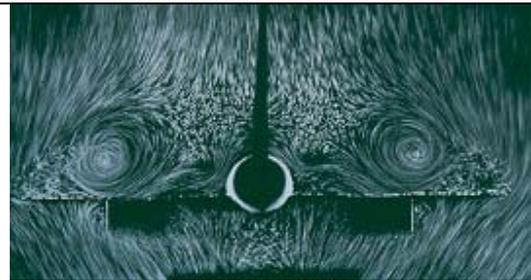


INITIATION A LA  
MECANIQUE DES FLUIDES  
QUELQUES NOTES A PARTIR DE NOMBREUX EMPRUNTS



Marie TOUZET, Denis BRUNEAU, Jean-Louis LALUBIN, Michel MESNARD, Jean-Rodolphe PUIGGALI,  
Marc VALAT

Janvier 2005

# INITIATION A LA MECANIQUE DES FLUIDES

1.	ETAT DE LA MATIERE, MODELE CONTINU	3
1.1.	Etats de la Matière	3
1.2.	Le Modèle de Milieu Continu	3
2.	LA MASSE VOLUMIQUE	5
3.	LA PRESSION DANS UN FLUIDE AU REPOS	5
3.1.	Pression dans un fluide au repos dans le champ de pesanteur	6
3.2.	Résultante volumique des forces de pression	8
3.3.	Equation fondamentale de la statique des fluides	9
3.4.	Principe de Pascal	10
4.	MESURE DE LA PRESSION	11
4.1.	Manomètre	11
4.2.	Baromètre	12
5.	FORCE DE POUSSEE SUR UN SOLIDE IMMERGE DANS UN FLUIDE	12
6.	ECOULEMENT D'UN FLUIDE PARFAIT : EQUATIONS GENERALES	13
6.1.	L'Equation d'EULER	14
6.2.	L'Equation de Continuité	14
6.3.	Le Débit-Masse, le Débit-Volume	15
6.4.	L'Equation de BERNOULLI	17
7.	UN FLUIDE REEL	18
7.1.	La Viscosité	18
7.2.	Ecoulement Laminaire Interne	19
7.3.	Nombre de REYNOLDS	21
8.	ANNEXES	21
9.	BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE	22
10.	QUELQUES EXERCICES	23
10.1.	Etude Simplifiée d'un Carburateur	23
10.2.	Planche à Voile	26
10.3.	Etude d'un Siphon	26
10.4.	Poussée sur une Paroi Plane	27
10.5.	Baromètre de Torricelli	27

10.6.	Manomètre à mercure en U	28
10.7.	Manomètre à mercure en U : Mesure de pression	28
10.8.	Poussée sur une paroi plane	29
10.9.	Vanne papillon	29
10.10.	Vanne secteur	30
10.11.	Mesure de pression dans l'atmosphère secteur	30
10.12.	Flotteur	31
10.13.	Balance hydraulique	31
10.14.	Equilibre d'un aéromètre	31
10.15.	Mesure de la vitesse relative du vent	32
10.16.	Déversoir à large seuil	32
10.17.	Mesure de pression par un tube piézométrique	33
10.18.	Mesure de la vitesse de l'air par un tube de pitot	33
10.19.	Déversoir à bord mince	34
10.20.	Jet d'eau de Genève	35
10.21.	Tube de Venturi	35

# 1. ETAT DE LA MATIERE, MODELE CONTINU

## 1.1. ETATS DE LA MATIERE

La matière existe sous différents états que l'on peut distinguer à partir de caractéristiques physiques.

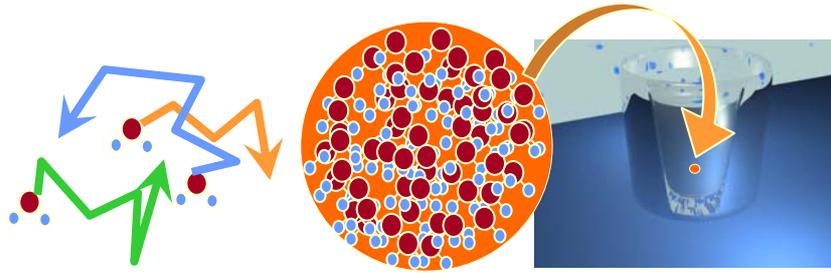
De façon générale les solides sont caractérisés microscopiquement par des forces de liaisons intermoléculaires « rigides » et anisotropes. Sous l'effet de la température, les atomes vibrent autour de leur point d'équilibre mais ne peuvent se déplacer les uns par rapport aux autres. En conséquence, macroscopiquement, un solide se déforme très peu et de façon différente selon les différentes directions. Ses propriétés macroscopiques spécifiques sont sa masse, son volume et sa forme.

Les fluides au contraire sont caractérisés par des forces de liaisons « non rigides » et isotropes. On distingue deux types de fluides selon leurs propriétés macroscopiques, les liquides et les gaz. Les gaz, peu denses et donc facilement compressibles présentent de faibles forces d'interaction attractives entre molécules (nulles pour les gaz parfaits). Les liquides ont une densité comparable à celle des solides, sont peu compressibles et les forces d'interactions entre molécules sont plus importantes que celles des gaz, mais suffisamment faibles pour qu'un élément liquide puisse se déplacer considérablement par rapport à un élément voisin, de façon générale un fluide ne peut pas équilibrer une force tangentielle, il va se déformer et entrer en mouvement. Contrairement aux gaz les liquides n'ont pas tendance à occuper tout le volume disponible. Les fluides n'ont donc pas de forme extérieure bien définie. Elle dépendra du récipient, de la valeur des forces extérieures et de caractéristiques propres au fluide. Leurs propriétés macroscopiques spécifiques sont leur masse et leur volume.

## 1.2. LE MODELE DE MILIEU CONTINU

La matière est formée d'un grand nombre d'atomes ou de molécules dont il n'est pas possible de décrire exactement l'état de mouvement d'une manière détaillée. Pour illustrer les différentes échelles selon lesquelles on peut observer la matière, reprenons la discussion que mène Feynman dans son premier chapitre des *leçons sur la physique*. Considérons pour cela une petite goutte d'eau d'un centimètre de diamètre. Cette goutte agrandie avec le meilleur microscope optique (environ 2000 fois) sera à peu près large de 20 mètres. En observant avec soin, on ne verra que de l'eau relativement uniforme. Agrandissons encore de deux mille fois la goutte, elle atteint maintenant un diamètre d'environ 40 kilomètres, et en regardant bien, on observe un espèce de fourmillement, quelque chose qui n'a plus une apparence continue, mais qui ressemble à une foule assistant à une partie de football vue de loin. De manière à mieux observer ce fourmillement, agrandissons de nouveau 150 fois. On découvre alors les molécules d'eau et cela a nécessité un agrandissement d'un milliard de fois.

La mécanique des fluides (ainsi bien sûr que la mécanique des solides déformables) nécessite l'introduction d'un modèle continu qui consiste à considérer des particules matérielles, appelées *particule fluide*, de volume  $\Delta V$  suffisamment petit pour que cet élément  $\Delta V$  ait les propriétés d'une différentielle, mais suffisamment grand pour contenir un nombre élevé d'atomes ou de molécules (**Figure 1**).



**Figure 1 : notion de particule fluide.**

La *particule fluide* est une portion de fluide, de dimensions arbitrairement choisies, à laquelle correspondent, pendant un intervalle de temps  $\Delta t$  entourant l'instant  $t$ , une pression, une température, une masse volumique... Nous dirons **par convention**, que ce sont les valeurs de ces grandeurs à l'instant  $t$  au centre d'inertie de la particule.

On peut alors faire totalement abstraction de la structure atomique et définir des grandeurs locales. On écrit souvent  $dV$  pour l'élément fini  $\Delta V$ . Afin de mieux préciser la validité de cette hypothèse, on introduit le nombre de KNUNDSSEN :

$$K_n = \frac{l}{L} = \frac{\text{libre parcours moyen des molécules}}{\text{dimension de la particule fluide étudiée}}$$

Le *libre parcours moyen* des molécules est la distance moyenne qu'une molécule peut parcourir entre deux chocs successifs. Quelques valeurs de libres parcours moyens pour différents gaz dans les conditions normales de température et de pression ( $p_o = 101325 \text{ Pa}; T_o = 273,15 \text{ K}$ ) sont données dans le Tableau 1.

Nature du gaz	Libre parcours moyen (mm)	Diamètre équivalent de la molécule (mm)	Nombre de chocs d'une molécule par seconde
Dioxyde de carbone CO <sub>2</sub>	$397 \cdot 10^{-7}$	$3,24 \cdot 10^{-7}$	$9,1 \cdot 10^9$
Hydrogène H <sub>2</sub>	$1123 \cdot 10^{-7}$	$2,76 \cdot 10^{-7}$	$15,0 \cdot 10^9$
Oxygène O <sub>2</sub>	$647 \cdot 10^{-7}$	$2,90 \cdot 10^{-7}$	$6,6 \cdot 10^9$

**Tableau 1 : libre parcours moyen pour différents gaz dans les conditions normales de température et de pression.**

L'expérience montre que si le nombre de KNUNDSSEN est inférieur à 0,01, le nombre de molécules contenu dans l'élément de volume est suffisant pour que le milieu soit considéré comme continu. Avec les valeurs données dans le Tableau 1, on obtient une dimension minimale pour la particule fluide de l'ordre du micron. En mécanique des fluides, la condition imposée sur le nombre de KNUNDSSEN est généralement vérifiée avec des dimensions de particule fluide suffisamment petites pour qu'elle puisse être assimilée à un point matériel.

## 2. LA MASSE VOLUMIQUE

La masse volumique,  $\rho$ , d'une substance est définie par le rapport  $\rho = \frac{dm}{dV}$  où  $dm$  est la masse de la substance contenue dans le volume  $dV$ . L'unité de masse volumique est le  $\text{kg.m}^{-3}$ . Le Tableau 2 est une illustration pour la substance eau à la pression atmosphérique.

Etat	Masse volumique ( $\text{kg.m}^{-3}$ )
Solide (glace)	917
Liquide à 4°C	1000
Gaz (vapeur à 100°C)	598

Tableau 2 : masse volumique de l'eau à la pression atmosphérique à l'état solide, liquide et gazeux.

La densité d'une substance se définit comme le rapport entre sa masse volumique et celle de l'eau à 4°C.

## 3. LA PRESSION DANS UN FLUIDE AU REPOS

A l'aide d'une capsule dite manométrique, comme le montre la figure ci-contre il est aisé de mettre en évidence l'action du fluide sur la membrane (m), il en résulte une déformation de la membrane. Si l'on réalise une rotation autour d'un point sans variation de cote la déformation est la même. La déformation de la membrane augmente avec la profondeur.

En reliant la capsule à un récipient plein de liquide placé au dessus et en faisant un trou dans la membrane on observe que le liquide s'échappe perpendiculairement à la membrane et ce quelle que soit l'orientation de celle ci.

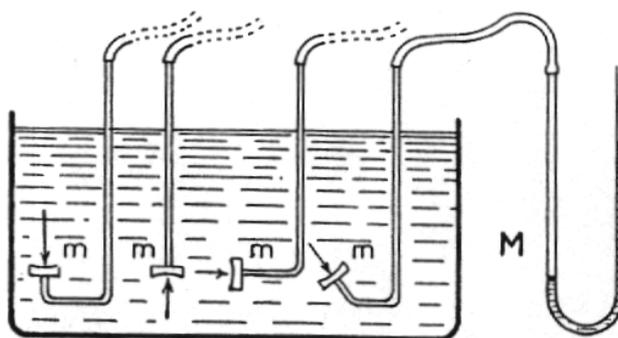


Figure 2 : pression dans un fluide au repos.

De façon macroscopique on constate qu'un fluide au repos exerce une force  $d\vec{f}_p$  perpendiculaire à chaque élément de surface  $dS$  du récipient et ce en chaque point M du récipient. Cette force est appelée *force de pression*.

A l'échelle moléculaire, l'action du fluide sur une paroi est liée aux chocs des molécules qui constituent le fluide avec la paroi. Chaque choc induit sur la paroi un effort qui peut avoir une composante normale et une composante tangentielle. Dans un fluide au repos, il n'y a pas de direction privilégiée pour les vitesses des différentes molécules. De ce fait, statistiquement, la

résultante des efforts (en considérant un grand nombre de chocs) a une composante tangentielle nulle et seule subsiste la composante normale.

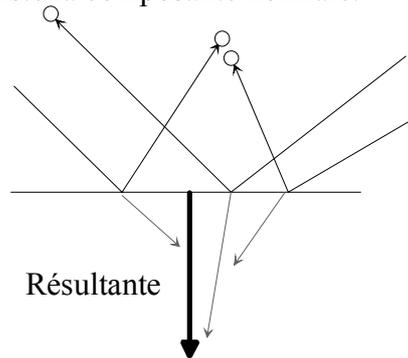


Figure 3 : action d'un fluide sur une paroi/interprétation microscopique.

