

DYNAMIQUE DES FLUIDES RÉELS
M1 MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS : SPÉCIALITÉ MÉCANIQUE
Ébauche de cours en train d'élaboration/complétion

Adil RIDHA

Copyright © 2008 Université de Caen - Département de Mathématiques et Mécanique, Tous droits réservés.

Avertissement

Le contenu de ce document est inspiré d'un cours enseigné à l'Université de Caen en Licence de Mécanique (2002–2003), de Master 1 Mathématiques et applications : spécialité Mécanique, et de divers manuels et ouvrages dont :

- (1) P. Germain & P. Muller, *Introduction à la mécanique des milieux continus*, Masson
- (2) R. Comolet, *Mécanique expérimentale des fluides*, Masson.
- (3) P. Chassaing, *Mécanique des Fluides, Éléments d'un premier parcours*, CÉPADUÈS-ÉDITIONS
- (4) Inge L. Ryming, *Dynamique des fluides*, Presse Polytechniques et Universitaire Romandes.
- (5) A. Dymont, *Introduction à la mécanique des fluides*, Cours de mécanique des fluides, Université des sciences et techniques de LILLE.
- (6) G. Duvaut, *Mécanique des milieux continus*, Masson.
- (7) A. R. Paterson, *A first course in fluid dynamics*, Cambridge university press.
- (8) Gebick Bar-Meir, *Fundamentals of Compressible Fluid Mechanics*, The Protto Project
- (9) P. Chassaing, *Turbulence en mécanique des fluides*, CÉPADUÈS-ÉDITIONS

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1. INTRODUCTION	1
1.1. GÉNÉRALITÉS	1
1.2. LIQUIDE ET GAZ	2
1.3. Forces extérieures	4
1.4. Tenseur de contraintes et la notion de viscosité	11
1.5. Statique des fluides	13
1.6. Sommaire	20
Chapitre 2. CINÉMATIQUE DES FLUIDES	23
2.1. Vitesse et Trajectoire de Particule	23
2.2. La dérivée matérielle (ou particulaire)	28
Chapitre 3. CONSERVATION DE LA MASSE	31
3.1. Équation de continuité	31
3.2. Fonction de courant pour un écoulement bidimensionnel	33
Chapitre 4. DÉFORMATION DES FLUIDES. VORTICITÉ	41
4.1. Introduction	41
4.2. Champ vectoriel $\vec{\omega}$	47
Chapitre 5. Équations du mouvement	51
5.1. Forme fondamentale	51
5.2. Contraintes et taux de déformation	53
5.3. Équations de Navier-Stokes	56
5.4. Discussion des équations de Navier-Stokes	57
Chapitre 6. Écoulements idéaux	61
6.1. L'équation d'Euler	61
6.2. L'équation du vecteur tourbillon	61
6.3. Le théorème de circulation de Kelvin	63
6.4. Théorème de Bernoulli	64
Chapitre 7. ÉQUATION DE BERNOULLI ET PERTE DE CHARGE	73
7.1. L'équation de Bernoulli et la perte de charge	73
7.2. Équation de la conservation d'énergie	74
7.3. L'équation d'énergie	76
7.4. Équation de Bernoulli : équation de l'énergie	77

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 8. Écoulement potentiel	79
8.1. Généralités	79
8.2. Écoulements plans irrotationnels d'un fluide incompressible	83
8.3. Écoulements élémentaires	85
8.4. Force et Moment	90
Chapitre 9. ÉCOULEMENT DES FLUIDES RÉELS	93
9.1. Introduction	93
9.2. Écoulements unidirectionnels	94
9.3. Écoulement à faible vitesse ou faible nombre de Reynolds	105
9.4. Lubrification Hydrodynamique	108
9.5. Expérience de Reynolds	112
Chapitre 10. ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE	115
10.1. Préambule	115
10.2. Analyse dimensionnelle	115
10.3. Théorème de Vaschy–Buckingham ou théorème des π	117
10.4. Paramètres sans dimensions	120
10.5. Similitude et théorie des maquettes	120
Chapitre 11. Couches limites	127
11.1. Introduction	127
11.2. Équations de la couche limite – théorie de Prandtl (1904)	127
11.3. Développement de la couche limite	130
11.4. L'épaisseur de la couche limite	135
11.5. Solutions approchées	137
11.6. Équation intégrale de von Kármán	138
Chapitre 12. Introduction à la turbulence	145
12.1. Préambule	145
12.2. Quelques caractéristiques d'écoulements turbulents ¹	148
12.3. Mouvement moyen et fluctuations en écoulement incompressible	150
12.4. Equations de mouvement et le tenseur de contraintes de Reynolds	151
12.5. Hypothèses pour les écoulements turbulents	155
Chapitre 13. Écoulements compressibles	165
13.1. Introduction	165
13.2. L'équation d'énergie et le premier et deuxième principe de la thermodynamique	165
13.3. Ondes sonors : propagation des petites perturbations de pression	166
13.4. Onde de choc en 1D : l'exemple d'un piston en mouvement	172
13.5. Onde de choc	174
13.6. Écoulement unidimensionnel isentropique	177
13.7. Résumé de relations d'écoulements isentropiques : Théorèmes de Hugoniot	185
Annexe A. Formules et Identités Vecorielles	187

Annexe B. Théorème de transport de Reynolds	189
Annexe C. Tenseur de contraintes, équations de mouvement ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$)	191
3.1. Coordonnées cartésiennes (x, y, z) avec (u, v, w)	191
Tenseur de contraintes	191
Équations de Navier–Stokes	191
Équation de la conservation de la masse	191
3.2. Coordonées cylindriques (r, θ, x) avec (v_r, v_θ, v_x)	192
Tenseur des contraintes	192
Équation de la conservation de la masse	192
Équation de Navier–Stokes	192
3.3. Coordonées sphériques (r, φ, θ) avec $(v_r, v_\varphi, v_\theta)$	193
Tenseur de contraintes	193
Équation de la conservation de la masse	194
Équation de Navier–Stokes	194
Annexe D. Équation de la conservation d'énergie	195

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1. GÉNÉRALITÉS

Un fluide est un milieu matériel continu qui *se déforme continuellement* sous l'action de la moindre force de cisaillement. Ce pourquoi on dit que le fluide s'écoule. Un fluide prend la forme du récipient avec les parois duquel il est en contact. Le mot fluide est synonyme de substance dont les éléments se mettent en mouvement avec une liberté totale (fluides idéaux, dits non visqueux) ou une liberté restreinte (fluides réels, dits visqueux).

En Mécanique des Fluides (des liquides ou des gaz) on considère l'écoulement des fluides du point de vue *macroscopique*, c'est-à-dire du point de vue de milieux continus. Dans ce cadre, bien qu'un élément du fluide soit composé d'un très grand nombre de molécules, c'est aux propriétés moyennes de cet élément macroscopiques que l'on s'intéresse.

Par *une particule de fluide* on entend dire un élément de fluide qui est infinitésimal au sens mathématique, c'est-à-dire assimilée à un point en analogie avec la notion de point matériel en mécanique rationnelle. Ainsi on admet qu'une particule de fluide a les mêmes propriétés en tous ses points. Nous nous limitons dans ce qui suit aux fluides *isotropes*, c'est-à-dire aux fluides dont les propriétés sont invariables dans toutes les directions.

Vu par un physicien, la Mécanique des Fluides constitue une branche de physique. En revanche, pour un mathématicien il s'agit d'une branche de mathématiques appliquées. Par ailleurs, vue les soucis d'applications d'ingénierie, l'ingénieur la voit comme une science qui s'appuie, en grande partie, sur l'expérience. En effet, la science de la mécanique des fluides est un ensemble constitué de tous ces composantes car La Science est un ensemble ordonné et systématique de connaissances établies par l'analyse théorique, l'observation et l'expérience. À vrai dire l'étude de La Mécanique des Fluides ne peut être effectuée en profondeur qu'avec une maîtrise considérable de mathématiques. En Mécanique des Fluides l'observation, l'expérience et la mathématiques sont aussi bien inséparables comme une cellule vivante et l'eau.

On appelle la branche de Mécanique, ou Mathématiques appliquées qui traite les lois du mouvement des fluides La Mécanique des Fluides. Dans le cas où le "fluide" signifie "liquide" (il s'agit en générale de l'eau), la Mécanique des Fluides devient la Mécanique des liquides, ou l'*hydromécanique*; en dynamique il s'agit alors de l'hydrodynamique¹. Lorsque "fluide" veut dire "gaz", on appelle la Mécanique des Fluides l'Aéromécanique; en dynamique on parle alors de l'Aérodynamique².

¹ *hydōr* = eau + *dynamikos* (force)

² *aēr* = air + *dynamikos* (force)

En Hydrodynamique on cherche d'établir des relations analytiques et théoriques entre les éléments cinématiques³ du mouvement, en l'occurrence l'écoulement, et les forces qui les produisent et maintiennent. L'Hydraulique⁴ est l'hydrodynamique dont le but est l'étude des lois de mouvement des liquides dans les tubes, les tuyauteries, les canaux, les coudes, et dans d'autres appareils d'ingénierie.

L'Aéromécanique se divise en Aérostatique, Aérodynamique Théorique, Aérodynamique Expérimental et la Mécanique de Vol.

En biomécanique, la mécanique des fluides traite l'écoulement du sang dans les veines et dans le coeur, elle traite aussi l'écoulement de l'air dans l'appareil respiratoire.

D'autres exemples de la mécanique des fluides sont fournis par la prédiction climatique et le champ magnétique.

1.2. LIQUIDE ET GAZ

Lorsqu'un solide est soumis à une force il subi une *déformation*. On dit que cette déformation est *élastique* si elle disparaît avec la disparition de la force et *plastique* dans le cas contraire où elle persiste.

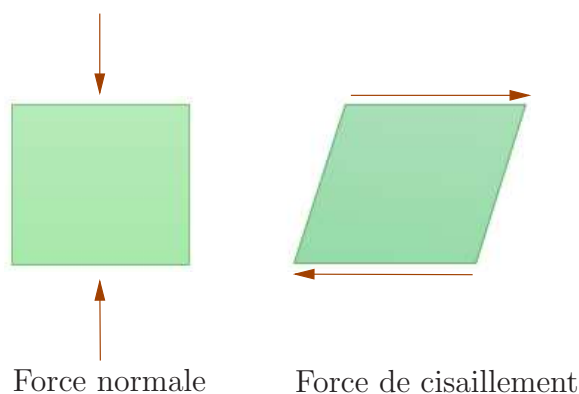


FIGURE 1.1. Forces normale et forces de cisaillement.

Par contre un fluide réel, c'est-à-dire visqueux, se déforme continuellement dès qu'il est soumis à la moindre force de cisaillement; on dit alors que le fluide s'écoule tout en résistant à la déformation. Par une force de cisaillement on entend dire une force tangentielle à la surface de l'élément fluide qui provoque un mouvement des couches voisines de fluide l'une par rapport aux autres.

On appelle *fluide parfait* tout fluide (*non-visqueux*) qui n'offre aucune résistance aux forces de cisaillement.

Un *liquide* est un fluide *pesant* dont la masse volumique varie peu avec la pression ainsi qu'avec la température et est usuellement supposée invariable. Par contre, la masse volumique d'un gaz varie beaucoup avec la pression et la température, et est suffisamment petite pour qu'on puisse, en général, négliger les effets dûs à la pesanteur; un *gaz* remplit tout le

³*kinēmatos* = mouvement

⁴*hydōr* = eau + *aulos* (tube)

volume du récipient qui le contient. Les gaz se distinguent de liquides par leur propriété d'*expansion*. On dit alors que les liquides sont à *compressibilité* très faible ou sont fortement *incompressible*; c'est pourquoi on dit que les liquides sont des fluides *incompressibles*. Contrairement aux liquides, la compressibilité des gaz est très élevée et on parle alors des fluides *compressible*.

1.2.1. Volume de contrôle. En Thermodynamique on fait recours à la notion du système thermodynamique comme une région de l'espace délimitée par une surface, dite surface de séparation qui peut être matérielle (réelle) ou imaginaire. Le système est constituée des éléments matériels étudiés subis au changement d'état provoqué par des échanges de masse, ou de chaleur et/ou de travail à travers la surface de séparation. En revanche, pour analyser le mouvement de fluide on isole dans la pensée une région (matérielle) géométrique et arbitraire $V(t)$, appelé volume de contrôle, délimitée par une surface matérielle $S(t)$ perméable aux particules fluides; $V(t)$ et $S(t)$ peuvent être fixes, mobiles et déformables dans l'écoulement.

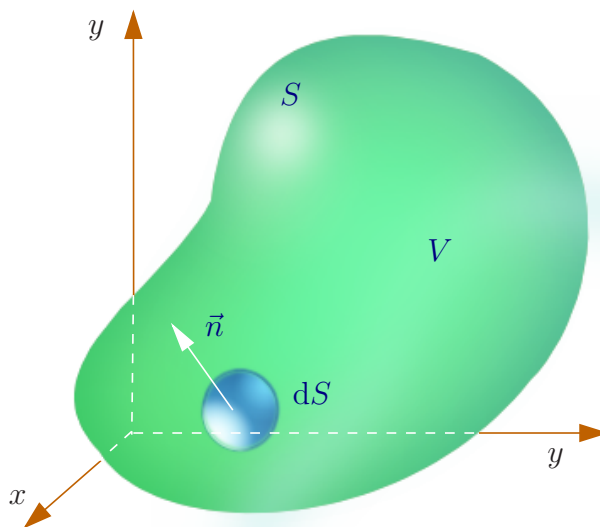


FIGURE 1.2. Volume de contrôle V délimité par une surface de contrôle S , \vec{n} est le normale extérieur à S .

1.2.2. Masse Volumique, Volume Spécifique, Compressibilité. Soit \mathcal{D} un domaine occupé par un milieu fluide et $P \in \mathcal{D}$ un point quelconque du milieu; soit δM la masse d'un élément infinitésimal du volume δV centré en P et enfermé par la surface δS . Alors, il existe à chaque instant t une fonction scalaire $\rho(P, t)$ continûment dérivable :

$$(P, t) \mapsto \rho(P, t) = \lim_{\substack{\delta V \rightarrow 0 \\ \delta M \rightarrow 0}} \frac{\delta M}{\delta V}, \quad \text{kg/m}^3 \quad (1.1)$$

appelée la masse volumique du milieu. Dans le cas de deux fluides non-miscibles (dit immiscibles), bien que ρ soit discontinue à la surface de séparation de deux fluides (qui

est une surface de discontinuité), elle est continûment dérivable sur chaque côté d'une telle surface. On définit de la même manière le volume spécifique v :

$$(P, t) \longmapsto v(P, t) = \lim_{\substack{\delta V \rightarrow 0 \\ \delta M \rightarrow 0}} \frac{\delta V}{\delta M}, \quad \text{m}^3/\text{kg}. \quad (1.2)$$

La compressibilité d'un fluide est définie par

$$\kappa = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad \text{m}^2/\text{N} \quad (1.3)$$

où T et p sont respectivement la température (K) et la pression thermodynamique (Nm^{-2}). Conformément à cette définition, on dit que l'écoulement est *incompressible* si la masse volumique de chaque particule fluide reste (presque) constante, et qu'il est *compressible* dans le cas contraire.

1.3. Forces extérieures

Toute particule ou domaine fluide est soumis à deux types de forces extérieures, forces ou actions à distance et actions de contact.

1.3.1. Forces à distance ou forces de champ. Il s'agit des forces qui se décroissent lentement avec la distance entre les éléments en interaction et dont l'effet est appréciable pour les distances caractéristiques de l'écoulement du fluide. Ces forces sont produites par des champs naturelles comme, par exemple, le champ de la pesanteur (force par unité de volume, $\rho \vec{g}$) ou les champs électromagnétiques. Les forces fictives induites par des référentiels en accélération telle que la force de centrifuge sont aussi classées parmi les forces à distance. Ces forces sont proportionnelles aux éléments de volume ou de masse et agissent de la même manière sur toutes les particules fluides d'un petit élément de volume. On appelle toutes ces forces *forces de volume (ou volumique)* ou *force de masse (ou massique)*.

En écrivant des équations de mouvement, on désigne en générale la force totale à l'instance t s'exerçant sur un élément de volume δV et centré en un point P dont le vecteur position est \vec{x} par

$$\vec{f}(\vec{x}, t) \rho \delta V; \quad (1.4)$$

ρ est la densité du fluide et $\vec{f}(\vec{x}, t)$ est la force massique. La force de la pesanteur par unité de masses s'écrit

$$\vec{f} = \vec{g} \quad (1.5)$$

où \vec{g} est l'accélération due la pesanteur.

Quant aux forces fictives, elles entrent en jeu quand le mouvement est analysé par rapport à un référentiel uniformément accéléré, les "forces d'inertie" telles que la force de Coriolis ($2\vec{v}_{\text{relative}} \wedge \vec{\omega}$) ou la force de centrifuge ($-\frac{1}{2}\omega^2 \vec{r}$) sont des forces fictives; $\vec{\omega}$ est le vecteur rotation du repère par rapport à un référentiel galiléen. La force de Coriolis est important en météorologie et dans la circulation océanique étudiée en dynamique des fluides géophysiques.

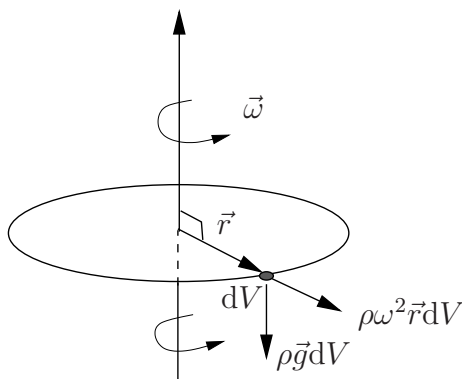


FIGURE 1.3. Forces de pesanteur et de centrifuge s'exerçant sur un élément de volume dV .

1.3.2. Forces de contact. Il s'agit des forces d'origine moléculaire qui se décroissent extrêmement rapidement avec la distance entre les éléments en interaction de sorte qu'elles n'entrent en jeu que sur une distance du même ordre de grandeur que la distance séparant les molécules de fluide. Ces forces ne se font apparaître que lors de *contact direct* entre les éléments et ne s'exercent que sur la *surface de contact*. La force de pression p (contrainte normale à la surface) ou la force de cisaillement (contrainte de cisaillement agissant parallèlement à la surface) sont des exemples de forces de contact et sont exprimées en fonction de leur densité surfacique.

Pour comprendre comment ces forces agissent sur un fluide, on considère un domaine \mathcal{D} délimitée par la surface $\partial\mathcal{D}$, voir la figure 1.4. Les particules fluides à l'extérieures de \mathcal{D} exercent des actions sur les particules à l'intérieur de $\partial\mathcal{D}$. Quand on note que l'orientation de toute partie de la surface $\partial\mathcal{D}$ dépend de sa position, on se rend compte assez vite qu'il est inutile de chercher une expression pour les forces de contact en fonction de leur effet total sur un élément fluide à volume finit. Il sera plutôt judicieux de focaliser l'attention sur un élément de surface *plane* A interceptée par le domaine \mathcal{D} ; A divise alors \mathcal{D} en deux sous domaines \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 . La force totale de contact s'exprime maintenant comme la force exercée par le fluide en \mathcal{D}_2 sur le fluide en \mathcal{D}_1 à travers un élément δA , de la surface plane A , vu de \mathcal{D}_1 , et centré en $P(\vec{x}, t)$; la force totale est proportionnelle à l'aire de cet élément δA et à la valeur de force de contact par unité de surface à l'instance t , $\vec{\Sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t)$, soit :

$$\vec{\Sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t) \delta A, \quad (1.6)$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normale extérieure à δA .

