puisqu'on n'a que 2 variables libres  $a$  et  $d$ ) que l'on note génériquement sous la forme  $\psi(\Pi_1, \Pi_2) = 0$ . Les nombres  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  sont des *nombre sans dimension* ; on a une infinité de choix selon la valeur de  $a$  et  $d$ , mais deux critères doivent nous aider dans ce choix :

- trouver des nombres avec une signification physique ;
- trouver des nombres indépendants<sup>8</sup>.

Pour  $\Pi_1$ , considérons par exemple  $a = 1$  et  $d = 0$ , on a alors  $b = -2$ ,  $c = -1$ ,  $e = -2$ , soit :

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho r^2 u^2}.$$

Pour  $\Pi_2$ , considérons par exemple  $a = 0$  et  $d = 1$  (on est sûr que les nombres sont indépendants), on a alors  $b = -1$ ,  $c = -1$ ,  $e = -1$ , soit :

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho r u} = 2 \frac{1}{\text{Re}}.$$

On a reconnu le *nombre de Reynolds particulière*  $\text{Re} = (2r)u/\nu$  avec  $\nu = \mu/\rho$  la viscosité cinématique.

Toute fonction de  $\Pi_1$  et/ou  $\Pi_2$  peut être utilisée pour définir des nombres sans dimension. Ainsi, arbitrairement du point de vue mathématique (mais cela a un sens physique), on définit les nombres sans dimension utiles pour notre problème :

$$\Pi_1 = \frac{F}{\pi \rho r^2 u^2} \quad \text{et} \quad \Pi_2 = \text{Re} = \frac{2 \rho r u}{\mu}.$$

Attention, la forme exacte de toute formule liant  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  dépend de la définition précise de ces nombres ; il convient tout de vérifier à chaque fois comment ils sont définis (il n'est pas ainsi rare que l'on définisse  $C_d$  comme  $C_d = F/(\rho r^2 u^2)$  sans facteur  $\frac{1}{2}$  au dénominateur). 

La relation recherchée doit nécessairement s'écrire sous la forme :

$$\psi(\Pi_1, \Pi_2) = 0,$$

ou encore

$$\frac{F}{\frac{1}{2} \pi \rho r^2 u^2} = \phi(\text{Re}).$$

On appelle  $\phi$  le *coefficient de traînée* et on le note le plus souvent  $C_d$  ;  $F$  est la force de traînée<sup>9</sup>. On montre théoriquement en résolvant les équations de Navier-Stokes dans le cas  $\text{Re} \ll 1$  (c'est-à-dire lorsque les termes inertiels sont négligeables<sup>10</sup>) :

$$\frac{F}{\frac{1}{2} \pi \rho r^2 u^2} = \phi(\text{Re}) = \frac{24}{\text{Re}} \quad \text{quand} \quad \text{Re} \rightarrow 0.$$

7. Ce choix n'est justifié ici que par notre désir de disposer de deux nombres sans dimension, l'un relatif à la force de traînée, l'autre à la viscosité.

8. Si  $(a, d)$  représente les coordonnées d'un vecteur de dimension 2, alors on doit choisir des vecteurs non colinéaires. Par exemple le choix  $(a, d) = (0, 1)$  et  $(a, d) = (1, 0)$  est correct ; le choix  $(a, d) = (0, 1)$  et  $(a, d) = (0, 2)$  est incorrect.

9. Il existe d'autres types de forme d'interactions entre un fluide et une particule.

10. On verra que les équations de Navier-Stokes s'appellent « équations de Stokes » dans ce cas-là.

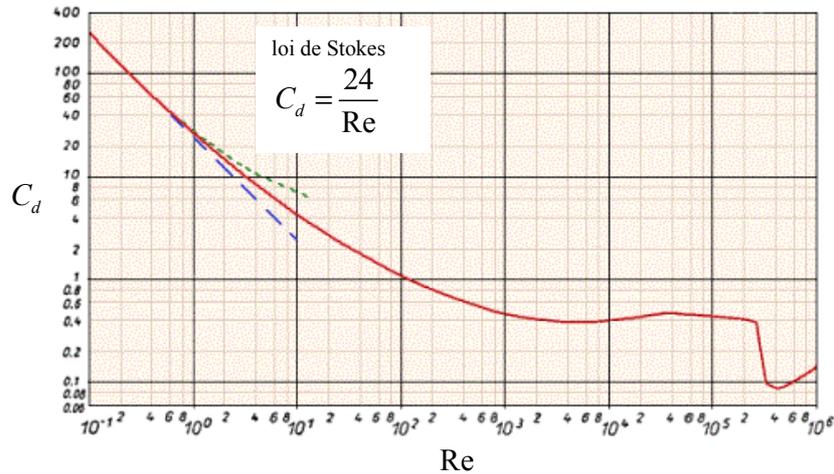
Cette relation est appelée *loi de Stokes* et elle est utile par exemple pour calculer une vitesse de sédimentation de particules fines (il faut que  $Re \ll 1$ ). Mise sous forme dimensionnelle, on tire :

$$F = 6\pi\mu r u.$$

À grand nombre de Reynolds ( $Re \gg 1$ ), les expériences montrent que :

$$C_d = \frac{F}{\frac{1}{2}\pi\rho r^2 u^2} = \phi(Re) \approx 0,4 - 0,5 \text{ quand } Re \rightarrow \infty.$$

La figure 2.7 montre la variation du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds particulaire.



**Figure 2.7** : variation du coefficient de traînée avec le nombre de Reynolds particulaire avec  $C_d = \frac{F}{\frac{1}{2}\pi\rho r^2 u^2}$  et  $Re = \frac{2\rho r u}{\mu}$ .

#### 2.4.4 Application n° 2 du théorème II : puissance d'une explosion nucléaire

Il s'agit d'un exemple célèbre d'application de l'analyse dimensionnelle réalisée par Taylor en 1950. Après la seconde guerre mondiale, les autorités américaines ont levé le « secret défense » concernant des séries de clichés d'une explosion atomique car elles les jugeaient inexploitable par des puissances étrangères. Pourtant, Taylor par un simple raisonnement dimensionnel parvint à calculer la puissance de l'explosion (donnée qui, elle, était restée confidentielle)!



**Figure 2.8** : extrait des séries de photographies d'une explosion atomique par Mack.

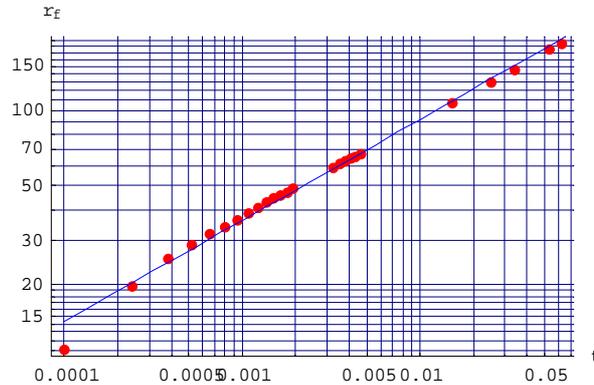
D'après Taylor, l'effet premier d'une explosion atomique est l'onde de pression précédant la boule de feu (voir figure 2.8) et dont l'ordre de grandeur est de plusieurs centaines d'atmosphères. Trois

paramètres gouvernent ce processus : la quantité d'énergie injectée (la puissance)  $E$  [ $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ ], la masse volumique de l'air  $\rho$  [ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ], le rayon  $r_f$  de la boule [m], et le temps  $t$  depuis l'explosion [s].

On a 4 variables et 3 unités fondamentales. On peut donc former un nombre adimensionnel :

$$\Pi = \frac{r_f}{E^{1/5}t^{2/5}\rho^{-1/5}}.$$

Pour une explosion donnée, ce nombre doit être constant, ce qui implique que :  $r_f \propto E^{1/5}t^{2/5}$  au cours du temps. La connaissance expérimentale (voir figure 2.9) de la relation  $r_f(t)$  a permis à Taylor de calculer l'énergie libérée par l'explosion atomique.



**Figure 2.9** : comparaison entre la loi de similitude de Taylor et le rayon  $r_f$  calculé à partir des séries de photographies d'une explosion atomique prises par Mack.

### 2.4.5 Application n° 3 du théorème II : loi de Manning-Strickler

Essayons de voir si on est capable de retrouver à l'aide de l'analyse dimensionnelle la loi empirique de Manning-Strickler, qui relie la vitesse moyenne dans un canal d'eau à la profondeur  $h$  d'eau dans ce canal :

$$\bar{u} = K\sqrt{\sin\theta}h^{2/3}, \quad (2.3)$$

avec  $K$  le coefficient de Manning-Strickler (que l'on verra au chap. 5) et  $\theta$  l'angle d'inclinaison du canal.

Initialement quand on s'intéresse à décrire un écoulement d'eau dans une rivière, on part avec quatre paramètres, dont un est sans dimension :  $\bar{u}$  [m/s],  $h$  [m],  $g$  [ $\text{m}/\text{s}^2$ ], et  $\theta$  [-]. Pour simplifier on met  $g$  et  $\theta$  ensemble (car on sait que c'est le produit  $\rho g \sin\theta$  qui intervient dans le mouvement), ce qui fait qu'en pratique on ne dispose que  $n = 3$  variables physiques. Il y a  $r = 2$  unités fondamentales : m et s. On peut former  $n - r = 1$  groupe sans dimension. On trouve immédiatement qu'il s'agit du nombre de Froude  $\text{Fr} = \bar{u}/\sqrt{gh \sin\theta}$ . La relation serait donc

$$\text{Fr} = cst \Rightarrow \bar{u} \propto \sqrt{gh \sin\theta}.$$

On aboutit donc à la loi de Chézy (avec ici un coefficient de Chézy  $C \propto \sqrt{g}$ ) et non celle de Manning-Strickler. Quel(s) paramètre(s) manquera(i)ent pour que l'on retombe sur la loi de Manning-Strickler? La masse volumique? La rugosité du lit?

Il semble naturel de considérer que la rugosité du lit est un paramètre clé du problème car plus le lit est lisse, plus l'écoulement va vite. Introduisons donc  $k_s$  [m] l'échelle de rugosité. En refaisant l'analyse dimensionnelle du problème, on a maintenant  $n = 4$  et toujours  $r = 2$  unités. On peut donc former 2 nombres sans dimension, par exemple :  $\Pi_1 = \text{Fr} = \bar{u}/\sqrt{gh \sin\theta}$  et  $\Pi_2 = k_s/h$ . Il existe une relation entre ces deux nombres de la forme :

$$\Pi_1 = f(\Pi_2) \Rightarrow \bar{u} = f(k_s/h)\sqrt{gh \sin\theta}.$$

Dans la plupart des cas, la hauteur d'eau est grande par rapport à la taille des rugosités du lit, donc  $k_s/h \rightarrow 0$  et on s'attend à ce que la fonction  $f(k_s/h)$  tende vers une constante (un peu comme pour l'exemple d'application n° 1, où le coefficient de traînée tend vers une constante quand  $Re \rightarrow \infty$ ). Ce type de comportement asymptotique est très classique et s'appelle une *similitude complète* (Barenblatt, 1996). Malheureusement ici on voit que ce comportement nous ramène à la loi de Chézy :  $\bar{u} \propto \sqrt{gh \sin \theta}$ . Une autre possibilité est que la fonction  $f$  se comporte comme une loi puissance

$$f(\zeta) = \alpha \zeta^n,$$

avec  $\zeta = k_s/h$ ,  $\alpha$  un nombre sans dimension, et  $n$  un exposant. Ce comportement est une *similitude incomplète*<sup>11</sup> car  $f$  varie de façon quelque peu arbitraire sans que l'analyse dimensionnelle ne permette de préciser *a priori* la valeur de  $n$ . Avec cette hypothèse, on aboutit à

$$\Pi_1 = \alpha \Pi_2^n \Rightarrow \bar{u} = \alpha k_s^n h^{1/2-n} \sqrt{g \sin \theta}.$$

Dans ce cas-là, on note qu'en prenant  $n = -1/6$ , on retombe sur l'équation de Manning-Strickler (2.3). Il s'ensuit que le coefficient de Strickler  $K$  est relié à la rugosité par

$$K = \alpha \sqrt{g} k_s^{-1/6}.$$

L'hypothèse de similitude incomplète est cohérente avec les données expérimentales (notamment  $K \propto k_s^{-1/6}$ ) et une analyse phénoménologique de la dissipation turbulente dans un canal rugueux (Gioia & Bombardelli, 2002).

## 2.5 Analyse dimensionnelle et équations du mouvement

L'analyse dimensionnelle offre des techniques efficaces pour obtenir une idée générale de la solution d'un problème même dans des cas complexes. L'idée est de chercher les termes prédominants dans les équations du mouvement ; en négligeant les autres termes et en écrivant des ordres de grandeur pour estimer les termes différentiels, on peut généralement aboutir à des estimations du comportement de la solution.

Prenons un exemple concret : vous devez optimiser la carrosserie d'un véhicule en travaillant sa forme pour diminuer sa résistance à l'air, donc sa consommation. Pour cela vous souhaitez étudier la résultante des forces de frottement exercées par l'air sur la carrosserie à l'aide des équations de Navier-Stokes. Pour simplifier le problème, vous devez introduire les ordres de grandeur des variables du problème (vitesse, longueur de la voiture, etc.). Ces ordres de grandeur s'appellent des *échelles* ou facteurs d'échelle. Par exemple, pour un véhicule, l'ordre de grandeur de la longueur est  $L_* \sim 4$  m

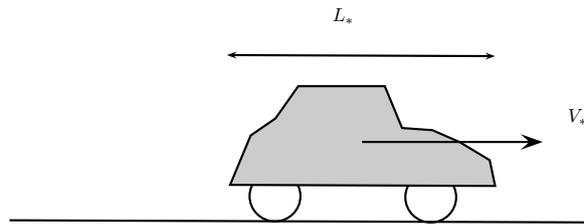


Figure 2.10 : échelles de longueur et de vitesse pour le mouvement d'une voiture.

tandis que celui de la vitesse est  $V_* \sim 100$  km/h, soit encore  $V_* \sim 30$  m/s. On emploie ici l'indice \* pour désigner une échelle de grandeur. Le symbole  $\sim$  veut dire « à peu près égal à ». Il n'est en effet pas très différent de considérer que la voiture mesure 4 ou 5 m en longueur ; ce qui est important, c'est que l'ordre de grandeur est de quelques mètres.

11. Attention, cette notion de similitude incomplète a un sens différent en ingénierie (quand on ne peut pas vérifier tous les critères de similitude).

Une fois les échelles introduites pour chaque type de variable, on va pouvoir introduire des *variables sans dimension*. Par exemple, on écrit

$$\underbrace{x}_{\text{variable dimensionnelle}} = \underbrace{L_*}_{\text{facteur d'échelle}} \times \underbrace{X}_{\text{variable sans dimension}},$$

où le caractère majuscule  $X$  désigne une variable sans dimension d'espace ( $X$  n'a pas de dimension physique) et si l'ordre de grandeur a été correctement fixé pour  $L_*$ , alors on a  $X$  qui doit être compris entre 0 et 1 ou bien proche de 1. On écrit que  $X = O(1)$ , ce qui veut dire que  $X$  est de l'ordre de 1. Grâce à ce changement de variable, l'unité physique et l'ordre de grandeur sont portés par l'échelle  $L_*$  tandis que  $X$  ne représente que la variation relative de  $x$ . Si l'on fait cela avec les autres variables, on peut alors comparer membre à membre les termes des équations même si ceux-ci sont relatifs à des processus physiques différents.

♣ **Exemple.** – Pour illustrer la procédure, prenons l'exemple d'une masse  $m$  frottant sur un sol horizontal (frottement visqueux) et reliée à un ressort de raideur  $k$ . L'équation du mouvement est donc :

$$m\ddot{x} = -kx - 2fm\dot{x}, \quad (2.4)$$

avec  $x$  la position de la masse. On a adjoint une condition initiale de la forme  $x(0) = \ell$  et  $\dot{x}(0) = 0$ . Cette équation se résout à la main. Pour  $f > \omega$ , on a :

$$x(t) = e^{-ft}\ell \left( \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{f^2 - \omega^2}t\right) + f \frac{\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{f^2 - \omega^2}t\right)}{\sqrt{f^2 - \omega^2}} \right),$$

avec  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Pour  $f < \omega$ , on obtient

$$x(t) = e^{-ft}\ell \left( \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{f^2 - \omega^2}t\right) + f \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{f^2 - \omega^2}t\right)}{\sqrt{f^2 - \omega^2}} \right),$$

Étudions l'équation (2.4) en l'adimensionnalisant et en faisant comme si nous ne connaissions pas la solution au problème posé. Il est naturel de prendre  $L_* = \ell$  comme échelle d'espace. La période d'un ressort libre est  $\sqrt{m/k} = 1/\omega$ , ce qui nous incite à poser  $T_* = 1/\omega$ . On continue en introduisant les variables sans dimension  $X$  et  $T$  suivantes :

$$x = \ell X \text{ et } t = T/\omega,$$

L'équation (2.4) sous une forme adimensionnelle est

$$\frac{m\ell}{(1/\omega)^2} \frac{d^2X}{dT^2} = -k\ell X - 2fm \frac{\ell}{1/\omega} \frac{dX}{dT},$$

soit encore

$$\frac{d^2X}{dT^2} = -X - \frac{2f}{\omega} \frac{dX}{dT}.$$

On voit donc que l'on fait apparaître un nombre sans dimension

$$\Pi = \frac{2f}{\omega},$$

qui permet de simplifier le problème pour les cas limites  $\Pi \ll 1$  et  $\Pi \gg 1$ . Le cas  $\Pi \gg 1$  correspondant à un amortissement visqueux très fort ; on peut négliger la tension du ressort. L'équation du mouvement est alors :

$$\ddot{X} = -\Pi \dot{X},$$

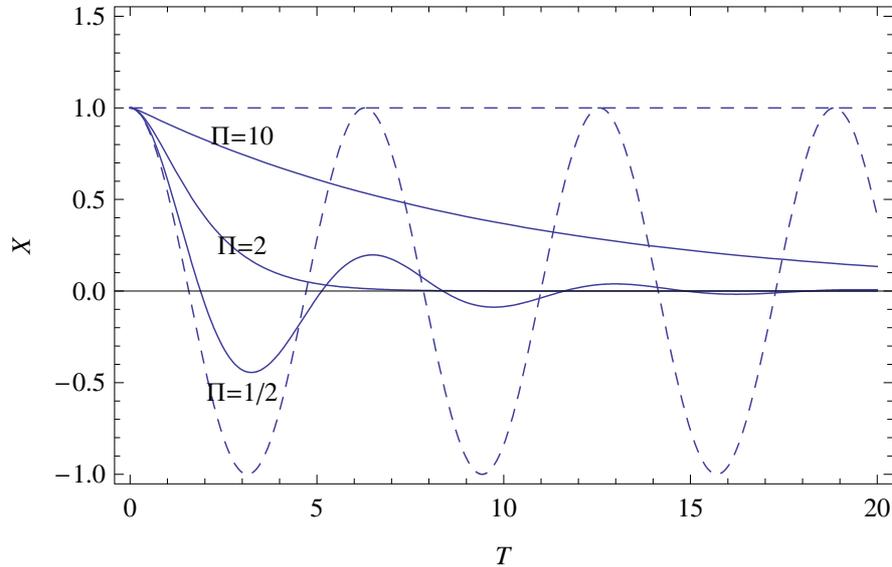
avec  $\dot{X}(0) = 0$  et  $X(0) = 1$ . La solution est  $X(T) = 1$  : la masse ne bouge pas tellement l'amortissement est grand. Le cas  $\Pi \ll 1$  correspondant à un amortissement visqueux très faible ; on peut négliger la force de frottement visqueuse. L'équation du mouvement est alors :

$$\ddot{X} = -\dot{X},$$

avec  $\dot{X}(0) = 0$  et  $X(0) = 1$ . La solution est  $X(T) = \cos T$  : il s'agit d'une oscillation sans amortissement. Dans le cas général où  $\Pi = O(1)$ , on ne peut négliger aucune des composantes et il faut résoudre l'équation du mouvement complète :

$$\ddot{X} = -X - \Pi \dot{X},$$

avec  $\dot{X}(0) = 0$  et  $X(0) = 1$ . Cette équation peut se résoudre simplement à la main ou numériquement. On reporte sur la figure 2.11 la solution au problème pour  $\Pi = \frac{1}{2}$ ,  $\Pi = 2$ , et  $\Pi = 10$ , ainsi que les solutions asymptotiques correspondant à  $\Pi \rightarrow 0$  et  $\Pi \rightarrow \infty$ .



**Figure 2.11** : oscillation d'un ressort amorti.

Comme on le voit la mise sous forme adimensionnelle d'un problème (ici à trois paramètres  $m$ ,  $k$ ,  $f$ ) peut se simplifier grandement car :

- on peut explorer la forme de la solution à l'aide d'un seul paramètre adimensionnel  $\Pi$  (au lieu des trois paramètres physiques  $m$ ,  $k$ ,  $f$ ) ;
- on peut obtenir des solutions analytiques ou numériques plus facilement en omettant les termes négligeables dans les équations ;
- on peut comparer facilement les solutions sous forme graphique puisque toutes les solutions  $X(T)$  sont à la même échelle.

## 2.6 Similitude en ingénierie

### 2.6.1 Généralités

En ingénierie on utilise souvent des modèles réduits présentant la même forme que le modèle en grandeur réelle (similitude géométrique) et on recherche des matériaux et des conditions d'écoulement en laboratoire pour créer des écoulements en similitude (dynamique). La figure 2.12 montre l'exemple d'une étude menée par le bureau de consultants Sogreah pour établir l'impact des ouvrages et des travaux de correction dans la gestion des sédiments de la baie du mont Saint-Michel en France.



**Figure 2.12 :** étude sédimentologique du bassin du mont Saint-Michel (France) à l'aide d'un modèle réduit. Source: Sogreah (Grenoble).

La similitude du modèle réduit avec le phénomène à étudier est assurée quand tous les paramètres de similitude (c'est-à-dire les nombres sans dimension introduits lors de l'*analyse dimensionnelle*, par exemple en utilisant le théorème II) sont identiques aux deux échelles.

Il n'est pas toujours possible de respecter strictement les critères de similitude. Cela n'a pas les mêmes conséquences selon le problème en question :

- par exemple en aérodynamique, la similitude se fonde sur le nombre de Reynolds. On observe que le coefficient de traînée  $C_d(Re)$  tend vers une constante quand  $Re \gg 1$  (voir figure 2.7). La valeur exacte de  $Re$  n'est donc pas très importante ;
- dans d'autres cas, cela a des répercussions. En sédimentologie, la force de traînée est en  $Re^{-1}$ , donc la vitesse peut être très sensible au nombre de Reynolds !

Dans certains cas, il est possible de contourner la difficulté en modifiant le rapport de similitude géométrique. On parle de *distorsion géométrique* par exemple quand, pour modéliser une rivière, on emploie une échelle de largeur différente de l'échelle de longueur. On parle de *similitude incomplète* quand seuls quelques-uns des critères sont satisfaits. C'est souvent le cas en transport solide où il est difficile de satisfaire la similitude dynamique (nombre de Froude) de la phase liquide et celle de la phase solide.

Enfin il faut prendre garde au fait que la diminution d'échelle peut donner lieu à de nouveaux phénomènes comme la capillarité : par exemple dans le cas de la simulation d'une rivière, si l'on diminue trop l'échelle d'observation au laboratoire, il y a de fortes chances qu'un écoulement d'eau soit influencé par les tensions de surface à la surface libre, qui modifient la forme des vagues, des ressauts, les vitesses d'écoulement, etc. (Malverti *et al.*, 2008; Heller, 2011).

### 2.6.2 Similitude en hydraulique

En hydraulique à surface libre, les modèles réduits sont construits sur la base d'une similitude dynamique fondée sur le nombre de Froude. Pour que des écoulements à des échelles différentes soient

dynamiquement similaires, il faut que les nombres de Froude soient égaux

$$\left(\frac{\bar{u}^2}{gh}\right)_1 = \left(\frac{\bar{u}^2}{gh}\right)_2,$$

où les indices 1 et 2 désignent les échelles. Quand cela est possible, il est également souhaitable que les nombres de Reynolds soient également égaux

$$\left(\frac{\bar{u}h}{\nu}\right)_1 = \left(\frac{\bar{u}h}{\nu}\right)_2.$$

Une fois connu le rapport de réduction, c'est-à-dire le rapport  $(h_2/h_1)$  entre le modèle réduit et la réalité, on peut en principe déterminer les relations existant entre paramètres du problème. Cela n'est pas sans poser des problèmes pratiques.

Par exemple, considérons que pour modéliser un écoulement d'eau dans un canal, on réalise des essais sur un canal à échelle réduite (facteur 1/10); on souhaite employer de l'eau comme fluide pour le modèle réduit, comme c'est le cas dans la réalité (donc  $\nu_1 = \nu_2$ ). L'égalité des nombres de Reynolds entraîne

$$\frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1} = \frac{h_1}{h_2},$$

tandis que l'égalité des nombres de Froude nécessite de prendre

$$\frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}.$$

On voit immédiatement qu'il n'est possible de vérifier simultanément les deux égalités ci-dessus... Il conviendrait donc de prendre un fluide avec une viscosité différente pour le modèle réduit. On tire alors de l'égalité des nombres de Froude et de Reynolds la relation entre les viscosités

$$\nu_1 = \nu_2 \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{3/2},$$

Donc avec un rapport de réduction  $h_1/h_2 = 1/10$ , on devrait prendre une viscosité cinématique 1000 fois inférieure à celle de l'eau, soit  $10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s... ce qui est très difficile à faire! En pratique, on s'en tire en ne se fondant que sur une similitude dynamique basée sur le nombre de Froude et on tolère le non-respect du nombre de Reynolds; en effet, pour certains problèmes de turbulence, les processus (le coefficient de traînée par exemple) tendent vers une limite aux très grands nombres de Reynolds, ce qui fait que le non-respect du nombre de Reynolds n'entraîne pas d'erreur significative. Il convient toutefois d'être toujours prudent avec ce type d'argument.

### 2.6.3 Courbe maîtresse

En ingénierie, quand on fait des essais en laboratoire ou bien des simulations, il est fréquent de tracer la variation d'un paramètre du problème en fonction d'un autre ou de plusieurs autres. On obtient alors des réseaux de courbes qu'il est plus ou moins difficile d'interpréter ou de synthétiser. Lorsque les courbes expérimentales présentent la même allure, il est possible de jouer sur cette « similitude d'apparence » pour synthétiser l'information sous la forme d'une courbe maîtresse. Cela a pour avantage de faciliter la manipulation des résultats expérimentaux et, éventuellement, d'ouvrir la voie à une analyse physique des phénomènes observés.

♣ **Exemple.** – Par exemple, supposons que l'on mesure dans un canal incliné à une pente  $\tan \theta$  la vitesse moyenne d'écoulement  $\bar{u}$  en fonction de sa hauteur en régime permanent uniforme. On obtient alors des courbes comme celles montrées sur la figure 2.13(a). On note que toutes ces courbes ont sensiblement la même allure quelle que soit la pente du canal. On se demande alors comment transformer les variables pour que les courbes se superposent sur une courbe maîtresse. L'idée est :

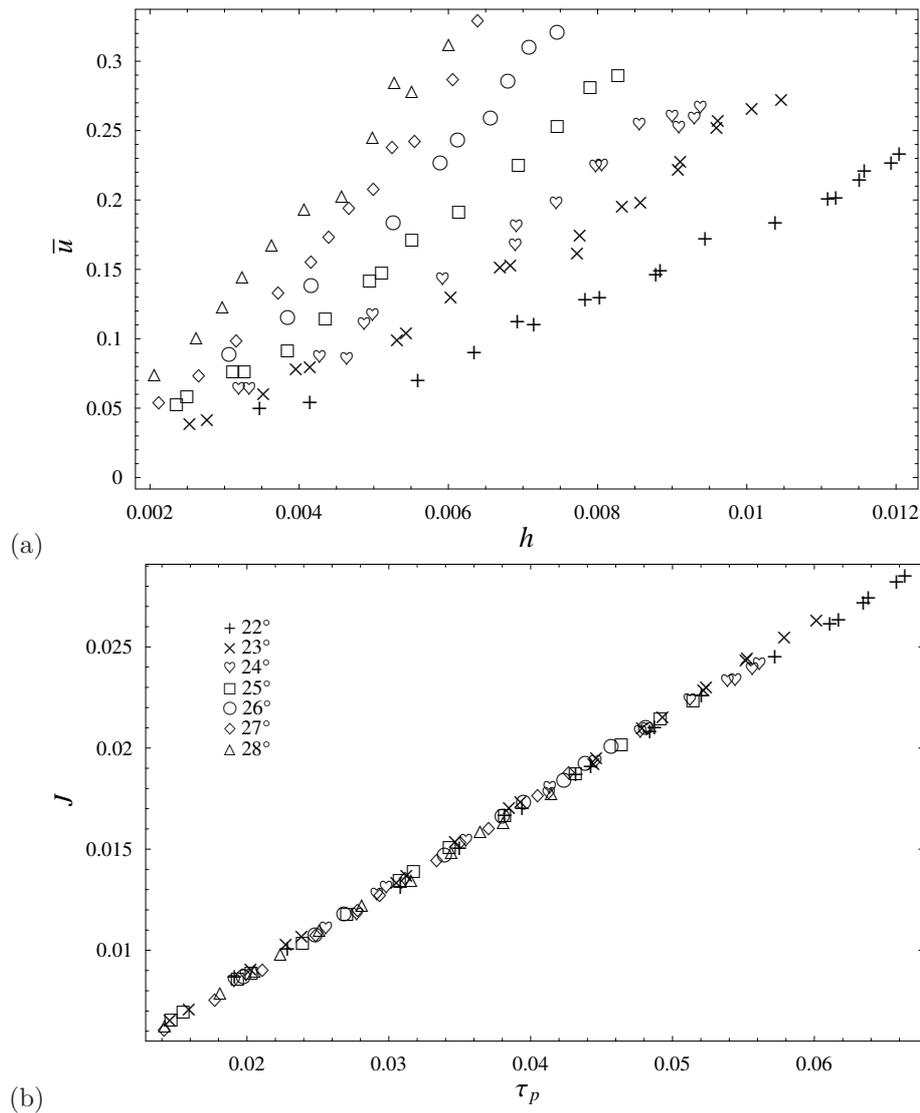
- de rechercher des corrélations de la forme  $\bar{u} = K \sin^n \theta h^p$  (avec  $n$  et  $p$  des exposants à déterminer et  $K$  un facteur de proportionnalité). Cela se fait assez simplement avec des programmes comme Mathematica ou Matlab;

- si l'on reporte sur un graphique  $K = \bar{u} \sin^{-n} \theta h^{-p}$ , tous les points expérimentaux doivent (si la corrélation est bonne) tomber sur une même courbe ;
- en général, pour ce type de problèmes expérimentaux, ce qu'on cherche à déterminer si une loi de frottement de la forme  $\tau_b = f(\bar{u}, h)$ , où  $\tau_b$  est la contrainte au fond du canal. On sait que la contrainte au fond est définie par  $\tau_b = \rho g h \sin \theta$  ; on déduit donc la relation entre  $\tau_b$  et le couple  $(\bar{u}, h)$  en notant que d'après la corrélation établie ci-dessus :  $\sin \theta = (\bar{u}/K/h^p)^{1/n}$ , donc

$$\tau_b = \rho g h \sin \theta = \rho g h^{1-p/n} \bar{u}^{1/n} K^{-1/n}.$$

Donc si l'on trace  $J = h^{1-p/n} \bar{u}^{1/n}$  en fonction de  $\tau_b$ , on doit observer que tous les points de mesure tombent sur une courbe maîtresse.

Dans l'exemple de la figure 2.13, on trouve que  $p = 1,427$  et  $n = 5,789$  ; on pose donc (pour simplifier)  $n = 6$  et  $p = 3/2$ . Comme le montre la figure 2.13(b) où l'on a tracé  $J = h^{1-p/n} \bar{u}^{1/n} = h^{3/4} \bar{u}^{1/6}$ , les points expérimentaux sont bien sur une même courbe.



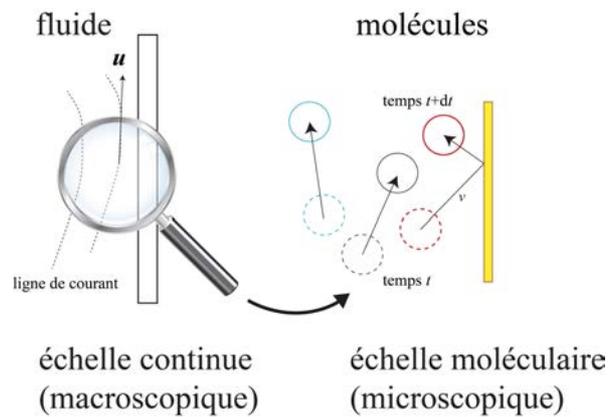
**Figure 2.13 :** (a) vitesse d'un écoulement granulaire en fonction de la hauteur dans un canal incliné de  $\theta$ . (b) courbe maîtresse  $J = J(\tau_p)$ . Données tirées de mesures en canal granulaire (Pouliquen, 1999).



# 3 Statique des fluides

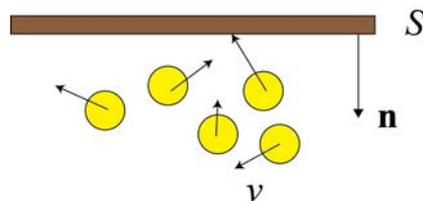
## 3.1 Origine physique de la pression dans les fluides

À l'échelle moléculaire, on a vu qu'un fluide au repos est composé de molécules qui, si leur vitesse moyenne  $\bar{u}$  est nulle, sont quand même animées d'une vitesse aléatoire  $v$  résultant des interactions entre elles (collisions, répulsions de Van der Waals, etc.). Pour comprendre la notion de pression au sein d'un fluide au repos, il faut examiner de plus près le comportement des molécules qui composent ce fluide (voir 3.1).



**Figure 3.1 :** la pression contre une paroi reflète à l'échelle macroscopique la multitude de chocs entre molécules et paroi à l'échelle microscopique.

La vitesse des particules est fluctuante au gré des interactions et elle est d'autant plus grande que la température est grande. En fait, du point de vue thermodynamique, la température n'est qu'une mesure de cette agitation moléculaire. Lorsqu'on place une paroi solide (voir figure 3.2), les molécules vont entrer en collision avec cette paroi et donc, si on moyenne au cours du temps ces différentes impulsions, il en résulte une force moyenne dite *force de pression*.



**Figure 3.2 :** pression contre une paroi.

Ainsi, on montre que pour un gaz dilué la pression est définie comme :

$$p = \frac{1}{3}nmv^2,$$

avec  $n$  le nombre de molécules par unité de volume,  $v$  la vitesse d'agitation thermique, et  $m$  la masse d'une molécule. La force exercée sur la paroi est donc

$$\mathbf{F} = pS\mathbf{n}, \quad (3.1)$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale à la surface orientée vers l'extérieur du volume fluide (voir figure 3.2) et  $S$  la surface de la paroi. Le principe d'action et de réaction impose que la force exercée par la surface sur le fluide est (attention au signe selon la convention employée) :

$$\boxed{\mathbf{F} = -pS\mathbf{n}.} \quad (3.2)$$



L'unité de pression est le pascal [Pa]. **Attention** : par la suite, on introduira des « facettes » c'est-à-dire des surfaces infinitésimales réelles ou virtuelles. Pour ces facettes, la normale sera, par convention en mécanique, orientée de l'intérieur (de la facette) vers l'extérieur (en direction du fluide), donc le contraire de ce qui est indiqué ici à la figure 3.2. Il s'agit juste d'une convention ; l'important est de se souvenir que l'action de la pression est de pousser (compresser), pas de tracter.

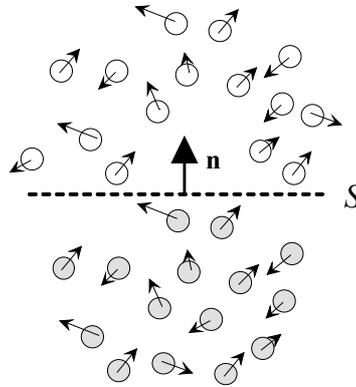


Figure 3.3 : pression au sein d'un fluide.

On peut généraliser cette notion en remplaçant la paroi solide par une surface virtuelle (voir figure 3.3). La pression est alors le flux de quantité de mouvement fluctuante transportée par les molécules franchissant la surface  $S$ . Lorsqu'un fluide est au repos sous l'action de la gravité, les molécules situées à une tranche d'altitude  $z$  doivent supporter le poids de la colonne au-dessus pour maintenir l'équilibre. La pression est donc d'autant plus forte qu'on a beaucoup de fluide au-dessus de soi. Une propriété remarquable de la pression est qu'elle est nécessairement *isotrope*, c'est-à-dire quelle que soit la facette considérée d'un volume de contrôle infinitésimal, la pression est la même. En effet, compte tenu de l'origine de la pression à l'échelle moléculaire, l'isotropie des fluctuations de vitesses entraîne l'isotropie de la force résultante de pression.

## 3.2 Loi de l'hydrostatique

### 3.2.1 Loi de Pascal

Considérons maintenant l'équilibre mécanique d'une tranche de fluide de surface  $S$  et d'épaisseur  $dz$ , située entre les altitudes  $z$  et  $z + dz$  (voir figure 3.4).

Il y a équilibre si la somme des forces projetées sur l'axe  $z$  est nulle. La différence de pression doit donc contrebalancer exactement l'action de la pesanteur (la somme des forces appliquées au volume de contrôle doit être nulle) :

$$(-p(z + dz) + p(z))S - \rho g S dz = 0,$$

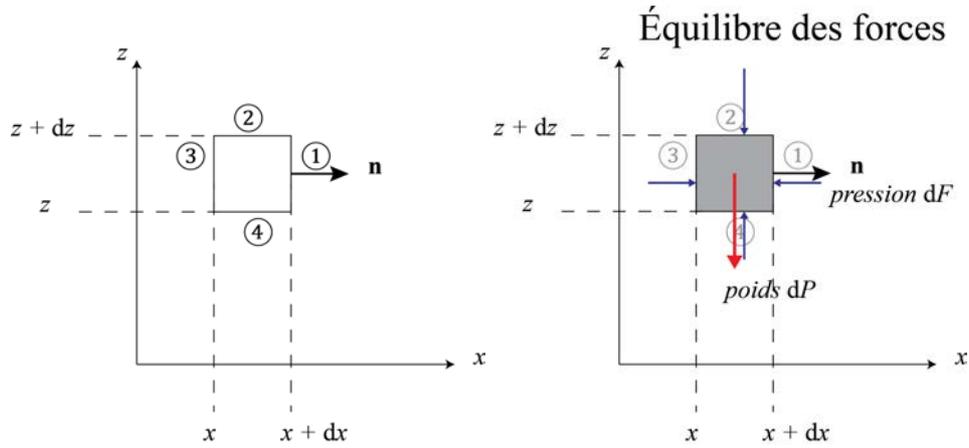


Figure 3.4 : équilibre d'une colonne de fluide.

soit encore  $dp = -\rho g dz$  ou bien :

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g.} \quad (3.3)$$

C'est la loi de Pascal<sup>1</sup> ou loi de statique des fluides. Cette loi se généralise à des repères quelconques :

$$\boxed{-\nabla p + \rho \mathbf{g} = 0.} \quad (3.4)$$

Dans un fluide au repos, le gradient de pression contrebalance l'effet de la pesanteur.

Lorsque la masse volumique du fluide est constante, on peut intégrer très simplement l'équation de Pascal. Ainsi la différence de pression  $\Delta p$  entre deux points distants verticalement d'une distance  $h$  est

$$\Delta p = \rho g h.$$

Cette relation n'est évidemment pas valable si le fluide est compressible. La pression dans un fluide homogène ne dépend donc que de la différence de hauteur et de la masse volumique ; elle est notamment indépendante de la taille ou de la forme du récipient recueillant le fluide. Cela a des conséquences importantes :

- pour une altitude donnée la pression est la même ;
- la surface libre d'un fluide est plane (sauf si la tension de surface joue un rôle).

♣ **Exemple.** – Une application directe de ce résultat est la pression dans l'atmosphère supposée à température  $T$  constante (champ isotherme). L'équilibre des pressions doit vérifier d'après la loi de gaz parfaits :  $p = \rho R' T$  (où  $R' = R/M$  avec  $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$  la constante des gaz parfaits et  $M = 0,02896 \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$  la masse molaire de l'air), donc en couplant avec la loi de Pascal, on tire :

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p}{RT}g,$$

dont l'intégration donne

$$\ln p = -\frac{gz}{RT} + \text{constante.}$$

En appelant  $P_a$  la pression atmosphérique au niveau de la mer, on obtient finalement :

$$p = P_a \exp\left(-\frac{gz}{RT}\right).$$

Cette équation s'appelle équation du *nivellement barométrique*. □

1. Blaise Pascal (1623–1662) a été un scientifique majeur et universel du XVII<sup>e</sup> siècle. En mécanique des fluides, il reprit les travaux de Torricelli et réalisa un certain nombre d'expériences d'hydrostatique et de pompage, qui lui permirent d'établir sa loi. En mathématiques, il travailla sur les probabilités. On lui doit un certain nombre d'inventions comme la calculatrice mécanique, la seringue, et la presse hydraulique. Il s'est également intéressé à différents aspects de la littérature, de la méthodologie scientifique, et de la théologie.

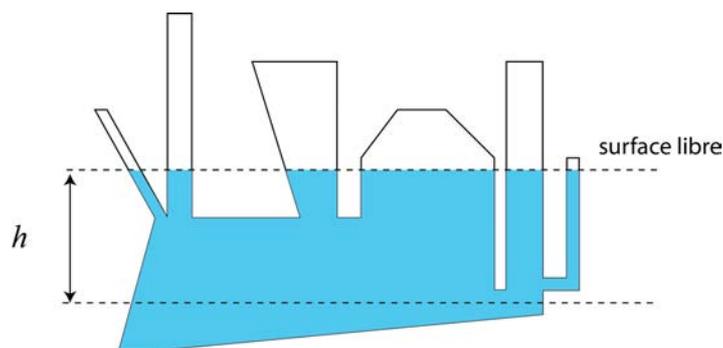


Figure 3.5 : la pression au sein d'un fluide est indépendante de la forme du récipient.

### 3.2.2 Principe d'Archimède

Le principe d'Archimède<sup>2</sup> s'énonce ainsi. Tout corps immergé dans un fluide au repos est soumis de la part du fluide à une poussée verticale, opposée à la force de gravité, égale au poids du volume de fluide déplacé et appliquée au centre de masse de ce fluide (centre appelé *centre de carène* pour les bateaux ; voir figure 3.6).

Ce principe se déduit assez aisément de l'équation de Pascal. Considérons le volume  $\mathcal{V}$  occupé par le corps immergé et intégrons l'équation de Pascal

$$-\int_{\mathcal{V}} \nabla p d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \rho g d\mathcal{V} = 0,$$

d'où l'on déduit par utilisation du théorème de Green-Ostrogradski

$$\underbrace{-\int_{\mathcal{S}} p n d\mathcal{S}}_{\text{résultante des forces de pression}} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \rho g d\mathcal{V}}_{\text{poids propre}} = 0.$$

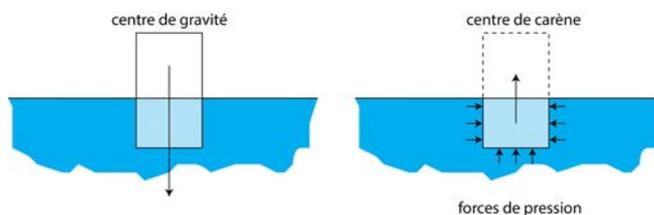


Figure 3.6 : la résultante des forces de pression s'appelle force d'Archimède.

### 3.2.3 Calcul des forces de pression en pratique

La force de pression exercée sur une paroi de surface  $\mathcal{S}$  est :

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{S}} (-p\mathbf{n}) d\mathcal{S} \quad (3.5)$$

avec  $\mathbf{n}$  normale à la surface élémentaire  $d\mathcal{S}$ , orientée de l'intérieur vers l'extérieur (ici l'intérieur signifie l'intérieur de la paroi ; l'extérieur indique le fluide). Le calcul de la force se fait en plusieurs étapes :

1. calculer la pression ;

---

2. Archimède de Syracuse (287–212 avant Jésus-Christ) est l'archétype du grand savant de l'Antiquité, à la fois physicien, mathématicien, et ingénieur. Il vécut en Sicile à l'époque où Rome commençait à prendre une place croissante en Méditerranée. On lui doit de nombreuses avancées en géométrie, en mécanique (principe d'Archimède, bras de levier), et en ingénierie (vis sans fin).

2. identifier les surfaces où la pression  $p$  est constante (en général, surface à altitude constante) ;
3. déterminer la surface infinitésimale  $dS$  compte tenu de la géométrie de la surface  $S$  (voir § A.1.3) ;
4. calculer les composantes de  $\mathbf{n}$  (on vérifie s'il n'y a pas un axe privilégié de projection de la résultante des forces) ;
5. on intègre  $\mathbf{F} = \int_S (-p\mathbf{n})dS$ .

Il y a des astuces de calcul (utilisation du théorème d'Archimède), mais il vaut mieux maîtriser la démarche du calcul intégral.

♣ **Exemple.** – Considérons un barrage rempli d'eau, avec une hauteur  $h$  et une largeur  $\ell$  (voir figure 3.7). On veut calculer la force totale de pression  $\mathbf{F}$  (par unité de largeur) qui s'exerce sur le mur du barrage.

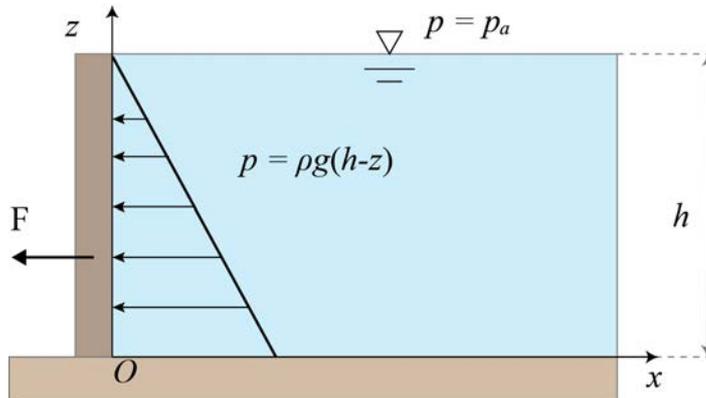


Figure 3.7 : barrage de hauteur  $h$  retenant un volume d'eau.

L'équation de Pascal s'intègre facilement  $p'(z) = -\rho g \Rightarrow p(z) = p_a + \rho g(h - z)$ . La distribution est linéaire avec la profondeur : on parle de *distribution hydrostatique*. Pour simplifier on pose  $p_a = 0$ . La surface infinitésimale est  $dS = \ell dz$ . La normale à cette surface est  $\mathbf{n} = (1, 0)$  (voir figure 3.8). La force de pression est donc :

$$\mathbf{F} = \int_S (-p\mathbf{n})dS = -\ell\mathbf{n} \int_0^h \rho g(h - z)dz = -\rho g\ell \frac{h^2}{2}\mathbf{n}.$$

Le moment de force en  $O$  est

$$\mathbf{M} = \int_S (-p\mathbf{r} \times \mathbf{n})dS = -\ell\mathbf{e}_y \int_0^h \rho g z(h - z)dz = -\rho g\ell \frac{h^3}{6}\mathbf{e}_y$$

avec  $\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z$ . En résumé, on trouve que la distribution de pression est linéaire (distribution *hydrostatique*). Comme  $M = Fh/3$ , le point d'application de la force est situé au tiers de la hauteur du barrage (depuis  $O$ ).

### 3.3 Mesure de la pression

Il existe plusieurs appareils pour mesurer la pression.

- *Baromètre* : il s'agit d'un tube contenant un fluide lourd (en général du mercure) dont le niveau varie en fonction de la pression atmosphérique (voir fig. 3.9). Le premier baromètre à mercure date de 1644 (c'est une invention de Torricelli<sup>3</sup>). Le baromètre ne sert qu'à mesurer une pression atmosphérique.

3. Evangelista Torricelli (1608–1647) était un physicien et mathématicien italien, contemporain de Galilée. Il est principalement connu pour l'invention du baromètre et la formule qui porte aujourd'hui son nom. Il a également travaillé sur des problèmes de géométrie et d'optique.

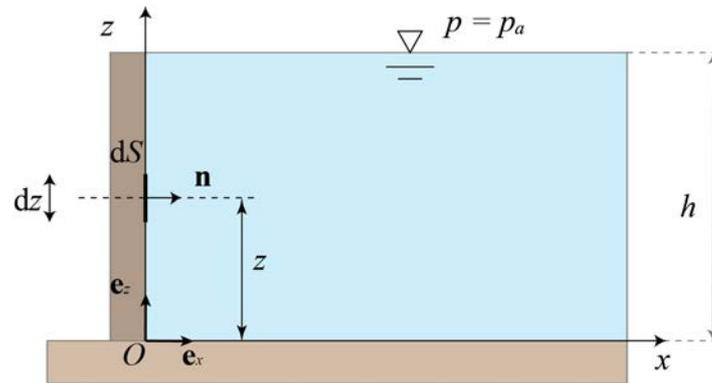


Figure 3.8 : surface infinitésimale pour le calcul de la résultante des forces de pression.

- *Manomètre à liquide* : c'est un appareil qui mesure la pression statique au sein d'un fluide (donc le baromètre est une variété de manomètre). On distingue le tube piezométrique au fonctionnement similaire au baromètre, les tubes en U droits ou inclinés, etc.
- *Manomètre mécanique ou électronique* : une structure élastique se déforme linéairement avec la pression. Donc si l'on est capable de mesurer la déformation, on dispose d'un moyen de mesurer la pression. Les tubes de Bourdon sont des exemples historiques (1848) de manomètre mécanique : un tube fin élastique est enroulé sur lui-même et contenu dans une boîte rigide hermétique. L'intérieur du tube est relié à l'extérieur (pression du fluide ambiant) ; sous l'effet de la pression extérieure, le tube va se recroqueviller ou bien se raidir. La faible déformation qui en résulte met en mouvement une aiguille qui permet d'indiquer la déformation. Il existe de nos jours des appareils électroniques qui estiment la pression en mesurant le courant électrique qui est généré par une substance cristalline déformée sous l'effet de la pression du fluide ambiant (jauge piézoélectrique). Un manomètre nécessite un étalonnage.

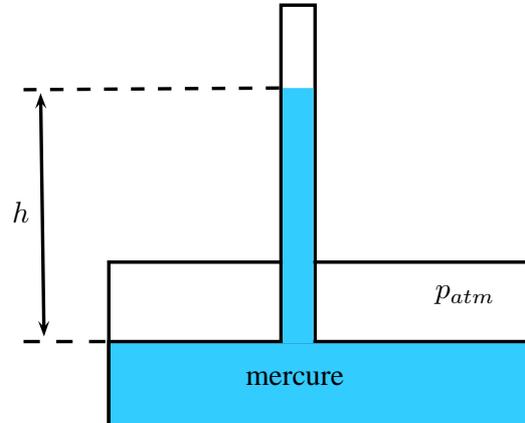


Figure 3.9 : principe d'un baromètre. Un tube trempe dans un bain de mercure de masse volumique  $\rho_m = 13546 \text{ kg/m}^3$ . Si la pression atmosphérique augmente, le mercure remonte dans le tube (ce dernier ne contient que du mercure liquide et un gaz constitué de vapeur de mercure dont la pression est négligeable). La pression atmosphérique est obtenue en mesurant la hauteur de la colonne de mercure :  $P_{atm} = \rho_m g h$ . La pression atmosphérique standard (au niveau de la mer) est 1 atm, soit très précisément  $1,0133 \times 10^5 \text{ Pa}$  ou bien 1,0133 bar, soit 762 mm de mercure (760 mm à  $0^\circ\text{C}$ ).

# 4 Équations de bilan

## 4.1 Théorèmes de transport

On va chercher à exprimer les principes de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie) pour des systèmes fluides. On va voir qu'il existe une multitude de représentations possibles du même principe :

- formulation sur un volume de contrôle (formulation dite *globale* ou *intégrale*) ou bien pour un volume infinitésimal (équation dite *locale*) ;
- formulation sur des volumes de contrôle ouverts ou fermés.

Cette multitude est au début perçue par l'étudiant comme une complexité supplémentaire de la mécanique des fluides, mais à l'usage, elle s'avère fort pratique car cela permet une meilleure compréhension physique et une résolution plus simple des problèmes.

### 4.1.1 Vue générale

Les lois de la mécanique s'écrivent différemment selon le type de description choisie, mais elles expriment les mêmes principes. Ces principes sont au nombre de trois :

- la masse se conserve ;
- la variation de quantité de mouvement (masse  $\times$  vitesse) est égale à la somme des forces appliquées<sup>1</sup> ;
- l'énergie totale se conserve : c'est le premier principe de la thermodynamique.

En mécanique des fluides, on se sert le plus souvent d'une description eulérienne du mouvement, c'est-à-dire qu'on ne suit pas les particules dans leur mouvement individuel, mais on se examine le mouvement du fluide à un endroit donné. Le mécanicien des fluides est comme un passant accoudé au garde-fou d'un pont et regardant les mouvements du fluide en contrebas. La description eulérienne introduit deux notions-clés, souvent difficiles à appréhender :

- la notion de *système ouvert* et de *volume de contrôle* ;
- la notion de *dérivée matérielle* ou particulaire.

Les *systèmes ouverts* sont des ensembles de points contenus dans une enveloppe (la surface de contrôle  $\mathcal{S}$ ) à travers laquelle ils peuvent échanger avec l'extérieur (le fluide environnant ou bien une paroi) de l'énergie, de la matière, etc. Cette surface de contrôle peut être fixée (c'est-à-dire elle ne varie

---

1. Il existe des formulations alternatives qui expriment la conservation de l'énergie cinétique. Rappelons que la variation d'énergie cinétique (masse  $\times$  carré de la vitesse) est égale à la différence entre la puissance fournie et la puissance dissipée. Rappelons que l'on peut travailler aussi bien en termes de *puissance* (force  $\times$  vitesse) ou de *travail* (force  $\times$  déplacement), ce sont les mêmes concepts ; la seule différence est que la puissance représente la variation du travail par unité de temps. Dans la majorité des cas, cette équation de conservation de l'énergie cinétique est équivalente à l'équation de la quantité de mouvement et, dans la résolution des problèmes, il faut choisir l'une ou l'autre des formulations. Dans certains cas, il n'y a pas une équivalence directe ; on en verra un exemple avec le ressaut hydraulique. Enfin il y a des quantités déduites de l'énergie cinétique (l'énergie cinétique fluctuante par exemple en turbulence), qui sont gouvernées par des équations spécifiques.

pas au cours du temps) ou bien bouger à une vitesse différente ou égale à celle du fluide; sa forme peut également être constante (c'est-à-dire indéformable) ou bien varier.

♣ **Exemple.** – Pour reprendre l'exemple précédent, on peut se placer à un nœud autoroutier, créer une surface de contrôle fictive, et compter les véhicules qui entrent dans le système, ceux qui en sortent, et ceux qui s'arrêtent sur le bas-côté ou une aire d'autoroute. L'évaluation du trafic se fait en faisant un décompte de ces différentes catégories au cours du temps. □

♣ **Exemple.** – Une fusée est un système ouvert puisqu'elle émet des gaz afin de se propulser dans l'espace. □

Par opposition, un *système fermé* est un système matériel qui n'échange pas avec l'extérieur. Il est en général astreint à suivre fidèlement le mouvement du fluide.

♣ **Exemple.** – Par exemple, reprenons le cas de l'autoroute, un véhicule est en quelque sorte un système fermé même s'il est en mouvement puisque rien n'entre ou ne sort. □

♣ **Exemple.** – Il serait possible de considérer un turboréacteur d'un avion comme un système fermé si la définition du système englobait les gaz rejetés par le réacteur, mais cela ne serait pas très utile puisque ce qui nous intéresse c'est l'avion et non le centre de masse du système avion + gaz. Le plus souvent, pour modéliser ce qui se passe dans un réacteur, on considère un volume de contrôle ouvert et fixé aux parois intérieures du réacteur. □

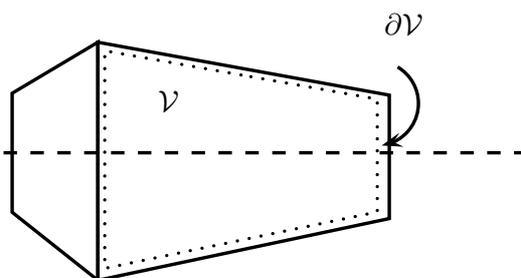


Figure 4.1 : volume de contrôle dans une tuyère d'un réacteur.

Afin de faciliter la compréhension des équations de transport, on va tout d'abord examiner ce qui se passe pour un milieu idéal, qui serait unidimensionnel<sup>2</sup> au § 4.1.2. Pour ce cas idéal, on va tout d'abord faire un rappel de calcul intégral pour comprendre comment les équations sont obtenues. On va voir trois équations de transport : conservation de la masse, de la quantité de mouvement, et de l'énergie. Au § 4.1.3, on va s'intéresser à des problèmes quelconques en dimension 2 ou 3 ; tout ce qui a été dit pour la dimension 1 sera extrapolé pour la dimension 2 ou 3.

## 4.1.2 Théorème de transport en dimension 1

### Bases mathématiques

Rappelons quelques formules classiques d'analyse :

– dérivée d'une primitive (définition d'une primitive) :

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(\xi) d\xi = f(t).$$

<sup>2</sup> Cette idéalisation peut servir à étudier des problèmes réels, par exemple des pipelines, lorsque la longueur est bien supérieure à la largeur d'écoulement.

- dérivée d'une primitive avec borne variable :

$$\frac{d}{dt} \int_0^{a(t)} f(\xi) d\xi = f(a(t)) \dot{a}(t).$$

- dérivée d'une fonction composée :

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx.$$

- formule de Leibniz :

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(b(t)) \frac{db}{dt} - f(a(t)) \frac{da}{dt}.$$

✂ **Démonstration.** Ce résultat se démontre simplement en introduisant  $F = \int f(x, t) dx$  la primitive de  $f$  par intégration par rapport à  $x$ . On a ainsi :  $\int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = F(b(t), t) - F(a(t), t)$ . En différenciant par rapport à  $t$  et en se servant de la relation des dérivées composées ( $(f \circ g)' = g' \times f' \circ g$ ), on déduit la relation de Leibniz<sup>3</sup>. Notons que l'on peut transformer cette équation de telle sorte que tout le membre de droite soit placé sous le même signe intégral. Pour cela il suffit de remarquer que

$$f(b(t)) \frac{db}{dt} - f(a(t)) \frac{da}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial x} (f(\xi, t) u(\xi, t)) d\xi,$$

avec  $u$  la vitesse.

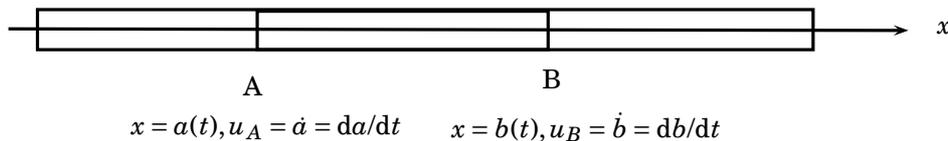


Figure 4.2 : écoulement unidirectionnel et « volume de contrôle » occupé par le segment AB.