Si on définit la normale  $\vec{n}$  à l'élément de surface  $dS$  orientée vers le fluide, on écrira :

$$d\vec{f}_p = -\|d\vec{f}_p\| dS \vec{n} \quad (1)$$

La relation (1) indique que l'effort exercé par le fluide est dirigé selon  $\vec{n}$ , et le signe « moins » montre qu'il est compressif, *i.e.* le fluide « appuie » sur la paroi (Figure 4).

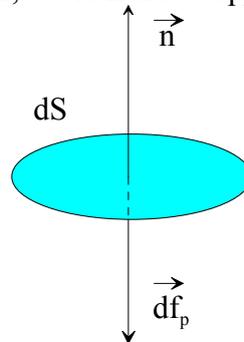


Figure 4 : force de pression exercée sur un élément de surface.

On définit la pression  $p$  au point  $M(x,y,z)$  comme  $p(x,y,z) = \frac{\|d\vec{f}_p\|}{dS}$ . L'unité de pression est le  $N.m^{-2}$  ou Pa (Pascal). Les autres unités d'usage sont : 1 atm = 1,013 bar = 1013 hPa = 760 Torr (Torricelli).

Par réaction cette **pression existe aussi au sein du fluide**, de plus elle varie avec les forces extérieures.

### 3.1.PRESSION DANS UN FLUIDE AU REPOS DANS LE CHAMP DE PESANTEUR

On considère un fluide iso volume de masse volumique  $\rho$ , homogène, au repos dans le champ de pesanteur et un trièdre trirectangle  $Oxyz$ , l'axe  $Oz$  étant vertical ascendant. Soient deux points  $M_1$  et  $M_2$  de cotes respectives  $z_1$  et  $z_2$  où règnent les pressions  $p_1$  et  $p_2$ . Soit un cylindre élémentaire de génératrices parallèles à  $M_1M_2$  et limité par deux éléments de surface  $d\Sigma_1$  et  $d\Sigma_2$  entourant  $M_1$  et  $M_2$  respectivement (Figure 5). Le fluide étant au repos, le fluide contenu dans le cylindre est à l'équilibre. Celui-ci est soumis à son poids et aux forces de pression exercées par le fluide environnant. Si on écrit que la résultante des forces selon la direction  $M_1M_2$  est nulle, on obtient :

$$-\rho g dV \cos \alpha - p_1 d\Sigma_1 \cos \beta_1 + p_2 d\Sigma_2 \cos \beta_2 = 0 \quad (2)$$

En remarquant que  $dV \cos \alpha = (z_1 - z_2) d\Sigma$  et que  $d\Sigma_1 \cos \beta_1 = d\Sigma_2 \cos \beta_2 = d\Sigma$ , on obtient :

$$p_2 - p_1 = \rho g(z_1 - z_2) \quad (3)$$

soit encore :

$$p_2 + \rho g z_2 = p_1 + \rho g z_1 \quad (4)$$

Les points  $M_1$  et  $M_2$  étant choisis de façon quelconque, la relation précédente est vraie quel que soit le couple de point  $(M_1, M_2)$ , on a donc :

$$\boxed{p + \rho g z = Cte} \quad (5)$$

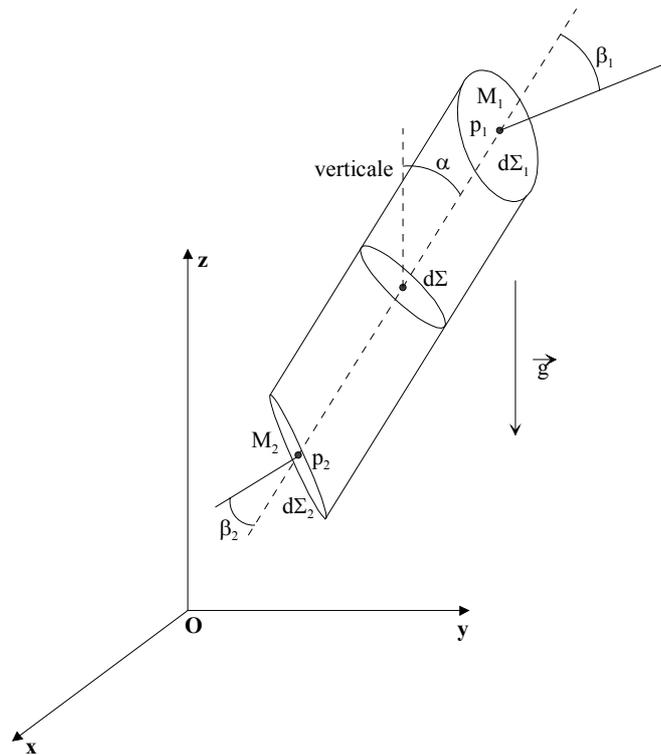
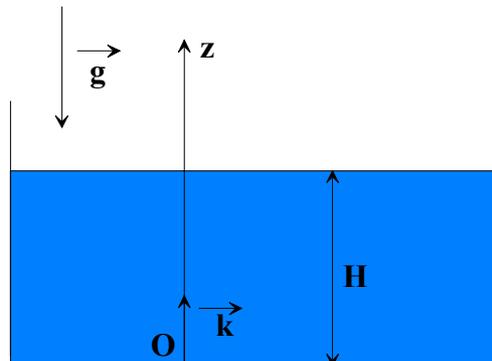


Figure 5 :Equilibre d'une colonne de fluide.

La relation précédente pourra encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{p}{\rho g} + z = Cte = \text{hauteur piézométrique} \quad (6)$$

Si, en un point donné, on connaît la valeur de la pression, on peut déterminer la valeur de la constante.



**Figure 6 : Fluide au repos.**

En prenant l'exemple de la Figure 6, la valeur de la pression est connue à la surface libre, à la cote  $z = H$ . Elle est égale à la pression de l'air  $p_o$  (pression atmosphérique). On obtient alors :

$$p + \rho g z = p_o + \rho g H \quad (7)$$

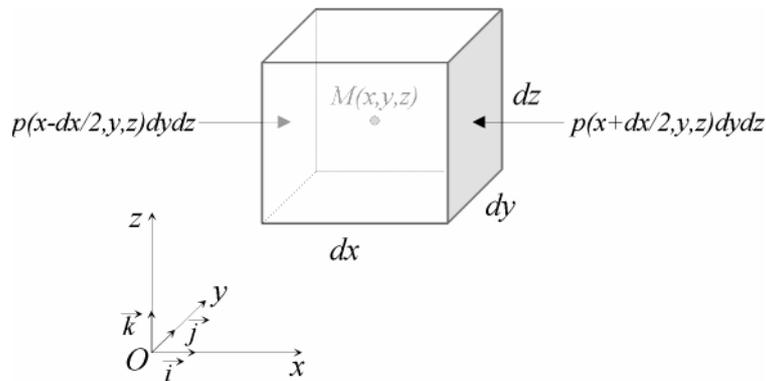
soit encore :

$$p = p_o + \rho g (H - z) \quad (8)$$

La pression dans un fluide augmente donc avec la profondeur, ainsi tous les 10 mètres d'eau la pression augmente de  $10^5$  Pa ( $10^3 \times 10 \times 10$ ).

### 3.2. RESULTANTE VOLUMIQUE DES FORCES DE PRESSION

Pour déterminer l'expression de la résultante volumique des forces de pression, on choisit une particule fluide de forme cubique et de volume  $dx dy dz$ , centrée au point  $M(x, y, z)$ .



**Figure 7 : bilan des forces de pression sur une particule fluide.**

Ecrivons le bilan des forces de pression qui s'exerce sur a particule fluide décrite sur la Figure 7. Commençons, par exemple, par la direction  $x$ ,  $\vec{i}$  étant le vecteur normé associé à cette direction. Nous avons la résultante des forces de pression sur la particule fluide dans cette direction (qui s'exercent sur les facettes d'aire  $dy dz$ ) qui est donnée par :

$$\left( p \left( x - \frac{1}{2} dx, y, z \right) - p \left( x + \frac{1}{2} dx, y, z \right) \right) dy dz \vec{i} \quad (9)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \vec{i} = -\frac{\partial p}{\partial x} dV \vec{i} \quad (10)$$

Si l'on fait de même sur les deux autres directions et que l'on somme on obtient la résultante des forces de pression :

$$-\left( \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) dV \quad (11)$$

Le terme entre parenthèse est le gradient de pression  $\overrightarrow{\text{grad} p}$ .

Ainsi, la résultante volumique des forces de pression est-elle donnée par  $-\overrightarrow{\text{grad}}p$ . Ce résultat est général et n'est pas seulement vrai en statique.

$$\boxed{\text{Résultante volumique des forces de pression} = -\overrightarrow{\text{grad}}p}$$

Pour un fluide au repos qui ne serait soumis qu'à des forces de pression, alors :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}p = \vec{0} \quad (12)$$

il y aura donc équilibre si la pression est constante dans tout le fluide.

### 3.3.EQUATION FONDAMENTALE DE LA STATIQUE DES FLUIDES

Considérons un fluide au repos sur lequel s'exerce une force de volume  $\vec{F}$ . Chaque particule fluide, dans le fluide considéré, est donc soumise à la force volumique  $\vec{f}$  et à la résultante des forces de pression. L'équilibre de la particule fluide s'écrira donc :

$$\left(-\overrightarrow{\text{grad}}p + \vec{f}\right)dV = \vec{0} \quad (13)$$

soit encore, si l'on divise par le volume de la particule fluide :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}p + \vec{f} = \vec{0} \quad (14)$$

Si la force de volume est le poids, l'expression de la force volumique  $\vec{f}$  est :

$$\vec{f} = \rho\vec{g} \quad (15)$$

En remplaçant  $\vec{f}$  par son expression dans la relation (14), on obtient l'équation fondamentale de la statique des fluides qui traduit l'équilibre d'un fluide dans le champ de pesanteur :

$$\boxed{-\overrightarrow{\text{grad}}p + \rho\vec{g} = \vec{0}} \quad (16)$$

relation dans laquelle  $g$  est l'accélération de la pesanteur.

Si le fluide étudié est iso volume (un liquide), c'est-à-dire que la masse volumique ne dépend pas de la pression alors l'intégration de l'équation (?) est immédiate. En effet, l'équation précédente en projection sur les axes  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  respectivement, et en supposant que l'axe  $Oz$  est **vertical ascendant**, donne les trois relations scalaires suivantes :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \quad (19)$$

Les deux premières relations montrent que la pression ne dépend ni de la variable  $x$  ni de la variable  $y$ . Autrement dit, sur un même plan horizontal, la pression est constante. *Dans un liquide au repos les isobares sont des plans horizontaux.*

L'intégration de la relation (19) permet de retrouver le résultat obtenu en 3.1. relation(5).

Si le fluide étudié n'est plus iso volume mais au contraire compressible (un gaz) alors la masse volumique dépend de la pression.

L'équation d'état met en relation pression, volume et température, celle du gaz parfait est la plus simple

$$pV = nRT \quad (20)$$

ou encore

$$p = \rho rT \quad (21)$$

ce qui donne :

$$\rho = \frac{p}{rT} \quad (22)$$

Alors, l'équation (19) devient :

$$-p \frac{g}{rT} - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (23)$$

et en situation isotherme c'est-à-dire  $T = T_0$  le champ de pression est donné par :

$$p(z) = Ke^{-\frac{g}{rT_0}z} \quad (24)$$

où  $K$  est une constante définie par une condition à la limite.

Des développements intéressants peuvent être faits pour étudier l'atmosphère.

### 3.4. PRINCIPE DE PASCAL



Blaise PASCAL (1623-1662)

Dans un fluide au repos, si par un moyen quelconque on augmente localement la pression d'un incrément  $\Delta p$ , cette augmentation de pression est transmise intégralement à l'ensemble du fluide. Un bon nombre d'appareils sont basés sur ce principe, entre autres les freins de voiture (Figure 8) et les presses hydrauliques (Figure 9). Dans ce dernier cas, on produit une force considérable à partir d'une force relativement peu importante en construisant la surface d'un piston (à la sortie) plus large que celle de l'autre (à l'entrée).

Lorsqu'on applique une force  $F_i$  sur le piston de section  $A_i$ , il en résulte une augmentation de pression dans le liquide  $\Delta p = \frac{F_i}{A_i}$ . Cette augmentation de pression est transmise au niveau du piston de section  $A_o$  (avec  $A_o \gg A_i$ ) et génère sur le piston une force  $F_o = \Delta p \cdot A_o$ . On obtient alors le rapport des forces  $\frac{F_o}{F_i} = \frac{A_o}{A_i}$ . Ce rapport des forces est appelé *avantage mécanique*.