On appelle *contrainte* locale la force de contact $\vec{\Sigma}$. Compte tenu du troisième principe de Newton, le principe d'action et réaction, la force exercée par le fluide en \mathcal{D}_1 sur le fluide en \mathcal{D}_2 à travers δA (vu maintenant de \mathcal{D}_2) est

$$-\vec{\Sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t) \delta A. \quad (1.7a)$$

Cette force est aussi égale à

$$\vec{\Sigma}(-\vec{n}, \vec{x}, t) \delta A \quad (1.7b)$$

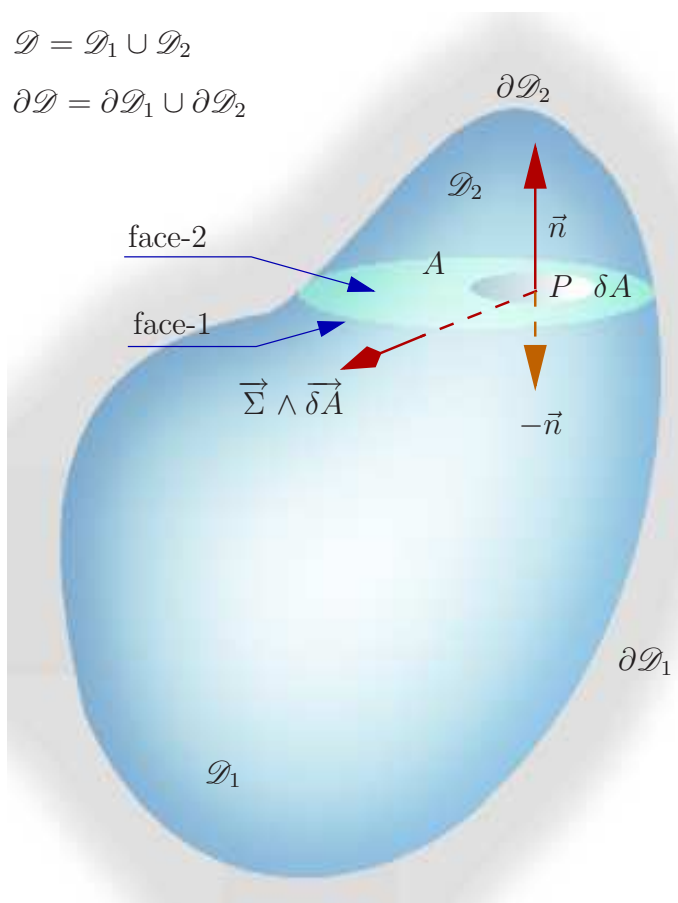


FIGURE 1.4. Esquisse pour les définitions de contraintes à travers un élément de surface, dS .

ce qui implique que $\vec{\Sigma}$ est une fonction impaire, c'est à dire :

$$-\vec{\Sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t) \delta A = \vec{\Sigma}(-\vec{n}, \vec{x}, t) \delta A. \quad (1.7c)$$

1.3.3. Représentation de $\vec{\Sigma}$ par le tenseur de contraintes. Pour mettre en évidence comment $\vec{\Sigma}$ dépend de l'orientation de \vec{n} , on considère maintenant un petit élément de fluide sous la forme d'un tétraèdre aux arêtes orthogonales à son sommet P comme montré sur la figure 1.5. Par rapport à une base orthonormée directe $\mathcal{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, le vecteur unitaire normale extérieure, l'aire et la force de contact associés à chacune des faces du tétraèdre

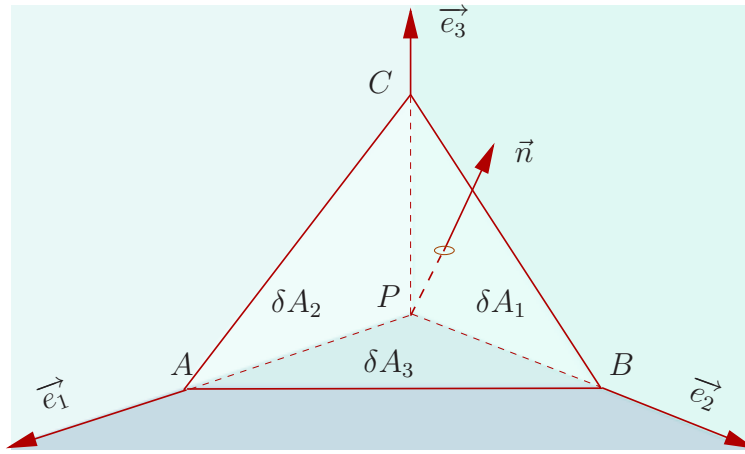


FIGURE 1.5. Un élément de fluide de volume tétraèdre aux trois faces orthogonales.

sont donnés par :

Face	Aire	normale extérieure	Force de contact
ABC	δA	\vec{n}	$\vec{\Sigma}(-n)\delta A$
BPC	$\delta A_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{n} \delta A$	$-\vec{e}_1$	$\vec{\Sigma}(-\vec{e}_1)\delta A_1$
CPA	$\delta A_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{n} \delta A$	$-\vec{e}_2$	$\vec{\Sigma}(-\vec{e}_2)\delta A_2$
APB	$\delta A_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{n} \delta A$	$-\vec{e}_3$	$\vec{\Sigma}(-\vec{e}_3)\delta A_3$

au premier ordre d'approximation, où $\vec{\Sigma}(-\vec{e}_i)$ désigne la contrainte locale s'exerçant sur l'élément de surface δA_i .

Selon le principe fondamentale de la dynamique, l'équation de mouvement de l'élément tétraèdre est donnée par :

$$\text{densité} \times \text{accélération} \times \delta V = \text{forces volumiques} \times \delta V \\ + \vec{\Sigma}(\vec{n})\delta A + \vec{\Sigma}(-\vec{e}_1)\delta A_1 + \vec{\Sigma}(-\vec{e}_2)\delta A_2 + \vec{\Sigma}(-\vec{e}_3)\delta A_3$$

En remplaçant δA_i par $\delta A \vec{e}_i \cdot \vec{n}$, et puis en divisant par δA , on obtient :

$$\vec{0} = \vec{0} + \vec{\Sigma}(\vec{n}) + \vec{\Sigma}(-\vec{e}_1)\vec{e}_1 \cdot \vec{n} + \vec{\Sigma}(-\vec{e}_2)\vec{e}_2 \cdot \vec{n} + \vec{\Sigma}(-\vec{e}_3)\vec{e}_3 \cdot \vec{n}$$

quand $(\delta V/\delta A) \rightarrow 0$.

Ensuite, en utilisant $\vec{\Sigma}(-\vec{e}_i) = -\vec{\Sigma}(\vec{e}_i)$ on obtient le vecteur

$$\vec{\Sigma}(\vec{n}) = \vec{\Sigma}(\vec{e}_1)\vec{e}_1 \cdot \vec{n} + \vec{\Sigma}(\vec{e}_2)\vec{e}_2 \cdot \vec{n} + \vec{\Sigma}(\vec{e}_3)\vec{e}_3 \cdot \vec{n} \quad (1.8a)$$

dont l' $i^{\text{ème}}$ composante dans la base \mathcal{B} est donnée par

$$\Sigma_i(\vec{n}) = \Sigma_i(\vec{e}_1)n_1 + \Sigma_i(\vec{e}_2)n_2 + \Sigma_i(\vec{e}_3)n_3 = \Sigma_i(\vec{e}_j)n_j \quad (1.8b)$$

où n_j est la $j^{\text{ème}}$ composante de \vec{n} dans la base \mathcal{B} .

Notons à ce stade que les vecteurs \vec{n} et $\vec{\Sigma}$ ne dépendent en aucune manière du choix de la base \mathcal{B} , qui est arbitraire. Il vient alors que l'expression

$$\Sigma_i(\vec{e}_j)$$

représente l'élément (i, j) dans \mathcal{B} , d'une *grandeur objective*, c'est-à-dire, indépendante du choix de base. Autrement dit, $\Sigma_i(\vec{e}_j)$ est un élément d'un tenseur d'ordre 2, disons σ_{ij} , défini par :

$$\Sigma_i(\vec{n}) = \Sigma_i(\vec{e}_j)n_j = \sigma_{ij}n_j. \quad (1.9)$$

Résumons : σ_{ij} est la $i^{\text{ème}}$ composante de la force de contact par unité de surface s'exerçant à travers un élément de surface plane normale à la direction \vec{e}_j , et associée à l'instant t , à la position \vec{x} dans le milieu fluide. On appelle *tenseur de contraintes* le tenseur $\vec{\sigma}$ auquel appartient σ_{ij} .

La force $d\vec{F}$ exercée par le fluide sur un élément plan de surface d'une frontière solide, $d\vec{S}$, et orienté par la normale extérieure \vec{n} est aussi donnée par

$$d\vec{F} = \vec{\sigma} \cdot d\vec{S} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}dS \quad \text{ou} \quad dF_i = \sigma_{ij}n_jdS = \sigma_{ij}dS_j$$

où \cdot désigne le produit scalaire entre un tenseur et un vecteur.

1.3.4. Propriétés de tenseur de contraintes.

1.3.4.1. Symétrie du tenseur de contrainte.

Soit V un petit volume de fluide centré en O et délimité par la surface S . Les forces de surface dues au fluide à l'extérieur de V s'exercent un moment sur le fluide à l'intérieur de V :

$$\int_S \vec{r} \wedge d\vec{F},$$

où \vec{r} est le vecteur position relativement à O , et $d\vec{F}$ la force de contact appliquée sur un élément de surface dS ; cette force s'écrit comme

$$d\vec{F} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}dS$$

et l'expression de moment de forces extérieures à V devient

$$\int_S \vec{r} \wedge d\vec{F} = \int_S \vec{r} \wedge (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) dS.$$

L'application du théorème de convergence à cette expression conduit à

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{r} \wedge (\vec{\sigma} \cdot \vec{n})) dV$$

dont l' $i^{\text{ème}}$ composante est donnée par

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_l} (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}) dV$$

où nous avons posé $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Maintenant, si on utilise le symbole de Kronecker,

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_l} = \delta_{jl}, \quad \delta_{jl} = 1 \quad \text{si} \quad j = l, \quad \delta_{jl} = 0 \quad \text{sinon},$$

on obtient

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \left(\sigma_{kj} + x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} \right) dV. \quad (1.10)$$

Analysons cette expression quand $dV \rightarrow 0$. À cette fin soit σ l'ordre de grandeur des éléments du tenseur de contraintes et δ le rayon moyen de V par rapport à O . Alors, $V \sim O(\delta^3)$, c'est à dire V est d'ordre δ^3 . Le premier terme dans l'expression (1.10) est d'ordre

$$\sigma \delta^3$$

tandis que le deuxième est d'ordre

$$(\sigma/\Delta x)\delta^4.$$

Dans cette expression Δx représente la distance sur laquelle σ_{ij} subit un changement appréciable, par exemple de zéro à σ . D'où

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \left(\sigma_{kj} + x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} \right) dV = \underbrace{\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} dV}_{O(\delta^3)} + \underbrace{\int_V \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} dV}_{O(\delta^4)}$$

Si on écrit maintenant l' $i^{\text{ème}}$ composante de l'équation de moment pour l'élément V , on obtient :

$$\underbrace{\int_V [\vec{r} \wedge (\text{densité} \times \text{accélération})]_i dV}_{O(\delta^4)} = \underbrace{\int_V [\vec{r} \wedge (\text{forces volumiques})]_i dV}_{O(\delta^4)} + \underbrace{\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} dV}_{O(\delta^3)} + \underbrace{\int_V \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} dV}_{O(\delta^4)}$$

Par la suite, on déduit en divisant cette équation par δ^3 que le premier, deuxième et quatrième termes tendent vers zéro quand $\delta \rightarrow 0$ ce qui impose que

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = \sigma_{jk} - \sigma_{kj} = 0,$$

quelque soit l'élément de volume V . On vient ainsi de démontrer que le tenseur de contraintes est symétrique, et n'a que six composantes indépendantes.

Les trois composantes diagonales de σ_{ij} sont des *contraintes normales* dont chaque élément constitue la composante normale de force de contact agissant à travers un élément plan de surface parallèle à un plan du système référentiel.

Les six éléments non diagonaux de σ_{ij} sont des *contraintes de cisaillement* induites par un mouvement de cisaillement ou par un déplacement relatif des couches parallèles de milieu continue.

1.3.4.2. *Le tenseur de contraintes dans un fluide au repos.* On sait que tout tenseur σ_{jk} possède des axes principaux de symétrie dans lesquels il s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} \end{pmatrix}$$

et que la somme des éléments diagonaux de tout tenseur est invariante (indépendante de la base relatif à laquelle il est exprimée), soit :

$$\sigma'_{ii} = \sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii}$$

Pour dégager certaines propriétés du tenseur de contraintes, il est commode de le décomposer en un tenseur isotrope et un tenseur dit *déviateur* :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\sigma_{ii} \end{pmatrix}}_{\text{tenseur isotrope}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma'_{11} - \frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} - \frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} - \frac{1}{3}\sigma_{ii} \end{pmatrix}}_{\text{tenseur déviateur}}$$

Ainsi le tenseur de contraintes s'exprime sous la forme :

$$\frac{1}{3}\sigma_{ii} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma'_{11} - \frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} - \frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} - \frac{1}{3}\sigma_{ii} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

On sait que tout milieu solide supporte à la fois des forces de compression et de traction (tension), mais il supporte mieux les premières que les deuxièmes. En revanche, un fluide supporte facilement les forces de compression mais supporte très mal les force de traction même pour des liquides sous des conditions expérimentales soigneusement préparées ; *un fluide se disperse en générale sous l'action de la moindre force de traction.*

En générale, le signe du terme isotrope σ_{ii} est négatif et par conséquent il s'agit d'une *pression uniforme*, en tout point P , dans toutes les directions.

En ce qui concerne le tenseur déviateur, le deuxième terme dans (1.11), il est impérative qu'il soit constitué à la fois des éléments aux signes négatif et positif car la somme des éléments diagonaux est nulle compte tenu de la décomposition du tenseur de contraintes.

Pour fixer les idées on considère maintenant un petit élément sphérique d'un fluide au repos. Première constat : en tout évidence un tel élément peut supporter une pression uniforme comme celle fournit par la composante isotrope du tenseur de contraintes, et peut en conséquence être comprimé tout en gardant une forme sphérique. Deuxième : pour un fluide au repos, la composante déviateur s'exercerait au moins une contrainte de compression dans une direction et au moins une contrainte de traction (tension) dans une autre direction car la somme des éléments diagonaux est nulle. Conséquence : un élément fluide ne peut pas résister à de telles contraintes et doit subir par conséquent une déformation ce qui

transforme la sphère en un ellipsoïde : autrement dit l'élément se mettrait en mouvement ce qui est en contradiction avec le fait que le fluide est repos. Conclusion : la composante déviateur de contraintes *doit* s'annuler pour tout fluide au repos.

Conclusions :

(a) Pour un fluide au repos le tenseur de contraintes se réduit à

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

ou

$$\overleftrightarrow{\sigma} = -p \overleftrightarrow{\mathbb{I}} \quad (1.12)$$

où p est la pression de fluide et $\overleftrightarrow{\mathbb{I}}$ un tenseur unité.

(b) La composante déviateur de tenseur de contraintes dépend de mouvement et lié à la viscosité de fluide et aux forces de cisaillement. Ces forces s'annulent pour un fluide au repos.

Quand on se rappelle qu'en Thermodynamique l'état d'un fluide à l'équilibre est défini par une relation appelée *équation d'état*, écrite en générale, sous la forme :

$$f(p, \rho, T) = 0. \quad (1.13)$$

on se rend compte que p peut être considérée comme une variable "statique" caractéristique de l'état du fluide.

Lorsque le fluide est visqueux et en mouvement, le tenseur de contraintes prend la forme suivante :

$$\begin{array}{c} \overleftrightarrow{\sigma} \\ \uparrow \\ \text{tenseur} \\ \text{de contraintes} \end{array} = - \begin{array}{c} p \\ \uparrow \\ \text{pression} \end{array} \overleftrightarrow{\mathbb{I}} + \begin{array}{c} \overleftrightarrow{\tau} \\ \uparrow \\ \text{tenseur} \\ \text{de contraintes} \\ \text{visqueuses} \end{array} \quad (1.14a)$$

ou

$$\begin{array}{c} \sigma_{ij} \\ \uparrow \\ \text{tenseur} \\ \text{de contraintes} \end{array} = - \begin{array}{c} p \\ \uparrow \\ \text{pression} \end{array} \delta_{ij} + \begin{array}{c} \tau_{ij} \\ \uparrow \\ \text{tenseur} \\ \text{de contraintes} \\ \text{visqueuses} \end{array} . \quad (1.14b)$$

1.4. Tenseur de contraintes et la notion de viscosité

En fluide, les contraintes dépendent de la vitesse de la déformation et de ce qu'on appelle *la viscosité*. Isaac Newton suggéra une expérience pour mesurer la résistance de fluide au mouvement. Dans l'expérience on considère l'écoulement visqueux dans l'espacement entre deux plaques planes de grandes envergures, parallèles et séparées par une petite distance δ comme montré sur la figure 1.6. Une plaque est fixe et l'autre mobile dans son propre plane

à une vitesse constante $U\vec{x}$. On observe pour des nombreux fluides, tel que l'air et l'eau, que la vitesse entre les deux plaques varie linéairement de zéro à U d'une plaque à l'autre :

$$v_x(y) = \left(\frac{y}{\delta}\right) U \quad (1.15)$$

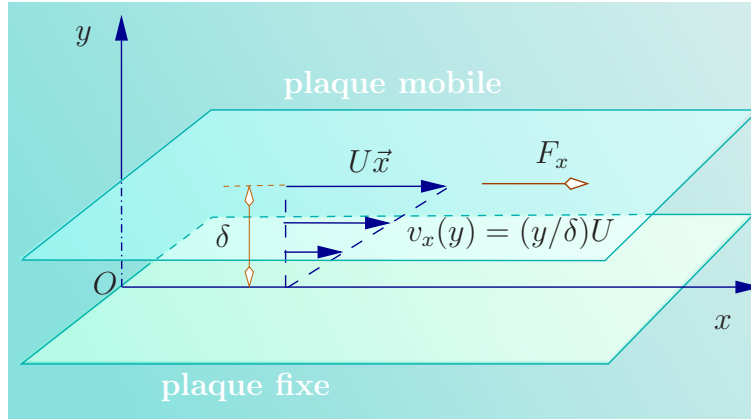


FIGURE 1.6. Écoulement de cisaillement simple.

L'expérience de Newton suggéra que la force F_x nécessaire pour maintenir la plaque mobile en mouvement (ici, la plaque supérieure) est directement proportionnelle à la vitesse relative ainsi qu'à l'aire A de la plaque, et inversement proportionnelle à la distance δ :

$$\frac{F_x}{A} = \mu \left(\frac{U}{\delta}\right). \quad (1.16a)$$

On appelle *viscosité dynamique* le coefficient de proportionnalité μ ; la viscosité dynamique est une propriété du fluide et dépend en général de la température.

La force qui s'exerce sur la plaque inférieure par le fluide est

$$\left(\frac{F_x}{A}\right)_{\text{plaque } y=0} = \mu \left(\frac{U}{\delta}\right) = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \tau_{xy} \quad (1.16b)$$

et sur la plaque supérieure

$$\left(\frac{F_x}{A}\right)_{\text{plaque } y=\delta} = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (1.16c)$$

L'unité de μ dans le système SI est le Pascal.seconde (Pa.s), soit :

$$1 \text{ Pa.s} = \text{N/m}^2 \cdot \text{s} = \text{kg.m/s}^2 \cdot 1/\text{m}^2 \cdot \text{s} = \text{kg}/(\text{m.s})$$

C'est pourquoi on appelle *fluide Newtonien* tout fluide qui se déforme de cette manière. Il existe des fluides dont le comportement est différent et peuvent, par exemple, supporter une contrainte de cisaillement τ_0 avant de se mettre en mouvement tels que les matières plastiques et les fluides dénomés *fluides de Bingham*. Pour le premier catégorie la variation

des contraintes de cisaillement est non-linéaire avec les gradients de vitesse tandis que pour le deuxième elle est linéaire et décrite par :

$$\tau_{xy} = \tau_0 + \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (1.17)$$

On appelle *fluide non Newtonien* toute matière fluide qui n'obéissent pas à la loi de Newton, tels que des miels, des huiles lourdes, des boues, des solutions de polymère, ainsi que les poudres comme les sels ou les sables.

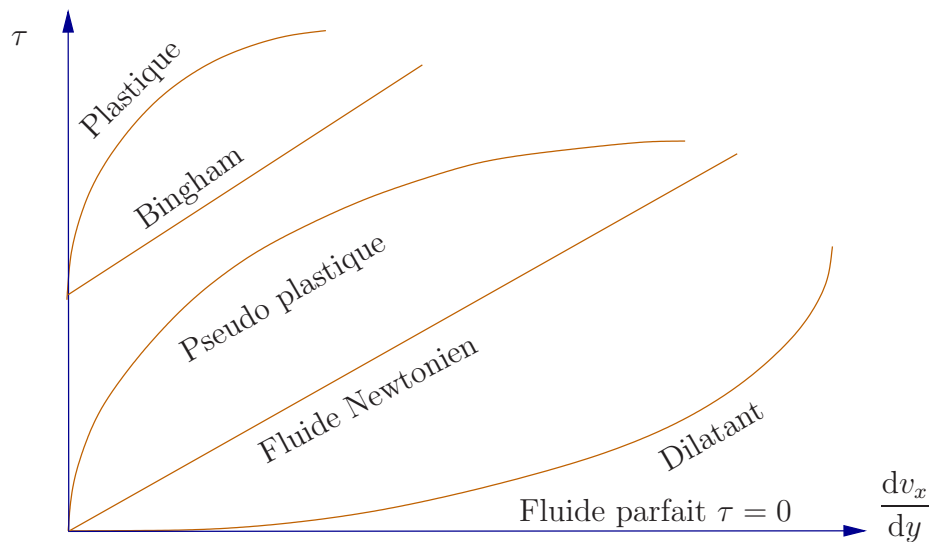


FIGURE 1.7. Comportement de la contrainte de cisaillement pour des fluides Newtoniens et non-Newtoniens.

1.5. Statique des fluides

1.5.1. Pression hydrostatique et force volumique. On utilise le terme *hydrostatique* pour décrire la mécanique des fluides en équilibre : c'est-à-dire, pour décrire la statique des fluides. Le principe fondamental de la dynamique nous renseigne que le mouvement d'un milieu matériel contenu dans un volume V , et soumise aux forces extérieures $\Sigma \vec{F}$, obéit au deuxième principe de Newton :

$$\text{masse} \times \text{accélération} = \text{Somme des forces extérieures}$$

Soit un fluide de densité ρ , contenu dans V , en mouvement à la vitesse \vec{U} par rapport à un référentiel galiléen. Alors :

$$\int_V \rho \frac{d\vec{U}}{dt} dV = \Sigma \vec{F} \quad (1.18a)$$

Au cas d'équilibre statique par rapport au référentiel, la vitesse de toute particule est nulle, conduisant ainsi à

$$0 = \Sigma \vec{F} \quad (1.18b)$$

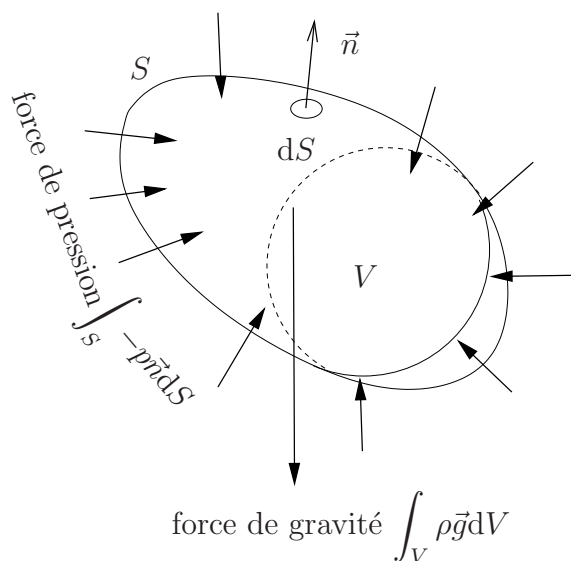


FIGURE 1.8. Un élément du fluide au repos.