### Conservation de la masse

Considérons un volume de contrôle *fermé*  $\mathcal{V}$  entre les points A et B, dont la position peut varier en fonction du temps :  $x_A = a(t)$  et  $x_B = b(t)$ . La masse  $M$  de ce « volume » est constante, donc si  $\rho$  désigne la masse par unité de volume (ici une masse linéaire puisqu'on est en dimension 1), **le principe de conservation de la masse impose**

$$\frac{dM}{dt} = 0,$$

or par définition on a

$$M = \int_{\mathcal{V}} \rho(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \rho(x, t) dx$$

ce qui donne d'après la formule de Leibniz

$$\frac{dM}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) dx + \rho_B \dot{b} - \rho_A \dot{a} = 0.$$

On a introduit  $\rho_A$  et  $u_A = \dot{a}$  la masse volumique et la vitesse au point A (on fait de même avec le point B). En se servant de l'identité  $\int_a^b \partial f / \partial x dx = f(b) - f(a)$ , on peut transformer cette égalité en

$$\frac{dM}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \right) dx = 0,$$

3. Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) était un philosophe, scientifique, mathématicien, diplomate, et juriste allemand. Il a jeté les bases du calcul intégral et différentiel. Il a également eu un rôle important en mécanique en énonçant le principe de l'action et de la réaction et celui des forces vives (énergie cinétique).

ce qui permet de tout passer sous le signe intégral. L'intégrale est nulle si l'intégrand est nul, soit

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho + \frac{\partial}{\partial x} (\varrho u) = 0. \quad (4.1)$$

Cette équation est appelée *forme locale de la conservation de la masse* ou *équation de continuité*. Un cas particulier important est le cas du fluide incompressible pour lequel on a  $\varrho = \text{cste}$ , soit

$$\frac{\partial}{\partial x} (\varrho u) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

### Théorème de Reynolds

De cette équation, on peut également montrer un théorème dit de Reynolds, qui permet d'intervertir les opérateurs intégration et dérivation temporelle lorsque l'intégrand s'écrit sous la forme  $\varrho f$ , avec  $f$  une fonction quelconque. Considérons en effet une quantité macroscopique (c'est-à-dire définie sur le volume de contrôle)

$$I(t) = \int_{\mathcal{V}} \varrho f(x, t) dx = \int_a^b \varrho f(x, t) dx,$$

avec  $a$  et  $b$  des bornes pouvant prendre des valeurs quelconques, et différencions la par rapport à  $t$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_a^b \varrho(x, t) f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial \varrho f}{\partial t} dx + \varrho_B f(b, t) u_B - \varrho_A f(a, t) u_A, \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial \varrho f}{\partial t} + \frac{\partial \varrho f u}{\partial x} \right) dx, \\ &= \int_a^b \left( f \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \varrho u \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx. \end{aligned}$$

En regroupant les termes en  $\varrho$ , puis en se servant de l'équation de continuité (4.1), on transforme cette dernière équation

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \int_a^b \left( -f \frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \varrho \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \varrho u \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx, \\ &= \int_a^b \left( \varrho \frac{\partial f}{\partial t} + \varrho u \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx, \\ &= \int_a^b \varrho \frac{df}{dt} dx, \end{aligned}$$

avec  $df/dt = \partial f/\partial t + u \partial f/\partial x$  la dérivée matérielle (puisque  $f$  est une fonction de  $x$  et  $t$ ), ce qui permet d'aboutir à l'égalité suivante, appelée *théorème de Reynolds*

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \varrho(x, t) f(x, t) dx = \int_a^b \varrho(x, t) \frac{d}{dt} f(x, t) dx. \quad (4.2)$$



On prendra garde ici que le terme  $d/dt$  dans le membre de gauche porte sur une fonction qui ne dépend que du temps  $t$  – c'est donc une dérivée classique<sup>4</sup> – alors que dans le second membre, il porte sur une fonction à deux variables  $f(x, t)$ , donc il signifie une dérivée matérielle:  $df/dt = \partial f/\partial t + u \partial f/\partial x$ .

### Conservation de la quantité de mouvement ; équation d'Euler

L'application de ce théorème de Reynolds nous permet d'établir la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique, dont une forme parmi les plus intéressantes est le théorème de Bernoulli. Par définition, la quantité de mouvement d'un volume de contrôle (unidimensionnel) est

$$Q = \int_{\mathcal{V}} \varrho(x, t) u(x, t) dx = \int_a^b \varrho u dx,$$

4. On a notamment  $df/dt = \partial f/\partial t$ .

et le principe de Newton ou principe fondamental de la mécanique (ou bien encore principe de conservation de la quantité de mouvement) nous enseigne que la variation de quantité de mouvement résulte des forces appliquées au volume, soit

$$\frac{dQ}{dt} = \text{forces appliquées.}$$

Admettons ici que les seules forces appliquées au système soient la force de gravité (et supposons que le sens de la gravité soit dans le sens des  $x$ ) et la force de pression sur le pourtour du domaine (ici en dimension 1, ce pourtour se résume aux points A et B), alors on a

$$\frac{dQ}{dt} = \bar{\rho}gV + p_A - p_B,$$

avec  $p_A$  et  $p_B$  la pression exercée sur le volume de contrôle par le fluide environnant (sur les points A et B),  $V = b - a$  le volume de  $\mathcal{V}$ , et  $\bar{\rho}$  la masse volumique moyenne ( $\bar{\rho} = \int_{\mathcal{V}} \rho dx / V$ ). On a donc d'après le théorème de Reynolds

$$\frac{dQ}{dt} = \int_a^b \rho \frac{du}{dt} dx = \int_a^b \left( \underbrace{\rho \frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{accélération locale}} + \underbrace{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{accélération convective}} \right) dx = \bar{\rho}gV + p_A - p_B.$$

On peut transformer le membre de droite de telle sorte qu'il puisse être interprété comme une intégrale

$$\bar{\rho}gV + p_A - p_B = \int_a^b \left( \rho g - \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx,$$

d'où

$$\int_a^b \rho \frac{du}{dt} dx = \int_a^b \left( \rho g - \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx,$$

ce qui impose que localement, on doit avoir

$$\boxed{\rho \frac{du}{dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = \rho g - \frac{\partial p}{\partial x}.} \quad (4.3)$$

Rappelons que cette formule n'est valable qu'en dimension 1 et en l'absence de frottement visqueux. Une telle équation de conservation de la quantité de mouvement couplée à l'équation de continuité est appelée *équation d'Euler* ou bien équation du mouvement pour les fluides parfaits (appelés encore fluides non visqueux). C'est la relation de la quantité de mouvement la plus simple que l'on puisse imaginer et malgré sa simplicité, elle permet de résoudre un grand nombre de cas concrets.

### Conservation de l'énergie cinétique ; équation de Bernoulli

Toujours par application du théorème de Reynolds, on peut déduire le théorème de conservation de l'énergie cinétique et sa forme dérivée dite théorème/équation de Bernoulli. Appelons  $k = \rho u^2/2$  l'énergie cinétique locale et  $K$  l'énergie cinétique macroscopique. D'après le théorème de Reynolds, on a

$$K = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \rho(x, t) u^2(x, t) dx = \int_a^b k(x, t) dx.$$

**Le principe de conservation de l'énergie cinétique s'énonce**

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \int_a^b \frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} u^2(x, t) dx = \text{puissance des forces appliquées,} \\ &= \bar{\rho}gVu_G + p_A u_A - u_B p_B, \end{aligned}$$

car la puissance des forces appliquées est égale au produit des forces et des vitesses au point d'application. Ici,  $u_G$  désigne la vitesse au centre de gravité ( $\bar{\rho}u_G = \int_{\mathcal{V}} \rho u dx / V$  ou moyenne massique de la vitesse). Comme précédemment, on peut transformer le membre de droite en un terme intégral

$$\begin{aligned} \bar{\rho}gVu_G + p_A u_A - u_B p_B &= \int_{\mathcal{V}} \left( \rho g u - \frac{\partial p u}{\partial x} \right) dx, \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left( -u \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial p u}{\partial x} \right) dx, \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[ -u \frac{\partial}{\partial x} (\psi + p) - p \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx, \end{aligned}$$

où  $\psi$  désigne le *potentiel gravitaire*, c'est-à-dire l'énergie potentielle dont dérive la force de gravité :  $\rho g = -\partial \psi / \partial x$ , avec ici  $\psi = -\rho g x$ . On arrive à

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \int_a^b \frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} u^2(x, t) dx \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[ -u \frac{\partial}{\partial x} (\psi + p) - p \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx, \end{aligned}$$

puis après quelques manipulations algébriques et en utilisant l'équation de continuité (4.1), on montre que les deux formes suivantes sont équivalentes

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \int_a^b \left( \rho \frac{\partial u^2 / 2}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u^2 / 2}{\partial x} \right) dx, \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial u k}{\partial x} \right) dx, \end{aligned}$$

ce qui aurait pu être obtenu également en appliquant directement la formule de Leibniz. On en déduit la formule macroscopique de conservation de l'énergie cinétique

$$\int_a^b \left( \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial u k}{\partial x} \right) dx = \int_{\mathcal{V}} \left[ -u \frac{\partial}{\partial x} (\psi + p) - p \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx,$$

ainsi que la forme locale

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} (k + \psi + p) + (k + p) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4.4)$$

Cette formule peut considérablement se simplifier quand

- l'écoulement est incompressible  $\rho = cste \Rightarrow \partial u / \partial x = 0$  d'après l'équation de continuité (4.1) ;
- l'écoulement est permanent : les dérivées temporelles disparaissent. On a ainsi  $\partial k / \partial t = 0$ .

On aboutit alors à

$$\frac{\partial}{\partial x} (k + \psi + p) = 0,$$

soit

$$\boxed{k + \psi + p = cste.} \quad (4.5)$$

La somme de l'énergie cinétique  $k$ , du potentiel gravitaire (ou énergie potentielle)  $\psi$ , et de la pression  $p$  doit rester constante. Cette relation est appelée *équation de Bernoulli*. Elle est remarquable car il s'agit d'une relation purement scalaire, sans opérateur intégral ou différentiel, ce qui la rend très facile d'emploi.

### 4.1.3 Généralisation et théorème de Reynolds

La formule de Leibniz se généralise à des intégrales multiples (c'est-à-dire intégrales sur des volumes au lieu d'intégrales sur des intervalles). On obtient la relation suivante appelée « théorème de transport » :

$$\frac{d}{dt} \int_V f dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_S f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (4.6)$$

où  $V$  est un volume de contrôle dit « matériel » contenant une certaine masse de fluide,  $S$  est la surface enveloppant ce volume, et  $\mathbf{n}$  est la normale à la surface  $S$ ; la normale  $\mathbf{n}$  est unitaire ( $|\mathbf{n}| = 1$ ) et orientée vers l'extérieur. Cette relation écrite ici pour une fonction scalaire  $f$  s'étend sans problème à des vecteurs  $\mathbf{f}$  quelconques.

La relation (4.6) est fondamentale car elle permet d'obtenir toutes les équations fondamentales de la mécanique. Elle peut s'interpréter de la façon suivante :

La variation temporelle d'une quantité  $f$  définie sur un volume de contrôle  $V$  est égale à la somme de :

- la variation de  $f$  au cours du temps au sein du volume de contrôle (variation dite locale) ;
- le flux de  $f$  à travers la surface  $S$  enveloppant le volume de contrôle (flux = ce qui entre - ce qui sort de  $V$ ).

Le théorème de transport peut également s'écrire sous la variante suivante (en se servant du théorème de Green-Ostrogradski) :

$$\frac{d}{dt} \int_V f dV = \int_V \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{u}) \right) dV$$

Attention à la notion de volume de contrôle « matériel » : c'est un volume fluide, ses frontières sont fluides et se déplacent comme le reste du fluide ; la vitesse  $\mathbf{u}$  à la frontière  $S$  coïncident avec la vitesse locale du fluide. S'il en est autrement, on parle de volume (de contrôle) *arbitraire* et la vitesse  $\mathbf{u}$  à la frontière  $S$  ne correspond pas à celle du fluide. Par exemple si on prend un volume arbitraire  $V$  fixe au cours du temps alors  $\mathbf{u} = 0$  le long de  $S$  et

$$\frac{d}{dt} \int_V f dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV.$$

Un corollaire important du théorème de transport est le « théorème de Reynolds »<sup>5</sup> qui s'applique à des fonctions  $f$  massiques, c'est-à-dire que l'on peut écrire sous la forme  $\rho f$ , avec  $\rho$  la masse volumique du fluide.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho f dV = \int_V \rho \frac{d}{dt} f dV. \quad (4.7)$$

☞ **Démonstration.** La démonstration est relativement simple :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho f dV = \int_V \left( \frac{\partial \rho f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho f \mathbf{u}) \right) dV = \int_V \left( \rho \frac{\partial f}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla f + f \frac{\partial \rho}{\partial t} + f \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dV$$

Compte tenu de l'équation de continuité [voir éq. (4.8) ci-dessous] et en identifiant la forme  $df/dt = \partial f/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla f$ , on tire le théorème de Reynolds. □

5. Osborne Reynolds (1842–1912) était un mécanicien britannique, dont le nom est associé au nombre sans dimension qui sert à départager les écoulements laminaires et turbulents. Expérimentateur et théoricien, Reynolds a étudié les équations de Navier-Stokes et a proposé de nombreux développements théoriques (théorie de la lubrification, décomposition des vitesses, et moyenne des équations de Navier-Stokes).

#### 4.1.4 Conservation de la masse

On applique le théorème de transport (4.6) à la fonction scalaire  $f = \rho$ . On déduit :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS,$$

avec  $V$  un volume matériel et  $S$  la surface enveloppant ce volume. En utilisant le théorème de la divergence (Green-Ostrogradski), on tire :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \left( \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dV$$

On a égalé la dérivée de la masse avec 0 car dans la plupart des cas, la masse se conserve au cours du temps s'il n'y a pas de création de masse ou de perte au sein d'un volume matériel. De plus, si  $\rho$  est continue (pas « d'onde de choc » par exemple), alors on peut écrire

$$\boxed{\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.} \quad (4.8)$$

Cette équation s'appelle l'équation de conservation locale de la masse ou bien encore *équation de continuité*. On peut encore l'écrire :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Si le fluide est incompressible ou l'écoulement isochore :  $\rho = \text{constante}$ , donc l'équation de continuité devient :

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.}$$

C'est l'équation dont on se servira le plus dans la suite de ce cours. Écrite sous forme algébrique, cette équation s'écrit en dimension 2 :

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,}$$

et en dimension 3

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

avec  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  le champ de vitesse.

#### 4.1.5 Conservation de la quantité de mouvement

##### Formulation macroscopique

On applique le théorème de transport (4.6) à la fonction vectorielle représentant la quantité de mouvement locale  $f = \rho \mathbf{u}$  :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV + \int_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Il existe d'autres variantes permettant d'exprimer la dérivée matérielle de  $\rho \mathbf{u}$ . En utilisant le théorème de la divergence, on tire :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \left( \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \right) dV,$$

ou bien en servant en plus de l'équation de continuité

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{u} \right) dV.$$



Attention dans ces deux équations, le terme  $\mathbf{uu}$  représente un tenseur d'ordre 2.

Le principe fondamental de la dynamique veut que toute variation (temporelle) de quantité de mouvement résulte de l'application de forces. Donc, on peut écrire une relation générale de la forme

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \text{forces appliquées au volume } V.$$

Les forces appliquées comprennent les forces de volume (poids) et les forces de surface agissant à la surface du volume. Il s'ensuit que la forme macroscopique complète des équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV &= \underbrace{m\mathbf{g}}_{\text{poids}} + \underbrace{\int_S \boldsymbol{\sigma} dS}_{\text{force de surface}}, \\ &= \int_V \rho \mathbf{g} dV + \int_S \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

où  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}$  désigne la contrainte,  $\boldsymbol{\Sigma}$  le tenseur des contraintes. On rappelle que le tenseur des contraintes se décompose en tenseur des pressions  $-p\mathbf{1}$  et un tenseur des extra-contraintes  $\mathbf{T}$  :

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T}.$$

Le tenseur  $\mathbf{T}$  dépend de la nature du fluide étudié ou du niveau d'approximation :

- $\mathbf{T} = 0$  correspond au cas des fluides parfaits (ou non visqueux) et les équations du mouvement qui en résultent sont appelées *équations d'Euler* ;
- $\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D}$  correspond au cas des fluides newtoniens et les équations du mouvement qui en résultent sont appelées *équations de Navier-Stokes*. Elles sont examinées en détail au chapitre 6 ;
- $\mathbf{T} = \mathcal{F}(\mathbf{D})$  correspond au cas des fluides non newtoniens, avec  $\mathcal{F}$  la *loi de comportement du fluide*. Les équations du mouvement résultantes sont appelées *équations de Cauchy*<sup>6</sup>.

### Formulation locale

Une application du théorème de Green-Ostrogradski permet d'aboutir à la *formulation locale* des équations de la quantité de mouvement :

$$\boxed{\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T},} \quad (4.9)$$

car  $\nabla \cdot (p\mathbf{1}) = p\nabla \cdot (\mathbf{1}) + \mathbf{1} \cdot \nabla p = \nabla p$ . Comme précédemment on a supposé pour passer de la formulation macroscopique à la forme locale que les différents champs (vitesse et masse volumique) étaient continus. L'équation locale n'est pas valable pour une onde de choc ou bien un ressaut hydraulique ; dans un tel cas, il faut appliquer

- soit les formulations intégrales de la conservation de quantité de mouvement pour éviter d'avoir à traiter la discontinuité ;
- soit ajouter des conditions supplémentaires qui viennent compléter les équations locales qui restent valables de part et d'autre de la discontinuité. De telles relations sont appelées *relations de Rankine-Hugoniot* ou bien conditions de choc.

On peut encore écrire cette équation sous une forme raccourcie :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p_* + \nabla \cdot \mathbf{T},$$

6. Il n'y a pas de consensus sur l'appellation de cette équation dans la littérature technique.

où l'on associe le terme gravitaire  $\rho \mathbf{g}$  au terme du gradient de pression et, ce faisant, on a introduit la *pression généralisée*  $p_* = p + \psi$  et  $\psi$  le *potentiel gravitaire* tel que  $\rho \mathbf{g} = -\nabla \psi$ . Cette formulation est par exemple utilisée en hydraulique en charge pour traiter les effets de la gravité en termes de pression généralisée.

Les équations locales peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (4.10)$$

ou bien :

$$\boxed{\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}}, \quad (4.11)$$

où l'on prendra bien garde à la position de la masse volumique  $\rho$  dans les termes différentiels. La dernière équation (4.11) est la plus employée. La principale différence entre les équations (4.11) et (4.10) est liée à la place de la masse volumique  $\rho$ . Si l'écoulement est isochore ou le matériau incompressible, ces deux équations sont trivialement obtenues puisque  $\rho$  est constante. L'équation (4.11) ou ses variantes s'appelle l'équation de conservation de la quantité de mouvement ou bien l'équation de Newton ou bien encore l'*équation fondamentale de la dynamique*. Le cas particulier où  $\mathbf{T} = 0$  correspond aux équations d'Euler, qui comme on l'a précisé plus haut, constituent le jeu d'équations du mouvement le plus simple qu'on puisse imaginer et qui permettent de résoudre un grand nombre de problèmes pratiques en ingénierie (dynamique des gaz, écoulements à grande vitesse, etc.) :

$$\boxed{\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla p}, \quad (4.12)$$

En dimension 2, l'équation de conservation (4.11) peut être projetée de la façon suivante dans un repère cartésien

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y}, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y}, \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{u} = (u, v)$  les composantes du vecteur vitesse,  $(g_x, g_y)$  les composantes du vecteur gravité.



Attention à la notation  $\mathbf{u} \nabla \mathbf{u}$ . Cela ne signifie pas qu'il s'agit du produit entre le vecteur  $\mathbf{u}$  et le tenseur (matrice)  $\nabla \mathbf{u}$ . En fait, en toute rigueur, il faudrait écrire :  $(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}$ , les parenthèses servant à indiquer que l'opérateur différentiel  $\mathbf{u} \nabla$  est appliqué au vecteur  $\mathbf{u}$ .

Une autre formulation vectorielle de l'équation de conservation de quantité de mouvement est obtenue en faisant remarquer que  $\nabla \mathbf{u}$  peut s'écrire  $\mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = \nabla |\mathbf{u}|^2 / 2 + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \nabla |\mathbf{u}|^2 + \rho (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} &= \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \nabla |\mathbf{u}|^2 + \rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} &= \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}, \end{aligned}$$

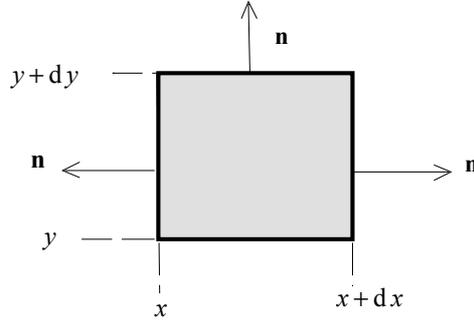
avec  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  la vorticité. Cette équation est parfois appelée *équation de Gromeka-Lamb*. Elle est utile quand on veut étudier la *vorticité* du fluide, c'est-à-dire les tourbillons et structures similaires qui se créent dans un fluide.

### Interprétation du terme de divergence des contraintes

On peut interpréter le termes  $-\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}$  qui apparaît dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (4.11) en considérant un « volume » infinitésimal, ce qui permet notamment d'expliquer pourquoi les contraintes apparaissent sous la forme d'une divergence. Le raisonnement est classique et

a déjà été appliqué au § A.2.2 pour expliquer le sens physique de l'opérateur divergence. Tout d'abord, il faut se demander quelles sont les forces appliquées à un volume de contrôle infinitésimal, dont le « volume » (il s'agit d'une surface) par unité de largeur est  $dx dy$  (voir figure 4.3).

- force de volume : action de la pesanteur  $\rho \mathbf{g}$  ;
- forces à la surface du volume de contrôle : elles sont calculées à l'aide de  $\Sigma$ .



**Figure 4.3** : projection de la relation d'équilibre des contraintes sur un volume élémentaire.

Considérons un repère cartésien en dimension 2. La représentation de  $\Sigma$  dans ce repère est donnée par la matrice symétrique :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix}.$$

Les contraintes sur la face orientée par la normale  $\mathbf{n} = (-1, 0)$  sont :

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \Sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\Sigma_{xx} \\ -\Sigma_{xy} \end{bmatrix}.$$

tandis que sur la facette opposée orientée par la normale  $\mathbf{n} = (1, 0)$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \Sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} + \frac{\partial \Sigma_{xx}}{\partial x} dx \\ \Sigma_{xy} + \frac{\partial \Sigma_{xy}}{\partial x} dx \end{bmatrix}.$$

On fait de même pour les normales orientées par  $\mathbf{n} = (0, 1)$  et  $\mathbf{n} = (0, -1)$ . La projection des efforts sur l'axe  $x$  s'écrit donc (contrainte  $\times$  surface par unité de largeur) :

$$\left( -\Sigma_{xx} + \Sigma_{xx} + \frac{\partial \Sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy + \left( -\Sigma_{xy} + \Sigma_{xy} + \frac{\partial \Sigma_{xy}}{\partial y} dy \right) dx = \left( \frac{\partial \Sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma_{xy}}{\partial y} \right) dx dy.$$

De même, sur l'axe  $y$ , on trouve que la projection des efforts s'exprime comme :

$$\left( \frac{\partial \Sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma_{yy}}{\partial y} \right) dx dy.$$

Ces petits calculs montrent que les efforts exercés sur la surface de contrôle d'un volume infinitésimal peuvent se calculer de façon générique à l'aide de l'expression  $\nabla \cdot \Sigma$ .

#### 4.1.6 Conservation de l'énergie, théorème de Bernoulli

##### Premier principe de la thermodynamique

Rappelons que le premier principe de la thermodynamique énonce que l'énergie totale  $E$ , varie à cause du travail des forces extérieures et du flux de chaleur

$$\delta E = \delta W + \delta Q,$$

avec  $\delta E$  la variation d'énergie totale, c'est-à-dire l'intégrale sur le volume de contrôle de l'énergie cinétique  $k$  et l'énergie interne  $\varrho e$  ( $e$  étant l'énergie interne massique),  $\delta W$  le travail des forces extérieures au sein du volume de contrôle,  $\delta Q$  le flux de chaleur à travers la surface de contrôle  $S$ . Au lieu de parler en termes de travail, on peut parler en termes de puissance puisque si l'on divise l'équation précédente par un petit incrément de temps  $\delta t$

$$\frac{\delta E}{\delta t} = \frac{\delta W}{\delta t} + \frac{\delta Q}{\delta t},$$

et en faisant tendre  $\delta t$  vers 0, on obtient

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} (k + \varrho e) dV}_{\text{taux de variation de l'énergie totale } E} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \varrho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV + \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} dS}_{\dot{W}} - \underbrace{\int_S \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{n} dS}_{\dot{Q}},$$

avec  $\mathbf{j}_Q$  le *flux de chaleur* (voir § A.2.1),  $\dot{W}$  le taux de variation du travail (ou puissance) des forces extérieures,  $\dot{Q}$  le flux de chaleur qui passe par unité de temps à travers la surface  $S$ , et  $\boldsymbol{\sigma}$  la contrainte exercée par le milieu extérieur sur le volume de contrôle sur une facette  $dS$  orientée par  $\mathbf{n}$ .

Examinons maintenant de plus près la puissance des forces extérieures. Cette puissance comprend des termes positifs (puissance fournie au volume de contrôle) et négatifs (puissance dissipée au sein du volume ou aux frontières). La puissance fournie au volume comprend généralement la puissance apportée par la force de gravité et les forces de pression (ce n'est pas une règle absolue) tandis que la dissipation d'énergie résulte généralement des extra-contraintes (dissipation visqueuse dans le cas d'un fluide newtonien). Comme précédemment pour les contraintes, il est plus sage de faire une décomposition entre puissances dues à des forces de volumes et puissances dues à des forces de surface sans se soucier du signe de ces contributions :

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \text{puissance fournie au volume } V + \text{puissance dissipée aux frontières et dans } V, \\ &= \int_{\mathcal{V}} \varrho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV + \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} dS, \end{aligned}$$

Par définition de la contrainte via le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\Sigma}$  (voir § B.4.2), on a

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = (-p\mathbf{1} + \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{n} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{n},$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \int_{\mathcal{V}} \varrho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{u} \cdot (-p\mathbf{n} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) dS, \\ &= \int_{\mathcal{V}} \varrho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV + \int_S (-p\mathbf{u} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS, \end{aligned} \quad (4.13)$$

car  $\mathbf{T}$  est symétrique. La formulation macroscopique du premier principe de la thermodynamique est donc le suivant

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} (k + \varrho e) dV = \int_{\mathcal{V}} \varrho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV + \int_S (-p\mathbf{u} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{j}_Q) \cdot \mathbf{n} dS.} \quad (4.14)$$

On souhaite disposer d'une formulation locale de ce principe. L'étape suivante consiste donc à écrire les intégrales de surface apparaissant dans le membre de droite de l'équation (4.14) sous forme d'intégrales de volumes. L'application du théorème de Green-Ostrogradski fournit immédiatement

$$\int_S (-p\mathbf{u} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{j}_Q) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (-p\mathbf{u} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{j}_Q) dV.$$

En substituant cette dernière relation dans l'équation (4.14), on arrive finalement à l'équation locale de conservation de l'énergie totale

$$\boxed{\frac{d}{dt} (k + \varrho e) = \varrho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (-p\mathbf{u} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{j}_Q).} \quad (4.15)$$

### Conservation de l'énergie cinétique

Il est possible d'obtenir une relation locale pour le taux de variation de l'énergie cinétique en multipliant l'équation de conservation de la quantité de mouvement (4.11) par la vitesse  $\mathbf{u}$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\rho \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}) = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T},$$

et de là, en remplaçant les termes de la forme  $\mathbf{u} \partial \mathbf{u}$  par  $\partial |\mathbf{u}|^2/2$ , on arrive à

$$\frac{1}{2} \rho \frac{\partial |\mathbf{u}|^2}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \mathbf{u} \cdot \nabla (|\mathbf{u}|^2) = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}.$$

En se servant de l'équation de continuité (4.8) et de l'identité  $2\nabla \cdot (k\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla |\mathbf{u}|^2$ , on peut transformer cette équation et obtenir une dérivée matérielle de l'énergie cinétique locale

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (k\mathbf{u}) = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}. \quad (4.16)$$

Cette équation est appelée *équation de conservation de l'énergie cinétique*. Dans cette équation, le terme  $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}$  représente la puissance de la force de gravité,  $-\mathbf{u} \cdot \nabla p$  la puissance des forces de pression, et  $\mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}$  la puissance des extra-contraintes (dissipation d'énergie).

### Fonction de dissipation

En comparant les équations (4.16) et (4.15), on note certaines similitudes dans les termes apparaissant dans le membre de droite, similitudes que l'on va exploiter pour fournir différentes expressions des énergies cinétique et interne. Pour cela, on va se livrer à quelques manipulations algébriques. Tout d'abord, en servant des propriétés de composition de l'opérateur divergence, on peut écrire :

$$\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} : \nabla \mathbf{u}.$$

Compte tenu de la symétrie de  $\mathbf{T}$ , on a la relation  $\mathbf{T} : \nabla \mathbf{u} = \mathbf{D} : \mathbf{T}^T$ . En effet (voir § B.3), le tenseur « gradient de vitesse » se décompose en une partie symétrique (le tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}$ ) et une partie antisymétrique (le tenseur des taux de rotation  $\mathbf{W}$ )

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{D} + \mathbf{W}.$$

On peut montrer (voir chap. A) que la trace du produit de tout tenseur symétrique  $\mathbf{S}$  et de tout tenseur antisymétrique  $\mathbf{A}$  est nulle. On en déduit donc que

$$\mathbf{T} : \nabla \mathbf{u} = \mathbf{T} : (\mathbf{D} + \mathbf{W}) = \mathbf{T} : \mathbf{D}.$$

La quantité  $\Phi = \text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{T} : \mathbf{D}$  s'appelle la *fonction de dissipation* et représente la puissance dissipée par les extra-contraintes  $\mathbf{T}$ .

On écrit finalement

$$\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} + \Phi.$$

Avec cette relation en main et en retranchant membre à membre les équations (4.16) et (4.15), on déduit

$$\boxed{\frac{d}{dt} \rho e = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \Phi - \nabla \cdot \mathbf{j}_Q.} \quad (4.17)$$

Cela montre que dans le cas général, l'énergie interne du volume de contrôle varie au cours du temps sous l'effet

- de la puissance dissipée par les extra-contraintes (visqueuses dans le cas newtonien)  $\Phi$  ;

---

7. Rappelons la signification du symbole « : ». Il s'agit de la notation abrégée de l'opérateur trace :  $\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}) = \mathbf{A} : \mathbf{S}$ . On l'appelle également produit doublement contracté. Voir § A.2.2.

- de la puissance dissipée ou fournie par la dilatation/compression du matériau  $-p\nabla \cdot \mathbf{u} = p(d\rho/dt)/\rho$  [d'après l'équation de continuité (4.8)];
- de la puissance calorifique  $-\nabla \cdot \mathbf{j}_Q$ .

On appelle cette équation l'*équation de conservation de l'énergie interne*.

Un cas particulier important est celui des fluides incompressibles ( $\rho = \text{cte}$ ) dans un écoulement isotherme ( $\mathbf{j}_Q = 0$ ). Dans ce cas précis, l'équation de l'énergie interne se simplifie grandement

$$\frac{d}{dt}\rho e = \Phi.$$

Cela montre que l'énergie interne est dissipée via les extra-contraintes. Ce cas particulier se rencontre très fréquemment en pratique puisque la plupart des écoulements d'intérêt pratique sont isochores et isothermes. La fonction de dissipation  $\Phi = \mathbf{T} : \mathbf{D}$  nous renseigne alors complètement sur la façon dont le système dissipe son énergie.

### Équation générale de Bernoulli

Une autre formulation intéressante est obtenue par manipulation de l'équation de conservation de l'énergie cinétique (4.16) dans le cas où on peut considérer le fluide comme incompressible:  $\rho$  est une constante. On note  $\psi = \rho g z$  le potentiel gravitaire ( $\rho \mathbf{g} = -\nabla \psi$ ) et  $p_* = p + \psi$  la pression généralisée. On tire donc que:  $\rho \mathbf{g} - \nabla p = -\nabla p_*$ . On peut donc écrire du fait de l'incompressibilité

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= \frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (k\mathbf{u}) \\ &= \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}. \end{aligned}$$

De même, on peut écrire

$$\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{u} \cdot \nabla p_* - \Phi + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}).$$

Avec ces relations en main, on écrit l'équation de conservation de l'énergie cinétique (4.16) sous la forme

$$\begin{aligned} \Phi + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}) &= \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathbf{u} \cdot \nabla p_*, \\ &= \frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla (k + \psi + p). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Cette équation s'interprète ainsi :

- $\Phi$  représente l'énergie dissipée par unité de volume ;
- $\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{T})$  représente l'énergie dissipée ou produite aux frontières du domaine. Pour s'en convaincre, il suffit d'intégrer ce terme sur  $\mathcal{V}$ , puis d'utiliser le théorème de Green-Ostrogradski ;
- $\partial k / \partial t$  est la variation locale d'énergie cinétique ;
- $\mathbf{u} \cdot \nabla (k + \psi + p)$  représente le transport ou *advection* d'une quantité  $\Psi = k + \psi + p$  qui est la somme de l'énergie cinétique  $k$ , de l'énergie potentielle  $\psi$ , et de la pression  $p$ .

Rappelons que, comme en mécanique du point ou du solide, le théorème de l'énergie cinétique est une représentation alternative de la relation fondamentale de la dynamique. Pour un problème régulier, on peut employer l'une ou l'autre, c'est-à-dire les relations (4.11) ou (4.16) ; le choix de l'une ou de l'autre tient le plus souvent à la rapidité du calcul ou bien à la commodité du raisonnement, mais quel que soit le choix opéré, le résultat final est identique. Dans certains problèmes plus complexes, on ne peut en pratique utiliser qu'une ou l'autre des formes. Par exemple, dans l'étude des chocs ou des ressauts hydrauliques, il faut travailler avec des équations macroscopiques (sur des volumes de contrôle) car les champs peuvent être localement discontinus ; en outre, on ne peut pas utiliser facilement l'équation de l'énergie à cause de dissipation localisée de l'énergie au niveau de la discontinuité. Dans ce cas-là, seule l'équation de la quantité de mouvement doit être utilisée.



Un cas particulier important est le cas d'un écoulement permanent d'un fluide non visqueux. Dans ce cas-là, on a

- écoulement permanent  $\Rightarrow \partial k / \partial t = 0$ ;
- viscosité nulle  $\Rightarrow \mathbf{T} = 0$  et  $\Phi = 0$ .

Sous ces conditions, l'équation (4.18) devient

$$\mathbf{u} \cdot \nabla (k + \psi + p) = 0,$$

ce qui veut dire que  $\mathbf{u}$  est normal au vecteur  $\nabla \Psi$  en tout point, or d'après l'interprétation géométrique de l'opérateur gradient (voir § A.2.1),  $\nabla \Psi$  est un vecteur normal aux surfaces isopotentielles  $\Psi = cte$ , donc  $\mathbf{u}$  doit être tangent à ces surfaces isopotentielles. On peut montrer (voir § B.2) que le lieu des points où le vecteur vitesse est tangent est appelé une ligne (resp. une surface) de courant. Il s'ensuit que le long d'une ligne de courant, la quantité  $\Psi$  est constante.

En résumé, le *théorème de Bernoulli* énonce que si

- l'écoulement est permanent ;
- l'écoulement est isochore ou bien le matériau incompressible ;
- les dissipations d'énergie sont négligeables ;

alors le long de toute ligne de courant, la quantité  $\Psi = k + \psi + p$  se conserve. Dans le cas fréquent où l'énergie potentielle s'écrit  $\psi = \rho g z$ , alors on a :

$$\boxed{\Psi = \rho g z + \rho \frac{u^2}{2} + p = cte,} \quad (4.19)$$

avec  $u = |\mathbf{u}|$ .

Ce théorème est remarquable car il s'agit d'une relation purement algébrique (pas de différentielle ou d'intégration) qui permet de relier vitesse, pression, et position du fluide. Ce théorème a de nombreuses applications. Il est très apprécié des ingénieurs (et des étudiants) pour résoudre rapidement des problèmes pratiques. Toutefois, dans bien des cas pratiques, on ne peut pas négliger la dissipation d'énergie et il faut alors utiliser des formules plus complexes que l'équation de Bernoulli (4.19).

## 4.2 Quelques applications du théorème de Bernoulli

### 4.2.1 Formule de Torricelli

La formule de Torricelli permet de calculer la vitesse de vidange d'un récipient contenant une hauteur  $h$  d'un liquide (de masse volumique  $\rho$ ). Cette formule s'établit facilement à l'aide de l'équation de Bernoulli.

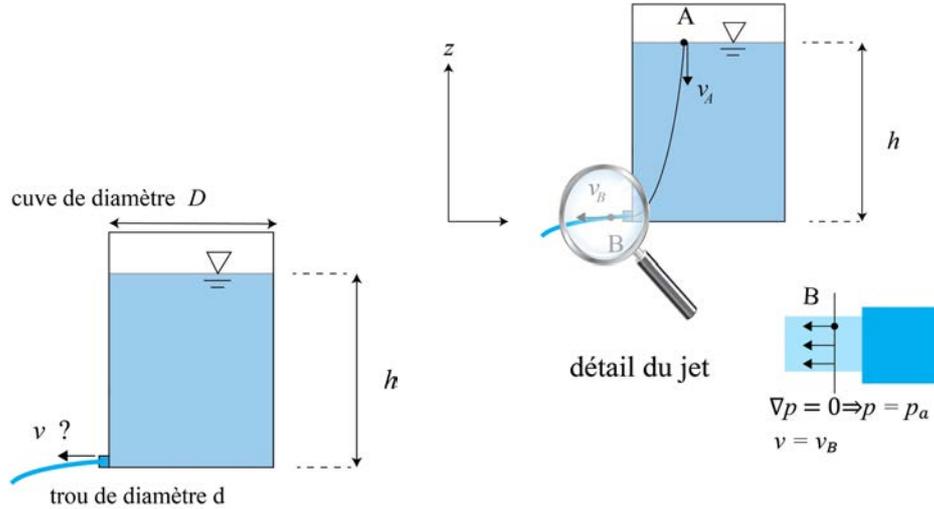


Figure 4.4 : vidange d'un réservoir.

Considérons une ligne de courant entre un point A à la surface libre du liquide dans le récipient et un point B au niveau de l'orifice. On suppose que la pression atmosphérique  $p_a$  s'applique à ces deux points (le gaz contenu dans le réservoir n'est pas sous pression). D'après l'équation (4.19), on a

$$\rho g z_A + \rho \frac{v_A^2}{2} + p_A = \rho g z_B + \rho \frac{v_B^2}{2} + p_A,$$

avec  $z_A$  et  $z_B$  la position de A et B,  $v_A$  et  $v_B$  les vitesses en A et B, et  $p_A$  et  $p_B$  la pression aux points A et B. Si le diamètre du réservoir est suffisamment grand par rapport au diamètre de l'orifice, la vidange est lente et, dans un premier temps, on peut supposer que l'écoulement est permanent ; de plus, la vitesse en A doit alors être très faible, donc on pose  $v_A \approx 0$ . De plus on a  $p_A = p_B = p_a$  et  $z_A = z_B + h$ , ce qui permet de simplifier l'équation ci-dessus

$$\rho g h = \rho \frac{v_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}.$$

### 4.2.2 Intrusion d'un courant de gravité

La formule de von Kármán<sup>8</sup> permet de calculer la vitesse du front d'un fluide lourd dans un fluide plus léger. Ce problème a été résolu par von Kármán au moment de la seconde guerre mondiale, quand les Alliés lui demandaient de calculer la vitesse de propagation d'un gaz toxique dans l'atmosphère. Cette formule a de nombreuses applications en météorologie (avancement d'un front froid), en océanographie (propagation d'un courant de turbidité), et dans les problèmes de mélange.

8. Theodore von Kármán (1881–1963) a été l'un des plus grands mécaniciens des fluides du xx<sup>e</sup> siècle. Né en Hongrie (alors province de l'Empire Austro-Hongrois), il émigra par la suite en Allemagne, puis aux États-Unis. Ses travaux portèrent essentiellement sur la couche limite logarithmique, les instabilités derrière les obstacles (les fameuses allées de von Kármán), les écoulements supersoniques, etc. Comme Thomson et Reynolds avant lui, il a été aussi un exemple de mécanicien, avec des intérêts tout à la fois sur les points fondamentaux de la mécanique et les applications (principalement militaires).

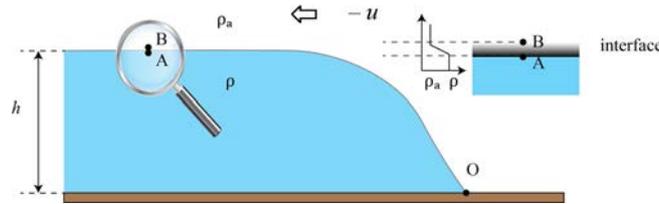


Figure 4.5 : propagation d'un front à vitesse constante.

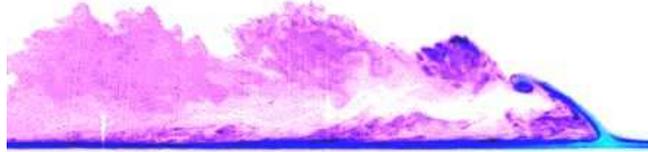


Figure 4.6 : courant de densité en laboratoire. Le courant intrusif a été produit en employant un fluide lourd (eau salée et colorée) dans un fluide plus léger (eau).

On considère l'intrusion d'un fluide lourd de masse volumique  $\varrho$  dans un fluide ambiant, plus léger ( $\varrho_a < \varrho$ ), au repos, et faiblement visqueux de telle sorte qu'on néglige la dissipation d'énergie. On souhaite calculer la vitesse du front ( $u$ ) en fonction de sa hauteur et des masses volumiques.

Pour cela, von Kármán admet que la vitesse du front est constante. Il se place dans le repère attaché au front. Dans ce repère, le front est fixe et c'est le fluide ambiant qui en mouvement avec une vitesse  $-u$ . Comme l'écoulement est permanent, la ligne de la surface libre est également une ligne de courant et on peut appliquer le théorème de Bernoulli entre un point B situé à l'interface entre fluides lourd et léger (B est dans le fluide ambiant) et le point O situé au front (point fixe situé à la fois dans le fluide lourd et dans le fluide ambiant)

$$P_B + \frac{1}{2}\varrho_a(-u)^2 + \varrho_a gh = P_0 + 0 + 0.$$

Il considère aussi un point A situé juste sous l'interface (A est dans le fluide lourd). Puisque dans le repère attaché au front, le fluide lourd est au repos, la loi de l'hydrostatique s'applique et on a notamment  $P_0 = P_A + \varrho gh$ . Si on prend maintenant A et B infiniment voisins, la différence de pression (en l'absence d'effet de tension de surface) doit être nulle :  $P_A = P_B$ , d'où

$$u = \sqrt{2 \frac{\varrho - \varrho_a}{\varrho_a} gh},$$

ou encore

$$\frac{u}{\sqrt{g'h}} = \sqrt{2},$$

avec  $g' = (\varrho - \varrho_a)/\varrho_a$  la gravité réduite. La dernière équation montre que le nombre de Froude  $u/\sqrt{g'h}$  est constant au front. Expérimentalement, cette formule donne de bons résultats, mais il faut souvent ajouter un facteur correctif car on travaille avec des fluides ambiants qui ne sont pas infiniment épais. La démonstration apportée par von Kármán est considérée de nos jours comme fautive. Notamment, Benjamin (1968) a montré qu'on ne pouvait pas utiliser l'équation de Bernoulli le long d'une interface et que la résolution correcte du problème nécessitait d'employer des volumes de contrôle et de faire des bilans de quantité de mouvement sur ces volumes. Toutefois, le résultat final reste inchangé (mais pourrait-il en être autrement d'un point de vue dimensionnel?).

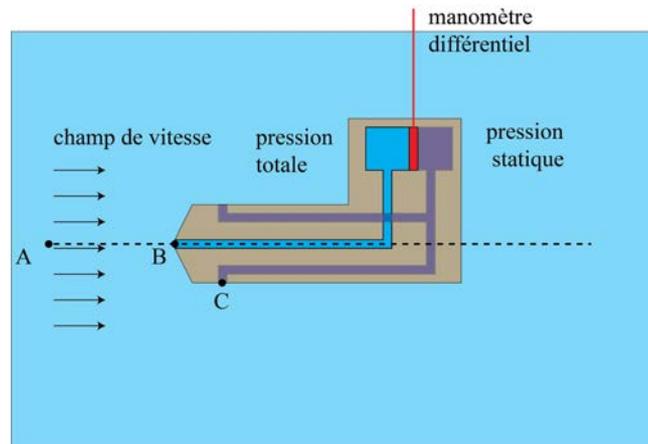


Figure 4.7 : tube de Pitot.

### 4.2.3 Tube de Pitot

Le tube Pitot<sup>9</sup> sert à mesurer la vitesse locale d'un fluide en le reliant à la différence de pression d'un manomètre à liquide.

L'idée est la suivante: on considère un écoulement et on plonge un tube de Pitot de telle sorte qu'il soit parallèle aux lignes de courant. À son embouchure, le fluide peut pénétrer. Une fois qu'il a occupé tout l'espace disponible au sein du tube, il n'y a plus de fluide qui entre et la vitesse au point B, embouchure du tube, est donc nulle. On l'appelle un *point d'arrêt* de la ligne de courant.

Considérons une ligne de courant A–B. En A, on a  $p = p_A$  (par exemple une pression hydrostatique),  $v = v_A = v_\infty$ , et  $z = z_A$ . En B, on a  $p = p_B$ ,  $u_B = 0$ , et  $z = z_A = z_B$ . Le théorème de Bernoulli donne donc

$$\begin{aligned} p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A &= p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B \\ &= p_B + \rho g z_A, \end{aligned}$$

d'où

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_B - p_A)}.$$

Comme la différence de pression  $p_B - p_A$  peut être déterminée si on utilise un manomètre (tube en U), on peut déduire la vitesse  $v_\infty$ .

9. Henri Pitot (1695–1771) était un hydraulicien français. Il fut nommé surintendant du Canal du Midi et construisit un aqueduc pour l'alimentation en eau de Montpellier. Afin de pouvoir mesurer les vitesses de l'eau dans les rivières et canaux, il inventa un appareil qui porte aujourd'hui son nom.

# Écoulement à surface libre

## 5.1 Introduction

### 5.1.1 Généralités

L'hydraulique à surface libre se distingue de l'hydraulique en charge par l'existence d'une *surface libre*, c'est-à-dire d'une surface où l'écoulement est en contact direct avec l'atmosphère<sup>1</sup> : le gradient de pression ne peut plus être le moteur de l'écoulement, c'est la gravité qui devient l'agent moteur. Le domaine d'application est large :

- cours d'eau naturels : rivières, fleuves, etc. ;
- canaux de navigation, d'irrigation, etc. ;
- systèmes d'évacuation : réseaux d'assainissement pluvial ;
- aménagements : retenues d'eau, usines de production d'électricité, ports, etc.

Une caractéristique de la plupart de ces écoulements est la suivante : la hauteur d'écoulement ainsi que la largeur sont généralement petites par rapport à la longueur d'écoulement. On parle d'écoulement *filaire*.

### 5.1.2 Un peu de vocabulaire et des notations

- *bief* : tronçon homogène en termes de pente moyenne et de section d'écoulement (on emploie parfois aussi le mot *bisse*, notamment dans le Valais, mais le contexte est un peu différent) ;
- type de cours d'eau : il existe plusieurs classifications. Selon [Bernard \(1927\)](#), une distinction des cours d'eau peut se faire en fonction de la pente  $i$  :
  - $i < 3$  % on parle de *rivière*,
  - $3 < i < 6$  %, on parle de *rivière torrentielle*,
  - $i > 6$  %, on parle de *torrent* ;
- *périmètre mouillé*  $\chi$  : longueur de la surface d'écoulement en contact avec le lit (fond + berges), c'est-à-dire le périmètre de la section d'écoulement auquel on retranche la largeur au miroir  $B$ .
- *section d'écoulement* (ou section mouillée)  $S$  : partie de la section du canal limitée par les parois et la surface libre ;
- *hauteur d'écoulement* : hauteur moyenne d'eau, par définition c'est

$$h = S/B ;$$

- *hauteur normale*  $h_n$  : c'est la hauteur d'un écoulement permanent uniforme dans un bief. La hauteur normale est fonction du débit  $Q$ , de la rugosité  $K$ , et de la pente moyenne  $i$  ;
- *tirant d'eau* : profondeur maximale d'une section d'écoulement ;
- *largeur au miroir*  $B$  : largeur de la section d'écoulement au niveau de la surface libre ;

---

1. La pression du fluide à cette interface est égale à celle de l'atmosphère.

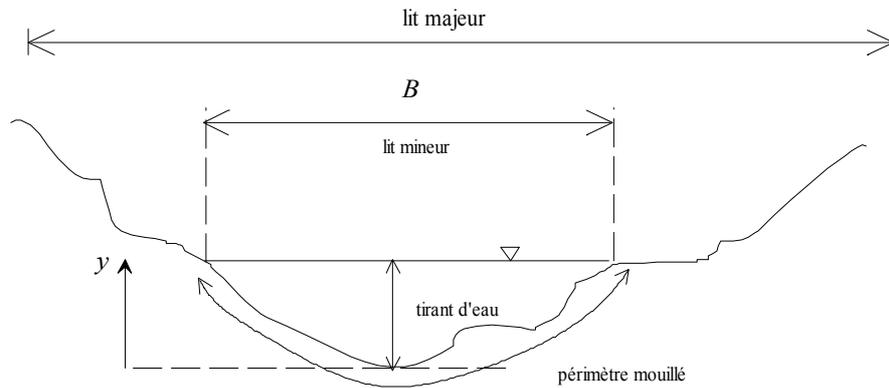


Figure 5.1 : coupe d'une rivière.

- *rayon hydraulique* : c'est une longueur caractéristique définie par

$$R_H = S/\chi.$$

Pour un écoulement dans un canal rectangulaire infiniment large ( $B \gg h$ ), le rayon hydraulique correspond à la hauteur d'écoulement  $h$  ;

- régime *uniforme* : régime d'écoulement le long d'un bief où les caractéristiques d'écoulement (hauteur et vitesse) sont constantes quelle que soit la position le long de la direction d'écoulement. On a ainsi  $\partial h/\partial x = 0$  ;
- régime *permanent* : régime où l'écoulement ne dépend pas du temps. On a ainsi  $\partial h/\partial t = 0$  ;
- régime *graduellement varié* : régime d'écoulement où la variation de hauteur dans la direction d'écoulement est très faible, typiquement si  $L$  désigne une longueur d'écoulement et  $\Delta h$  une variation de hauteur, on a  $\Delta h/L \ll 1$ . **Les équations de Saint-Venant<sup>2</sup> ou le calcul différentiel des courbes de remous ne sont valables que pour ce régime ;**
- *courbe de remous* : la courbe de remous est la courbe décrivant la variation de la hauteur d'eau dans un bief pour un écoulement graduellement varié. L'équation de cette courbe est appelée équation de la courbe de remous [voir équation (5.3)] ;
- régime *rapidement varié* : régime d'écoulement où la variation de hauteur dans la direction d'écoulement est très importante, typiquement si  $L$  désigne une longueur d'écoulement et  $\Delta h$  une variation de hauteur, on a  $\Delta h/L = O(1)$ . À l'approche d'une singularité ou bien en cas de ressaut hydraulique, l'écoulement peut entrer dans un régime rapidement varié ;
- *ressaut hydraulique* : variation brutale de hauteur d'eau (passage d'un régime torrentiel à un régime fluvial) ;
- *pente moyenne* : pente moyenne longitudinale  $i = \tan \theta$  d'un bief exprimé en % ou en ‰ ;
- régime *torrentiel* : régime supercritique ( $Fr > 1$ ), forte vitesse, faible hauteur ;
- régime *fluvial* : régime subcritique ( $Fr < 1$ ), faible vitesse, hauteur élevée ;
- *débit*  $Q$  : flux d'eau par unité de temps à travers la surface d'écoulement ;
- *vitesse moyenne*  $\bar{u}$  : vitesse

$$\bar{u} = \frac{Q}{S};$$

- coefficient de *rugosité* : coefficient traduisant la rugosité des parois (coefficient de Chézy noté  $C$  ou de Manning-Strickler noté  $K$ ) ;
- *lit mineur* : lit occupé ordinairement par un cours d'eau par opposition au *lit majeur* qui correspond à l'emprise maximale historique d'un cours d'eau ou à la plaine inondable. On parle aussi de *niveau des plus hautes eaux* (PHE) pour désigner la cote maximale atteinte par la surface libre d'un cours d'eau ;

2. Voir cours de master « ondes de crue et rupture de barrage ».

- la berge ou rive est le talus qui sépare le lit mineur du lit majeur. Lorsque la berge est couverte par la végétation, on parle de *ripisylve* ;
- l'étiage correspond aux plus basses eaux d'un cours d'eau (généralement durant l'été). Le débit d'étiage est donc le débit minimal d'un cours d'eau. Le débit de plein bord (*bankfull discharge* en anglais) est le débit atteint lorsque la rivière sort de son lit mineur. Durant une crue, on parle de débit de pointe (*peak discharge* en anglais) pour désigner le débit maximal atteint. Pour les crues, on peut relier le débit de pointe à la *période de retour*  $T^3$ . Le *débit dominant* est le débit de la crue ordinaire qui permet de façonner un cours d'eau. Pour les rivières à sable, le débit dominant correspond au débit de pointe d'une crue de période 1–2 ans alors que pour un lit à gravier, il correspond à crue de période de retour de quelques dizaines d'années.

---

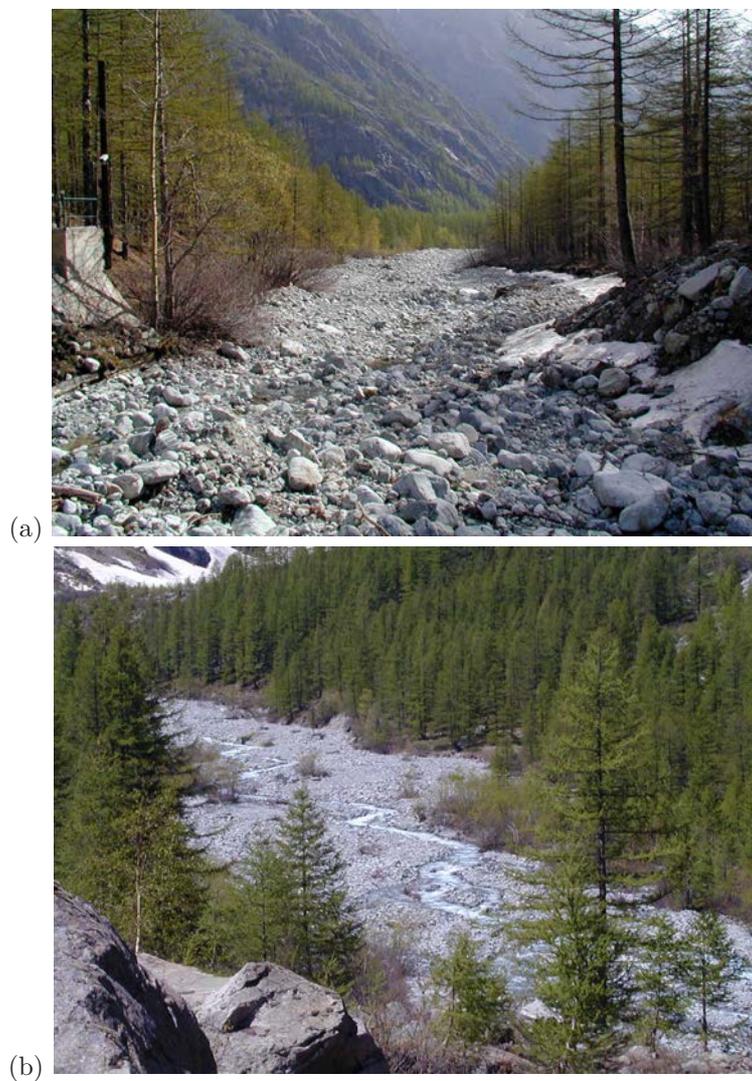
3. La période de retour  $T$  est définie par rapport à la probabilité d'observer la crue (ou une crue supérieure)  $P$ :  $T = 1/P$ ; c'est aussi l'intervalle de temps moyen entre deux crues ayant dépassant un certain seuil.



**Figure 5.2** : dans les rivières de plaine, le lit naturel est rarement droit, mais au contraire développe de nombreux méandres [DR].



**Figure 5.3 :** beaucoup de cours d'eau de plaine ont été aménagés pour limiter leur expansion, lutter contre les crues, et assurer un certain débit dans la rivière. Ici la rivière Thur (Suisse) a été rectifiée au début du XX<sup>e</sup> siècle [Martin Jaeggi].



**Figure 5.4 :** dans les rivières torrentielles (ici torrent de Celse Nière, Pelvoux, Hautes-Alpes, France), le lit est composé de matériaux grossiers [Christophe Ancey]. (a) Vers le camping d'Ailefroide. (b) Vers le cimetière des Vaudois.



**Figure 5.5** : dans les torrents, il y a peu d'eau, mais la vitesse est élevée [Anthony Cornelius, Christophe Ancy].

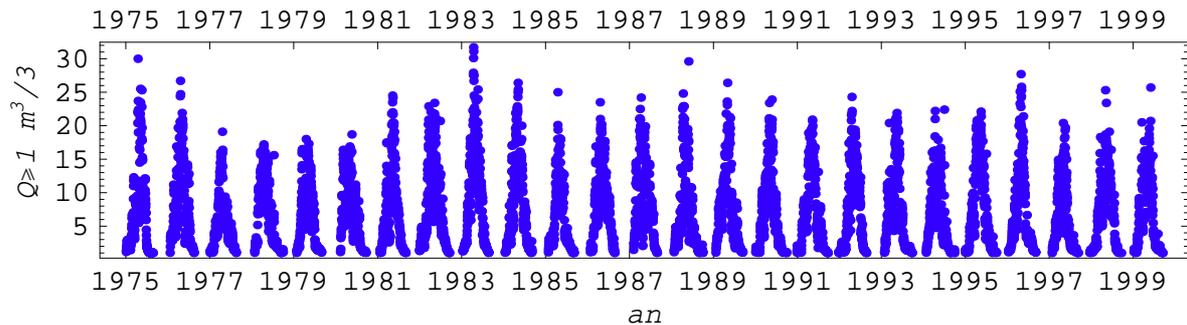
**Tableau 5.1 :** terminologie française, allemande, anglaise et définitions.

<i>français</i>	<i>allemand</i>	<i>anglais</i>	<i>italien</i>	<i>définition, remarques (notation)</i>
bief	Gewässerabschnitt	reach	tronco	tronçon homogène d'une rivière
rivière	Fluss, Bach	river	fiume	cours d'eau à faible pente
rivière torrentielle	Gebirgsfluss	torrential river	torrente	cours d'eau de piémont à forte pente
torrent	Wildbach	torrent	torrente	cours d'eau à très forte pente
périmètre mouillé	benetzter Umfang	wetted perimeter	perimetro bagnato	partie mouillée d'une section en travers ( $\chi$ )
lit majeur	Hochwasservorland	flood plain	letto maggiore	zone envahie lors des grosses crues
lit mineur	Niederwassergerinne	low water channel	letto minore	lit habituellement occupé par le cours d'eau lorsque les eaux sont basses
ripisylve	Ufervegetation	riparian vegetation	vegetazione fluviale	végétation sur les berges
géométrie du lit	Gerinnegeometrie	bed geometry	geometria del letto	caractérisation géométrique à l'aide des profils en long et en travers d'un lit
rugosité	Rauigkeit, Rauheit	roughness	scabrezza	état de surface du lit
section d'écoulement	Abflussquerschnitt	flow section	sezione	section transversale d'un cours d'eau ou d'un lit
section mouillée	benetzter Querschnitt	wetted section	sezione idrica	surface de la section d'écoulement ( $S$ )
rayon hydraulique	hydraulischer Radius	hydraulic radius	raggio idraulico	rapport entre la section et le périmètre mouillé ( $R_H = S/\chi$ )
largeur au miroir	Gerinnebreite	flow width	larghezza del pelo libero	largeur transversale du cours d'eau calculée au niveau de la surface libre ( $B$ )
pente du lit	Gerinnegefälle	bed gradient	pendenza del letto	valeur moyenne de la pente d'un bief ( $i = \tan \theta$ )
hauteur d'eau moyenne	mittlere Wassertiefe	mean flow depth	altezza media d'acqua (tirante idrico medio)	hauteur moyenne définie par $h = S/B$
hauteur critique	kritische Tiefe	critical flow depth	altezza critica (tirante critico)	hauteur d'eau correspondant au régime critique ( $h_c$ )
étiage	Niederwasser	low water	profilo estivo	plus basses eaux d'un cours d'eau
niveau des plus hautes eaux	höchster Hochwassertand	maximum flood stage	altezza massimale	plus hautes eaux d'un cours d'eau
crue	Hochwasser	flood	piena	niveau d'eau nettement supérieur à ce qui est ordinairement observé
régime uniforme	gleichförmige Strömung	uniform flow	regime uniforme	hauteur d'eau constante le long du bief
régime (graduellement) varié	ungleichförmige Strömung	(gradually) varied flow	regime gradualmente variato	variation lente du niveau d'eau le long du bief

Tableau 5.1 : terminologie française, allemande, anglaise et définitions.