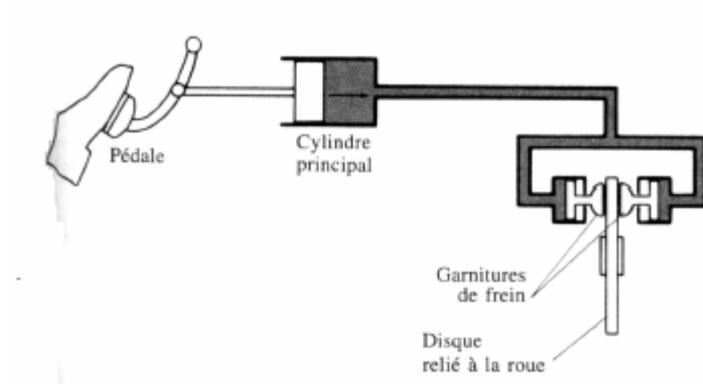


Figure 8 : principe du frein de voiture.

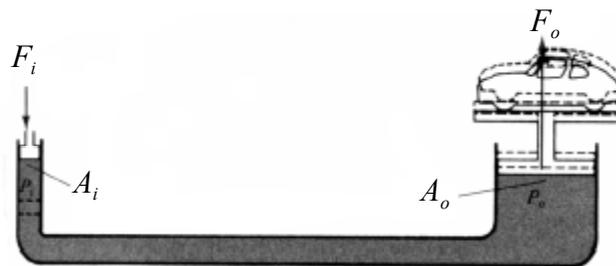


Figure 9 : principe de la presse hydraulique.

## 4. MESURE DE LA PRESSION

On parle de :

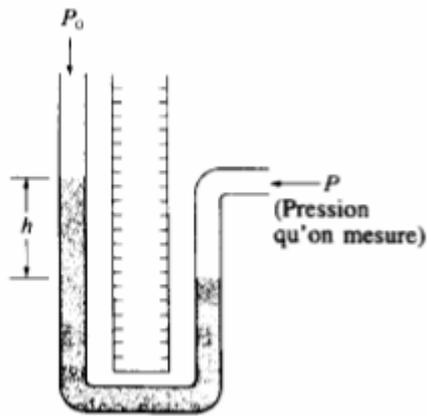
**PRESSION RELATIVE** quand la pression est mesurée relativement à une pression de référence (par exemple la pression atmosphérique  $P_{atmosphérique}$ );

**PRESSION ABSOLUE** quand la pression est mesurée par rapport à la pression du vide parfait (0).

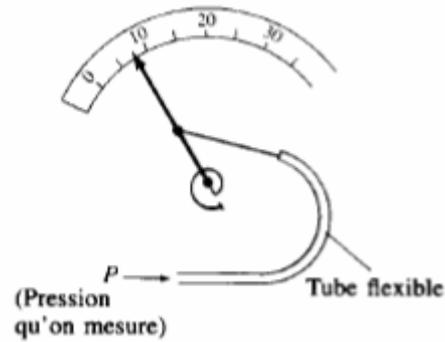
- La pression absolue est toujours positive.
- La pression relative peut être négative ou positive.
- Une pression relative négative est une dépression.
- La pression peut être mesurée en hauteur fluide (charge).

### 4.1.MANOMETRE

Quelques-uns des instruments inventés pour mesurer la pression sont représentés ci-après. Le plus simple d'entre eux, le manomètre à air libre, il consiste en un tube en forme de U partiellement rempli de liquide, généralement du mercure ou de l'eau. La pression mesurée,  $P$  est reliée à la différence de hauteur des deux niveaux de liquide. Le manomètre métallique de Bourdon dans lequel un accroissement de pression tend à redresser un tube flexible rattaché à une aiguille indicatrice.



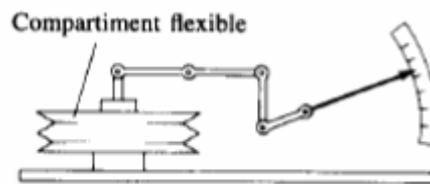
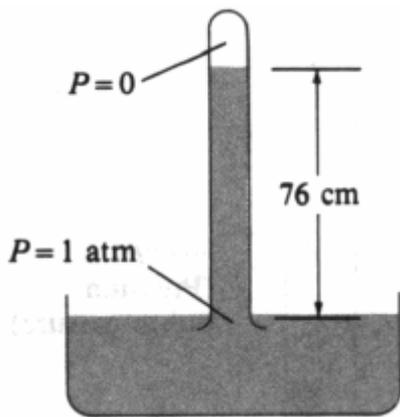
Manomètre à air libre



Manomètre Métallique de BOURDON

## 4.2. BAROMETRE

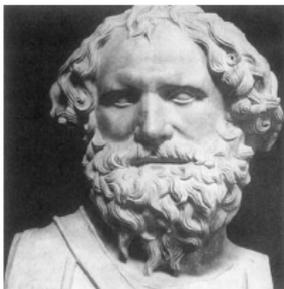
La pression atmosphérique se mesure souvent au moyen d'un baromètre, une sorte de manomètre modifié dont une des extrémités est fermée. Il s'agit en fait d'un tube de verre rempli de mercure puis renversé dans un récipient contenant également du mercure. Le baromètre anéroïde dont l'aiguille est reliée aux extrémités flexibles d'un compartiment en métal peu épais ou l'on a fait le vide.



Baromètre anéroïde

## 5. FORCE DE POUSSEE SUR UN SOLIDE IMMERGE DANS UN FLUIDE

Soit une portion arbitraire de fluide de volume  $V$ , en équilibre par rapport au fluide environnant, la force totale agissant sur cette portion de fluide est donc nulle. La force de pesanteur sur cette portion de fluide est  $-\rho Vg$  appliquée au centre de masse  $G$  du volume fluide. Ainsi la somme des efforts de pression exercés par le fluide environnant donne lieu à une force résultante opposée égale à  $\rho Vg$  appelée force de poussée.



ARCHIMEDE (-287 à -212)

Si à cette portion de fluide on substitue un corps solide de masse volumique différente, il subit cette même force de poussée  $\rho Vg$ . La force totale agissant sur le solide est donc égale à son poids diminué du poids du fluide déplacé  $-(M - \rho V)g$  où  $M$  est la

masse du solide.

La relation précédente est une expression du Principe d'ARCHIMEDE. Selon que cette expression est négative ou positive le solide va couler ou flotter.

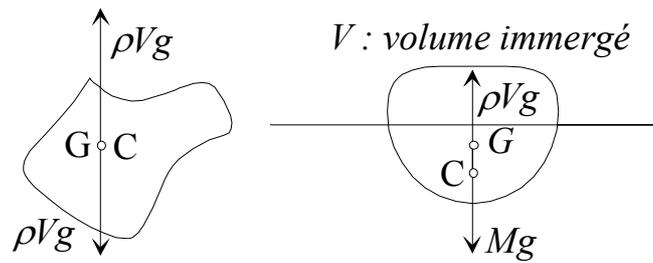


Figure 10 : Poussée d'Archimède sur un volume de fluide et sur un solide partiellement immergé.

Dans le cas d'un solide immobile flottant à la surface du liquide, la force de poussée est égale en module au poids du solide, le centre de poussée  $C$  (le centre de masse du fluide déplacé) et le centre de masse  $G$  du solide sont sur la même verticale (ainsi le moment des forces extérieures par rapport à  $G$  est nul). La stabilité d'un tel équilibre pose une série de problèmes intéressants (profil des coques de navire).

## 6. ECOULEMENT D'UN FLUIDE PARFAIT : EQUATIONS GENERALES

Nous nous proposons ici d'aborder de façon relativement élémentaire certains aspects de l'hydrodynamique (écoulement d'un fluide). On se limitera dans cette partie aux fluides parfaits. Les fluides parfaits sont des fluides pour lesquels il n'y a pas de dissipation d'énergie par frottement. Dans ce cas, les seules forces qui interviennent sur une particule fluide sont les forces de pression et les forces de volume (en particulier le poids).

Lorsque le mouvement d'un fluide est suffisamment lent, il se fait de façon régulière, l'écoulement sera dit laminaire. Considérons le cas stationnaire, en chaque point géométrique  $M$  de l'espace occupé par le fluide on peut définir une vitesse locale d'écoulement  $\vec{v}(M)$  constante dans le temps. Chaque élément de fluide suit une trajectoire bien définie. Pour décrire l'écoulement, on définit les *lignes de courant* qui sont déterminées par le champ des vitesses  $\vec{v}(\vec{r})$  de telle façon qu'en chaque point de cette ligne, le vecteur vitesse soit tangent (Figure 11). Si nous considérons une ligne fermée  $C$ , l'ensemble des lignes de courant passant par ses points constitue un tube de courant (Figure 11).

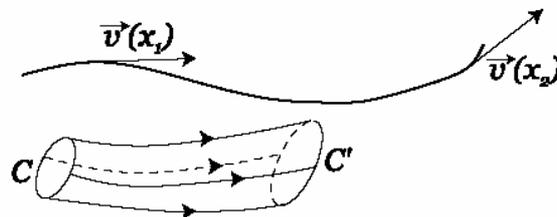


Figure 11 : ligne de courant et tube de courant.

Le tube de courant étant en chaque point parallèle à la vitesse, il n'y a pas de flux de matière sortant ou entrant à travers sa surface : tout élément de fluide traversant la section  $C$ , traversera un peu plus tard la section  $C'$ .

Si l'on augmente la vitesse du fluide, au-delà d'une vitesse critique l'écoulement devient turbulent, la vitesse et la pression locale deviennent des fonctions du temps à fluctuations rapides et irrégulières. La théorie de ce type d'écoulement est complètement hors de propos de ces quelques éléments d'initiation à la mécanique des fluides.

Les deux équations fondamentales de l'hydrodynamique sont l'équation d'Euler liant accélération du fluide aux forces (l'équivalent de l'équation du mouvement de Newton), et l'équation de continuité, exprimant la conservation de la masse.

## 6.1. L'EQUATION D'EULER

Nous venons de voir que la force totale, agissant sur une particule fluide parfait, de volume  $dV$ , était égale à :

$$(\vec{f} - \overrightarrow{grad p})dV \quad (25)$$

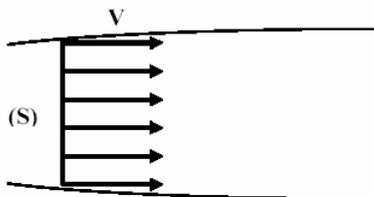
relation dans laquelle  $\vec{f}$  est la force de volume ramenée à l'unité de volume. Dans un fluide au repos cette expression est nulle. Dans un fluide en mouvement, cette force aura pour effet d'accélérer la particule fluide considérée. Conformément au Principe fondamental de la Dynamique on pourra écrire :

$$\rho dV \frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{f} - \overrightarrow{grad p})dV \quad (26)$$

D'où l'équation du mouvement d'EULER :

$$\boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \overrightarrow{grad p}} \quad (27)$$

Remarquons que nous avons conservé ici l'expression statique de la force totale, c'est-à-dire que, malgré le mouvement du fluide, nous continuons à supposer que l'effort exercé par le fluide adjacent sur l'élément considéré est normal. Dans un fluide réel viennent s'ajouter des forces tangentielles de viscosité, dépendant de sa vitesse.



Compte tenu de l'absence de viscosité et donc de frottement (fluide parfait), il n'y a pas de perte d'énergie cinétique. Dans une section du tube de courant, la vitesse sera partout la même : le profil des vitesses est uniforme (écoulement piston).

## 6.2. L'EQUATION DE CONTINUITÉ

Soit  $\rho(\vec{r}, t)$  et  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  la masse volumique et la vitesse du fluide au point  $\vec{r}$  à l'instant  $t$ . Considérons un petit volume  $dxdydz$ , centré sur le point  $\vec{r} = (x, y, z)$ . Les masses de matière contenues dans cet élément de volume aux instants  $t$  et  $t+dt$  sont données respectivement par  $\rho(\vec{r}, t)dxdydz$  et  $\rho(\vec{r}, t+dt)dxdydz = \left( \rho(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dxdydz$ . La différence entre ces deux expressions représente la quantité qui s'est « accumulée » dans l'élément de volume durant l'intervalle  $dt$  soit  $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dxdydz$ .

Le flux de matière dans la direction  $x$  est  $\rho v_x$ , la différence entre ce qui est entré et sorti par les deux faces opposées, normales à l'axe  $x$  est égale à  $-dydz \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x \right) dxdt$ .

On a des expressions semblables pour les deux autres paires de faces soit au total pour la différence entre la matière entrée et la matière sortie  $-\left( \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \right) dx dy dz dt$ .