En général,

$$\Sigma \vec{F} = \text{Forces de surface} + \text{Forces volumiques} + \text{Forces fictives} \quad (1.18c)$$

et puisque le fluide est au repos relativement à un repère galiléen, il n'est assujetti en fait qu'aux forces suivantes :

$$\begin{aligned} \text{force de pression : } & \int_S (-\vec{n}p) dS, & \text{force surfacique} \\ \text{force de pesanteur : } & \int_V \rho\vec{g} dV, & \text{force volumique} \end{aligned}$$

dont la résultante est nulle :

$$\int_S (-\vec{n}p) dS + \int_V \rho\vec{g} dV = \vec{0} \quad (1.18d)$$

$$\text{soit : } \int_V (-\nabla p + \rho\vec{g}) dV = \vec{0} \quad (1.18e)$$

$$\text{d'où : } -\nabla p + \rho\vec{g} = \vec{0} \quad (1.18f)$$

car V est arbitraire.

Selon (1.18d), la force de pression \vec{F}_p exercée par un fluide, à densité constante, sur un corps du volume V dans lequel il est plongé est donnée par

$$\begin{aligned}\vec{F}_p &= \int_S (-\vec{n}p) \, dS \\ &= - \int_V \rho \vec{g} \, dV \\ &= -\rho \vec{g} \int_V dV = -\rho \vec{g} V = \underbrace{(\rho g V)}_{\substack{\uparrow \\ \text{poids du fluide} \\ \text{déplacé par } V}} \vec{z}\end{aligned}$$

On appelle \vec{F}_p , qui est orientée selon la verticale ascendante, *force de poussée* ou *force de flottement*. Cela traduit le *principe d'Archimède* :

Tout corps immergé dans un fluide est soumis à une force de poussée orientée dans la direction de la verticale ascendante qui est égale au poids du volume de fluide déplacé par le corps.

On appelle cette force *force d'Archimède*.

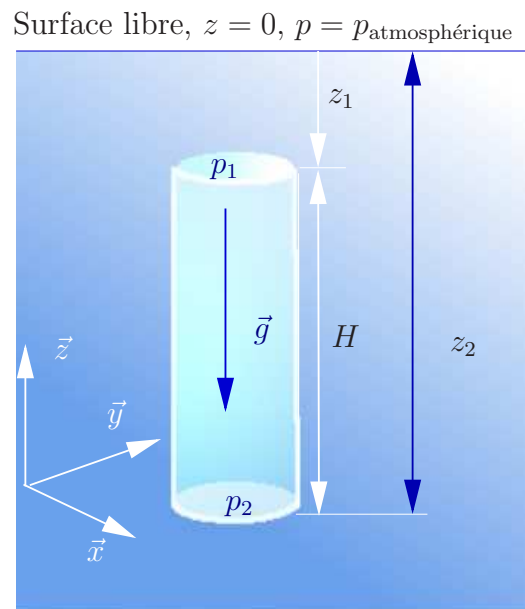


FIGURE 1.9. Cylindre de fluide pesant en équilibre.

Si on se place maintenant dans un référentiel équipé des coordonnées cartésiennes (x, y, z) , avec l'axe des z orienté le long de la verticale ascendante, l'équation (1.18f) s'écrit alors sous

la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (1.19a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (1.19b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (1.19c)$$

car $\vec{g} = -g\vec{z}$. On conclut immédiatement des équations (1.19a,b) que :

la pression p est constante dans tout plan horizontal x - y .

On appelle la pression p , définie dans (1.19), *pression hydrostatique*.

L'intégration de (1.19c) conduit à

$$p_2 - p_1 = \rho g(z_1 - z_2) = \rho gH \quad (1.20)$$

pour un fluide à densité constante, qui peut être vue comme une application du principe d'Archimède à une parcelle cylindrique de fluide de hauteur $H = z_1 - z_2$ et de densité uniforme ρ . En multipliant par S , l'aire de la section droite du cylindre, on obtient

$$S \times (p_2 - p_1) = \text{force de flottement} = S \times (\rho gH) = \text{poids du fluide dans le cylindre}$$

L'équation (1.20) exprime en fait la distribution de pression d'un fluide en équilibre à densité uniforme écrite sous la forme :

$$p + \rho gz = \text{constant} = p(z = 0). \quad (1.21)$$

1.5.1.1. *Forces hydrostatiques*. L'analyse de tout système des forces requiert à la fois le calcul de la résultante ainsi que le moment par rapport à un axe donné, ce pourquoi la notion du torseur a été introduit. Cherchons donc à déterminer le torseur de forces hydrostatiques s'exerçant sur une surface solide S immergée dans un fluide pesant.

On sait que la force \vec{dF} appliquée par le fluide sur un élément $dS \in S$ est donnée par

$$\vec{dF} = -p \vec{n} dS, \quad \text{d'où} \quad \vec{F} = \int_S (-p \vec{n}) dS \quad \text{avec} \quad p(z) = p_0 - \rho gz$$

où p_0 est la pression à la surface libre en $z = 0$.

Le point d'application G de cette force sur S , dit *centre de poussée*, est donné par

$$\vec{OG} \wedge \int_S (-p \vec{n}) dS = \int_S \vec{OM} \wedge (-p \vec{n}) dS \quad (1.22)$$

où M est un point matériel de la surface S , et O un point de référence.

En guise d'illustration, soit une paroi plane S immergée dans un liquide comme schématisée sur la figure 1.10. Alors, la force par unité de surface appliquée par le liquide à tout point $M \in S$ est $-\vec{n}p$ tandis que celle appliquée par la pression atmosphérique p_0 à la face non-mouillée est $-(\vec{n})p_0$. Ainsi la force nette s'exerçant par unité de surface sur la paroi est $-\vec{n}(p - p_0) = \vec{n}\rho gz > 0$, car $z < 0$. Soit \vec{s} un vecteur unitaire tangente à S indiquant l'angle

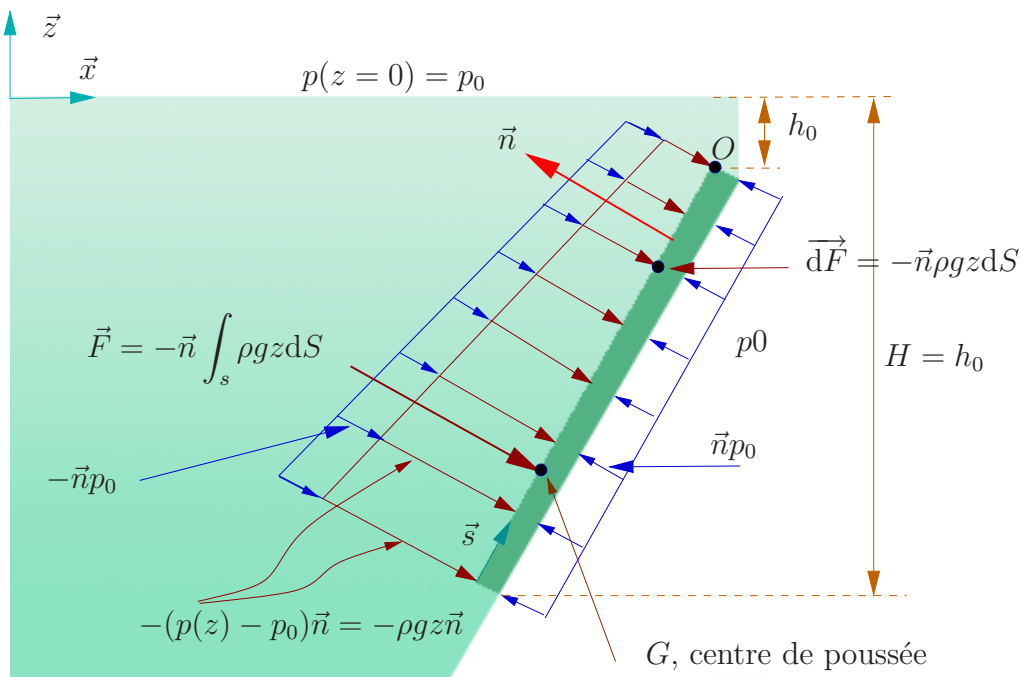


FIGURE 1.10. Surface immergée dans un liquide et soumise aux forces de pression.

fait par S avec l'horizontal : $\vec{x} \cdot \vec{s} = \cos \alpha$. Si S est rectangulaire, $A = \ell \times L$ avec L compté dans la direction horizontale, l'aire d'un élément de surface est

$$dS = L \times dl = L \times dz / \sin \alpha.$$

Alors, on a pour la force hydrostatique :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_S \vec{n} \rho g z dS \\ &= \vec{n} \rho g \int_{z=-h_0-\ell \sin \alpha}^{z=-h_0} z(L \times dz) / \sin \alpha \\ &= (\rho g L / \sin \alpha) \vec{n} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=-h_0-\ell \sin \alpha}^{z=-h_0} \\ &= \frac{1}{2} (\rho g L / \sin \alpha) \vec{n} (-2h_0 \ell \sin \alpha - \ell^2 \sin^2 \alpha) \\ &= -\frac{1}{2} \rho g L \ell (\ell \sin \alpha + 2h_0) \vec{n} = -\frac{1}{2} \rho g A (H + h_0) \vec{n} = -F \vec{n} \end{aligned}$$

où

$$F = \rho g A h_c \quad \text{avec} \quad h_c = \frac{1}{2} (H + h_0)$$

pour une surface plane.

Pour déterminer le centre de poussée, on applique la formule (1.22) :

$$\overrightarrow{OG} \wedge (-\vec{n}F) = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge (-\vec{n}\rho g z dS)$$

avec $\overrightarrow{OM} = (z/\sin \alpha)(-\vec{s})$ et $\overrightarrow{OG} = OG(-\vec{s})$:

$$\begin{aligned} OG \times F(\vec{n} \wedge \vec{s}) &= \int_S (\vec{n} \wedge \vec{s})(z/\sin \alpha)\rho g z dS \\ &= \int_{z=-h_0-\ell \sin \alpha}^{z=-h_0} (\vec{n} \wedge \vec{s})(z/\sin \alpha)\rho g z \times (L \times dz/\sin \alpha) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} OG &= \frac{\rho g L \int_{z=-h_0-\ell \sin \alpha}^{z=-h_0} z^3 dz / \sin^2 \alpha}{F} \\ &= (\rho g L / F \sin^2 \alpha) \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_{z=-h_0-\ell \sin \alpha}^{z=-h_0} \\ &= (\rho g L / 3F \sin^2 \alpha) (3h_0^2 \ell \sin \alpha + 3h_0 \ell^2 \sin^2 \alpha + \ell^3 \sin^3 \alpha) \\ &= (\rho g L / 3F \sin^2 \alpha) (3h_0 \ell \sin \alpha H + \ell^3 \sin^3 \alpha) \\ &= (\rho g A / 3F \sin \alpha) (3h_0 H + \ell^2 \sin^2 \alpha) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{3h_0 H + \ell^2 \sin^2 \alpha}{H + h_0} \right) \end{aligned}$$

Pour une paroi verticale avec $h_0 = 0$: $H = \ell$, et par conséquent on obtient

$$OG = \frac{2}{3} \ell = \frac{2}{3} H$$

1.5.2. Fluide en rotation uniforme. Un fluide en rotation uniforme est au repos lorsque vu d'un repère en rotation avec le fluide. La rotation uniforme est équivalent à une "force d'inertie", qui est une force fictive, égale à une force de centrifuge $\rho \omega^2 \vec{r}$ où ω est la vitesse de rotation d'un système des coordonnées cylindriques (r, θ, z) , avec \vec{r} le vecteur position relativement à l'axe de rotation, z , voir la figure 1.11a. Dans ce cas le terme $\rho \omega^2 \vec{r}$ s'ajoute, selon (1.18c), au premier membre de l'équation (1.18f) qui se transforme en :

$$\underbrace{-\nabla p}_{\text{force de pression}} + \underbrace{\rho \vec{g}}_{\text{force de pesanteur}} + \underbrace{\rho \omega^2 \vec{r}}_{\text{force de centrifuge}} = \vec{0}. \quad (1.23a)$$

Écrite en coordonnées cylindriques, cette équation conduit à

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad (1.23b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r, \quad (1.23c)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad (1.23d)$$

dont la solution est :

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z \quad (1.23e)$$

où p_0 désigne la pression atmosphérique à la surface libre, $z = \zeta$; l'équation de ζ est obtenue de (1.23e) en posant $p = p_0(z = \zeta, r)$:

$$g\zeta = \frac{1}{2} \omega^2 r^2$$

qui est une équation d'hyperbole comme montré sur la figure 1.11a.

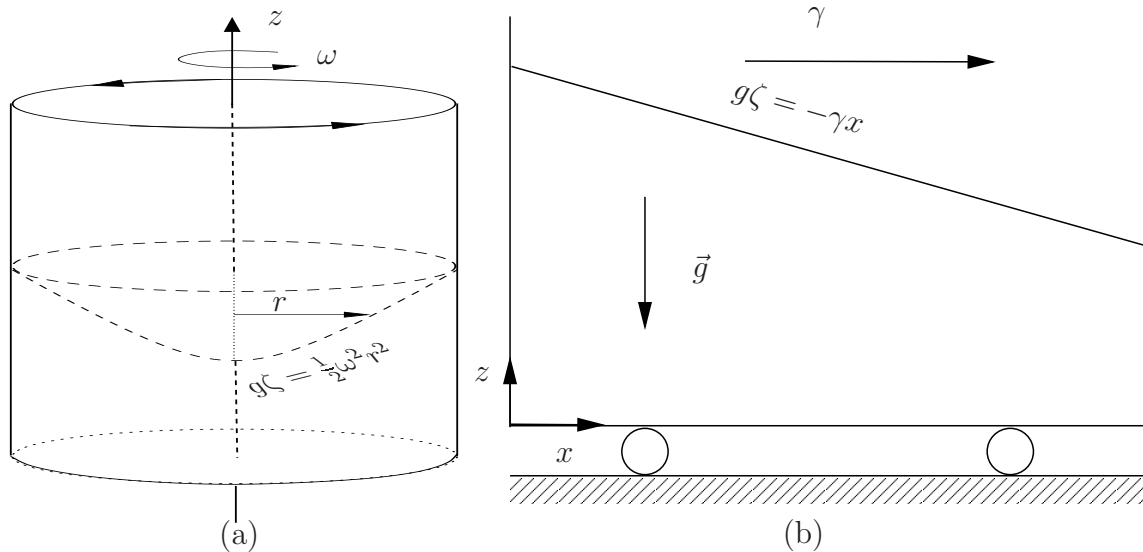


FIGURE 1.11. (a) Fluide dans un cylindre en rotation uniforme, (b) fluide dans un réservoir en accélération uniforme.

1.5.2.1. *Fluide en mouvement à accélération uniforme.* Considère un fluide dans un réservoir mis en mouvement à accélération uniforme $\vec{\gamma}$, par exemple, parallèlement à l'axe des x , voir la figure 1.11b. Le fluide, vu relativement à un repère lié au réservoir, est en

équilibre (au repos) régis par l'équation

$$\begin{array}{ccccccc}
 -\rho\vec{\gamma} & & -\nabla p & + & \rho\vec{g} & = & \vec{0} & (1.24a) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & \\
 \text{force (d'inertie) fictive} & & \text{force de pression} & & \text{forces de pesanteur} & & &
 \end{array}$$

dont la projection dans sur les axes (x, y, z) donne :

$$-\gamma - \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (1.24b)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (1.24c)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0. \quad (1.24d)$$

La solution est

$$p(x, z) = p_0 - \rho g z - \rho \gamma x \quad (1.24e)$$

où p_0 désigne la pression atmosphérique régnant à la surface libre définie par $z = \zeta(x)$, dont l'équation est

$$g\zeta = -\gamma x \quad (1.24f)$$

1.6. Sommaire

Fluide. On appelle fluide tout milieu matériel et continu qui se déforme continuellement sous l'action de la moindre force de cisaillement.

Volume de contrôle. On appelle *volume de contrôle* toute région géométrique $V(t)$, matérielle et arbitraire, délimitée par une surface matérielle $S(t)$ perméable aux particules fluides, isolée dans la pensée pour analyser le mouvement du fluide. Un volume de contrôle peut être déformable, mobile ou fixe.

Force volumique - force à distance. Il s'agit d'une force (par unité de volume), telle que la force de pesanteur $\rho\vec{g}$, s'exerçant sur tout volume fluide.

Force surfacique - force de contact. Il s'agit des forces (par unité de surface) d'origine moléculaire qui s'exercent sur les frontières de tout élément fluide. On parle alors de la pression (contrainte normale) qui est toujours positive $p > 0$, et les contraintes de cisaillement qui s'exercent parallèlement à toute surface frontière.

Tenseur de contraintes. Toute surface fluide est soumise aux contraintes (force par unité de surface). Ces forces surfaciques constituent les éléments σ_{ij} de tenseur de contraintes composé d'une partie isotrope et une partie déviatrice.

Équilibre hydrostatique. Un fluide est dit en équilibre hydrostatique s'il est au repos rapport un repère fixe ou mobile mais à accélération uniforme. Dans le deuxième cas une force fictive s'ajoute aux forces de pression et de pesanteur.

La force hydrostatique \vec{F} exercée sur une surface plane d'aire $A = \ell \times L$, avec L horizontale, immergée dans un liquide est

$$\vec{F} = \rho g A h_c, \quad h_c = \frac{1}{2}(h_0 + H)$$

dont le point d'application G est donné par

$$OG = \frac{2}{3} \left(\frac{3h_0H + \ell^2 \sin^2 \alpha}{H + h_0} \right),$$

α étant l'angle d'inclinaison de A à l'horizontale.

Masse de liquide en mouvement uniformément accéléré. L'analyse de l'équilibre hydrostatique s'étend aussi à tout mouvement de liquide uniformément accéléré lorsque vu d'un référentiel γ lié. L'équation régissant l'équilibre est alors donnée par

$$\nabla p = \rho (\vec{g} - \vec{\gamma}) \quad (1.25)$$

où $\vec{\gamma}$ est l'accélération uniforme de masse du liquide.

CHAPITRE 2

CINÉMATIQUE DES FLUIDES

Dans la cinématique des fluides on s'intéresse au mouvement des fluides indépendamment des forces qui le produisent et maintiennent. En mécanique du solide *indéformable* la vitesse \vec{v}_p à tout point matériel P est déterminé dès que l'on dispose du vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}$ et le vecteur vitesse \vec{v}_o en un point quelconque, O :

$$\vec{v}_p = \vec{v}_o + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP} \quad (2.1)$$

En fluide, par contre, le problème est plus compliqué mais le mouvement reste, néanmoins, calculable pourvu que deux éléments fluides ne peuvent occuper la même position au même instant.

Pour fixer les idées nous considérons un élément fluide infinitésimalement petit dénommé une particule fluide. La vitesse relative de toute partie de cet élément est négligeable car toute particule fluide est assimilée à un point géométrique.

En général, la vitesse d'une particule fluide est une fonction de temps t et de ces coordonnées en $P(x_1, x_2, x_3)$. On distingue deux cas simples de mouvement :-

- (a) Un mouvement *permanent* dans lequel la vitesse à tout instant, en tout point P fixe dans l'espace, ne dépend que de ses coordonnées.
- (b) Un mouvement est dit *uniforme* à un instant donné lorsque toutes les particules ont la même la vitesse. Un mouvement uniforme pourrait aussi être permanent.

Notons que pour le cas (a), un mouvement qui est permanent relativement à un repère donné pourrait être non-permanent par rapport à un autre repère.

2.1. Vitesse et Trajectoire de Particule

Soit $\overrightarrow{v(\vec{r}, t)}$ la vitesse d'une particule fluide dont le vecteur position, à l'instant t , est \vec{r} par rapport un référentiel galiléen. La vitesse de particule, définie par

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \overrightarrow{v(\vec{r}, t)}, \quad (2.2)$$

fournit sa trajectoire à tout autre instant t . On désignera par (x_0, y_0, z_0) la position de particule à l'instant $t = 0$.

Pour mettre en valeur certaines notions nécessaire pour la description du mouvement, nous commençons par l'examen de quelques exemples.

2.1.1. Exemples de trajectoires.

(1) $\vec{v} = (ay, -ax, 0)$, $a \in \mathbb{R}$.

La trajectoire de particule est donnée par

$$\frac{dx}{dt} = ay, \quad \frac{dy}{dt} = -ax, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Il est immédiat que les premières deux équations se réduisent soit à

$$\frac{dy}{dx} = -x/y$$

ou soit à

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0.$$

La solution de ce système est :

$$\begin{cases} x = y_0 \sin at + x_0 \cos at, \\ y = z_0 \cos at - x_0 \sin at, \\ z = z_0. \end{cases}$$

En éliminant t on trouve

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 = \text{constante}, \\ z = z_0, \end{cases}$$

ce qui montre que la trajectoire est un cercle dans le plane $z = z_0$.

Exercice : Traitez l'exemple précédent en coordonnées cylindriques.

(2) $\vec{v} = (ay, -a(x - bt), 0)$, $(a, b) \in \mathbb{R}$

La trajectoire est définie par les équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ay, \\ \frac{dy}{dt} = -a(x - bt), \\ \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$$

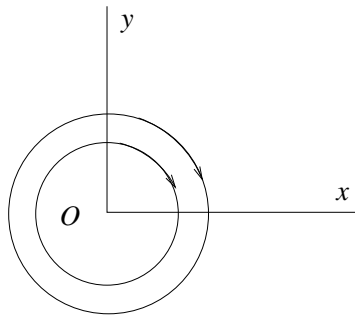
qui se réduisent à

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = a^2bt, \\ ay = \frac{dx}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} = 0. \end{cases}$$

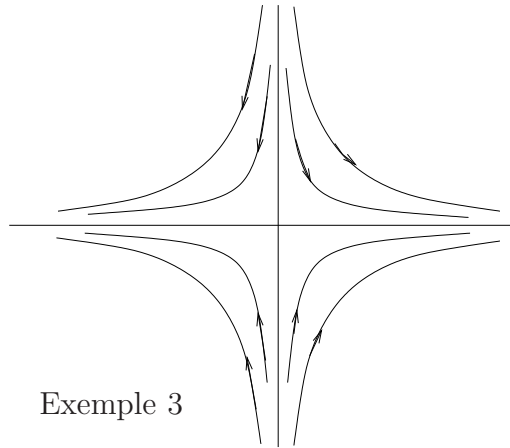
La solution de la première équation nous permet d'en déduire celle de la deuxième :

$$\begin{cases} x = (y_0 - b/a) \sin at + x_0 \cos at + bt, \\ y = (y_0 - b/a) \cos at - x_0 \sin at + b/a, \\ z = z_0. \end{cases}$$

La trajectoire est donc un mouvement circulaire du rayon $[(y_0 - b/a)^2 + x_0^2]^{1/2}$ centré en $(bt, b/a, z_0)$.