<i>français</i>	<i>allemand</i>	<i>anglais</i>	<i>italien</i>	<i>définition, remarques (notation)</i>
régime sous-critique (fluvial)	(strömender Strömungszustand) subkritische Strömung	(fluvial) subcritical flow	regime subcritico (fluviale)	régime caractérisée par des vitesses faibles : $Fr < 1$
régime supercritique (torrentiel)	(schießender) superkritische Strömung	(torrential) supercritical flow	regime supercritico (torrentizio)	régime caractérisé par des vitesses fortes : $Fr > 1$
nombre de Froude	Froude-Zahl	Froude number	numero di Froude	nombre sans dimension $Fr = \bar{u}/\sqrt{gh}$
débit	Durchfluss	flow rate, discharge	portata	flux de vitesse à travers la section
vitesse moyenne (débitante)	mittlere Geschwindigkeit	mean flow	velocita media	vitesse moyenne dans la section $\bar{u} = Q/S$
ressaut hydraulique	Wechselsprung	hydraulic jump	salto idraulico	augmentation brutale du niveau liée au passage d'un écoulement super- à sub-critique

Pour un cours d'eau naturel, la géométrie du lit n'est pas quelconque, mais obéit à certaines règles. Un cours d'eau doit laisser transiter un débit, qui varie en fonction du temps. En général, il existe des cycles annuels, mais au gré des précipitations et de la fonte des neiges, le débit peut évoluer d'une année sur l'autre d'une façon extrêmement variable (voir Fig. 5.6). Les débits ordinairement rencontrés façonnent le cours d'eau : la géométrie du lit (section en travers, granulométrie, etc.) est calibrée par le cours d'eau de telle sorte qu'elle soit compatible avec le débit moyen transitant par ce cours d'eau. Pour cette raison, on trouve qu'il existe des corrélations fortes entre débit et dimensions de la section du cours d'eau ; comme le montre la figure 5.7, la largeur au miroir varie à peu près linéairement avec le débit de plein bord. On parle de *débit dominant* pour désigner un débit (suffisamment élevé) qui est capable de modifier la géométrie du lit. En fonction du terrain (pente, nature géologique du terrain, etc.), le cours d'eau a plusieurs possibilités pour optimiser le transit d'eau en ajustant la largeur, la profondeur, la sinuosité, etc.



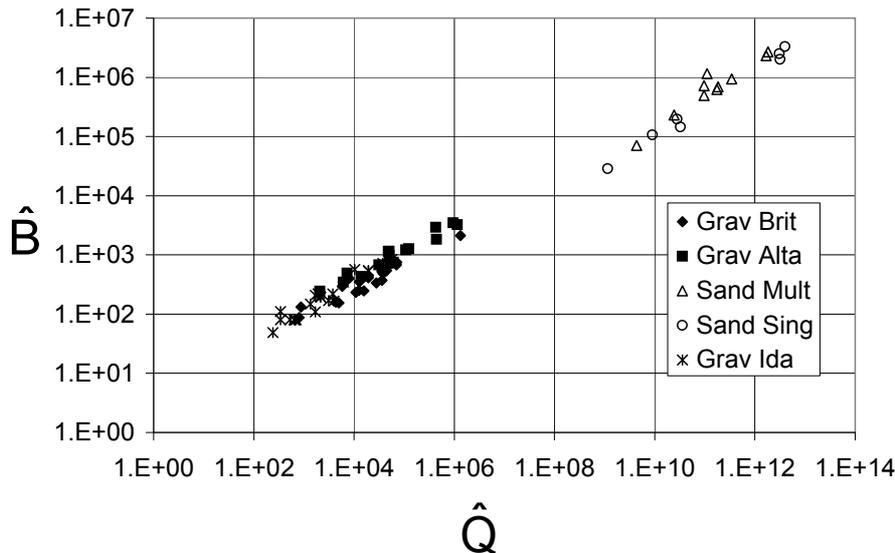
**Figure 5.6** : variation du débit de pointe journalier sur la rivière Lonza (Valais) sur la période 1974–1999. Chaque point représente le débit maximal journalier.

Une difficulté supplémentaire dans l'étude de la stabilité d'un lit sur le long terme est qu'outre le débit liquide à faire transiter, il y a également un transport de sédiment. Les sédiments sont issus des pentes en montagne ; ils arrivent dans le cours d'eau sous forme de blocs grossiers et d'éléments plus ou moins fins. Ces éléments sont transportés et subissent une dégradation progressive et un tri granulométrique d'autant plus marqué que la pente du lit devient faible ; pour ces raisons, on observe que le diamètre moyen des grains du lit diminue régulièrement entre la source et le débouché du cours d'eau dans la mer ou l'océan.

Une *rivière alluviale* est un cours d'eau, dont le lit est creusé dans des dépôts de sédiments qui ont été transportés et déposés antérieurement par la rivière<sup>4</sup>. La section du lit est donc le fruit d'un ajustement entre le transport de sédiment et le débit. Pour un même cours d'eau, selon la section considérée, il existe en effet des interrelations étroites entre capacité de transport solide, débit liquide, et caractéristiques géométriques. Comme le montre la figure 5.7, on trouve des corrélations entre paramètres d'écoulements et les variables caractérisant la géométrie du lit. Ces interrelations sont généralement stables et laissent penser qu'il existe un état de pseudo-équilibre du cours d'eau où les variations locales et temporelles des débits solide et liquide sont contrebalancées sans problème particulier par différents mécanismes. On parle souvent d'*équilibre dynamique* du lit pour désigner cet ajustement continu du cours d'eau autour d'un état d'équilibre. Il existe cependant des circonstances pendant lesquelles cet équilibre peut être compromis : typiquement lors d'une crue de période de retour élevée (de quelques années à centaines d'années) ou bien à cause de l'action de l'homme (construction d'un barrage, prise d'eau, etc.), l'équilibre d'un cours peut être rompu, causant des désordres graves, brutaux, et rapides. Selon un concept développé par Lane au cours des années 1950, l'interrelation entre charges solide et hydraulique peut se résumer à travers une relation  $Q \tan \theta \propto d_{50} q_s$ , où  $Q$  est le débit liquide,  $\tan \theta$  la pente,  $d_{50}$  le diamètre médian des particules, et  $q_s$  le débit solide (Church, 2006).

Compte tenu de la variation de la pente du cours d'eau et de la taille des sédiments, la géométrie du cours d'eau varie de façon très significative entre la source et le débouché (voir figure 5.8). Dans la

4. Certains cours d'eau comme les torrents de montagne dans des gorges ou coulant sur des dépôts morainiques ne font pas partie des écoulements alluviaux.



**Figure 5.7** : relation entre largeur miroir et débit de plein bord pour des rivières de la région Alberta (Canada). D'après des données de données collectées par Gary Parker. La largeur au miroir a été écrite sous forme adimensionnelle :  $\hat{B} = B/d_{50}$  et  $\hat{Q} = Q/(d_{50}^{5/2} \sqrt{g})$ , avec  $d_{50}$  le diamètre médian des grains composant le lit.

partie amont, où le sédiment est fourni à la rivière, la pente est généralement forte et le lit est droit (quand il est vu en plan) ; le lit peut être incisé dans un matériau différent des sédiments qu'il transporte ou bien prendre place dans ses dépôts alluvionnaires. Au contraire, dans les zones de plaine, le cours d'eau coule exclusivement sur son propre alluvion généralement composé de matériaux fins (limons, sables, matériaux organiques). La sinuosité du lit croît le plus souvent de façon inverse à la pente du lit ; inversement, plus la pente est faible, plus le cours d'eau a tendance une section d'écoulement unique et bien calibrée (section homogène). La figure 5.8 montre de façon plus précise la forme prise par un cours d'eau et le rôle des dépôts de sédiments.

Le profil longitudinal d'une rivière montre également une très grande variabilité. En général, même à faible débit liquide (et transport solide), un lit initialement plan ne le reste jamais bien longtemps. Comme le schématise la figure 5.9, si l'on part d'un lit plan (régime hydraulique dit inférieur, « lower regime » en anglais) et que le débit liquide est faible, mais suffisant à transporter un peu de sédiment, on observe la formation d'ondulations (« ripples » en anglais), qui croissent, migrent, coalescent avec d'autres structures. Finalement, leur stade mature est une structure morphologique appelée *dune* quand celle-ci se déplace dans le sens du courant et *anti-dune* quand elle remonte le courant.

La figure 5.10 montre comment évolue le fond quand on augmente le nombre de Froude. Typiquement partant d'un état où le lit est plan, de petites ondulations apparaissent rapidement (A), puis si le courant augmente, des structures telles que des dunes se forment (B et C). Au cours d'une crue, ces structures peuvent être détruites, le lit redevenant plan, mais l'écoulement d'eau est fortement chargé en sédiment (D et E). Si le débit augmente encore, le lit développe de nouveau des structures, qui peuvent migrer à contre courant (F et G). Pour les rivières torrentielles caractérisées par une valeur élevée du nombre de Froude, le lit présente souvent une alternance de *seuils* et de *mouilles* (pools and steps, voir H). La figure 5.11 présente une classification des structures morphologiques du lit en fonction des nombres de Froude et de Reynolds. On voit ainsi que la limite entre régimes d'écoulement inférieur et supérieur varie fortement entre le domaine des rivières (faible nombre de Reynolds particulière car le lit est composé de sédiment fin) et celui des rivières torrentielles (valeur élevée de Re car le diamètre  $d_{50}$  des grains du lit est grand).

Ces structures morphologiques évoluent en permanence. Contrairement à ce qui en a été souvent dit dans la littérature, elles n'adoptent pas nécessairement une taille identique et ne sont pas régulièrement espacées (comme peut le laisser croire la figure 5.9), mais au contraire montrent une très grande variété

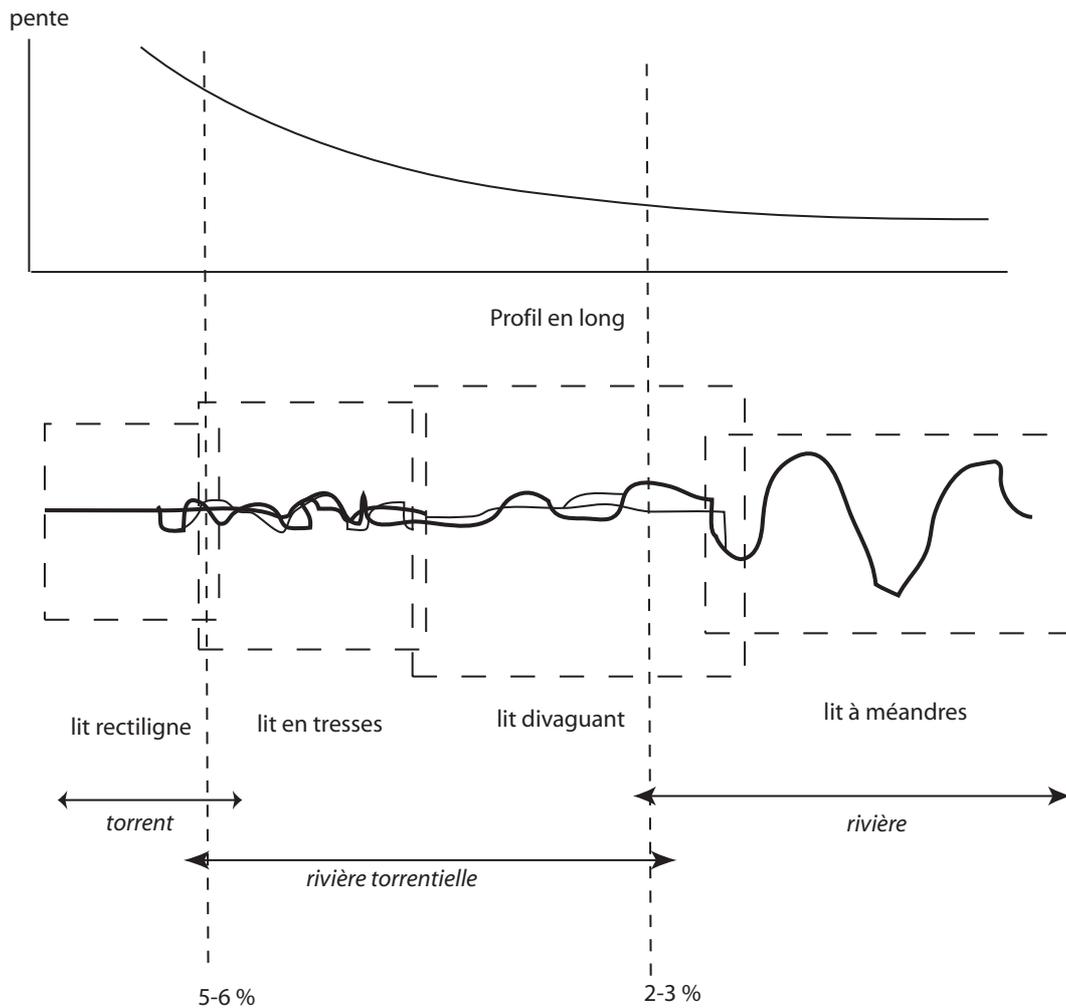


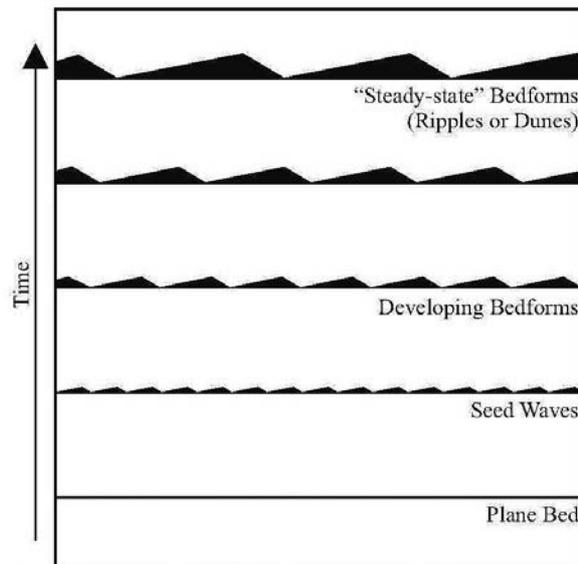
Figure 5.8 : vue en plan du lit d'une rivière.

de formes, de grandeurs, et de disposition. Ce sont des exemples de structures auto-organisées. Pour caractériser la rugosité du lit induite par des structures on peut introduire un paramètre de rugosité, qui n'est rien d'autre que la moyenne quadratique de la cote du lit en un certain nombre de points régulièrement espacés sur une longueur  $L$  :

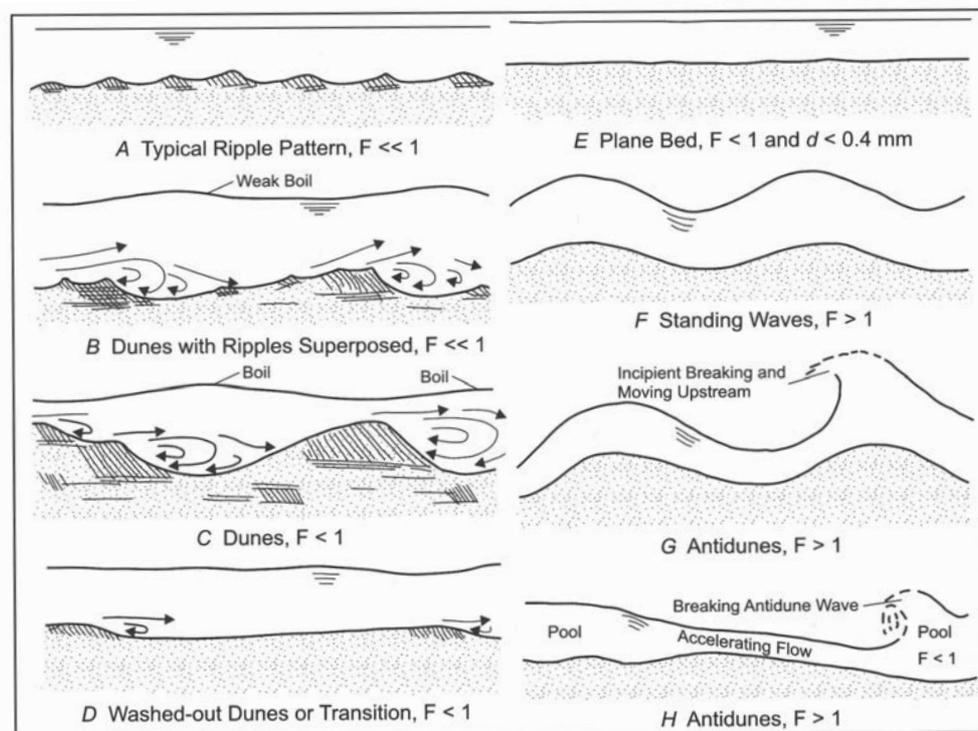
$$w(L,t) = \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (b(x_i,t) - \bar{b})^2 \right)^{1/2}, \quad (5.1)$$

où  $b(x_i,t)$  est la cote du lit mesurée en  $x_i$  au temps  $t$ ,  $k$  est le nombre de points considérés sur la longueur  $L$ , et  $\bar{b}$  est la cote moyenne du lit sur la longueur  $L$ . Comme le montre la figure 5.13, les données de laboratoire ou les mesures *in situ* montrent que la rugosité ainsi définie est une grandeur robuste pour le même cours d'eau et qu'elle varie comme une loi puissance :

$$w \propto L^{0.64}.$$



**Figure 5.9 :** au cours du temps, des structures morphologiques se développent dans les lits de sable (ou de gravier) lorsque le débit d'eau est suffisant (Coleman & Melville, 1996)



**Figure 5.10 :** évolution des structures morphologiques du lit en fonction du régime.

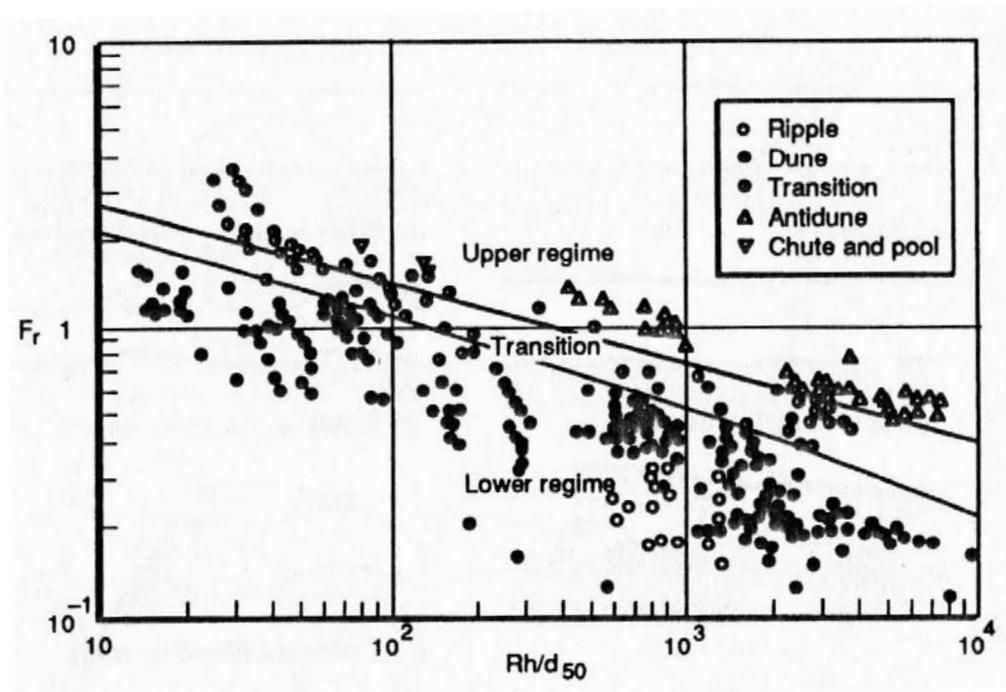


Figure 5.11 : classification des structures en fonction du nombre de Froude et du nombre de Reynolds particulaire. D'après (Julien, 1994).

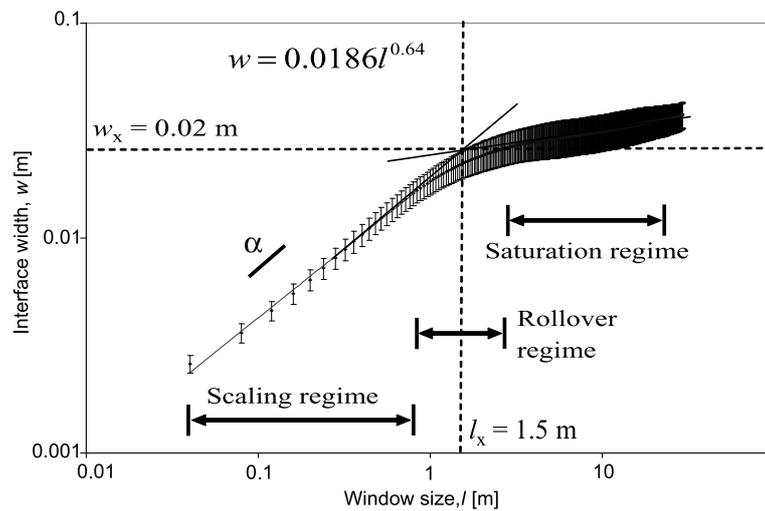
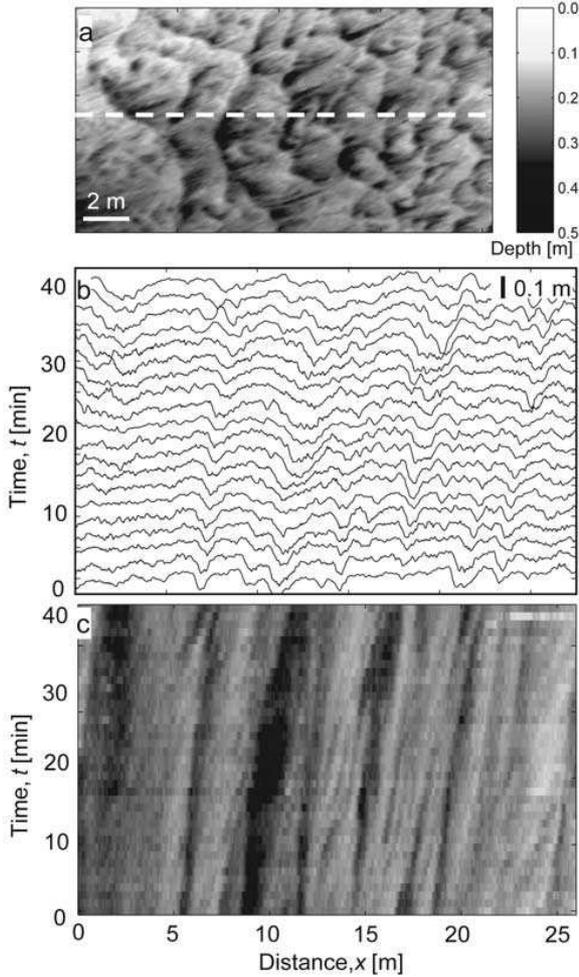


Figure 5.12 : au cours du temps, des structures morphologiques se développent dans les lits de sable (ou de gravier) lorsque le débit d'eau est suffisant (Jerolmack & Mohrig, 2005)



**Figure 5.13** : au cours du temps, des structures morphologiques se développent dans les lits de sable (ou de gravier) lorsque le débit d'eau est suffisant (Jerolmack & Mohrig, 2005)

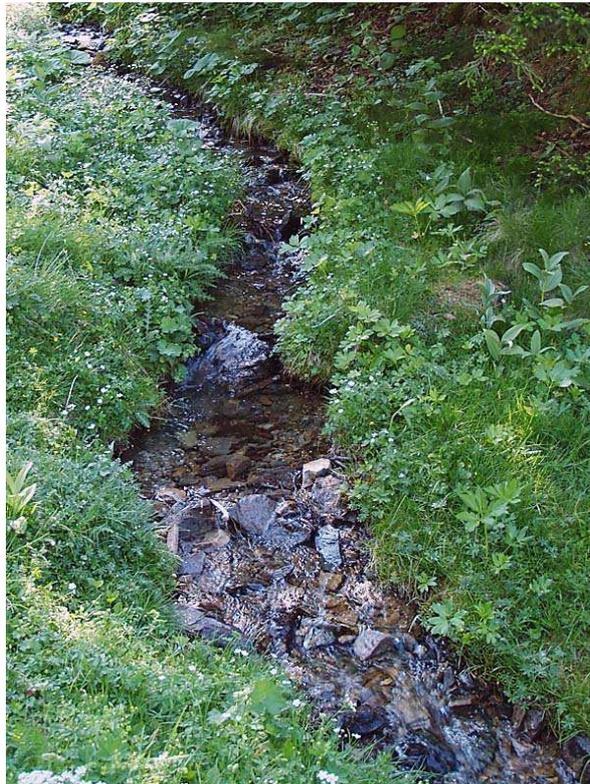


Figure 5.14 : l'alternance de seuils et de moulles existe même pour les tout petits cours d'eau.



Figure 5.15 : turbulence dans un rivière à gravier (Séveraisse, Hautes-Alpes).

## 5.2 Hydraulique des canaux

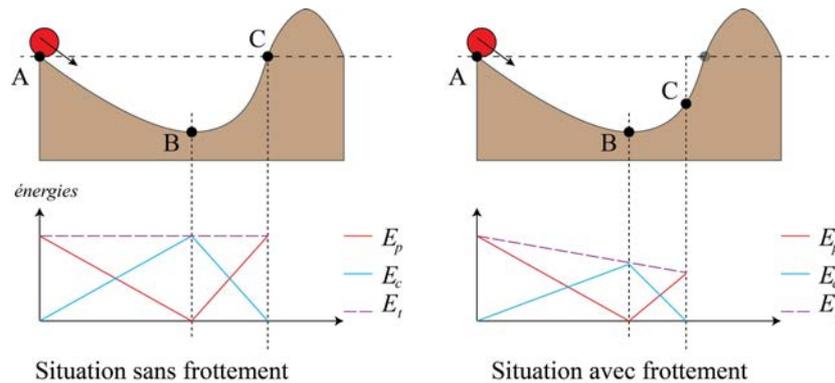
Le théorème de Bernoulli offre une application intéressante pour étudier des écoulements permanents dans des canaux. Rappelons que ce théorème énonce que l'énergie  $\Psi + p + k$  se conserve le long d'une ligne de courant pour un fluide non visqueux (avec  $p$  la pression,  $\Psi$  le potentiel gravitaire, et  $k = \frac{1}{2}\rho\bar{u}^2$  l'énergie cinétique). Pour les fluides visqueux ou turbulents (ce qui est le cas en hydraulique), il faut tenir compte de la dissipation d'énergie, que l'on appelle *perte de charge*. Pour comprendre cette notion de dissipation, on peut faire une analogie utile avec le mouvement d'une bille le long d'un profil en forme de montagnes russes. Si la bille est non frottante (pas de dissipation d'énergie) et qu'on la lâche d'un point A, elle va rejoindre un point C à la même altitude que le point A. Tout le long du trajet, l'énergie totale  $E_t$ , c'est-à-dire la somme de l'énergie cinétique  $E_c$  et de l'énergie potentielle  $E_p$  se conserve : toute augmentation d'énergie cinétique se traduit par une diminution d'énergie potentielle et vice-versa. Dans le cas réel, le mouvement dissipe de l'énergie (sous forme de chaleur) et il s'ensuit que la bille remonte jusqu'à un point C dont l'altitude est inférieure à l'altitude initiale. La différence d'altitude traduit la perte d'énergie (perte de charge) subie par la bille. On a donc écrit

$$\Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E_t,$$

où  $\Delta$  représente la différence d'énergie entre l'instant final (lorsque la bille est en C) et l'instant initial (bille en A). Cette relation trouve son pendant en hydraulique (où l'on convertit les énergies et potentiels en équivalent d'hauteur en eau en divisant par  $g$ ) :

$$\frac{1}{\rho g} \Delta(\Psi + p + k) = \Delta H,$$

avec  $\Delta H$  la perte de charge.



**Figure 5.16 :** mouvement d'une bille sous l'effet de la pesanteur. (a) cas idéal où la bille est non frottante. (b) cas réel, où le mouvement de la bille s'accompagne d'une dissipation d'énergie. La ligne en pointillé représente la variation de l'énergie totale  $E_t$  tandis que la courbe tiretée décrit la variation de l'énergie cinétique  $E_c$  au cours du mouvement de la bille.

On va commencer par définir la notion de charge.

### 5.2.1 Charge totale et charge spécifique

Considérons dans tout ce qui suit un canal ou une rivière de section rectangulaire de largeur  $B$ . Le débit total est noté  $Q$  ; le débit par unité de largeur est donc  $q = Q/B$ . La charge totale hydraulique s'écrit :

$$H = y_\ell + \underbrace{h + \frac{\bar{u}^2}{2g}}_{H_s},$$

avec  $y_\ell$  la cote du fond,  $h$  la hauteur d'eau, et  $\bar{u}$  la vitesse moyenne de l'eau ( $\bar{u} = q/h$ ). La charge totale représente l'énergie totale  $\Psi$  (énergie potentielle + énergie piézométrique + énergie cinétique) traduite

en termes de hauteur (c'est-à-dire en divisant l'énergie par  $\rho g$ ). Comme le montre la figure 5.17, si on place un tube piézométrique (vertical) dans un écoulement permanent à surface libre, on n'observe aucune remontée (hormis capillaire) car la pression est hydrostatique au sein de l'écoulement ; en revanche, si l'on place un tube de Pitot, on observe une remontée de fluide, qui (en moyenne) est  $\bar{u}^2/(2g)$ . La charge spécifique  $H_s$  calculée en termes de hauteur est la somme de la hauteur d'écoulement  $h$  et de la hauteur  $\bar{u}^2/(2g)$ .

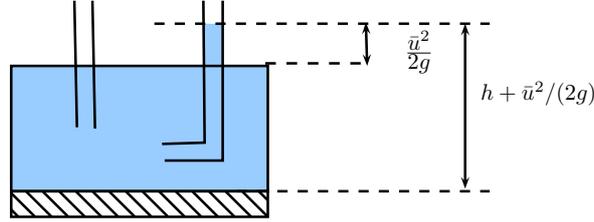


Figure 5.17 : charge hydraulique dans un écoulement à surface libre.

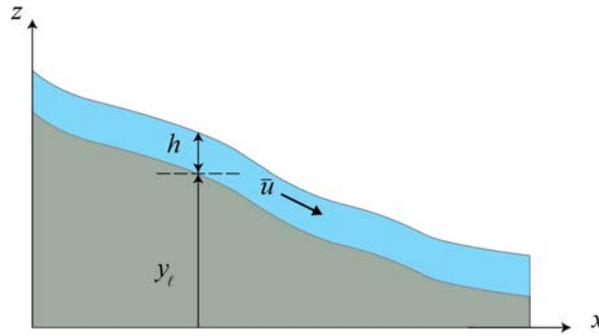


Figure 5.18 : ligne d'eau dans un canal.

Pour simplifier, on a négligé le terme  $\cos \theta$  devant  $h$  dans le terme de pression car le plus souvent on applique les calculs pour des canaux et rivières à faible pente ; il faut penser à réintégrer ce terme pour des calculs à forte pente. La quantité

$$H_s = h + \frac{\bar{u}^2}{2g}$$

s'appelle l'énergie spécifique et représente l'énergie du fluide à une cote donnée (pression + énergie cinétique) ; la charge totale est donc la somme de la charge spécifique  $H_s$  et de l'énergie potentielle  $y_\ell$ . Pour une pente donnée, l'énergie spécifique est une fonction de la hauteur ou bien du débit.

### Débit à charge spécifique constante

Si on écrit la charge spécifique comme une fonction de la hauteur, on a :

$$H_s(h) = h + \frac{\bar{q}^2}{2gh^2},$$

d'où l'on tire que le débit par unité de largeur  $q = \bar{u}h$  vaut

$$q(h) = \sqrt{2gh^2(H_s - h)}.$$

ou sous forme adimensionnelle

$$\boxed{q_* = \frac{q(h)}{\sqrt{gH_s^3}} = \sqrt{2\xi^2(1 - \xi)},} \quad (5.2)$$

avec  $\xi = h/H_s$ . Il s'agit d'une courbe en cloche asymétrique prenant sa valeur maximale en  $\xi = 2/3$  ( $h = 2H_s/3$ ) puisque

$$\frac{dq_*}{d\xi} = \frac{2 - 3\xi}{\sqrt{2 - 2\xi}} = 0 \text{ pour } \xi = \frac{2}{3}.$$

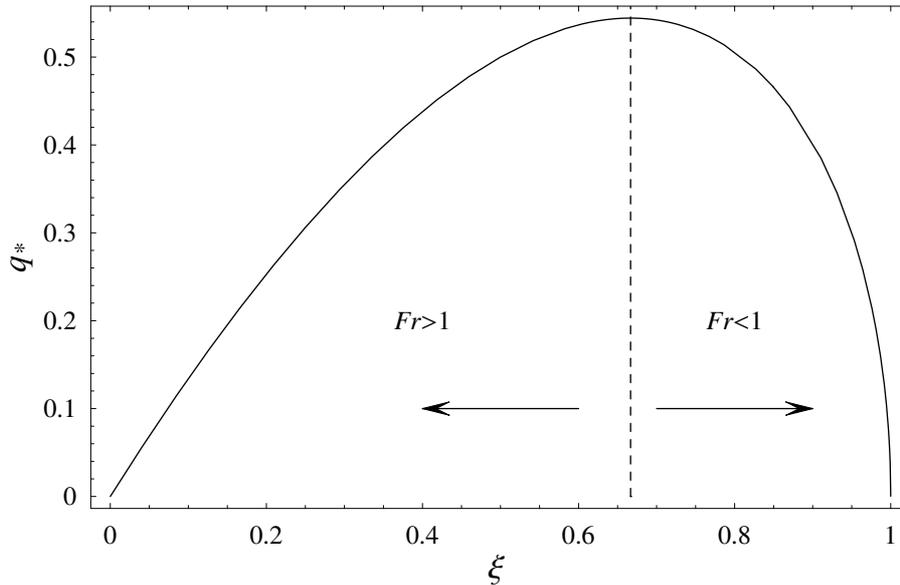


Figure 5.19 : variation de l'énergie spécifique avec la hauteur d'écoulement.

Il s'ensuit que le débit ne peut pas prendre n'importe quelle valeur, mais varie entre 0 et  $q_{max} = \sqrt{gh^3} = \sqrt{8gH_s^3/27}$ . On note que pour ce débit maximal, on a  $Fr = 1$  avec  $Fr = \bar{u}/\sqrt{gh}$ . Dans un cours d'eau, le débit maximal qui peut être atteint pour une charge spécifique donnée dans une section s'appelle le *débit critique* car il est associé à la condition  $Fr = 1$ , qui marque la transition entre deux régimes avec des comportements très distincts : les régimes *supercritique* et *subcritique*. La hauteur associée à ce débit s'appelle la hauteur critique  $h_c$ .

En résumé, il existe deux régimes possibles :

- un régime *supercritique* (régime appelé aussi torrentiel) :  $h < h_c$  ;
- un régime *subcritique* (régime appelé fluvial) :  $h > h_c$ .

### Hauteur à débit constant

Si l'on se place à un débit donné  $0 < q < q_{max}$ , l'énergie spécifique est une fonction de la hauteur :

$$H_s(h) = h + \frac{\bar{q}^2}{2gh^2},$$

que l'on peut écrire également sous forme adimensionnelle en divisant par la *hauteur critique*

$$h_c = \sqrt[3]{q^2/g}$$

(rappelons que c'est la hauteur pour laquelle le nombre de Froude vaut 1)

$$H_* = \frac{H_s}{h_c} = \xi + \frac{1}{2} \frac{1}{\xi^2},$$

avec  $\xi = h/h_c$ . La courbe correspondante est reportée à la figure 5.20 ; le comportement de cette courbe est le suivant :

- quand  $h \rightarrow 0$ ,  $H_s \propto q^2 h^{-2} \rightarrow \infty$  : la charge diverge aux faibles profondeurs. On est dans le régime supercritique ;

- quand  $h \rightarrow \infty$ ,  $H_s \propto h$  : la charge spécifique tend asymptotique vers la droite  $H_s = h$  ; on est dans le régime subcritique.

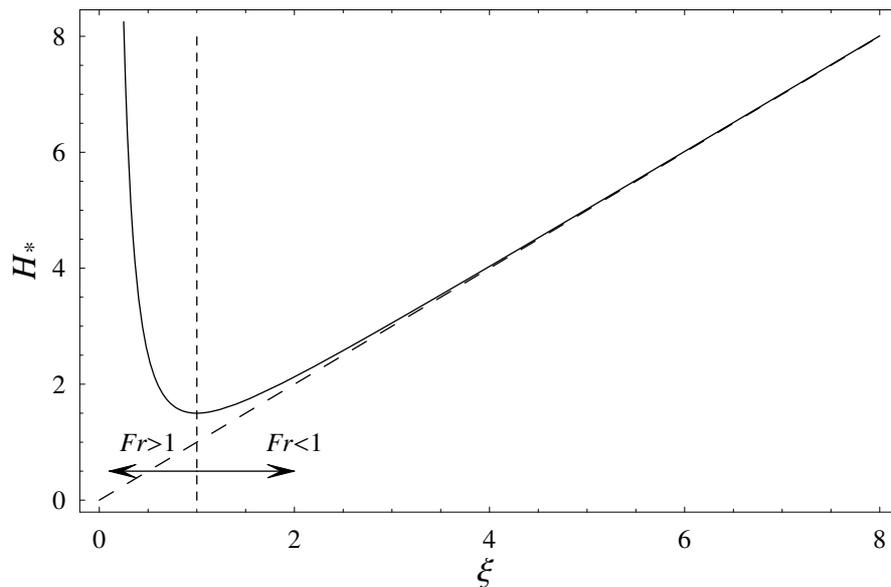


Figure 5.20 : variation de l'énergie spécifique avec la hauteur d'écoulement.

Le minimum de  $H_s$  est atteint pour la *hauteur critique* puisque

$$\frac{dH_*}{d\xi} = 1 - \frac{2}{2\xi^3} = 0 \text{ pour } \xi = 1.$$

Le diagramme  $H_s = H_s(\xi)$  (voir figure 5.20) permet de raisonner qualitativement sur la forme des courbes de remous pour un tronçon de canal dont la pente moyenne est notée  $i = \tan \theta$ . Il faut pour cela bien distinguer le cas supercritique du cas subcritique. Considérons un régime subcritique sur une marche d'escalier de hauteur  $p = z_b - z_a$ .

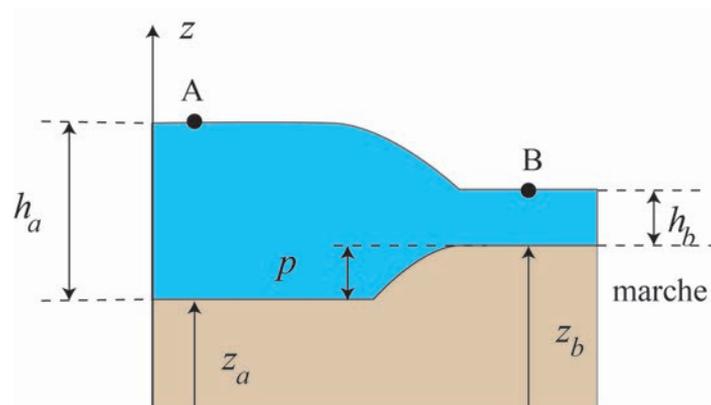


Figure 5.21 : courbe de remous sur une marche d'escalier en régime subcritique.

La charge totale se conservant<sup>5</sup>, on doit avoir une diminution de la charge spécifique d'une valeur égale à  $p$

$$H_A = H_B = z + h + \frac{\bar{u}^2}{2g} \Rightarrow H_s(B) = H_s(A) - p.$$

5. Sur de courtes distances, les pertes de charge sont négligeables.

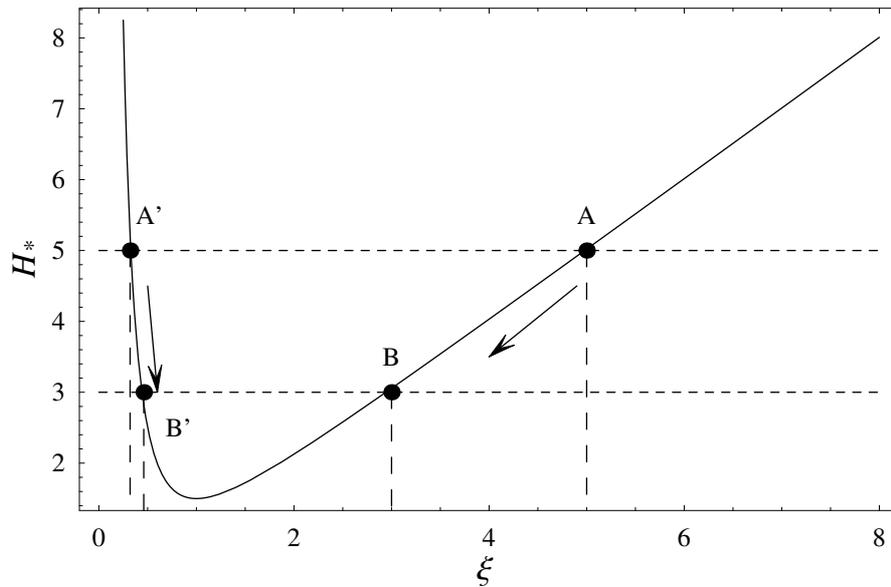


Figure 5.22 : variation de l'énergie spécifique avec la hauteur d'écoulement.

Sur la figure 5.22, on a représenté les états ( $\xi = h/h_c$ ,  $H_*$ ) correspondants aux points A et B. Le point B est obtenu en opérant une translation verticale  $-p/h_c$ . On note que la hauteur  $h_b$  en B est nécessairement plus faible qu'en A. On peut reproduire le raisonnement dans le cas d'un régime supercritique et on trouve un résultat opposé : au passage d'une marche ascendante, la courbe de remous est croissante (augmentation de la hauteur entre les points A' et B' sur la figure 5.22).

### 5.2.2 Courbes de remous obtenues par l'équation de Bernoulli

L'équation de Bernoulli permet également de trouver la variation de la cote de la surface libre pour une régiment graduellement varié permanent. Cette équation s'appelle *équation de remous*. En différentiant la charge totale  $H$  par rapport à  $x$  et en introduisant la pente de frottement :  $j_f = -dH/dx$ , on a :

$$-j_f = -i + \frac{dh}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{q^2}{2gh^2},$$

soit encore :

$$\boxed{\frac{dh}{dx} = \frac{j_f - i}{Fr^2 - 1}} \quad (5.3)$$

La perte de charge  $j_f$  représente la dissipation d'énergie par la turbulence. On verra plus loin dans ce chapitre (voir § 5.3) qu'il existe plusieurs lois empiriques pour estimer  $j_f$  :

– loi de Chézy<sup>6</sup> :

$$j_f = \frac{\bar{u}^2}{C^2 h},$$

avec  $C$  le coefficient de Chézy. Le plus souvent, on a  $C$  dans la fourchette  $30 - 90 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$  ;

6. Antoine de Chézy (1718–1798) était un ingénieur civil français. On lui doit la conception du canal de l'Yvette, qui alimentait Paris en eau potable. C'est à cette occasion que fut proposée la première formule connue reliant la pente d'un canal, la géométrie de la section en travers, et le débit. Il introduit également la notion de rayon hydraulique.

– loi de Manning<sup>7</sup>-Strickler<sup>8</sup> :

$$j_f = \frac{\bar{u}^2}{K^2 h^{4/3}},$$

avec  $K$  le coefficient de Manning-Strickler. En pratique,  $K$  varie le plus souvent dans la gamme  $10 - 100 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$ . Il existe aussi des formules qui lient la valeur de  $K$  au diamètre des grains composant le lit. Par exemple, la formule de Jäggi donne  $K = 23,2/d_{90}^{1/6}$  avec  $d_{90}$  le diamètre tel que 90 % des grains ont un diamètre inférieur.

On se référera au § 5.3.2 pour plus de détails.

---

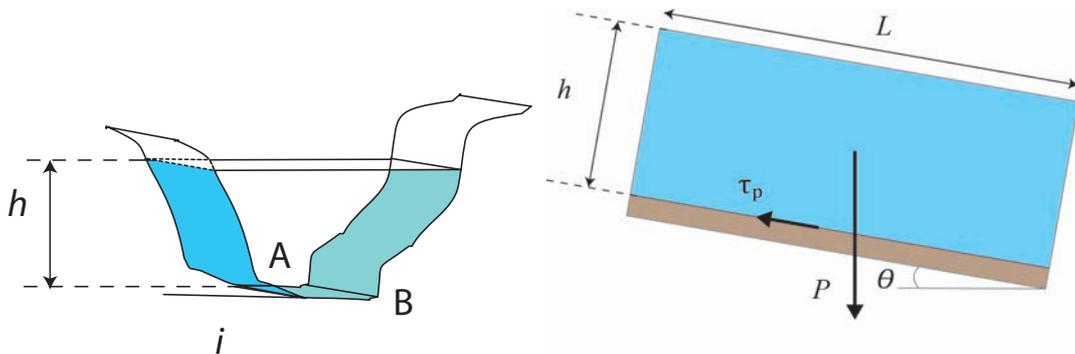
7. Robert Manning (1816–1897) était un ingénieur irlandais, travaillant tout d’abord dans l’administration irlandaise (drainage) avant de fonder sa propre société (travaux portuaires). Il est surtout connu pour la formule qu’il proposa en 1895 et qui synthétisait les données obtenues précédemment par le français Henry Bazin.

8. Albert Strickler (1887–1963) était un hydraulicien suisse. La première partie de sa carrière fut consacrée au développement de micro-centrales électriques ; il dirigea notamment la Société suisse de transmission électrique jusqu’à sa dissolution en 1939. Après 1939, il travailla comme consultant indépendant, principalement en Suisse alémanique. Le nom de Strickler est surtout connu grâce à l’important travail expérimental, qui permit d’établir la formule qui porte son nom et qui reprend les lois précédemment développées par Philippe Gauckler et Robert Manning.

## 5.3 Régime permanent uniforme

### 5.3.1 Relation d'équilibre pour un régime permanent uniforme

Considérons un bief uniforme (section en travers uniforme, rugosité uniforme) de pente  $i = \tan \theta > 0$  et un débit constant. Dans ces conditions, on peut observer un régime permanent uniforme où il y a un équilibre parfait entre frottement aux parois et force motrice (gravité). La hauteur est appelée *hauteur normale*. Considérons une tranche de fluide le long du lit (sur un petit morceau de bief AB) et écrivons que toute la force de pesanteur du volume de fluide soit être entièrement reprise par le frottement aux parois (voir figure 5.23).



**Figure 5.23** : équilibre d'une tranche de fluide. La hauteur  $h$  est ici le tirant d'eau puisqu'elle correspond à la hauteur maximale d'eau dans le cours d'eau.

Pour un canal infiniment large, la contrainte à la paroi s'obtient à partir des équations de la conservation (locale) de la quantité de mouvement en régime permanent uniforme. On peut aussi l'obtenir en écrivant que le frottement au fond soit reprendre exactement le poids de la colonne d'eau au-dessus pour qu'il y ait équilibre, soit :

$$\tau_p = \rho g h \sin \theta,$$

De façon plus générale, pour un canal de section quelconque, le frottement le long du périmètre mouillé doit compenser la composante motrice du poids, soit

$$\chi \tau_p = S \rho g \sin \theta,$$

avec  $\chi$  le périmètre mouillé, ce qui donne :

$$\boxed{\tau_p = \rho g \sin \theta R_H \approx \rho g i R_H}, \quad (5.4)$$

(canal de section quelconque). Pour des pentes faibles, on a  $\sin \theta \approx \tan \theta = i$ .

#### Relation avec le théorème de Bernoulli :

Le théorème de Bernoulli s'écrit sur une petite tranche du bief de longueur  $\delta L = dx$  (voir figure 5.24)

$$y_\ell(A) + h(A) + \frac{\bar{u}^2(A)}{2g} = y_\ell(B) + h(B) + \frac{\bar{u}^2(B)}{2g} + \Delta H,$$

avec  $y_\ell$  la côte du fond. Comme le régime est supposé permanent et uniforme ( $\bar{u}(A) = \bar{u}(B)$  et  $h(A) = h(B)$ ), on déduit que

$$y_\ell(A) = y_\ell(B) + \Delta H.$$

En introduit la pente  $y_\ell(A) - y_\ell(B) = i dx$  et la perte de charge  $\Delta H \approx dH$ , on tire  $i dx = dH$ . On introduit la pente de la perte de charge appelée *pente de frottement* (voir ci-dessous l'utilisation

du théorème de Bernoulli) :  $j_f = dH/dx$ , avec  $H$  la charge hydraulique. La condition d'écoulement permanent uniforme s'écrit alors :

$$i = j_f.$$

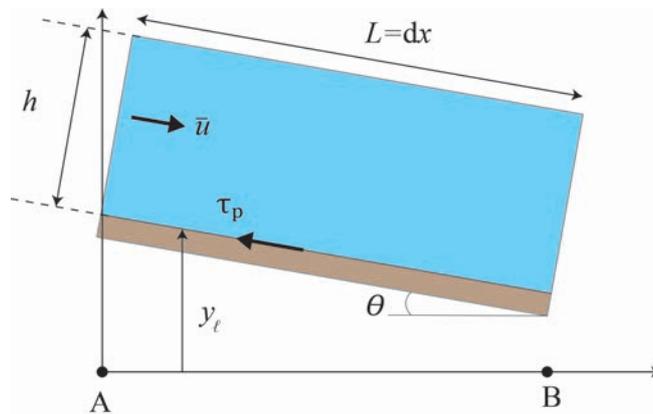


Figure 5.24 : équilibre d'un volume de fluide de longueur  $L = dx$  et de hauteur uniforme  $h$ .

### 5.3.2 Loi de frottement

Plusieurs lois empiriques ont été proposées pour établir la relation entre  $\tau_p$  et les variables d'écoulement  $\bar{u}$  et  $h$ . Ces lois expriment les pertes de charge régulières dues aux frottements le long du lit (dissipation dans la couche limite) et par dissipation d'énergie turbulente.

Il existe également des pertes de charges singulières dues, par exemple, à la sinuosité du lit (provoquant des courants secondaires), à des obstacles (ponts, rochers, épis), à des changements de section. Il est possible de tenir compte de ces dissipations d'énergie localisées, mais c'est un exercice assez fastidieux et complexe qui est rarement entrepris en ingénierie. Assez souvent, ces pertes de charge singulières sont prises en compte en augmentant artificiellement les pertes de charge régulières.

#### Loi de Manning-Strickler

La loi la plus employée car valable pour une large gamme de débits et de rugosité est la loi de Manning-Strickler ; la contrainte pariétale s'écrit

$$\tau_p = \frac{\rho g}{K^2} \frac{\bar{u}^2}{R_H^{1/3}}, \quad (5.5)$$

avec  $K$  le coefficient de Manning-Strickler souvent relié à la rugosité du lit, par exemple la loi de Meyer-Peter<sup>9</sup> & Müller<sup>10</sup> (1948) :

$$K = \frac{26}{d_{90}^{1/6}},$$

9. Eugen Meyer-Peter (1883–1969) commença sa carrière comme ingénieur pour la société Zschokke à Zürich. En 1920, il fut nommé professeur d'hydraulique de l'ETHZ et créa un laboratoire d'hydraulique pour étudier expérimentalement des écoulements graduellement variés, du transport solide, de l'affouillement de fondations, etc. Les travaux les plus connus de Meyer-Peter sont ceux relatifs au transport de sédiment dans les rivières alpines, notamment la formule dite Meyer-Peter-Müller (1948) obtenue par la compilation de données expérimentales obtenues pendant 16 années à l'ETHZ.

10. Robert Müller (1908–1987) était un ingénieur hydraulicien suisse spécialisé dans le transport de sédiment et les problèmes d'érosion. Il fit l'essentiel de sa carrière au VAW de l'ETH, où il travailla notamment avec Hans Einstein et Eugen Meyer-Peter. En 1957, il démissionna et exerça une activité de conseil en hydraulique. Il s'intéressa plus particulièrement à la correction des eaux dans le canton du Jura et à la liaison des lacs de Murten, Bienne, et Neuchâtel.

ou bien sa variante actuelle (formule de Jäggi, 1984) :

$$K = \frac{26}{k_s^{1/6}} = \frac{23,2}{d_{90}^{1/6}},$$

où  $d_{90}$  est diamètre des gros blocs (90 % des blocs ont un diamètre plus petit que  $d_{90}$ ) ; ce diamètre caractéristique sert aussi à définir une échelle caractéristique  $k_s = 2d_{90}$ , qui est utilisée notamment dans la formule de Keulegan. Les valeurs de  $K$  sont tabulées en fonction du type de cours d'eau :

- canal en béton lisse :  $K = 55 - 80 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  ;
- canal en terre :  $K = 40 - 60 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  ;
- rivière à galet, rectiligne, section uniforme :  $K = 30 - 40 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  ;
- rivière avec méandre, sinuosité, etc. :  $K = 20 - 30 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  ;
- rivière végétalisée ou torrent :  $K = 10 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ .

Principalement dans les pays anglo-saxons, on écrit aussi  $K$  en fonction du *coefficient de Manning*  $n$

$$K = \frac{1}{n}.$$

Notons que la formule de Manning-Strickler ne s'applique pas sur des fonds très lisses (béton lissé par exemple). On pose parfois la relation suivante

$$K < 78\bar{u}^{1/6},$$

qui fournit la borne supérieure du coefficient  $K$  en fonction de la vitesse moyenne  $\bar{u}$ . En pratique, cette borne supérieure se situe entre 80 et  $100 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ .

↔ On se reportera à la publication « [Rauheiten in ausgesuchten schweizerischen Fließgewässern](#) » (en allemand) du Bundesamt für Wasser und Geologie (maintenant rattaché à l'Office fédéral de l'énergie) pour une analyse de 12 cours d'eau en Suisse pour différents débits. Cet ouvrage fournit une estimation du paramètre de Manning-Strickler  $K$  en fonction des conditions hydrologiques, morphologiques, granulométriques, et hydrauliques.

On pourra aussi se référer au site [www.camnl.wr.usgs.gov/sws/fieldmethods/Indirects/nvalues/index.htm](http://www.camnl.wr.usgs.gov/sws/fieldmethods/Indirects/nvalues/index.htm) pour un catalogue de valeurs de  $n = 1/K$  pour différentes rivières (américaines) ; le tableau fournit à la fois des photographies de biefs et les caractéristiques des sections mouillées.

### Loi de Darcy-Weisbach

Pour les écoulements en charge, on emploie le plus souvent la formule de Darcy-Weisbach. Cette formule et ses variantes peuvent également s'appliquer à l'hydraulique à surface libre, surtout dans le cas de fond relativement lisse

$$\tau_p = \rho \frac{f}{8} \bar{u}^2, \quad (5.6)$$

avec :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s}{14,8R_H} + \frac{2,51}{\text{Re}\sqrt{f}} \right),$$

(formule de Colebrook-White où l'on remplace le diamètre hydraulique par  $4R_H$ ). Cette équation non linéaire est complexe à résoudre et on lui préfère une forme approchée :

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = 3,38 + 5,75 \log_{10} \frac{R_H}{d_{84}}. \quad (5.7)$$

On prendra garde que dans un certain nombre de formules de résistance (dont la loi de Darcy-Weisbach), le nombre de Reynolds est défini à partir du rayon hydraulique

$$\text{Re} = \frac{4R_H\bar{u}}{\nu},$$

car en hydraulique en charge, le nombre de Reynolds est défini à partir du diamètre hydraulique  $D_H$  et qu'on a  $D_H = 4R_H$ .

### Loi de Chézy

La loi de Chézy est la formule historique, peu utilisée aujourd'hui si ce n'est pour obtenir des ordres de grandeur

$$\tau_p = \frac{\rho g}{C^2} \bar{u}^2, \quad (5.8)$$

avec  $C$  le coefficient de Chézy variant dans la fourchette 30–90  $\text{m}^{1/2}\text{s}^{-1}$  (du plus rugueux au plus lisse).

### Loi de Keulegan

Pendant longtemps, on a utilisé le profil de vitesse logarithmique (en principe valable uniquement près du fond) pour décrire tout le profil de vitesse d'un écoulement hydrauliquement turbulent dans un canal. Fondée sur cette approximation, la loi de Keulegan<sup>11</sup> est une formule bien adaptée pour les écoulements sur des lits à gravier. Elle revient à supposer que la contrainte à la paroi serait similaire à celle donnée par la formule de Chézy, mais avec un coefficient  $C = \sqrt{g}\kappa^{-1} \ln(11h/k_s)$  fonction de la hauteur d'eau et de la rugosité, soit encore :

$$\tau_p = \frac{\kappa^2}{\ln^2(11h/k_s)} \rho \bar{u}^2, \quad (5.9)$$

avec  $\kappa$  la constante de von Kármán et  $k_s$  une taille caractéristique des rugosités du lit ( $k_s \approx 2d_{90}$ ). La formule est valable tant que le fond est suffisamment rugueux, c'est-à-dire  $h/k_s < 10$ . Cette formule peut se généraliser à des géométries plus complexes en substituant la hauteur  $h$  par le rayon hydraulique  $R_H$ .

Notons que de nos jours, on préfère employer une loi puissance de type Manning-Strickler plutôt qu'une loi logarithmique pour relier le coefficient de Chézy aux paramètres hydrauliques. Par exemple, pour des lits à gravier (fond mobile), la formule de Parker donne

$$C = 8,10\sqrt{g} \left( \frac{h}{k_s} \right)^{1/6},$$

qui fournit des résultats bien meilleurs que la formule de Keulegan pour des lits très rugueux ( $h/k_s < 5$ ).

### Synthèse

On en déduit facilement les différentes formules du régime permanent uniforme ; elle sont recensées dans le tableau 5.2. La relation  $q = f(h)$  (ou bien  $\bar{u} = f(h)$ ) est appelée *courbe de tarage* ou bien *loi d'écoulement* ou bien encore *débitance* du canal.

---

11. Garbis Hvannes Keulegan (1890–1989) était un mécanicien américain d'origine arménienne. Il commença ses études en Turquie, puis émigra aux États-Unis pour les achever. Il fit l'essentiel de sa carrière dans le National Bureau of Standards (NBS), où il participa à la création du NBS National Hydraulic Laboratory. Ingénieur de recherche, il travailla principalement sur les écoulements turbulents stratifiés. La loi qui porte son nom date de 1938 et résultait d'une étude expérimentale des profils de vitesse pour des écoulements à surface libre dans des canaux rugueux.

**Tableau 5.2** : vitesse moyenne, hauteur normale, et pente de frottement selon la loi de frottement utilisée.

loi de frottement	$\bar{u}$	$h_n$ <sup>a</sup>	$j_f$
Manning-Strikler	$\bar{u} = K\sqrt{i}R_H^{2/3}$	$h_n = \left(\frac{q}{K\sqrt{i}}\right)^{3/5}$	$j_f = \frac{\bar{u}^2}{K^2R_H^{4/3}}$
Darcy-Weisbach	$\bar{u} = \sqrt{\frac{8g}{f}}\sqrt{i}R_H^{1/2}$	$h_n = \left(q\sqrt{\frac{f}{8gi}}\right)^{2/3}$	$j_f = \frac{\bar{u}^2}{2g} \frac{f(R_H)}{4R_H}$
Chézy	$\bar{u} = C\sqrt{i}R_H^{1/2}$	$h_n = \left(q\frac{1}{C\sqrt{i}}\right)^{2/3}$	$j_f = \frac{\bar{u}^2}{C^2R_H}$

<sup>a</sup> uniquement pour un canal infiniment large

### 5.3.3 Justification physique

Dans la majorité des cas, le régime d'écoulement de la phase fluide est turbulent. Une loi de comportement prenant en compte la turbulence peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Sigma = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D} + \langle \rho_f \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle$$

où  $\mathbf{u}'$  est la fluctuation de vitesse,  $\langle \rangle$  désigne un opérateur moyenne. Dans cette expression, le premier terme représente les effets de pression du fluide (à cause de l'incompressibilité c'est un terme indéterminé qui doit être trouvé en résolvant les équations du mouvement). Le second terme (loi de Newton) représente les termes de viscosité. Le troisième terme, appelé tenseur de Reynolds, représente les effets des fluctuations de vitesse liées à la turbulence. Une pratique courante consiste à négliger la contribution visqueuse (compte tenu du nombre de Reynolds) et à supposer que les fluctuations de vitesse sont du même ordre de grandeur et peuvent être liées à la vitesse moyenne du fluide de la façon suivante :

$$u'_x \approx u'_y \approx \ell_m \frac{du_y}{dy}$$

Cette hypothèse, due à Prandtl, tire son origine d'une analogie avec le libre parcours moyen d'une particule dans la théorie cinétique des gaz de Boltzmann. Le coefficient de proportionnalité  $\ell_m$  introduit dans l'équation est appelé *longueur de mélange*. La valeur de la longueur de mélange a été déduite expérimentalement. Une difficulté dans la détermination de  $\ell_m$  est qu'elle n'a pas en général de caractère intrinsèque excepté dans des régions sous influence de parois (écoulements dits pariétaux).