En vertu de la conservation de la masse, cette expression doit être égale à la précédente, d'où la relation de conservation  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z = 0$  ou de façon plus condensée en utilisant l'opérateur divergence :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (28)$$

L'équation d'Euler et l'équation de continuité, complétées par une relation d'état liant  $\rho$  et la pression  $p$ , permettent de résoudre les problèmes posés par le mouvement d'un fluide.

### 6.3. LE DEBIT-MASSE, LE DEBIT-VOLUME

Appliquons tout d'abord le principe de conservation de la masse à un volume fixe  $V$  quelconque qui contient à l'instant  $t$  une masse de fluide iso volume (donc de masse volumique constante)  $M$ . La conservation de la masse implique que la variation de la masse de fluide contenue dans le volume  $V$  par unité de temps (terme d'accumulation) est égale à la masse de fluide qui entre dans le volume  $V$  par unité de temps (flux entrant) moins la masse de fluide qui en sort par unité de temps (flux sortant).

Effectuons un bilan de masse sur un tube de courant élémentaire. On considère donc un tube de courant qui s'appuie sur les surfaces  $dS_1$  et  $dS_2$  et on s'intéresse à la masse de fluide qui se trouve à l'instant  $t$ , dans le tube de courant entre  $dS_1$  et  $dS_2$  (Figure 12).

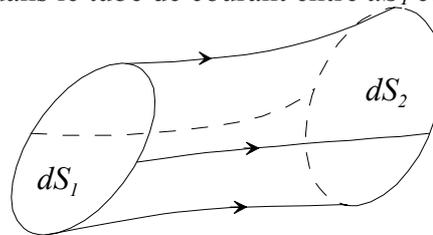


Figure 12 : Conservation de la masse de fluide dans un tube de courant

La variation de la masse de fluide qui se trouve dans le tube de courant par unité de temps s'écrit  $\frac{d(\rho V)}{dt}$  où  $V$  représente le volume du « tronçon » de tube de courant compris entre  $dS_1$  et  $dS_2$ . On prend, pour simplifier, les surfaces  $dS_1$  et  $dS_2$  perpendiculaires aux lignes de courant (et donc perpendiculaires aux vecteurs vitesses dans la section considérée). La masse de fluide qui entre par unité de temps dans le tube de courant est le débit masse entrant. Supposons ici, pour fixer les idées, que le fluide entre par  $dS_1$  et sorte par  $dS_2$ . En effet, il ne peut pas y avoir de fluide qui entre ou qui sorte par la surface latérale du tube de courant, la vitesse du fluide étant tangente à cette surface. On calcule la masse de fluide qui entre par  $dS_1$  de la façon suivante. Le tube de courant étant élémentaire,  $dS_1$ , on considère la vitesse des particules de fluide qui traversent cette section uniforme. Entre les instants  $t$  et l'instant  $t + dt$ ,

une particule fluide de vitesse  $v_1$  a parcouru la distance  $v_1 \cdot dt$  dans la direction du vecteur  $\vec{v}_1$  (Figure 13).

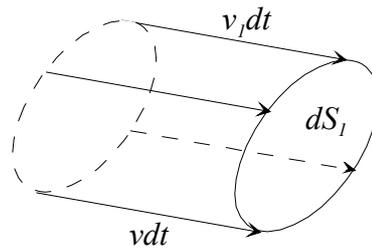


Figure 13 : débit masse entrant par la section  $dS_1$

Le volume de fluide qui va traverser  $dS_1$  pour entrer dans le tronçon de tube de courant est donc contenu dans le cylindre de section  $dS_1$  et de hauteur  $v_1 \cdot dt$ . La masse de fluide qui entre par  $dS_1$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est donc donnée par  $dm = \rho \cdot dS_1 \cdot v_1 \cdot dt$ . Le flux de masse entrant dans le tronçon de tube considéré est donc :

$$dq_{m \text{ entrant}} = \frac{dm}{dt} = \rho \cdot dS_1 \cdot v_1 \quad (29)$$

Le même raisonnement permet de déterminer le flux sortant (*i.e.* le débit masse élémentaire sortant) :

$$dq_{m \text{ sortant}} = \rho \cdot dS_2 \cdot v_2 \quad (30)$$

Le principe de conservation de la masse peut alors s'écrire :

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho(dS_1 \cdot v_1 - dS_2 \cdot v_2) \quad (31)$$

Comme le fluide est iso volume, l'expression précédente peut se simplifier :

$$\frac{dV}{dt} = (dS_1 \cdot v_1 - dS_2 \cdot v_2) \quad (32)$$

ainsi, pour un fluide iso volume, la conservation de la masse induit la conservation du volume. De plus, en régime permanent, le terme d'accumulation est nul ( $\frac{dV}{dt} = 0$ ), flux entrant égale flux sortant et on obtient une relation simple entre les vitesses  $v_1$  et  $v_2$ .

On peut appliquer les relations précédentes au cas de l'écoulement permanent d'un fluide parfait iso volume dans une conduite de section variable. La paroi de la conduite est un tube de courant et pour un fluide parfait, la vitesse du fluide sur une section droite est uniforme (Figure 14).

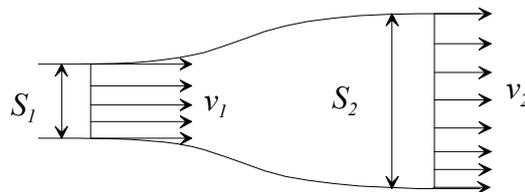


Figure 14 : écoulement dans une conduite de section variable.

La conservation de la masse dans ce cas va entraîner que :

$$\rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2 = Q_m = Cste \quad (33)$$

qui montre que le débit masse  $Q_m$  est constant dans toute la conduite en régime permanent. Le fluide étant iso volume, on a encore :

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = Q_v = Cste$$

traduisant le fait que le débit volume  $Q_v$  est aussi constant pour un fluide iso volume.

**Débit masse :**

exprimé en  $kg.s^{-1}$ .

**Débit volume :**

exprimé en  $m^3.s^{-1}$ .

**6.4.L'ÉQUATION DE BERNOULLI**



**Daniel BERNOULLI**  
(1700-1782)

Il s'agit de construire un théorème de conservation de l'énergie. Nous nous limitons au cas d'un fluide incompressible et non visqueux. Il va s'agir de faire travailler une force. En partant de l'équation d'EULER, nous allons multiplier chaque membre par  $d\vec{r} = \vec{v}dt$ , on obtient alors :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = (\vec{f} - \overline{grad}P) \cdot d\vec{r} .$$

Le premier terme donne la variation d'énergie cinétique par unité de volume ; pour le second terme on suppose que  $\vec{f}$  dérive d'une densité d'énergie potentielle  $u$  (paragraphe 6) alors :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = (-\overline{gradu} - \overline{grad}P) \cdot \vec{v}dt$$

ou encore  $\frac{1}{2} \rho d(v^2) + \overline{grad}(u + P) \cdot d\vec{r} = 0$ , en intégrant cette expression pour  $\rho$  constant on obtient  $\frac{1}{2} \rho v^2 + (u + P) = \text{constante}$  le long d'une ligne de courant.

Pour  $u = \rho gz$  (c'est-à-dire le cas où  $\vec{f}$  est la force de gravitation), on trouve l'équation dite de BERNOULLI :

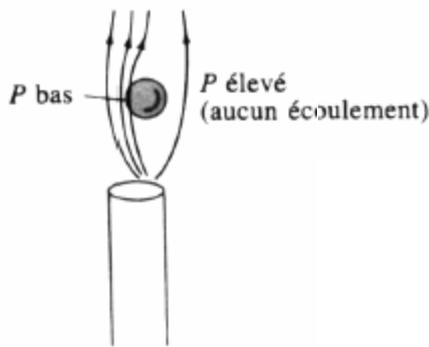
$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gz + P = \text{constante} .$$

La masse volumique  $\rho$  étant constante l'équation de continuité se réduit à  $div(\vec{v}) = 0$ .



La relation de BERNOULLI indique de façon quantitative qu'au point où la vitesse est grande, la pression est basse et vice versa. Elle explique un bon nombre de phénomènes de la vie courante dont certains sont illustrés dans la figure ci-contre.

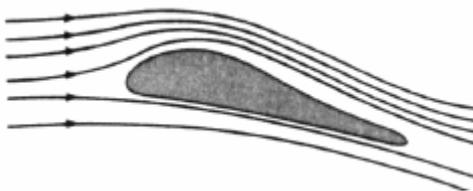
La pression de l'air projeté à grande vitesse par le bouchon d'un atomiseur est inférieure à la pression atmosphérique normalisée à la surface du parfum



contenu dans le flacon. En fait, le liquide est poussé vers le haut du tube en raison de la faible pression qui s'y exerce.

De même, une balle de ping-pong flottera sur un jet d'air provenant d'un aspirateur parce que, dès qu'elle commence à s'en éloigner, la pression extérieure, plus élevée, l'y repousse.

En incidence légère positive par rapport à la direction relative du vent apparent et en première approximation, les lignes de courant de l'écoulement de l'air autour d'une aile profilée on l'allure indiquée sur la figure. La conservation du débit oblige les particules de fluide à être plus rapides sur l'intrados (au dessous de l'aile) que sur l'extrados (au dessus de l'aile). L'application de la relation de BERNOULLI indique des pressions plus faibles sur l'extrados que sur l'intrados. La résultante des actions de pression est donc une portance, normale à la vitesse à l'infini.



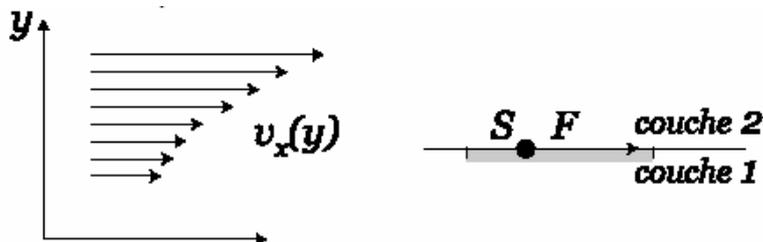
## 7. UN FLUIDE REEL

### 7.1.LA VISCOSITE

La viscosité correspond à une friction interne du fluide. Considérons le mouvement d'une tranche de fluide dans la direction  $x$ , en supposant que cette vitesse ne dépend que de  $y$  et que l'écoulement est laminaire. On peut visualiser le mouvement du fluide comme le glissement de feuillets les uns sur les autres. Jusqu'à présent, nous avons supposé le fluide non visqueux, c'est-à-dire que ce glissement se faisait sans frottement. En réalité les fluides réels sont visqueux et deux feuillets adjacents interagissent par une force tangentielle tendant à égaliser leur vitesse. Cette force peut s'écrire (étude d'un fluide dit newtonien) comme :

$F = \eta S \frac{\partial v_x}{\partial y}$ ,  $F$  est la force exercée par la couche 2 sur une surface  $S$  de la couche 1,  $\eta$  est le

coefficient de viscosité dynamique caractéristique du fluide.



Remarquons que :

- Cette force n'est pas conservative, l'énergie mécanique d'un fluide visqueux n'est pas conservée au cours du temps, il y a dissipation de l'énergie mécanique sous forme de chaleur.

- Elle s'annule si  $v_x$  ne dépend pas de  $y$ , c'est-à-dire si tous les feuillets se déplacent à la même vitesse.
- La dimension de  $\eta$  est  $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$  ou encore  $\text{Pa.s}^{-1}$  (Poiseuille). On utilise aussi  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  la viscosité cinématique dont l'unité est  $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ .
- La forme de  $F$  utilisée ici résulte de la géométrie particulière du problème considéré ici : écoulement selon  $x$  avec gradient de vitesse selon  $y$ .

Fluide	Température (°C)	Coefficient de viscosité, $\eta$ (Pa.s)
Eau	0	$1,8 \times 10^{-3}$
	20	$1,0 \times 10^{-3}$
	100	$0,3 \times 10^{-3}$
Sang	37	$4 \times 10^{-3}$
Plasma sanguin	37	$1,5 \times 10^{-3}$
Alcool éthylique	20	$1,2 \times 10^{-3}$
Huile de moteur (SAE 10)	30	$200 \times 10^{-3}$
Glycérine	20	$1500 \times 10^{-3}$
Air	20	$0,018 \times 10^{-3}$
Hydrogène	0	$0,009 \times 10^{-3}$
Vapeur d'eau	100	$0,013 \times 10^{-3}$

## 7.2. ECOULEMENT LAMINAIRE INTERNE

Soit un fluide en mouvement stationnaire dans la direction  $x$  et tel que le champ des vitesses ne dépende que de  $y$ .