Exemple 1



Exemple 3

$$(3) \vec{v} = (a(t)x, -a(t)y, 0)$$

La trajectoire a pour équations

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(t)x, \\ \frac{dy}{dt} = -a(t)y, \\ \frac{dz}{dt} = 0. \end{cases}$$

Les deux premières équations nous permettent de calculer dy/dx :

$$\frac{dy}{dx} = -y/x,$$

dont la solution est : $xy = \text{constante}$, et $z = z_0$ comme avant. La variation de x et de y au cours du temps est :

$$x = x_0 \exp\{A(t)\}, \quad y = y_0 \exp\{-A(t)\}$$

où $A(0) = 0$ et $dA/dt = a(t)$.

2.1.2. Définitions. Les trois exemples précédents nous permettent d'introduire quelques définitions.

2.1.2.1. *Écoulement bidimensionnel.* Dans un système approprié de coordonnées on peut exprimer pour un écoulement donné, les composantes de vitesse v_x et v_y indépendamment de z avec $v_z = 0$; les autres variables, telles que la masse volumique, la température et la pression, sont aussi supposées indépendantes de z . Les trois exercices précédents décrits des écoulements bidimensionnels pour le champs de vitesse. En pratique, il n'existe pas d'écoulement qui sont exactement bidimensionnels, mais avec un dessin expérimental soigneusement conçu, on peut arriver à une approximation satisfaisante. Notons aussi que certains écoulements naturels peuvent être supposés bidimensionnels.

2.1.2.2. *Écoulement permanent, dit stationnaire.* Dans un tel écoulement la vitesse, la masse volumique ainsi que les autres grandeurs physiques, sont indépendantes de t . L'écoulement décrit par l'exemple (1) est stationnaire pour la vitesse. Par contre, ceux des exemples (2) et (3) ne sont pas stationnaires.

► **REMARQUE 2.1 :** Dans un écoulement stationnaire, la position d'une particule fluide dépend du t . Il en est du même pour un écoulement instationnaire. Des écoulements stationnaires peuvent être réalisés expérimentalement, et sont mathématiquement moins difficile à étudier. ◀

2.1.2.3. *Un point d'arrêt.* On appelle un point d'arrêt tout point où $\vec{v} = \vec{0}$. Dans les exemples (1)-(3) les points $(0, 0, z)$ sont des points d'arrêt.

2.1.2.4. *Description Eulérienne.* La vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$ en un point fixe de l'espace varie au cours du temps t . Évidemment cela correspond aux arrangements expérimentaux utilisés au laboratoire où les appareils de mesures sont fixes, c'est-à-dire y liés au même sens que le laboratoire au référentiel galiléen. Dans cette description la vitesse est une fonction de la position de mesure et du temps, c'est-à-dire (\vec{r}, t) :

On appelle (\vec{r}, t) les variables d'Euler.

Par ailleurs, il est parfois utile de suivre une particule fluide dans son mouvement pour pouvoir connaître ce qui aurait lieu dans son voisinage; par exemple dans l'écoulement atmosphérique, on s'intéresse plutôt à l'histoire d'une masse d'air au cours de son mouvement pour pouvoir estimer s'il y aurait de pluie ou de neige (par exemple), qu'à la séquence des masses d'air qui passent sur un point de mesure météorologique. Et cela est en dépit du fait que tout les deux sont liés. Cela nous amène à la description Lagrangienne.

2.1.2.5. *Description Lagrangienne.* Dans cette description on s'intéresse aux grandeurs physiques associées à une particule donnée au cours de son mouvement. Ainsi, la vitesse est exprimée par

$$\vec{v}(\vec{r}(\vec{r}_0, t), t) \equiv \vec{v}(\vec{r}_0, t)$$

où \vec{r}_0 est la position de la particule à l'instant $t = 0$. La description lagrangienne est difficile car on doit suivre toutes les particules dans leurs mouvements, mais il est souvent fructueux de considérer l'histoire de vie de particule fluide afin de comprendre l'écoulement. Dans l'atmosphère on utilise un ballon-sonde pour l'acquisitions de données type Lagrangiennes, tandis que dans les courants estuariens on utilise de sondes flottants.

On appelle (\vec{r}_0, t) les variables de Lagrange.

Considérons l'exemple (3) avec $a(t) = \text{constante}$. La trajectoire de particule, dans ce cas, est

$$x = x_0 e^{at}, \quad y = y_0 e^{-at}, \quad z = z_0$$

ce qui est une description Lagrangienne car elle dépend de la position initiale. Pour calculer la vitesse en coordonnées Lagrangienne on cherche la dérivée par rapport au temps t avec $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ fixe car il s'agit de la même particule :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)_{\vec{r}_0} \\ &= (ax_0 e^{at}, -ay_0 e^{-at}, 0). \end{aligned}$$

Maintenant, considérons l'accélération :

- (i) Description Lagrangienne : $(\partial \vec{v} / \partial t)_{\vec{r}_0} = (a^2 x_0 e^{at}, a^2 y_0 e^{-at}, 0) = a^2 \vec{r}$;
- (ii) Description Eulérienne : $(\partial \vec{v} / \partial t)_{\vec{r}} = \vec{0}$ car $\vec{v} = (ax, -ay, 0)$ ne contient pas t explicitement.

Il est immédiat que ‘la particule s’accélère, mais le courant, lui même, demeure à vitesse constante’. Par exemple, considère une pièce de bois (un rondin) emportée par le courant d’une rivière ayant une section rapide : la pièce s’accélère dès qu’elle entre dans la section rapide. D’une manière approchée, ce comportement représente une accélération Lagrangienne car on suit le rondin, la ‘particule’, dans son mouvement. Mais un observateur se trouvant au bord du rivièrre verrait une succession de rondins passant devant lui à la même vitesse, simplement parce que le courant, dans sa totalité, ne s’accélère pas : l’accélération Eulérienne à un point fixe, *en ce qui concerne cet exemple*, est égale à zéro.

2.1.3. Lignes de courant. Tubes de courant. Pour visualiser un écoulement donné, supposez qu’il existe un nombre important de particules marquées d’une manière appropriée : prenez deux photos à deux instants successifs séparé par *un petit intervalle*, et puis les superposez l’une sur l’autre. Il vous est possible maintenant de dessiner une flèche liant la première et deuxième position de chaque particule. Cet ensemble des flèches indique alors un ensemble de courbes appelées *lignes de courants*, qui sont différentes de *trajectoires*. Pour tracer ces dernières on a besoin d’un grand intervalle du temps; pour cela on pourrait faire un film permettant de suivre les particules dans leur mouvement. Pourtant, dans le cas d’un écoulement permanent (stationnaire), les deux courbes se confondent.

2.1.3.1. *Définitions.* À un instant t_0 fixe, on appelle *ligne de courant* toute courbe dont la tangente en chacun de ses points est parallèle au vecteur vitesse. La tangente en (x_1, x_2, x_3) est parallèle à $d\vec{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$. Alors, si $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dénote le vecteur vitesse en ce point, on tire alors que $d\vec{x} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, soit

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t_0)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t_0)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t_0)}. \quad (2.3)$$

Les lignes de courant sont fournies par ces équations. Puisque la vitesse en un point donné

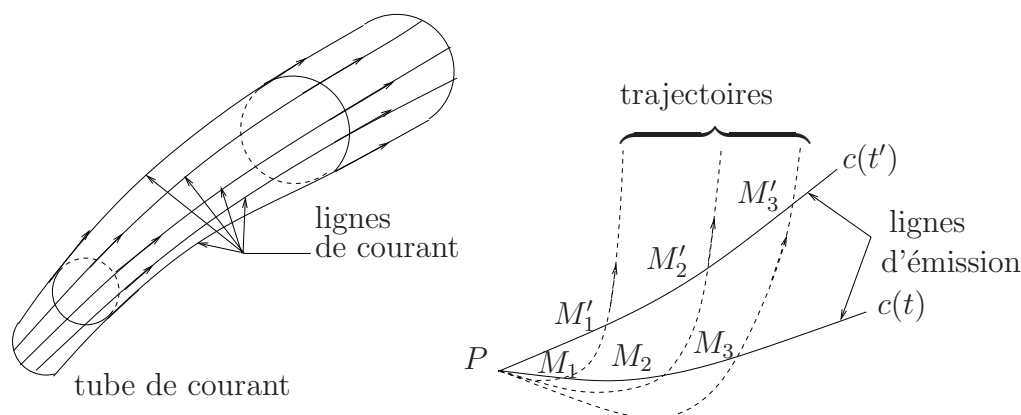


FIGURE 2.1. Tube de courant, trajectoires, lignes d’émission

change en général avec le temps, il vient alors que les lignes de courant, elles aussi, changent avec le temps.

Soit \mathcal{C} une courbe tracée dans le milieu fluide. On appelle *surface de courant* la surface engendrée par les lignes de courant qui s'appuient sur \mathcal{C} , si elles existent. Dans le cas où \mathcal{C} est une courbe fermée, on appelle une telle surface *tube de courant*.

On appelle *lignes d'émission* les courbes tracées, à l'instant t , par toutes les particules qui ont passé par un point P .

On appelle *trajectoire* le lieu des positions successives d'une particule au cours du temps :

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)} = dt. \quad (2.4)$$

L'intégration de (2.4) fait apparaître *trois constantes* qui sont déterminées par identifiant la particule en question en se donnant sa position initiale \vec{r}_0 .

2.2. La dérivée matérielle (ou particulaire)

Dans la description Eulérienne, la variation d'une fonction scalaire $F(\vec{r}, t)$ dérivable au cours du temps est constituée de deux parties : une variation locale liée à la position où se trouve la particule à l'instant donné, et une variation provenant de son mouvement en espace. Soit \vec{r} la position de la particule à l'instant t et $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ celle à l'instant $t + \Delta t$. Notons la limite du taux de variation de la fonction F par dF/dt . Alors :

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) - F(\vec{r}, t)}{\Delta t}, \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(\vec{r}, t + \Delta t) - F(\vec{r}, t)}{\Delta t} + \frac{F(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) - F(\vec{r}, t + \Delta t)}{\Delta t} \right\} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial F}{\partial t} + O(\Delta t) + \frac{\text{grad}F(\vec{r}, t + \Delta t) \cdot \Delta\vec{r} + O(\Delta r^2)}{\Delta t} \right\} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\text{grad}F(\vec{r}, t + \Delta t) \cdot [\vec{v}(\vec{r}, t)\Delta t + O(\vec{v}^2\Delta t^2)]}{\Delta t} \right\} \\ &= \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}}_{\text{variation locale}} + \underbrace{\vec{v} \cdot \text{grad}F}_{\text{variation due à la convection}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

On appelle la dérivée (2.5) *dérivée matérielle* ou *dérivée particulaire* car il s'agit de la dérivée associée à une particule lors de son mouvement.

Pour étendre la notion de dérivée matérielle à une fonction vectorielle, il suffit d'appliquer la formule (2.5) aux trois composantes de cette fonction.

Appliquons cette formule à l'accélération $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Par définition on a

$$\vec{\gamma}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) - \vec{v}(\vec{r}, t)}{\Delta t}$$

qui est la dérivée matérielle de \vec{v} . D'après (2.5) on trouve pour les composantes : $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$:

$$\gamma_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3}, \quad (2.6a)$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \quad (2.6b)$$

$$\gamma_3 = \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3}. \quad (2.6c)$$

Avec la convention de la sommation sur l'indice répété on peut écrire ($i = 1, 2, 3$) :

$$\gamma_j = \frac{\partial v_j}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i}. \quad (2.7a)$$

La formule (2.6) peut s'écrire sous la forme vectorielle

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}, \quad (2.7b)$$

ou

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{rot} \vec{v} \times \vec{v} + \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 \right), \quad (2.7c)$$

dite *expression de Helmholtz*, où l'opérateur $\nabla = \overrightarrow{\text{grad}}$.

CHAPITRE 3

CONSERVATION DE LA MASSE

3.1. Équation de continuité

Une loi fondamentale de la mécanique est la conservation de la masse. Pour fixer les idées on considère d'abord un fluide de densité ρ en écoulement à vitesse uniforme \vec{v} à toute section S d'un tube de courant ou d'une conduite à section variable. Les sections S_1 , S_2 et S_3 , qui délimitent les parcelles du fluide P_1 et P_2 , parcourent respectivement les petites distances $v_1\delta t$, $v_2\delta t$ et $v_3\delta t$ pendant l'intervalle δt . En conséquent la région occupée par le parcelle P_1 change en occupant un nouvel volume $S_2v_2\delta t$, balayé par S_2 , et en libérant un volume $S_1v_1\delta t$ balayé par S_1 . Le *taux du changement* de la masse de P_1 est constitué alors de deux termes : une contribution positive du volume additionnel $+\rho S_2v_2\delta t$ et une contribution négative du volume libéré $-\rho S_1v_1\delta t$. Comme la masse de P_1 est nécessairement conservée, on onclu alors qu'à tout instant

$$v_1S_1 = v_2S_2 \quad (3.1a)$$

où les deux membres représentent le taux instantané du débit volumique dans la conduite. De la même manière on peut montrer que

$$v_2S_2 = v_3S_3$$

et par conséquent on tire

$$v_1S_1 = v_2S_2 = v_3S_3 = vS. \quad (3.1b)$$

Cette équation montre que $v_1 > v_2 > v_3$ car $S_1 < S_2 < S_3$.

Pour exprimer cette loi sous forme différentielle, on considère maintenant un volume V fixe dans l'espace et enfermé par une surface dérivable S . Le débit massique de fluide entrant dans V est

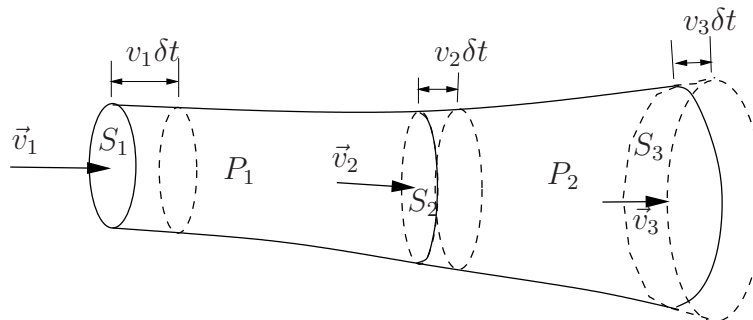


FIGURE 3.1. Écoulement dans une conduite à section variable de S_1 à S_3 avec $S_1 < S_2 < S_3$; la vitesse étant supposée uniforme à toute section S .

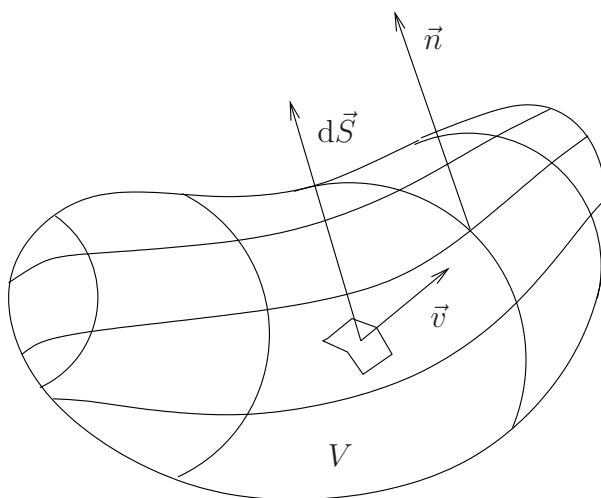


FIGURE 3.2. Volume de contrôle V fixe dans l'espace par rapport à un référentiel galiléen; \vec{n} est le vecteur unitaire normale extérieur à S .

$$\text{Flux massique} = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S},$$

le signe négatif indiquant que $d\vec{S}$ est compté positivement vers l'extérieur de V , car $d\vec{S} = \vec{n} dS$ où \vec{n} est le vecteur normal unitaire extérieur à S . Le taux d'accroissement de la masse dans V est

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

et comme V est fixe dans l'espace on déduit que

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Or, la conservation de la masse implique

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

soit

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (3.2a)$$

qui est l'équation de continuité sous forme intégrale.

En utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradsky (dit théorème de la divergence), (3.2a) s'écrit sous la forme

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right\} dV = 0, \quad (3.2b)$$

qui est valable quelque soit V . Ainsi, on tire l'équation de continuité sous forme différentielle :

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$	Équation de continuité (3.2c)
---	--

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.2d)$$

Compte tenu de la dérivée matérielle (2.5), on peut calculer le taux Lagrangienne (en suivant toute particule dans son mouvement) en fonction des mesures Eulériennes, soit :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho$$

et de (3.2d), l'équation de continuité prend la forme :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (3.3)$$

On conclut alors que pour une particule à masse volumique constante lors de son mouvement l'équation (3.3) se réduit à :

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{v} = 0} \quad \text{Équation de continuité : écoulement incompressible} \quad (3.4)$$

qui est l'équation de continuité pour un fluide (ou un écoulement) incompressible.

3.2. Fonction de courant pour un écoulement bidimensionnel

Pour étudier les implications engendrées par l'équation de continuité pour un fluide incompressible, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, nous commençons par souligner les conséquences suivantes :

- (i) En utilisant le théorème de la divergence, on déduit que l'équation $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ implique que le débit volumique total à travers toute surface fermée est nul :

$$\int_V \nabla \cdot \vec{v} dV = \oint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

- (ii) Il existe une analogie avec les champs électrostatiques où $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ sauf pour des charges ponctuelles.
 (iii) La variation temporelle dans l'équation de continuité a disparu ce qui conduit à des simplifications considérables. Pourtant $\vec{v}(\vec{r}, t)$ peut varier avec le temps t .

Considérons maintenant des écoulements où il n'y a que deux composantes non-nulles de vitesse associées seulement à deux coordonnées.

- (1) Écoulements bidimensionnels,

$$\vec{v} = u(x, y)\vec{i} + v(x, y)\vec{j}$$

ou

$$\vec{v} = v_r(r, \theta)\vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta,$$

où \vec{i} et \vec{j} sont les vecteurs unitaires dans les coordonnées Cartésiennes (x, y) , et \vec{e}_r et \vec{e}_θ sont ceux dans le système polaire (r, θ) .

- (2) Écoulements axi-symétriques,

$$\vec{v} = v_r(r, z)\vec{e}_r + v_z(r, z)\vec{k},$$

dans le système cylindrique polaire de coordonnées (r, θ, z) .

3.2.1. Éxistence de la fonction de courant. Un écoulement bidimensionnel est défini par :

$$\begin{cases} \vec{v} = u(x, y)\vec{i} + v(x, y)\vec{j}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

dont la deuxième équation est identiquement satisfaite par

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

pour toute fonction $\psi(x, y)$ continûment dérivable. Ce résultats rappelle la notion de force conservatrice où

$$F_1(x, y)\vec{i} + F_2(x, y)\vec{j},$$

munie de la propriété

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0,$$

se dérive d'une fonction potentielle $\phi(x, y)$ tel que

$$F_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Mettons ce résultat dans un contexte plus général. Soit $\overrightarrow{A(x, y)}$ la fonction vectorielle

$$\overrightarrow{A(x, y)} = \psi(x, y)\vec{k}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \vec{A} &= \nabla \wedge (\psi(x, y)\vec{k}) \\ &= (\nabla \psi) \wedge \vec{k} \quad \text{car } \vec{k} \text{ est constant} \\ &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}, 0 \right) \\ &= \vec{v}. \end{aligned}$$

Soit \vec{B} une fonction vectorielle continûment dérivable tel que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Alors, il existe une fonction vectorielle \vec{A} définie par

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}.$$

On appelle \vec{A} un 'vecteur potentiel' associé à \vec{B} .

Dans l'exemple précédent, le vecteur potentiel $\psi\vec{k}$ est particulièrement utile car il a une composante seulement. On appelle cette composante '*la fonction de courant*' de l'écoulement.

3.2.1.1. *Propriétés de la fonction de courant.* La fonction de courant est étroitement liée aux lignes de courant. Puisque

$$\vec{v} = \nabla \psi \wedge \vec{k}$$

on déduit que \vec{v} est alors orthogonale à $\nabla \psi$ et que $\nabla \psi$ est perpendiculaire à toute courbe (ou surface en trois dimensions) donnée par

$$\psi = \text{constante}.$$

On conclut alors que \vec{v} est parallèle à une telle courbe en chacun de ses points, et par conséquent ces courbes représentent des lignes de courant.

Considérons maintenant deux lignes de courant $\psi = a$ et $\psi = b$ dans le plan xy . Soit $ABCD$ un rectangle de hauteur unité dont l'aire est S et la normale est comptée dans la direction de l'écoulement, avec $AB = DC = 1$, voir la figure 3.3. Alors, le débit volumique à travers $ABCD$ est

$$\int_S \vec{v} \cdot d\vec{S},$$

soit

$$\int_S \nabla \wedge (\psi \vec{k}) \cdot d\vec{S},$$

qui, d'après le théorème de Stokes, devient

$$\oint_{\ell} \psi \vec{k} \cdot d\vec{\ell},$$

où la direction de l'intégration est indiquée par les flèches sur $ABCD$. On peut facilement calculer cette intégrale :

$$\begin{cases} \text{sur } AB & \psi = b \text{ et } \vec{k} \cdot d\vec{\ell} = dl, \\ \text{sur } BC \text{ et } DA & \vec{k} \cdot d\vec{\ell} = 0, \\ \text{sur } CD & \psi = a \text{ et } \vec{k} \cdot d\vec{\ell} = -dl, \end{cases}$$

où $d\vec{\ell}$ est le vecteur d'un élément infinitésimale sur la contour $ABCD$. Donc le débit, par unité d'hauteur entre les lignes de courant $\psi = a$ et $\psi = b$ est

$$\int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = b - a$$

car le rectangle est de hauteur unité. Par conséquent, l'écoulement devient autant plus rapide que les lignes de courant s'approchent l'une de l'autre. De plus, les lignes de courant ayant différentes valeurs de ψ ne se coupent que dans un point de singularité de l'écoulement.