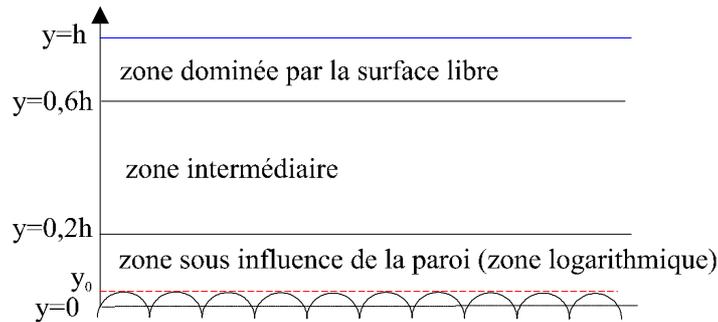


Figure 5.25 : délimitation et typologie des zones turbulentes dans un écoulement à surface libre.

Ainsi, pour des écoulements à surface libre dans des canaux droits inclinés, il est possible de distinguer *grosso modo* trois zones turbulentes :

- près de la paroi, la turbulence est générée par la rugosité et des processus internes liés à la sous-couche visqueuse (à proximité immédiate de la paroi). Une hypothèse usuelle tirée d'arguments dimensionnels est de relier la longueur de mélange à la profondeur de la manière suivante :

$$\ell_m = \kappa y$$

avec  $\kappa$  la constante de von Kármán ( $\kappa \approx 0,4$ ). Cette zone s'étendant sur environ 20 % de la hauteur d'écoulement est appelée *zone logarithmique* pour des raisons indiquées ci-après ;

- près de la surface libre, la turbulence est fortement influencée par la surface libre ;
- entre les deux interfaces, se trouve une région dite intermédiaire où la turbulence résulte d'échanges entre les deux zones productrices précédentes. La valeur de la longueur de mélange dans les deux régions supérieures peut être estimée de la manière suivante :

$$\ell_m \approx \beta h$$

avec  $\beta$  un paramètre empirique de valeur proche de 0,12.

Examinons ce qui se passe pour l'écoulement près de la paroi. En régime permanent uniforme, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\tau = \rho_f g \sin \theta (h - y) = \rho_f \left( \kappa y \frac{du}{dy} \right)^2,$$

où  $\rho_f g \sin \theta (h - y)$  est la contrainte de cisaillement déduite de l'équation de conservation de mouvement en régime permanent uniforme. En introduisant la vitesse de frottement à la paroi

$$u_* = \sqrt{\tau_p / \rho_f} = \sqrt{gh \sin \theta},$$

on obtient :

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\kappa} \frac{u_*}{y} \sqrt{1 - \frac{y}{h}}.$$

En se limitant aux termes du premier ordre en  $y/h$ , puis par intégration, on obtient le profil de vitesse à proximité de la paroi :

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0}$$

où  $y_0$  est une profondeur à laquelle on admet que la vitesse s'annule. On trouve donc que le profil des vitesses moyennes est logarithmique. Naturellement, cette expression, valable pour des parois lisses, doit être corrigée si l'on veut prendre en compte une rugosité du fond. Pour des surfaces rugueuses, deux types de condition aux limites sont mis en évidence en fonction de la taille typique des grains composant la rugosité ( $d_s$ ) et de l'épaisseur de la sous-couche visqueuse ( $\delta$ ) :

- les surfaces dites lisses ( $d_s \ll \delta$ );
- celles dites rugueuses ( $d_s \gg \delta$ ).

Pour une surface rugueuse, les expériences en conduite indiquent que la distance  $y_0$  vérifie :  $y_0 = d_s/30$ . Dans ce cas, par intégration du profil des vitesses moyennes, on déduit que la vitesse moyenne de l'écoulement est :

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{30h}{d_s} \approx 2,5 \ln \frac{11h}{d_s}$$

En pratique, il est souvent commode d'exprimer la vitesse moyenne à la hauteur d'écoulement par l'intermédiaire du coefficient de Chézy  $C$  :

$$\bar{u} = C \sqrt{\sin \theta} \sqrt{h},$$

On obtient par simple comparaison :

$$C = \frac{\sqrt{g}}{\kappa} \ln \frac{30h}{d_s} \approx 7,83 \ln \frac{11h}{d_s}$$

Pour une surface plane (en pratique pour des rugosités de surface inférieures à 250 mm), les expériences montrent que la distance  $y_0$  vérifie :  $y_0 \approx \nu/9u_*$ . On en déduit que le profil de vitesse près d'une paroi lisse :

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{9u_* y}{e\nu}$$

Jusqu'à une époque récente, une pratique courante consistait à extrapoler à tout l'écoulement l'expression de la longueur de mélange valable à la paroi. À partir des années 1960, des termes de correction ont été rajoutés pour tenir compte de la modification de la turbulence loin des parois. Parmi les plus connues, la loi (empirique) de sillage de Coles donne de bons résultats pour de nombreuses classes d'écoulement. La méthode consiste à ajouter à la loi logarithmique un terme correctif de la forme suivante :

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} + \frac{\Pi}{\kappa} \sin \frac{\pi z}{2h},$$

avec  $\Pi$  un paramètre d'intensité, valant approximativement 0,2 lorsque le nombre de Reynolds  $Re = \bar{u}h/\nu$  est supérieur à 2000 et proche de zéro lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à 500 (pour un canal à surface libre). Une autre méthode de correction consiste à considérer la variation de la longueur de mélange en fonction de la profondeur comme cela a été vu plus haut.

### 5.3.4 Hauteur normale selon la section d'écoulement

#### Hauteur normale et courbe de tarage

La hauteur normale est la profondeur moyenne d'eau en régime permanent uniforme. Elle se calcule en égalant contrainte pariétale et contrainte motrice. Par exemple, si l'on applique une loi de type Manning-Strickler, on obtient une équation implicite pour  $h_n$

$$Q = \bar{h}B\bar{u} = KR_H^{2/3}\sqrt{i}S,$$

(avec  $S = \bar{h}B = f(h_n)$  la section d'écoulement,  $B$  la largeur au miroir,  $Q$  le débit total,  $\bar{h}$  la hauteur moyenne d'eau) qui peut se résoudre explicitement dans le cas d'un canal infiniment large ( $B \gg h$ , soit  $R_H \approx h$ ):

$$h_n = \left( \frac{q}{K\sqrt{i}} \right)^{3/5},$$

avec  $q$  le débit par unité de largeur. La hauteur normale est une fonction du débit et de la pente. Elle correspond au tirant d'eau pour un canal rectangulaire ou un canal infiniment large, mais s'en distingue dans les autres cas. À pente constante, la relation  $h = f(q)$  est appelée *courbe de tarage* ou de *débitance*. Sa représentation graphique se présente sous la forme d'une courbe avec deux branches :

- pour les petits débits, une augmentation rapide de la hauteur avec le débit ;
- quand le débit dépasse le débit de plein bord, le cours d'eau quitte son lit mineur, ce qui se traduit par une faible augmentation de la hauteur quand le débit croît.

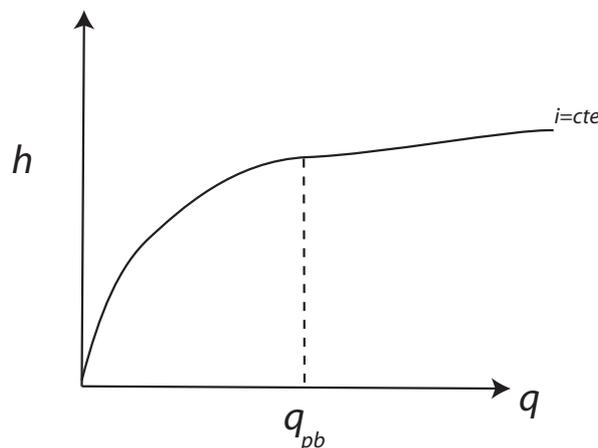


Figure 5.26 : courbe de tarage.

Les géométries de canaux les plus courantes sont la section trapézoïdale (en terre pour la navigation et l'irrigation), rectangulaire (béton ou maçonnerie pour les aménagements hydrauliques), ou circulaire (en béton pour l'assainissement pluvial).

Tableau 5.3 : hauteur, section, périmètre mouillé pour trois géométries usuelles.

type	circulaire	rectangulaire	trapézoïdal
$h$	$R(1 - \cos \delta)$	$h$	$h$
$S$	$R^2(\delta - \sin \delta \cos \delta)$	$Bh$	$(B + b)h/2$
$\chi$	$2R\delta$	$B + 2h$	$2h/\cos \phi + b$

#### Granulométrie et résistance à l'écoulement

La résistance à l'écoulement est en grande partie liée à la taille des grains. Par exemple, il existe des formules empiriques donnant le coefficient de Manning-Strickler en fonction de la granulométrie

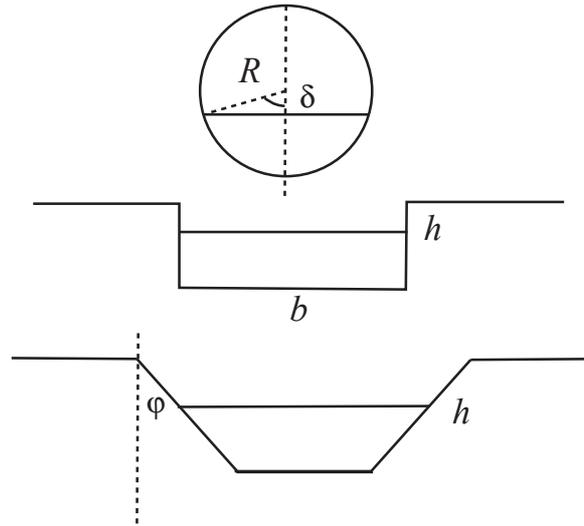


Figure 5.27 : sections usuelles pour des canaux.

telle que la formule de Meyer-Peter et Müller

$$K = \frac{26}{d_{90}^{1/6}},$$

ou bien la formule plus récente de Jäggi

$$K = \frac{23,2}{d_{90}^{1/6}},$$

ou encore celle de Raudkivi

$$K = \frac{24}{d_{65}^{1/6}},$$

avec  $d_{65}$  le diamètre des particules tel que 65 % (en poids) des grains du lit aient un diamètre inférieur.

La morphologie d'un chenal varie en fonction de la pente de telle sorte qu'il y ait un certain équilibre entre la pente (terme gravitaire moteur dans les équations du mouvement), le débit liquide, et le débit solide :

- Pour les rivières (naturelles) de plaine, la sinuosité du lit, la possibilité de migration des méandres, et le développement de structures morphologiques (dunes, bancs de sable) permettent d'obtenir cet équilibre moyen.
- Pour les rivières torrentielles et les torrents, cet équilibre se manifeste principalement à travers un équilibre de la section en travers et il existe une relation entre granulométrie du lit, capacité de transport, et débit dominant ; la dissipation d'énergie est variable en fonction de la composition granulométrique du lit (plus le lit est grossier, plus la dissipation d'énergie est importante) et des *structures morphologiques* (distribution régulière de seuils et de mouilles, antidune). En général, les lits composés d'éléments granulométriques variés sont pavés (*armoring* en anglais), c'est-à-dire qu'il se forme une couche à la surface du lit, composée d'éléments grossiers, offrant une bonne résistance à l'érosion et permettant de dissiper suffisamment d'énergie. Le pavage est généralement stable (c'est-à-dire il n'est pas « affouillé » par les petites crues), mais il peut être détruit lors de grosses crues. Pavage et structures morphologiques évoluent sans cesse soit par ajustement local (petite crue), soit par déstabilisation massive, puis restructuration ; les échelles de temps associées varient fortement :

**Tableau 5.4** : durée moyenne de vie  $T$  (en années) du pavage et des structures morphologiques.

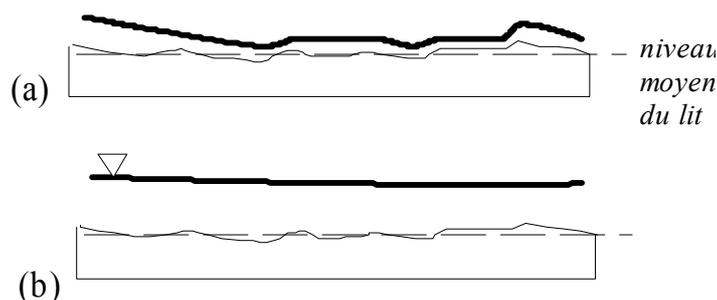
	<i>type</i>	$T$
	pavage	1–2
	seuil	20–50
	alternance seuil/mouille	100–1000

**Limites des relations  $\bar{u}(h, \theta)$** 

La principale difficulté dans l'application des formules de régime permanent où l'on suppose que  $\bar{u} = \bar{u}(h, \theta)$  est que pour un certain nombre de rivières, la pente est loin d'être uniforme même sur de petits espaces de longueur. Un exemple typique est donné par les rivières torrentielles avec un lit irrégulier fait de *seuils* et *mouilles* (« step and pool rivers » en anglais) qui

- aux basses eaux montrent une courbe de remous très irrégulière suivant le relief du lit (importante dissipation d'énergie). Dans ce cas, le mouvement moyen n'est pas dicté par une relation de la forme  $u(h, \theta)$  (succession de régimes graduellement et rapidement variés) ;
- aux hautes eaux montrent une courbe de remous uniforme qui est plus ou moins parallèle à la ligne moyenne du lit. Dans ce cas, il est possible d'aboutir à une relation  $\bar{u}(h, \theta)$ .

Pour ce type de rivière, il n'est pas possible de trouver une relation univoque  $\bar{u} = \bar{u}(h, \theta)$  pour toutes les hauteurs d'écoulement. Cette indétermination est aggravée lorsqu'il y a transport solide car les formes du fond peuvent changer au cours d'une même crue, ce qui amène à un changement de la relation  $\bar{u} = \bar{u}(h, \theta)$  pour un bief donné.

**Figure 5.28** : forme de la courbe de remous en (a) basses eaux, (b) hautes eaux.

De même, le coefficient de rugosité du lit peut varier de façon significative avec le tirant d'eau pour les raisons suivantes :

- la rugosité du fond et des berges ne sont pas identiques (par exemple à cause de la végétation). Il faut alors employer des méthodes spécifiques pour calculer une rugosité équivalente. Il existe plusieurs de ces méthodes : méthode d'Einstein, des parallèles confondues, etc.
- si le cours d'eau déborde de son lit mineur, il va rencontrer une rugosité très différente (terrains agricoles, routes, obstacles, etc.).

Le coefficient de Manning-Strickler peut à la fois traduire la dissipation d'énergie locale, c'est-à-dire due au frottement contre les grains du lit, mais également une dissipation d'énergie plus globale liée à la dissipation turbulente. Cette dernière est en partie connectée aux structures morphologiques du lit, qui interagissent avec les grandes structures turbulentes advectées par l'écoulement. Au cours d'une crue, les structures morphologiques peuvent évoluer fortement, ce qui dans certains cas peut aller jusqu'à leur destruction (voir figure 5.10). Dans ce cas-là, on assiste à une variation très importante de la résistance à l'écoulement ; cela se manifeste par exemple par une modification significative de la valeur de  $K$  au cours de la crue. La figure 5.29 montre un exemple de modification de la valeur du coefficient de Manning  $n = 1/K$  durant une forte crue.

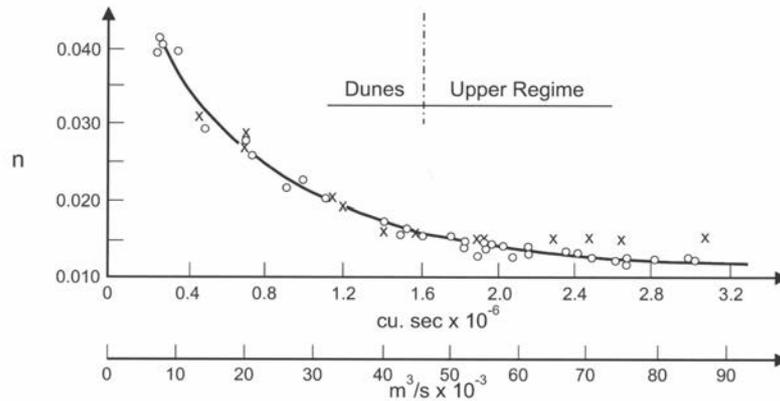


Figure 5.29 : variation de  $n = 1/K$  au cours d'une crue.

### Structure morphologique

Toutes les relations vues précédemment ne sont valables que pour des cours d'eau à fond fixe et droit. Lorsque le lit présente des structures morphologiques (comme des dunes), une sinuosité (méandres), et un fond mobile, **la résistance à l'écoulement peut croître de façon notable**.

Ainsi lorsqu'il y a des structures morphologiques de type dune, il faut tenir compte des dissipations supplémentaires induites. La dissipation d'énergie due à la présence de ces structures peut être importante. Elle est due :

- à la création de tourbillons à grande échelle au sein du fluide (processus prédominant pour les dunes) ;
- au remous de la surface libre, avec parfois apparition de ressauts hydrauliques (processus prédominant pour les anti-dunes).

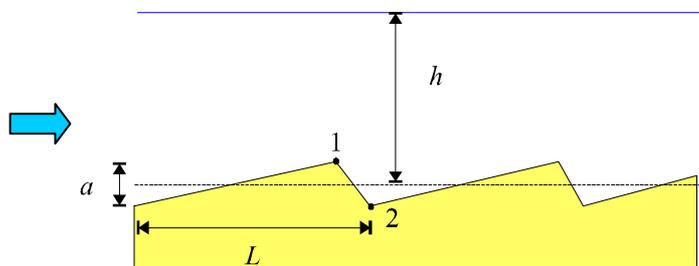


Figure 5.30 : géométrie simplifiée d'une dune.

Pour quantifier ces effets, considérons une alternance de dunes le long du lit, de hauteur caractéristique  $a$  et de longueur  $L$ . En première approximation, on peut admettre que l'on peut assimiler la dissipation d'énergie induite par les dunes à une perte de charge singulière : la dune se comporte comme un rétrécissement de la section d'écoulement, suivi d'un élargissement brusque. À l'aide d'une formule de perte de charge pour écoulements divergents de type Borda, appliquée entre les points 1 et 2, on trouve :

$$\Delta H_1 = \alpha \frac{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2}{2g} \approx \alpha \frac{\bar{u}^2}{2g} \left( \frac{a}{h} \right)^2,$$

où  $\alpha$  est un coefficient de perte de charge. La profondeur d'eau  $h$  est calculée par rapport à une ligne fictive, qui représente l'altitude moyenne du fond (représentée par une ligne fine à la figure 5.30). La vitesse au point 1 est donc :  $\bar{u}_1 = q/(h - a/2)$  tandis qu'en 2, on a  $\bar{u}_2 = q/(h + a/2)$ .

Cette perte de charge singulière s'ajoute à la dissipation d'énergie par frottement sur le fond

$$\Delta H_2 = L \frac{C_f \bar{u}^2}{R_H 2g} \approx L \frac{C_f \bar{u}^2}{h 2g},$$

avec  $C_f = f/4$  le coefficient de frottement qui peut être relié, par exemple, au coefficient de Strickler

$$\tau_p = \frac{1}{2} C_f \rho \bar{u}^2 = \frac{\rho g}{K^2} \frac{\bar{u}^2}{R_H^{1/3}} \Rightarrow C_f = \frac{2g}{K^2 R_H^{1/3}},$$

ou bien au coefficient de Chézy

$$\tau_p = \frac{1}{2} C_f \rho \bar{u}^2 = \frac{\rho g}{C^2} \bar{u}^2 \Rightarrow C_f = \frac{2g}{C^2}.$$

La perte de charge totale est donc

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = \alpha \frac{\bar{u}^2}{2g} \left( \frac{a}{h} \right)^2 + L \frac{C_f \bar{u}^2}{R_H 2g},$$

On peut calculer un coefficient de frottement équivalent  $C_f^*$  comme étant la somme des pertes de charge locale dues à la dune :

$$\Delta H = C_f^* \frac{L \bar{u}^2}{h 2g},$$

soit encore

$$C_f^* = C_f + \alpha \frac{a^2}{Lh}.$$

On peut également en déduire un coefficient de Chézy équivalent :  $C_{eq.} = \sqrt{2g/C_f^*}$ . On en déduit une nouvelle loi d'écoulement similaire à l'équation (voir tableau 5.2) obtenue pour un régime uniforme sur fond plat :

$$\bar{u} = C \sqrt{\frac{Lh}{Lh + \alpha a^2 C^2 / (2g)}} \sqrt{\sin \theta} \sqrt{h}.$$

Ce petit calcul simple permet de montrer que, plus la taille de la dune augmente, plus la vitesse moyenne d'écoulement diminue. Il existe des formules empiriques comme celle de Sugio pour des cours d'eau naturels ( $0,1 < d_{50} < 130$  mm) et des canaux ( $0,2 < k_s < 7$  mm) :

$$\bar{u} = K R_H^{0,54} i^{0,27},$$

avec  $K = 54 - 80$  pour des dunes,  $K = 43$  pour une rivière à méandre. D'autres formules ont été développées, mais elles présentent à peu près toutes l'inconvénient de ne fournir que des tendances car les données expérimentales sont très dispersées.

## 5.4 Régime permanent non-uniforme

### 5.4.1 Canal large

L'équation de remous peut se mettre sous la forme usuelle :

$$\boxed{\frac{dh}{dx} = \frac{j_f - i}{\text{Fr}^2 - 1}}, \quad (5.10)$$

où l'on a introduit  $i = \tan \theta$  et la pente de frottement

$$j_f = \frac{\tau_p}{\rho g h \cos \theta},$$

et le nombre de Froude

$$\text{Fr} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{g h \cos \theta}}.$$

Dans le cas d'un canal infiniment large sur faible pente et d'une rugosité de type Chézy, on peut également la mettre sous la forme suivante dite *équation de Bresse* :

$$\boxed{\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - (h_n/h)^3}{1 - (h_c/h)^3}}, \quad (5.11)$$

où l'on a posé :

- la hauteur normale  $h_n$ , qui est solution de l'équation  $\tau_p = \rho g h_n \sin \theta$  (solution :  $h_n = (q^2 / (C^2 i))^{1/3}$  pour un canal infiniment large) ;
- la hauteur critique  $h_c = (q^2 / g)^{1/3}$ .

Si on choisit une loi de Manning-Strickler, l'équation de Bresse s'écrit alors

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - (h_n/h)^{10/3}}{1 - (h_c/h)^3}, \quad (5.12)$$

avec cette fois-ci  $h_n = (q / (K \sqrt{i}))^{3/5}$ .

### 5.4.2 Canal quelconque

Pour des canaux quelconques, on peut montrer que la définition du nombre de Froude est identique (puisque  $h = S/B$ ). En revanche l'équation de remous est plus complexe car il faut tenir compte des éventuelles variations de la largeur au miroir  $B$  dans la direction d'écoulement ; on montre qu'on aboutit à :

$$\boxed{\frac{dh}{dx} = \frac{1}{\rho g S \cos \theta} \frac{\chi \tau_p - \rho g S \sin \theta - \rho h \bar{u}^2 B'(x)}{\text{Fr}^2 - 1} = \frac{j_f - i - \text{Fr}^2 h/B}{\text{Fr}^2 - 1}}, \quad (5.13)$$

avec  $\text{Fr} = \bar{u} / \sqrt{g h} = Q \sqrt{B} / \sqrt{g S^3}$  et  $h = S/B$ . Notons que la formule du régime permanent se déduit de ces équations en prenant  $h'(x) = 0$ .

☞ **Démonstration.** La relation de Bernoulli donne

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\bar{u}^2}{2g} + h + z \right) = -j_f,$$

avec  $j_f$  la pente de frottement. Comme  $\bar{u} = Q/S$  et  $S = Bh$ , on en déduit :

$$\frac{d}{dx} \frac{\bar{u}^2}{2g} + \frac{dh}{dx} = i - j_f,$$

or

$$\frac{d}{dx} \frac{\bar{u}^2}{2g} = -2 \frac{Q^2}{2g} \frac{S'}{S^3} = -\frac{Q^2}{g} \frac{B'h + h'B}{S^3} = -\text{Fr}^2 \frac{B'h + h'B}{B}.$$

On tire après réarrangement

$$h'(x) = \frac{j_f - i - \text{Fr}^2 h/B}{\text{Fr}^2 - 1}$$

### 5.4.3 Courbes de remous

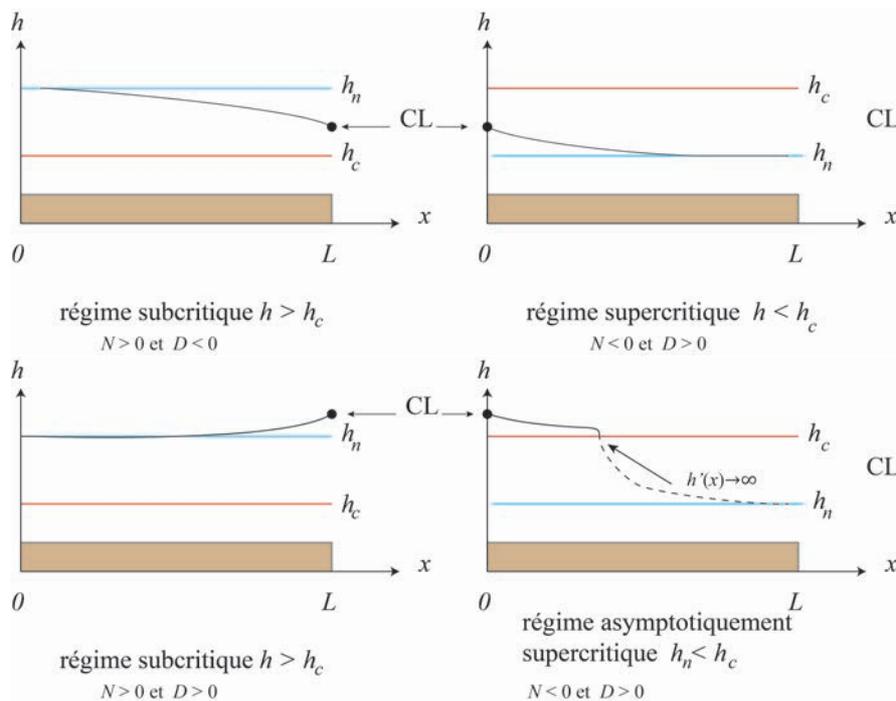
En pratique, on cherche à résoudre une équation différentielle ordinaire du premier ordre sur un certain intervalle  $[0, L]$  :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{j_f - i}{Fr^2 - 1} = \frac{N(h)}{D(h)} = i \frac{(h_n/h)^{10/3} - 1}{(h_c/h)^3 - 1}$$

avec, par exemple dans le cas la loi de Manning-Strickler,  $j_f = \bar{u}^2 / (K^2 h^{4/3})$ ,  $h_c = \sqrt[3]{q^2/g}$ , et  $h_n = (q / (K\sqrt{i}))^{3/5}$ . C'est une équation différentielle non linéaire du premier ordre. Pour résoudre cette équation différentielle, il faut une seule condition aux limites (voir § 5.4.5). À noter en premier lieu le comportement quand le numérateur ou le dénominateur s'annule :

- quand  $N = 0$  c'est le régime permanent uniforme ;
- quand  $D = 0$  la tangente de la courbe  $h(x)$  est verticale : variation brutale de hauteur d'eau. On est alors en dehors du cadre de nos hypothèses... Lorsque  $Fr = 1$ , l'écoulement ne peut être décrit par l'équation de la courbe de remous.

Asymptotiquement pour  $x$  suffisamment grand, on a  $h(x) \rightarrow h_n$ . Si la longueur de l'intervalle est suffisamment grande, on doit donc trouver que la hauteur tend vers la hauteur normale. Comme le montre la figure 5.31, la forme de la solution dépend du signe de  $N$  et  $D$  ainsi que de la position de la condition aux limites (ici placée à l'aval) vis-à-vis des hauteurs normale et critique  $h_n$  et  $h_c$ .



**Figure 5.31** : comportement de la solution de l'équation de la courbe de remous en fonction de la position de la condition aux limites vis-à-vis de  $h_n$  et  $h_c$ .

À noter enfin que la courbe  $h(x)$  tend toujours vers  $h_n$ , mais si elle rencontre  $h = h_c$ , un ressaut hydraulique (ou bien une chute) se produit. Le passage transcritique produit une discontinuité de la solution. Il faut alors recourir à une résolution de l'équation de part et d'autre de la discontinuité (ressaut ou chute), et relier les deux arcs de solution par une relation de conjugaison (voir § 5.5.2) ou un calcul de charge hydraulique au voisinage de la singularité (voir § 5.5.4). Pour les solutions continues, on peut proposer une classification de la forme des courbes de remous (voir § 5.4.4).

### 5.4.4 Classification des régimes d'écoulement

Auparavant on opérât une classification des courbes de remous en fonction des valeurs respectives de  $h$ ,  $h_n$ , et  $h_c$ . Quand la pente est positive ( $i > 0$ ), on a :

- profil de type M (« mild ») pour pente douce quand  $h_n > h_c$  ;
- profil de type S (« steep ») pour pente forte quand  $h_n < h_c$ .

Il faut ajouter les profils critiques C quand  $h = h_c$ . Lorsque la pente est nulle, la hauteur normale devient infinie, la courbe de remous devient horizontale ; on parle de profil H. Lorsque la pente est négative, on parle de profil adverse A. Notons qu'il n'y a pas de hauteur normale dans ce cas-là.

#### Canaux à faible pente : courbes M1–M3

Ce sont les courbes observées pour un canal descendant ( $i > 0$ ) à pente faible ( $h_n > h_c$ ). On distingue trois branches :

- $h > h_n > h_c$  : la courbe est tangente à  $h_n$  à l'amont et sa tangente devient horizontale à l'aval. On rencontre ce type de courbe à l'amont d'un barrage, d'un lac, ou d'un obstacle. Le profil est croissant ( $h' > 0$ ).
- $h_n > h > h_c$  : la courbe est tangente à  $h_n$  à l'amont. Le profil est décroissant ( $h' < 0$ ). Sa tangente aurait tendance à devenir verticale à l'aval car la courbe de remous croise la hauteur critique. On rencontre ce type de courbe à l'amont d'une chute ou de toute variation brutale de la pente, où il y a passage d'un écoulement fluvial à torrentiel.
- $h_n > h_c > h$  : la courbe est tangente à  $h_n$  à l'amont. Le profil est croissant ( $h' > 0$ ). À l'aval il se forme un ressaut. On rencontre ce type de profil à la sortie d'une vanne lorsque la pente du radier à l'aval est faible.

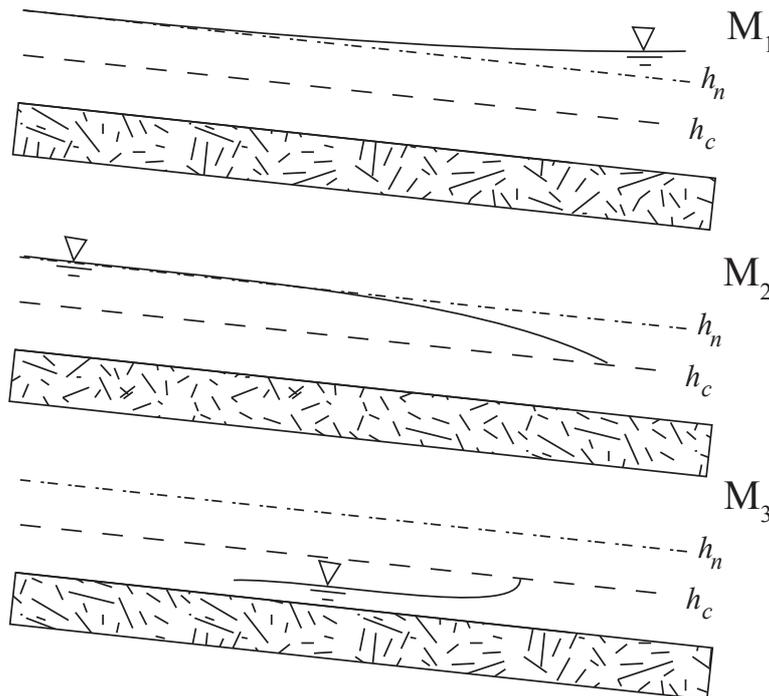


Figure 5.32 : allure des courbes.

### Canaux à forte pente : courbes S1–S3

Ce sont les courbes observées pour un canal descendant ( $i > 0$ ) à pente forte ( $h_n < h_c$ ). On distingue là encore trois branches :

- $h > h_c > h_n$  : la courbe est tangente à  $h_n$  à l'aval et sa tangente tendrait à devenir verticale à l'amont car la courbe de remous croise la hauteur critique. On rencontre ce type de courbe à l'aval d'un barrage ou d'un changement de pente. Le profil est croissant ( $h' > 0$ ).
- $h_c > h > h_n$  : la courbe est tangente à  $h_n$  à l'aval. Le profil est décroissant ( $h' < 0$ ). Sa tangente aurait tendance à devenir verticale à l'amont. On rencontre ce type de courbe à l'aval d'une augmentation brutale de la pente, où il y a passage d'un écoulement fluvial à torrentiel, ou bien lors d'un élargissement brutal de la section d'écoulement.
- $h_c > h_n > h$  : la courbe est tangente à  $h_n$  à l'aval. Le profil est croissant ( $h' > 0$ ). À l'aval il se forme un ressaut. On rencontre ce type de profil à la sortie d'une vanne dénoyée lorsque la pente du radier à l'aval est forte.

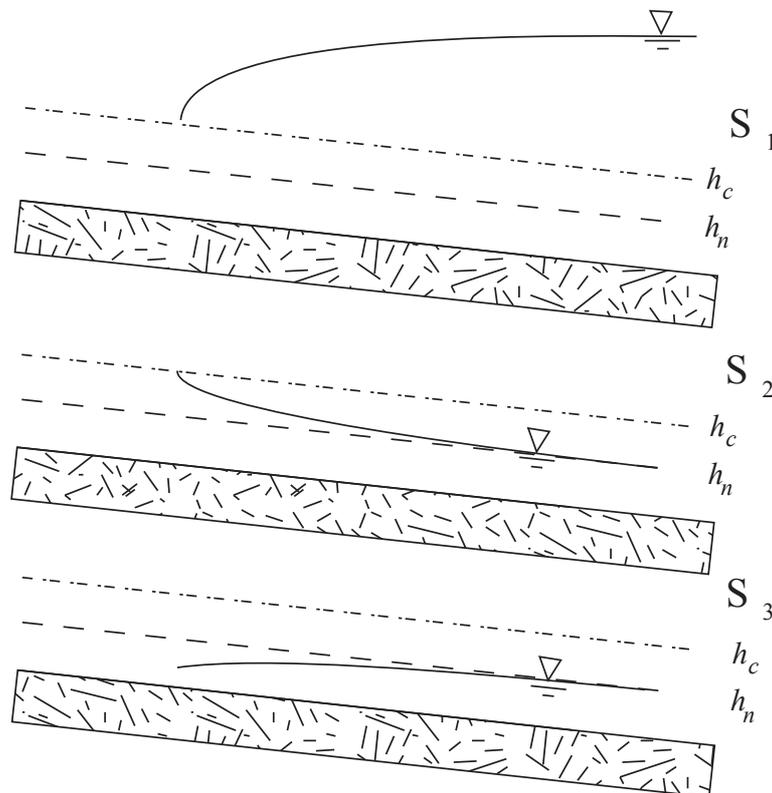


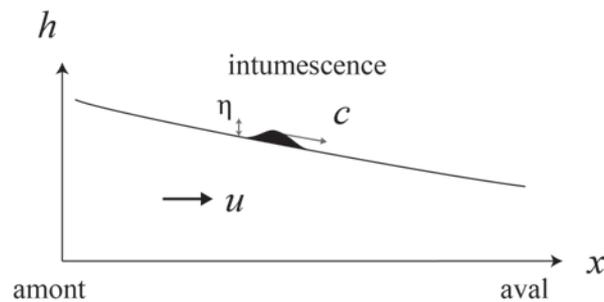
Figure 5.33 : allure des courbes.

### 5.4.5 Conditions aux limites

De nos jours, on résout numériquement l'équation de remous. Comme il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre, il suffit de connaître une seule condition aux limites. En pratique, on ne peut pas choisir n'importe comment la position amont/aval de cette condition. Elle est fixée par la possibilité qu'a « l'information » de se propager. Par *information*, il faut comprendre le déplacement d'une perturbation de l'écoulement, qui se présente sous la forme d'une petite variation locale de hauteur (intumescence; voir figure 5.34). Cette perturbation se propage à la vitesse  $u' = u \pm c$  avec  $c = \sqrt{gh}$  la vitesse de propagation des ondes en eau peu profonde. Cette vitesse peut s'écrire aussi en fonction du nombre de Froude

$$u' = u \pm \sqrt{gh} = \sqrt{gh}(\text{Fr} \pm 1),$$

ce qui montre que pour un régime supercritique ( $\text{Fr} > 1$ ), les deux vitesses de propagation sont positives et donc l'information ne se propage que de l'amont vers l'aval alors qu'en régime subcritique ( $\text{Fr} < 1$ ), elle se propage dans les deux sens. Cela veut aussi dire qu'une modification d'un écoulement en un endroit donné produit une perturbation qui remonte le cours d'eau et peut donc modifier ce que se passe à l'amont.



**Figure 5.34** : propagation d'une petite intumescence à la vitesse  $c = \sqrt{gh}$  le long de la surface libre d'un écoulement de vitesse moyenne  $u$ .

En conséquence, on retient que :

- pour un régime subcritique (fluvial), la condition aux limites pourrait en principe être choisie à l'amont ou à l'aval, mais en pratique comme ce qui se passe à l'aval se propage vers l'amont et modifie ce qui s'y passe, c'est une condition aux limites placée à l'aval que l'on considère ;
- pour un régime supercritique (torrentiel), il faut placer la condition aux limites à l'amont.

L'imposition d'une condition aux limites dans un cours d'eau peut se faire à l'aide de singularités où le débit et/ou la hauteur sont imposés (vanne, seuil, chute).

En pratique, les écoulements fluviaux sont calculés dans la direction inverse de celle de l'écoulement (condition à la limite à l'aval) tandis qu'en régime torrentiel, la condition à la limite est placée à l'amont.

## 5.5 Courbes de remous et écoulement critique

### 5.5.1 Hauteur critique et régimes associés

La hauteur croît ou décroît selon le signe respectif du numérateur et du dénominateur dans l'équation différentielle (5.10), ce qui donne différentes formes de courbes de remous (voir figure 5.35). Notons ce point important : lorsque le nombre de Froude prend la valeur 1, le dénominateur est nul et en ce point la dérivée devient infinie, ce qui est physiquement impossible. En fait au voisinage de ce point, il se forme

- soit une discontinuité de la surface libre appelée *ressaut* qu'il faut étudier avec des outils spécifiques (cf. § 5.5.2) lorsqu'on passe d'un régime super- à subcritique ;

Conditions	$\frac{h_n}{h}$	Signe num.	$\frac{h_c}{h}$	Signe dén.	Signe dh/dx	Changement de profondeur	Nom	Figures échelle verticale exagérée
$J_f > 0$								
$J_f < J_c$	< 1	+	< 1	+	+	croît	M1	
$h_n > h_c$	< 1	+	> 1	-		pas possible		
	> 1	-	< 1	+	-	décroît	M2	
	> 1	-	> 1	-	+	croît	M3	
$J_f > 0$								
$J_f > J_c$	< 1	+	< 1	+	+	croît	S1	
$h_n < h_c$	< 1	+	> 1	-	-	décroît	S2	
	> 1	-	> 1	-	+	croît	S3	
$J_f > 0$								
$J_f = J_c$	< 1	+	< 1	+	+	croît	C1	
$h_n = h_c$	> 1	-	> 1	-	+	croît	C3	
$J_f = 0$								
$h_n = \infty$		-	< 1	+	-	décroît	H2	
		-	> 1	-	+	croît	H3	
$J_f < 0$								
$h_n < 0$	< 1	-	< 1	+	-	décroît	A2	
	< 1	-	> 1	-	+	croît	A3	

Figure 5.35 : tableau récapitulatif des courbes.

- soit une « chute » d'eau, c'est-à-dire une accélération brutale et un raidissement de la surface libre (passage d'un seuil par exemple, avec transition d'un régime sub- à supercritique).

La pente du canal et/ou la hauteur pour lesquelles on a  $Fr = 1$  s'appelle la *pente critique* et la *hauteur critique*  $h_c$ . On distingue deux régimes selon la valeur du nombre de Froude :

- $Fr < 1$ , régime sub-critique plus couramment appelé *régime fluvial* pour lequel on a  $h > h_c$  ;
- $Fr > 1$ , régime super-critique plus couramment appelé *régime torrentiel* pour lequel on a  $h < h_c$ .

La hauteur critique étant définie comme étant  $Fr(h_c) = 1$ , on tire que :

$$h_c = \left( \frac{1}{g \cos \theta} \frac{Q^2}{B^2} \right)^{1/3},$$

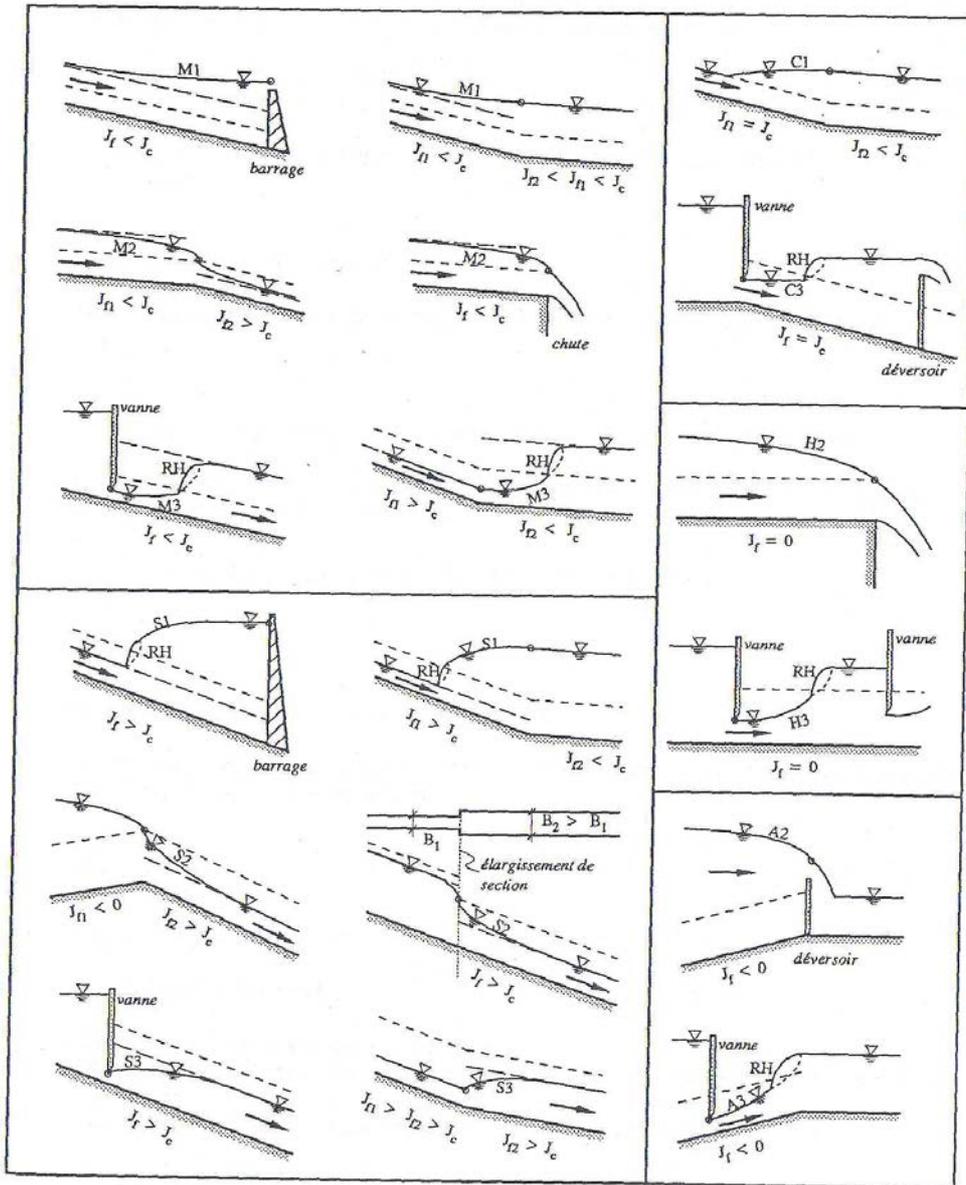


Figure 5.36 : quelques exemples des courbes de remous en fonction des aménagements.

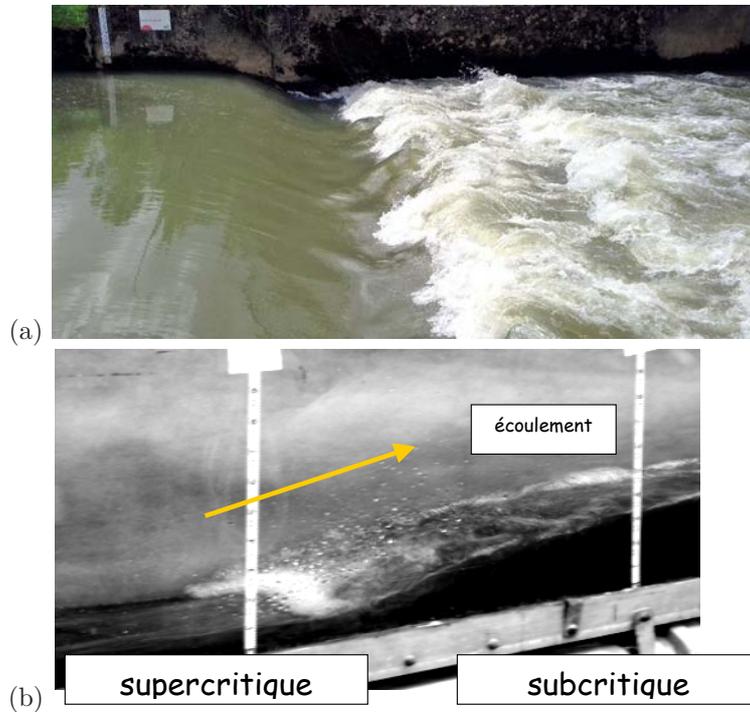
avec  $Q$  le débit total et  $B$  la largeur au miroir. Dans le cas d'un canal rectangulaire, en introduisant le débit par unité de largeur  $q = Q/B$ , on tire :

$$h_c = \left( \frac{q^2}{g \cos \theta} \right)^{1/3}$$

Dans la plupart des ouvrages, le terme  $\cos \theta$  est omis car la pente est faible et donc  $\cos \theta \approx 1$ . Le débit critique ne dépend pas (fortement) de la pente, mais uniquement du débit liquide.

### 5.5.2 Ressaut hydraulique

Un ressaut est une variation rapide du niveau d'eau lors du passage d'un écoulement supercritique à subcritique (voir figure 5.37). Le ressaut stationnaire est le cas le plus fréquent : il correspond à une vague stationnaire au sein de laquelle le régime d'écoulement passe de supercritique à subcritique. Il existe aussi des ressauts mobiles. C'est le cas par exemple lors du déferlement de vagues sur une plage ou bien lorsque le front d'une onde de crue devient très raide et prend l'apparence d'un mur d'eau (voir figure 5.38).



**Figure 5.37 :** (a) ressaut sur une rivière au passage d'un seuil (Navisence, Zinal, VS). Lors de sa chute au passage du seuil, l'eau accélère rapidement et se trouve en régime supercritique. Dans la cuvette à l'aval du seuil, l'eau décélère brutalement et il se forme un ressaut, bien visible à cause des bulles d'air résultant de l'entraînement d'air dans l'écoulement. (b) Formation d'un ressaut au laboratoire [Gary Parker].

Au niveau d'un ressaut, la courbure de la ligne d'eau est trop importante et l'équation de la courbe de remous cesse d'être valable. On utilise alors le théorème de quantité de mouvement de part et d'autre du ressaut (sur un volume de contrôle) pour simplifier le problème et déduire les caractéristiques du ressaut. Pour cela on considère un volume de contrôle (par unité de largeur) de part et d'autre du ressaut. Notons que l'écoulement va de la gauche vers la droite et il faut se souvenir que dans ce sens d'écoulement, un ressaut provoque une augmentation de hauteur, jamais une diminution (en effet le ressaut est associé à une dissipation d'énergie, donc à un ralentissement de l'écoulement). La tranche amont (resp. aval) est référencée par l'indice 1 (resp. 2). La longueur du volume de contrôle est  $L$  (voir figure 5.39).

On fait les hypothèses suivantes

- la pente du fond est négligeable ;
- l'écoulement est permanent et le débit par unité de largeur vaut  $q$  ;
- l'écoulement est unidirectionnel ;
- le ressaut est immobile (sa vitesse de déplacement est nulle) ;
- la pression est hydrostatique loin du ressaut ;
- le profil de vitesse est uniforme ;
- le fond est peu rugueux (on peut négliger la dissipation d'énergie due au frottement sur le fond).



**Figure 5.38** : arrivée du front (ressaut mobile) d'une crue sur la rivière Zavragia (Tessin) en août 1987; les deux clichés sont pris à 15 mn d'intervalle [T. Venzin].

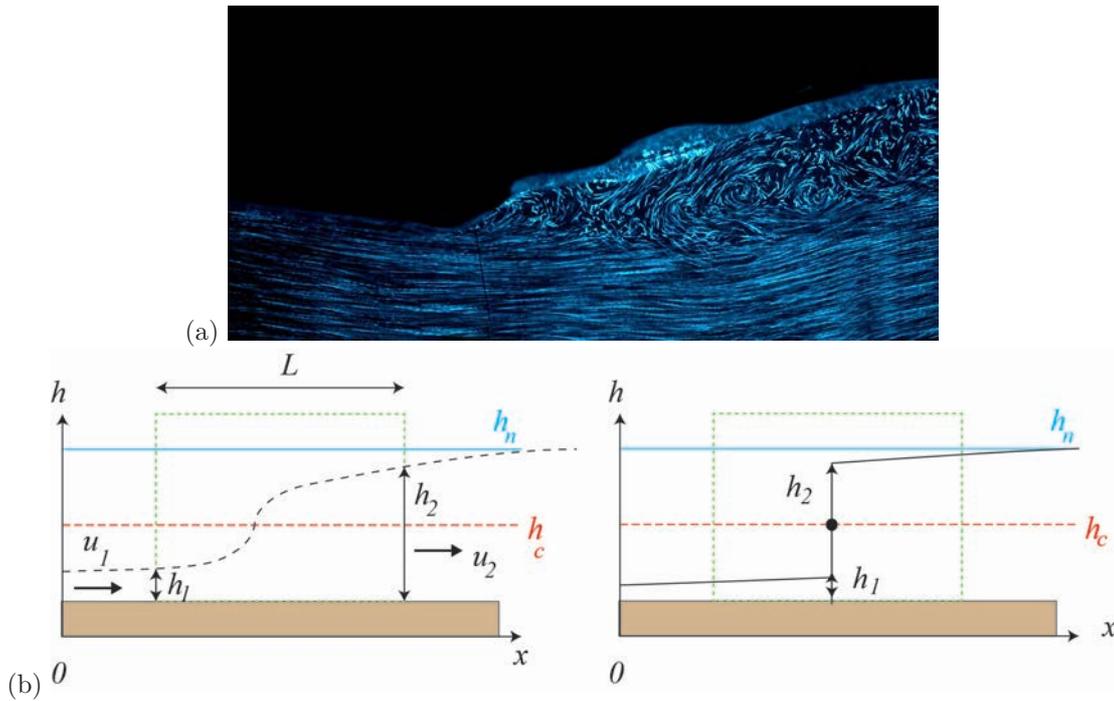
On considère un volume de contrôle dont les frontières englobent le ressaut.

- L'équation de continuité donne :  $u_1 h_1 = u_2 h_2 = q$ .
- L'équation de quantité de mouvement

$$\int_{\partial V} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V \rho \mathbf{g} dV - \int_{\partial V} p \mathbf{n} dS + \int_{\partial V} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS$$

projetée le long de la direction d'écoulement donne :

$$\rho q (u_2 - u_1) = -L \tau_p + \frac{1}{2} \rho g (h_1^2 - h_2^2).$$



**Figure 5.39 :** (a) simulation d'un ressaut au laboratoire [Joris Heyman]. Les segments lumineux sont la trace de particules éclairées par une tranche laser lorsqu'on prend une photographie sur un temps suffisamment long. Ils renseignent sur la distribution des vitesses. Notamment on note que le ressaut se traduit par un brassage très important et l'apparition de zones de forte vorticité, qui provoquent une forte dissipation d'énergie. (b) Schématisation d'un ressaut. La variation brutale du niveau d'eau sur une courte est remplacée par une discontinu  de la hauteur d'eau (et de la vitesse). Le cadre tireté vert de longueur  $L$  représente le volume de contrôle considéré dans les calculs de conservation de la quantité de mouvement.

On suppose que l'on connaît les conditions à l'amont et on veut déduire ce qui se passe à l'aval. Quand on peut négliger le frottement  $\tau_p$ , on tire :

$$\boxed{\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1 \right)}. \quad (5.14)$$

La figure 5.40 montre que le rapport  $h_2/h_1$  varie de façon à peu près linéaire avec le nombre de Froude amont  $Fr_1$ .

L'équation (5.14) s'appelle * quation de conjugaison* et les hauteurs  $h_1$  et  $h_2$  sont dites *conjuguées*. La perte de charge associée s'écrit :

$$\boxed{\Delta H = H_2 - H_1 = h_2 - h_1 + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2} = h_1 \frac{\left( \sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 3 \right)^3}{16 \left( \sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1 \right)}}. \quad (5.15)$$

La longueur du ressaut n'est en général pas très élevée, ce qui permet de justifier notre approximation. Expérimentalement on trouve que :

$$\frac{L}{h_1} = 160 \tanh \frac{Fr}{20} - 12,$$

pour  $2 < Fr < 16$ .

Parmi les applications importantes des formules du ressaut, on peut par exemple citer le dimensionnement des bassins d'amortissement placés au pied des évacuateurs de crue. La figure 5.41 montre

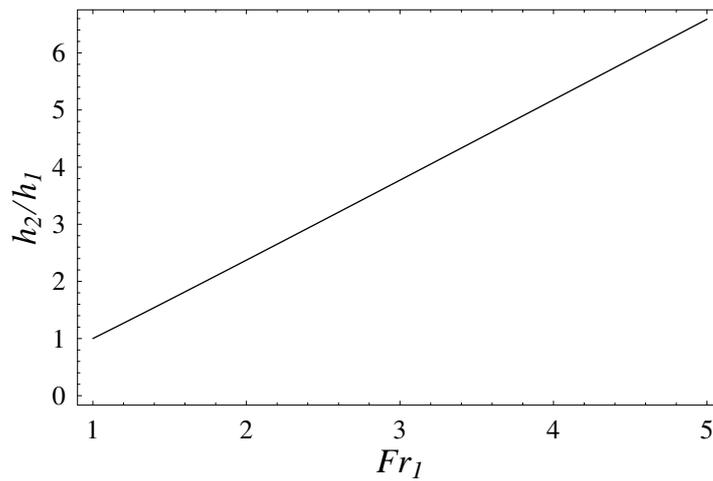


Figure 5.40 : variation du rapport  $h_2/h_1$  en fonction du nombre de Froude.

le ressaut formé au pied du barrage de Grangent (France) lors du passage d'une crue. Il est important de bien dimensionner le bassin pour dissiper le plus possible d'énergie. La perte de charge (dissipation locale due à la turbulence très importante au sein du ressaut) peut être estimée à l'aide de la formule (5.15) .



Figure 5.41 : crue de la Loire de novembre 2008 et passage de la crue au niveau de l'évacuateur de crue du barrage de Grangent. Source: DIREN.

### 5.5.3 Conjugaison d'une courbe de remous

#### Principe

Les ressauts hydrauliques stationnaires sont souvent observés au pied d'aménagements hydrauliques tels que les évacuateurs de crue des barrages ou les seuils. La figure 5.42 montre un ressaut au pied du seuil, qui sert à alimenter le laboratoire d'hydraulique Saint-Anthony Falls (SAFL) à Minneapolis. En modélisation hydraulique, il est souvent considéré que de tels aménagements sont des points singuliers ou *singularité* : la longueur de l'aménagement est très petite par rapport à la longueur caractéristique du bief étudié que l'on peut la considérer nulle ; la courbe de remous n'est alors pas calculée car c'est juste un point, dont la position coïncide avec la position de l'aménagement. Dans un tel cas, la position du ressaut hydraulique est donc très simple à établir. Cela n'est toutefois pas toujours le cas.



**Figure 5.42** : ressaut hydraulique stationnaire sur le Mississippi au pied du seuil du Saint-Falls Laboratory de Minneapolis (États-Unis). Source : [www.thefullwiki.org/Hydraulic\\_jump](http://www.thefullwiki.org/Hydraulic_jump).

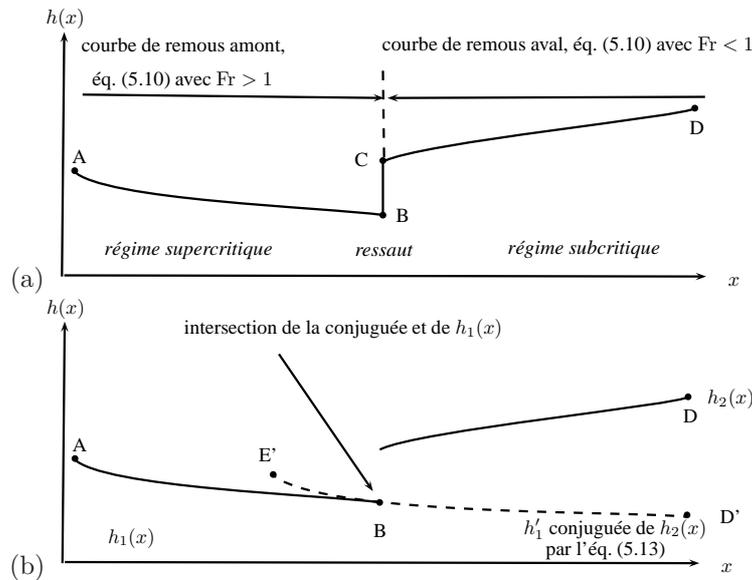
En effet, lorsque les conditions hydrauliques varient doucement et se caractérisent par le passage d'un régime supercritique à un régime subcritique, il se forme un ressaut, dont la position n'est pas *a priori* fixée par une singularité. Pour déterminer la position du ressaut, il faut appliquer la méthode dite de « conjugaison ». Cette méthode repose en effet sur l'équation de conjugaison (5.14). Cette équation fournit les hauteurs de part et d'autre du ressaut,  $h_2$  (hauteur aval) et  $h_1$  (hauteur amont). Chacune de ces hauteurs doit également se trouver sur la courbe de remous : comme le montre la figure 5.43(a), les points B (hauteur  $h_1$ ) et C (hauteur  $h_2$ ) localisent le ressaut hydraulique, qui apparaît comme discontinuité. La branche AB est la courbe de remous du régime supercritique (elle se calcule en résolvant (5.10) avec une condition à la limite en A) ; la branche CD est la courbe de remous du régime subcritique (elle se calcule en résolvant (5.10), qui se résout avec une condition à la limite en D). Positionner le ressaut c'est donc positionner le segment vertical BC de telle sorte que la hauteur  $h_D$  vérifie la courbe de remous de la branche subcritique et que la hauteur  $h_C$  fasse de même pour la branche supercritique.