Etablissons l'expression de la force visqueuse  $\vec{F}$  agissant sur un feuillet de fluide de surface  $S$  et d'épaisseur  $dy$ , localisé entre les plans  $y$  et  $y+dy$ . D'après le schéma ci-contre on a :



$$\vec{F} = \eta S \left( -\frac{\partial v_x(y)}{\partial y} + \frac{\partial v_x(y+dy)}{\partial y} \right) \vec{i} \quad \text{ou encore} \quad \vec{F} = \eta S \frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2} dy \vec{i} \quad \text{et en se ramenant au}$$

$$\text{volume unité} \quad \vec{f} = \eta \frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2} \vec{i}.$$

Cette force doit être rajoutée au membre de droite de l'équation d'Euler. L'écoulement est stationnaire, l'accélération est nulle, donc le membre de droite est nul.

$$\text{On obtient alors} \quad \vec{0} = \vec{f} - \overrightarrow{\text{grad}P} + \eta \frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2} \vec{i}.$$

$$\eta \frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial x} - f_x$$

ou bien encore en projetant sur les trois axes :

$$0 = \frac{\partial P}{\partial y} - f_y .$$

$$0 = \frac{\partial P}{\partial z} - f_z$$

En considérant que les forces extérieures sont négligeables ; la pression ne dépend que de  $x$  et

$\eta \frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial x}$ . Le membre de droite ne dépend que de  $x$  et le membre de gauche ne dépend

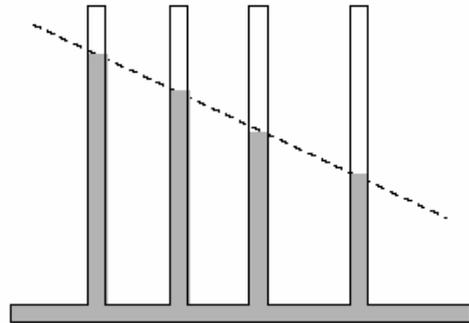
que de  $y$ , l'égalité précédente implique que les deux membres sont égaux à une même

constante .  $\eta \frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial x} = \text{constante}$  .

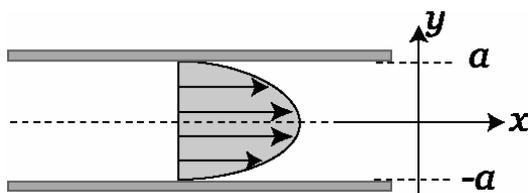
Ainsi la pression décroît linéairement avec  $x$ , c'est ce que l'on appelle la perte de charge

Si l'on réalise un écoulement stationnaire dans un tube horizontal, le long duquel on dispose une série de manomètres, il est aisé de vérifier expérimentalement la notion de perte de charge. Soit  $\Delta P$  la chute de pression dans la direction  $x$  par unité de longueur alors on a

$\frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2} = -\frac{\Delta P}{\eta}$  et par intégration  $v_x(y)$  est une parabole



Considérons donc l'écoulement d'un fluide entre deux plaques parallèles, horizontales et immobiles, écartées de  $2a$ . Au voisinage immédiat d'une paroi, les molécules du fluide forment un film immobile de sorte que la vitesse  $v_x(\pm a) = 0$ . Cette condition est dite condition d'adhérence, c'est-à-dire qu'au contact paroi fluide les vitesses sont les mêmes.



Ainsi on obtient  $v_x(y) = \frac{\Delta P}{2\eta} (a^2 - y^2)$ , qui est

bien une distribution parabolique des vitesses, avec un maximum au centre

### 7.3. NOMBRE DE REYNOLDS



Pour les fluides réels, deux régimes d'écoulement sont mis en évidence par l'expérience dite de REYNOLDS, et qui consiste à visualiser l'écoulement à l'aide d'un filet coloré dans un tube de verre (horizontal).

- Le filet coloré reste net et régulier, parallèle à l'axe du tube : **écoulement laminaire**.
- Le filet coloré oscille, vibre, se rompt : **écoulement turbulent**.

Le nombre de Reynolds est défini comme le rapport entre les forces

d'inertie et les forces de viscosité :  $Re = \frac{v_{moyen} D}{\nu}$ , dans lequel  $v_{moyen}$  est

la vitesse moyenne de l'écoulement (vitesse débitante),  $D$  une caractéristique géométrique de l'écoulement (par exemple le diamètre du tube cylindrique).

Le régime laminaire est obtenu quand les forces visqueuses sont prépondérantes.  $Re < 2000$  dans le cas de l'écoulement dans un tube cylindrique.

L'écoulement est turbulent quand les forces de viscosité deviennent négligeables devant les forces d'inertie.  $Re > 3000$  dans le cas de l'écoulement dans un tube cylindrique.

## 8. ANNEXES

### QUELQUES PRE REQUIS MATHEMATIQUES

- L'opérateur gradient :  $\overline{grad} f$

$\overline{grad}$  est un opérateur vectoriel du premier ordre agissant sur un champ scalaire :

$$f(x, y, z) \mapsto \overline{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad \overline{grad} f \text{ en } M \text{ est défini par la relation } df = \overline{grad}_M f \cdot d\overline{OM},$$

définition qui permet d'expliciter les composantes du gradient dans les autres systèmes de coordonnées.  $\overline{grad}_M f$  est perpendiculaire à la surface de niveau  $f(x, y, z) = cte$  au point  $M$  et est dirigé dans le sens de  $f$  croissante.

- L'opérateur divergence :  $div \vec{a}$

$div$  est un opérateur scalaire du premier ordre agissant sur un champ vectoriel :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \mapsto div \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad div \vec{a} \text{ est la trace de la matrice jacobienne du champ}$$

vectoriel  $\vec{a}$ .

- L'opérateur laplacien scalaire :  $\Delta f$

Le laplacien scalaire est un opérateur scalaire du deuxième ordre agissant sur un champ scalaire, il est défini par  $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f)$ .

En coordonnées cartésiennes : 
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

En coordonnées cylindriques : 
$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

En coordonnées sphériques : 
$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

## 9. BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

Robert COMOLET Mécanique expérimentale des fluides, Tome 1 Statique et dynamique des fluides non visqueux, 242p, MASSON, Paris, 1980.

Didier DESJARDINS, Marie TOUZET Introduction à la mécanique des milieux continus, 172p, DUNOD, Paris, 1999.

Marcel LESIEUR La Turbulence 262p, Presses universitaires de Grenoble, Grenoble, 1994.

Roger OUZIAUX, Jean PERRIER Mécanique des fluides appliquée, 448p, DUNOD, Paris, 1998.

Marcel NORDON Histoire de l'hydrodynamique 2 : L'eau démontrée du moyen Age à nos jours, 241p, MASSON, Paris, 1992.

Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, Luc Petit Hydrodynamique physique, 506p, InterEditions, Paris, 1991.

Richard P. FEYNMAN Leçons sur la physique, 347p, Editions Odile Jacob, Paris, 2000.

N. MIDOUX Mécanique et rhéologie des fluides en génie chimique, Lavoisier Tec&Doc, 513p, Paris, 1993.

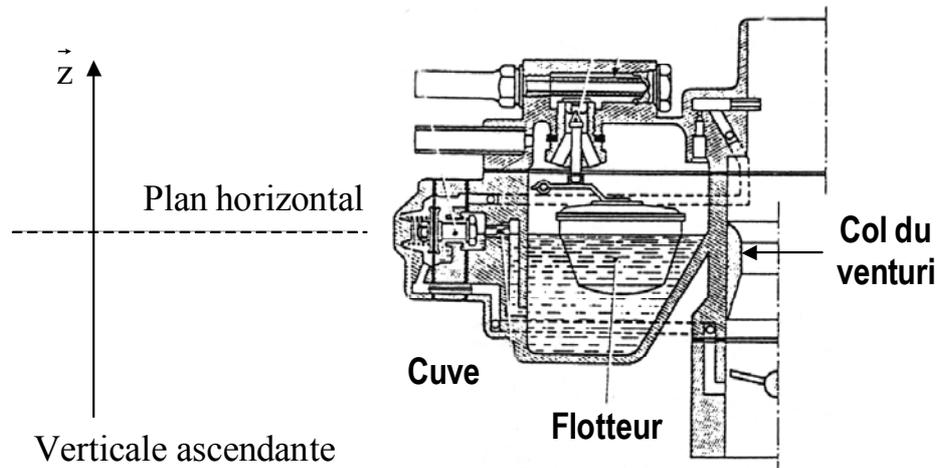
G.K. BATCHELOR An Introduction to Fluid Dynamics, 615p, Cambridge University Press, 1967.

P. GERMAIN Mécanique tome 1, 127p, Ellipse Ecole Polytechnique, Paris, 1986.

## 10. QUELQUES EXERCICES

### 10.1. ETUDE SIMPLIFIEE D'UN CARBURATEUR

*Le carburateur (figure 1) permet une pulvérisation de l'essence emmagasinée dans le réservoir dans un écoulement d'air issu de l'atmosphère. Ce mélange gazeux est ensuite admis dans les cylindres*



*du moteur.*

**Figure 1 : carburateur**

La figure 1 associe un modèle simplifié au dessin du carburateur et présente les deux parties de ce problème :

- L'étude du *flotteur* (figure 2) implanté dans la cuve qui stabilise le niveau de l'essence provenant du réservoir. Cette étude est menée en statique des fluides et a pour objectif de dimensionner le ressort de rappel du flotteur, dimensionnement qui n'est pas traité dans ce sujet.
- L'étude du mélange air-essence dans le *venturi* (figure 3) est traitée en dynamique des fluides parfaits incompressibles. Elle permet de dimensionner le Venturi pour assurer un taux de mélange défini.

*Les 2 parties sont totalement indépendantes. La première partie (statique des fluides) comporte deux approches qui peuvent également être traitées indépendamment (en dehors de la question 8).*

#### **PARTIE I Statique des fluides : Etude des forces exercées par l'essence sur le flotteur du réservoir**

Pour étudier l'équilibre du flotteur schématisé sur la figure 2, il est au préalable nécessaire d'exprimer la résultante des forces exercées par l'essence sur le flotteur. Ce dernier, de masse  $m$ , est assimilé à un cylindre de base circulaire de rayon  $R$ . La hauteur immergée est notée  $h$ .

L'axe  $\vec{z}$  est vertical ascendant, son origine est choisie au point  $O$ . L'ensemble est soumis au champ de pesanteur uniforme  $\vec{g} = -g\vec{z}$ .

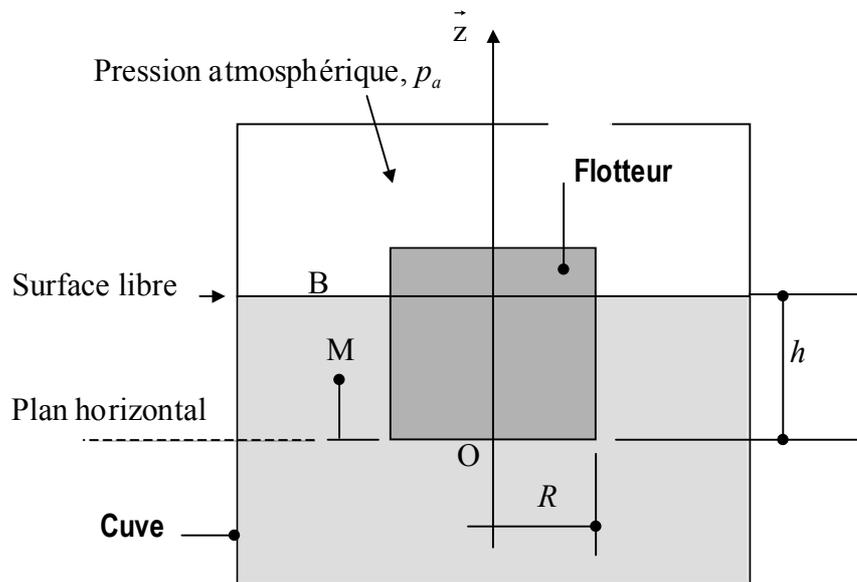


Figure 2 : flotteur

*Etude réalisée à partir du théorème d'Archimède*

1. Enoncer le théorème d'Archimède.
2. Déterminer la force de poussée exercée par l'essence sur le flotteur en fonction de la masse volumique de l'essence notée  $\rho_{es}$ , de  $g$ ,  $h$  et  $R$ .
3. Quelle doit être la masse  $m$  du flotteur ?
4. Application numérique : déterminer  $m$  à partir des valeurs suivantes :  $R = 30$  mm,  $h = 25$  mm et masse volumique de l'essence  $\rho_{es} = 750$  kg.m<sup>-3</sup>.

*Etude réalisée à partir de l'équation locale de la statique des fluides*

5. Ecrire la relation de l'hydrostatique des fluides (ou équation locale de l'hydrostatique des fluides).
6. Exprimer la pression en un point  $M$  du fluide situé à une hauteur  $z$ .
7. En déduire la pression exercée au point  $O$  et calculer la résultante des forces de pression exercées par l'essence sur la base du flotteur.
8. Conclure sur les résultats obtenus aux questions 2 et 7.