Revenons maintenant à la forme générale de ψ et essayons de l'interpréter comme un débit de l'écoulement. Soit \mathcal{C} une courbe arbitraire liant les points A et P comme montré sur la figure 3.4. Alors, on a pour le débit traversant la base AB par unité de hauteur

$$-\int_a^x v(\xi, b) d\xi,$$

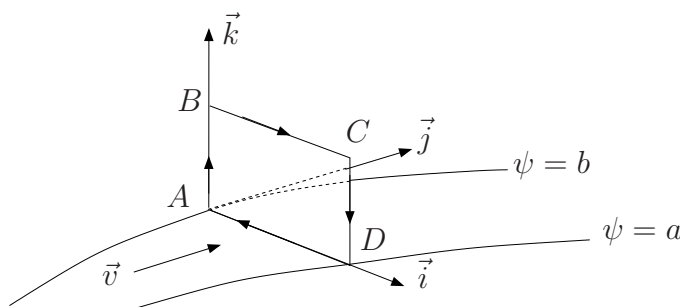


FIGURE 3.3. Écoulement à travers un rectangle de hauteur unité.

et celui à travers le côté BP

$$\int_b^y u(x, \eta) d\eta.$$

En conséquence le débit total prend la forme

$$\begin{aligned} - \int_a^x v(\xi, b) d\xi + \int_b^y u(x, \eta) d\eta &= - \int_a^x \left(-\frac{\partial\psi(\xi, b)}{\partial\xi} \right) d\xi + \int_b^y \frac{\partial\psi(x, \eta)}{\partial\eta} d\eta \\ &= \int_a^x d\psi(\xi, b) + \int_b^y d\psi(x, \eta) \\ &= \psi(x, b) - \psi(a, b) + \psi(x, y) - \psi(x, b) \\ &= \psi(x, y) - \psi(a, b) \\ &= \psi(x, y) \end{aligned}$$

où nous avons posé $\psi(a, b) = 0$ car \mathcal{C} est arbitraire. Par déplacement de l'origine, on déduit immédiatement que le débit à travers une courbe (dérivable) quelconque qui lie le point (c, d) à (x, y) est

$$\psi(x, y) - \psi(c, d)$$

par unité de hauteur. Cela représente l'interprétation la plus révélatrice de la fonction de courant ψ .

On aurait peut aboutir au même résultat en cherchant le débit traversant une courbe \mathcal{C} quelconque. Soit ds un élément infinitésimal appartenant à la courbe \mathcal{C} , \vec{t} un vecteur unitaire parallèle à ds et \vec{n} le vecteur normal à ds tel que $\vec{n} = \vec{k} \wedge \vec{t}$. Alors le débit Q par

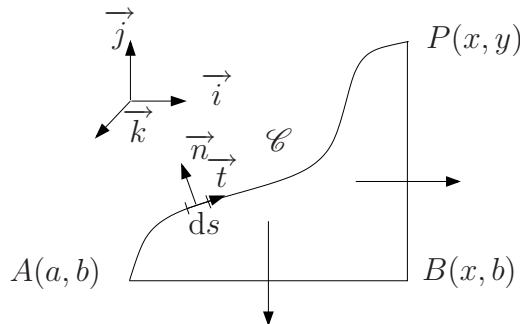


FIGURE 3.4. Écoulement à travers une courbe arbitraire, vue d'en haut.

unité d'épaisseur est égale à

$$\begin{aligned}
 - \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \vec{n} ds &= - \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot (\vec{k} \wedge \vec{t}) ds \\
 &= - \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot (\vec{k} \wedge (i dx + j dy)) \\
 &= - \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot (j dx - i dy) \\
 &= \int_{\mathcal{C}} (u dy - v dx) \\
 &= \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) \\
 &= \int_{\mathcal{C}} d\psi = \psi(x, y) - \psi(a, b)
 \end{aligned}$$

pour la courbe $A(a, b) \rightarrow P(x, y)$.

3.2.1.2. *Fonction de courant pour les écoulements axi-symétriques.* Considérons maintenant la classe d'écoulements axi-symétriques, dits écoulements tourbillonnaires. En coordonnées cylindriques le vecteur vitesse pour cette classe d'écoulements s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{v} = v_r(r, z) \vec{e}_r + v_z(r, z) \vec{k}.$$

(a) **L'existence de la fonction de courant :** Dans ce cas l'équation de continuité s'écrit sous la forme¹

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_z)}{\partial z} = 0. \quad (3.5)$$

Il vient alors que $r\vec{v}$ dérive d'une fonction de courant, comme dans le cas d'un écoulement plan, car les équations ont la même forme. D'où

$$\begin{cases} rv_z = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \\ rv_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \end{cases} \quad (3.6)$$

On appelle Ψ la fonction de courant de Stokes.

Vous pouvez vérifier que

$$\Psi(r, z) = \int_a^s sv_z(s, z) ds - \int_c^z av_r(a, \zeta) d\zeta,$$

et que le vecteur potentiel en coordonnées cylindriques polaires s'écrit sous la forme

$$\vec{v} = \nabla \wedge (r^{-1} \Psi \vec{e}_\theta). \quad (3.7)$$

¹Équation de continuité en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

Il est possible de calculer le vecteur potentiel en coordonnées sphériques à partir de cette équation . Notons qu'en coordonnées sphériques

$$\begin{cases} r \text{ représente } \textit{maintenant} \text{ la distance mesurée de } O, \\ \text{l'angle } \theta \text{ est mesuré de l'axe des } z. \end{cases}$$

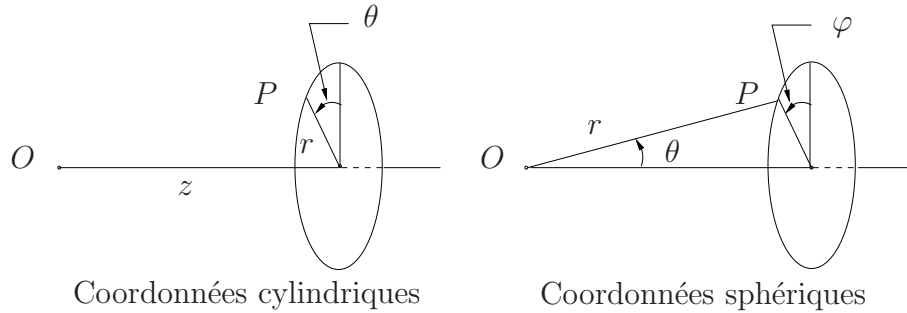


FIGURE 3.5. Relation entre les coordonnées cylindriques et sphériques.

Ainsi, on doit calculer $\nabla \wedge \vec{A}$ en coordonnées sphériques, où

$$\vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \Psi \vec{e}_\varphi \quad (3.8)$$

car dans les coordonnées sphériques la distance mesurée de l'axe est $r \sin \theta$ au lieu de r , et le vecteur unitaire autour de l'axe est \vec{e}_φ au lieu \vec{e}_θ . Voir la figure 3.8 pour explication.

Alors

$$\vec{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \Psi \end{vmatrix} \quad (3.9a)$$

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad v_z = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (3.9b)$$

(b) Propriétés de la fonction de courant Ψ : Comme nous l'avons déjà vu, la fonction de courant est constante sur une ligne de courant. Mais dans un écoulement axi-symétrique il est plus naturel de parler de 'tube de courant'; notons que toutes les lignes de courant s'appuyant sur un cercle centre à l'axe de symétrie forme un tube de courant. Celui-ci, comme montré dans la figure 3.6, est une surface de révolution ayant pour axe l'axe de symétrie.

Les propriétés du flux volumique (le débit) associées à la fonction de courant se dérivent de la même manière que pour l'écoulement plan, mais tout en utilisant des arguments plus difficiles. Considérons deux tubes de courants $\Psi = a$ et $\Psi = b$, schématisé sur la figure 3.7. Le taux du flux volumique à travers l'espacement entre les deux tubes, à savoir à travers l'anneau, est

$$\int_S \vec{v} \cdot d\vec{S},$$

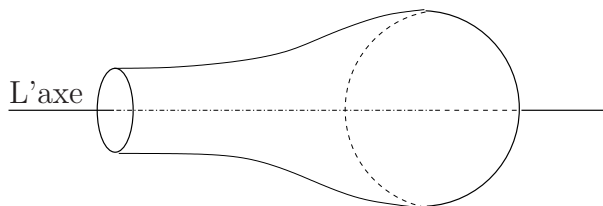


FIGURE 3.6. Tube de courant dans un écoulement axi-symétrique.

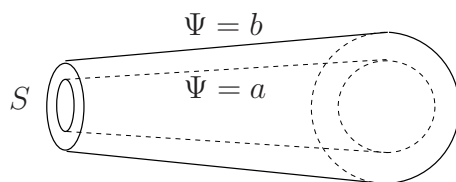


FIGURE 3.7. Tubes de courant pour l'écoulement dans l'espace entre deux tubes.

qui, en fonction de Ψ , s'écrit sous la forme

$$\int_S \nabla \wedge (r^{-1} \Psi \vec{e}_\theta) \cdot d\vec{S}.$$

En utilisant le théorème de Stokes on trouve

$$\oint_\ell r^{-1} \Psi \vec{e}_\theta \cdot d\vec{\ell},$$

où S est entourée par ℓ comme montré sur la figure 3.8. Pour calculer l'intégrale il faut prendre en compte les deux côtés de chaînon entre les deux cercles :

- (i) l'intégrale vaut zéro lorsque $d\vec{\ell}$, le long du chaînon, est orthogonal à \vec{e}_θ ;
 - (ii) les intégrales sur les deux côtés s'annulent si $d\vec{\ell}$ n'est pas orthogonal à \vec{e}_θ .
- Sur le cercle extérieur on a

$$\vec{e}_\theta \cdot d\vec{\ell} = r d\theta$$

tandis que sur l'intérieur $\vec{e}_\theta \cdot d\vec{\ell} = -r d\theta$. Alors,

$$\int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = 2\pi(b - a),$$

ce qui veut dire que le flux volumique est égale à 2π fois la différence entre les deux valeurs de Ψ . Finalement, comme avant, la fonction de courant Ψ représente un flux.

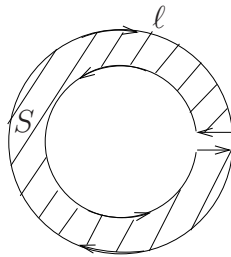


FIGURE 3.8. Le contour d'intégration à utiliser dans le théorème de Stokes.

CHAPITRE 4

DÉFORMATION DES FLUIDES. VORTICITÉ

4.1. Introduction

Tout élément de fluide est soumis au cours de son mouvement à trois changements : (i) une translation, (ii) une rotation, et (iii) une déformation. Pour mettre en lumière ces changements nous commençons par considérer une croix constituée, à l'instant t , d'une ligne horizontale se confondant avec l'axe des x , et d'une ligne verticale M_1M_2 , de longueur δy , s'alignant avec l'axe des y ; la vitesse en $M_1(x, y)$ est $u(x, y)$ et est égale à $u(x, y) + \delta y(\partial u/\partial y)$ en $M_2(x, y + \delta y)$ selon le développement de Taylor. Dans un intervalle δt une particule en M_1 se déplace à M'_1 , soit la distance $M_1M'_1 = u\delta t$, tandis qu'une particule en M_2 parcourt une distance $M_2M'_2 = [u + \delta y(\partial u/\partial y)]\delta t$, soit $\delta y(\partial u/\partial y)\delta t$ en plus de la distance parcourue par la particule se trouvant en M_1 à l'instant t , (voir la figure 4.1)

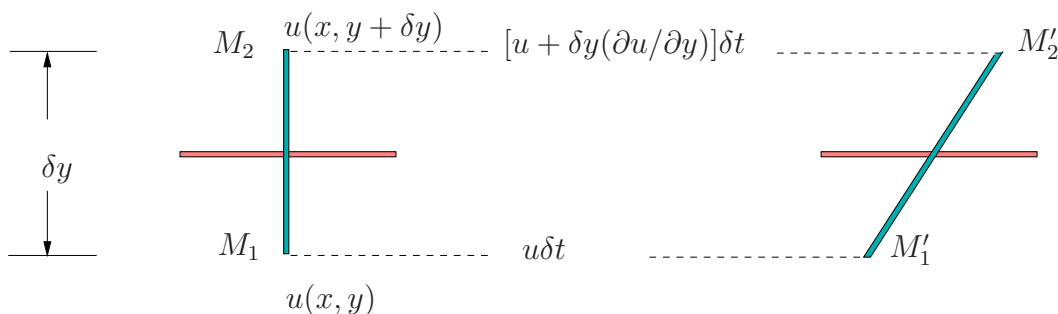


FIGURE 4.1. Déformation d'un élément fluide lors de son mouvement.

Alors, à la première approximation, la ligne M_1M_2 subit une rotation d'angle

$$\frac{\delta y(\partial u/\partial y)\delta t}{\delta y} = (\partial u/\partial y)\delta t.$$

Puisque la ligne horizontale ne subit aucune rotation, la vitesse de rotation (rotation instantanée) moyenne de deux lignes (au sens de la mécanique de solide indéformable) est égale à $\frac{1}{2}(\partial u/\partial y)$.

Une telle rotation est à la base de tourbillomètre où la vitesse de rotation des ailettes croisées s'identifie à la vitesse locale de rotation le long de l'axe central.

Nous sommes maintenant en position d'effectuer une analyse plus approfondie du mouvement d'une ligne infinitésimale 'tracée' dans le fluide dont les extrémités sont en \vec{x} et en $\vec{x} + \vec{\xi}$. Soit $\vec{v}(\vec{r}, t)$ la vitesse dans lequel l'élément est mis en mouvement. Calculons aux approximations premières le changement subi par cette ligne dans un intervalle δt du temps.

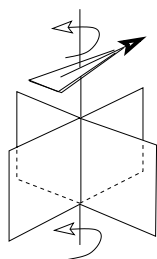


FIGURE 4.2. Une schématisation de tourbillomètre.

On a les transformations suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{x} &\longmapsto \vec{x} + \overrightarrow{v(\vec{x}, t)\delta t}, \\ \vec{x} + \vec{\xi} &\longmapsto \vec{x} + \vec{\xi} + \overrightarrow{v(\vec{x} + \vec{\xi}, t)\delta t} \\ &= \vec{x} + \vec{\xi} + \overrightarrow{v(\vec{x}, t)\delta t} + (\vec{\xi} \cdot \nabla)\vec{v}\delta t + O(\vec{\xi}^2)\end{aligned}$$

en utilisant le développement de Taylor. Notons que les deux extrémités exécutent un déplacement $\overrightarrow{v(\vec{x}, t)\delta t}$, qui est une translation au sens de la cinématique de solide de tout l'élément. Il existe pourtant un *mouvement relatif* des deux extrémités donné par

$$(\vec{\xi} \cdot \nabla)\vec{v}\delta t \quad \text{ou} \quad \xi_j \partial v_i / \partial x_j \delta t, \quad i, j = 1, 2, 3$$

que nous allons analyser par la suite.

4.1.1. Le tenseur antisymétrique et $\nabla \wedge \vec{v}$. Tout tenseur A_{ij} peut être décomposé en un tenseur symétrique et un tenseur antisymétrique :

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \underbrace{(A_{ij} + A_{ji})}_{\text{symétrique}} + \frac{1}{2} \underbrace{(A_{ij} - A_{ji})}_{\text{antisymétrique}}.$$

Appliquons cette identité au tenseur $\partial v_i / \partial x_j$:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.1a)$$

ou
$$v_{i,j} = e_{ij} + r_{ij}. \quad (4.1b)$$

Analysons maintenant le tenseur antisymétrique r_{ij} qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & -r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & 0 & -r_{32} \\ -r_{13} & r_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

compte tenu de l'anti-symétrie, que l'on peut écrire comme

$$\begin{pmatrix} 0 & -R_3 & R_2 \\ R_3 & 0 & -R_1 \\ -R_2 & R_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or, puisque le mouvement relatif est

$$\xi_j \delta t \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \xi_j \delta t (e_{ij} + r_{ij}),$$

la partie antisymétrique se transforme ξ_i en $\xi_i + \xi_j r_{ij} \delta t$, soit

$$\xi_i + \frac{1}{2} \xi_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \delta t,$$

ce qui veut dire

$$\vec{\xi} \longmapsto \vec{\xi} + (R_2 \xi_3 - R_3 \xi_2, R_3 \xi_1 - R_1 \xi_3, R_1 \xi_2 - R_2 \xi_1) \delta t,$$

qui n'est d'autre que

$$\vec{\xi} \longmapsto \vec{\xi} + (\vec{R} \wedge \vec{\xi}) \delta t. \quad (4.2)$$

Autrement dit, cette partie de mouvement de l'élément $\vec{\xi}$ est rotationnel au sens de la cinématique de solide où le vecteur rotation instantanée est égale \vec{R} . Les composantes de \vec{R} sont données par :

$$R_1 = r_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \wedge \vec{v})_1, \quad (4.3a)$$

$$R_2 = r_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \wedge \vec{v})_2, \quad (4.3b)$$

$$R_3 = r_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \wedge \vec{v})_3. \quad (4.3c)$$

Ainsi, la vitesse de rotation (dite vitesse angulaire) de l'élément linéique $\vec{\xi}$ est $\frac{1}{2} \nabla \wedge \vec{v}$, qui est en accord avec la valeur trouvée pour la croix discutée précédemment. On appelle le vecteur $\vec{R} = \frac{1}{2} \nabla \wedge \vec{v}$ (généralement noté $\vec{\Omega}$) le vecteur tourbillon ou vecteur rotation. On appelle le vecteur $\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{v}$ la vorticité.

4.1.2. Le tenseur symétrique et $\nabla \cdot \vec{v}$. Revenons maintenant au tenseur symétrique e_{ij} . Dans ce qui est exposé ci-dessus nous avons discuté la translation et la rotation de mouvement. Nous allons analyser dans ce qui suit la partie de mouvement associée à la déformation. Puisque e_{ij} est symétrique il existe alors des axes principaux de symétrie dans lesquels e_{ij} s'écrit sous la forme :

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}.$$

Le tenseur e_{ij} transforme l'élément $\vec{\xi}$ par

$$\xi_i \longmapsto \xi_i + e_{ij} \xi_j \delta t$$

ou

$$\begin{cases} \xi_1 \longmapsto \xi_1 + e_1 \xi_1 \delta t, \\ \xi_2 \longmapsto \xi_2 + e_2 \xi_2 \delta t, \\ \xi_3 \longmapsto \xi_3 + e_3 \xi_3 \delta t \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \xi_1 \mapsto \xi_1(1 + e_1\delta t), \\ \xi_2 \mapsto \xi_2(1 + e_2\delta t), \\ \xi_3 \mapsto \xi_3(1 + e_3\delta t) \end{cases}$$

ce qui montre que ξ_i est dilatée par $(1 + e_i\delta t)$. Il vient alors que certains éléments e_i peuvent être négatifs et correspondent par conséquent à une compression.

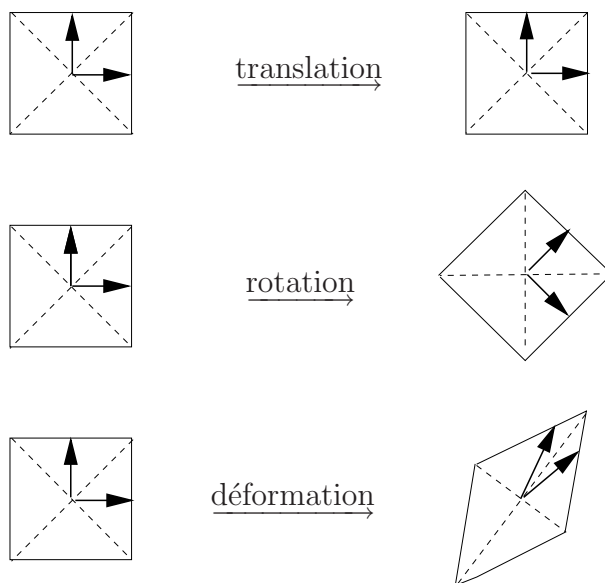


FIGURE 4.3. Changements subis par un élément fluide au cours de son mouvement.

Les résultats que l'on vient de discuter impliquent que le volume $\xi_1\xi_2\xi_3$ d'un élément cubique, de côtés ξ_1, ξ_2, ξ_3 , se déforme en

$$(1 + e_1\delta t)(1 + e_2\delta t)(1 + e_3\delta t)\xi_1\xi_2\xi_3$$

ou

$$\{1 + (e_1 + e_2 + e_3)\delta t\}\xi_1\xi_2\xi_3$$

en négligeant les termes en δt^2 . Conformément à nos définitions on a

$$e_1 + e_2 + e_3 = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

car la somme des éléments diagonaux est invariable sous un changement de base. Donc

$$e_1 + e_2 + e_3 = \nabla \cdot \vec{v}. \quad (4.4)$$

Ainsi le taux de changement de volume est localement égale à $\nabla \cdot \vec{v}$, ce qui est en accord avec $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ pour un écoulement incompressible. Il est évident que $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ implique que parmi les valeurs des éléments e_i il y en a certaines qui sont positives et d'autres qui sont négatives.