Ce problème peut se résoudre simplement en traçant la conjuguée d'une des branches et en cherchant son intersection avec l'autre branche. Par exemple, comme le montre la figure 5.43(b), admettons que l'on ait calculé la courbe de remous subcritique  $h = h_2(x)$  partant du point D en résolvant (5.10) ; on peut calculer la courbe conjuguée D'E'  $h = h'_1(x)$  (le prime désignant la hauteur conjuguée) en se servant de (5.14) :

$$\frac{h_2}{h'_1} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2} - 1 \right) \quad (5.16)$$

avec  $\text{Fr}_1 = q/\sqrt{gh_1^3}$ . L'intersection de la courbe conjuguée  $h = h'_1(x)$  avec la branche supercritique  $h = h_1(x)$  se fait au point B. Comme ce point appartient à la courbe de remous supercritique et qu'il vérifie la relation de conjugaison (5.14), il nous fournit la position du ressaut.

On aurait pu procéder avec l'autre branche, ce qui conduit strictement au même résultat. Il faut noter au passage que c'est même une stratégie plus efficace car on note que dans la précédente méthode, l'inconnue  $h'_1(x)$  apparaît à la fois dans le dénominateur du membre de gauche et dans la définition du nombre de Froude, ce qui demande un peu plus de travail numérique pour trouver la solution.



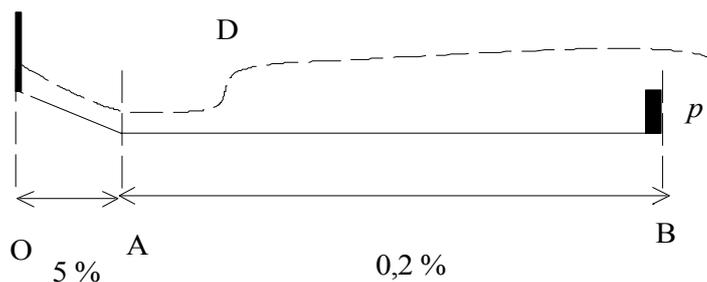
**Figure 5.43 :** (a) ressaut stationnaire entre deux courbes de remous, l'une en régime subcritique à l'aval, l'autre en régime supercritique à l'amont. (b) Principe de calcul de la position du ressaut à l'aide de la courbe conjuguée.

### Exemple de conjugaison d'une courbe de remous

On considère un aménagement composé :

- d'un réservoir avec une vanne de 2 mètre de hauteur laissant passer un débit  $q = 10 \text{ m}^2/\text{s}$  en O ;
- d'un coursier en pente raide ( $i_1 = 5 \%$ ) et moyennement rugueux (coefficient de Chézy  $C = 50 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ ), d'une longueur de 10 m entre O et A ;
- d'un canal de pente douce ( $i_1 = 0,2 \%$ ) et de même rugosité rugueux que le coursier  $C = 50 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ , d'une longueur de 1000 m entre A et B ;
- d'un seuil d'une pelle  $p = 0,5 \text{ m}$  en B.

Le coursier et le canal sont très larges.



**Figure 5.44 :** aménagement étudié (échelle de longueur non respectée).

On souhaite calculer la courbe de remous et notamment la position et les caractéristiques du ressaut. Pour cela on calcule les caractéristiques de l'écoulement :

- pour le coursier, on est en régime supercritique (torrentiel) :  $h_n = 0,92 \text{ m}$ ,  $Fr_0 = 1,12$ ,  $Fr_n = 3,6$  ;
- pour le canal, on est en régime subcritique (fluvial) :  $h_n = 2,71 \text{ m}$ ,  $Fr_n = 0,71$ .

Pour l'ensemble de l'aménagement, la hauteur critique est la même et vaut :

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = 2,17 \text{ [m]},$$

Connaissant la hauteur d'écoulement à l'amont du coursier ( $h = 2 \text{ m}$ ), on peut calculer la courbe de remous en résolvant l'équation (5.17) numériquement :

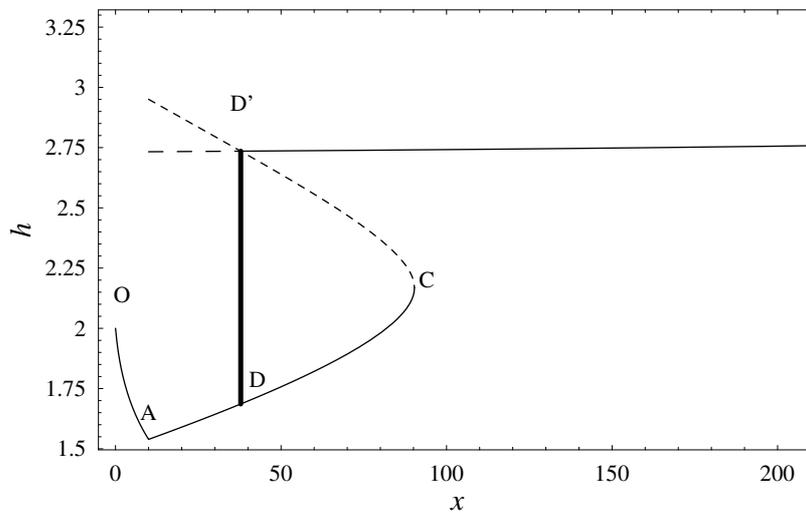
$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - (h_n/h)^3}{1 - (h_c/h)^3}, \quad (5.17)$$

On trouve qu'en A, la hauteur vaut  $h_A = 1,54 \text{ m}$ . On peut ensuite commencer à intégrer l'équation (5.17) pour le canal. Sans surprise, on trouve qu'il y a une transition critique au point C. On trouve numériquement  $x_C = 90 \text{ m}$ . Pour calculer la position du ressaut, on commence par calculer l'autre branche reliant le point C à l'exutoire B. Au niveau du seuil le débit est « contrôlé » par la hauteur de  $p$  :

$$q = \sqrt{g} \left( \frac{2}{3}(H - p) \right)^{3/2} \text{ [m}^2/\text{s]},$$

ce qui implique que la charge totale  $H$  doit s'adapter à l'amont du seuil pour laisser transiter le débit  $q$ . On trouve qu'au voisinage de B, la charge  $H$  doit valoir  $H = 3,73 \text{ m}$ , d'où l'on déduit que la hauteur avant le seuil doit être de  $h_B = 3,25 \text{ m}$ . On calcule alors la courbe de remous entre A et B en résolvant l'équation (5.17) avec la condition à l'aval  $h = h_B$  en B.

La position du front est trouvée en recherchant l'intersection de la courbe conjuguée (tracée en tireté sur la figure) de la courbe de remous AC avec la courbe de remous émanant de D. On trouve que l'intersection se fait en D' de coordonnée :  $x_D = 24 \text{ m}$ . On relie les deux courbes de remous émanant de A et celle venant de B en considérant qu'elle se rejoint au point D et qu'en ce point elles subissent un saut représenté par le segment DD' sur la figure 5.45.  $\square$



**Figure 5.45 :** courbes de remous : solution donnée par l'équation (5.11) (courbe continue), courbe conjuguée (trait discontinue), et position du ressaut (courbe en gras).

1. On commence par calculer les caractéristiques hydrauliques dans les deux biefs.

*exemple.nb*

1

```
In[19]:= q = 10;
         Ch = 50;
         i1 = 0.05;
         hn1 = (q / Ch / Sqrt[i1]) ^ (2 / 3)
         Frn = q / hn1 ^ 1.5 / Sqrt[9.81]
         hc = (q ^ 2 / 9.81) ^ (1 / 3)
         Fr1 = q / 2 ^ 1.5 / Sqrt[9.81]
```

```
Out[22]= 0.928318
```

```
Out[23]= 3.56961
```

```
Out[24]= 2.16825
```

```
Out[25]= 1.12881
```

```
In[26]:= i2 = 0.002;
         hn2 = (q / Ch / Sqrt[i2]) ^ (2 / 3)
         Fr2 = q / hn2 ^ 1.5 / Sqrt[9.81]
```

```
Out[27]= 2.71442
```

```
Out[28]= 0.713922
```

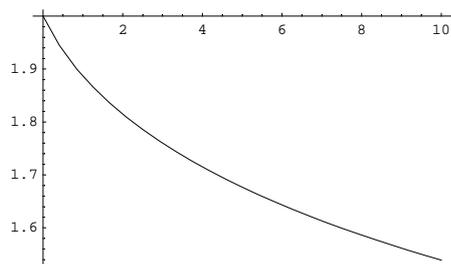
2. On calcule la ligne d'eau dans le bief OA. On note que la hauteur en A vaut 1,54 m, donc elle est supérieure à la hauteur normale, mais inférieure à la hauteur critique, ce qui veut dire qu'en A l'écoulement est toujours supercritique.

*exemple.nb*

1

```
In[14]:= eqn1 = NDSolve[
         {h'[x] == i1 (1 - (hn1/h[x])^3) / (1 - (hc/h[x])^3), h[0] == 2}, h[x], {x, 0, 10}]
         des0 = Plot[Evaluate[h[x] /. eqn1], {x, 0, 10}];
         hs = Evaluate[h[x] /. eqn1][[1]] /. x -> 10
```

```
Out[14]= {{h[x] -> InterpolatingFunction[{{0., 100.}}, <>][x]}}
```



```
Out[16]= 1.53911
```

3. On calcule la ligne d'eau dans le bief AB. Au point C, la routine de calcul s'arrête car une singularité est détectée (dénominateur tendant vers l'infini dans l'équation 5.11).

exemple.nb

1

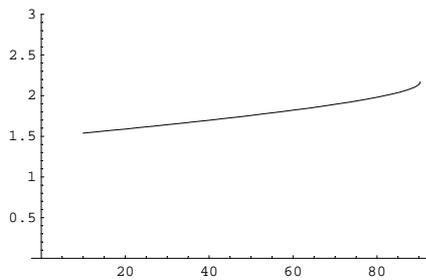
```

In[20]:= eqn2 = NDSolve[
  {h'[x] == i2 (1 - (hn2/h[x])^3) / (1 - (hc/h[x])^3), h[10] == hs}, h, {x, 10, 600}]
x1 = Flatten[h /. eqn2 /.
  HoldPattern[InterpolatingFunction[x_, y_]] -> x][[2]]
des1 = Plot[Evaluate[h[x] /. eqn2], {x, 10, x1}, PlotRange -> {0, 3}];

NDSolve::npsz :
At x == 90.30048673927307`, step size is effectively zero; singularity or stiff system suspected. Plus...

Out[20]= {{h -> InterpolatingFunction[{{10., 90.3005}}, <>]}}
Out[21]= 90.3005

```



4. On calcule la courbe conjuguée de la ligne d'eau dans le bief AB.

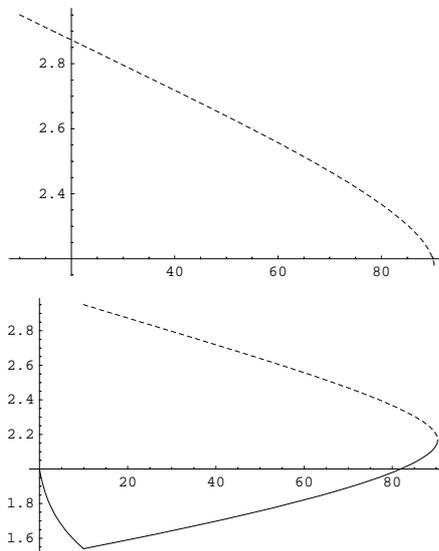
exemple.nb

1

```

In[26]:= conj[h_] := 1/2 * h * (Sqrt[8 * (q/h^1.5 / Sqrt[9.81])^2 + 1] - 1)
des2 = Plot[conj@Evaluate[h[x] /. eqn2][[1]],
  {x, 10, x1}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Dashing[{0.01, 0.01}]];
Show[des0, des1, des2];

```



5. On calcule les caractéristiques hydrauliques au niveau du seuil.

exemple.nb

1

```

In[48]:= p = 0.5;
g = 9.81;
Hf = (q)^(2/3) * 3/2 / g^(1/3) + p // N
sol = h /. Solve[h + (q/h)^2/2/g == Hf, h]
q / sol[[3]]^1.5 / Sqrt[g]

Out[50]= 3.75238

Out[51]= {-1.03212, 1.50644, 3.27807}

Out[52]= 0.537945

```

6. On calcule la courbe de remous dans le bief AB.

exemple.nb

1

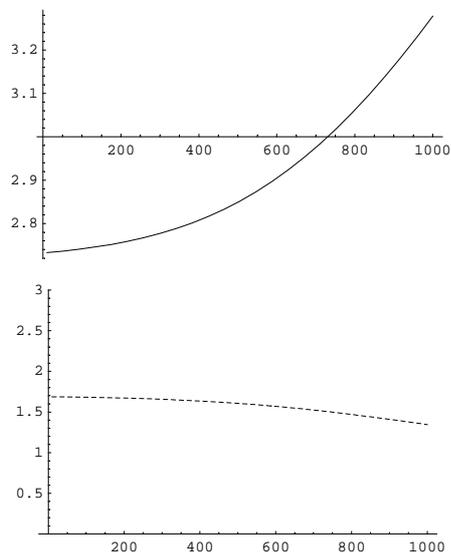
```

In[70]:= eqn3 = NDSolve[{h'[x] == i2 (1 - (hn2/h[x])^3) / (1 - (hc/h[x])^3), h[1000] == sol[[3]]},
h, {x, 1000, 10}]
x12 = Flatten[h /. eqn3 /.
HoldPattern[InterpolatingFunction[x_, y_]] -> x][[1]]
des3 = Plot[Evaluate[h[x] /. eqn3], {x, 1000, x12}, PlotRange -> All];
des4 = Plot[conj@(Evaluate[h[x] /. eqn3][[1]]),
{x, 1000, x12}, PlotRange -> {0, 3}, PlotStyle -> Dashing[{0.01, 0.01}]];

```

```
Out[70]= {{h -> InterpolatingFunction[{{10., 1000.}}, <>]}}
```

```
Out[71]= 10.
```

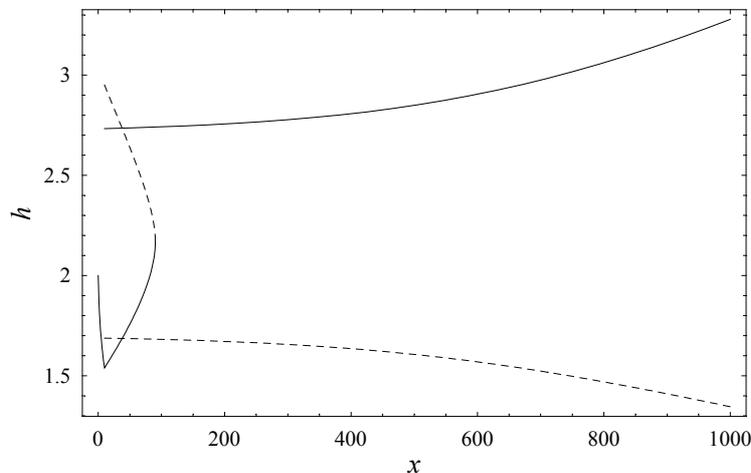


7. On peut tracer les courbes de remous et leur conjuguée. On note la symétrie de la représentation graphique.

exemple.nb

1

```
In[57]:= des = Show[des0, des1, des2, des3, des4, Frame -> True, Axes -> False, FrameLabel ->
  {StyleForm[" x ", FontSize -> 18, FontSlant -> "Italic", FontFamily -> "Times",
    PrivateFontOptions -> {"OperatorSubstitution" -> False}],
  StyleForm[" h ", FontSize -> 18, FontFamily -> "Times", FontSlant -> "Italic",
    PrivateFontOptions -> {"OperatorSubstitution" -> False}]},
  DefaultFont -> {"Times", 14}, ImageSize -> 500];
```



8. On calcule le point d'intersection entre la courbe de remous (l'une des deux) et la conjuguée de l'autre courbe.

exemple.nb

1

```
In[58]:= xr = x /. FindRoot[
  conj@(Evaluate[h[x] /. eqn3][[1]]) == Evaluate[h[x] /. eqn2], {x, 10, 90}][[1]]
  FindRoot[conj@(Evaluate[h[x] /. eqn2][[1]]) == Evaluate[h[x] /. eqn3], {x, 10, 90}]

Out[58]= 37.8227

Out[59]= {x -> 37.8227}
```

## 5.5.4 Effet d'un obstacle

### Écoulement sur une topographie

Considérons un écoulement permanent de profondeur  $h_0$  et de vitesse  $\bar{u}_0$  à la cote de référence  $z_0 = 0$ . Le nombre de Froude associé à cet écoulement est  $F_0 = u_0/\sqrt{gh_0}$ . Sur le fond, il existe une protubérance de hauteur  $z_m$ ; la cote du fond est donnée par une équation de la forme  $y = z(x)$ .

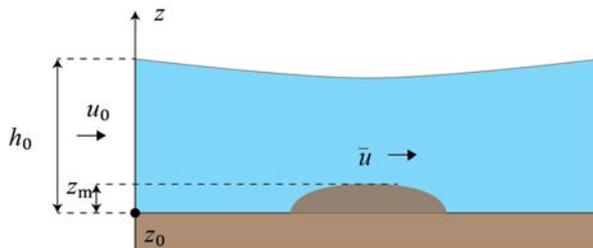


Figure 5.46 : variation d'une ligne d'eau le long d'une protubérance du lit.

La conservation de la charge implique d'après le théorème de Bernoulli

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\bar{u}^2}{2g} + h + z \right) = 0,$$

tandis que la conservation du débit entraîne

$$\frac{d}{dx} (h\bar{u}) = 0 \Rightarrow \bar{u}h = u_0 h_0. \quad (5.18)$$

En tout point  $x$ , on a donc :

$$\frac{\bar{u}^2}{2g} + h + z = \frac{\bar{u}_0^2}{2g} + h_0 + z_0,$$

qui peut se transformer en divisant par  $h_0$  (et puisque  $z_0 = 0$ )

$$\frac{1}{2} \left( F_0 \frac{h_0}{h} \right)^2 + \frac{h}{h_0} + \frac{z}{h_0} = \frac{1}{2} F_0^2 + 1. \quad (5.19)$$

Il existe certaines contraintes quant à l'utilisation de cette équation pour déterminer la ligne d'eau dans des cas concrets. En effet si on différentie (5.19) par  $x$ , on obtient

$$\left( \frac{\bar{u}^2}{gh} - 1 \right) \frac{dh}{dx} = \frac{dz}{dx},$$

ce qui montre que sur la crête de l'obstacle ( $z = z_m, z' = 0$ ) on doit avoir  $Fr = \bar{u}/\sqrt{gh} = 1$  (écoulement critique) ou bien  $h' = 0$ . Notons aussi que si localement le nombre de Froude vaut 1, alors  $z' = 0$ , ce qui veut dire que le nombre de Froude ne peut pas dépasser la valeur critique 1 (ou bien passer au-dessous de 1 si  $F_0 > 1$ ) quand  $F_0 < 1$ . Un écoulement subcritique reste subcritique (et inversement pour un écoulement supercritique). En effet, si  $F_0 < 1$ , alors  $h$  décroît au fur et à mesure que l'on s'approche de l'obstacle et  $Fr$  augmente en conséquence. Quand on est au sommet de la bosse,  $z$  est maximal ( $z' = 0$ ) et  $F$  peut éventuellement prendre la valeur critique (si ce n'est pas le cas  $Fr < 1$  et  $h' = 0$  au sommet de la bosse). Ensuite quand on s'éloigne de l'obstacle,  $h$  augmente et  $Fr$  diminue. Cette condition implique également qu'il existe une hauteur maximale d'obstacle associée à un nombre de Froude  $Fr = 1$ ; de l'équation (5.19) et de l'équation (5.18), on tire en posant  $Fr = 1$  que

$$\frac{z_{max}}{h_0} = 1 - \frac{3}{2} F_0^{2/3} + \frac{1}{2} F_0^2.$$

Lorsque  $z_m > z_{max}$ , on ne peut appliquer aussi simplement le théorème de Bernoulli et l'écoulement prend une forme beaucoup plus complexe, notamment avec la formation de ressaut et d'onde de part et d'autre de l'obstacle.

## Dune

À partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2 + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T},$$

on déduit qu'en régime permanent ( $\partial_t \mathbf{u} = 0$ ) et pour un écoulement irrotationnel (ce qui implique que  $(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = 0$ ), la contrainte de cisaillement au fond (en  $y = 0$ ) vérifie l'équation de bilan suivante

$$g \sin \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} = g \frac{\partial H_s}{\partial x}, \quad (5.20)$$

où on a introduit l'énergie spécifique :

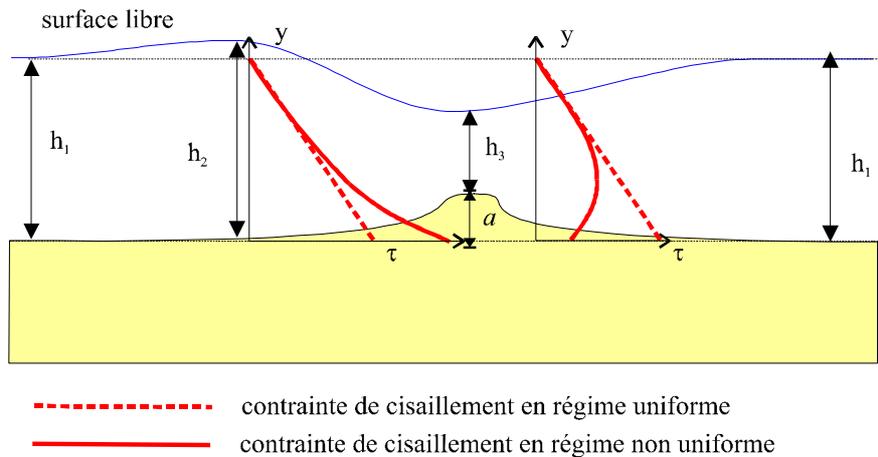
$$H_s = h \cos \theta + \frac{\bar{u}^2}{2g},$$

et on a supposé que la pression était hydrostatique (ce qui se montre en considérant la projection selon  $y$  de la quantité de mouvement et en supposant que les variations de hauteur sont faibles):  $p = \rho gh \cos \theta$ .

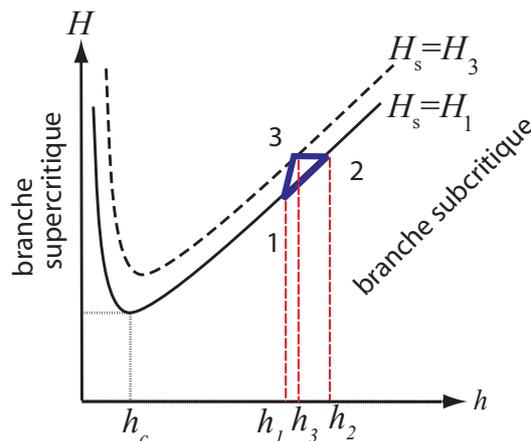
En régime permanent et uniforme, l'énergie spécifique est constante et on retrouve que la contrainte de cisaillement varie selon l'expression déjà vue dans le chapitre consacré au régime permanent uniforme

$$\tau = \tau_p \left(1 - \frac{y}{h}\right),$$

avec la contrainte au fond  $\tau_p = \rho gh \sin \theta$ . On a reporté sur la figure 5.48 la variation de l'énergie spécifique en fonction de la hauteur d'écoulement à débit constant. L'effet d'une protubérance sur la contrainte de cisaillement dépend du régime d'écoulement. La protubérance du fond a modifié la surface libre de l'eau (voir fig. 5.47). Elle induit donc le passage à un régime non uniforme. Recherchons comment varie la contrainte de cisaillement de part et d'autre de la protubérance. On se placera dans le cas d'un régime fluvial (le traitement du régime torrentiel est similaire).



**Figure 5.47 :** variation d'une ligne d'eau le long d'une protubérance. On a également reporté les variations de la contrainte de cisaillement selon que l'on est à l'amont ou à l'aval de la protubérance. La variation de la contrainte de cisaillement en régime non uniforme est calculée à partir de l'équation (5.20).



**Figure 5.48 :** variation de l'énergie spécifique en fonction de la hauteur à débit constant pour le régime permanent uniforme établi loin de la protubérance. La courbe en pointillé correspond à l'énergie spécifique au droit de la protubérance (déduite d'une translation verticale de  $a$  de la précédente). Les points 1, 2, 3 renvoient aux indices des hauteurs d'écoulement. Dans le diagramme  $h - H$ , les courbes d'énergie spécifiques sont toutes parallèles et la distance entre deux courbes correspond à la différence d'énergie potentielle.

En régime fluvial, en admettant que l'énergie totale ( $H_s + y_\ell$ , avec  $y_\ell$  la cote du fond) se conserve, l'énergie spécifique au droit de la protubérance (point 3) doit être plus faible que l'énergie spécifique du régime uniforme (point 1). La différence entre les deux énergies vaut  $a$ . Comme l'indique la figure 5.48, cela conduit aux deux observations suivantes :

- sur la face amont de la protubérance, la contrainte de cisaillement près du fond est plus forte qu'en régime uniforme ;
- sur la face aval, la contrainte de cisaillement est plus faible près du fond que celle déterminée en régime uniforme.

Lorsqu'on est près des conditions critiques d'érosion pour le régime uniforme, on en déduit que la face amont sera le lieu d'une érosion plus importante et qu'inversement, la face aval sera le siège d'un dépôt (si la contrainte pariétale est suffisamment faible). Lorsque le processus d'érosion et dépôt de part et d'autre de la protubérance est opérant, on assiste au déplacement de la structure ainsi créée. On désigne en général par *dune* le nom de telles structures morphologiques, qui se déplace de l'amont vers l'aval.

### Passage d'un seuil ou d'un déversoir

Les *déversoirs* sont des ouvrages aux formes variées : déversoir à paroi mince pour mesure un débit (plaque mince verticale), barrage-déversoir (barrage au fil de l'eau avec évacuation du trop plein), déversoir mobile (vanne à clapet, vanne à batardeaux, etc.) qui permet d'ajuster la pelle, et déversoir à seuil épais (ouvrage souvent profilé). Un seuil permet de « contrôler » un débit (voir figure 5.49).

Si le seuil est suffisamment épais<sup>12</sup>, on a vu précédemment que la hauteur d'écoulement au niveau de la crête du seuil est nécessairement égale à la hauteur critique (voir figure 5.50), c'est-à-dire

$$h_c = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3}, \quad (5.21)$$

avec  $q$  le débit par unité de largeur à l'amont du seuil. La charge totale au niveau du seuil vaut donc :

$$H = h_c + \frac{q^2}{2gh_c^2} + p, \quad (5.22)$$

avec  $p$  la « pelle » (hauteur de seuil). Dans le cas d'un fluide parfait, la charge au niveau du seuil est égale à la charge calculée à l'amont  $H = \bar{u}^2/(2g) + h$ , avec  $\bar{u} = q/h$  la vitesse moyenne (sur de courtes distances, la charge totale  $H$  se conserve). En égalant les deux charges totales, on déduit la hauteur d'eau juste à l'amont du seuil, ce qui permet de résoudre l'équation de la courbe de la courbe de remous (5.3) sans avoir la singularité  $h = h_c$  au niveau du seuil ; en effet, on ne peut pas intégrer cette équation en prenant comme condition limite aval  $h = h_c$  puisque le dénominateur du terme de droite dans (5.3) serait nul. En se servant des équations (5.21) et (5.22), on déduit que le débit par unité de largeur est en fonction de la charge totale  $H$  :

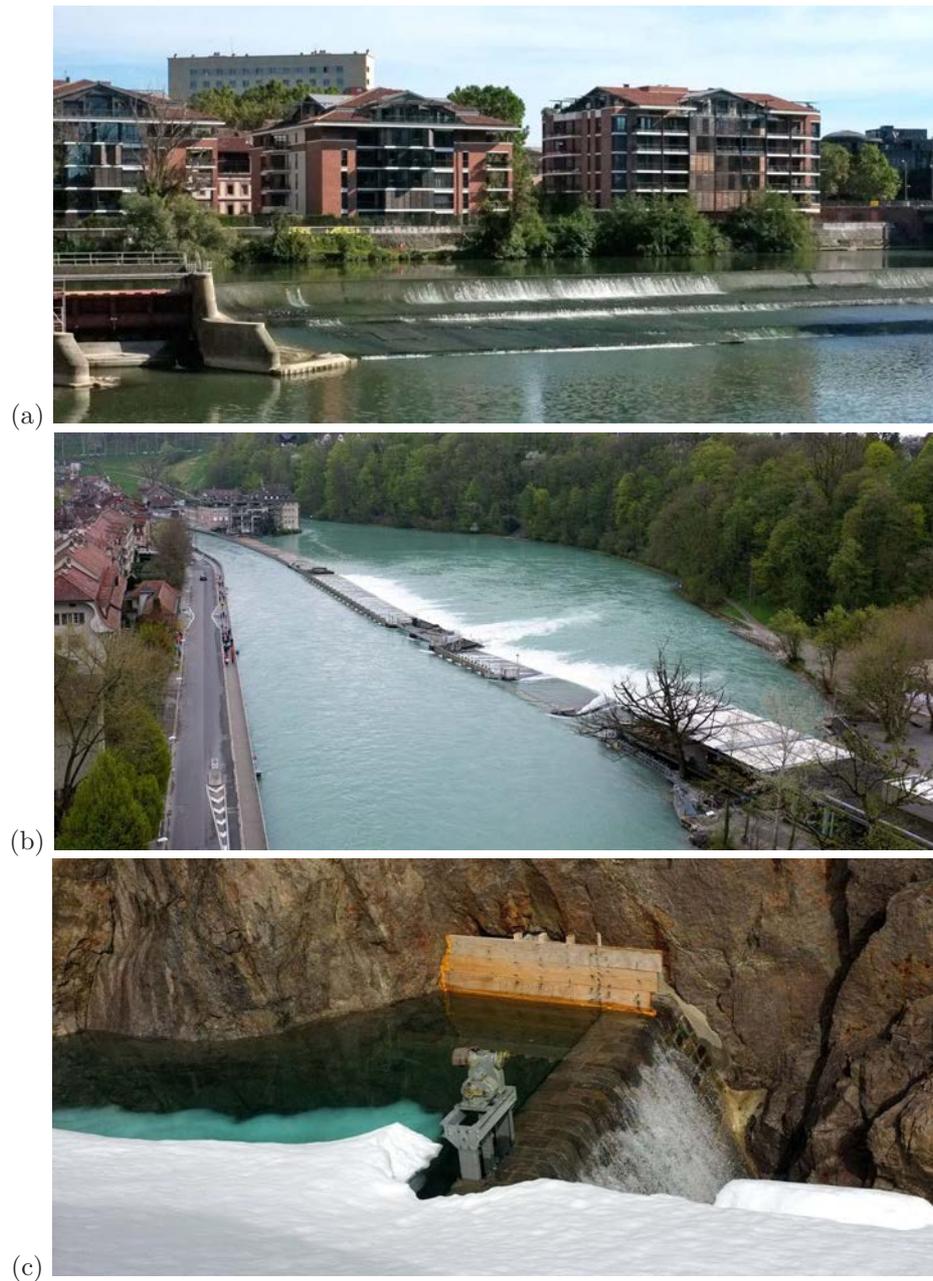
$$q = \sqrt{g} \left( \frac{2}{3}(H - p) \right)^{3/2}. \quad (5.23)$$

Cette formule permet en pratique de :

- déterminer le débit si l'on connaît la charge totale  $H$  par application directe de la formule (5.23). Cette formule est par exemple utile pour évaluer le débit transitant par un déversoir d'évacuateur de crue d'un barrage. ;
- calculer la charge totale  $H$  connaissant le débit  $q$  par inverse de la formule (5.23) :

$$H = \frac{3}{2}h_c + p = \frac{3}{2} \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} + p \quad (5.24)$$

12. Un seuil épais a une épaisseur de crête  $\ell$  telle que  $\ell > 3(H - p)$ .

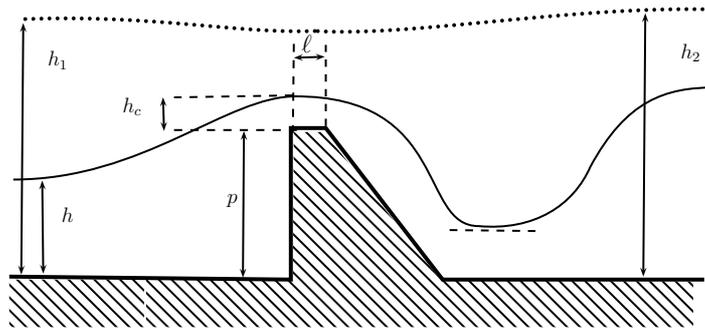


**Figure 5.49 :** (a) seuil sur la Garonne à Toulouse. (b) déversoir latéral sur l'Aar à Berne. (c) seuil maçonné avec prise d'eau latérale.

- estimer la hauteur d'eau équivalente juste à l'amont du seuil soit en résolvant (5.24) avec  $H = \bar{q}^2/(2gh^2) + h$  (il faut donc résoudre une équation de degré 3) soit en supposant que la vitesse de l'eau est faible à l'amont du déversoir  $u^2/(2g) \ll h$  et donc

$$h \approx \frac{3}{2} \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} + p.$$

Cette façon de procéder est utile quand on doit résoudre une équation de courbe de remous (5.10) en présence d'une chute d'eau (au passage du seuil). Si l'écoulement est subcritique à l'aval de l'ouvrage hydraulique, il faut résoudre (5.10) d'aval vers l'amont en partant du seuil. Or, la seule condition à la limite que l'on ait au niveau du seuil est  $h = h_c$  et cette relation est



**Figure 5.50 :** passage d'un seuil. Trait continu : seuil dénuyé; trait pointillé : seuil nuyé. Attention les échelles de longueur ne sont pas respectées.

incompatible avec (5.10) (dénominateur infini). On fixe alors une nouvelle condition aux limites juste à l'amont du seuil. Comme la distance est faible entre ce point et le seuil, on peut négliger la perte de charge. La charge hydraulique (5.22) est calculée au niveau du seuil. Puis, de cette valeur, on déduit quelle doit être la hauteur d'eau juste à l'aval du seuil.

En pratique, l'approximation de fluide parfait n'est pas très bonne et on emploie à la place la formule empirique pour un seuil dénuyé<sup>13</sup> :

$$q = C_D \sqrt{g} \left( \frac{2}{3} (H - p) \right)^{3/2},$$

avec  $C_D$  le coefficient de débit. Ce coefficient dépend de la géométrie du seuil (épais, à paroi mince), de sa largeur, et de la géométrie d'écoulement (contraction ou non de la lame). Dans le cas où le seuil est nuyé, la loi de débit est alors une relation liant le débit et la différence de hauteur de part et d'autre du seuil nuyé

$$Q = C_D \sqrt{g} \left( \frac{2}{3} (h_1 - h_2) \right)^{1/2} (h_2 - p).$$

□



**Figure 5.51 :** seuil dénuyé sur le Tibre au niveau de l'Île tibérine à Rome.

13. Un seuil est dit dénuyé lorsque l'écoulement à l'aval du seuil n'influe pas sur l'écoulement à l'amont, ce qui implique que la hauteur critique est bien atteinte au droit du seuil et/ou qu'un régime supercritique s'établit au pied du seuil. La photographie montre par exemple l'existence d'un ressaut à l'aval immédiat du seuil non visible sur le Tibre : le seuil est dénuyé.



# 6

## Écoulements laminaires et turbulents

### 6.1 Équations de Navier-Stokes

La plupart des fluides de notre environnement (eau, air, huile, etc.) sont dits *newtoniens* car leur loi de comportement suit la loi de Newton. D'autres fluides ne suivent pas cette loi et on les dit *non newtoniens*. La boue ou la peinture par exemple sont des fluides non newtoniens.

#### 6.1.1 Bases théoriques

Au repos, un fluide ne subit que l'action de la gravité et les seules contraintes en son sein sont les pressions. On a vu précédemment la loi de la statique :

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g} = 0,$$

montrant que le gradient de pression  $p$  doit contrebalancer exactement le champ de pesanteur pour qu'il y ait équilibre ( $\mathbf{u} = 0$ ). Que se passe-t-il maintenant si le fluide n'est plus au repos ?

On a vu au chapitre précédent que les équations du mouvement sont composées de l'équation de conservation de la masse (4.8) et de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (4.9). Dans cette dernière apparaît un terme  $\nabla \cdot \mathbf{T}$ , qui représente les extra-contraintes, c'est-à-dire les contraintes supplémentaires dues au mouvement du fluide (cf. § B.4.2). Pour fermer les équations du mouvement (c'est-à-dire pour qu'il y ait autant d'équations que de variables), il faut disposer d'une équation supplémentaire, appelée équation ou loi de comportement, qui décrit les relations entre contraintes et vitesses de déformation au sein du fluide.

#### Loi de comportement newtonienne

La relation la plus simple que l'on puisse imaginer entre  $\Sigma$  et  $\mathbf{D}$  est une relation linéaire. La loi expérimentale de Newton invite à écrire :

$$\boxed{\Sigma = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D} \text{ ou bien } \mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D}}, \quad (6.1)$$

où  $\mu$  est la viscosité dynamique [Pa·s] et  $\mathbf{1}$  le tenseur identité. On appelle cette relation la *loi de comportement newtonienne*. Lorsqu'on injecte cette forme de loi de comportement dans les équations de conservation de la quantité de mouvement, on obtient les *équations dites de Navier-Stokes* (voir infra).

### 6.1.2 Forme générique des équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sous forme tensorielle s'écrivent :

$$\boxed{\varrho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \right) = \varrho \mathbf{g} - \nabla p + 2\mu \nabla \cdot \mathbf{D}}, \quad (6.2)$$

avec  $\mathbf{D}$  le tenseur des taux de déformation (partie symétrique du gradient de vitesse  $\nabla \mathbf{u}$ ). Il faut compléter ce système par l'équation de continuité qui, pour un fluide incompressible, prend la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6.3)$$

pour aboutir aux équations complètes du mouvement. Il existe plusieurs façons d'écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement (6.2). Par exemple, en utilisant l'égalité (obtenue en servant du théorème de Green-Ostrogradski)

$$\mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}),$$

où  $\mathbf{u} \mathbf{u}$  est un tenseur d'ordre 2 (produit tensoriel de  $\mathbf{u}$  par lui-même), on obtient la forme suivante équivalente à (6.2)

$$\varrho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) \right) = \varrho \mathbf{g} - \nabla p + 2\mu \nabla \cdot \mathbf{D} \quad (6.4)$$

En dimension 2 et dans un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ , les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible s'écrivent :

– *Conservation de la masse (équation de continuité)*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.5)$$

avec  $\mathbf{u} = (u, v)$  les composantes de la vitesse

– *Conservation de la quantité de mouvement*

$$\varrho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \varrho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y}, \quad (6.6)$$

$$\varrho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \varrho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \quad (6.7)$$

avec  $\mathbf{g} = (g_x, g_y)$  la projection du vecteur  $\mathbf{g}$  (accélération de la gravitation) sur les axes principaux du repère cartésien, et où les composantes du tenseur des extra-contraintes  $\mathbf{T}$  sont facilement établies à partir de sa définition pour un fluide newtonien :  $\mathbf{T} = 2\mu \mathbf{D}$  avec  $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\dagger)$  :

$$\mathbf{T} = 2\mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Rappelons que  $T_{xy}$  s'appelle la *contrainte de cisaillement*,  $T_{xx}$  s'appelle la *contrainte normale* dans la direction  $x$ , et  $T_{yy}$  s'appelle la *contrainte normale* dans la direction  $y$ .

On se reportera au § B.5 pour voir comment s'écrivent ces équations quand elles sont projetées dans un repère cartésien de dimension 3 ou bien écrites en coordonnées cylindriques.

Les équations de Navier-Stokes forment un jeu d'équations dites « fermées » car il y a autant de variables (ou d'inconnues) que d'équations. Pour utiliser ces équations pour résoudre un problème pratique, il faut des équations supplémentaires, qui fournissent les conditions initiales et aux limites.

### 6.1.3 Conditions aux limites

Pour résoudre un problème (différentiel) d'écoulement, il faut connaître

- les conditions initiales : initialement à  $t = 0$ , quelle était la configuration de l'écoulement ?
- les conditions aux limites : aux frontières du domaine de calcul, qu'impose-t-on à l'écoulement ?

On va s'intéresser ici aux conditions aux limites. Comme il y a deux types de variables dans les équations du mouvement (variables cinématiques liées au champ de vitesse et variables dynamiques reliées au champ de contraintes), on considère

- les conditions aux limites *cinématiques* : ce sont les conditions que doivent vérifier le champ de vitesse ;
- les conditions aux limites *dynamiques* : ce sont les conditions que doivent vérifier les champs de contrainte et de vitesse aux frontières du domaine.

En général, on considère également deux types de frontières :

- les frontières solides sont des parois, qui ne se déforment pas (ou très peu) ;
- les frontières matérielles sont des interfaces entre deux liquides ou un liquide et un gaz (la surface libre est une frontière matérielle). Dans ce cas, la frontière a une forme qui peut varier au cours du temps et il faut donc une équation qui décrit comment sa forme et sa position varient avec le temps.

#### Frontière solide

Pour une paroi solide (par exemple, sur une facette orientée par  $\mathbf{n}$ ), on considère que la vitesse vérifie les deux conditions suivantes

- *condition de non-pénétration* : le fluide ne peut pas entrer dans le solide (qui est imperméable), donc la composante normale de la vitesse est nulle :  $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  ;
- *condition d'adhérence* (ou de non-glissement) : le fluide adhère à la paroi solide, donc la composante tangentielle doit également être nulle :  $u_t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0$ , avec  $\mathbf{t}$  un vecteur tangent à la paroi.

Il s'ensuit que la vitesse  $\mathbf{u}$  est nulle le long d'une paroi solide. C'est la condition aux limites cinématique.

Pour la condition aux limites dynamiques, on écrit qu'il y a équilibre de l'interface (si celle-ci est fixe), donc d'après le principe d'action et de réaction, on a

$$\Sigma_{fluide} \cdot \mathbf{n} + \Sigma_{solide} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

avec  $\Sigma_{fluide}$  le tenseur des contraintes fluides,  $\Sigma_{solide}$  le tenseur des contraintes du solide, puisque la contrainte au sein du fluide doit coïncider avec celle du solide le long de l'interface.

#### Frontière matérielle

En général, une frontière matérielle est une interface mouvante entre deux fluides ; dans quelques cas, par exemple pour la surface libre d'un écoulement permanent, cette surface peut occuper un lieu fixe de l'espace.

On écrit  $F(\mathbf{x}, t) = 0$  l'équation (implicite) de la frontière. Par exemple, pour une surface libre d'un écoulement d'eau le long d'une rivière, on écrit  $F = y - h(x, t) = 0$ , avec  $h$  la hauteur d'eau par rapport au fond. La normale en tout point est donnée par  $\nabla F / |\nabla F|$ . Une surface matérielle vérifie

$$\frac{dF}{dt} = 0,$$

car un point de la surface matérielle à un instant donné reste toujours sur cette surface à n'importe quel autre instant (ses coordonnées peuvent changer au cours du temps si la surface se déforme, mais

il appartient toujours à l'interface). Par exemple, dans le cas de la surface libre d'une rivière, on a

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}(y - h(x,t)) = 0 \implies v = \frac{dy}{dt} = \frac{dh}{dt}, \quad (6.9)$$

où  $v$  est ici la vitesse verticale (dans la direction  $y$ ) de la surface libre.

Comme pour la paroi solide, la condition dynamique implique l'égalité des contraintes entre les fluides des deux milieux au niveau de l'interface. S'il y a des effets de tension de surface, il convient de rajouter un terme supplémentaire traduisant cette tension pour la composante normale des efforts. Très souvent, dans le cas d'une surface libre d'un écoulement d'eau, il est possible de négliger l'action du fluide ambiant (l'air) et dans ce cas, on a

$$\Sigma_{fluide} \cdot \mathbf{n} = (-p\mathbf{1} + \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

le long de la surface libre.

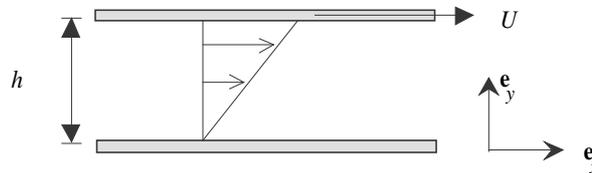
## 6.2 Base phénoménologique du comportement newtonien

La loi de Newton  $\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D}$  tire son nom de l'expérience de Newton, qui est le premier à avoir mis en évidence et proposer une relation décrivant la résistance d'un fluide visqueux. En 1687, Isaac Newton écrivait « the resistance which arises from the lack of slipperiness of the parts of the liquid, other things being equal, is proportional to the velocity with which the parts of the liquid are separated from one another ». Cette observation est à la base de la théorie newtonienne des fluides. Traduit sous une forme moderne, cette phrase signifie que la résistance à l'écoulement (par unité de surface) (autrement dit la contrainte  $\tau$ ) est proportionnelle au gradient de vitesse  $U/h$ :

$$\tau = \mu \frac{U}{h} \quad (6.10)$$

où  $U$  est la vitesse relative à laquelle se déplace la plaque supérieure et  $h$  est l'épaisseur de fluide cisailé (voir figure 6.1).  $\mu$  est un coefficient intrinsèque au fluide, appelé *viscosité*. Cette relation est d'un grand intérêt pratique :

- c'est la façon la plus simple d'exprimer une loi rhéologique (loi linéaire) ;
- elle fournit un moyen de mesurer la viscosité  $\mu$ .



**Figure 6.1 :** expérience de Newton. Cette expérience consiste à cisailer une couche de fluide entre deux plaques (écoulement de Couette).

En 1904, Trouton<sup>1</sup> réalisa des expériences sur une barre de section carrée composée d'un fluide très visqueux (bitume), qui consistait à étirer le fluide à une vitesse constante. La figure 6.2 montre le principe de l'expérience. Le fluide subit une elongation axiale à la vitesse constante  $\dot{\alpha}$ , définie comme étant :  $\dot{\alpha} = \dot{\ell}/\ell$ , où  $\ell$  est la longueur de l'échantillon de fluide. Pour ses expériences, Trouton trouva une relation linéaire entre la force normale par unité de surface (contrainte normale)  $\sigma$  et la vitesse d'elongation :

$$\sigma = \mu_e \dot{\alpha} = \mu_e \frac{1}{\ell} \frac{d\ell}{dt} \quad (6.11)$$

Cette relation est structurellement très similaire à celle proposée par Newton, mais elle introduit un nouveau coefficient, qu'on appelle de nos jours la *viscosité de Trouton* ou *viscosité elongationnelle*. On trouve qu'on a la relation suivante entre viscosités  $\mu_e = 3\mu$ .

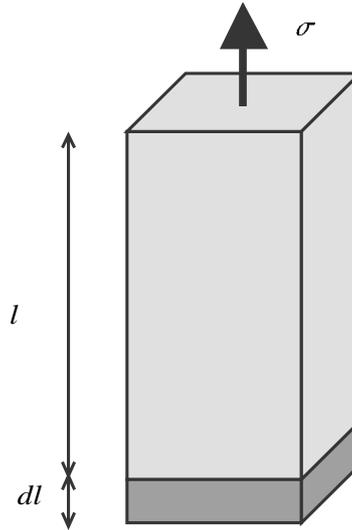
Cela peut sembler un peu gênant que deux expériences similaires (à première vue) ne fournissent pas le même résultat. En fait ces deux expériences sont cohérentes si on se sert des équations de Navier-Stokes, c'est-à-dire des équations du mouvement sous forme tensorielle et non pas simplement de lois empiriques.

Dans le cas de l'expérience de Newton, on montre facilement que le champ de vitesse est linéaire :  $\mathbf{u} = U\mathbf{e}_x y/h$ . Le gradient de vitesse ou *taux de cisaillement* est  $\dot{\gamma} = \partial u/\partial y = U/h$  et on trouve que  $\tau = \mu\dot{\gamma}$ .

Dans le cas de l'expérience de Trouton, on peut facilement résoudre les équations de Navier-Stokes si l'on néglige les termes inertiels (c'est-à-dire le terme  $\rho d\mathbf{u}/dt$ ), ce qui est plausible car, pour pouvoir faire une expérience d'elongation, il faut choisir un fluide très visqueux et le solliciter lentement (expérience

Voir  
§ 6.3.

1. Frederick Thomas Trouton (1863–1922) était un physicien anglais. On lui doit notamment la loi de Trouton, qui énonce que le changement molaire d'enthalpie (ou de l'entropie) est constant au point d'ébullition.



**Figure 6.2** : expérience de Trouton. Il s'agit de l'élongation axiale d'un barreau de fluide soumis à une contrainte normale  $\sigma$ .

à très faible nombre de Reynolds). Les composantes du tenseur des taux de déformation sont :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}/2 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\alpha}/2 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Le tenseur des contraintes peut être écrit :

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Une simple comparaison de ces équations conduit à poser :  $p = -\mu\dot{\alpha}$  and  $\sigma = 3\mu\dot{\alpha}$ , c'est-à-dire :  $\mu_e = 3\mu$ .

## 6.3 Méthodes de résolution des équations de Navier-Stokes

Nous allons ici montrer comment les équations de Navier-Stokes permettent de retrouver les observations expérimentales de Newton et Trouton décrites précédemment.

### 6.3.1 Expérience de Newton

#### Étape 1 : recherche des symétries

On réalise une expérience de cisaillement en régime permanent. *A priori*, les composantes de la vitesse sont des fonctions des variables  $x$ ,  $y$ , et  $t$ . On va simplifier cette dépendance à l'aide des considérations suivantes :

- le régime est permanent, donc on peut écrire que  $\partial_t(\cdot) = 0$  pour chacune des composantes ;
- l'écoulement est unidirectionnel dans la direction  $x$ . La vitesse ne peut pas dépendre de  $x$ . Attention cela n'est pas nécessairement vrai pour la pression car certains écoulements unidirectionnels sont dus à un gradient de pression (écoulement en charge). Nous verrons ici que la pression est effectivement indépendante de  $x$ , mais cela n'est pas vrai pour tous les écoulements dans des conduits.



Au final, cela veut dire que l'on a les dépendances suivantes :  $p(x, y)$ ,  $u(y)$ , et  $v(y)$ .

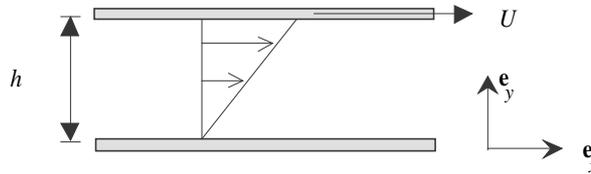


Figure 6.3 : expérience de Newton.

#### Étape 2 : équations du mouvement

Les équations de Navier-Stokes pour un matériau incompressible s'écrivent

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}.$$

On considère deux sortes de conditions aux limites :

- cinématique : que valent les vitesses aux limites du domaine fluide ?
- dynamique : quelles sont les forces sur ces limites du domaine ?

Pour les vitesses :

- le long des plaques (en  $y = 0$  et  $y = h$ ), la condition de non-pénétration implique

$$v = 0 \tag{6.14}$$

- le long des plaques, la condition d'adhérence donne

$$u = U \text{ en } y = h, \tag{6.15}$$

$$u = 0 \text{ en } y = 0. \tag{6.16}$$

Pour les forces :

- pas de condition imposée sur la plaque inférieure ;

- en revanche, pour la plaque supérieure en mouvement, la force sur la facette supérieure doit correspondre à celle imposée par la mise en mouvement de la plaque. L'équation du mouvement pour la plaque de masse  $M$  et de vitesse  $\mathbf{v}$  est

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = M\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{F},$$

$\mathbf{F} = F\mathbf{e}_x$  la force appliquée par l'opérateur pour mettre la plaque en mouvement et  $\mathbf{R} = (R_x, R_y)$  étant la force exercée par le fluide sur la plaque, qui par définition s'écrit

$$\mathbf{R} = \int_S \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} dS.$$

avec  $\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T}$  le tenseur des contraintes totales et  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_y$  la normale orientée de l'intérieur (de la plaque) vers l'extérieur. Comme la vitesse de la plaque est supposée constante, on tire de l'équation du mouvement de cette plaque que

$$F + R_x = 0.$$

$$-Mg + R_y = 0.$$

soit  $R_x = -F$  et  $R_y = Mg$ .

Cela donne donc

$$\int_S \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_y dS = F\mathbf{e}_x - Mg\mathbf{e}_y,$$

soit encore en  $y = h$

$$p - T_{yy} = \frac{Mg}{S}, \quad (6.17)$$

$$T_{xy} = \tau = \frac{F}{S}, \quad (6.18)$$

avec  $S$  la surface de la plaque ;

- sur la facette du fond, on pourrait écrire que la force exercée par le fluide doit correspondre à la force de réaction du support, mais on n'a pas besoin de conditions aux limites à cet endroit. On ne détaille donc pas cette condition.

### Étape 3 : résolution des équations

On commence à résoudre l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

soit

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Il s'ensuit que  $v$  est constant, or la condition de non-pénétration (6.14) impose  $v = 0$ .

Examinons le tenseur des taux de déformation

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & u'(y) \\ u'(y) & 0 \end{bmatrix},$$

où l'on note que les termes normaux ( $D_{xx} = (\partial_x u)$  et  $D_{yy} = (\partial_y v)$ ) sont nuls compte tenu de la dépendance des composantes de la vitesse vis-à-vis des variables d'espace et de la nullité de  $v$ . Le tenseur des extra-contraintes s'écrit donc :

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \mu u'(y) \\ \mu u'(y) & 0 \end{bmatrix}.$$

La projection selon  $x$  de ces équations donne

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}, \quad (6.19)$$

où  $\tau = T_{xy} = \mu u'(y)$  est la contrainte de cisaillement. On fait de même pour la direction  $y$

$$-\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (6.20)$$

d'où l'on déduit que la pression est de forme hydrostatique

$$p = -\rho g y + a,$$

avec  $a$  une constante d'intégration. La condition aux limites (6.17) donne

$$p = \frac{Mg}{S} \text{ en } y = h,$$

car  $T_{xx} = 0$ . Donc on déduit que  $a = Mg/S + \rho g h$ . L'intégration de l'équation (6.19) donne :

$$u = by + c,$$

avec  $b$  et  $c$  deux constantes d'intégration. Les conditions aux limites (6.15–6.16) imposent  $c = 0$  et  $b = U/h$ . Les profils de vitesse et de pression s'écrivent donc

$$u = U \frac{y}{h} \text{ et } p = \frac{Mg}{S} + \rho g(h - y).$$

La force de frottement correspond à la force appliquée par l'opérateur

$$F = S\tau = S\mu \frac{du}{dy} = S\mu \frac{U}{h}.$$

On vérifie donc la relation trouvée expérimentalement par Newton, qui affirme que la force de frottement est une fonction linéaire de la vitesse  $U$  de la plaque et varie inversement proportionnelle à l'espacement  $h$  entre les deux plaques.

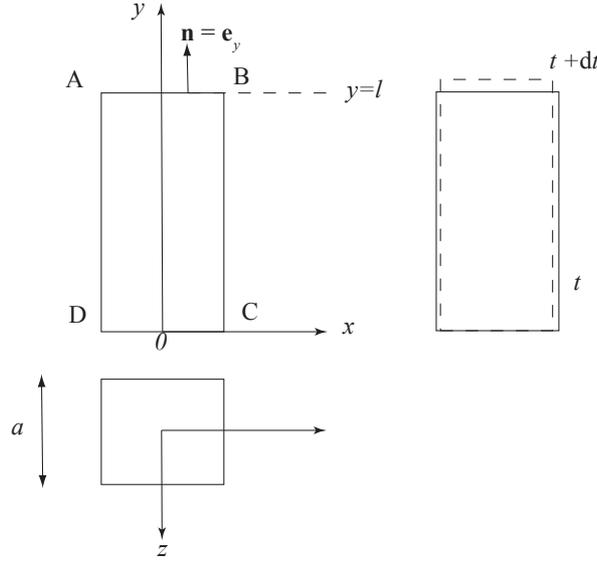
### 6.3.2 Expérience de Trouton

#### Étape 1 : recherche des symétries

On réalise une expérience d'élongation en régime permanent. *A priori*, les composantes de la vitesse sont des fonctions des variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , et  $t$ . On va simplifier cette dépendance à l'aide des considérations suivantes :

- Le régime est permanent, donc on peut écrire que  $\partial_t(\cdot) = 0$  pour chacune des composantes.
- L'écoulement est unidirectionnel dans la direction  $y$ . Comme il s'agit d'un mouvement d'élongation, cela veut dire que deux particules initialement contenues dans le même plan horizontal restent au même niveau, donc  $v$  ne peut pas dépendre de  $x$  ou  $z$  (sinon la barre serait en torsion).
- Le problème est invariant par rotation de  $\pi/2$ , donc  $x$  et  $z$  jouent le même rôle (on doit donc avoir des équations identiques) et les vitesses selon  $x$  et  $z$  sont identiques.
- Même raisonnement pour la dépendance de  $u$  et  $w$  en  $y$  : ces deux composantes ne peuvent pas dépendre de  $y$  car sinon à la surface libre (côté BC ou DA), il y aurait des déformations non homogènes. Par ailleurs, on doit avoir une contraction dans la direction  $x$  et  $z$  à cause de la conservation du volume (matériau incompressible) : on gagne en longueur, donc on perd en largeur.
- La symétrie fait que  $u$  ne peut pas dépendre de  $z$  et vice versa,  $w$  ne peut pas dépendre de  $x$ .

Au final, cela veut que l'on a les dépendances suivantes :  $u(x)$ ,  $w(z)$ , et  $v(y)$ .



**Figure 6.4** : expérience de Trouton. Il s'agit de l'élongation axiale d'un barreau de fluide soumis à une contrainte normale  $\Sigma = F/S$ .

### Étape 2 : simplification des équations

Dans le cas de l'expérience de Trouton, l'élongation n'est possible que si le matériau est très visqueux et de poids négligeable devant les contraintes de traction (sinon la barre s'effondrerait sous l'effet de la gravité) et si les vitesses d'élongation sont assez faibles. Typiquement avec :  $\mu \sim 10^5$  Pa·s,  $\rho \sim 2000$  kg/m<sup>3</sup>,  $U_* = 1$  mm/s, et  $L_* = 1$  cm, le nombre de Reynolds est de l'ordre de

$$\text{Re} = \frac{2 \times 10^3 10^{-3} 10^{-2}}{10^5} = 2 \times 10^{-7},$$

ce qui implique que Re est très petit et qu'on peut négliger les termes inertiels; notons que l'ordre de grandeur de la pression hydrostatique est  $P_* \sim \rho g L_* \approx 2 \times 10^3 10 10^{-2} = 200$  Pa tandis que l'ordre de grandeur des contraintes visqueuses est  $\sigma_* \sim \mu U_*/L_* = \times 10^5 10^{-3}/10^{-2} = 10^4$  Pa, ce qui montre que  $\sigma_* \gg P_*$ .

On peut considérer que les équations de Stokes sont une approximation correcte des équations de Navier-Stokes.

Examinons le tenseur des taux de déformation

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} u'(x) & 0 & 0 \\ 0 & v'(y) & 0 \\ 0 & 0 & w'(z) \end{bmatrix},$$

où l'on note que les termes de cisaillement comme  $D_{xy} = (\partial_y u + \partial_x v)/2$  sont nuls compte tenu de la dépendance des composantes de la vitesse vis-à-vis des variables d'espace. Le tenseur des extra-contraintes s'écrit donc :

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2\mu u'(x) & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu v'(y) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu w'(z) \end{bmatrix}.$$

Les équations de Stokes pour un matériau incompressible s'écrivent

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} &= 0. \end{aligned}$$

La projection selon  $x$  de ces équations donne

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial T_x}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu u''(x), \quad (6.21)$$

où  $T_x = 2\mu u'(x)$  est la contrainte normale dans la direction  $x$ . On fait de même pour les autres directions

$$-\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu v''(y), \quad (6.22)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial T_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{\partial p}{\partial z} + 2\mu w''(z). \quad (6.23)$$

L'équation de conservation de la masse donne :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (6.24)$$

### Étape 3 : conditions aux limites

On considère deux sortes de conditions aux limites :

- cinématique : que valent les vitesses aux limites du domaine fluide ?
- dynamique : et quelles sont les forces ?

Pour les vitesses :

- sur la facette du fond CD, on a

$$v = 0 \quad (6.25)$$

(barre fixée sur le fond) ;

- sur la facette supérieure AB, on a

$$v = \dot{\ell} \quad (6.26)$$

où  $\dot{\ell} = d\ell(t)/dt$  (la vitesse du fluide correspondant à la vitesse imposée par l'opérateur. Cette vitesse est la dérivée par rapport au temps de la distance  $\ell = DA$  ;

- sur les facettes latérales BC et DA, on ne peut rien dire pour  $u$  et  $w$ . On note toutefois qu'il s'agit d'un mouvement de contraction, donc la vitesse

$$u \text{ s'annule en } x = 0 \text{ et } w \text{ en } z = 0. \quad (6.27)$$

Les composantes des vitesses  $u$  et  $w$  doivent être des fonctions impaires.