## **PARTIE II Dynamique des fluides parfaits incompressibles: fonctionnement du carburateur, étude des écoulements d'air et d'essence**

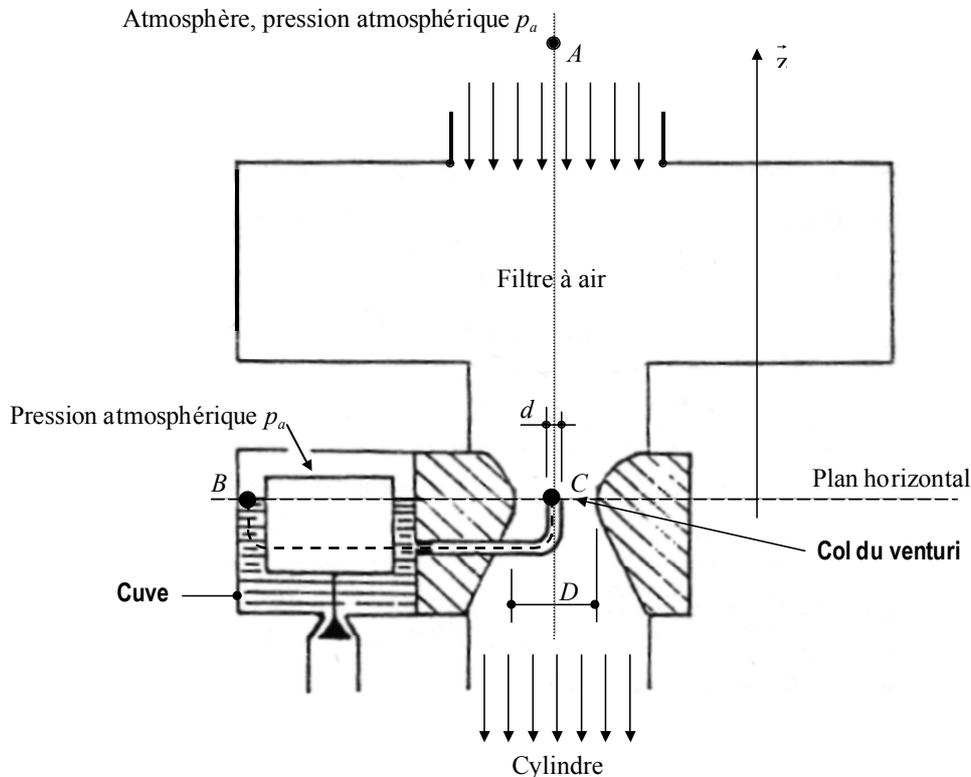
L'étude du mélange air-essence dans le Venturi se fait à partir d'une schématisation simplifiée présentée sur la figure 3.

*L'air s'écoule de l'extérieur (atmosphère A) avec une vitesse négligeable vers le cylindre en traversant le filtre (à air) puis le carburateur (section C, col).*

La réduction de la section de passage dans le venturi du carburateur s'accompagne d'une chute de la pression de l'air. Au niveau du col (section C, col), cette pression devient donc inférieure à la pression atmosphérique qui règne à la surface libre de l'essence contenue dans la cuve.

L'arrivée de l'essence est localisée dans la section réduite (section C, col). L'essence de la cuve à niveau horizontal constant (surface libre B), est alors aspirée vers le col et pulvérisée dans l'air en écoulement.

**Figure 3 : mélange air essence dans le Venturi**



Pour valider le principe de fonctionnement énoncé, il est nécessaire de dimensionner la réduction de la section de l'écoulement de l'air et donc de calculer le diamètre du col.

9. Énoncer le théorème de Bernoulli. Appliquer ce théorème sur la ligne de courant d'air passant par les points A et C. Exprimer, en négligeant le poids de l'air, la pression de l'air  $p_{\text{air}}(C)$  au point C en fonction de la pression atmosphérique  $p_a$ , de la masse volumique de l'air  $\rho_{\text{air}}$  et de la vitesse de l'air  $V_{\text{air}}(C)$  au point C.
10. Appliquer ce théorème sur la ligne de courant d'essence passant par les points B et C. Exprimer la pression de l'essence  $p_{\text{es}}(C)$  au point C en fonction de la pression atmosphérique  $p_a$ , de la masse volumique de l'essence  $\rho_{\text{es}}$  et de la vitesse de l'essence  $V_{\text{es}}(C)$  au point C.
11. Ces deux pressions  $p_{\text{air}}(C)$  et  $p_{\text{es}}(C)$  étant supposées égales, déduire des expressions établies en 9 et 10 une relation liant les vitesses en C des écoulements d'air  $V_{\text{air}}(C)$  et d'essence  $V_{\text{es}}(C)$ . Calculer le rapport  $\frac{V_{\text{es}}(C)}{V_{\text{air}}(C)}$  et conclure.

12. Application numérique. Calculer ce rapport avec  $\rho_{\text{air}} = 1,22 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\rho_{\text{es}} = 750 \text{ kg.m}^{-3}$ .

**Si vous avez le temps, question bonus !**

Exprimer le débit-masse d'air  $q_{m \text{ air}}$  et le débit-masse d'essence  $q_{m \text{ ess}}$  traversant la section C. Exprimer le rapport de ces deux débits,  $\delta = q_{m \text{ ess}} / q_{m \text{ air}}$ . Déterminer le diamètre D pour  $d=2\text{mm}$  et  $\delta = 5\%$ .

## 10.2. PLANCHE A VOILE

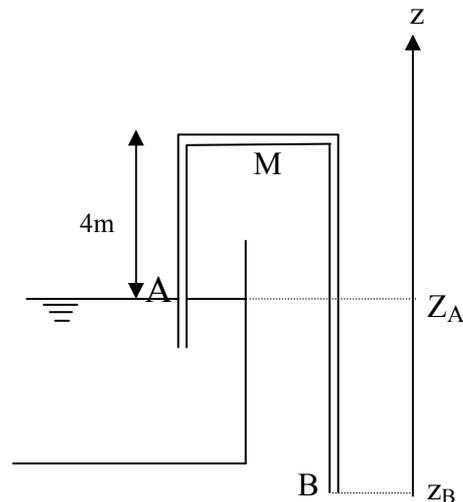
Dans la conception d'une planche à voile, que l'on assimilera à un parallélépipède rectangle, la largeur  $l$ , l'épaisseur  $e$  et la masse volumique  $\rho_s$  sont fixées par certaines contraintes d'utilisation et de choix des matériaux.

On cherche à déterminer la longueur minimale  $L$  de la planche à voile permettant de supporter à la limite de flottaison (c'est-à-dire lorsque la planche est totalement immergée), un homme de masse  $M$ .

- Enoncer le théorème d'Archimède.
- Déterminer l'ensemble des efforts appliqués sur la planche à voile.
- En utilisant le théorème d'Archimède, calculer la longueur  $L$  pour laquelle la planche seule (limite de flottaison) est totalement immergée.
- Application numérique* : calculer  $L$ .  
 $l = 0,68 \text{ m}$ ,  $e = 0,14 \text{ m}$ ,  $\rho_s = 500 \text{ kg/m}^3$ ,  $M = 80 \text{ kg}$ ,  $\rho_{\text{eau de mer}} = 1025 \text{ kg/m}^3$ ,  
 $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

## 10.3. ETUDE D'UN SIPHON

Un siphon (figure) permet l'écoulement de l'eau d'un réservoir de grandes dimensions. Il est constitué par un tuyau de 10 cm de diamètre dont la ligne centrale s'élève à 4 mètres au-dessus du niveau de la surface libre. On considère qu'il n'y a pas de perte d'énergie au cours de l'écoulement. Le fluide est parfait, en écoulement stationnaire.



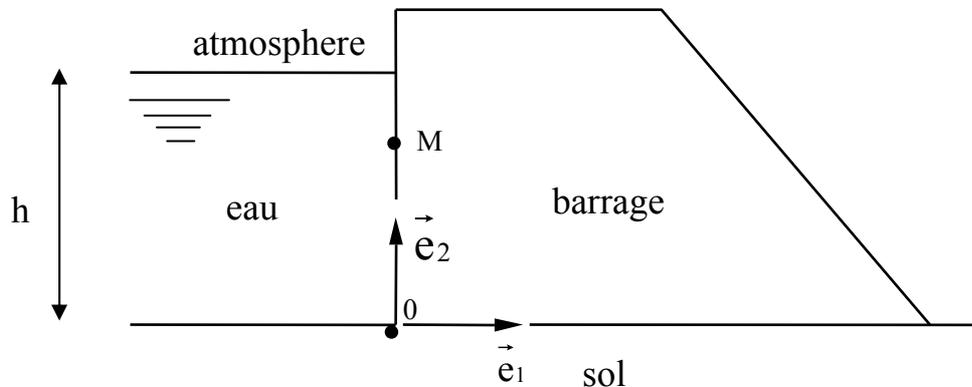
- Enoncer le théorème de Bernoulli.
- Déterminer la vitesse de sortie de l'eau du siphon, soit  $V_B$  en fonction de  $z_A - z_B$ .
- En déduire le débit.
- Le résultat de la question précédente montre que plus le siphon est long, plus le débit est important. Cependant, il existe une limite. En effet, on ne doit pas avoir de phénomènes de cavitation (pression inférieure à la pression de vapeur d'eau et apparition d'une poche de vapeur) au point  $M$  le plus haut du siphon. Pratiquement, la limite supérieure du débit est atteinte lorsque la pression au point  $M$  est nulle.
  - En déduire la vitesse maximale et le débit maximum que l'on peut obtenir avec ce dispositif.
  - Quelle doit être alors la cote de sortie  $z_B$ ?
- Application numérique* : déterminer  $z_B$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3, P_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Pa}, g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$

## 10.4. POUSSEE SUR UNE PAROI PLANE

La figure ci-dessus représente une section de l'ensemble sol-barrage, eau et atmosphère dans le plan de symétrie de la largeur  $L$  du barrage.

On désigne par  $M(0, y, 0)$  le point courant de la surface de contact eau/barrage,  $h$  la hauteur d'eau. On négligera l'effet de la pression atmosphérique.



- Déterminer la pression exercée par l'eau sur le barrage au point  $M$ .
- En déduire la force élémentaire (notée  $dF$ ) exercée par l'eau sur le barrage au point  $M$ .
- Exprimer la résultante  $F$  des forces de pression exercée par l'eau sur le barrage.
- On appelle centre de poussée (noté  $y_p$ ), le point d'application de la résultante  $F$  des efforts de pression. Il est défini dans le cas particulier d'une paroi plane par la relation :

$$y_p \cdot F = \iint_S y \cdot dF$$

avec  $S$  la surface du barrage. Déterminer la position du centre de poussée.

- Application numérique :** déterminer  $F$  et  $y_p$

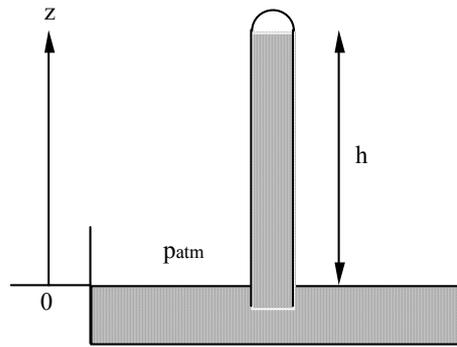
$$L = 100 \text{ m}, h = 30 \text{ m}, g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$

## 10.5. BAROMETRE DE TORRICELLI

Le baromètre à mercure de Toricelli sert à mesurer la pression atmosphérique. Il est constitué d'un tube fermé à une extrémité, l'autre extrémité étant plongée dans un bain de mercure (cf fig).

En remplissant le tube de mercure avant de le retourner et de le plonger dans le bain de mercure, on assure que si le mercure descend, la zone supérieure du tube ne contient plus d'air.

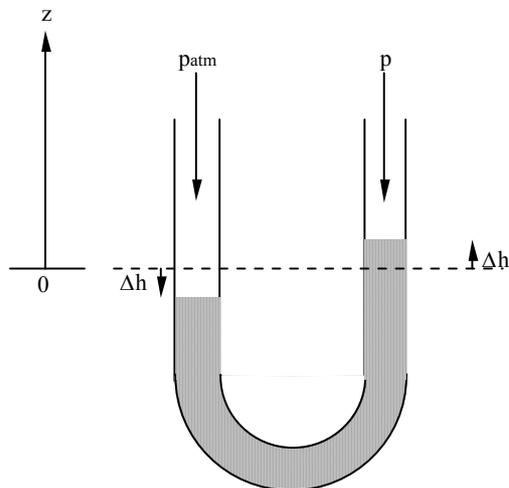
La masse volumique du mercure est  $\rho_{\text{Hg}} = 13\,600 \text{ kg/m}^3$ .