4.1.2.1. *Exemple.* Considérons l'écoulement défini par

$$\{ u = \beta y, v = 0,$$

La fonction de courant pour cet écoulement est $\psi = \frac{1}{2}\beta y^2$ et $\nabla \wedge \vec{v} = -\beta \vec{k}$. On a pour le tenseur $\partial v_i / \partial x_j$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où on a pour les éléments de e_{ij}

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\beta & 0 \\ \frac{1}{2}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et pour r_{ij}

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\beta & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur rotation est donc

$$\vec{\Omega} = \vec{R} = (0, 0, -\frac{1}{2}\beta).$$

Soit e les valeurs propres de e_{ij} . Alors

$$\text{déterminant}(e_{ij} - e\delta_{ij}) = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} e & \frac{1}{2}\beta & 0 \\ \frac{1}{2}\beta & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{vmatrix} = 0$$

dont la solution est $e = \frac{1}{2}\beta, -\frac{1}{2}\beta, 0$. Les fonctions propres correspondantes sous forme normalisée sont

$$\begin{aligned} e = \frac{1}{2}\beta & : 2^{-1/2}(1, 1, 0) & \text{soit} & 2^{-1/2}(\vec{i} + \vec{j}), \\ e = -\frac{1}{2}\beta & : 2^{-1/2}(-1, 1, 0) & \text{soit} & 2^{-1/2}(-\vec{i} + \vec{j}), \\ e = 0 & : (0, 0, 1) & \text{soit} & \vec{k}. \end{aligned}$$

Cela nous donne les axes principaux dans la base desquels le tenseur e_{ij} de déformation devient

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la déformation de l'élément fluide est représentée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{une élongation au taux } \frac{1}{2}\beta \text{ le long du } \vec{i} + \vec{j} \\ \text{une compression au taux } -\frac{1}{2}\beta \text{ le long du } -\vec{i} + \vec{j} \\ \text{changement effectif du volume vaut zéro.} \end{array} \right.$$

Par exemple, un élément fluide de forme circulaire sera déformé en une ellipse dont le grand axe est parallèle à $\vec{i} + \vec{j}$ et le petit axe parallèle à $-\vec{i} + \vec{j}$. La longueur du grand axe s'accroît au cours du temps autant que celle du petit axe se décroît.

4.1.3. Déformation, Rotation et Gradient du champs des vitesses. Reprenons l'analyse précédant mais en fonction des vitesses et cherchons la variation des vitesses liée aux deux points voisins \vec{x} et $\vec{x} + \vec{\xi}$. En utilisant le développement de Taylor, l' $i^{\text{ème}}$ composante de la vitesse (désignée par \vec{v}') en $\vec{x} + \vec{\xi}$ en fonction de la vitesse \vec{v} en \vec{x} , est donnée par :

$$v_i(\vec{x} + \vec{\xi}) = v'_i = v_i(\vec{x}) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \xi_j + O(\vec{\xi}^2) \quad (4.5a)$$

$$\text{soit} \quad \vec{v}(\vec{x} + \vec{\xi}) = \vec{v}' = \vec{v}(\vec{x}) + \nabla \vec{v} \cdot \vec{\xi} + O(\vec{\xi}^2) \quad (4.5b)$$

Maintenant, le gradient de vecteur vitesse $\nabla \vec{v}$ est un tenseur

$$\nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (4.5c)$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\nabla \vec{v} = \underbrace{\frac{1}{2} (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T)}_{\text{tenseur symétrique}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\nabla \vec{v} - (\nabla \vec{v})^T)}_{\text{tenseur antisymétrique}}, \quad (4.5d)$$

soit

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & 2 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5e)$$

ou

$$v_{i,j} = e_{ij} + r_{ij}. \quad (4.5f)$$

avec

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad r_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.5g)$$

où $(\nabla\vec{v})^T$ est le transposé du $\nabla\vec{v}$. Il vient alors que le changement de vitesse entre deux points voisins, comme exprimé dans (4.5a,b), est constitué de deux contributions : la première est due à la rotation de l'élément fluide et la deuxième due à la déformation, soit

$$\vec{v}(\vec{x} + \vec{\xi}) = \vec{v}' = \overbrace{\vec{v}(\vec{x}) + \frac{1}{2}(\nabla \wedge \vec{v}) \wedge \vec{\xi}}^{\substack{\text{à comparer avec } \vec{v}_{M_2} = \vec{v}_{M_1} + \vec{\Omega} \wedge \overline{M_1 M_2} \\ \text{en solide}}} + \underbrace{\vec{e} \cdot \vec{\xi}}_{\substack{\text{changement dû} \\ \text{à la déformation}}} \quad (4.6)$$

changement dû
à la rotation

Le changement produit par la rotation d'un élément fluide ressemble donc à celui en solide en rotation mais avec un vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}$ égale à la moitié de vecteur tourbillon $\vec{\omega}$:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega}.$$

4.2. Champ vectoriel $\vec{\omega}$

Pour décrire le champ vectoriel $\vec{\omega}$ on utilise la même approche employé pour la description du champ de vitesse. Ainsi on appelle une *ligne (ou fil) tourbillonnaire* (ou une ligne de rotation) toute courbe dans l'espace dont la tangente en chacun de ses points est parallèle, à tout instant t fixe, au 'vecteur tourbillon' $\vec{\omega}$. L'équation différentielle d'une telle ligne satisfait alors $d\vec{x} \wedge \vec{\omega} = \vec{0}$, soit

$$\frac{dx_1}{\omega_1} = \frac{dx_2}{\omega_2} = \frac{dx_3}{\omega_3} \quad (4.7)$$

où $d\vec{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$ est tangent à la courbe en coordonnées curvilignes, voir la figure 4.4.

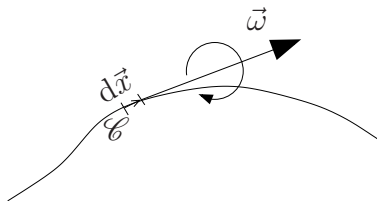


FIGURE 4.4. Fil tourbillonnaire.

Autrement dit, les lignes tourbillonnaires à un instant donné sont des lignes de force du champs de vecteurs $\vec{\omega}$ à cet instant. Les *surfaces de rotation ou tourbillonnaires* et les *tubes de rotation ou tourbillonnaires* sont définis à partir des lignes de rotation de la même manière que sont définies les surfaces et les tubes de courant à partir des lignes de courant.

Puisque

$$\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{v}$$

on déduit immédiatement que

$$\nabla \cdot \vec{\omega} = 0.$$

Un tel champ vectoriel est dit solénoïdal.

Comme pour un tube de courant, on considère maintenant une surface fermée S engendrée par des lignes tourbillonnaires s'appuyant sur une courbe fermée \mathcal{C} et délimitant un volume V du fluide que l'on suit dans son mouvement, voir la figure 4.5 ; une telle surface constitue un tube tourbillonnaire. Si on se fixe l'attention sur le volume V délimité par S et les deux sections S_1 et S_2 , on peut écrire selon le théorème de Gauss-Ostrogradsky (dit théorème de la divergence) :

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{\omega}) dV = 0 = \int_S (\vec{n} \cdot \vec{\omega}) dS$$

où \vec{n} est le vecteur normal extérieur à S . On sait que l'intégrale de surface sur le tube est nulle car $\vec{\omega}$ y est orthogonal à \vec{n} , et par conséquent on déduit

$$-\int_{S_1} (\vec{n} \cdot \vec{\omega}) dS = \int_{S_2} (\vec{n} \cdot \vec{\omega}) dS \quad (4.8)$$

ce qui montre que le débit tourbillonnaire est indépendant du choix de S et de \mathcal{C} .

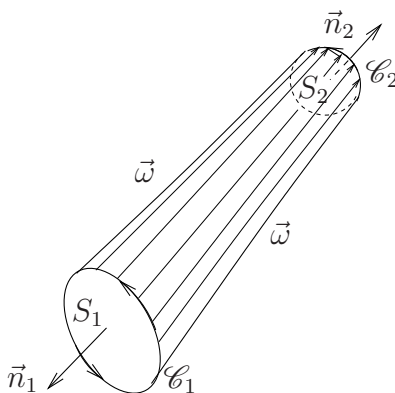


FIGURE 4.5. Lignes tourbillonnaires formant un tube tourbillonnaire.

4.2.1. Circulation. Théorème de Kelvin. On définit la circulation de vecteur vitesse le long d'une courbe fermée \mathcal{C} (un circuit fermé) par

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} \quad (4.9)$$

où ℓ est mesuré le long de \mathcal{C} . La circulation Γ satisfait un théorème important de la dynamique des fluides appelé le théorème de Kelvin. Dans le cadre de certaines approximations, qui sont souvent plus ou moins satisfaites, on peut montrer que

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0. \quad (4.10)$$

Cela veut dire que si l'on suit les particules fluide formant le circuit \mathcal{C} dans leur mouvement, la circulation autour de \mathcal{C} reste toujours la même.

Une conséquence immédiate est la suivante. D'après le théorème de Stokes on a

$$\Gamma_0 = \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} \quad (4.11)$$

où S est la surface engendrée par \mathcal{C} . On déduit alors qu'après (4.8) et (4.11), la vorticité $\vec{\omega}$ s'accroît si l'état de l'écoulement fait rétrécir \mathcal{C} et par conséquent la vorticité augmente par un mouvement d'élongation parallèle à $\vec{\omega}$.

Considérons par exemple un écoulement dont les lignes de courant sont des cercles concentriques où la vitesse est donnée par $\vec{v} = \omega \vec{k} \wedge \vec{r}$, avec $\vec{r} = r(\cos \theta, \sin \theta)$ et calculons la circulation le long d'un cercle \mathcal{C}_0 de rayon r_0 :

$$\Gamma_0 = \oint_{\mathcal{C}_0} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \omega \oint_{\mathcal{C}_0} r_0 (\vec{k} \wedge \vec{e}_r) \cdot (r_0 \vec{e}_\theta d\theta) = 2\pi\omega r_0^2.$$

Ce résultat nous dit que pour Γ_0 fixe, ω diminue comme le carré du rayon.

Un deuxième exemple. Soit $\vec{v} = (K/r)\vec{e}_\theta$ un champ de vitesse, K est une constante. Reprenons le calcul de circulation autour de \mathcal{C}_0 , on trouve

$$\Gamma_0 = 2\pi r_0 \frac{K}{r_0} = 2\pi K$$

ce qui montre qu'elle est constante.

Finalement notons que la circulation le long d'une courbe \mathcal{C} située sur une surface tourbillonnaire vaut zéro :

$$\Gamma_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS = 0$$

car $\vec{\omega}$ est orthogonal à \vec{n} , où \vec{n} est la normal extérieure à S , la surface engendrée par \mathcal{C} .

Les résultats que l'on vient d'exposer dans le cadre de théorème de Kelvin nous montrent que

- (1) un tube tourbillonnaire se déplace avec le fluide en tant que surface matérielle déformable;
- (2) un fil tourbillonnaire se déplace avec le fluide en tant qu'une ligne d'intersection de deux surfaces matérielles déformables;
- (3) un fil tourbillonnaire ou une singularité tourbillonnaire se déplace avec le fluide en tant qu'un cas limite d'un tube tourbillonnaire.
- (4) compte tenu de l'équation (4.8), *un tube tourbillonnaire de longueur finie ne peut pas se terminer/commencer dans le fluide* car un tube tourbillonnaire en se rétrécissant à un rayon nul est équivoque à $\omega \rightarrow \infty$. En effet, cette limite représente un fil tourbillonnaire qui n'est franchissable que par la disparition du tourbillon lui-même, à moins qu'il y ait une frontière ou une singularité.

Équations du mouvement

5.1. Forme fondamentale

Pour déterminer les équations du mouvement nous allons suivre la même méthode utilisée pour la formulation de la loi de conservation de masse, à savoir l'équation de la continuité.

Soit S une surface fermée contenant un volume V de fluide, comme schématisé sur la figure 5.1. Le taux du changement de la quantité de mouvement dans un tel volume V est égal à la somme de

- (i) le flux de la quantité de mouvement à travers la surface S , compté positivement vers l'intérieur de S ,
- (ii) toutes les forces agissant à l'intérieur de V ,
- (iii) toute les forces agissant sur la surface S .

Notons d'abord que tous les flux à travers la surface S sont associés à $\vec{v} \cdot d\vec{S}$, mesuré en volume par unité du temps, qui est proportionnel à l'aire locale et à la vitesse du fluide vers l'extérieur. Alors, on a pour l' $i^{\text{ème}}$ composante de la quantité de mouvement par unité du volume ρv_i . Par conséquent on doit avoir pour le premier terme

$$(i) \quad - \int_S \rho v_i \vec{v} \cdot d\vec{S},$$

où le signe négatif indique que le flux est compté vers l'intérieur de S . Notons au passage que

$$v_i \vec{v} \cdot d\vec{S} = v_i \vec{v} \cdot \vec{n} dS = v_i v_j dS.$$

En ce qui concerne le deuxième terme, qui correspond aux forces volumiques, on a

$$(ii) \quad \int_V \rho f_i dV,$$

où f_i est l' $i^{\text{ème}}$ composante de la force volumique par unité de masse.

Finalement, l'interaction de contact entre les particules fluides à l'intérieur et à l'extérieur de S se traduit par le tenseur de contraintes $\vec{\sigma}$. On appelle cette action de contact la force de surface qui est donnée par

$$\int_S \vec{\sigma} \cdot d\vec{S},$$

soit

$$(iii) \quad \int_S \sigma_{ij} n_j dS$$

pour l' $i^{\text{ème}}$ composante, où \vec{n} est le vecteur unitaire normal extérieur à S . Ainsi l'équation de bilan de la quantité de mouvement s'écrit sous forme intégrale

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = - \int_S \rho v_i \vec{v} \cdot d\vec{S} + \int_V \rho f_i dV + \int_S \sigma_{ij} n_j dS. \quad (5.1a)$$

En appliquant le théorème de Gauss-Ostrogradsky (théorème de la divergence) à l'intégrale de surface (pourvu que S ne contienne pas de discontinuité) les termes (i) et (iii) prennent respectivement les formes

$$(i^*) \quad - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) dV,$$

et

$$(iii^*) \quad \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV.$$

Compte tenu du fait que V est supposé fixé, l'équation (5.1a) se transforme en :

$$\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) - \rho f_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \right\} dV = 0, \quad (5.1b)$$

qui est valable quelque soit V . D'où

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \rho f_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \quad (5.1c)$$

qui est l'équation de la quantité de mouvement. En utilisant l'équation de continuité écrite sous forme indicielle

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0, \quad (3.2c^*)$$

l'équation (5.1c) se réduit à

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}, \quad (5.1d)$$

ou sous forme vectorielle :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \vec{\sigma}. \quad (5.1e)$$

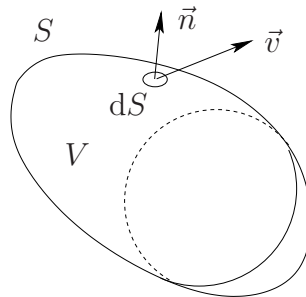


FIGURE 5.1. Un volume V du fluide délimité par la surface S .

5.2. Contraintes et taux de déformation

5.2.1. Partie isotrope et partie déviatrice de tenseur de contraintes. L'équation de conservation de la quantité de mouvement (5.1) est inutilisable sans donner une forme précise pour le tenseur de contrainte $\vec{\sigma}$. Ceci se décompose en deux tenseurs. Le premier est dit isotrope et le second est dit déviateur :

$$\sigma_{ij} = \underbrace{\frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}}_{\text{isotrope}} + \underbrace{\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right)}_{\text{déviateur}}. \quad (5.2)$$

Pour un fluide au *repos* la deuxième composante doit s'annuler, et la première devient

$$-p\delta_{ij},$$

où p est, en effet, égale à la pression thermodynamique à l'équilibre.

Par contre, pour un fluide en mouvement il n'est plus nécessaire que le terme isotrope soit le même que la pression thermodynamique. Posons donc

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + s_{ij}$$

où

$$-P = \frac{1}{3}\sigma_{kk}$$

dont la relation à la pression thermodynamique reste à examiner. Ainsi s_{ij} est un tenseur déviateur dont la partie isotrope est, par définition, égale à zéro, $s_{kk} = 0$, car $\delta_{kk} = 3$, et par conséquent

$$\sigma_{kk} = -3P + s_{kk}.$$

Nous allons maintenant examiner la relation du tenseur déviateur au mouvement de fluide.

5.2.2. L'équation constitutive pour un fluide Newtonien. Un fluide est dit Newtonien si la contrainte de cisaillement τ (une force tangentielle exprimée par unité de surface, produite lors de mouvement) est proportionnelle au gradient de vitesse. Par exemple, dans un écoulement bidimensionnel la contrainte de cisaillement dans la direction des x est donnée

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{Nm}^{-2}$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide, exprimée en Nsm^{-2} ou en $\text{kg s}^{-1}\text{m}^{-1}$. L'air et l'eau sont des fluides Newtoniens. Le coefficient μ s'interprète comme un coefficient de résistance au glissement.

L'origine de cette relation provient de la considération de transfert de la quantité de mouvement à travers toute surface au niveau moléculaire. Examinons donc un tel transfert suivant la direction des x à travers une surface $y = \text{constante}$., cf. la figure 5.2.

Un certain nombre de molécules au dessus de S sera en mouvement vers le bas à travers S . La quantité (moyenne) de mouvement dans la direction des x , de ces molécules, est proportionnelle à $U + u$ qui est inférieur à celle correspondant à leur nouvelle position, la différence entre les deux étant perdue par collision avec les autres particules. Cela veut dire qu'il y a un transfert de la quantité de mouvement vers le bas à travers S . Vue sur une échelle plus grande, cela se manifeste comme une force, dans la direction des x , sur la région

inférieure de fluide. En revanche, un transfert de “déficit” de quantité de mouvement vers

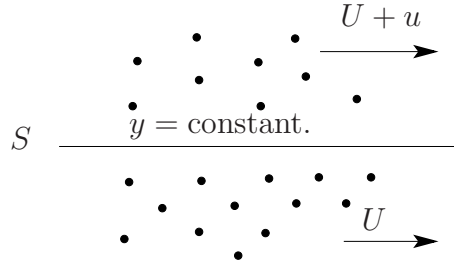


FIGURE 5.2. Transfert moléculaire de la quantité de mouvement à travers une surface.

la région supérieure à travers S , qui fait décélérer le mouvement des molécules au dessus de S . Le résultat est une contrainte de *cisaillement* à travers S qui fait accélérer le fluide au dessous de S , et, par la même, fait décélérer le fluide au dessus de S . La contrainte est nécessairement proportionnelle à u , la différence de vitesse, et à d’autres paramètres de mouvement moléculaire. Or, dans un écoulement réel il n’y a pas de discontinuité de vitesse à travers S . Compte tenu de ce fait on doit chercher alors une grandeur pour remplacer u . Maintenant puisque l’échange moléculaire a lieu à travers une distance comparable au parcours moléculaire moyen l , la variation de vitesse est

$$l \frac{dU}{dy}$$

qui est, en effet, une bonne approximation car l est petit devant l’échelle suivant laquelle U change. Par conséquent la contrainte de cisaillement peut s’écrire sous la forme

$$\mu \frac{dU}{dy}$$

où μ , la viscosité, dépend des paramètres de mouvement moléculaire.

5.2.3. Loi de comportement pour un fluide Newtonien. L’argument précédent, qui peut être raffiné pour un gaz, fournit une bonne base pour suggérer que la contrainte de cisaillement à admettre dans s_{ij} doit être proportionnelle au gradient local (en temps et en espace) de vitesse, au moins pour des fluides à constitution moléculaire simple dont le temps de réponse est très court.

Rappelons nous que le mouvement d’un fluide peut être localement décomposé en :

- (i) translation locale;
- (ii) mouvement de rotation comme pour un solide indéformable;
- (iii) déformation locale.

On note immédiatement que la première composante (i) n’a rien avoir avec la contrainte locale de cisaillement. Il est plausible aussi que le mouvement de rotation pure n’entraîne, quant à lui, non plus de telles contraintes (les démonstrations se trouvent dans des livres spécialisés). Finalement, il ne nous reste que le tenseur des taux de déformation e_{ij} comme source pour les contraintes s_{ij} .

Nous cherchons une relation tensorielle entre e_{ij} et s_{ij} qui reflète des propriétés objectives et donc n'a rien avoir avec le choix des axes. Ainsi, nous cherchons, en effet, une relation linéaire. Bien plus, pour des fluides simples (par rapport à leur structure moléculaire) nous anticipons que la relation est isotrope, où il n'y a pas de directions de préférence dans le mouvement moléculaire. Forcément, cela nous conduit à

$$s_{ij} = A_{ijkl}e_{kl},$$

avec

$$A_{ijkl} = \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu_1\delta_{il}\delta_{jk} + \mu_2\delta_{ij}\delta_{kl}$$

compte tenu de l'isotropie de milieu fluide simple. Alors

$$s_{ij} = \mu e_{ij} + \mu_1 e_{ji} + \mu_2 e_{kk} \delta_{ij}$$

Le fait que s_{ij} et e_{ij} soient des tenseurs symétriques conduit à $\mu = \mu_1$. À cela s'ajoute le fait que nous avons défini s_{ij} tel que $s_{ii} = 0$, et par conséquent $\mu_2 = -2\mu/3$. Finalement, la 'loi de comportement' prend la forme

$$s_{ij} = 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}) \quad (5.3)$$

pour un fluide Newtonien.

► **REMARQUE 5.1 :** *L'expérience a montré que les arguments développés pour arriver à l'équation (5.3) sont justifiés pour les fluides simples, mais ne s'applique pas aux fluides compliqués dits fluides non-Newtoniens étudiés en rhéologie.* ◀

5.2.4. Thermodynamique et pression mécanique. On note de ce qui a précédé que s_{ij} ne dépend que du tenseur déviateur $e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}$. Cela nous amène à penser que $\nabla \cdot \vec{v}$ ou e_{kk} doit intervenir ailleurs. Et puisque $\nabla \cdot \vec{v}$ n'est pas lié au changement de volume, il pourrait alors se manifester dans le terme $-P\delta_{ij}$, car p et dV sont associés en thermodynamique.

Notons que si nous admettons que

$$P - p$$

est linéaire en e_{ij} , il vient alors que la seule relation possible serait

$$P - p = -Ke_{kk}$$

où K est une constante, car e_{kk} fournit le seul invariant linéaire de e_{ij} . En effet cet argument peut être justifié par la considération de l'énergie du fluide, que l'on peut trouver dans les ouvrages spécialisés.

On dispose maintenant d'une forme complète pour σ_{ij} , exprimée en fonction de deux 'constantes' μ et K (qui varient, en général, avec la température, et probablement avec la masse volumique ρ) :

$$\sigma_{ij} = -(p - Ke_{kk})\delta_{ij} + 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij} \right), \quad (5.4a)$$

où p est la pression thermodynamique, et

$$P = p - Ke_{kk}$$

est la pression mécanique, ou la contrainte normale moyenne.