Pour les forces :

- pas de force sur les facettes latérales BC et DA ;
- la force sur la facette supérieure doit correspondre à celle imposée par l'opérateur. Cela donne donc

$$\int_S \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_y dS = F \mathbf{e}_y,$$

avec  $\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T}$  le tenseur des contraintes totales. Soit encore

$$T_y - p = \frac{F}{S} \text{ en } y = \ell, \quad (6.28)$$

avec  $S = a^2$  la section de la barre (en toute rigueur il faudrait tenir compte de la contraction de la barre, mais on note que si la largeur diminue de  $\varepsilon$ , on a  $S = (a - \varepsilon)^2 = a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2 \approx a^2$  au premier ordre) ;

- sur la facette du fond, on pourrait écrire que la force exercée par le fluide doit correspondre à la force de réaction du support, mais on n'a pas besoin de conditions aux limites à cet endroit. On ne détaille donc pas cette condition.

#### Étape 4 : résolution des équations

On commence à résoudre l'équation de conservation de la masse. On note que cette équation doit être valable pour tout  $x, y, z$ . L'équation de conservation de la masse (6.24) n'est vérifiée que si  $u'$ ,  $v'$ , et  $w'$  sont des constantes et que la somme de ces constantes est nulle. De plus, on doit avoir  $w'(z) = u'(x) = cte$ . On pose donc

$$\beta = v'(y) \text{ et } u'(x) = w'(z) = -\frac{\beta}{2},$$

où  $\beta$  est une constante à déterminer. L'intégration de la première équation donne

$$v(y) = \beta y + \gamma,$$

avec  $\gamma$  une constante d'intégration. On se sert des conditions aux limites (6.25–6.26) pour trouver

$$\beta = \frac{\dot{\ell}}{\ell} \text{ et } \gamma = 0.$$

On fait de même pour  $u' = -\beta/2$ , dont l'intégration fournit

$$u(x) = -\frac{\beta}{2}x + \eta,$$

avec  $\eta$  une constante d'intégration. On se sert de la condition aux limites (6.27) pour trouver

$$\eta = 0.$$

Le champ de vitesse  $w$  est également

$$w(z) = -\frac{\beta}{2}z.$$

Reste maintenant à trouver la pression. La projection selon  $x$  de la quantité de mouvement [équation (6.21)] donne par intégration selon  $x$

$$-p + 2\mu u'(x) + C(y, z) = 0,$$

avec  $C$  une constante d'intégration, qui dépend *a priori* de  $y$  et  $z$  puisqu'on intègre selon  $x$ . Pour trouver  $C$ , on substitue l'expression  $p = 2\mu u'(x) + C(y, z) = -\beta\mu + C(y, z)$  dans les équations (6.22–6.23)

$$-\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu v''(y) = -\rho g - \frac{\partial C}{\partial y} + 2\mu v''(y) = -\rho g - \frac{\partial C}{\partial y} = 0,$$

dont l'intégration selon  $y$  donne

$$C(y, z) = -\rho g y + D(z),$$

avec  $D$  une constante d'intégration, qui dépend *a priori* de  $z$ . Par raison de symétrie, la pression ne peut pas être une fonction de  $z$  via  $D$  [on pourrait faire le calcul en commençant d'abord par l'équation (6.23) selon  $z$ ]. La pression s'écrit donc

$$p = \underbrace{2\mu u'(x)}_{\text{effet visqueux}} - \underbrace{\rho g y + D}_{\text{effet hydrostatique}},$$

où  $D$  est ici une simple constante. Contrairement à l'expérience de Newton où la pression était identique à la pression hydrostatique (même si le fluide n'est pas au repos), la pression est ici la somme de deux contributions : une première contribution représente la pression nécessaire pour lutter contre la compression du fluide induite par la traction tandis que le second terme résulte du poids propre du fluide. Notons que l'ordre de grandeur de cette dernière est faible devant la première (ce qui est important pour que les conditions aux limites sur les bords verticaux AD et BC soient vérifiées).

La contribution hydrostatique de la pression doit être nulle sur AB car il n'y a plus de fluide au-dessus et que la surface AB est en traction, d'où  $D = \rho g \ell$  et  $C = \rho g(\ell - y)$ . Au final, on arrive à

$$p = -\beta\mu + \rho g(\ell - y).$$

On a résolu tout le problème. Pour revenir à l'expérience de Trouton, on peut faire remarquer qu'en  $y = \ell$ , on a d'après l'équation (6.28)

$$T_y - p = 2\mu\beta + \mu\beta = \frac{F}{S},$$

soit encore

$$\frac{F}{S} = \frac{3\mu}{\ell} \frac{d\ell}{dt},$$

qui est bien la loi expérimentalement obtenue par Trouton.

## 6.4 Adimensionalisation des équations

### 6.4.1 Choix des échelles

L'adimensionalisation des équations du mouvement est une étape importante :

- elle peut permettre de simplifier les équations en supprimant les termes « petits » par rapport à d'autres ;
- elle permet de trouver les nombres sans dimension qui sont utiles pour proposer des critères de similitude. Ces critères servent en ingénierie à faire le lien entre des expériences à échelle réduite sur des maquettes et des écoulements en grandeur réelle. Par exemple, pour optimiser la forme d'une coque de bateau, on réalise des essais à échelle réduite dans des bassins.

Le second point a été abordé dans l'introduction de ce cours (§ 2.5). Le premier point va nous permettre de simplifier les équations du mouvement. On constate en général que les équations de type Navier-Stokes sont très compliquées à résoudre, mais qu'il est possible de trouver des approximations qui fournissent une solution satisfaisante en pratique. L'adimensionalisation des équations fournit un outil très pratique pour supprimer des termes négligeables. Pour les équations de Navier-Stokes, on introduit un jeu de variables sans dimension :

$$\begin{aligned} u &\rightarrow U_* U \quad \text{et} \quad x \rightarrow L_* X \\ T_x &\rightarrow \mu \frac{U_*}{L_*} S_X, T_y \rightarrow \mu \frac{U_*}{L_*} S_Y, \quad \text{et} \quad T_{xy} \rightarrow \mu \frac{U_*}{L_*} S_{XY}, \\ t &\rightarrow \frac{L_*}{U_*} \tau, \\ p &\rightarrow P_* P \end{aligned}$$

avec  $p$  qui désigne ici la pression généralisée (pression + potentiel de gravité) et  $T$  (ou  $S$ ) le tenseur des extra-contraintes. Quelques remarques :



- les échelles ne sont pas indépendantes. Par exemple, si on fixe une échelle de vitesse et une échelle de longueur, on se donne nécessairement une échelle de temps ;
- pour les variables d'espace, il peut y avoir plusieurs échelles. Par exemple, pour une rivière, la longueur de la rivière est bien supérieure à sa largeur ou à sa hauteur ; il faut donc introduire au moins deux échelles : une pour la longueur, l'autre pour la hauteur d'eau ;
- plusieurs échelles possibles pour la pression selon le type d'écoulement. En général on pose
  - $P_* = \rho g H_*$  (écoulement à surface libre) ;
  - $P_* = \rho U_*^2$  (écoulement en charge) ;
  - $P_* = \mu U_* / L_*$  (écoulement très lent).

Rappelons que le nombre de Reynolds se définit comme le rapport de forces d'inertie sur des forces de viscosité :

$$\text{Re} = \frac{\rho U_* H_*}{\mu} = \frac{U_* H_*}{\nu}, \quad (6.29)$$

avec  $\nu = \mu/\rho$  la viscosité cinématique. Notons que le nombre de Reynolds fait appel à une vitesse caractéristique  $U_*$  et une longueur caractéristique  $H_*$ . Cette dernière pourrait être également  $L_*$ . Le choix est souvent une affaire de convention ; le résultat final ne dépend pas du choix particulier des échelles, mais attention toutefois



- le nombre de Reynolds sert
  - dans des formules comme la formule de Darcy-Weisbach pour le frottement hydraulique (5.7),
  - dans des classifications de régime d'écoulement comme la transition laminaire/turbulente (voir § 6.4.2).

Il est essentiel de vérifier que le choix des échelles et la définition du nombre de Reynolds sont cohérents avec les formules employées. Par exemple, dans la formule de Darcy-Weisbach (5.7) employée pour un canal ou une rivière, la longueur caractéristique est le rayon hydraulique pondéré d'un facteur 4 ;

- la longueur caractéristique à utiliser dans la définition du nombre de Reynolds est généralement une taille caractéristique de l'écoulement et des grandes structures turbulentes. Pour une rivière ou une conduite, cette longueur caractéristique est donc la hauteur d'écoulement ou le diamètre de la conduite car ce sont elles qui conditionnent la taille des plus grandes structures turbulentes ; on ne prend pas la longueur de la rivière ou de la conduite car elle ne renseigne en rien sur les structures turbulentes. Pour une aile d'avion ou un obstacle de taille finie dans un écoulement, la longueur caractéristique est généralement la longueur car c'est elle qui fournit l'ordre de grandeur des grandes structures turbulentes qui peuvent affecter l'aile ou l'obstacle.

## 6.4.2 Régimes d'écoulement

En substituant les variables dimensionnelles par des variables sans dimension, on tire les équations de Navier-Stokes sous forme adimensionnelle :

$$\frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = -\frac{P_*}{\rho U_*^2} \nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \mathbf{S}$$

On déduit trois comportements possibles selon la valeur du nombre de Reynolds :

- Quand  $\text{Re} \rightarrow \infty$  :

$$\frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = -\frac{P_*}{\rho U_*^2} \nabla P$$

Ce sont les *équations d'Euler* sous forme adimensionnelle (pour le fluide dit *parfait* ou fluide non visqueux). Les frottements visqueux peuvent être négligés ; l'écoulement est donc contrôlé par un équilibre entre forces de pression et d'inertie. Les équations d'Euler fournissent alors une bonne approximation du mouvement. Le mouvement d'un avion en vol sub- ou supersonique peut donc être étudié à l'aide de ces équations. Le théorème de Bernoulli fournit des approximations utiles quand la géométrie du problème s'y prête. Pour des applications, voir § 4.2.

- Quand  $\text{Re} \rightarrow 0$  :

$$0 = -\nabla P + \nabla \cdot \mathbf{S}$$

Ce sont les *équations de Stokes* sous forme adimensionnelle (pour le fluide sans inertie). L'écoulement est entièrement commandé par l'équilibre entre gradient de pression et force visqueuse. Ce type d'écoulement s'observe très fréquemment dans des écoulements à travers des matériaux poreux, des écoulements près d'obstacles (couches limites laminaires), des problèmes de sédimentation de particules fines, etc. Pour des applications, voir § 6.5.

- Quand  $\text{Re} = O(1 - 100)$ , inertie, gradient de pression, et viscosité sont trois processus de même importance. Il faut résoudre l'équation de Navier-Stokes complètement. Notons que pour  $\text{Re} > 2000$ , l'écoulement devient turbulent. Pour des applications, voir § 6.7.

## 6.5 Écoulements dominés par la viscosité

Pour des écoulements à très faible nombre de Reynolds, les termes inertiels dans les équations de Navier-Stokes sont négligeables et l'écoulement est contrôlé par un équilibre entre pression et contrainte visqueuse. L'approximation des équations de Navier-Stokes quand  $Re \rightarrow 0$  est appelée *équation de Stokes*. Sous forme adimensionnelle (avec  $P_* = \mu U_*/L$ ), on a pour un fluide incompressible

$$\boxed{\begin{cases} \nabla P = \Delta \mathbf{U} \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \end{cases}} \quad (6.30)$$

car  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \Delta \mathbf{U}$  par définition du laplacien et de  $\mathbf{D}$ . Sous forme dimensionnelle, (6.30) s'écrit  $\nabla p = 2\mu \Delta \mathbf{u}$  et  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . On peut transformer ce jeu d'équations en découplant le champ de pression et celui de vitesse en prenant la divergence de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. On obtient alors un jeu d'équations indépendantes pour chaque variable. On montre alors que la pression est une fonction harmonique alors que la vitesse est une fonction dite *biharmonique*

$$\begin{aligned} \Delta P &= 0, \\ \nabla^4 \mathbf{U} &= 0, \end{aligned}$$

avec  $\nabla^4 f = \Delta \Delta f$  l'opérateur biharmonique (on applique deux fois de suite l'opérateur de Laplace).

On va voir des applications assez diverses et plus ou moins directes de ces équations dans des problèmes d'ingénierie :

- sédimentation de particules (cf § 6.5.1) : calcul de la vitesse de sédimentation en fonction du diamètre ;
- écoulement dans un massif poreux (cf § 6.5.2) : calcul du débit d'infiltration à travers un sol ;
- lubrification d'un palier (cf § 6.5.3) : force supportée par le palier d'un moteur.

### 6.5.1 Sédimentation

On souhaite calculer la vitesse  $u_p$  de sédimentation d'une particule sphérique de diamètre  $2a$  et de masse volumique  $\rho_p$  dans un fluide newtonien au repos (viscosité  $\mu$ , masse volumique  $\rho_f$ ). On considère tout d'abord le problème analogue où c'est la particule qui est immobile et le fluide en mouvement avec une vitesse loin de la particule égale à  $-u_p$ . À l'aide des fonctions de Green, on peut montrer que la force exercée par le fluide sur la particule est alors :

$$\mathbf{F} = 6\pi\mu a \mathbf{u}_p.$$

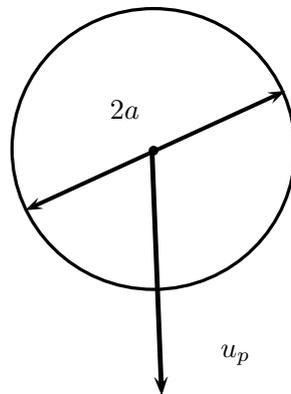


Figure 6.5 : mouvement d'une sphère dans un fluide newtonien.

Maintenant si on revient au problème originel, on peut déduire la vitesse de la particule lorsqu'elle sédimente. En régime permanent, la force de résistance du fluide contrebalance exactement le poids « déjaugé »<sup>2</sup> de la particule ; on a donc

$$\mathbf{F} = 6\pi\mu a\mathbf{u}_p = m'\mathbf{g},$$

avec  $m' = 4(\rho_p - \rho_f)\pi a^3/3$ . Cette relation est souvent appelée *loi de Stokes*. On déduit immédiatement

$$u_p = \frac{m'g}{6\pi\mu a} = \frac{2}{9}(\rho_p - \rho_f)\frac{a^2g}{\mu}.$$

Notons au passage que la force de frottement exercée par le fluide se met le plus souvent sous la forme

$$F = \frac{1}{2}C_d(\text{Re}_p)\rho_f\pi a^2u_p^2,$$

avec  $C_d$  le coefficient dit de *traînée*, qui est écrit comme une fonction du *nombre de Reynolds particulaire*  $\text{Re}_p = \rho_f u_p 2a/\mu$ ,  $\pi a^2$  est la section *efficace* de la sphère vue par le fluide. On se reportera au chapitre 2 pour comprendre l'origine de cette formulation. Par comparaison avec les deux équations, on déduit immédiatement que

$$C_d = \frac{24}{\text{Re}_p}.$$

L'avantage de cette formulation est qu'on peut la généraliser pour des écoulements à nombre de Reynolds grand ou intermédiaire (voir figure 2.7).

**Application numérique.** – Calculer la vitesse de sédimentation d'une argile avec  $a = 1 \mu\text{m}$  et  $\rho_p = 2650 \text{ kg/m}^3$  dans de l'eau ( $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$  et  $\mu = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ) :

$$u_p = \frac{2}{9}(2650 - 1000)\frac{10^{-12} \times 9,81}{10^{-3}} = 3,6 \mu\text{m/s}.$$

Le nombre de Reynolds particulaire associé est

$$\text{Re}_p = \frac{2\rho_f u_p a}{\mu} = \frac{2 \times 1000 \times 3,6 \times 10^{-6} \times 10^{-6}}{10^{-3}} = 37,2 \times 10^{-6} \ll 1,$$

donc l'hypothèse de nombre de Reynolds faible est bien vérifiée.

## 6.5.2 Écoulement dans les milieux poreux

Un milieu poreux est un matériau au sein duquel existe un réseau de pores ou de canaux reliés entre eux. Un sol, la plupart des matériaux de construction, certains alliages métalliques (obtenus par frittage d'une poudre) offrent des exemples de milieux poreux. Lorsque les pores sont de petite taille, l'écoulement d'un liquide newtonien (eau, air, huile, etc.) se fait à toute petite vitesse et l'approximation de Stokes est généralement valable. Pour que le fluide s'écoule à travers un milieu poreux, il faut exercer un gradient de pression pour vaincre les forces de frottement au sein du réseau interne. Le problème qui se pose en ingénierie est de calculer le débit qui transite à travers un massif poreux connaissant le gradient de pression.

Si on considère un cas idéal tel que l'écoulement d'un fluide entre deux plans parallèles de longueur  $L$  et espacés d'une distance  $d$ , on montre que la vitesse moyenne  $\mathbf{u}$  (ou *vitesse débitante*) est reliée au gradient de pression par la relation

$$\frac{\Delta p_g}{L} = -\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{k_0}\mathbf{u},$$

avec  $k_0 = d^2/12$  un coefficient de perméabilité de la structure poreuse (appelé perméabilité intrinsèque) et  $p_g$  la pression généralisée. Ce résultat se généralise empiriquement quand on considère un matériau

2. Le poids « déjaugé » est le poids moins la force d'Archimède.

3. Attention la définition du nombre de Reynolds particulaire varie d'un auteur à l'autre.

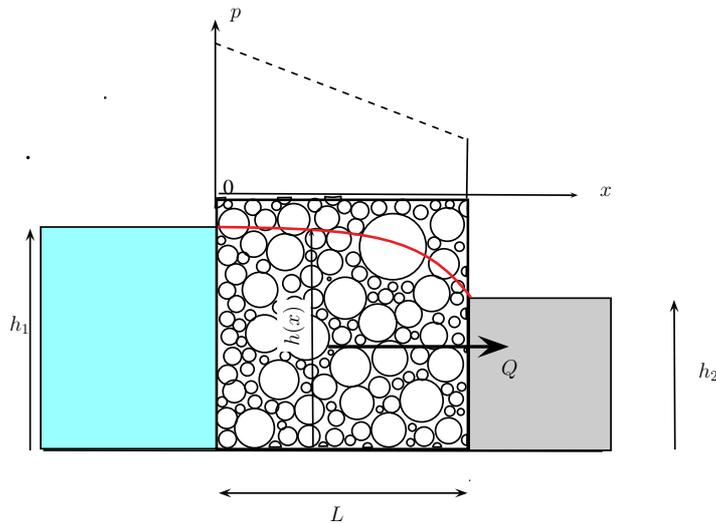


Figure 6.6 : écoulement à travers un massif poreux.

Tableau 6.1 : quelques valeurs de perméabilité des milieux poreux.

	$k_0$ (en $\mu\text{m}^2$ )
sol	0,1–10
roche dure (grès)	$5 \times 10^{-4} - 5$
roche sédimentaire (calcaire)	$2 \times 10^{-3} - 0,05$
sable	20–200

poreux quelconque (assemblage de réseaux). La loi qui lie vitesse débitante et gradient de pression est connue sous le nom de *loi de Darcy*<sup>4</sup>

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\rho g} \nabla p, \quad (6.31)$$

avec  $k$  le coefficient de perméabilité ou de filtrage, appelée *conductivité hydraulique*; on a  $k = \rho g k_0 / \mu$ . Le terme  $\rho g$  sert à transformer le terme de pression en équivalent « hauteur d'eau » (équivalent souvent utilisé en ingénierie). On passe parfois le terme  $\rho g$  sous l'opérateur  $\nabla$ ; la quantité  $p/(\rho g)$  est dimensionnellement équivalente à une hauteur et on l'appelle la *charge hydraulique*  $H$ . L'équation de Darcy (6.31) s'écrit donc également

$$\mathbf{u} = -k \nabla H.$$

On note la ressemblance entre cette équation et les lois de Fick et de Fourier utilisées respectivement pour le calcul des gradients de concentration et de température. Avec les notations employées ici,  $k$  est homogène à une vitesse [m/s], alors que  $k_0$  est homogène à une surface [m<sup>2</sup>]. Seul  $k_0$  est intrinsèque au matériau ( $k$  dépend du fluide interstitiel). Le tableau 6.1 fournit quelques ordres de grandeur pour  $k_0$ .

Avec la loi de Darcy, on peut par exemple calculer le débit d'infiltration  $q$  (par unité de largeur) à travers un massif poreux (voir figure 6.6) qui sépare deux retenues d'eau (au repos) à des niveaux différents et constants  $h_1$  et  $h_2$ . On suppose que la ligne d'eau est à faible courbure de telle sorte que l'écoulement est à peu près unidirectionnel; cela implique que dans la formule de Darcy (6.31), on a  $\nabla p \approx (\partial p / \partial x, 0)$ . On suppose également que l'écoulement d'eau est très lent et qu'il n'y a pas d'effet de tension de surface, donc la pression reste hydrostatique aussi bien dans les retenues d'eau que dans

4. Henry Philibert Gaspard Darcy (1803–1858) était un hydraulicien français. Ingénieur des Ponts et Chaussées, il a été l'auteur de plusieurs contributions majeures en hydraulique en puisant dans les problèmes qui se posaient à l'ingénieur de l'époque. On lui doit ainsi les premières notions sur la couche limite dans l'écoulement d'un fluide, le développement de l'équation de Darcy-Weisbach (résistance de l'écoulement dans un conduit), la loi de Darcy de l'écoulement en milieux poreux, qui a été la pierre fondatrice de l'hydraulique souterraine, ainsi que des améliorations notables du tube de Pitot pour mesurer les vitesses au sein d'un fluide.

le massif:  $p = \rho gh(x)$  en tout point du massif. Le débit est ici défini comme le produit de la hauteur d'eau  $h(x)$  et de la vitesse débitante  $u$

$$q = uh(x) = \left(-k \frac{\partial h}{\partial x}\right) h(x).$$

Par ailleurs, en régime permanent, le débit est constant, donc l'intégration de l'équation ci-dessus donne

$$qx = -\frac{1}{2}kh^2 + a,$$

avec  $a$  une constante d'intégration. Compte tenu des conditions aux limites (en  $x = 0$ ,  $h = h_1$ ), on en déduit que  $a = kh_1^2/2$ , soit finalement en  $x = L$

$$q = \frac{1}{2L}k(h_1^2 - h_2^2).$$

D'autres applications importantes de la formule de Darcy sont données par le pompage d'une nappe (rabattement de nappe) à travers un puits et l'écoulement sous un barrage (stabilité de barrage).

### 6.5.3 Effet coin d'huile

Considérons une couche d'huile (supposée incompressible) entre deux plans métalliques mobiles (par exemple, huile de lubrification dans un palier de moteur) espacés d'une hauteur variable  $h(x)$  et de longueur  $\ell$ . L'espacement  $h$  reste très petit devant  $\ell$ :  $h(x) \ll \ell$ . La vitesse de déplacement du plan inférieur est constante et égale à  $u_d$ ; celle du plan supérieur est nulle. Les échelles typiques du problème sont les suivantes:  $U_* = 1$  cm/s (vitesse des plans),  $H_* = 1$  mm (espacement des plans),  $L_* = \ell = 10$  cm. La viscosité  $\mu$  d'une huile de type silicone est de l'ordre de 1 Pa·s; sa masse volumique est de l'ordre 1100 kg/m<sup>3</sup>. Le rapport d'aspect  $\epsilon$  et le nombre de Reynolds sont petits

$$\epsilon = \frac{H_*}{L_*} = 10^{-2} \text{ et } Re = \frac{\rho U_* H_*}{\mu} = \frac{1,1 \times 10^3 \times 10^{-2} \times 10^{-3}}{1} \approx 10^{-2}.$$

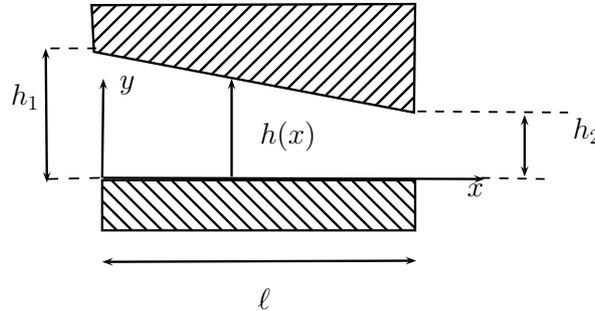


Figure 6.7 : couche de lubrifiant entre deux parois.

Nous introduisons les variables sans dimensions suivantes :

$$\begin{aligned} u &\rightarrow U_* U \text{ et } v \rightarrow V_* V, \\ x &\rightarrow L_* X \text{ et } y \rightarrow H_* Y. \end{aligned}$$

Notons que l'équation de continuité (6.32) implique que  $V_* = U_* H_* / L_* = \epsilon U_*$ . Pour la pression, on introduit l'échelle  $P_* = \mu U_* / (\epsilon L_*)$  (voir *infra*; il faut que le gradient de pression équilibre le gradient de cisaillement); on introduit une pression généralisée (pression du fluide + potentiel gravitaire) sans dimension:  $p \rightarrow PP_*$ . La projection des équations de Navier-Stokes dans le repère attaché à la partie fixe du palier (quoique l'origine soit attenante à la plaque inférieure qui est mobile) donne pour la conservation de la masse :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.32)$$

et des équations de quantité de mouvement :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (6.33)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (6.34)$$

avec  $p$  la pression généralisée. On substitue les variables dimensionnelles par les variables sans dimension, ce qui fait apparaître les rapports sans dimension  $Re$  et  $\epsilon$ . Les équations du mouvement sans dimension s'écrivent alors :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (6.35)$$

$$\epsilon Re \frac{dU}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \quad (6.36)$$

$$\epsilon Re \frac{dV}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}. \quad (6.37)$$

On néglige les termes qui sont petits devant 1, c'est-à-dire ici tous les termes où  $\epsilon$  et/ou  $Re$  apparaissent. La projection sur l'axe  $x$  de l'équation (6.36) donne ainsi

$$-\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0,$$

ce qui peut s'intégrer facilement

$$U = -\Gamma Y^2 + aY + b,$$

avec  $\Gamma = -\partial P/\partial X$  le gradient de pression motrice sous forme adimensionnelle,  $a$  et  $b$  deux constantes d'intégration. En passant sous forme dimensionnelle, nous obtenons :

$$u = -Gy^2 + ay + b,$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes d'intégration (mais dimensionnelles) et  $G(x) = -\partial p/\partial x$  est le gradient de pression motrice sous forme dimensionnelle. On suppose que  $G$  est une fonction de  $x$  uniquement. Les conditions aux limites sont

$$\begin{cases} y = 0, u = 0, \\ y = h(x), u = u_d \end{cases}$$

On obtient finalement

$$u(x, y) = \frac{Gh^2(x)}{2\mu} \frac{y}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) + u_d \left( 1 - \frac{y}{h} \right).$$

La conservation du débit entraîne que

$$q = \int_0^{h(x)} u dy = \frac{Gh^3(x)}{12\mu} + \frac{u_d h(x)}{2} = cste$$

ce qui impose que le gradient de pression est

$$G(x) = \frac{12\mu}{h^3(x)} \left( q - \frac{u_d h(x)}{2} \right).$$

Une nouvelle intégration donne le profil de pression motrice

$$p(x) - p_1 = 12\mu \left( \frac{u_d}{2} \int_0^x \frac{d\xi}{h^2(\xi)} - q \int_0^x \frac{d\xi}{h^3(\xi)} \right).$$

Si l'on suppose que le palier baigne dans un bac d'huile, on a  $p_1 = p_2 = p_0$ , avec  $p_0$  une pression au sein du bac (la pression à droite et à gauche du palier est donc constante et égale à  $p_0$ ). Donc, si l'on

considère le palier sur toute sa longueur, le gradient de pression est nul, ce qui implique que le débit vérifie finalement

$$q = \frac{u_d}{2} \frac{\int_0^\ell \frac{d\xi}{h^2(\xi)}}{\int_0^\ell \frac{d\xi}{h^3(\xi)}}.$$

Pour un profil linéaire de palier

$$h(x) = h_1 + \frac{h_2 - h_1}{\ell} x = h_2 \left( \lambda + \frac{1 - \lambda}{\ell} x \right),$$

avec  $\lambda = h_1/h_2 > 1$  le rapport de hauteur, on obtient par intégration

$$q = u_d h_2 \frac{\lambda}{1 + \lambda}.$$

**Application numérique.** – Considérons que le palier soit en forme de coin avec un angle petit ( $\ell = 10$  cm,  $\mu = 1$  Pa·s,  $u_d = 1$  cm/s,  $h_2 = 0,1$  mm). On a donc  $\tan |\alpha| = (h_1 - h_2)/\ell = h_2(\lambda - 1)/\ell$  qui doit être petit ; par exemple, on prend  $\alpha = 0,11^\circ$  (soit  $\lambda = 3$ ). On note  $p_{ref}$  la pression de référence  $p_{ref} = \mu u_d L / h_2^2 = 100$  kPa. La répartition de pression au sein du coin est donc

$$\frac{p(x) - p_0}{p_{ref}} = \frac{6}{\lambda^2 - 1} \left( \lambda - \frac{h}{h_2} \right) \left( \frac{h}{h_2} - 1 \right),$$

ce qui donne une surpression maximale de

$$\frac{p_{max} - p_0}{p_{ref}} = \frac{3}{2} \frac{\lambda - 1}{\lambda(\lambda + 1)} = 0,25.$$

L'ordre de grandeur de la pression de référence est de 100 kPa, la pression maximale de l'ordre de 25 kPa, ce qui autorise le déplacement de pièces dont le poids peut atteindre des valeurs importantes : un palier de  $0,1 \times 0,1$  m<sup>2</sup> peut ainsi supporter des masses d'environ 250 kg.

## 6.6 Couche limite

### 6.6.1 Définition

Dans les écoulements à grande vitesse autour d'obstacle ou près d'une paroi, le nombre de Reynolds de l'écoulement est le plus souvent très grand, ce qui fait que l'écoulement peut être considéré à l'échelle macroscopique comme étant dans un régime turbulent et les effets de la viscosité sont négligeables. Toutefois, près d'une paroi solide, la condition d'adhérence implique que la vitesse doit tendre rapidement vers 0. Si on définit un nombre de Reynolds local à l'aide de la vitesse réelle (et non d'une échelle de vitesse), celui-ci tend également vers 0, ce qui veut dire que très localement, dans le voisinage de la paroi, l'écoulement est dans un régime laminaire et les effets de viscosité deviennent prédominants. Cette zone de faible épaisseur accolée à la paroi s'appelle une *couche limite*. Cette notion a été proposée par Prandtl en 1905 :

- près d'une paroi solide, il existe une couche de très faible épaisseur dans laquelle les forces de viscosité sont prédominantes ;
- loin des parois, l'écoulement peut être considéré comme turbulent ou non visqueux.

Cette décomposition permet de traiter un grand nombre de problème en découplant les effets à grande échelle (liés à la turbulence) et ceux intervenant à petite échelle près d'une paroi (et faisant jouer un rôle crucial à la viscosité du fluide).

L'épaisseur  $\delta$  de la couche limite peut être estimée à l'aide de l'analyse dimensionnelle. Considérons une plaque placée dans un fluide newtonien de masse volumique  $\rho$  et viscosité dynamique  $\mu$  soumis à un champ de vitesse uniforme  $U$  loin de la paroi. Près de la paroi se développe une couche d'épaisseur  $\delta(x)$ , qui varie avec la distance  $x$  depuis le bord d'attaque de la plaque ;  $x$  et  $\delta$  sont les deux échelles de longueur du problème et on va supposer que  $\epsilon = \delta/x \ll 1$  (la couche est très peu épaisse). L'échelle de vitesse dans ce problème est  $U$ . L'échelle de vitesse est  $U_* = U$  et l'échelle de temps est  $T_* = x/U_*$ .

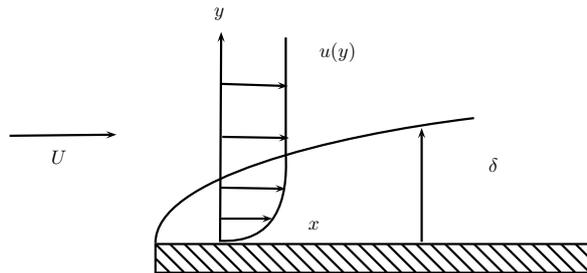


Figure 6.8 : couche-limite le long d'une plaque placée dans un champ de vitesse uniforme.

Dans l'équation de Navier-Stokes, le terme d'inertie est d'ordre

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} \sim \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \rho \frac{U^2}{x}.$$

Les termes de viscosité ont les ordres de grandeur suivants

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \mu \frac{U}{x^2} = \mu \epsilon^2 \frac{U}{\delta^2} \text{ et } \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \mu \frac{U}{\delta^2}.$$

Comme  $\epsilon \ll 1$ , on en déduit que  $u_{xx} \ll u_{yy}$  : les variations normales à la paroi sont prépondérantes par rapport aux variations longitudinales. L'équilibre dynamique implique que les forces de viscosité contrebalancent localement l'inertie du fluide

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \delta = x \sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}},$$

donc si on définit un nombre de Reynolds local sous la forme

$$\text{Re}_x = \frac{\rho U x}{\mu},$$

alors on a

$$\boxed{\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_x}}}.$$

L'épaisseur de la couche limite varie comme l'inverse de la racine carrée du nombre de Reynolds local. En réarrangeant les termes, on a aussi

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U}} x,$$

donc  $\delta \propto \sqrt{x}$  : la forme de la couche limite est parabolique.

## 6.6.2 Équation de la couche-limite

Nous reprenons le problème de la couche-limite le long d'une plaque horizontale semi-infinie (voir figure 6.8). L'écoulement est permanent et bidimensionnel au voisinage de la plaque :  $\mathbf{u} = (u, v)$ . Le fluide est incompressible, de masse volumique  $\rho$  et de viscosité  $\mu$ . Loin de la paroi le champ de vitesse est uniforme, mais peut éventuellement dépendre de  $x$  :  $u = u_e(x)$ . Les équations du mouvement sont données par les équations de Navier-Stokes, qui compte tenu de nos hypothèses prennent ici la forme suivante

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.38)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (6.39)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (6.40)$$

Les conditions aux limites sont les suivantes

$$u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_e(x). \quad (6.41)$$

On introduit, comme précédemment, les échelles et variables adimensionnelles suivantes

$$u \rightarrow U_* U \quad v \rightarrow V_* V \quad x \rightarrow L_* X, \quad \text{et} \quad y \rightarrow H_* Y \\ t \rightarrow \frac{L_*}{U_*} \tau, \quad \text{et} \quad p \rightarrow \rho U_*^2 P$$

avec  $U_*$ ,  $V_*$ ,  $L_*$ , et  $H_*$  des échelles de vitesse, de longueur, et de hauteur de la couche limite, respectivement. On pose

$$\text{Re} = \frac{\rho U_* L_*}{\mu} \quad \text{et} \quad \epsilon = \frac{H_*}{L_*}$$

L'équation (6.38) conduit à choisir  $V_*$  tel que  $V_* = \epsilon U_*$ . De plus, la discussion menée au § 6.6.1 conduit à prendre  $H_* = L_* \text{Re}^{-1/2}$ . Avec ces nouvelles variables, les équations de la couche limite (6.38–6.40) deviennent

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \\ U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \text{Re}^{-1} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \\ \epsilon \left( U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Re}^{-2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}.$$

On déduit qu'au premier ordre en  $\epsilon$ , on a

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \\ U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \\ 0 = -\frac{\partial P}{\partial Y}.$$

La dernière équation montre que dans une couche limite, il n'y a pas de gradient de pression dans la direction  $y$  : la pression ne varie pas dans la direction normale à la paroi, ce qui veut dire encore que la pression est gouvernée par l'écoulement externe (loin des parois). L'équation de Bernoulli impose que  $\Psi = \frac{1}{2}\rho u_e^2 + p$  soit constant, donc

$$\frac{dp}{dx} = -\rho u_e \frac{du_e}{dx}.$$

Si le champ de vitesse loin de la paroi est totalement uniforme (c'est-à-dire, indépendant de  $x$ ), alors  $dp/dx = 0$ . Sous forme dimensionnelle, les équations de la couche-limite pour une plaque sont donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

### 6.6.3 Équation de Blasius

Considérons le cas où effectivement  $u_e$  est constant (indépendant de  $x$ ), les équations de la couche-limite sous forme dimensionnelle sont donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.42)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (6.43)$$

avec pour conditions aux limites :  $u(x, 0) = 0$ ,  $v(x, 0) = 0$ , et  $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_e$ . Cette équation peut se résoudre à l'aide de la fonction de courant  $\psi$  définie telle que  $u = \psi_y$  et  $v = -\psi_x$ . L'équation de continuité (6.42) est automatiquement satisfaite tandis que l'équation de quantité de mouvement donne :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (6.44)$$

alors que les conditions aux limites imposent :  $\psi_y(x, 0) = 0$ ,  $\psi_x(x, 0) = 0$ , et  $\lim_{y \rightarrow \infty} \psi_y(x, y) = u_e$ . C'est une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, qui peut être simplifiée en recherchant des solutions auto-similaires de la forme

$$\psi = \sqrt{u_e x \nu} f(\eta), \text{ avec } \eta = y \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}}$$

Quand on substitue cette forme dans l'équation (6.44), on obtient l'équation de Blasius<sup>5</sup>

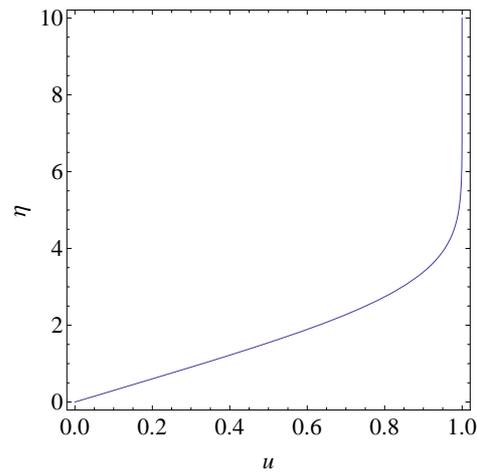
$$2f''' + ff'' = 0,$$

avec pour conditions aux limites  $f(0) = f'(0) = 0$  et  $f'(\infty) = 1$ . Il n'existe pas de solution analytique à cette équation, mais comme il s'agit d'une équation différentielle ordinaire, elle est bien plus simple à résoudre numériquement que l'équation originale (6.44) ; entre autres, une méthode numérique de tir permet de la résoudre. Une fois  $f$  déterminé numériquement, on déduit le profil de vitesse (voir figure 6.9)

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e f'(\eta), \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} u_e \sqrt{\frac{\nu}{u_e x}} (\eta f' - f). \end{aligned}$$

---

5. Heinrich Blasius (1883–1970) était un mécanicien des fluides allemand, élève de Ludwig Prandtl. Il est l'un des créateurs du laboratoire de Göttingen en Allemagne, où des percées substantielles en mécanique des fluides furent réalisées entre les deux guerres mondiales. Son nom est principalement lié à l'équation de la couche limite pour une plaque finie et à son coefficient de frottement. Toute sa vie, il travailla sur les problèmes de couche limite, les lois de similitude, les pertes de charge dans les conduites, et le transfert de chaleur.



**Figure 6.9 :** profil de vitesse  $u(\eta)$ , solution de l'équation de Blasius.

Un problème associé à la détermination du profil de vitesse est la détermination de la contrainte à la paroi et du coefficient de frottement. La contrainte de cisaillement vaut

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\mu u_e}{x} \sqrt{\text{Re}_x} f''(0),$$

avec  $\text{Re}_x = u_e x / \nu$ . Le coefficient de frottement pariétal est donc

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho u_e^2} = \frac{2f''(0)}{\sqrt{\text{Re}_x}} \approx \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}}.$$

## 6.7 La turbulence ou les limites du modèle newtonien (laminaire)

Reynolds a mis en évidence simplement la turbulence en réalisant l'expérience reportée sur la figure 6.10 : il s'agit d'injecter dans un écoulement le long d'un tube cylindrique un filet d'encre colorée. Si l'écoulement est laminaire, la trajectoire des particules est parallèle à la génératrice du tube ; le filet d'encre reste donc un mince filet, qui peut éventuellement se diluer sous l'effet de la diffusion moléculaire. Dans un écoulement turbulent, en revanche, les trajectoires sont erratiques, ce qui conduit à une dispersion rapide de l'encre et la formation de structures sous forme de volutes, appelées *tourbillons*.

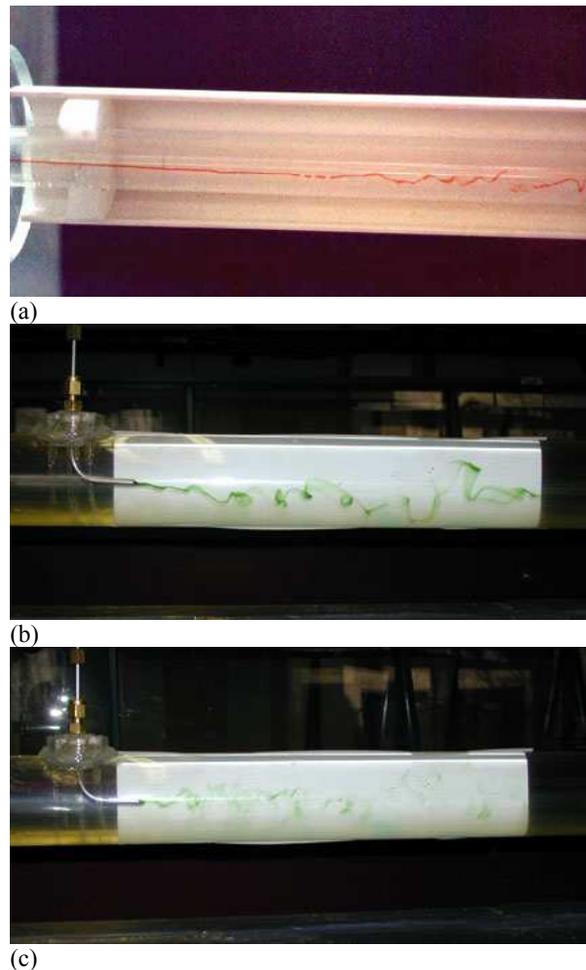


Figure 6.10 : mise en évidence de la turbulence (l'expérience de Reynolds).

Quand l'inertie augmente, les petites fluctuations de vitesses peuvent être amplifiées à cause de la non-linéarité du terme convectif  $\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}$  dans la dérivée particulaire, ce qui conduit à une perte de stabilité de l'écoulement. On dit que l'écoulement devient *turbulent*.

Pour mettre cela en évidence dans les équations de Navier-Stokes (6.4), on introduit la *décomposition de Reynolds* de la vitesse en une valeur moyenne et une fluctuation :  $\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'$ . Quand on moyenne cette décomposition, les fluctuations disparaissent  $\langle \mathbf{u}' \rangle = 0$ , où le symbole  $\langle \cdot \rangle$  désigne l'opérateur moyenne. Dans les équations de Navier-Stokes, on remplace  $\mathbf{u}$  par la décomposition de Reynolds, puis on moyenne les équations ; on part de l'équation (6.4)

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} \right) = -\nabla p_* + \nabla \cdot \mathbf{T},$$

( $p_*$  est la pression généralisée) pour aboutir à :

$$\rho \left( \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle \right) = -\nabla \langle p_* \rangle + \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}} - \rho \nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle,$$

car  $\langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle \neq 0$  *a priori*. Cette dernière équation appelée *équation de Reynolds* est très semblable à la première (Navier-Stokes) si ce n'est qu'un nouveau terme est apparu

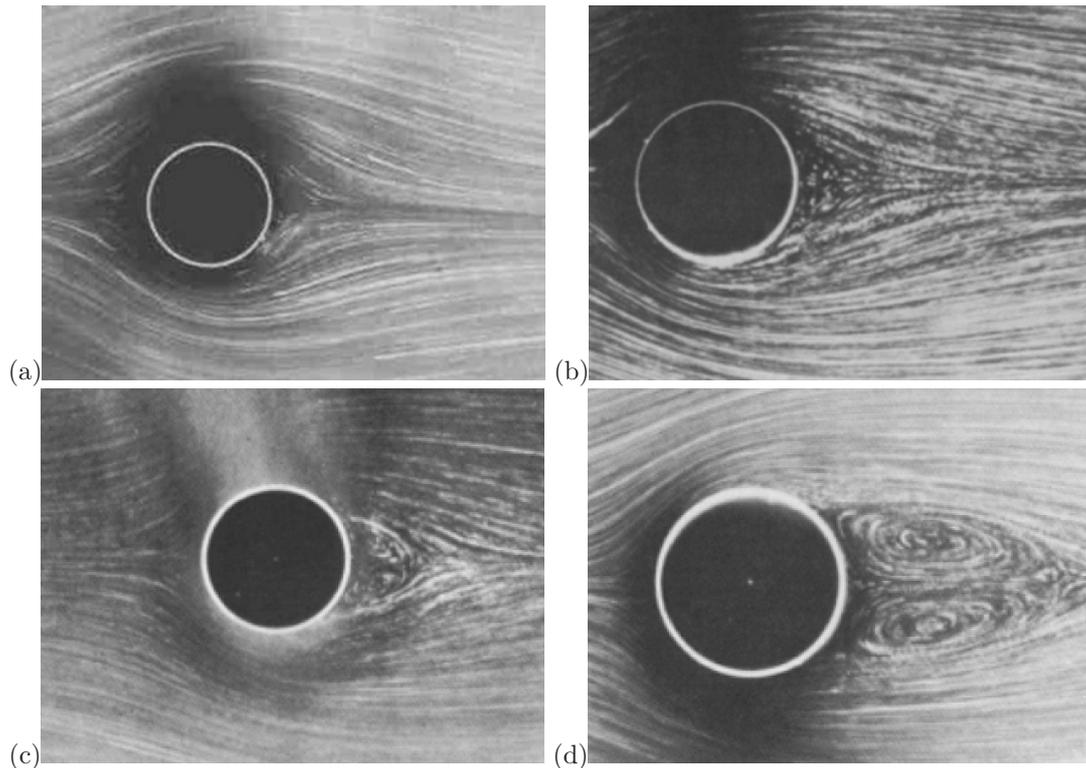
$$\Sigma_t = -\rho \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle.$$

C'est le tenseur de Reynolds (qui représente la turbulence). Ce nouveau tenseur (symétrique) introduit de nouvelles inconnues et il faut donc fournir des relations supplémentaires pour résoudre le système d'équations. On parle de *fermeture* des équations du mouvement. Le régime d'écoulement est caractérisé selon la valeur du nombre de Reynolds :

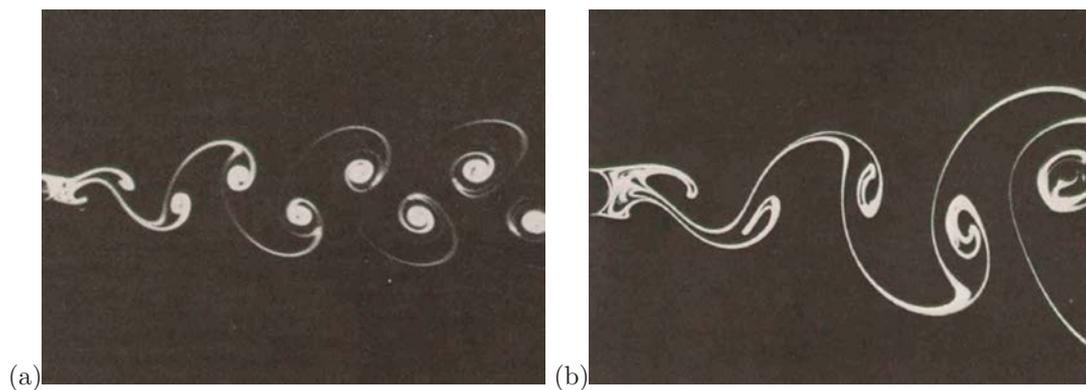
- $Re \rightarrow 0$  : écoulement laminaire ;
- $Re = O(100 - 1000)$  : écoulement transitionnel ;
- $Re > Re_c = O(2000)$  : écoulement turbulent, turbulence développée ;

Les valeurs exactes des seuils de transition dépendent de la géométrie de l'écoulement. Comme le montre la série de clichés des figures 6.11 et 6.12, la transition vers la turbulence se fait assez lentement quand on augmente le nombre de Reynolds. Pour un cylindre les premiers effets se font sentir pour des nombres de Reynolds proches de 1 ; jusqu'à des nombres de Reynolds de quelques centaines, l'écoulement présente des structures bien organisées (allée de von Kármán) dans le sillage du cylindre. Si l'on prenait une sphère au lieu d'un cylindre, les valeurs des seuils seraient différentes.

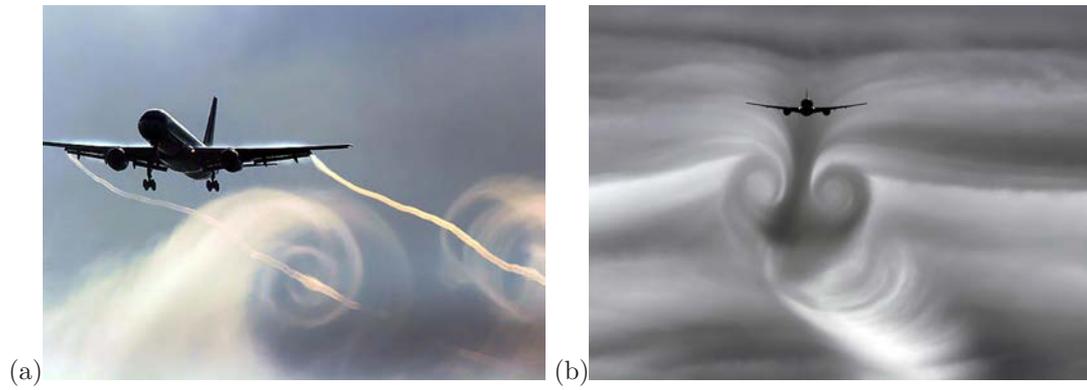
La turbulence traduit une perte de stabilité du régime laminaire ; elle introduit donc du désordre dans la distribution des vitesses. Une des principales difficultés de l'étude de la turbulence est que, malgré le désordre induit, de nouvelles structures apparaissent. Les écoulements atmosphériques présentent de nombreux exemples de structures turbulentes : forme en spirale des dépressions et ouragans, forme des nuages, etc. L'existence de ces structures explique le caractère non local de la turbulence : ce qui se passe à un endroit donné peut dépendre très fortement de ce qui passe dans un voisinage plus ou moins éloigné. Cela implique que, pour le traitement statistique de la turbulence, il est nécessaire d'introduire des échelles de longueur caractéristiques.



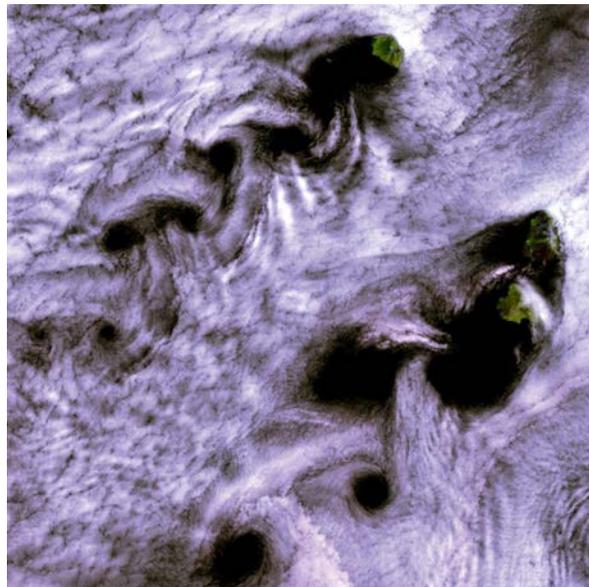
**Figure 6.11** : écoulement permanent d'un fluide visqueux (eau) autour d'un cylindre (à base circulaire) pour différentes valeurs du nombre de Reynolds: (a)  $Re = 1,54$ ; (b)  $Re = 9,6$ ; (c)  $Re = 13,1$ ; (d)  $Re = 26$ . Les lignes de courant sont rendues visibles en ensemençant de la poudre d'aluminium. Au fur et à mesure que le nombre de Reynolds est augmenté, deux vortex se forment à l'arrière du cylindre.



**Figure 6.12** : écoulement permanent d'un fluide visqueux (eau) autour d'un cylindre (à base circulaire) pour différentes valeurs du nombre de Reynolds: (a)  $Re = 105$ ; (b)  $Re = 140$ . Les lignes d'émission sont rendues visibles en émettant une fumée d'un colloïde blanc et en éclairant par un tranche de lumière. C'est un phénomène appelé « allée de von Kármán », qui correspond à la formation de paires de vortex.



**Figure 6.13 :** tourbillons générés par des ailes d'avion.



**Figure 6.14 :** un écoulement turbulent rencontrant un obstacle peut générer des lâchers de tourbillons, appelés allée de von Kármán, ici c'est un mouvement d'air humide au-dessus de l'île de Broutona (Russie, péninsule du Kamtchaka) qui génère les tourbillons de von Kármán [NASA, USGS].



Figure 6.15 : un ouragan (Jane) dans l'hémisphère nord est une structure tourbillonnaire [NASA].

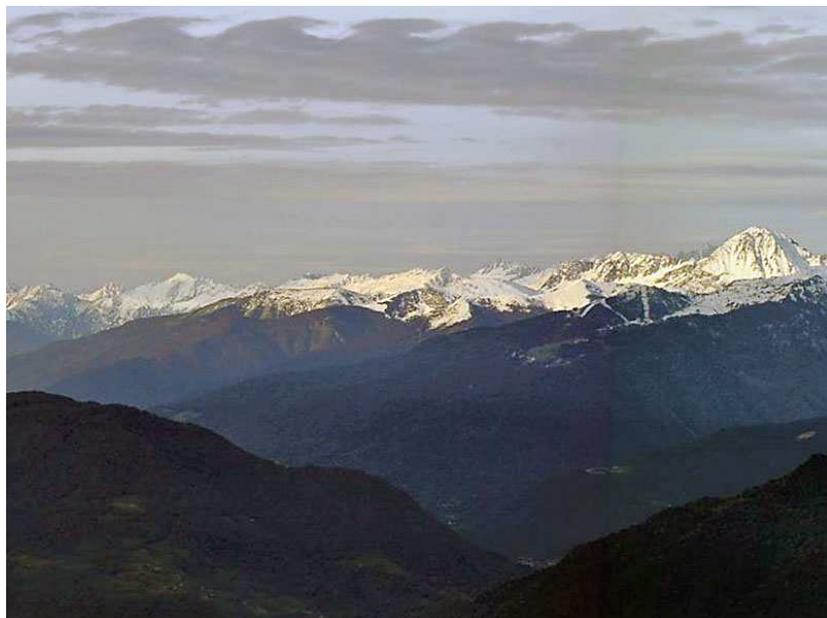


Figure 6.16 : instabilité de Kelvin-Helmoltz rendue visible par les nuages.

## 6.8 Moyenne des équations de Navier-Stokes

La clé pour comprendre (un peu) et modéliser la turbulence est liée à la notion de fluctuations de vitesse et de pression : les écoulements turbulents présentent des fluctuations aléatoires des vitesses. En pratique, cela veut dire que si l'on met un tube de Pitot dans une rivière pour mesurer la vitesse locale, on observe que la vitesse fluctue au cours du temps (voir figure 6.17). On décompose alors la vitesse instantanée  $u(t)$  en une vitesse moyenne (vitesse moyennée dans le temps) et une fluctuation de vitesse notée  $u'$

$$u(t) = \langle u \rangle + u'(t),$$

avec

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt,$$

la moyenne temporelle de la vitesse ; expérimentalement, la moyenne se calcule en intégrant le signal sur un temps arbitraire  $T$  (en général,  $T$  doit être choisi suffisamment grand pour que la moyenne soit stationnaire). On a vu que cette décomposition s'appelle *décomposition de Reynolds*.

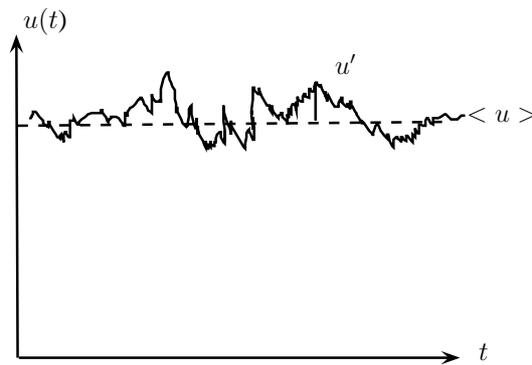


Figure 6.17 : fluctuation de la vitesse instantanée.

Sur le plan théorique, l'opérateur  $u(\mathbf{x}, t) \rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T u(\mathbf{x}, t) dt$  s'appelle l'*opérateur moyenne temporelle* ; il permet de passer d'une vitesse instantanée  $u(\mathbf{x}, t)$  à une vitesse moyenne  $\langle u \rangle$  (qui ne dépend plus de la position  $\mathbf{x}$ ). On peut construire d'autres opérateurs de moyenne : par exemple une moyenne dans l'espace (dite moyenne spatiale) ou une *moyenne d'ensemble*, où l'on suppose que l'on réalise la même expérience un très grand nombre de fois et qu'on moyenne sur ces « réalisations ». On admet le plus souvent que ces moyennes sont équivalentes entre elles (on parle d'*ergodicité* du système) et qu'on peut les interchanger sans problème. L'opérateur moyenne a plusieurs propriétés intéressantes :

- la moyenne d'une somme est égale à la somme des moyennes :  $\langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle$  ;
- la moyenne d'un produit d'une fonction  $f$  par une constante  $\alpha$  est :  $\langle \alpha f \rangle = \alpha \langle f \rangle$ . Attention cela ne marche pas pour deux fonctions non constantes  $\langle fg \rangle \neq \langle f \rangle \langle g \rangle$  ;
- la moyenne est invariante par elle-même :  $\langle \langle f \rangle \rangle = \langle f \rangle$ . On tire de cette relation et de la précédente que  $\langle f \langle g \rangle \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle$  ;
- la moyenne d'une fluctuation est nulle  $\langle u' \rangle = 0$  ;
- mais la moyenne du carré d'une fluctuation n'est pas nulle :  $\langle u'^2 \rangle > 0$  (sauf si  $u' = 0$ ) ;
- on peut intervertir les opérations de moyenne et de différentiations (grâce à l'ergodicité du système)

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle &= \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial x}, \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle &= \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t}; \end{aligned}$$

- mais attention cela ne marche pas avec la dérivée matérielle à cause du terme convectif (non



linéaire)

$$\left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle \neq \frac{d\langle f \rangle}{dt}.$$

Examinons en effet ce que vaut la moyenne d'une dérivée matérielle. On utilise la décomposition de Reynolds:  $f = \langle f \rangle + f'$  et  $\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'$ . Examinons le terme convectif de la dérivée matérielle

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla f &= (\langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}') \cdot \nabla (\langle f \rangle + f), \\ &= \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \langle f \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla f' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \langle f \rangle + \mathbf{u}' \cdot \nabla f'. \end{aligned}$$

Moyennons maintenant cette équation à l'aide de l'opérateur moyenne spatiale :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} \cdot \nabla f \rangle &= \langle \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \langle f \rangle \rangle + \langle \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla f' \rangle + \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla \langle f \rangle \rangle + \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla f' \rangle, \\ &= \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \langle f \rangle + \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla f' \rangle, \end{aligned}$$

où l'on s'est servi des relations vues plus haut. On trouve que la moyenne de la dérivée matérielle vaut donc

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \langle \mathbf{u} \cdot \nabla f \rangle, \\ &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \langle f \rangle + \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla f' \rangle, \\ &= \frac{d\langle f \rangle}{dt} + \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla f' \rangle. \end{aligned}$$

À cause du caractère non linéaire de la convection, il apparaît donc un produit  $\langle \mathbf{u}' \cdot \nabla f' \rangle$  supplémentaire.