Calculer pour un tube de 1 m de hauteur, la hauteur  $h$  entre la surface supérieure de la colonne de mercure et la surface du bain lorsque la pression atmosphérique est standard ( $p_{atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ).

### 10.6. MANOMÈTRE À MERCURE EN U

Le manomètre à mercure en U est schématisé sur la figure ci-dessous.



La différence entre les deux pressions  $p$  et  $p_{atm}$  correspond à une différence de hauteur entre les deux surfaces supérieures du mercure. Il s'agit d'une élévation de hauteur du côté où la pression est la plus faible et d'un abaissement du côté où la pression est la plus importante.

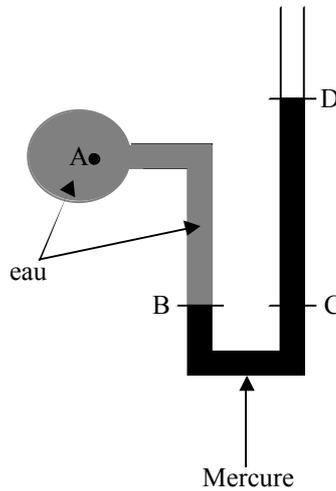
Calculer la différence des pressions  $\Delta p$  à la variation de hauteur.

### 10.7. MANOMETRE A MERCURE EN U : MESURE DE PRESSION

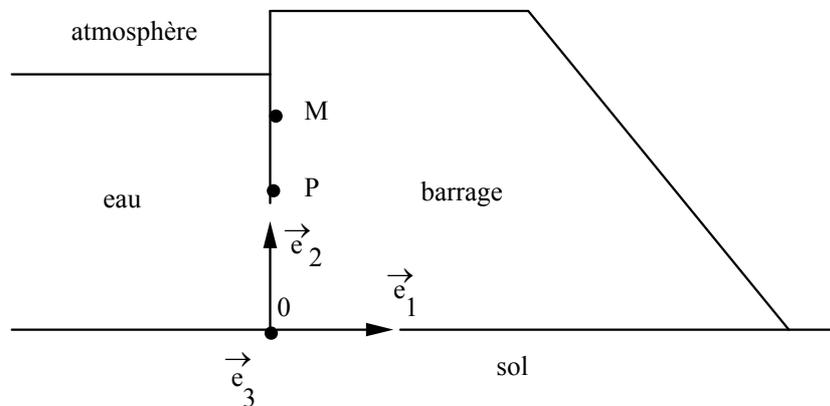
Quelle est la pression de l'eau en A due à la dénivellation du mercure dans le manomètre en U ?

On donne :

eau :  $\rho_e = 1000 \text{ kg/m}^3$   
 mercure :  $\rho_{hg} = 13600 \text{ kg/m}^3$   
 $z_D = 3,80 \text{ m}$   
 $z_A = 3,60 \text{ m}$   
 $z_B = z_C = 3 \text{ m}$



### 10.8. POUSSEE SUR UNE PAROI PLANE



La figure ci-dessus représente une section de l'ensemble sol-barrage, eau et atmosphère dans le plan de symétrie de l'unité de largeur du barrage.

On désigne par  $M(0, y, 0)$  le point courant de la surface de contact eau/barrage,  $h$  la hauteur d'eau,  $P$  le centre de poussée et  $p_a$  la pression atmosphérique.

Exprimer la résultante  $F$  (par unité de largeur) des forces de pression exercée par l'eau sur le barrage.

Déterminer la position du centre de poussée  $P$  après en avoir donné la définition.

Application numérique :  $h = 30 \text{ m}$ ,  $p_a = 10^5 \text{ Pa}$ . Calculer le module de  $F$  et la position de  $P$ .

### 10.9. VANNE PAPILLON

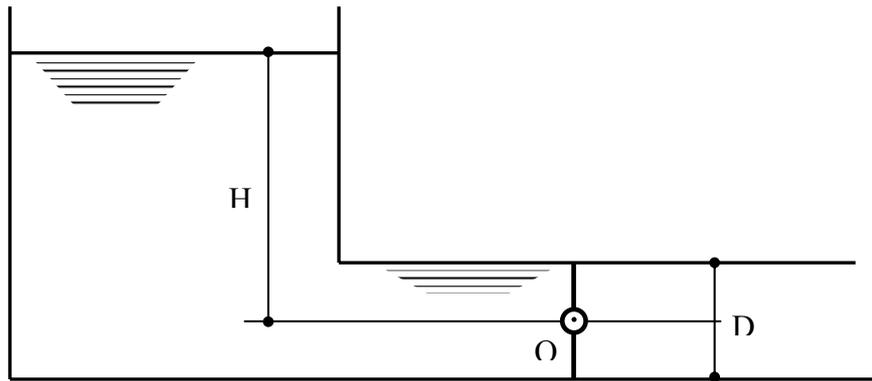
Une vanne papillon à axe horizontal est implantée dans une conduite reliée à un réservoir qui contient un liquide de masse volumique  $\rho$ . La surface libre du liquide, à la pression atmosphérique, est située à une hauteur  $H$  du plan défini par l'axe de la conduite et l'axe de la vanne. Lorsque la vanne est fermée, la face aval du papillon est à l'air libre.

La conduite présente une *section carrée* de côté  $D$ . Exprimer, au point  $O$ , le torseur des actions appliquées sur le papillon.

Application numérique :  $D = 0,3 \text{ m}$ ,  $H = 4 \text{ m}$  et  $\rho = 1 \text{ kg.dm}^{-3}$

Cette disposition constructive est-elle judicieuse ?

La conduite présente une *section circulaire* de diamètre  $D$ . L'axe de la vanne est horizontal, exprimer le torseur des actions appliquées sur le papillon.



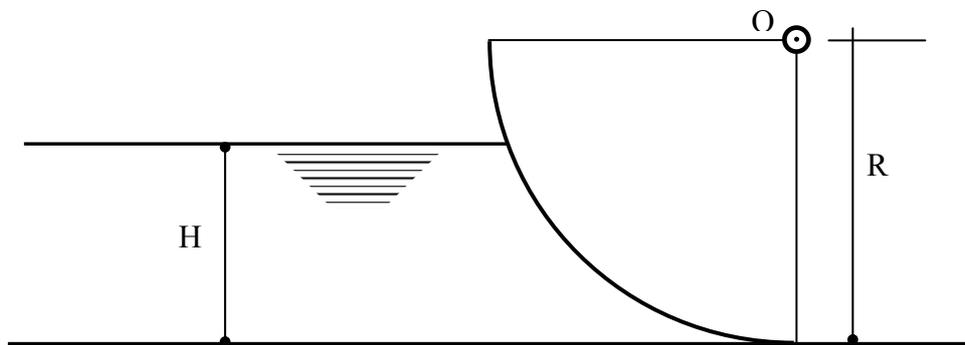
### 10.10.

### VANNE SECTEUR

Une vanne secteur est modélisée par un secteur cylindrique à base circulaire de centre  $C$ , de rayon  $R$  et de largeur  $L$ . Elle assure la fermeture d'une retenue d'eau dont la surface libre est située à la hauteur  $H$ .

Exprimer, au point  $O$ , le torseur des actions appliquées sur le secteur cylindrique.

Application numérique pour une largeur unité :  $R = 1,2$  m,  $H = 0,8$  m et  $\rho = 1$  kg/dm<sup>3</sup>



### 10.11.

### MESURE DE PRESSION DANS

### L'ATMOSPHERE SECTEUR

Au sol à  $15^\circ$  C, à une pression de  $10^5$  Pa, la masse volumique de l'air est  $1.225$  kg/m<sup>3</sup>. Déterminer la pression à  $400$  m d'altitude dans les cas suivants (on prendra  $g = 9,81$  ms<sup>-2</sup>) :

L'air est incompressible.

L'air compressible est isotherme à  $T_0$  = température au sol et se comporte comme un gaz parfait ( $r = 287$  J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>).

L'air compressible a une température qui varie avec l'altitude suivant la loi :

$\theta$  (°C) =  $- 0,0065 z$ , ( $z$  en m) et se comporte comme un gaz parfait.

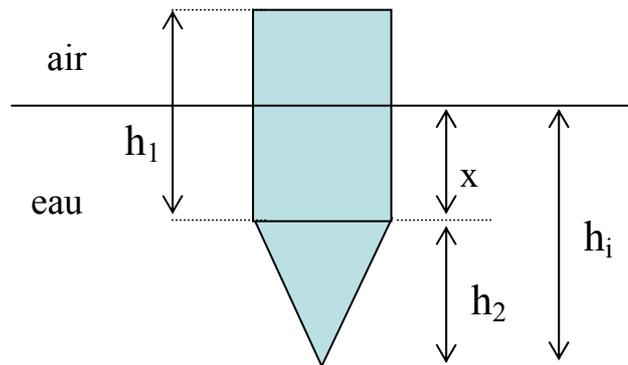
Comparer les résultats et conclure.

**10.12.****FLOTTEUR**

Soit un corps solide de masse volumique  $\rho_s$  qui a la forme d'un cylindre de hauteur  $h_1$  et de rayon  $R$ , prolongé par un cône de hauteur  $h_2$  et qui se raccorde parfaitement au cylindre (Figure 1). Ce corps solide est plongé dans de l'eau de masse volumique  $\rho_e > \rho_s$  et par conséquent flotte de telle sorte qu'à l'équilibre la hauteur immergée soit  $h_i$ .

En négligeant la poussée d'Archimède liée à l'air, calculer la hauteur immergée à l'équilibre  $h_i$  en fonction de  $\rho_e$ ,  $\rho_s$ ,  $h_1$  et  $h_2$ , sachant que le volume d'un cône de hauteur  $h$  et ayant pour base un disque de rayon  $R$  est  $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$ .

A quelle relation doit satisfaire  $\rho_e/\rho_s$  pour qu'à l'équilibre le cône soit totalement immergé ainsi qu'une partie du cylindre ? En déduire la valeur limite de ce rapport correspondant au cas où seul le cône est immergé ( $x=0$ ).

**10.13.****BALANCE HYDRAULIQUE**

Une pierre de masse volumique  $\rho_p > \rho_e$  (masse volumique de l'eau) pèse 90 N dans l'air et son poids est de 50 N dans l'eau.

Déterminer le volume de la pierre.

En déduire sa densité.

**10.14.****EQUILIBRE D'UN AEROMETRE**

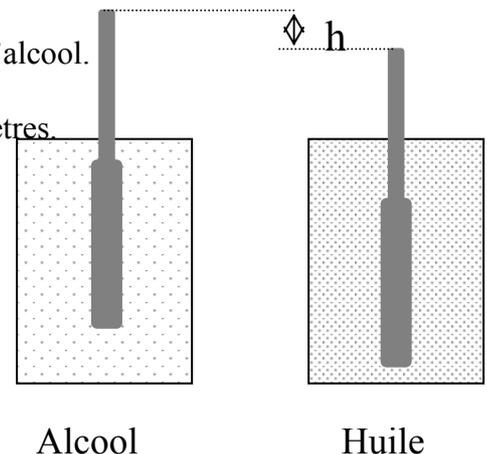
Un aéromètre comporte une tige graduée cylindrique de diamètre 2,8 mm, fixée à la partie supérieure d'un flotteur de volume  $V$ . Immergé dans un liquide de masse volumique  $\rho$ , il s'enfonce d'une certaine profondeur.

Cet aéromètre (figure) pèse 0,0216 N. Il est plongé dans de l'alcool (1) de densité 0,821 et dans de l'huile (2) de densité 0,78. On veut déterminer la différence d'enfoncement  $h$  entre les aéromètres dans les fluides (1) et (2).

Déterminer le volume immergé  $v_1$  de l'aéromètre dans l'alcool.

Déterminer le volume immergé  $v_2$  de l'aéromètre dans l'huile.

En déduire la différence d'enfoncement  $h$  entre les deux aéromètres.



**10.15.**  
**VENT**

**MESURE DE LA VITESSE RELATIVE DU**

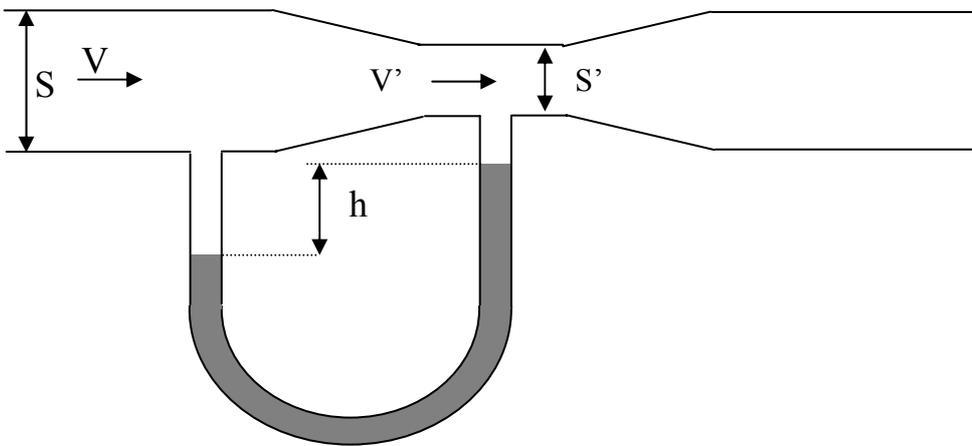
Le système de mesure permettant la détermination de la vitesse relative du vent est présenté sur la figure 1. Il est constitué d'une partie cylindrique de grande longueur de section  $S$ , suivie d'un convergent puis d'un col de section  $S'$  et enfin d'un divergent.