En général, l'équation (5.4a) s'écrit sous la forme :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \underbrace{2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk}\delta_{ij}}_{\tau_{ij}}, \quad (5.4b)$$

avec
$$\lambda = K - \frac{2}{3}\mu.$$

5.3. Équations de Navier-Stokes

Muni de σ_{ij} nous sommes maintenant en position d'écrire les équations de mouvement sous forme explicite. Mais d'abord rappelons nous que

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

$$e_{kk} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \nabla \cdot \vec{v}.$$

Alors on obtient pour les équations de mouvement (5.1)

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right\}. \quad (5.5a)$$

On appelle cette équation l'équation (complète) de Navier-Stokes.

Les variations de μ et λ avec la position (dues, en premier lieu, aux changements de température) sont petites que l'on peut négliger, ce qui nous permet d'écrire

$$\boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{v}} \quad \text{Équations de Navier-Stokes} \quad (5.5b)$$

On appelle les équations (5.5) les équations de Navier-Stokes; pour un fluide au repos ($\vec{v} = \vec{0}$) (5.5) se réduit à l'équation hydrostatique

$$\boxed{\rho \vec{f} = \nabla p} \quad \text{Équation hydrostatique}$$

Lorsque ρ est constante, ou lorsque la vitesse de l'écoulement est petite devant la vitesse du son dans le milieu fluide on peut admettre que $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, l'équation (5.5) se réduit alors à

$$\boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}} \quad \text{Équations de Navier-Stokes incompressibles} \quad (5.6)$$

qui représente les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible.

Un nombre important de solutions de (5.5) peut être obtenue lorsque

$$\boxed{\mu = \lambda = K = 0} \quad \text{Modèle non-visqueux}$$

pour le modèle non-visqueux d'écoulement. On obtient alors l'équation d'Euler :

$$\boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \nabla p} \quad \text{Équation d'Euler} \quad (5.7)$$

La viscosité dynamique a pour unité $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$, et la viscosité cinématique a $\text{L}^2 \text{T}^{-1}$; dans tableau 5.1 sont données des valeurs de ces coefficients pour quelques fluides. Notons que ces chiffres ne sont pas très significatifs sauf pour des comparaisons entre des fluides. Pour faire valoir la signifiante de la viscosité μ il va falloir considérer des groupes sans dimension. Par exemple, pour un écoulement caractérisé par une vitesse U sur un corps de dimension (taille) ℓ , le groupe

$$\rho U \ell / \mu = U \ell / \nu$$

est sans dimension. On appelle ce groupe le *nombre de Reynolds*. C'est le nombre de Reynolds qui met en lumière l'effet de la viscosité dans un écoulement donné.

Il est commode de diviser les équations de Navier-Stokes par ρ , en particulier lorsque celle-ci varie peu, ce qui conduit à

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \rho^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v}} \quad \text{Équation de Navier-Stokes incompressible} \quad (5.8)$$

pour un fluide ou un écoulement incompressible. Sous cette forme on voit immédiatement que c'est la viscosité cinématique qui met en évidence l'effet de la viscosité sur l'écoulement, car compte tenu de données affichées dans la table 5.1, on se rend vite compte que, par exemple, l'air est beaucoup plus visqueux que l'eau, et le mercure est peu visqueux par rapport aux autres fluides.

5.4. Discussion des équations de Navier-Stokes

5.4.1. Conditions aux frontières. Un condition préalable pour toute solution des équations différentielles ou aux dérivées partielles est l'existence des conditions aux frontières, c'est-à-dire les conditions aux limites. Dans tout mouvement un fluide est en contact avec d'autres milieux : il s'agit en général soit d'un autre fluide, soit d'une paroi solide.

Désignons par \mathcal{F} la frontière du domaine \mathcal{D} occupé par le fluide ; \mathcal{F} peut être une donnée ou une inconnue du problème.

5.4.1.1. *Frontière solide.* Soit \mathcal{F} la frontière d'un solide situé dans un milieu fluide et $\vec{w}(\vec{r}, t)$ sa vitesse. Désignons par \vec{n} et $\vec{\tau}$ respectivement le vecteur unitaire normal extérieur à \mathcal{F} et le vecteur tangente. Alors la vitesse du fluide est égale à la vitesse du solide aux points de contact fluide-solide \mathcal{F} :

$$\forall M \in \mathcal{F} \quad \vec{v}(M, t) = \vec{w}(M, t)$$

$$\text{soit} \quad \vec{n} \cdot (\vec{v}(M, t) - \vec{w}(M, t)) = 0, \quad (5.9)$$

$$\text{et} \quad \vec{\tau} \cdot (\vec{v}(M, t) - \vec{w}(M, t)) = 0 \quad \text{dite condition de non-glissement.} \quad (5.10)$$

	L'air	L'eau	Mercure	Huile d'olive	Glycérine
μ (kg/m s)	1.8×10^{-5}	1.1×10^{-3}	1.6×10^{-3}	0.10	2.33
$\nu = \mu/\rho$ (m^2/s)	1.5×10^{-5}	1.1×10^{-6}	1.2×10^{-7}	1.1×10^{-4}	1.8×10^{-3}

TABLE 5.1. Valeurs de viscosité dynamique μ et viscosité cinématique ν pour quelques fluides, à 288 K.

Ces deux conditions sont aussi valables quelques soit le milieu défini par \mathcal{F} .

Quand on étudie l'écoulement autour d'un solide \mathcal{F} est une donnée et ce sont les efforts exercés par le fluide sur le solide qui constituent l'inconnue à laquelle on s'intéresse.

5.4.1.2. *Frontière entre deux fluides non miscibles.* Lorsque \mathcal{F} est une frontière séparant deux fluides dont l'une au moins est un liquide on dit que c'est une *surface libre* ; la surface entre mer et atmosphère est une surface libre. Le fait que \mathcal{F} est une surface matérielle nous permet d'établir une condition nécessaire de cinématique. Soit

$$F(M, t) = 0$$

l'équation de \mathcal{F} au cours de mouvement, où $M \in \mathcal{F}$ peut être considérée comme la position d'une particule. Puisque $dF = 0$, il vient alors que

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \\ \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla F = 0. \end{aligned} \quad \text{condition cinématique.} \quad (5.11)$$

Quand \mathcal{F} est une surface libre, on a intérêt à se donner F sous la forme

$$F \equiv x_3 - \eta(x_1, x_2, t) = 0.$$

Il vient d'après (5.11)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = 0 \quad \text{pour } x_3 = \eta. \quad (5.12)$$

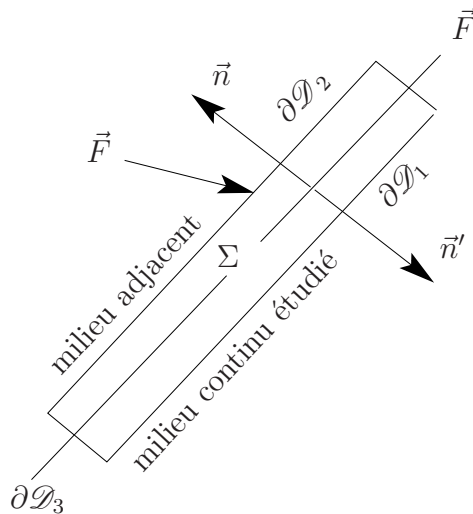


FIGURE 5.3. Une segment de \mathcal{F} .

5.4.1.3. *Conditions dynamiques.* Soit à l'instant t deux milieux continus adjacents et \mathcal{D} le volume du cylindre aplati de la figure 5.3, limité par la base $\partial\mathcal{D}_1$ située dans le milieu étudié, la base $\partial\mathcal{D}_2$ située dans le milieu adjacent et une surface latérale $\partial\mathcal{D}_3$ de faible dimension.

Nous admettons que les forces de capillarité sont négligeables.

L'équation (5.1a) appliquée à \mathcal{D} s'écrit sous la forme

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho v_i dV + \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) dV = \int_{\mathcal{D}} \rho f_i dV + \int_{\partial\mathcal{D}} \sigma_{ij} n_j dS \quad (5.13)$$

Faisons maintenant tendre $\partial\mathcal{D}_1$ et $\partial\mathcal{D}_2$ vers Σ , partie de \mathcal{F} intérieure à \mathcal{D} . Les forces d'inertie et à distance sont des forces massiques et elles vont tendre vers zéro puisque le volume tend vers zéro. Il va donc rester, à la limite,

$$\int_{\Sigma} [\sigma'_{ij} n_j + \sigma_{ij} n'_j] dS = 0,$$

où σ'_{ij} désignant la contrainte dans le milieu adjacent, et $\vec{n}' = -\vec{n}$. Comme Σ est quelconque, il vient

$$\sigma'_{ij} - \sigma_{ij} = 0,$$

soit

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} \quad (5.14)$$

ce qui veut dire que le vecteur contrainte est continu à la traversée de \mathcal{F} .

► **REMARQUE 5.2 :** Appliquons la loi de la dynamique au cylindre et faisons tendre la hauteur vers zéro. Soit \vec{F} et \vec{F}' les forces de contact exercées respectivement sur les deux bases $\partial\mathcal{D}_1$ et $\partial\mathcal{D}_2$. Lorsque les deux bases tendent l'une vers l'autre les forces massiques (inertie et extérieur) ont une limite nulle car le volume d'intégration tend vers zéro. On obtient donc

$$\vec{F} + \vec{F}' = 0$$

soit

$$\vec{F} = -\vec{F}' \quad (5.15)$$

car $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \Sigma$. Cette relation peut être vue comme l'égalité de l'action et la réaction. ◀

► **REMARQUE 5.3 :** Si \mathcal{F} est la surface de séparation de deux fluides au repos ou de deux fluides idéaux en mouvement ($\mu = \lambda = 0$) la condition vectorielle (5.14) se réduit à la condition scalaire

$$p = p'. \quad (5.16)$$

► **REMARQUE 5.4 :** Le milieu adjacent exerce sur le milieu fluide étudié une force dont la résultante pour la partie Σ de \mathcal{F} est

$$\int_{\Sigma} \vec{\sigma} \vec{n} dS.$$

Si le milieu adjacent est un solide, la force exercée par le fluide sur le solide est

$$\vec{R} = - \int_{\Sigma} \vec{\sigma} \vec{n} dS.$$

Si le fluide est idéal on a

$$\vec{R} = \int_{\Sigma} p \vec{n} dS. \quad \blacktriangleleft$$

5.4.2. La pesanteur et la pression dynamique. En général les forces à distance (forces de volume) se limitent à la force de la pesanteur; cette force est souvent la cause principale de l'écoulement comme par exemple dans le cas de l'écoulement fluvial, mais elle se trouve dans d'autres cas équilibrée par la pression hydrostatique. Il est donc utile de soustraire ces deux effets avant d'analyser certaine classe d'écoulement.

Pour fixer les idées supposons que ρ est constante. Soit p_1 la pression lorsque le fluide est au repos, et $p_1 + p_2$ dans le cas contraire. Alors on a

$$\begin{aligned}\rho \mathbf{g} &= \nabla p_1, \quad \text{pour un fluide au repos} \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \mathbf{g} - \nabla(p_1 + p_2) + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad \text{pour un fluide en écoulement.}\end{aligned}$$

Ces deux équations conduisent à

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p_2 + \mu \nabla^2 \mathbf{v},$$

où seule la pression p_2 apparaît. On appelle cette pression la "pression dynamique".

CHAPITRE 6

Écoulements idéaux

6.1. L'équation d'Euler

On appelle un fluide pour lequel la contrainte visqueuse (ou la viscosité) et conductivité thermique sont nulles un fluide parfait; pour éviter toute confusion entre la notion de gaz parfait en thermodynamique et un fluide parfait il est commode de parler d'un fluide idéal (ou un écoulement idéal) au lieu d'un fluide parfait. Dans ce cas le tenseur de contraintes est sphérique

$$\vec{\sigma} = -p \vec{\mathbb{I}},$$

et l'équation de Navier-Stokes se réduit à

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}} \quad \text{Équation d'Euler.} \quad (6.1)$$

On appelle (6.1) l'équation d'Euler, dont la solution est à rechercher avec l'équation de continuité

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0} \quad \text{Équation de continuité} \quad (6.2)$$

et l'équation d'état de fluide $F(\rho, p, T) = 0$. Cette équation est remplacée par

$$\rho = \text{constante}$$

pour un fluide incompressible, ou

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = 0 \\ p = R\rho T \end{cases}$$

pour un gaz parfait, pour lequel le transfert thermique par conduction est supposé négligeable (conductivité thermique nulle) et les changements d'état sont supposés réversibles, s étant l'entropie du fluide.

6.2. L'équation du vecteur tourbillon

Nous admettons dans ce qui suit que la masse volumique est constante, et la force volumique est soit la force de la pesanteur ou soit une autre force qui dérive d'une fonction potentielle :

$$\vec{f} = -\nabla \Phi.$$

L'équation d'Euler s'écrit alors sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi, \\ \rho = \text{constante.} \end{cases} \quad (6.3)$$

Pour trouver l'équation qui régit le vecteur tourbillon nous appliquons l'opérateur rot ($\nabla \wedge$) à l'équation d'Euler, mais notons d'abord que

$$\nabla \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}$$

où $\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{v}$. Ensuite, on peut montrer que

$$\nabla \wedge (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v},$$

où nous avons utilisé $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ et $\nabla \cdot \vec{\omega} = 0$. De plus, puisque pour toute fonction scalaire f , $\nabla \wedge \nabla f = 0$, l'équation du vecteur tourbillon se réduit à

$$\boxed{\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v}}, \quad (6.4a)$$

ou

$$\boxed{\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v}}. \quad (6.4b)$$

Cette équation nous dit que le taux du changement du vecteur tourbillon associé à une particule fluide au cours de son mouvement est égale à $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v}$.

► **REMARQUE 6.1 : [Écoulement bidimensionnel]** Pour un écoulement bidimensionnel

$$\vec{v} = u(x, y)\vec{i} + v(x, y)\vec{j}$$

on a $\vec{\omega} = \omega(x, y)\vec{k}$. Par conséquent on a

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} = \omega(x, y) \frac{\partial}{\partial z} (u(x, y)\vec{i} + v(x, y)\vec{j}) = 0$$

ce qui montre que la "vorticité" est conservée. Notons que ce résultat s'applique aux régions où l'effet de la viscosité est négligeable, car (6.4) dérive de l'équation d'Euler. ◀

► **REMARQUE 6.2 : [L'équation du vecteur tourbillon pour un écoulement quelconque]** Soit σ la coordonnée curviligne le long de fil tourbillonnaire et $\vec{\tau}$ et \vec{n} les vecteurs unitaires parallèle et normal à σ . Alors

$$\vec{\omega} \cdot \nabla = \omega \frac{\partial}{\partial \sigma}.$$

Il s'en suit qu'en posant $\vec{v} = v_1 \vec{\tau} + v_2 \vec{n}$, $(\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v})$ devient

$$\vec{\omega} \cdot \nabla = \omega \vec{\tau} \frac{\partial v_1}{\partial \sigma} + \omega v_1 \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial \sigma} + \omega \frac{\partial (v_2 \vec{n})}{\partial \sigma}.$$

Notons que les changements en v_1 le long du fil tourbillonnaire, traduit par le terme $\partial v_1 / \partial \sigma$, conduisent à l'élongation de fil tourbillonnaire, et à l'accroissement (si $\partial v_1 / \partial \sigma > 0$) de sa rotation. Les termes restants (dans le deuxième membre) reflètent le réajustement dans le vecteur tourbillon consistant avec la rotation de fil tourbillonnaire. ◀

6.3. Le théorème de circulation de Kelvin

Soit \mathcal{C} une courbe *matérielle* (arbitraire) fermée qui est portée par l'écoulement. Alors on définit la circulation Γ autour de \mathcal{C} par

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{\ell}$$

où $d\vec{\ell}$ est un arc infinitésimal le long de \mathcal{C} .

Considérons un écoulement d'un fluide idéal et barotrope $\rho = \rho(p)$, et calculons le taux de variation temporel de Γ en suivant \mathcal{C} dans son mouvement. On a

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{d}{dt} \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \oint_{\mathcal{C}} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot d\vec{\ell}) \quad \text{car la courbe est matérielle} \\ &= \oint_{\mathcal{C}} \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{\ell} + \vec{v} \cdot \frac{d}{dt}(d\vec{\ell}) \right] \\ &= \oint_{\mathcal{C}} \left[- \left(\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi \right) \cdot d\vec{\ell} + \vec{v} \cdot d\vec{v} \right] \quad (\text{cf. l'équation (6.3)}) \\ &= \oint_{\mathcal{C}} \left[- \frac{dp}{\rho} - d\Phi + d \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) \right] \\ &= - \left[\oint \frac{dp}{\rho} + \Phi - \frac{1}{2} \vec{v}^2 \right]_{\mathcal{C}} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

car \mathcal{C} est une courbe fermée, et l'expression à l'intérieur de la parenthèse, qui représente un potentiel, est univoque.

On appelle le résultat exprimé par

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad \text{Théorème de Kelvin}} \tag{6.6}$$

le théorème de Kelvin.

Par ailleurs, en utilisant le théorème de Stokes on peut écrire

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS \tag{6.7}$$

où la surface S est délimité par \mathcal{C} . Par conséquent (6.6) implique

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS = 0 \tag{6.8}$$

ce qui montre que :

le taux de débit tourbillonnaire à travers toute surface S portée par un écoulement de fluide idéal, barotrope et soumis à un champ conservatif de force, reste constante.

6.4. Théorème de Bernoulli

6.4.1. Cas d'un écoulement irrotationnel. Un écoulement est dite irrotationnel si $\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{v} = 0$. Dans ce cas le vecteur vitesse dérive d'une fonction potentielle appelée potentiel de vitesse :

$$\vec{v} = \nabla\phi. \tag{6.9}$$

En utilisant l'identité vectorielle

$$\vec{v} \cdot \nabla\vec{v} + \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) = \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) \tag{6.10}$$

l'équation d'Euler se transforme ainsi en

$$\nabla \left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + \Phi \right] = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \tag{6.11}$$

La forme de cette équation suggère d'écrire le deuxième membre sous la forme

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla F(\rho, p)$$

pour que (6.11) ait un sens avec $F(\rho, p)$ est à déterminer. À cette fin, supposons que le fluide soit barotrope, c'est-à-dire $\rho = \rho(p)$. Alors il est immédiat que

$$\frac{1}{\rho(p)} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{1}{\rho(p)} \frac{\partial p}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{1}{\rho(p)} dp$$

ce qui conduit dans le cas général à

$$\frac{1}{\rho(p)} \nabla p = \nabla \int \frac{dp}{\rho(p)}. \tag{6.12}$$

Par conséquent (6.11) s'écrit sous la forme

$$\nabla \left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + \Phi + \int \frac{dp}{\rho(p)} \right] = 0 \tag{6.13}$$

qui s'intègre en

$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\phi ^2 + \Phi + \int \frac{dp}{\rho(p)} = C(t)$	Équation de Bernoulli pour un écoulement irrotationnel	(6.14)
--	---	--------

où $C(t)$ est une fonction du temps seulement.

Pour un écoulement irrotationnel, incompressible et stationnaire (6.14) se réduit à

$\frac{1}{2} \vec{v}^2 + \Phi + \frac{p}{\rho} = \text{constante.}$	Bernoulli pour un écoulement irrotationnel, incompressible et stationnaire	(6.15)
---	---	--------

6.4.2. Cas d'un écoulement rotationnel. Considérons maintenant la situation où l'écoulement est rotationnel et barotrope en régime permanent (stationnaire). Dans ce cas l'équation d'Euler peut s'intégrer le long des lignes de courant si les forces volumiques dérivent d'une fonction potentielle, $\vec{f} = -\nabla\Phi$. L'équation d'Euler peut s'écrire alors sous la forme

$$\vec{v} \wedge \vec{\omega} = \nabla \left[\frac{1}{2} \vec{v}^2 + \Phi + \int \frac{dp}{\rho(p)} \right] = \nabla \mathcal{H} \quad (6.16)$$

où

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \vec{v}^2 + \Phi + \int \frac{dp}{\rho(p)} \quad (6.17)$$

est une fonction scalaire dénommée *fonction de Helmholtz*. Alors, le vecteur $\vec{v} \wedge \vec{\omega}$ est normal à la surface $\mathcal{H} = \text{constante}$ qui, lui même, est normal à la fois à \vec{v} et $\vec{\omega}$. Par conséquent toute surface $\mathcal{H} = \text{constante}$ contient les lignes de courant et fils tourbillonnaires, comme montré sur la figure 6.1. Soit $\vec{\tau}$ un vecteur pris le long d'une ligne de courant, c'est-à-dire

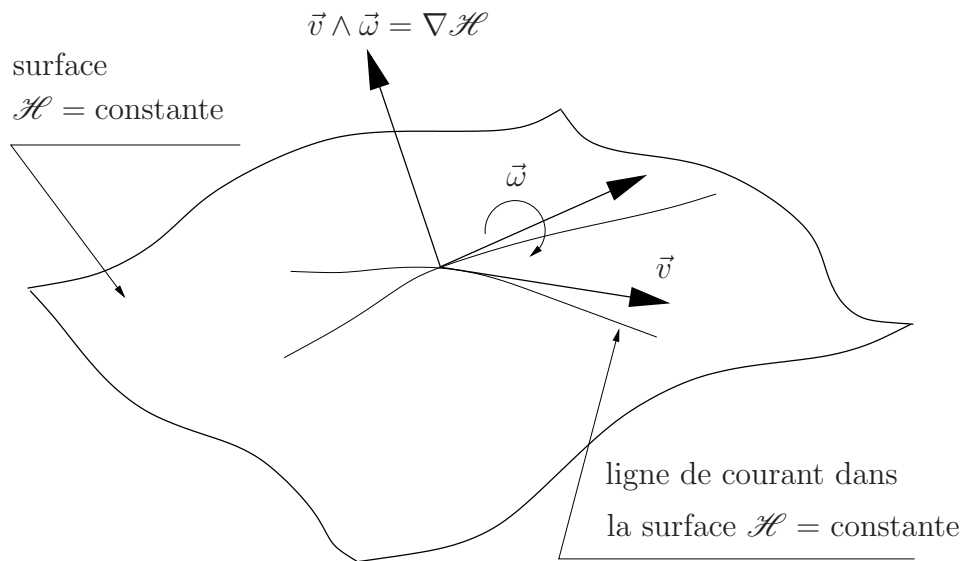


FIGURE 6.1. Surface $\mathcal{H} = \text{constante}$, ligne de courant et fil tourbillonnaire: Bernoulli pour un écoulement rotationnel.

parallèlement à \vec{v} . Alors

$$\vec{\tau} \cdot \vec{v} \wedge \vec{\omega} = 0$$

et par conséquent on trouve

$$\vec{\tau} \cdot \nabla \left[\frac{1}{2} \vec{v}^2 + \Phi + \int \frac{dp}{\rho(p)} \right] = 0.$$

Puisque $(\vec{\tau} \cdot \nabla)$ est la dérivée le long de ligne de courant il vient alors que

$\frac{1}{2} \vec{v}^2 + \Phi + \int \frac{dp}{\rho(p)} = \mathcal{H}$	Équation de Bernoulli pour un écoulement rotationnel et stationnaire	(6.18)
--	--	--------

dans laquelle \mathcal{H} est constante.