Avec ces outils en main, on va donc pouvoir moyenner maintenant les équations de Navier-Stokes. L'objectif est de fournir une équation du mouvement moyen, c'est-à-dire une équation pour les champs moyens  $\langle \mathbf{u} \rangle$  et  $\langle p \rangle$ . On part de la formulation suivante des équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} \right) &= \rho \mathbf{g} - \nabla p + 2\mu \Delta \mathbf{u}, \end{aligned}$$

où l'on rappelle que l'on a  $\mathbf{u}\nabla\mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u}$ , où  $\mathbf{u}\mathbf{u}$  désigne le produit tensoriel de  $\mathbf{u}$  par  $\mathbf{u}$ . On introduit ensuite la décomposition de Reynolds pour la vitesse et la pression

$$p = \langle p \rangle + p' \text{ et } \mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'.$$

On substitue ces relations dans les équations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla \cdot \mathbf{u}' &= 0, \\ \rho \left( \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'\mathbf{u}' + \mathbf{u}'\langle \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle\mathbf{u}') \right) &= \rho \mathbf{g} - \nabla \langle p \rangle - \nabla p' + 2\mu (\Delta \langle \mathbf{u} \rangle + \Delta \mathbf{u}'). \end{aligned}$$

L'étape suivante est de prendre la moyenne temporelle, ce qui permet d'aboutir à la forme suivante

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle &= 0, \\ \rho \left( \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'\mathbf{u}') \right) &= \rho \mathbf{g} - \nabla \langle p \rangle + 2\mu \Delta \langle \mathbf{u} \rangle. \end{aligned}$$

On note que les équations moyennées de Navier-Stokes, appelées encore *équations de Reynolds*, sont très proches des équations originelles si ce n'est qu'un nouveau terme apparaît dans les équations au niveau de l'accélération convective:  $\rho \nabla \cdot \mathbf{u}'\mathbf{u}'$ . Comme ce terme se présente sous la forme d'une divergence (comme le tenseur des contraintes), il peut s'interpréter comme une contrainte. On introduit

donc un nouveau tenseur, appelé *tenseur de Reynolds* :  $\Sigma_t = -\rho \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle$ . Si on écrit ce tenseur dans une base cartésienne, on a une matrice symétrique

$$\Sigma_t = -\rho \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle = -\rho \begin{bmatrix} \langle u'u' \rangle & \langle u'v' \rangle \\ \langle u'v' \rangle & \langle v'v' \rangle \end{bmatrix}.$$

Ce tenseur de Reynolds représente les contraintes effectives générées par la turbulence du fluide ; pour cette raison, on l'appelle aussi tenseur des contraintes turbulentes. En effet, pour l'écoulement moyen, le mouvement erratique des particules de fluide génère une dissipation supplémentaire par rapport à un écoulement purement laminaire qui aurait le même champ de vitesse et de pression. Le premier effet de la turbulence est donc d'induire une dissipation d'énergie supplémentaire.

La principale difficulté réside dans le calcul du tenseur de Reynolds  $\Sigma_t$ . On peut se dire que puisqu'on vient d'obtenir un jeu d'équations pour le mouvement moyen, on peut faire de même et dériver un jeu d'équations pour  $\mathbf{u}'$  et  $p'$ . On peut en effet obtenir un jeu d'équations gouvernant les fluctuations simplement en soustrayant aux équations de Navier-Stokes les équations de Reynolds. Toutefois, ce nouveau jeu d'équations n'est pas fermé. Tous les modèles théoriques de calcul de  $\Sigma_t$  ont été à ce jour voués à l'échec et en pratique, il faut recourir à des équations de fermeture empiriques, c'est-à-dire des relations qui permettent de calculer de façon plus ou moins implicite  $\Sigma_t$  en fonction des caractéristiques de l'écoulement. Il n'existe malheureusement pas d'équation de fermeture universelle. À chaque type de problème, il existe en général une équation de fermeture plus ou moins complexe, dont l'expérience a montré qu'elle pouvait fournir une approximation correcte. On va ici présenter la plus simple d'entre elle (le modèle dit de *longueur de mélange*), qui fournit une bonne approximation de ce qui se passe pour des écoulements près d'une paroi solide. C'est cette géométrie que l'on va rencontrer le plus souvent dans les applications en hydraulique.

## 6.9 Problème de fermeture

Les équations de fermeture sont plus ou moins empiriques et plus ou moins complexes. Les plus simples sont des fermetures algébriques où l'on écrit directement une relation entre grandeur fluctuante et grandeur moyenne, par exemple en cisaillement simple (écoulement près d'une paroi) :

$$\tau = \mu_t \frac{d\langle u \rangle}{dy},$$

avec  $\mu_t$  la viscosité turbulente. Les fermetures algébriques dépendent du problème traité. Ainsi :

- loi de paroi  $\nu_t = \mu_t / \rho = \ell_m^2 \frac{d\langle u \rangle}{dy}$ ,  $\ell_m = \kappa y$  est la *longueur de mélange* introduite par Prandtl<sup>6</sup> et qui représente la taille caractéristique des structures turbulentes près de la paroi, et où  $\kappa \approx 0,4$  est la constante de von Kármán. La contrainte de cisaillement s'exprime alors comme

$$\tau = \rho \kappa^2 y^2 \left( \frac{d\langle u \rangle}{dy} \right)^2,$$

où l'on notera par rapport à la loi en régime laminaire : une dépendance quadratique vis-à-vis de la vitesse et une dépendance vis-à-vis de la profondeur  $y$  ;

- pour un jet  $\nu_t = \ell \bar{u}$ .

On remarque ainsi que pour une paroi, le modèle de la longueur de mélange prévoit que la contrainte de cisaillement dépend du carré du taux de cisaillement  $d\langle u(y) \rangle / dy$  et n'est donc plus une fonction linéaire de  $d\langle u(y) \rangle / dy$  comme pour le régime laminaire, ce qui montre que la dissipation d'énergie (rappelons que la puissance dissipée s'écrit  $\Phi = \tau d\langle u(y) \rangle / dy$ ) croît très rapidement avec la vitesse moyenne. Comme on le montre au § 6.10, cette dépendance a également une profonde influence sur le profil de vitesse, puisque celui-ci devient logarithmique à proximité de la paroi.

6. Ludwig Prandtl (1875–1953) est un mécanicien allemand. Chercheur et enseignant à la réputation internationale bien établie, Prandtl est l'instigateur de l'école de Göttingen en mécanique des fluides, qui attirera parmi les meilleurs scientifiques de l'époque. Les fondements de la théorie de la couche limite y furent établis. La théorie de la longueur de mélange fut développée par Prandtl sur la base d'une analogie entre le mouvement turbulent et la cinétique des gaz.

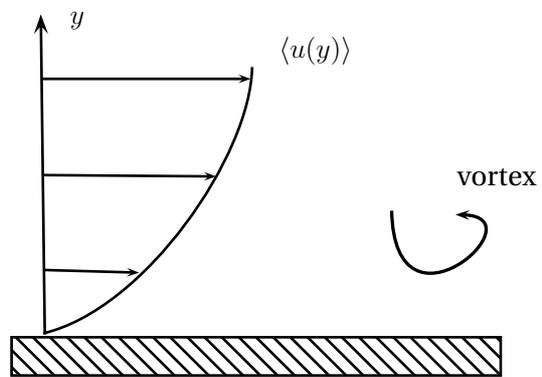


Figure 6.18 : turbulence près d'une paroi.

## 6.10 Exemple d'application : écoulement sur un plan incliné

On considère un écoulement permanent uniforme d'un fluide newtonien incompressible le long d'un plan infini. La hauteur d'écoulement est  $h$ .

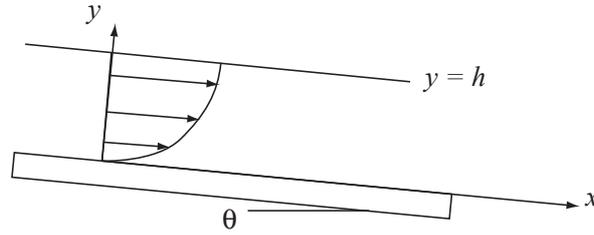


Figure 6.19 : écoulement en régime permanent le long d'une plaque infinie inclinée d'un angle  $\theta$ .

### Étape 1 : recherche des symétries

L'écoulement est bidimensionnel. Il y a invariance par translation selon  $x$  et invariance par  $t$  (écoulement permanent). On en déduit que la vitesse selon  $x$  s'écrit donc  $u(y)$ . Il n'y a pas de vitesse selon  $y$  :  $v = 0$ .

### Étape 2 : équations du mouvement

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

qui est systématiquement vérifiée. La projection selon  $x$  des équations de conservation de la quantité de mouvement donne

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

soit après simplification

$$0 = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}. \quad (6.45)$$

On fait de même pour la projetée selon  $y$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

soit après simplification

$$0 = -\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (6.46)$$

Les conditions aux limites ;

- cinématique : condition d'adhérence au fond

$$u = 0 ; \quad (6.47)$$

- dynamique : contrainte nulle à la surface libre  $\Sigma \cdot \mathbf{e}_y = 0$  (pression atmosphérique négligée)

$$p = 0 \text{ et } \sigma_y = 2\mu \frac{du}{dy} = 0 \text{ en } y = h. \quad (6.48)$$

**Étape 3 : résolution des équations en régime laminaire**

En régime laminaire, la viscosité est constante. L'équation (6.46) montre que la pression est hydrostatique

$$p = \rho g \cos \theta (h - y).$$

On déduit donc l'équation (6.49) de la quantité de mouvement selon ( $x$ ) que

$$\rho g \sin \theta = -\mu \frac{d^2 u}{dy^2},$$

qui s'intègre facilement :

$$u(y) = -\frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} y^2 + \alpha y + \beta,$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  des constantes d'intégration. La condition aux limites (6.47) au fond implique que

$$\beta = 0,$$

tandis que la condition aux limites (6.48) à la surface libre

$$u'(h) = -\frac{\rho g \sin \theta}{\mu} h + \alpha = 0.$$

Le champ de vitesse s'écrit donc

$$u(y) = \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} (2hy - y^2).$$

Le profil de vitesse est donc parabolique.

**Étape 4 : résolution des équations en régime turbulent**

Si on fait l'expérience avec du miel de masse volumique  $1100 \text{ kg/m}^3$ , de viscosité  $\mu = 10 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ , sur un plan incliné de  $30^\circ$  et pour une hauteur  $h$  de 5 cm, on trouve que la vitesse moyenne vaut

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u(y) dy = \frac{1}{3} \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} h^2 \approx 45 \text{ cm/s}$$

et donc le nombre de Reynolds vaut à peu près

$$\text{Re} = \frac{1100 \times 5 \times 10^{-2} \times 0,45}{10} = 2,47.$$

L'écoulement est donc laminaire et on peut appliquer les équations de Navier-Stokes. Que se passe-t-il si on prenait de l'eau ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  et  $\mu = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ) à la place du miel? Pour les mêmes conditions expérimentales, la vitesse de l'écoulement serait en théorie de

$$\bar{u} = 4087 \text{ m/s},$$

soit un nombre de Reynolds de

$$\text{Re} = \frac{1000 \times 5 \times 10^{-2} \times 4087}{10^{-3}} = 2,4 \times 10^8.$$

L'écoulement est donc turbulent et on ne peut plus appliquer les équations de Navier-Stokes.

On va donc écrire les équations de la turbulence dans le cas du modèle très simple de la *longueur de mélange* de Prandtl. La contrainte de cisaillement dans un régime permanent uniforme s'écrit d'après l'équation (6.6)

$$0 = \rho g \sin \theta - \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (6.49)$$

(où la contrainte de cisaillement est notée  $\tau = T_{xy}$ ) car la contrainte normale selon  $x$  est nulle ( $T_{xx} = 0$ ) et le gradient longitudinal de pression est nul car  $h$  ne dépend pas de  $x$  (soit  $\partial_x p = 0$ ). En intégrant cette équation avec pour condition aux limites à la surface libre  $\tau = 0$  en  $y = h$  (l'air n'exerce pas de frottement sur la surface libre de l'écoulement), on déduit la relation

$$\tau = \rho g \sin \theta (h - y).$$

Remarquons au passage que cette relation est générale et valable pour tout écoulement permanent uniforme ; elle est indépendante de la loi de comportement utilisée pour décrire la rhéologie du fluide. Le modèle de Prandtl donne par ailleurs la relation

$$\tau = \mu_t \frac{d\bar{u}}{dy},$$

avec  $\mu_t$  la viscosité turbulente

$$\mu_t = \rho (\kappa y)^2 \frac{d\langle u \rangle}{dy},$$

où  $\kappa \approx 0,41$  est la constante de von Kàrmàn et  $\langle u(y) \rangle$  est la vitesse moyenne (dans le temps). L'équation du mouvement est donc

$$\rho g \sin \theta (h - y) = \rho (\kappa y)^2 \left( \frac{d\langle u \rangle}{dy} \right)^2, \quad (6.50)$$

soit

$$\frac{d\langle u \rangle}{dy} = \frac{\sqrt{g \sin \theta}}{\kappa} \sqrt{\frac{h}{y^2} - \frac{1}{y}},$$

dont l'intégration donne

$$\langle u \rangle = 2 \frac{\sqrt{g \sin \theta}}{\kappa} \left( \sqrt{h - y} - \sqrt{h} \operatorname{arctanh} \left[ 1 - \frac{y}{h} \right] \right) + c,$$

avec  $c$  une constante d'intégration. On note que le profil de vitesse n'est plus parabolique (voir figure 6.20) et diverge vers  $-\infty$  quand  $y \rightarrow 0$ . Pour éviter cela, on impose une condition d'adhérence à une hauteur  $y = y_0$ . Notons que malgré cela, l'intégrale du champ de vitesse existe et vaut

$$\int_0^h d\langle u(y) \rangle dy = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{g h^3 \sin \theta}}{\kappa}.$$

La vitesse moyenne est alors

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h d\langle u(y) \rangle dy = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{g h \sin \theta}}{\kappa}.$$

Une application numérique pour l'eau nous donne une vitesse moyenne de 80 cm/s à comparer avec les 4087 m/s obtenus précédemment.



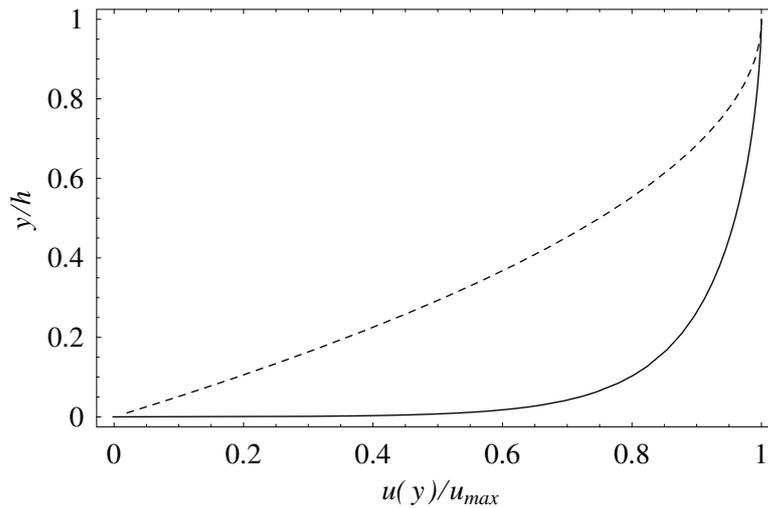
**Remarque 1.** On réalise souvent l'intégration du profil de vitesse (6.50) en supposant que dans la contrainte de cisaillement, si on est suffisamment près du fond, alors  $y \ll h$  (ce qui revient à supposer que la contrainte est constante et égale à la contrainte pariétale  $\tau_p = \rho g h \sin \theta$ ). Ce faisant, on simplifie l'intégration puisque

$$\frac{d\langle u \rangle}{dy} \approx \frac{\sqrt{g h \sin \theta}}{\kappa} \frac{1}{y},$$

soit

$$\langle u \rangle = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \ln y + C,$$

avec  $C$  une constante d'intégration. C'est pour cette raison que l'on parle de *profil de vitesse logarithmique* pour décrire un écoulement turbulent près d'une paroi. À noter qu'avec cette loi, la vitesse serait infinie en  $y = 0$ . Le modèle cesse d'être valide en fait très près de la paroi, où il existe une



**Figure 6.20** : profils de vitesse sous forme adimensionnelle pour un écoulement en régime permanent le long d'une plaque infinie inclinée d'un angle  $\theta$  : écoulement turbulent (ligne continue) avec  $y_0 = 10^{-4}$  m et  $c = 4,29$  ; écoulement laminaire (ligne discontinue).  $u_{max}$  est la vitesse à la surface libre.

couche dite très fine « sous-couche visqueuse », qui fait la jonction entre l'écoulement turbulent (zone logarithmique) et paroi solide.

**Remarque 2.** On a vu au chapitre 4 que la dissipation d'énergie au sein d'un fluide s'écrit

$$\Phi = \text{tr}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{T}),$$

ce qui donne ici pour une expérience en cisaillement simple :

$$\Phi = \tau \dot{\gamma},$$

avec  $\tau = \rho g(h - y) \sin \theta$  la contrainte de cisaillement et  $\dot{\gamma} = du/dy$  le taux de cisaillement (gradient de vitesse). Pour un fluide newtonien en régime laminaire on a donc :

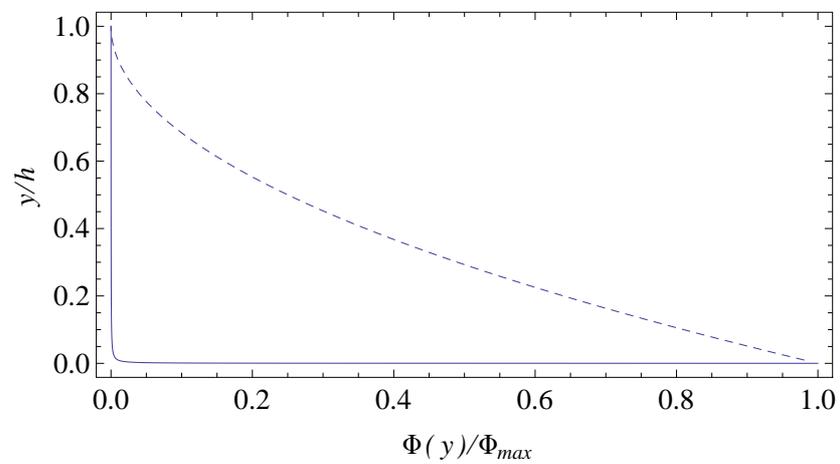
$$\Phi = \rho g(h - y) \sin \theta \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} (h - y) = \frac{(\rho g \sin \theta)^2}{\mu} (h - y)^2,$$

ce qui montre que la dissipation se produit partout dans l'écoulement, avec une valeur maximale au fond puis une diminution régulière jusqu'à la surface libre.

Pour le régime turbulent, la dissipation d'énergie s'écrit

$$\Phi = \rho g(h - y) \sin \theta \frac{\sqrt{g \sin \theta}}{\kappa} \sqrt{\frac{h}{y^2} - \frac{1}{y}} = \frac{\rho (g \sin \theta)^{3/2}}{\mu} \frac{(h - y)^{3/2}}{y},$$

qui montre que  $\Phi$  est très grand ( $\Phi \rightarrow \infty$  quand  $y \rightarrow 0$ ) dans la couche logarithmique, puis tend rapidement vers 0 au-dessus de la couche logarithmique. Comme le montre la figure 6.21, quasiment toute l'énergie se dissipe dans la couche pariétale au fond.



**Figure 6.21** : profils de dissipation sous forme adimensionnelle pour un écoulement en régime permanent le long d'une plaque infinie inclinée d'un angle  $\theta$  : écoulement turbulent (ligne continue) avec  $y_0 = 10^{-4}$  m et  $c = 4,29$  ; écoulement laminaire (ligne discontinue).  $\Phi_{max}$  est la valeur maximale prise par la dissipation d'énergie.





# Rappels de mathématiques

## A.1 scalaire, vecteurs, et tenseurs

En mécanique, on se sert de variables appelées *tenseurs* (de différentes dimensions) pour décrire des phénomènes physiques :

- une grandeur *scalaire* est une quantité représentée par un réel. Sa dimension est 0 : on dit aussi qu'un scalaire est un tenseur d'ordre 0. La différence entre nombre réel et nombre scalaire est qu'un scalaire est indépendant de la base physique dans lequel on l'exprime. Par exemple, la vitesse a une valeur réelle, mais n'est pas un scalaire car elle varie selon le référentiel dans lequel on fait la mesure. La masse d'un objet est invariante (sa valeur ne dépend pas du repère dans lequel on fait la mesure) : c'est donc une grandeur scalaire ;
- une grandeur vectorielle ou *vecteur* est représentée dans l'espace par un segment orienté ayant pour extrémités un point de départ et un point d'arrivée. L'emplacement dans le plan ou l'espace n'a pas d'importance car seuls comptent sa longueur, sa direction, et son sens. Un vecteur est un tenseur de dimension 1 ;
- un *tenseur* est une fonction multilinéaire. Un tenseur est défini par son ordre, c'est-à-dire le nombre d'indices nécessaire pour le définir. Parmi les tenseurs les plus utiles, il y a les tenseurs d'ordre 2, dont les composantes dans une base donnée forment une *matrice* ; par exemple, un tenseur  $\mathbf{T}$  d'ordre 2 permet de relier deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  de façon linéaire :  $\mathbf{a} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}$ . Dans une base particulière, si  $\mathbf{a} = (x_a, y_a)$ ,  $\mathbf{b} = (x_b, y_b)$ , alors

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_a = m_{11}x_b + m_{12}y_b, \\ y_a = m_{21}x_b + m_{22}y_b, \end{cases}$$

avec  $m_{ij}$  la matrice  $\mathbf{M}$  composantes de  $\mathbf{T}$  dans la base choisie. Rappelons que la notation  $m_{ij}$  désigne la composante occupant la ligne  $i$  et la colonne  $j$  dans la matrice  $\mathbf{M}$ . La notion de tenseur se généralise à des formes  $n$ -linéaires pour former des tenseurs d'ordre  $n$ . Par exemple, un tenseur d'ordre 3 permet de décrire des relations multilinéaires entre des tenseurs d'ordre 2.

Un *champ tensoriel* est un tenseur, dont les composantes varient dans l'espace.

### A.1.1 Coordonnées cartésiennes, cylindriques, et sphériques

Le plus souvent, on se sert de l'un des trois systèmes orthonormés suivants :

- coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  : voir figure A.1 ;
- coordonnées cylindriques  $(r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan(y/x), z)$  : voir figure A.2 ;
- coordonnées sphériques  $(x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta)$  avec  $0 \leq \theta \leq \pi$  et  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$  : voir figure A.3.

Pour des applications particulières, on peut être amené à utiliser des repères curvilignes plus complexes.

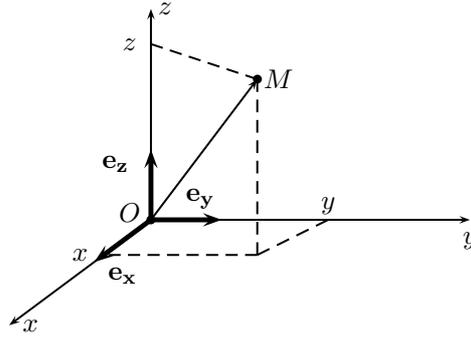


Figure A.1 : représentation d'un point dans un système de coordonnées cartésiennes.

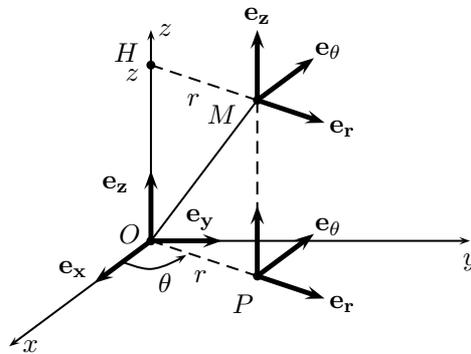


Figure A.2 : représentation d'un point dans un système de coordonnées cylindriques.

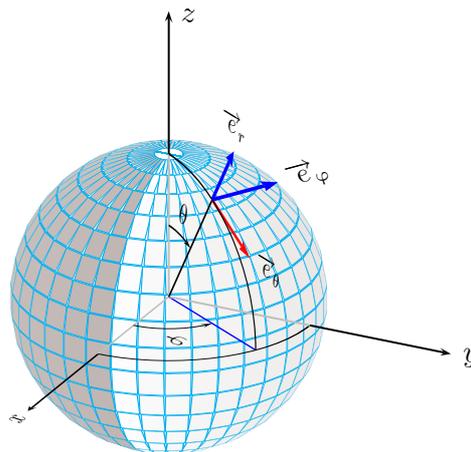


Figure A.3 : représentation d'un point dans un système de coordonnées sphériques.

### A.1.2 Produits

À partir de deux tenseurs, on peut réaliser une multitude d'opérations. Les plus simples sont les opérations d'addition et multiplication par un scalaire. On dispose également de plusieurs produits entre grandeurs tensorielles. Si de façon générique, on note le produit entre des tenseurs  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , et  $\mathbf{c}$  à l'aide du symbole  $\star$ , alors l'opération « produit » vérifie une ou plusieurs des règles suivantes :

- opération commutative :  $\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \mathbf{b} \star \mathbf{a}$  ;
- opération associative :  $\mathbf{a} \star (\mathbf{b} \star \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \star \mathbf{b}) \star \mathbf{c}$  ;
- opération distributive :  $(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) \star \mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} \star \mathbf{c} + \mu \mathbf{b} \star \mathbf{c}$  pour tous scalaires  $\lambda$  et  $\mu$ .

Ainsi pour l'addition de tenseurs, les trois propriétés sont vérifiées.

#### Produit scalaire

Le *produit scalaire* de deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  est noté  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ . C'est une application linéaire d'un espace  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  (resp.  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ) vers  $\mathbb{R}$ . Du point de vue algébrique, si  $\mathbf{a} = (x_a, y_a)$ ,  $\mathbf{b} = (x_b, y_b)$  sont les composantes de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  dans une base orthonormée, alors

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_a x_b + y_a y_b.$$

Le produit scalaire est commutatif et distributif, mais n'est pas associatif.

La norme d'un vecteur est ainsi :  $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$ . Du point de vue géométrique, le produit scalaire est relié à l'angle  $\alpha$  entre les deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  de la façon suivante

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha.$$

On retiendra la propriété importante : deux vecteurs orthogonaux  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  ont un produit scalaire nul  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ .

Le produit scalaire peut s'appliquer à des tenseurs d'ordre quelconque ; on l'appelle alors parfois *produit simplement contracté* ou *produit contracté une fois*. Le produit scalaire de deux tenseurs est un tenseur d'ordre égal à la somme des ordres des termes moins 2. Par exemple, si on introduit un tenseur  $\mathbf{T}$  d'ordre 2 reliant deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  de façon linéaire :  $\mathbf{a} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}$ , l'opération s'apparente bien à un produit scalaire car on bien  $\text{ord}(\mathbf{a}) = 1 = \text{ord}(\mathbf{T}) + \text{ord}(\mathbf{b}) - 2$ .

En mécanique, le produit tensoriel est d'usage courant. Par exemple, la puissance  $P$  d'une masse ponctuelle  $m$  animée d'une vitesse  $\mathbf{v}$  et soumise à une force  $\mathbf{f}$  est :  $P = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$  ; son énergie cinétique est  $E_c = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2$ .

#### Produit vectoriel

Le *produit vectoriel* est une opération vectorielle (dans des espaces euclidiens orientés) de dimension 3. Le produit vectoriel de deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  est noté de différentes façons selon les milieux :  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ , ou bien  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ . Si  $\mathbf{a} = (x_a, y_a, z_a)$ ,  $\mathbf{b} = (x_b, y_b, z_b)$ , alors

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}.$$

Géométriquement, le produit vectoriel est également relié à l'angle orienté  $\alpha$  entre les deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  de la façon suivante

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha.$$

Le vecteur  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  est normal au plan formé par les deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sous réserve que ceux-ci ne soient pas colinéaires sinon  $\mathbf{c} = 0$ . Le produit vectoriel est distributif, mais n'est ni commutatif, ni associatif. Ainsi, contrairement au produit scalaire, l'ordre des termes dans le produit vectoriel a son importance :  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ . De même, on a

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$



## Produit tensoriel

On introduit le *produit tensoriel* (appelé encore produit dyadique) de deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  comme la construction d'un tenseur d'ordre  $n + m$  à partir de deux tenseurs d'ordre  $n$  et  $m$ . Le produit tensoriel est noté  $\mathbf{ab}$  ou bien  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ .

Lorsque  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont des vecteurs, c'est un opérateur linéaire qui a tout vecteur  $\mathbf{n}$  lui associe un autre vecteur tel que :

$$(\mathbf{ab})\mathbf{n} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})\mathbf{a}.$$

Cet opérateur peut donc être représenté par une matrice si l'on se place dans un repère cartésien (ou dans d'autres types de repère). Par exemple, en dimension 2, on a :

$$(\mathbf{ab}) = \begin{bmatrix} x_a x_b & x_a y_b \\ y_a x_b & y_a y_b \end{bmatrix},$$

avec  $\mathbf{a} = (x_a, y_a)$  et  $\mathbf{b} = (x_b, y_b)$ .

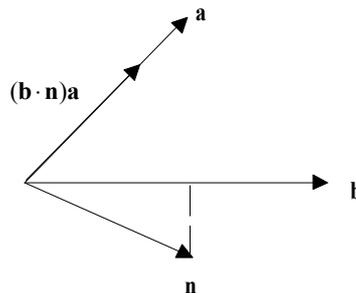


Figure A.4 : produit tensoriel.

Le produit tensoriel de deux vecteurs se rencontre fréquemment en mécanique ; par exemple, dans un fluide dont la vitesse locale est  $\mathbf{v}$ , on peut construire un tenseur d'inertie  $\mathbf{vv}$ , qui apparaît dans le terme de convection de l'équation de Navier-Stokes.

### A.1.3 Surface et calcul de surface

#### Définitions

Une surface dans un espace de dimension de dimension 3 peut être représentée par des équations de différente forme :

- équation *explicite* : si la surface a une équation de la forme  $z = f(x, y)$ , alors on dit que l'équation est explicite car  $z$  est entièrement déterminé par la relation  $f(x, y)$ .
- équation *implicite* : si la surface a une équation de la forme  $\phi(x, y, z) = 0$ , alors on dit que l'équation est implicite car  $z$  (ou toute autre variable) n'est entièrement déterminé de façon explicite par rapport à  $x$  et  $y$ .

Notons qu'une équation explicite  $z = f(x, y)$  peut être transformée en équation implicite en posant  $\phi = z - f(x, y)$ . La réciproque n'est pas vraie.

Le calcul d'une surface  $S$  passe par la définition de l'élément infinitésimal de surface  $dS$  :

$$S = \int_S dS.$$

Il faut distinguer les éléments infinitésimaux (voir figure A.5) :

- sur des surfaces planes ; dans ce cas, on a :  $\delta^2 S = dS = dx dy$  (coordonnées cartésiennes) ou bien  $dS = r dr d\theta$  (coordonnées polaires). On emploie ici  $\delta^2 S$  pour indiquer que la surface élémentaire est le produit de deux incréments de longueur ;

- sur des surfaces de révolution, c'est-à-dire des surfaces obtenues par rotation d'une courbe autour d'un axe de symétrie:  $\delta^2 S = dS = R d\theta dl$ , avec  $dl$  un incrément de longueur et  $R$  la longueur (rayon puisqu'il s'agit d'une rotation) séparant l'élément infinitésimal de l'axe de symétrie. Une sphère par exemple est obtenue par rotation d'un cercle autour d'un diamètre. On peut aussi utiliser les coordonnées sphériques:  $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  sur une sphère de rayon  $r$ .

Une surface peut également être obtenue par translation d'un profil curviligne.

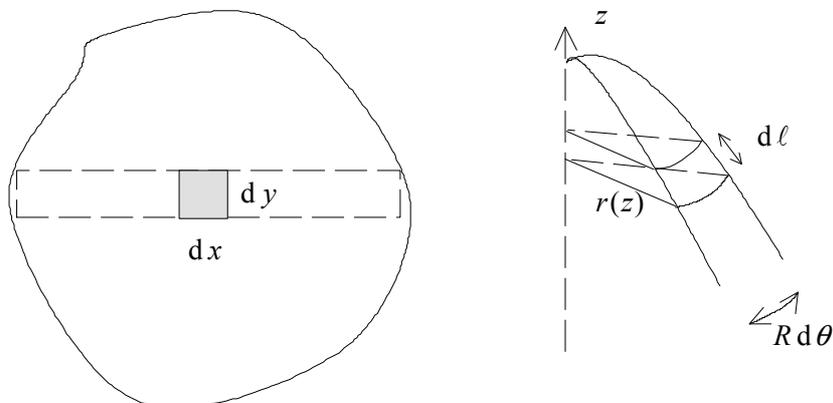


Figure A.5 : deux cas différents de surface infinitésimale.

### Surface plane

Une méthode qui marche souvent est de décomposer la surface à mesurer en bandelettes. Sur la figure A.5, cela revient à étendre la surface  $\delta^2 S$  par intégration le long de l'axe  $x$  (jusqu'à atteindre les limites de la surface). L'élément d'intégration sera alors de la forme  $dS = \ell(y)dy$ , avec  $\ell(y)$  la longueur de la bande à l'altitude  $y$ .

### Surface de révolution

Pour une surface de révolution, il faut calculer la longueur incrémentale  $dl$ . On a:  $d\ell^2 = dx^2 + dy^2$ . Soit encore:  $dl = dx\sqrt{1 + f'^2(x)}$ . Lorsque la surface fait une révolution complète ( $\theta = 2\pi$ ), on a intérêt à faire le calcul sur une bandelette annulaire de périmètre  $2\pi r(z)$  (voir la figure A.5). La surface d'intégration  $dS = 2\pi r(z)dl = 2\pi r(z)dz\sqrt{1 + f'^2(z)}$ .

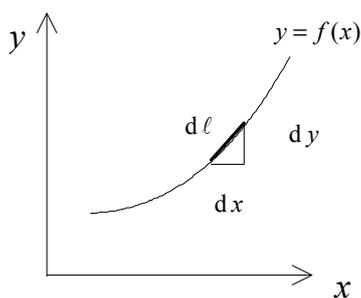


Figure A.6 : calcul du  $dl$ .

### Le cas des surfaces orientées

Pour certains calculs, on a besoin de calculer  $dS\mathbf{n}$ , avec  $\mathbf{n}$  la normale orientée de « l'intérieur vers l'extérieur » (la notion d'intérieur ne sera pas abordée ici). On rappelle ici juste la manière de calculer

la normale  $\mathbf{n}$  pour une courbe  $y = f(x)$ . La tangente est portée par le vecteur  $\mathbf{t} = (1, f'(x))$ . Un vecteur perpendiculaire est par exemple  $\mathbf{p} = (f'(x), -1)$  car on a  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{t} = 0$ . On définit la normale comme un vecteur perpendiculaire unitaire :  $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}| = (f'(x), -1)/\sqrt{1+f'^2}$ .

#### A.1.4 Calcul des volumes

Le calcul des volumes nécessite de calculer un volume infinitésimal selon le système de coordonnées choisi :

- coordonnées cartésiennes :  $dV = dx dy dz$  ;
- coordonnées cylindriques :  $dV = r dr d\theta dz$  ;
- coordonnées sphériques :  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ .

## A.2 Quelques opérateurs

Pour se simplifier la vie, le physicien aime réduire la taille des équations. Il introduit pour cela des « opérateurs », c'est-à-dire des ensembles d'opérations différentielles groupés génériquement sous un seul terme. Ces opérateurs ont également des significations physiques.

### A.2.1 Opérateur gradient

Le plus simple et le plus connu est l'opérateur *gradient* noté  $\text{grad}$  ou  $\nabla$  (appelé symbole *nabla*), qui à une fonction  $f$  lui associe le vecteur composé de toutes ses dérivées partielles. Par exemple si  $f(x, y, z)$ , alors :

$$\text{grad} f = \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

♣ **Exemple.** – Considérons  $f(x, y; t) = xt + x^2y/t$ . On trouve que le gradient de  $f = xt + \frac{x^2}{t}y$  est le vecteur :

$$\text{grad} f = \left( t + 2\frac{x}{t}y, \frac{x^2}{t} \right).$$

□

Notons que :

- **Attention** dans l'exemple ci-dessus le gradient a concerné les variables d'espace  $x, y$  et non de temps  $t$  car en mécanique, l'opérateur gradient ne s'applique le plus souvent qu'aux variables spatiales; dans ce cas :

$$\nabla f(x, y; t) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

On a mis un « ; » dans la liste des variables de la fonction pour séparer variables d'espace et de temps.

- Les expressions ci-dessus ne sont valables qu'en coordonnées cartésiennes. En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , il faut employer :

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- On a la relation :

$$\boxed{df(\mathbf{x}) = \text{grad} f \cdot d\mathbf{x}}$$

ce qui permet pour les plus téméraires d'introduire la dérivée selon un vecteur :  $\text{grad} f = df(\mathbf{x})/d\mathbf{x}$ .

- L'effet de l'opérateur gradient sur un objet de dimension  $n$  est d'obtenir un objet de dimension  $n + 1$ .
- On peut étendre la définition à un *champ vectoriel*; par exemple si  $\mathbf{u} = (a(x, y), b(x, y))$ , alors

$$\text{grad} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Physiquement, l'opérateur gradient sert dès lors qu'on a besoin de généraliser la notion de dérivée à des problèmes à plusieurs variables d'espace. Par exemple, dans un problème scalaire, le gradient de température  $T$  est noté  $\partial T/\partial x$ . Pour un problème dans l'espace, le gradient sera  $\nabla T$ . C'est ainsi que la loi de Fourier qui lie le *flux de chaleur* au gradient s'écrit

$$j_Q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x},$$

pour un problème unidirectionnel (transmission de chaleur dans un tube par exemple), mais dans le cas général s'écrit

$$\mathbf{j}_Q = -\kappa \nabla T,$$

avec  $\kappa$  la conductibilité thermique. Notons au passage que le flux de chaleur dans un problème tridimensionnel est un vecteur.

Quelques développements avec l'opérateur gradient :

- gradient d'un produit de 2 fonctions (cela donne un vecteur)

$$\text{grad}(fg) = g \text{grad} f + f \text{grad} g.$$

- gradient d'un produit d'une fonction et d'un vecteur (cela donne une matrice)

$$\text{grad}(f\mathbf{u}) = \mathbf{u} \text{grad} f + f \text{grad} \mathbf{u}.$$

- gradient d'un produit scalaire (cela donne un vecteur)

$$\text{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \text{grad} \mathbf{v} + \mathbf{v} \text{grad} \mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\text{rot} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\text{rot} \mathbf{u}),$$

où  $\times$  représente le produit vectoriel et  $\text{rot}$  l'opérateur rotationnel.

### A.2.2 Opérateur divergence

Un autre opérateur est la *divergence*, notée  $\text{div}$  ou  $\nabla \cdot$  (faire bien attention au point en position centrale après le symbole), qui à un vecteur  $\mathbf{u}$  lui associe la fonction résultant de la somme des dérivées partielles de ses composantes. Par exemple si on écrit

$$\mathbf{u} = (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z)),$$

alors :

$$\text{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}.$$

♣ **Exemple.** – Reprenant l'exemple précédent, on trouve que la divergence du gradient de  $f(x, y; t) = xt + \frac{x^2}{t}y$  est la fonction :

$$\text{div}(\text{grad} f) = \frac{\partial}{\partial x} \left( t + 2\frac{x}{t}y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^2}{t} \right) = \frac{2y}{t}.$$

□

Physiquement, l'opérateur divergence apparaît fréquemment dans les problèmes de flux d'une quantité à travers une surface ou un volume. Considérons en effet le flux d'une quantité  $\mathbf{f}$  de composantes  $(a(x, y), b(x, y))$  à travers la surface  $\mathcal{S}$  entourant un petit volume infinitésimal  $dxdy$  (voir figure A.7). Ce flux se définit comme

$$\Phi = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS,$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale à la surface. Ici, cette définition peut donner lieu à une décomposition sur chacune des facettes ① à ④. On a ainsi

$$\Phi = - \int_1 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_x dS + \int_3 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_x dS - \int_2 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_y dS + \int_4 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_y dS.$$

Prenons les deux premiers termes du membre de droite, on a

$$- \int_1 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_x dS + \int_3 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_x dS = \int_y^{y+dy} (a(x+dx, y) - a(x, y)) dy = \frac{\partial a}{\partial x} dx dy + o(dx dy).$$

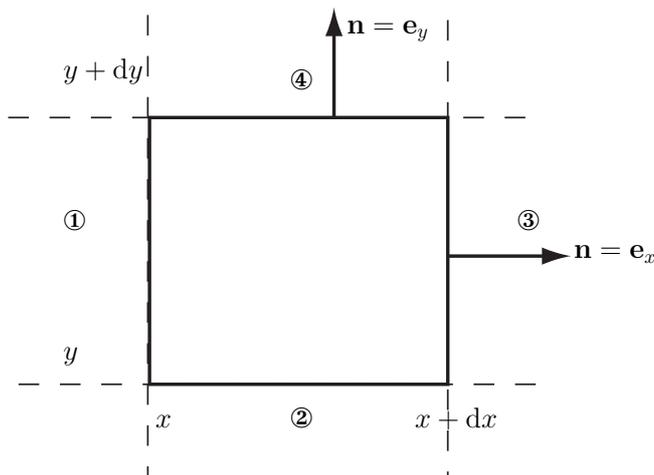


Figure A.7 : flux à travers une surface de contrôle.

On fait de même avec les deux derniers termes et on additionne les quatre termes pour obtenir l'approximation

$$\Phi = \left( \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \right) dx dy + o(dx dy) \approx \nabla \cdot \mathbf{f} dx dy.$$

On voit donc que le flux de  $\mathbf{f}$  équivaut au terme de divergence multiplié par le volume (ici une surface) du volume de contrôle  $dx dy$ . Le résultat important à retenir est la relation entre flux et opérateur divergence. On peut démontrer un théorème dit de *Green-Ostrogradski* qui généralise ce résultat. Le théorème de Green-Ostrogradski (appelé encore théorème de la divergence) énonce le résultat suivant

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS.}$$

Un corollaire du théorème de Green-Ostrogradski est le suivant

$$\int_V \operatorname{grad} f dV = \int_S f \mathbf{n} dS.$$

Quelques relations utiles de composition avec l'opérateur divergence :

- divergence du produit d'un champ scalaire et d'un champ vectoriel (cela donne un scalaire)

$$\operatorname{div}(f \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} f + f \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

- divergence du produit d'un champ vectoriel et d'un tenseur d'ordre 2 (matrice) (cela donne un scalaire)

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} : \operatorname{grad} \mathbf{u},$$

où le symbole ':' représente le double produit contracté :

$$\mathbf{A} : \operatorname{grad} \mathbf{u} = \operatorname{trace}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}).$$

### A.2.3 Opérateur laplacien

Le dernier opérateur est le *laplacien*, noté<sup>1</sup>  $\Delta$ , soit encore

$$\Delta f(x, y, z) = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

---

1. noté également  $\nabla^2$  car  $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$

en coordonnées cartésiennes.

Physiquement, cet opérateur se rencontre chaque fois que l'on fait un calcul de flux avec une quantité qui dérive d'une gradient. Par exemple, on a vu plus haut que le flux de température était relié au gradient *via* la loi de Fourier. Un simple bilan d'énergie permet d'écrire que l'accroissement de chaleur (énergie) par unité de temps doit correspondre à la variation de ce qui entre et de ce qui sort d'un certain volume (c'est-à-dire le flux de chaleur) s'il n'y a pas de création de chaleur.

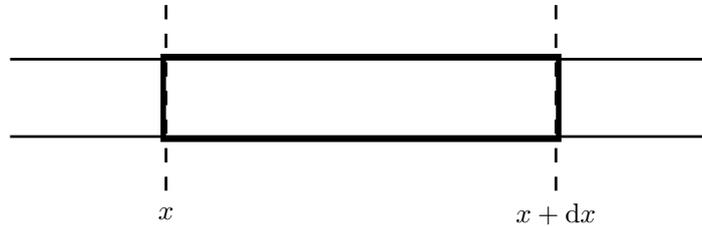


Figure A.8 : transmission de chaleur dans un barreau.

En dimension 1 (problème scalaire), cela s'énonce

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx = - \frac{\partial j_Q}{\partial x} dx,$$

accroissement de chaleur par unité de temps = flux de chaleur,

avec  $c$  la chaleur massique,  $\rho$  la masse volumique ; le bilan est fait pour un barreau de largeur unitaire dans la direction  $x$  et de longueur infinitésimale  $dx$ . On aboutit finalement à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

avec  $\alpha = \kappa / (\rho c)$ . La généralisation à un espace à deux ou trois dimensions ne pose pas de problème ; on a

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_Q = \kappa \nabla \cdot \nabla T = \kappa \Delta T.$$

#### A.2.4 Dérivée totale ou dérivée matérielle ou dérivée particulaire

Jusqu'à présent, il n'y a pas eu de difficultés particulières puisque le calcul différentiel considère tour à tour chacune des variables en prenant toutes les autres constantes, puis on différentie par rapport à cette variable, ainsi de suite. Plus difficile est le cas où les variables ne sont plus indépendantes, mais dépendantes. C'est ce cas qui sera le plus fréquent en mécanique des fluides.

On appelle *dérivée matérielle* (appelée encore *dérivée particulaire* ou *dérivée totale* par rapport au temps ou *dérivée de Lagrange*) d'une fonction  $f(x, y, z, t)$  la quantité suivante (dans le cas de coordonnées cartésiennes)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla f}_{\text{terme d'advection}},$$

avec  $(u, v, w)$  les coordonnées de la vitesse locale. Notons que certains auteurs emploient parfois le signe  $D()/Dt$  pour  $d()/dt$  pour mettre l'accent sur le fait qu'il s'agit d'une dérivée matérielle, mais l'emploi de  $d()/dt$  est tout aussi logique car, en fin de compte, si  $x$  et  $y$  sont des fonctions de  $t$ , alors  $f$  n'est qu'une fonction de  $t$  et cela a un sens de parler de  $df/dt$ .

♣ **Exemple.** – Considérons le cas :

$$f(x, y, z) = xz + \frac{x^2}{z}y$$

Si les variables sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned}f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = z + 2\frac{x}{z}y, \\f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + \frac{x^2}{z}, \\f_z &= \frac{\partial f}{\partial z} = x - \frac{x^2}{z^2}y,\end{aligned}$$

et la différentielle totale s'écrit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \left(z + 2\frac{x}{z}y\right)dx + \frac{x^2}{z}dy + \left(x - \frac{x^2}{z^2}y\right)dz.$$

Admettons maintenant qu'il y ait une dépendance de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en fonction de  $t$ . On peut définir une nouvelle dérivée par rapport au temps sous la forme :

$$\frac{df}{dt},$$

qui n'est généralement pas égale à  $\partial f/\partial t$ . Pour preuve, divisons l'expression donnant  $df$  par  $dt$  :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \left(z + 2\frac{x}{z}y\right) \frac{dx}{dt} + \frac{x^2}{z} \frac{dy}{dt} + \left(x - \frac{x^2}{z^2}y\right) \frac{dz}{dt}.$$

Cette relation vaut  $\partial f/\partial t$  uniquement lorsque  $dx/dt = 0$ ,  $dy/dt = 0$ , et  $dz/dt = 0$  c'est-à-dire lorsque les variables  $x$ ,  $y$ , et  $z$  sont indépendantes de  $t$ . Considérons maintenant un exemple où il y a une dépendance de la forme :

$$x(t) = t, y(t) = t^2 \text{ et } z(t) = t.$$

On a donc :

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ et } \frac{dy}{dt} = 2t.$$

On tire :

$$\frac{df}{dt} = \left(t + 2\frac{t}{t}t^2\right) + \frac{t^2}{t}2t + \left(t - \frac{t^2}{t^2}t^2\right) = 2t + 3t^2.$$

Notons que si on remplace  $x$ ,  $y$ , et  $z$  par leur expression dans  $f(x, y, z) = xz + \frac{x^2}{z}y$ , on a :  $f(t) = t^2 + t^3$ , dont la dérivée donne bien :  $f'(t) = 2t + 3t^2$ .  $\square$

Physiquement, l'opérateur de dérivée matérielle joue un très grand rôle en mécanique des fluides puisqu'on ne suit pas individuellement toutes les particules du fluide, mais qu'on regarde ce qui se passe localement (description dite eulérienne du mouvement). Considérons ainsi la composante  $u$  du champ de vitesse  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ . On se place à un endroit repéré par le point  $M(x, y, z)$ . Dans un voisinage infinitésimal autour de ce point passent des particules. Ainsi une particule en  $M$  à l'instant  $t$  sera en  $M'$  ( $x + u\delta t$ ,  $y + v\delta t$ ,  $z + w\delta t$ ) à l'instant  $t + \delta t$  et elle aura la vitesse  $(u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w)$ . L'accélération selon la direction  $x$  au point  $M$  est donc

$$a_x = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u.$$

On fait de même avec les autres composantes. L'accélération locale au point  $M$  est donc la somme de l'accélération locale des particules et d'un terme non linéaire  $+\mathbf{u} \cdot \nabla u$  qui est le taux de convection de  $u$ , c'est-à-dire le taux de variation de  $u$  dans l'espace. On parle également d'advection pour qualifier ce terme. Transport par convection ou advection signifie ici la même chose.

La dérivée matérielle s'exprime différemment dans chaque système de coordonnées

– coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , on a

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}.$$

– coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , on a

$$a_r = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$a_\theta = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z}.$$

### A.2.5 Quelques relations sur les opérateurs

Les relations suivantes peuvent être utiles :

$$\begin{aligned} \nabla(fg) &= g\nabla f + f\nabla g, \\ \nabla \cdot (f\mathbf{a}) &= \mathbf{a} \cdot \nabla f + f\nabla \cdot \mathbf{a}, \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}), \\ \nabla \cdot \nabla \mathbf{a} &= \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}), \\ \nabla \cdot \mathbf{ab} &= \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \nabla \mathbf{b} \\ \mathbf{1} : \nabla \mathbf{a} &= \nabla \cdot \mathbf{a}, \\ \nabla \cdot (f\mathbf{1}) &= \nabla f, \end{aligned}$$

On a également :

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} &= \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{b})^\dagger, \\ \frac{\partial f(x)}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\mathbf{x}}{x} \frac{\partial f(x)}{\partial x}, \\ \mathbf{ab} : (\nabla \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{c}, \end{aligned}$$

avec  $x = |\mathbf{x}|$ .

# Rappels de mécanique des milieux continus

## B.1 Quelques éléments de cinématique

### B.1.1 Description eulérienne ou lagrangienne

Pour décrire les forces exercées par un fluide sur une structure ou bien connaître les propriétés de transport au sein du fluide, il est essentiel de décrire mathématiquement le mouvement du fluide lui-même. Cette description est appelée *cinématique*. Elle est complémentaire de la description des efforts, appelée *dynamique* (voir § B.4).

Pour un corps solide, les relations cinématiques sont les relations qui lient déplacements (translation et rotation), vitesses, et accélération. Pour un corps déformable, les choses se compliquent un peu car le matériau est une collection de points (en fait des volumes infinitésimaux), avec chacun sa propre histoire plus ou moins dépendante de celle des autres points. La description du mouvement au sein d'un milieu continu déformable peut se faire d'une multitude de façons que l'on va essayer ici d'expliquer simplement.

Commençons par une image. Vous souhaitez connaître la vitesse des véhicules sur un tronçon d'autoroute. Vous avez deux façons de faire :

- prendre vous-même un véhicule et chronométrer le temps mis pour aller d'un point à un autre ;
- être observateur en se plaçant sur le bord de l'autoroute et compter le nombre de voitures qui passent dans un laps de temps donné ou bien mesurer le temps qu'elles mettent à parcourir un tronçon donné.

De même, si vous êtes en charge des contrôles radars sur une autoroute, vous avez le choix entre placer un radar à un endroit fixe et à flasher les voitures, dont la vitesse dépasse la vitesse autorisée, ou bien vous immiscer dans la circulation avec un radar embarqué. Dans le second cas, la mesure est un peu plus délicate car la vitesse calculée par le radar est une vitesse relative par rapport au véhicule de police ; outre la mesure faite au radar, il faut donc disposer de la vitesse du véhicule de police.

En mécanique, on fait de même. Quand on souhaite décrire un flux, on peut :

- suivre le mouvement des particules (une par une) : c'est la description *lagrangienne* ;
- se placer à un endroit fixe et regarder ce qui passe (c'est-à-dire ce qui entre ou sort) : c'est la description *eulérienne*.

La description lagrangienne offre quelques facilités dans le calcul des vitesses et des accélérations puisque si l'on suit un volume infinitesimal de fluide, dont la position est repérée par  $\mathbf{r}(t)$ , alors la vitesse et l'accélération sont simplement la dérivée d'ordre 1 et 2 par rapport au temps de la position :  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}$  et  $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}$ . L'inconvénient est que pour décrire le fluide, il faut décrire un très grand nombre de points en fonction du temps. Mesurer une grandeur caractéristique de l'écoulement peut s'avérer également difficile à réaliser et à interpréter car le plus souvent en pratique, on fait de la mesure en un point fixe de l'espace ; à quelques exceptions près, il n'est pas commode de faire de la mesure en

suivant les particules.

La description eulérienne permet de s'affranchir de ces problèmes d'interprétation expérimentale. Elle est toutefois un peu plus délicate à appréhender conceptuellement et conduit à des formulations mathématiques des équations du mouvement, qui sont un peu plus complexes que les équations lagrangiennes.

Pour décrire le mouvement, on décompose celui-ci en un mouvement de translation et une déformation. En effet, un petit volume de fluide subit au cours de son déplacement un déplacement (translation) et des déformations (rotation, étirement). Pour s'en convaincre, repartons de l'expérience de Newton vue au § 6.3.1 : dans cette expérience, le fluide était simplement cisailé entre deux plaques ; le profil de vitesse était linéaire  $u(y) = ay$  avec  $a = U/h$  et  $U$  la vitesse de la plaque supérieure. Si l'on marquait des particules à l'instant  $t = 0$  en traçant un cercle, on pourrait examiner comment une forme simple est transportée et déformée. Comme le profil de vitesse est linéaire, on peut calculer comment le cercle a évolué après un temps  $t$ . Comme le montre la figure B.7, le cercle se déplace et se déforme progressivement en ellipse.

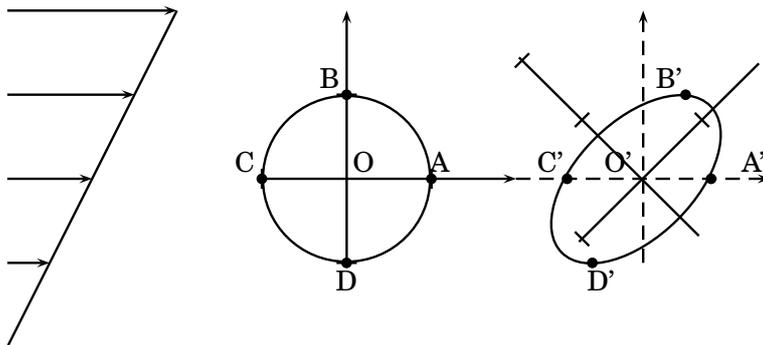


Figure B.1 : déformation d'un disque dans un écoulement simplement cisailé.

Cela est assez facilement prévisible ici puisque si l'on part de l'équation paramétrique d'un cercle

$$\begin{aligned}x &= x_0 + r \cos \theta, \\y &= y_0 + r \sin \theta,\end{aligned}$$

avec  $(x_0, y_0)$  les coordonnées de O et  $r$  le rayon du cercle. Au temps,  $t$  chaque point M  $(x, y)$  a atteint une position M'

$$\begin{aligned}x' &= x + u(y)t, \\y' &= y.\end{aligned}$$

Les points A ( $\theta = 0$ ), B ( $\theta = \pi/2$ ), C ( $\theta = \pi$ ), et D ( $\theta = 3\pi/2$ ) sont transformés en A', B', C', et D' par simple translation  $u(y)t$ . Le cercle est transformé en ellipse et on note que les distances entre le centre O' et les points repères A', B', C', et D' ont été modifiées : il y a eu *étirement* des longueurs. En regardant les axes principaux (les axes de symétrie) de l'ellipse, on observe que ceux-ci tournent au cours du temps du fait du cisaillement : le mouvement s'accompagne donc également d'une *rotation*.

En résumé, le mouvement d'une particule de fluide se traduit par un déplacement en bloc, d'une rotation, et d'une déformation. C'est ce que l'on va voir de façon plus précise maintenant en examinant tout d'abord le champ de déplacement (voir § B.2), puis celui de déformation (voir § B.3)

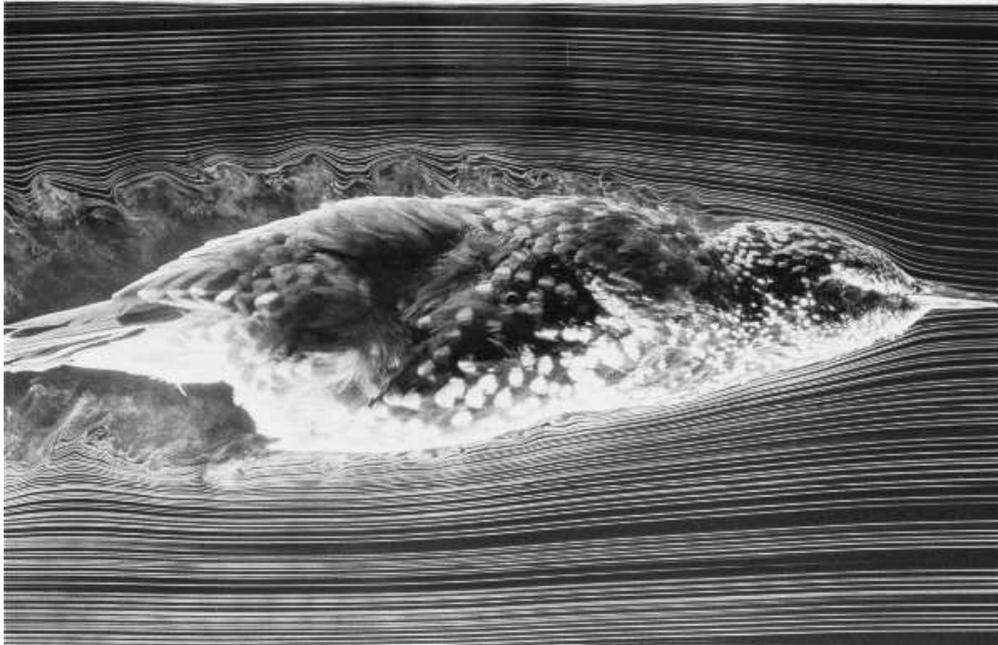
## B.2 Trajectoires et lignes de courant

On va tout d'abord décrire le mouvement par translation. Traditionnellement, on fait appel à trois courbes pour caractériser le champ de déplacement d'une série de particules :

- la *trajectoire* d'une particule : c'est la courbe décrite par une particule au cours de son mouvement.

Si l'on trace dans l'espace la courbe  $\mathcal{T}$  d'équation  $\mathbf{x} = \mathbf{r}(t)$  en fonction de  $t$ , on obtient la trajectoire. En tout point M le long de  $\mathcal{T}$ , la tangente à cette courbe  $\mathcal{T}$  donne la vitesse de la particule à l'instant où elle occupait le point M ;

- la *ligne d'émission* : c'est le lieu, à un instant donné, des points occupés par des particules de fluide qui sont toutes passées ou ont été émises à partir d'un même point P fixe dans l'espace ;
- la *ligne de courant* : c'est une courbe pour laquelle la tangente en chaque point est parallèle au champ (instantané) de vitesse des particules. Voir exercice n° 1 pour son équation.



**Figure B.2 :** lignes de courant visualisées autour d'un oiseau (maquette) [DR].

La première courbe fournit une représentation du mouvement au cours du temps d'une seule particule, tandis que les autres renseignent sur ce qui se passe à un instant donné pour une multitude de particules. Une série de trajectoires montre comment des particules isolées bougent au cours du temps alors que les lignes de courant visualisent le champ de déplacement de toutes les particules à un instant donné.