Deux prises de pression statique sont situées l'une dans la première partie (section  $S$ ) et l'autre dans le col (section  $S'$ ). Elles sont reliées par un tube en U contenant de l'eau.

Déterminer la vitesse relative du vent  $V$  en fonction de  $g$ ,  $h$ ,  $S$ ,  $S'$ ,  $\rho_{\text{eau}}$  et  $\rho_{\text{air}}$ .

Application numérique. Calculer cette vitesse  $V$ .

On donne :  $S = 2 S'$ ,  $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_{\text{air}} = 1,275 \text{ kg/m}^3$  et  $h = 25 \text{ mm}$ .



**10.16.**

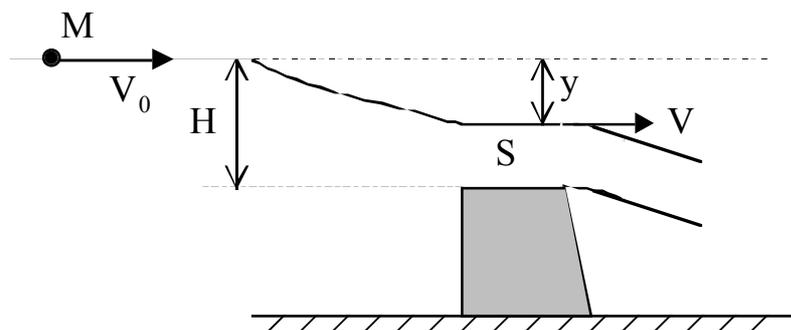
**DEVERSOIR A LARGE SEUIL**

Un déversoir à large seuil AB, de largeur  $L$ , est suffisamment long pour que, dans la section  $S$ , la lame d'eau coule en filets parallèles et horizontaux et que la vitesse  $V$  y soit considérée comme uniforme. En amont du déversoir, la vitesse est uniforme et vaut  $V_0$ .

Calculer, en fonction de la baisse de niveau  $y$ , le débit qui traverse la section  $S$  ?

Pour quelle valeur de  $y$  le débit est-il maximal ?

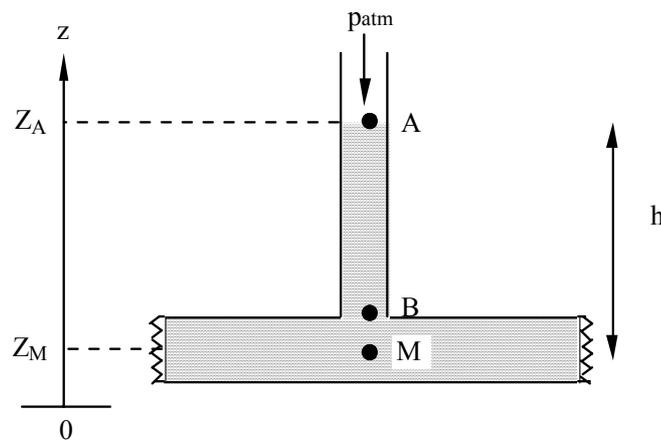
Le calculer lorsque  $V_0$ , la vitesse en amont, est négligeable ?



**10.17.****MESURE DE PRESSION PAR UN TUBE****PIEZOMETRIQUE**

On considère une conduite dans laquelle circule de l'eau. Cette conduite est dotée d'une prise de pression constituée par un tube débouchant à l'air libre. Le fluide est considéré comme parfait, incompressible, en mouvement isovolume, stationnaire et irrotationnel.

Calculer la différence de pression entre les points M et A en fonction de la hauteur  $h$ .

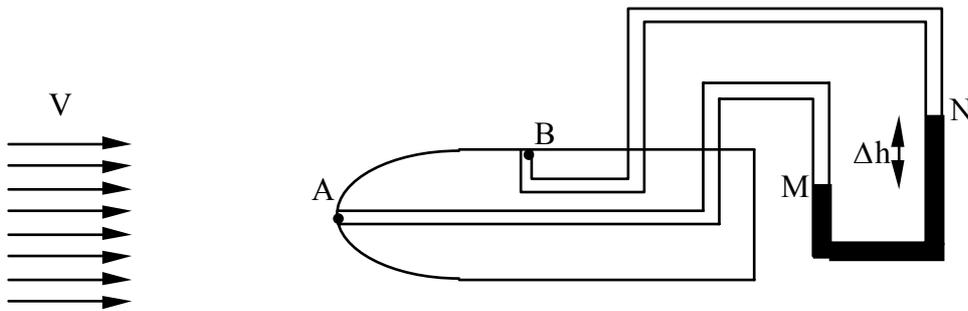
**10.18.****MESURE DE LA VITESSE DE L'AIR PAR****UN TUBE DE PITOT**

Un tube de pitot est un tube destiné à mesurer la vitesse de l'écoulement d'un fluide. Il est placé dans un écoulement isovolume, permanent et uniforme de fluide de masse volumique  $\rho$ , de vitesse  $V$  que l'on cherche à déterminer. Il est en réalité constitué de deux tubes permettant des prises de pression et reliés à un manomètre différentiel.

La première prise de pression s'effectue frontalement en A appelé « point d'arrêt » qui correspond pour le fluide à une vitesse nulle.

La seconde prise de pression s'effectue latéralement en B ; en ce point, les caractéristiques du fluide (vitesse et pression) sont celles de l'écoulement.

On considère les points A et B comme étant sur une même ligne de courant et à même altitude ( $z_A = z_B$ ).



Mesure de la vitesse de l'air par un tube de Pitot.

Ecrire le théorème de Bernoulli entre les points A et B. En déduire une relation entre les pressions en A et en B et les caractéristiques de l'écoulement.

On admettra que la pression statique en M est égale à la pression au point A et qu'il en est de même entre les points N et B. Le manomètre différentiel étant à mercure (de masse volumique  $\rho_m$ ) :

- a- évaluer la différence de pression entre les points M et N,
- b- en déduire la vitesse de l'écoulement,
- 3- calculer la vitesse de l'écoulement dans l'application numérique suivante :

A.N.  $\rho_m = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\rho = 1,225 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ ,  $\Delta h = 1 \text{ cm}$

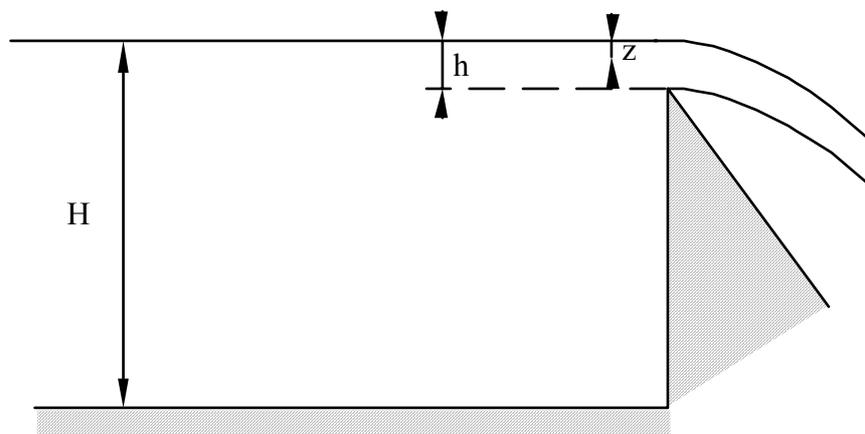
### 10.19.

### DEVERSOIR A BORD MINCE

On considère un régime permanent d'écoulement irrotationnel et isovolume d'un liquide parfait pesant, de masse volumique  $\rho$ , au dessus d'un déversoir à bord mince dont l'arrête est horizontale.

La configuration étudiée est bidimensionnelle. Loin en amont du déversoir, la vitesse est uniforme dans toute la hauteur  $H$  de la veine liquide, soit  $U_0$ . L'épaisseur  $h$  de la veine au dessus du déversoir est supposée faible et la vitesse est horizontale en tout point. Dans le plan vertical de la plaque constituant le déversoir, les lignes de courant sont horizontales et la pression statique est constante.

On désigne par  $p_0$  la pression de l'air surmontant la surface libre.



## Déversoir

Calculer la vitesse en un point M au dessus du déversoir situé à une profondeur  $z$  par rapport à la surface libre.

Quel est le débit volume par unité de largeur du réservoir ?

En supposant que  $\frac{U_0^2}{2g} \ll h$ , donner l'expression simplifiée du débit.

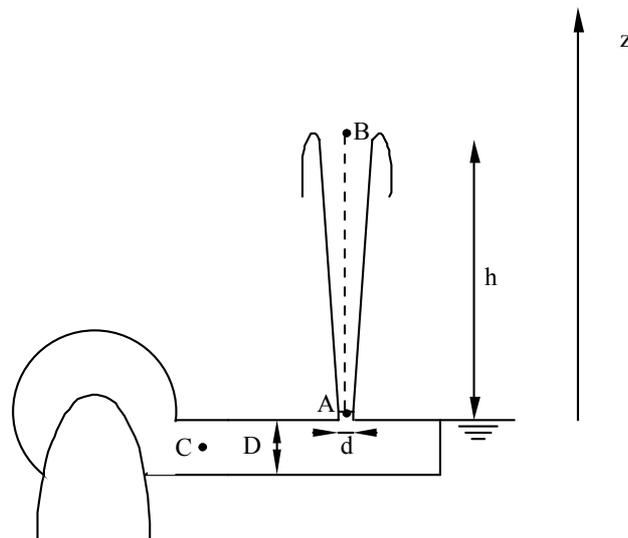
### 10.20.

### JET D'EAU DE GENEVE

Un jet d'eau vertical ascendant dans l'atmosphère à pression constante  $p_a = 10^5$  Pa issu d'une conduite de diamètre terminal  $d = 10$  cm s'élève à une hauteur  $h$  de 150 m. La canalisation horizontale d'amenée, reliée à une pompe, a un diamètre  $D = 40$  cm. Le régime d'écoulement est stationnaire et l'eau est assimilée à un fluide parfait pesant.

Calculer le débit - volume d'eau,

calculer la pression de refoulement de la pompe.



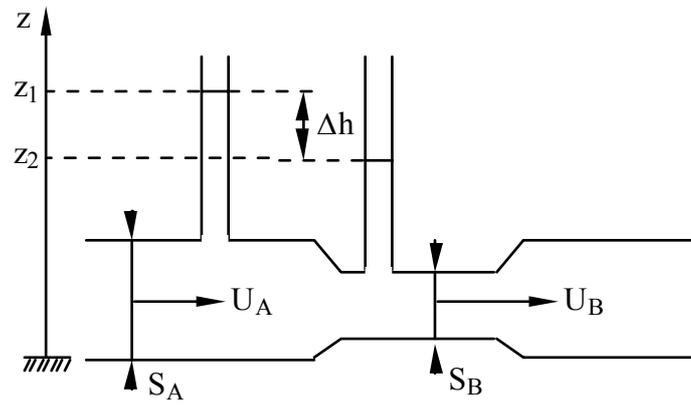
Jet d'eau de Genève

### 10.21.

### TUBE DE VENTURI

Un Venturi est un tube comportant un convergent conique de section  $S_A$  (vitesse du fluide  $U_A$ ) prolongé par un col cylindrique de section  $S_B$  (vitesse du fluide  $U_B$ ) et suivi d'un divergent conique. Il est utilisé pour déterminer le débit masse dans une conduite dans le cadre des hypothèses de Bernoulli. Deux tubes piézométriques sont placés l'un en amont au niveau de la conduite de section  $S_A$ , l'autre au niveau du col de section  $S_B$ . La différence de hauteur de fluide mesurée entre les deux tubes piézométriques est  $\Delta h$ .

La partie basse de ces tubes débouche dans la conduite et la partie haute débouche à l'air libre. Le fluide est parfait, incompressible en écoulement irrotationnel, permanent et conservatif où les seules forces à distance sont celles de la pesanteur.



Tube de Venturi

En utilisant le théorème de Bernoulli et la conservation du débit, calculer la vitesse  $U_A$  en amont du col en fonction de  $S_A$ ,  $S_B$ ,  $g$  et  $\Delta h$ .

En déduire le débit volume en fonction des mêmes grandeurs.