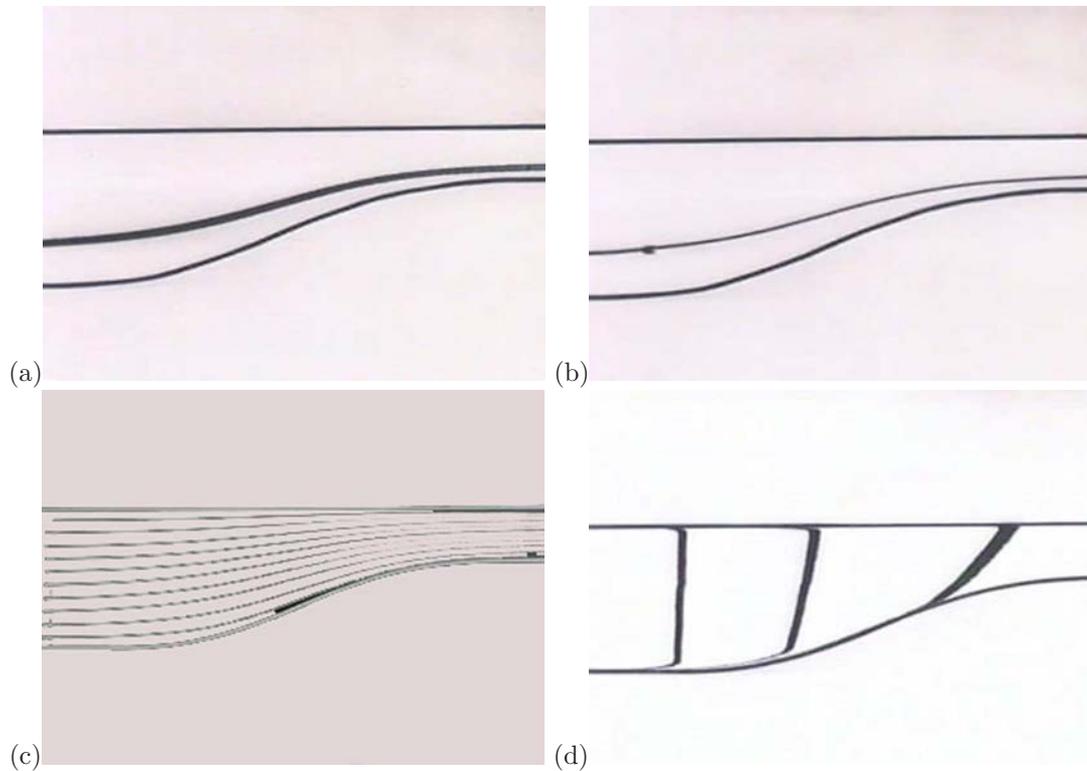
Ces courbes ont une importance théorique car elles permettent d'expliquer ou de visualiser ce qui se passe au sein du fluide de façon élémentaire. Sur le plan expérimental, elles sont également très intéressantes car depuis longtemps, on connaît plusieurs techniques qui permettent de visualiser le mouvement au sein du fluide. Une méthode courante consiste à ensemenner le fluide de petites particules réfléchissantes (poudre d'aluminium par exemple), puis de les éclairer fortement (avec un faisceau laser par exemple) pour rendre visible le mouvement local au sein du fluide. On peut substituer ces marqueurs par des bulles de gaz ; cette technique a de multiples avantages car on peut émettre – par catalyse ou injection d'air – des bulles le long de formes prédéfinies (un point, une ligne droite, etc.) et pendant des temps variables (émission continue ou discontinue).

On s'intéresse également à d'autres quantités comme le profil de vitesse ou de vorticité, qui permettent de décrire la déformation au sein du milieu, et plus spécifiquement les déplacements.

### B.2.1 Écoulement permanent

Intéressons maintenant à un écoulement dans une rivière à l'approche d'un seuil. On suppose que le régime est permanent. Si l'on place un tube à une certaine profondeur et que l'on injecte pendant un certain laps de temps des bulles, on forme une ligne d'émission dont le point de départ

est l'embouchure du tube [voir figure B.3(a)]. Si maintenant on émet une seule bulle, qu'on prend une multitude de clichés au cours du temps et qu'on les superpose, on obtient la trajectoire d'une particule [voir figure B.3(b)]. Naturellement en régime permanent, lignes d'émission et trajectoires se superposent puisqu'une particule passant par un point fixe suit toujours le même chemin. La ligne de courant est également identique à la ligne d'émission. Si l'on émet des bulles selon la verticale et que l'on suit la colonne de bulles au cours du temps, on constate que celle-ci se déplace et se déforme. La variation relative de longueur permet de visualiser le profil de vitesse selon la hauteur [voir B.3(c)].



**Figure B.3 :** écoulement permanent d'un fluide dans une rivière à l'approche d'un seuil : (a) ligne d'émission ; (b) trajectoire d'une particule ; (c) champ de vitesse et lignes de courant ; (d) profils de vitesse selon la hauteur.

## B.2.2 Écoulement non permanent

Pour le mouvement en régime permanent, les choses sont donc plutôt simples, mais elles se corsent dès qu'on s'intéresse à des écoulements non permanents. Par exemple, examinons le mouvement des particules autour d'un batteur, qui oscille autour de son axe. Il est assez vite évident que les lignes d'émission ne correspondent plus à une seule trajectoire.

La figure B.4 montre trois trajectoires différentes issues d'un même point d'émission. Selon la position du batteur, la particule passera par-dessus ou par-dessous. Cela peut se comprendre assez aisément en examinant les lignes d'émission pour une position donnée du batteur [voir figure B.5(a)], qui en général sont déviées par le batteur. Notons que si au lieu d'émettre les bulles en continu, on les émet de façon intermittente, on obtient des lignes d'émission discontinues [voir figure B.5(b)] : chaque incrément donne une direction de la ligne d'émission en un endroit donné. Si l'on prend une image une fraction de seconde après, chaque petit incrément se sera déplacé. La superposition des deux images donne le champ de vitesse [voir figure B.6(b)]. En reliant les vecteurs vitesses, on peut tracer approximativement les lignes de courant [voir figure B.6(c)]. Dans l'exemple du batteur, on note qu'à chaque instant, les lignes de courant et d'émission s'ajustent à la position du batteur et ne coïncident jamais.

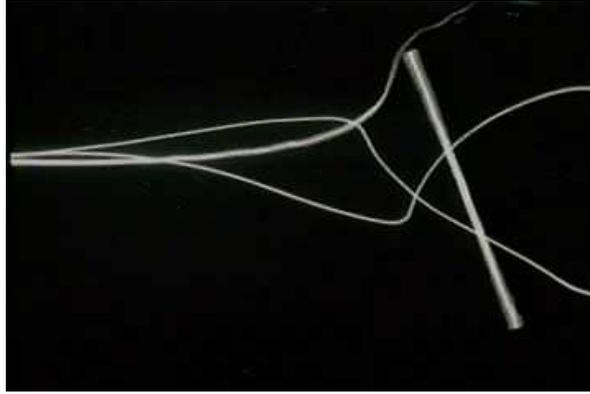


Figure B.4 : trois trajectoires différentes issues du même point pour trois temps différents.

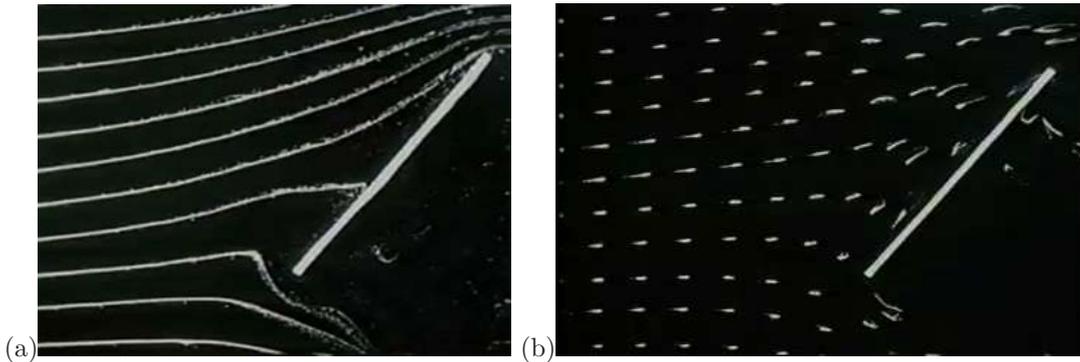


Figure B.5 : lignes d'émission selon deux techniques (a) émission en continu des bulles, (b) émission par intermittence.

## B.3 Déformation et rotation d'un volume de fluide

### B.3.1 Principe

On peut montrer qu'en dehors de la translation, tout mouvement se traduit par une rotation et une déformation des particules de fluide. Considérons un incrément de longueur  $AB$ . La longueur de cet incrément est petite (on la note  $d\mathbf{X}$ ). Un élément de fluide situé en  $A$  à l'instant  $t$  se trouve à l'instant  $t + dt$  en  $A'$  et on a  $\mathbf{AA}' = \mathbf{u}dt$ . De même pour le point  $B$ , on a  $\mathbf{BB}' = (\mathbf{u} + d\mathbf{u})dt$ . On tire

$$\mathbf{A'B}' = \mathbf{A'A} + \mathbf{AB} + \mathbf{BB}',$$

soit encore

$$d\mathbf{x} = \mathbf{A'B}' = -\mathbf{u}dt + \mathbf{AB} + (\mathbf{u} + d\mathbf{u})dt,$$

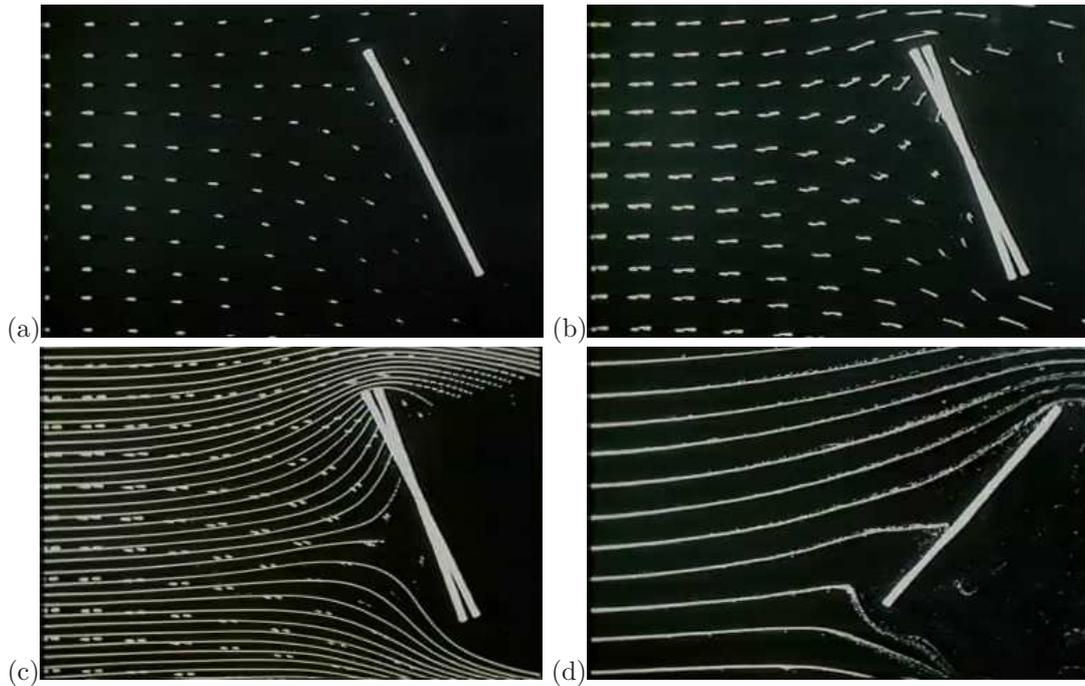
En se servant de la définition de la différentielle totale:  $d\mathbf{u} = \nabla\mathbf{u} \cdot d\mathbf{X}$  (la dérivée aussi bien dans le terme de gradient que le terme  $d\mathbf{X}$  se construisent dans le système de coordonnées d'origine, donc ici  $d\mathbf{X}$ ). On en déduit que :

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + (\nabla\mathbf{u} \cdot d\mathbf{X})dt.$$

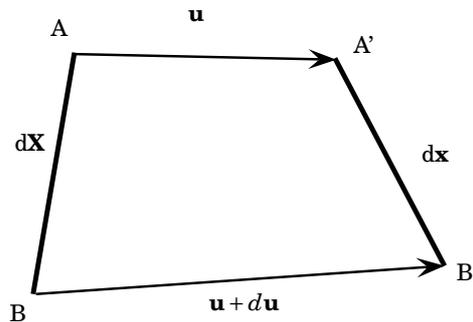
Cela peut se mettre sous la forme

$$\frac{d\mathbf{x} - d\mathbf{X}}{dt} = \nabla\mathbf{u} \cdot d\mathbf{X},$$

où le membre de gauche peut s'interpréter comme une vitesse de déplacement. La grandeur ainsi introduite  $\nabla\mathbf{u}$  est un tenseur d'ordre 2 (c'est-à-dire une matrice dans un repère fixé), qui peut se



**Figure B.6** : construction des lignes de courant : avec un stroboscope on éclaire pendant un petit laps de temps  $\delta t$  les bulles émises d'une série de points et on filme pendant ce temps-là le petit filet lumineux reflété par les bulles (b). Ce filet donne une idée du déplacement élémentaire et si on le divise par la durée  $\delta t$ , on obtient une série de vecteurs vitesse en différents points (c). Enfin, on se sert de ce champ de vecteurs pour esquisser la forme des lignes de courant (c et d). Des images prises à des instants différents montrent que les lignes de courant varient fortement selon la position du batteur.



**Figure B.7** : déformation d'un incrément de longueur  $AB$ .

décomposer de la façon suivante :

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger}{2} + \frac{\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^\dagger}{2},$$

c'est-à-dire une partie symétrique

$$\mathbf{D} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\dagger}{2},$$

et une partie anti-symétrique

$$\mathbf{W} = \frac{\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^\dagger}{2}.$$

On peut montrer que :

- le tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}$  représente la dilatation et la déformation angulaire subies

- par l'incrément de longueur AB au cours du mouvement ;
- le tenseur  $\mathbf{W}$  représente la vitesse de rotation subie par l'incrément de longueur AB au cours du mouvement. En effet, si on note  $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}$  le taux de rotation instantané, alors pour tout vecteur  $\mathbf{n}$  on a :  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}$  (voir problème n° 2). Le vecteur tourbillon ou *vorticité* est le vecteur rotationnel du champ de vitesse  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  ; on a la relation  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}/2$ .

Seule la déformation pure ( $\mathbf{D}$ ) nous intéresse pour caractériser la déformation d'un fluide car la rotation d'un élément fluide n'amène aucune contrainte effective<sup>1</sup>.

### B.3.2 Écriture matricielle de $\mathbf{W}$ et $\mathbf{D}$

Considérons un problème bidimensionnel. Le champ de vitesse s'écrit alors

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \end{bmatrix}.$$

Le gradient de vitesse est donc un tenseur, dont la représentation matricielle s'écrit

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

On en déduit la matrice des taux de déformation

$$\mathbf{D} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\dagger}{2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix},$$

tandis que la matrice des taux de rotation est

$$\mathbf{W} = \frac{\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^\dagger}{2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix}.$$

Lorsqu'un fluide est incompressible ou l'écoulement est isochore, la masse volumique du fluide est constante ; la conservation de la masse entraîne  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . On montre qu'il existe une fonction appelée *fonction de courant*  $\psi(x, y; t)$  telle que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

de telle sorte que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$ . Le nom « fonction de courant » a été choisi car les lignes isovaleurs  $\psi = cte$  sont les lignes de courant. En effet, si on différencie l'équation  $\psi(x, y) = cte$ , on a :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0,$$

soit encore

$$-v dx + u dy = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u},$$

qui est l'équation différentielle d'une ligne de courant (voir exercice 3.1).

Un écoulement pour lequel  $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$  est dit rotationnel. Le cas opposé  $\boldsymbol{\Omega} = 0$  correspond aux écoulements dit *irrotationnels*. Ces écoulements sont très importants sur le plan théorique car de

1. En effet, on verra que le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\Sigma}$  apparaît dans les équations du mouvement sous la forme d'une divergence  $\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}$ , or la divergence d'un terme rotationnel est nul :  $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0$ , donc sans effet sur l'équation du mouvement car tout terme fonction linéaire de  $\mathbf{W}$  s'annulerait.

nombreux écoulements d'intérêt pratique peuvent être décrits comme des écoulements irrotationnels ; dans ce cas là, la description de l'écoulement s'en trouve considérablement simplifiée car si  $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u} = 0$ , alors il existe une fonction scalaire  $\phi(x, y, z; t)$  telle que

$$\mathbf{u} = \nabla\phi.$$

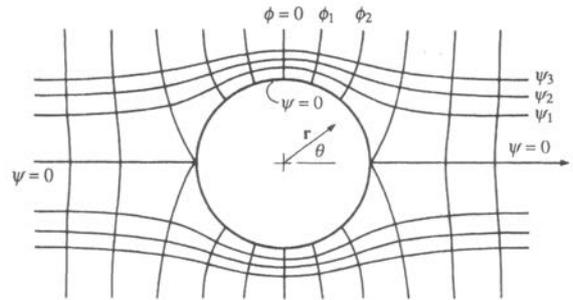
On dit alors que le champ de vitesse dérive du potentiel  $\phi$ , appelé *potentiel des vitesses*. Au lieu de travailler avec un champ vectoriel, on se ramène à un problème scalaire. De plus, lorsque l'écoulement est isochore ou le matériau est incompressible, on a  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , donc

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla\phi = \Delta\phi = 0.$$

Le potentiel des vitesses vérifie alors l'équation dite de Laplace. Les lignes isopotentielles  $\phi = cte$  forment une famille de courbes orthogonales au réseau des lignes de courant. De plus, lorsque l'écoulement est irrotationnel et plan, on a :

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0,$$

donc la fonction de courant vérifie également l'équation de Laplace. Cette propriété remarquable fait que le potentiel complexe  $w = \phi + i\psi$  est une fonction holomorphe, ce qui ouvre des possibilités théoriques très intéressantes dans le calcul analytique des caractéristiques d'écoulement bidimensionnel. Des problèmes entiers tels que le mouvement d'un fluide autour d'une géométrie complexe telle qu'une aile d'avion ont pu être traités ainsi bien avant l'avènement des calculs numériques ([Rhyming, 2004](#), voir pp. 101–192).



**Figure B.8** : lignes de courant et isopotentielles pour un écoulement non visqueux ( $\mu = 0$ ) autour d'une sphère au repos. Les courbes sont obtenues en résolvant l'équation de Laplace ([Batchelor, 1967](#), voir § 2.9, 6.8).

### B.3.3 Interprétation de $\mathbf{D}$ : taux de dilatation et cisaillement

Examinons le tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}$ . Dans un repère cartésien en dimension 2, on peut décomposer  $\mathbf{D}$  une matrice diagonale et une matrice où les termes diagonaux sont nuls :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} & 0 \end{bmatrix},$$

avec  $\dot{\gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$  le *taux de cisaillement*.

Les termes diagonaux représentent une dilatation du fluide dans ses directions normales, tandis que les termes non diagonaux représentent une déformation angulaire. Pour s'en convaincre, considérons

tout d'abord le mouvement d'un petit carré infinitésimal (voir figure B.9 et B.10). Après un temps  $\Delta t$ , le point B animé de la vitesse  $u + \partial u/\partial x$  s'éloigne du point A bougeant à la vitesse  $u$  et initialement distant de  $dx$ . La variation de longueur  $\Delta \ell_{AB}$  du segment AB est au bout du petit temps  $\Delta t$  :  $\partial u/\partial x \Delta t$  et la vitesse à laquelle cette variation intervient est donc

$$\epsilon_x = \frac{\Delta \ell_{AB}}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

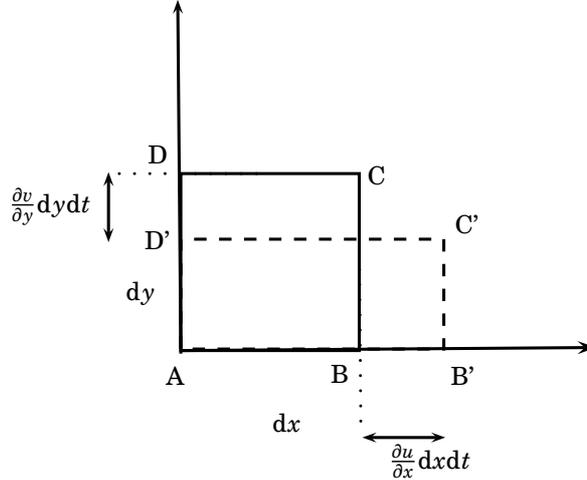


Figure B.9 : dilatation sans cisaillement d'un carré (en dimension 2).

De même dans la direction  $y$ , le déplacement de  $D$  sera

$$\Delta \ell_{AD} = \frac{\partial v}{\partial y} dt \text{ réalisé à la vitesse } \epsilon_y = \frac{\Delta \ell_{AD}}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Il s'ensuit que  $\epsilon_x$  et  $\epsilon_y$  sont les taux de dilatation du fluide dans les directions normales. Un cas particulier important concerne les fluides incompressibles et les écoulements isochores. On a alors

$$\text{tr} \mathbf{D} = \epsilon_x + \epsilon_y = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

ce qui montre que les taux de dilatation sont opposés :  $\epsilon_x = -\epsilon_y$ .

Considérons maintenant les termes hors diagonale. Examinons l'angle  $\widehat{DAB}$ . Après un temps  $dt$ , le point D aura bougé d'un angle d'environ  $\partial u/\partial y dt$  tandis que le point B aura bougé d'un angle d'environ  $\partial v/\partial x dt$ . La variation moyenne de l'angle  $\widehat{DAB}$  est donc  $(\partial u/\partial y dt + \partial v/\partial x dt)/2$  et la vitesse moyenne de cet angle est appelée le *taux de cisaillement* :

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

### B.3.4 Interprétation de $\mathbf{W}$ : vitesse de rotation

Considérons un petit élément infinitésimal de forme carrée (voir figure B.11). Ce petit carré subit une rotation d'un angle  $\theta$  autour de l'axe vertical passant par A. Cela se produit par exemple si la vitesse selon  $y$  en A diffère de celle en B. En effet, si la vitesse en A est  $(u, v)$ , alors la vitesse en B (séparé de A d'une distance  $dx$ ) est  $(u + \partial u/\partial x dx, v + \partial v/\partial x dx)$ .

Dans le repère attaché au point A, les nouvelles coordonnées de B seront après un temps  $dt$  :  $(\partial u/\partial x dx dt, \partial v/\partial x dx dt)$ , c'est-à-dire que le point B subit une rotation d'angle  $\theta$  (qui est petit)

$$\theta_B \approx \tan \theta_B \approx \frac{\partial v}{\partial x} dt.$$

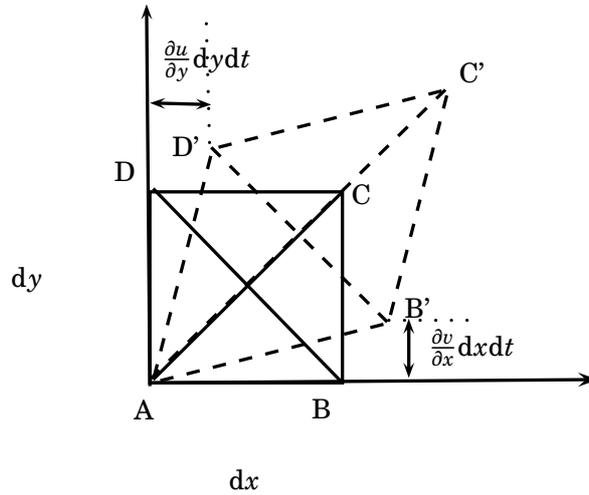


Figure B.10 : cisaillement d'un carré (en dimension 2) sans rotation ni dilatation.

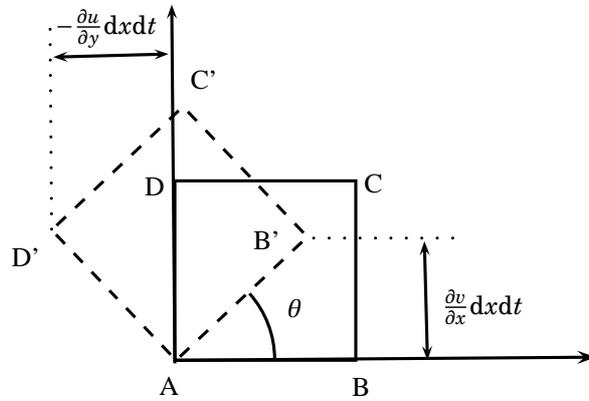


Figure B.11 : rotation sans cisaillement d'un carré (en dimension 2) d'un angle  $\theta$  autour de  $Az$ .

Cette rotation s'est faite à une vitesse de rotation

$$\dot{\theta}_B = \frac{\theta_B}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

On peut reproduire ce raisonnement avec D distante de  $dy$  du point A au temps  $t$ . Au temps  $t + dt$ , le point D aura subi une rotation d'un angle

$$\theta_D \approx \tan \theta_D \approx -\frac{\partial u}{\partial y} dt \text{ à la vitesse angulaire } \dot{\theta}_D = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Les axes  $x$  et  $y$  du carré ont donc subi une rotation à la vitesse moyenne

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2}(\theta_B + \theta_D) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

qui est la composante selon  $z$  du vecteur taux de rotation instantanée

$$\Omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

## B.4 Quelques éléments de dynamique

### B.4.1 Types de force

Considérons un volume de contrôle  $\mathcal{V}$  et faisons un bilan des forces. Parmi les forces appliquées au volume de contrôle, il faut distinguer les forces :

- qui s'appliquent au sein du volume (force volumique). Dans le présent contexte, la seule force volumique considérée est la gravité  $\mathbf{F}_v = m\mathbf{g}$ ,  $m$  étant la masse de fluide contenu dans le volume de contrôle ;
- qui s'appliquent à la surface du volume de contrôle ; on parle de force surfacique (on a vu un exemple avec la pression d'un fluide au repos). On peut écrire de façon générique ces forces agissant à la surface du volume de contrôle sous la forme :

$$\mathbf{F}_s = \int_{\mathcal{S}} d\mathbf{f},$$

avec  $d\mathbf{f}$  la force infinitésimale agissant sur un élément infinitésimal  $d\mathcal{S}$ . Comme il s'agit d'une force de surface, on peut écrire différemment l'intégrale pour faire apparaître explicitement l'élément d'intégration  $d\mathcal{S}$

$$\mathbf{F}_s = \int_{\mathcal{S}} \frac{d\mathbf{f}}{d\mathcal{S}} d\mathcal{S}.$$

Ce faisant on fait apparaître le rapport  $d\mathbf{f}/d\mathcal{S}$ , que l'on va appeler une *contrainte* et qu'on notera  $\boldsymbol{\sigma}$ . On va montrer par la suite qu'il existe une relation simple entre la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  et la normale  $\mathbf{n}$  à la facette  $d\mathcal{S}$  :  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}$ , avec  $\boldsymbol{\Sigma}$  le *tenseur des contraintes*.

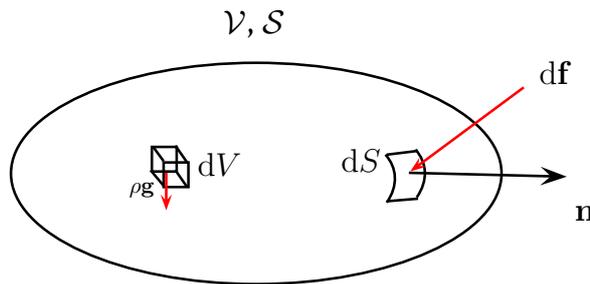


Figure B.12 : volume de contrôle et forces appliquées : force de volume, force de surface.

Finalement, la somme des forces appliquées au volume de contrôle s'écrit

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_v = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{g} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma} d\mathcal{S},} \quad (\text{B.1})$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}$  la contrainte appliquée sur la facette  $d\mathcal{S}$ .

### B.4.2 Tenseurs des contraintes et des extra-contraintes

Il faut définir un objet appelé *tenseur des contraintes* qui sert à calculer les contraintes qui s'exercent sur une surface orientée par le vecteur unitaire  $\mathbf{n}$ . On définit la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  s'exerçant sur un élément de surface  $\delta\mathcal{S}$  comme étant la limite des forces  $\delta\mathbf{f}$  par unité de surface quand  $\delta\mathcal{S}$  devient petit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lim_{\delta\mathcal{S} \rightarrow 0} \frac{\delta\mathbf{f}}{\delta\mathcal{S}}.$$

En considérant l'équilibre d'un petit tétraèdre<sup>2</sup>, Cauchy<sup>3</sup> a montré qu'il existe un objet  $\Sigma$ , le *tenseur des contraintes*, tel que :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}}, \quad (\text{B.2})$$

c'est-à-dire que la contrainte varie linéairement avec la normale  $\mathbf{n}$ .

Par construction, ce tenseur est symétrique :  $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^\dagger$ . Dans un repère cartésien, le tenseur des contraintes est donc représenté par une matrice symétrique. Physiquement, la symétrie du tenseur des contraintes traduit l'absence (supposée) de couple de contraintes à l'échelle infinitésimale<sup>4</sup>. Quand on connaît le tenseur des contraintes, on peut calculer l'état des contraintes en tout point de l'espace fluide.

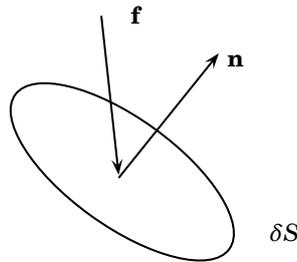


Figure B.13 : facette infinitésimale et force appliquée.

La contrainte exercée par le fluide sur une paroi (orientée par la normale extérieure  $\mathbf{n}$ ) est  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}$ . Dans le cas d'un fluide au repos, le tenseur des contraintes coïncide avec la pression :

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1},$$

où  $\mathbf{1}$  est le tenseur unité. On parle de tenseur *sphérique* ou *isotrope* car quelle que soit la direction considérée de l'espace, la contrainte est identique et égale à  $-p$ .

Lorsque le fluide est perturbé, il quitte sa position d'équilibre, ce qui modifie son état de contraintes. Le tenseur des contraintes est alors écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T},$$

où  $\mathbf{T}$  est le *tenseur des extra-contraintes* ;  $\mathbf{T}$  traduit l'écart à l'équilibre. Ce tenseur est nécessairement une fonction des déformations subies par le fluide et plus exactement des vitesses (ou taux) de déformation. On verra au chapitre 6 qu'une relation linéaire  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{D}$  sous la forme  $\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D}$  ( $\mu$  étant la viscosité) est la relation la plus simple que l'on puisse concevoir et caractérise ce qu'on va appeler le comportement newtonien.

### B.4.3 Interprétation

Considérons un petit carré de taille infinitésimale et on veut calculer les contraintes sur une facette 1 (resp. 2) regardant la direction  $x$ . Par définition, l'état de contraintes est donné par

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} \\ \Sigma_{xy} \end{bmatrix}.$$

2. Pour une démonstration, se reporter à (Botsis & Deville, 2006, pp. 111–114).

3. Augustin Louis Cauchy (1789–1857) était un mathématicien français. Ses travaux ont également concerné la mécanique des fluides, notamment son mémoire sur la propagation des ondes à la surface d'un liquide a constitué une étape importante du calcul avec des fonctions à variable complexe pour la mécanique des fluides. Professeur de mathématiques à la prestigieuse École Polytechnique, Cauchy a également beaucoup travaillé pour enseigner l'analyse de façon plus rigoureuse. Il a redéfini les concepts de fonction, de limite, de continuité, de dérivée, et d'intégrale.

4. Il existe des théories plus élaborées où la description dynamique repose sur le postulat inverse : l'existence de couples de contrainte pour tout volume infinitésimale. Ces théories sont appelées théorie des milieux de Cosserat, du second gradient, des fluides micro-polaires, etc.

La contrainte  $\sigma$  a donc pour composantes  $(\Sigma_{xx}, \Sigma_{xy})$  :

- $\Sigma_{xx}$  est appelée la *contrainte normale* (dans la direction  $x$ ). Quand  $\Sigma_{xx} > 0$ , on parle de *traction* et inversement quand  $\Sigma_{xx} < 0$ , on parle de *compression* ;
- $\Sigma_{xy}$  est appelée la *contrainte de cisaillement*.

La contrainte normale  $\Sigma_{xx}$  sur la facette 1 est en général différente de la contrainte normale  $\Sigma_{yy}$  sur la facette 2. Quand ces deux contraintes sont égales et que les contraintes de cisaillement sont nulles, on dit que l'état de contrainte est *isotrope*. Une fluide au repos connaît un état de contraintes *isotrope* en tout point car  $\Sigma = -p\mathbf{1}$ , avec  $p$  la pression hydrostatique.

En revanche, la contrainte de cisaillement  $\Sigma_{xy}$  est identique sur la facette 1 ou 2. C'est une propriété directement liée à la symétrie du tenseur des contraintes.

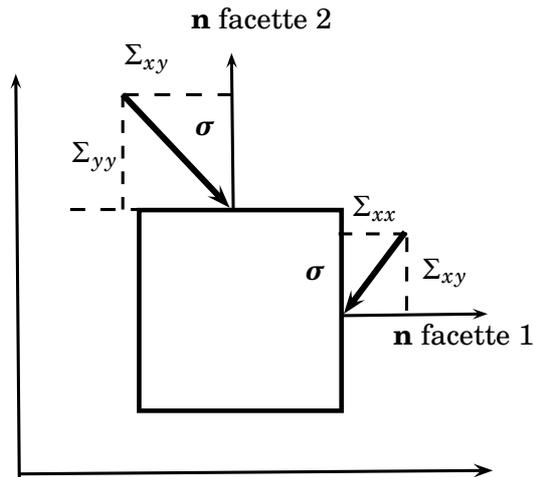


Figure B.14 : contraintes sur un carré de taille infinitésimale.

## B.5 Synthèse : équations de Navier-Stokes dans différents systèmes

Rappelons l'équation de Navier-Stokes sous forme tensorielle :

$$\varrho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p_* + \nabla \cdot \mathbf{T},$$

avec  $p_*$  la pression généralisée ( $p_* = p + \psi$ , avec  $\psi$  le potentiel gravitaire choisi tel que  $\varrho \mathbf{g} = -\nabla \psi$ , ce qui implique donc que  $-\nabla p_* = \varrho \mathbf{g} - \nabla p$ ) et  $\mathbf{T}$  le tenseur des extra-contraintes qui prend la forme linéaire  $\mathbf{T} = 2\mu \mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D}$  le tenseur des taux de déformation,  $\mu$  la viscosité dynamique.

Cette équation est à compléter par l'équation de continuité qui, pour un fluide incompressible, prend la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

**Remarque importante :** rappelons que les équations d'Euler sont un cas particulier des équations de Navier-Stokes lorsque la viscosité  $\mu = 0$  (c'est-à-dire  $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ ).

### B.5.1 Coordonnées cartésiennes

*Conservation de la quantité de mouvement*

$$\varrho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial x} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z},$$

$$\varrho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z},$$

$$\varrho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial z} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z},$$

*Conservation de la masse (équation de continuité)*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Les composantes de  $\mathbf{T}$  sont facilement établies à partir de la définition du tenseur des extra-contraintes pour un fluide newtonien :  $\mathbf{T} = 2\mu \mathbf{D}$  avec  $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\dagger)$  :

$$\mathbf{T} = 2\mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

On montre que les équations de Navier-Stokes s'écrivent également sous la forme suivante (après substitution des composantes de  $\mathbf{T}$  dans les équations de conservation du mouvement ci-dessus) :

$$\varrho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

$$\varrho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right),$$

$$\varrho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right).$$

## B.5.2 Coordonnées cylindriques

*Conservation de la quantité de mouvement* Se reporter à la figure A.2 pour la représentation des coordonnées cylindriques.

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} - \frac{T_{\theta\theta}}{r},$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p_*}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z}$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z},$$

*Conservation de la masse (équation de continuité)*

$$\frac{1}{r} \frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Le tenseur des extra-contraintes s'écrit :

$$\mathbf{T} = 2\mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$



# Propriétés thermodynamiques

## C.1 Premier et second principes

Une révolution majeure du XIX<sup>e</sup> siècle a été de relier et d'unifier les concepts autour de force, travail, énergie, et chaleur. Les thermodynamiciens ont ainsi introduit l'*énergie interne* du fluide  $U$ . La première loi de la thermodynamique nous enseigne que chaleur  $\delta Q$  et travail  $\delta W$  échangés avec l'extérieur au cours d'un processus sont reliés par

$$dU = \delta Q + \delta W.$$

L'énergie interne d'un système peut changer sous l'effet d'un flux de chaleur ou bien d'un travail. On notera que la somme « chaleur + travail » ( $dU$ ) est une différentielle exacte tandis qu'en général,  $\delta Q$  et  $\delta W$  ne le sont pas. Physiquement cela veut dire que la variation d'énergie interne entre deux états du processus ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des états initial et final (voir figure C.1), mais cette propriété n'est pas vérifiée pour les contributions élémentaires  $\delta Q$  ou  $\delta W$ . Le chemin suivi s'appelle une *transformation* ; il existe plusieurs transformations :

- transformation *réversible* : une transformation est réversible quand on peut faire retourner le système à son état antérieur sans perte d'énergie. En pratique, cela signifie que les pertes d'énergie liées au frottement, à la plasticité des matériaux, etc., sont négligeables ;
- transformation *adiabatique* : la variation de chaleur avec l'extérieur est nulle  $\delta Q = 0$  ;
- transformation *isotherme* : la transformation se fait à température constante  $T = cst$  ;
- transformation *isobare* : la transformation se fait à pression constante  $p = cst$  ;
- transformation *isochore* : la transformation se fait à volume constant  $V = cst$  ;
- transformation *isentropique* : la variation d'entropie est nulle  $dS = 0$ .

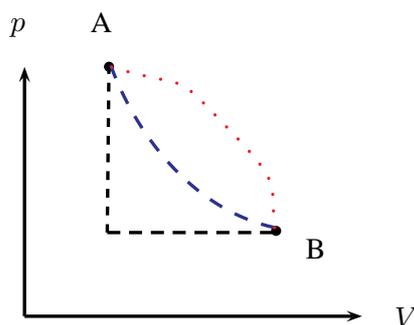


Figure C.1 : la variation d'énergie interne entre deux états A et B ne dépend pas du chemin choisi.

♣ **Exemple.** – Pour donner une image : si vous partez de Lausanne pour monter au mont Pélerin, vous avez une multitude de chemins et de moyens de locomotion pour y arriver mais quelle que soit votre route, la différence d'altitudes entre le point de départ et celui d'arrivée est la même ; en revanche,

les quantités de travail et de chaleur varient considérablement selon la route et le mode de transport.  
□

L'entropie est un concept introduit pour différencier les chemins que peut emprunter un système et donc prédire le sens d'évolution de ce système. Il existe une multitude de façons de l'introduire et d'énoncer le second principe de la thermodynamique. L'entropie est notée  $S$ . Physiquement, elle décrit l'état de désorganisation de la matière (désordre moléculaire). La seconde loi de la thermodynamique énonce qu'au cours d'une transformation lente et réversible d'un fluide à l'équilibre, l'entropie est proportionnelle à la quantité de chaleur échangée avec l'extérieur  $\delta Q$  et inversement proportionnelle à la température  $T$  (qui mesure l'agitation moléculaire)

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

Comme  $U$ , c'est une différentielle exacte. Pour un système isolé (donc à énergie interne constante), l'entropie ne peut que croître ou se conserver.

## C.2 Chaleurs spécifiques

Pour un gaz, le travail est le plus souvent lié à un changement de volume (on pensera par exemple au piston d'une machine à vapeur qui comprime ou détend un gaz) et on écrit le travail élémentaire  $\delta W = -pdV$  (le travail est toujours défini comme le produit d'une force et d'un déplacement). Au contraire du travail, il existe une multitude de façons de définir la chaleur échangée en fonction du type de processus; de cette multitude de définition, la notion de chaleur spécifique est la plus importante dans ce cours et pour les applications qui nous intéressent. La *chaleur spécifique* (appelée encore *capacité calorimétrique*) relie variations de chaleur et de température

$$c = \frac{\delta Q}{\delta T}.$$

En pratique, il faut aller un peu plus loin et définir deux coefficients de chaleur spécifique: la chaleur spécifique à pression constante ou à volume constant. En effet considérons un élément de fluide à l'équilibre et subissant un changement lent et réversible de son état. Admettons par exemple que l'on parte d'un état  $(p, V)$  et que l'on arrive à un état  $(p + dp, V + dV)$ . Au cours de cette transformation, la température et la chaleur vont varier d'une quantité  $dT$  et  $\delta Q$ , respectivement. Pour la température, on se sert de la définition mathématique de la différentielle pour relier  $dT$  aux deux variables d'état  $dV$  et  $dp$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV,$$

tandis que la première loi de la thermodynamique nous dit que

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V dp + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p dV + pdV.$$

Si la transformation se fait à pression constante ( $dp = 0$ ), alors  $dT = \partial_V T dV$ , d'où l'on déduit que la chaleur spécifique (à pression constante) vaut

$$c_p = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_{p=cst} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

et de même, si le processus est à volume constant, on déduit la chaleur spécifique (à volume constant):

$$c_v = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_{V=cst} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V.$$

Pour les gaz parfaits, l'énergie interne ne dépend que de la température; c'est la première loi de Joule. On peut donc écrire

$$dU = c_v dT.$$

On montre alors que pour les gaz parfaits, la relation de Mayer est vérifiée

$$c_p - c_v = xR,$$

avec  $x$  le nombre de moles et  $R$  la constante des gaz parfaits. En introduisant le rapport  $\gamma = c_p/c_v$ , on tire les relations suivantes<sup>1</sup>

$$c_v = \frac{xR}{\gamma - 1},$$

$$c_p = \frac{\gamma xR}{\gamma - 1}.$$

Le tableau C.1 fournit les valeurs des chaleurs spécifiques de gaz usuels et de l'eau. À titre de comparaison, on a  $c_p = 880$  J/kg/K pour du béton,  $c_p = 420$  J/kg/K pour du bois,  $c_p = 444$  J/kg/K pour du fer, et  $c_p = 120$  J/kg/K pour de l'or.

**Tableau C.1** : valeurs des chaleurs spécifiques pour des gaz courants et l'eau. Les masses molaires sont en kg/mol, les chaleurs spécifiques sont en J/kg/K. Les valeurs sont données pour des pressions et températures ordinaires.

Gaz	masse molaire	$c_v$	$c_p$	$\gamma$
Air	$29,0 \times 10^{-3}$	710	1005	1,41
Azote	$28,0 \times 10^{-3}$	730	1042	1,42
Hélium	$4,0 \times 10^{-3}$	3160	5190	1,64
Hydrogène	$2,0 \times 10^{-3}$	10140	14300	1,41
Oxygène	$312,0 \times 10^{-3}$	650	920	1,41
Eau gazeuse	$18,0 \times 10^{-3}$	1410	1850	1,31
Eau liquide			4186	
Eau solide			2060	

## C.3 Chaleur latente

Des variations importantes de chaleur se produisent également au cours d'un changement d'état. Reprenons le diagramme de la figure 1.1 que l'on coupe par un plan  $p - T$  (on travaille donc à volume constant) comme le schématise la figure 1.2. Il y a trois courbes :

- courbe de fusion : solide  $\rightleftharpoons$  liquide ;
- courbe de vaporisation : liquide  $\rightleftharpoons$  gaz ;
- courbe de sublimation : solide  $\rightleftharpoons$  gaz.

Les trois courbes se rencontrent au *point triple* T (les trois phases coexistent). Il existe un *point critique* C, qui marque la fin de la courbe de vaporisation. Lorsque l'état  $(p, T)$  d'un corps traverse sur ce diagramme une des courbes d'équilibre, il y a un changement d'état et cette transformation est toujours accompagnée d'une libération ou d'une absorption de chaleur. Ainsi, la fusion, la vaporisation, et la sublimation nécessitent toujours une absorption de chaleur (à l'échelle moléculaire, cela se traduit par une agitation plus grande des molécules). La quantité de chaleur échangée au cours d'un changement d'état s'appelle *chaleur latente*<sup>2</sup> et la relation de Clapeyron<sup>3</sup> permet de l'exprimer

$$L = T(v_2 - v_1) \frac{dp}{dT},$$

1. On prendra soin de noter les unités employées car selon les contextes, on emploie des chaleurs spécifiques molaires ou bien massiques.

2. De nos jours, les physiciens se réfèrent à la chaleur latente comme étant l'*enthalpie de transformation*.

3. Benoît Paul Émile Clapeyron (1799–1864) est un ingénieur et physicien français. Il est notamment l'auteur d'un « Mémoire sur l'équilibre intérieur des solides homogènes » soumis à l'Académie des sciences de Paris. Il est surtout connu avec Sadi Carnot pour ses travaux de pionniers sur la thermodynamique. Il a donné son nom à la formule donnant la chaleur latente de changement d'état des corps purs ainsi qu'à un diagramme thermodynamique en coordonnées  $p - V$ . En tant qu'ingénieur, il a également participé à la réalisation de ponts suspendus en Russie ainsi qu'à la formation d'ingénieurs à Saint-Petersbourg.

avec  $v_i$  le volume massique du corps dans chacune des phases. Le tableau C.2 fournit les chaleurs latentes de quelques corps usuels.

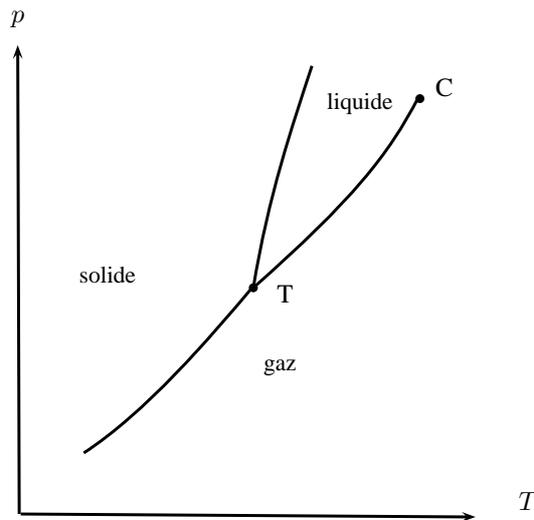


Figure C.2 : courbes d'équilibre entre les trois phases d'un corps.

Tableau C.2 : chaleur latente de quelques corps pour la fusion et la vaporisation (en J/g) et température de changement d'état (en °C) pour des conditions ordinaires de pression.

Corps	$L_{fusion}$	$T_{fusion}$	$L_{vap.}$	$T_{vap.}$
Dioxyde de carbone	184	-57	574	-78
Hydrogène	58	-259	455	-253
Oxygène	13,9	-219	213	-183
Eau	334	0	2272	100

## C.4 Vaporisation et cavitation

Si on reprend le diagramme de la figure 1.2, mais en le coupant cette fois-ci par un plan  $p - V$  (on travaille donc à température constante) comme le schématise la figure C.3, on peut étudier l'équilibre entre une phase gazeuse et une phase liquide. L'intersection de la surface montrée sur la figure 1.2 avec le plan  $p - V$  donne lieu à différents types de courbe selon la valeur de  $T$  :

- pour  $T \geq T_c$ , il y a une phase liquide ou bien une phase gazeuse sans coexistence des deux phases ;
- pour  $T \leq T_c$ , il peut exister un équilibre entre les deux phases avec co-existence des deux phases selon la valeur de la pression. On appelle  $p_s$  la pression de vapeur saturante ; sur la figure C.3, c'est la pression au point L (ou G). On a ainsi
  - $p < p_s$  on a uniquement de la vapeur sèche ;
  - $p = p_s$  on a un mélange liquide + vapeur où le taux de vapeur saturante  $x$  est compris entre 1 (point G) et 0 (point L) ;
  - $p > p_s$ , on a uniquement une phase liquide.

En pratique, l'équilibre liquide-gaz ne peut être réalisé qu'à des pressions comprises entre celle du point triple et celle du point critique.

Lorsque dans un liquide animé de grandes vitesses, la pression locale diminue jusqu'à devenir inférieure à la pression de vapeur saturante, il se forme de petites bulles de gaz. Ces bulles peuvent grandir, coalescer, ou bien s'effondrer. C'est le phénomène de *cavitation*. L'impact d'une bulle à grande

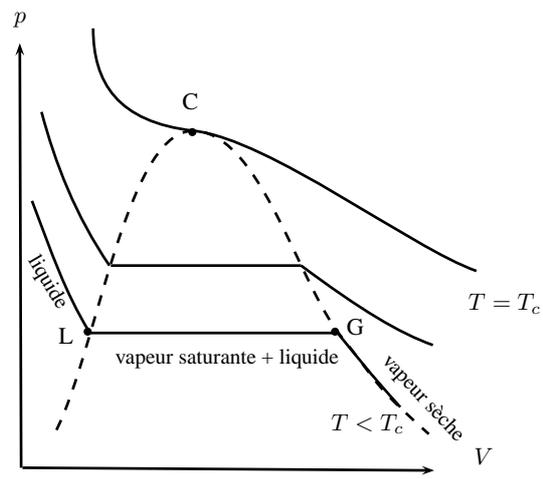


Figure C.3 : équilibre liquide-vapeur.

vitesse contre une paroi génère sur le long terme une usure très importante : la paroi est « piquée » par les micro-impacts, ce qui peut causer avec le temps un endommagement irréversible.



# Bibliographie

- BARENBLATT, G. 1996 *Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- BATCHELOR, G. 1967 *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
- BENJAMIN, T. 1968 Gravity currents and related phenomena. *J. Fluid Mech.* **31**, 209–248.
- BERNARD, C. 1927 *Cours de restauration des montagnes*. Nancy: École Nationale des Eaux et Forêts.
- BOTSIS, J. & DEVILLE, M. 2006 *Mécanique des Milieux Continus: Une introduction*. Lausanne: Presses Polytechniques Fédérales de Lausanne.
- CHURCH, M. 2006 Bed material transport and the morphology of alluvial river channels. *Annu. Rev. Earth. Planet. Sci.* **34**, 325–354.
- COLEMAN, S. & MELVILLE, B. 1996 Initiation of bed forms on a flat sand bed. *J. Hydraul. Eng.* **122**, 301–310.
- GIOIA, G. & BOMBARDELLI, F. 2002 Scaling and similarity in rough channel flows. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 014501.
- HELLER, V. 2011 Scale effects in physical hydraulic engineering models. *J. Hydraul. Res.* **49**, 293–306.
- JEROLMACK, D. & MOHRIG, D. 2005 Interactions between bed forms: Topography, turbulence, and transport. *J. Geophys. Res.* **110**, F02014.
- JULIEN, P.-Y. 1994 *Erosion and Sedimentation*. Cambridge: Cambridge University Press.
- MALVERTI, L., LAJEUNESSE, E. & MÉTIVIER, F. 2008 Small is beautiful: Upscaling from microscale laminar to natural turbulent rivers. *J. Geophys. Res.* **113**, F04004.
- POULIQUEN, O. 1999 On the shape of granular front down rough inclined planes. *Phys. Fluids* **11**, 1956–1958.
- RHYMING, I. 2004 *Dynamique des fluides*. Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- VAN DYKE, M. 1982 *Album of Fluid Motion*. Stanford: Parabolic Press.

# Index

- écoulement
  - irrotationnel, 191
- adiabatique, 201
- adimensionalisation, 145
- analyse
  - dimensionnelle, 40, 153
- angle
  - de contact, 22, 24, 26
- auto-similarité, 29
- baromètre, 55
- barrage, 84, 111, 112
- berge, 77
- bief, 75
- calorie, 33
- capacité
  - calorimétrique, 202
- cavitation, 204
- chaleur, 201
  - latente, 203
  - spécifique, 201, 202
- champ, 173
- changement
  - d'état, 203
- charge
  - hydraulique, 148
- charge hydraulique, 91, 98, 148
- cheval-vapeur, 33
- chute, 111, 113
- cisaillement, 196
- coefficient
  - de frottement, 98, 155
  - de Manning, 106
  - de perméabilité, 148
  - de traînée, 41, 147
- compressible, 13
- compression, 196
- condition
  - adhérence, 135
  - aux limites, 135
  - d'adhérence, 153
  - non-pénétration, 135
- conductivité hydraulique, 148
- conjugaison, 120
- conservation
  - de l'énergie cinétique, 61
  - de la masse, 59
  - de la quantité de mouvement, 61
- constante
  - de von Kármán, 164
- contrainte, 65, 195
  - de cisaillement, 17, 134, 168, 196
  - normale, 134, 196
- coordonnées
  - cartésiennes, 173
  - cylindriques, 173, 199
  - sphériques, 173
- couche
  - limite, 13, 35, 146, 153
  - logarithmique, 168
  - visqueuse, 168
- courbe
  - de remous, 75, 120
  - de tarage, 104
- courbe de remous, 95, 109
- courbe maîtresse, 48
- débit
  - d'étiage, 77
  - de plein bord, 104
  - de pointe, 77
  - dominant, 77
- débitance, 100
- décomposition de Reynolds, 157, 162
- dérivée
  - matérielle, 57, 182
  - particulaire, 182
- déversoir, 129
- dispersion, 12
- dissipation
  - d'énergie, 169
- divergence, 66
- dune, 107, 127, 129
- échelle, 44, 145
- écoulement
  - de Couette, 137
  - de Hele-Shaw, 13
  - de Stokes, 13
  - potentiel, 13
- effet Weissenberg, 19
- élargissement, 112
- émulsion, 12
- énergie
  - interne, 67, 201
  - interne massique, 67
  - piézométrique, 91
  - spécifique, 91

- équation
  - d'état, 10
  - d'Euler, 61, 65, 146, 198
  - de Bernoulli, 61, 70, 91, 95
  - de Blasius, 155
  - de Bresse, 109
  - de Cauchy, 65
  - de conjugaison, 118
  - de continuité, 64
  - de Gromeka-Lamb, 66
  - de l'énergie cinétique, 69
  - de l'énergie interne, 69
  - de la couche-limite, 154
  - de Laplace, 191
  - de Navier-Stokes, 65, 66, 133, 134, 198
  - de Navier-Stokes moyennée, 163
  - de Newton, 66
  - de Prandtl, 167
  - de Rankine-Hugoniot, 65
  - de Reynolds, 157, 158, 163
  - de Stokes, 146, 147
  - du mouvement, 134
  - explicite, 176
  - implicite, 176
- ergodicité, 162
- eulérien, 185
- expérience
  - de Couette, 137, 141
  - de Newton, 139
  - de Reynolds, 157
  - de Trouton, 138
- fermeture, 164
- fluide
  - newtonien, 17, 65
  - non newtonien, 17, 65
  - non visqueux, 61
  - parfait, 13, 61, 65, 146
- flux de chaleur, 67
- fonction
  - de courant, 191
  - de dissipation, 69, 169
- de courant, 155
- force
  - de traînée, 41
  - de Van der Waals, 9
  - de viscosité, 34
- formule
  - de Borda, 107
  - de Colebrook, 99
  - de Jäggi, 96, 98, 104
  - de Leibniz, 58
  - de Meyer-Peter, 98, 104
  - de Parker, 100
  - de Raudkivi, 104
  - de Sugio, 108
  - de Torricelli, 72
- fusion, 203
- gaz, 9
- gel, 12
- glissement, 135
- hauteur
  - critique, 93, 94, 109, 113
  - d'écoulement, 75
  - normale, 75, 97, 104, 109
- Hele-Shaw, 13
- incompressible, 13, 192
- inertie, 34
- invariance, 29, 30
- irrotationnel, 191
- isochore, 13, 201
- isotrope, 196
- lagrangien, 185
- Lennard-Jones, 9
- libre parcours moyen, 17
- ligne
  - d'émission, 186
  - de courant, 70, 186
- liquide, 9
- lit
  - majeur, 77
  - mineur, 77
- loi
  - d'échelle, 30
  - d'écoulement, 98
  - de Boyle-Mariotte, 10
  - de Chézy, 95, 98, 100, 103
  - de Coles, 103
  - de comportement, 13, 65, 133
  - de Darcy, 148
  - de Darcy-Weisbach, 98–100
  - de Fick, 148
  - de frottement, 98
  - de Joule, 202
  - de Jurin, 26
  - de Keulegan, 100
  - de Laplace, 25
  - de Manning-Strickler, 95, 98, 100
  - de Pascal, 52
  - de sillage, 103
  - de Stokes, 41, 147
  - de tarage, 98
  - de Van der Waals, 10
  - des gaz parfaits, 10
  - première loi de la thermodynamique, 201
  - seconde loi de la thermodynamique, 202
- longueur
  - de dune, 107

- de mélange, 102, 164, 167
- de ressaut, 118
- manomètre, 55
- matrice, 173
- mouillant, 21
- mouille, 85, 106
- moyenne
  - d'ensemble, 162
  - temporelle, 162
- nabla, 179
- newtonien, 196
- nombre
  - adimensionnel, 34
  - capillaire, 34
  - de capillarité, 34
  - de Déborah, 13
  - de Froude, 34, 75, 93, 109
  - de Mach, 34
  - de Péclet, 34
  - de Prandtl, 34
  - de Reynolds, 34, 41, 146, 153
  - de Reynolds particulière, 147
  - de Schmidt, 34
  - de similitude, 34
  - de Stokes, 34
  - sans dimension, 29, 41
- non-glissement, 135
- non-pénétration, 135
- obstacle, 126
- opérateur
  - biharmonique, 147
  - divergence, 180
  - gradient, 179
  - laplacien, 181
- périmètre mouillé, 75
- pascal, 17
- pavage, 104
- pente
  - critique, 113
  - de frottement, 98, 109
- perméabilité, 148
- perte de charge, 91, 107
  - d'un ressaut, 118
  - régulière, 98
- Pitot, 73
- point
  - critique, 9, 203, 204
  - triple, 203
- poiseuille, 17
- poreux, 148
- potentiel
  - de Lennard-Jones, 9
  - des vitesses, 191
  - gravitaire, 61, 65, 70
- pression, 9, 51, 196, 201
  - de vapeur saturante, 204
  - généralisée, 66, 70
- principe
  - de la thermodynamique, 67
- produit
  - dyadique, 176
  - scalaire, 175
  - simplement contracté, 175
  - tensoriel, 64, 176
  - vectorel, 175
- régime
  - critique, 93
  - de transition, 158
  - fluvial, 75, 93, 113
  - graduellement varié, 75
  - laminaire, 34, 153, 158
  - permanent, 75
  - rapidement varié, 75
  - subcritique, 34, 93
  - subsonique, 34
  - supercritique, 34, 93
  - supersonique, 34
  - torrentiel, 75, 93, 113
  - turbulent, 34, 153, 158
  - uniforme, 75
- relation
  - de Clapeyron, 203
  - de Mayer, 202
- ressaut, 57, 66, 75, 113, 116, 120, 121
- rhéoépaississant, 19
- rhéofluidifiant, 19
- ripisylve, 77
- rivière, 75
  - alluviale, 84
  - torrentielle, 75
- rotationnel, 191
- rugosité, 106
- sédimentation, 147
- scalaire, 173
- section d'écoulement, 75
- seuil, 85, 106, 120, 121, 129
  - dénoyé, 129
  - noyé, 129
- seuil de contrainte, 19
- similitude, 29, 145
  - complète, 43
  - incomplète, 43
- singularité, 120, 129
- auto-similaire, 155
- sous-couche
  - visqueuse, 168

- stokes, 17
- structure, 107
- sublimation, 203
- surface
  - de révolution, 177
  - orientée, 177
  - plane, 177
- surface libre, 9
- suspension, 12
- système
  - fermé, 58
  - ouvert, 57
- taux
  - de cisaillement, 192, 193
  - de dilatation, 192
  - de rotation, 193
- température, 9
- tenseur, 173
  - de Reynolds, 102, 158, 163
  - des contraintes, 65, 195
  - des extra-contraintes, 65, 195, 196
  - des taux de déformation, 189
- tensiomètre, 24
- tension
  - capillaire, 21
  - de surface, 21
- théorème
  - de Bernoulli, 61, 91, 95, 126, 146
  - de l'énergie cinétique, 67
  - de Reynolds, 60, 63
  - de transport, 63
  - de Vaschy-Buckingham, 38
- théorie
  - cinétique, 10, 17
  - de la couche limite, 153
  - de la similitude, 29
- tirant d'eau, 75
- torrent, 75
- traction, 196
- trajectoire, 186
- transformation
  - adiabatique, 201
  - affine, 30
  - isentropique, 201
  - isobare, 201
  - isochore, 201
  - isomorphe, 30
  - isotherme, 201
  - réversible, 201
- tube de Pitot, 73
- turbulence, 157
- vanne, 112, 121
- vaporisation, 203
- vecteur, 173
- viscosité, 17
  - élongationnelle, 137
  - cinématique, 17, 34
  - dynamique, 17
- vitesse
  - agitation thermique, 11
  - débitante, 148
- volume
  - de contrôle, 57, 63
  - de contrôle matériel, 63
  - matériel, 63
- von Kármán, 72
- vorticité, 66, 189
- zone
  - logarithmique, 102