Exemple 6.1 : Considérons l'écoulement d'un liquide débouchant d'un petit orifice situé à la parois (et près de la base) d'un réservoir de grande dimension comme montré sur la figure 6.2. L'écoulement à tout instant est presque stationnaire, et si le tuyau n'est pas trop long et de diamètre pas trop petit, l'effet de viscosité serait confiné à une petite région au voisinage immédiat des parois du tuyau dénommé couche limite. Les lignes de courant commencent alors à la surface libre, et convergent en s'approchant vers le tuyau.

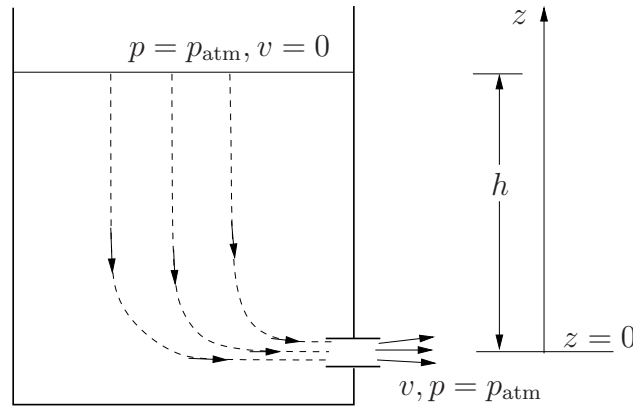


FIGURE 6.2. Écoulement issu d'un réservoir.

Considérons l'une de ces lignes de courant. À la surface libre la vitesse est V , le potentiel de la pesanteur (par rapport à $z = 0$) est gh , et la pression est égale à la pression atmosphérique p_{atm} . À la sortie de l'orifice, la vitesse est v , le potentiel de la pesanteur est nul, et la pression est aussi égale la pression atmosphérique p_{atm} . Donc l'équation de Bernoulli appliquée à une ligne de courant conduit à

$$\frac{1}{2}V^2 + gh + p_{\text{atm}}/\rho = v^2 + p_{\text{atm}}/\rho.$$

Selon l'équation de continuité il existe une relation entre les vitesse V et v . Si $A(h)$ désigne l'aire de la surface libre et a celui de l'orifice, le débits massiques respectifs s'écrivent alors comme $\rho A(h)V$ et ρav , dans lesquels V et v représentent respectivement les valeurs moyennes. Il vient

$$VA(h) = va.$$

De plus, puisque la vitesse à la surface libre est

$$V = -\frac{dh}{dt} \quad (\text{pourquoi ?})$$

on peut obtenir une équation pour $h(t)$. On trouve

$$2gh = V^2 \left[\left(\frac{A}{a} \right)^2 - 1 \right]$$

ou

$$\frac{dh}{dt} = - \left\{ 2gh \left[\left(\frac{A}{a} \right)^2 - 1 \right]^{-1} \right\}^{1/2}.$$

Il est évident qu'on peut facilement intégrer cette équation si $A(h)$ est constant, et encore plus facilement lorsque $A/a \gg 1$, ce qui permet la justification du modèle d'écoulement au régime permanent. Dans ce cas on a

$$\frac{dh}{dt} = - \left[2gh \frac{a^2}{A^2} \right]^{1/2}$$

d'où

$$h = \left[- \left(\frac{1}{2} g \frac{a^2}{A^2} \right)^{1/2} t + h_0^{1/2} \right]^2$$

où $h(t=0) = h_0$. Il vient alors que le temps nécessaires pour vider le réservoir, dans ce cas, est

$$(A/a)(2h_0/g)^{1/2}.$$

Par ailleurs, dans le cas d'un réservoir assez grand pour que

$$\frac{1}{2} V^2 \ll gh$$

on obtient ce que l'on appelle le *théorème de Toricelli* :

$$v = \sqrt{2gh}. \quad \blacksquare$$



Exemple 6.2 : [Le tourbillon (vortex) de Rankin] On appelle vortex de Rankin le champ de vitesse défini par

$$\begin{cases} \vec{v} = \frac{1}{2} r \Omega \vec{e}_\theta, & r < a, \\ \vec{v} = \frac{1}{2} a^2 \Omega \vec{e}_\theta / r, & r > a. \end{cases}$$

Il s'agit d'un écoulement où il n'y a pas de frontières auxquelles des effets visqueux ou de conduction thermique peuvent se produire ; l'interface $r = a$ induit une discontinuité dans le gradient de vitesse ce qui, dans un écoulement réel, produit des forces visqueuses. Néanmoins, l'effet de cette région de discontinuité sera, dans ce qui suit, négligé et on va supposer que l'équation d'Euler s'applique partout.

Supposons de plus que la force de pesanteur agit dans la direction des z avec

$$\Phi = \rho g z.$$

Alors, puisque $\vec{\omega} = 0$ dans la région $r > a$, il est immédiat que l'équation de Bernoulli s'y applique partout :

$$\frac{1}{8} \Omega^2 a^4 / r^2 + gz + p/\rho = \text{constante} = p_\infty / \rho$$

car la vitesse tend vers zéro quand $r \rightarrow \infty$. Donc

$$p = p_\infty - \frac{1}{8}\Omega^2 a^4/r^2 - g\rho z \quad \text{pour } r > a.$$

Pour $r < a$ le vecteur tourbillon est constant,

$$\omega = \nabla \wedge v = \Omega_k$$

et la fonction de courant peut s'écrire sous la forme

$$\psi = -\frac{1}{4}r^2\Omega.$$

De plus,

$$\vec{v} \wedge \vec{\omega} = \frac{1}{2}r\Omega^2\vec{e}_r = \nabla \left[\frac{1}{2}\vec{v}^2 + \Phi + p/\rho \right]$$

ce qui conduit à

$$\frac{1}{2}r\Omega^2 = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{2}\vec{v}^2 + \Phi + p/\rho \right]$$

car $\vec{e}_r \cdot \nabla = \partial/\partial r$. En intégrant cette équation on obtient la version de l'équation de Bernoulli pour le cas d'un vecteur tourbillon constant, qui se traduit par

$$-\frac{1}{4}\Omega^2 r^2 + \frac{1}{8}\Omega^2 r^2 + gz + p/\rho = \text{constante}, \quad r < a$$

pour le problème étudié. La constante est choisie pour que la pression soit continue en $r = a$. On obtient alors

$$-\frac{1}{4}\Omega^2 a^2 + p_\infty/\rho$$

pour la constante. D'où

$$p = p_\infty - \frac{1}{4}\Omega^2 a^2 + \frac{1}{8}\Omega^2 r^2 - gz, \quad \text{pour } r < a.$$

Notons que pour $r < a$ l'équation

$$\frac{1}{2}\vec{v}^2 + \Phi + p/\rho$$

demeure constante le long de toute ligne de courant $r = \text{constante}$, mais la valeur de la constante de Bernoulli change d'une ligne de courant à une autre de telle façon que l'équation final de la pression soit de forme différente. Cela provient de mouvement tourbillonnaire pour dans cette région, $r < a$. Un tourbillon peut être mis en mouvement dans un grand volume de liquide avec un surface libre à laquelle la pression est constante, disons la pression atmosphérique, p_∞ . Alors, on obtient à la surface libre

$$p_\infty = p_\infty - \frac{1}{8}\Omega^2 a^4/r^2 - g\rho z, \quad r > a,$$

$$p_\infty = p_\infty - \frac{1}{4}\Omega^2 a^2 + \frac{1}{8}\Omega^2 r^2 - g\rho z, \quad r < a.$$

D'où

$$\begin{cases} z = -\Omega^2 a^4/8gr^2, & r > a, \\ z = -\Omega^2 a^2/4g + \Omega^2 r^2/8g, & r < a. \end{cases} \quad \blacksquare$$



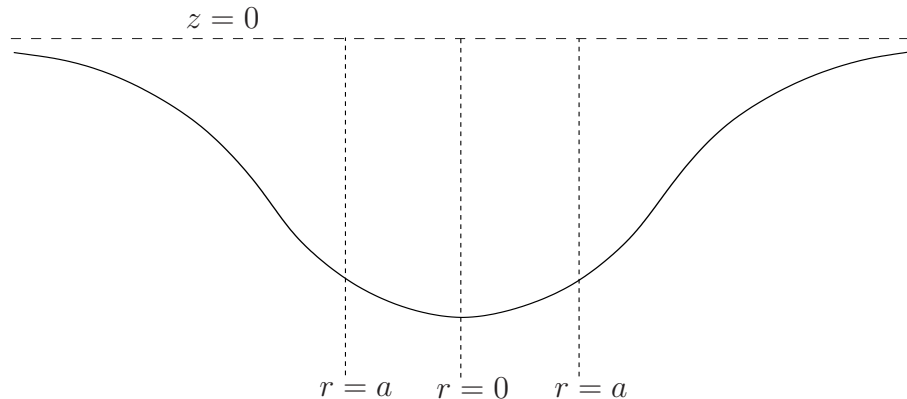


FIGURE 6.3. Tourbillon de Rankin.

6.4.3. Appareilles de mesures.

6.4.3.1. *Tube de Pitot.* Le tube de Pitot est un petit dispositif simple destiné à mesurer la vitesse à l'aide la pression. Ce dispositif prend la forme d'un tube mince dont l'axe est aligné avec l'écoulement de telle manière que son ouverture soit orientée dans le sens opposé à celui-ci, (figure 6.4). L'ouverture A du tube constitue un point d'arrêt car la vitesse y est égale à zéro. Cela nous permet de déterminer la constante de Bernoulli. Le tube de Pitot est aussi muni d'une deuxième ouverture B sur sa paroi où la pression est notée par p . La différence de pression $p_0 - p$ est à mesurer par un manomètre convenable, voir la figure 6.5. La ligne de courant passant par A passe aussi par B où la vitesse juste à l'extérieur de la couche limite s'approche de U . Donc, l'équation de Bernoulli appliquée sur une ligne de courant passant par A et B conduit à

$$p + \frac{1}{2}\rho U^2 = p_0$$

et par conséquent

$$U = \{2(p_0 - p)/\rho\}^{1/2}.$$

la différence de pression $p_0 - p$ est à mesurer par un manomètre convenable, par exemple comme montré sur la figure 6.5.

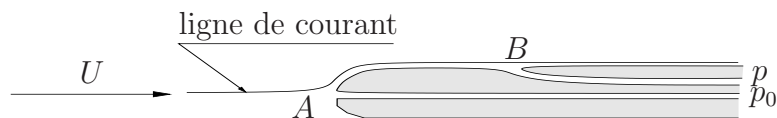


FIGURE 6.4. Tube de Pitot.

6.4.3.2. *Tube de Venturi.* Le Tube de venturi, construit selon le schéma montré sur la figure 6.6, est un dispositif destiné à mesurer le débit massique dans un conduit. Le tube est muni de deux trous pour capter la pression locale p_1 et p_2 . Alors, en en négligeant l'effet de la viscosité on peut déterminer le débit Q

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2.$$

D'après l'équation de Bernoulli appliquée sur une ligne de courant on a

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

d'où

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 [1 - (A_2/A_1)^2].$$

La mesure de la différence de pression $p_1 - p_2$ nous permettra alors de déterminer le débit.

► **REMARQUE 6.3 :** *Il est important de noter que cette formule n'est pas exacte car les conditions de l'équation de Bernoulli ne sont pas tous réalisables compte tenu de l'effet de viscosité. Néanmoins, un étalonnage du tube de Venturi basée sur des mesures de pression correspondants aux vitesses données rend satisfaisantes les mesures effectuées par cet appareil.* ◀

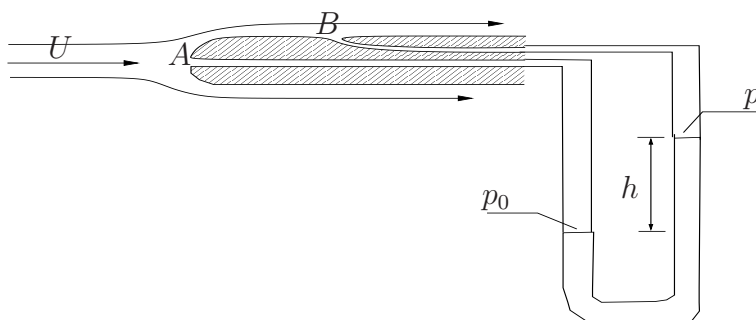


FIGURE 6.5. Tube de Prandtl.

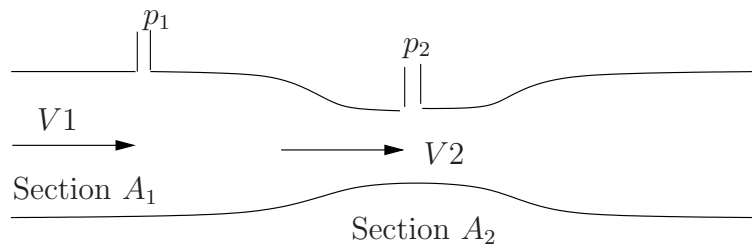


FIGURE 6.6. Tube de Venturi.

CHAPITRE 7

ÉQUATION DE BERNOULLI ET PERTE DE CHARGE

7.1. L'équation de Bernoulli et la perte de charge

Reprenons l'équation de Bernoulli pour un écoulement incompressible et stationnaire :

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{Cte} = C$$

Il est commode d'appeler la constante au deuxième membre *charge*; elle s'exprime sous la forme de l'hauteur d'une colonne du liquide :

$$H = \frac{C}{g}. \quad (7.1)$$

Alors que l'équation de Bernoulli s'applique aux écoulements en fluide parfait, les fluides réels sont visqueux et les écoulements sont souvent non uniformes. Par conséquent, pour l'écoulement dans une conduite on utilise la vitesse moyenne U calculé à partir du débit volumique Q divisé par la section S : $U = Q/S$.

De plus, dans un écoulement permanent le fluide perd d'énergie pour vaincre les forces de frottement interne (viscosité/turbulence) ce qui conduit à une chute de pression appelée *perte de charge*. Il est commode d'appeler la perte de charge liée à la longueur et la rugosité de la conduite ainsi qu'à la viscosité, perte de charge "linéaire" (ou "linéique") ou *régulière* H_r . Quand les pertes de charge sont dues aux formes géométriques de canalisation (coude, tés, élargissement ou contraction brusque, cônes, joints, clapets, passage à travers une grille, vanne, robinet, ...) on les appelle *perte de charge singulière*, H_s .

7.1.1. Coefficient de perte de charge. En générale et dans la plupart des cas on trouve expérimentalement que les pertes de charge sont proportionnelle au carrée de la vitesse moyenne U et s'expriment sous la forme :

$$(H_r + H_s) = K \frac{U^2}{2g}. \quad (7.2)$$

7.1.2. Lignes de charges : représentation graphique. Pour interpréter graphiquement l'équation de Bernoulli on pose $p^* = p + \rho g z$ qui représente l'énergie potentielle par unité de volume dans le champs de pesanteur, g , en presence de la pression p ; il s'agit de la charge obtenue au repos. C'est pourquoi on appelle $p^*/\rho g$ *charge piézométrique* ou *ligne piézométrique* dans lequel $p/(\rho g)$ représente la charge due à la pression et z la charge potentielle.

ÉQUATION DE BERNOULLI ET PERTE DE CHARGE

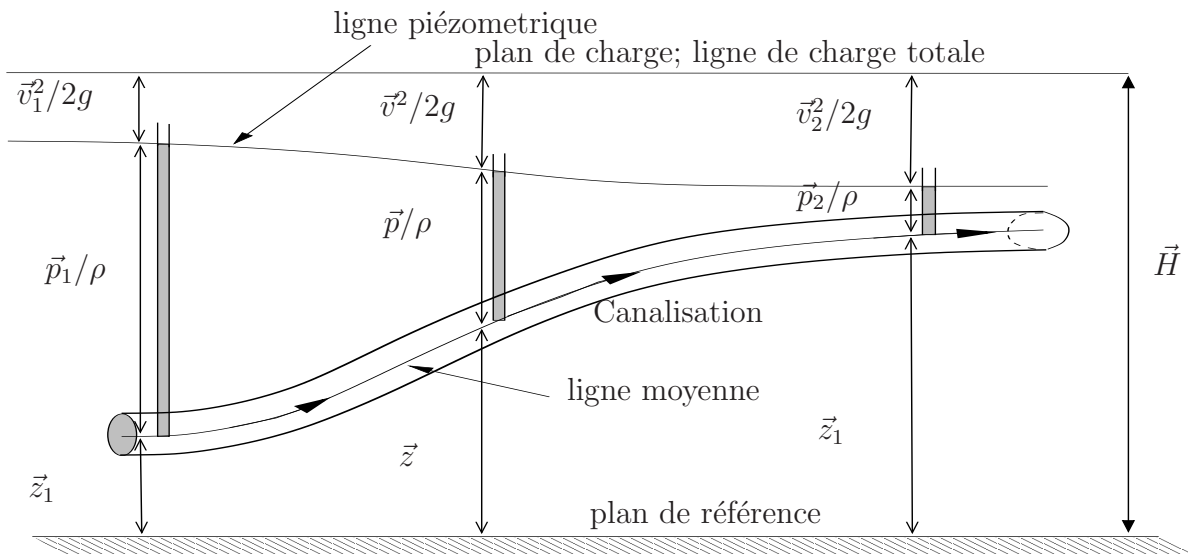


FIGURE 7.1. Représentation graphique de charge d'un écoulement dans une conduite.

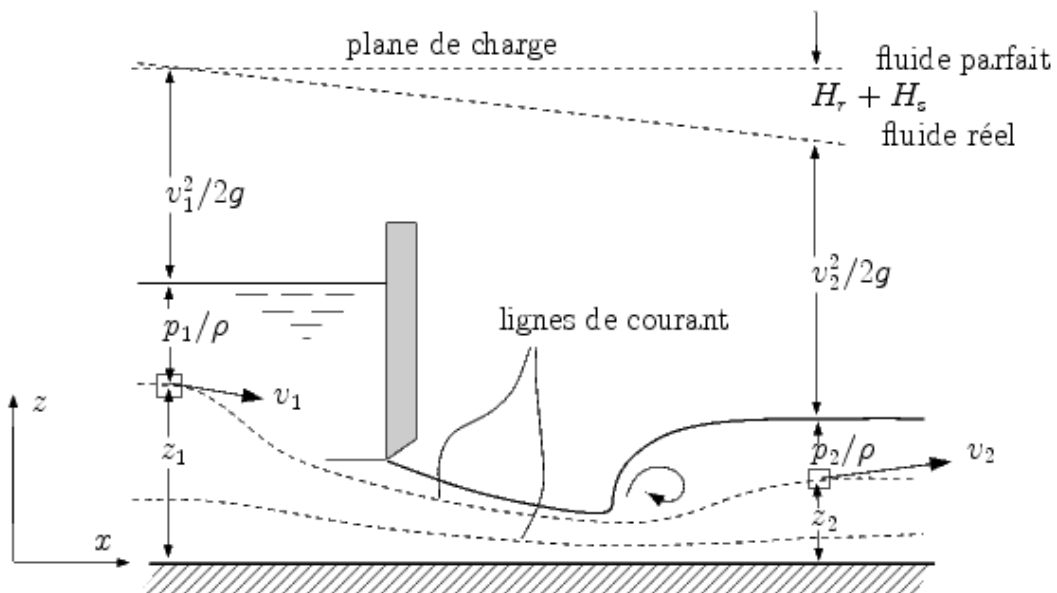
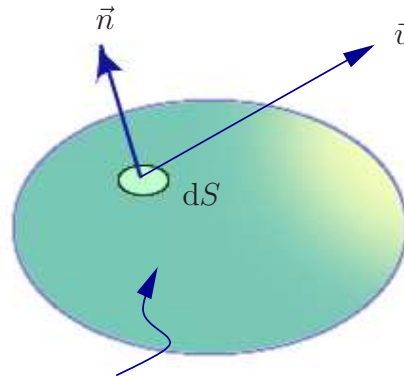


FIGURE 7.2. Représentation graphique de charge d'un écoulement à surface libre.

7.2. Équation de la conservation d'énergie

7.2.1. Premier principe de la thermodynamique. Le premier principe de la thermodynamique affirme que pour un système fermé :

$$dQ + dW = dE \quad (7.3)$$

Surface de contrôle, S , délimitant le volume de contrôle V FIGURE 7.3. Volume de contrôle VC délimité par la surface de contrôle SC .

où dQ est la chaleur reçue par un système thermodynamique, dW le travail fait par le système (d'où le signe négatif) et dE est le changement dans l'énergie du système en mouvement. On peut utiliser ce principe pour écrire l'équation de la conservation d'énergie pour un fluide en écoulement. En suivant une masse (et donc un système fermé), m , de fluide lors de son mouvement, le premier principe conduit à

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt} \quad (7.4)$$

On suppose que le système thermodynamique est constitué de la masse m du fluide qui, à l'instant t_o , est contenue dans la volume de contrôle VC , délimité par la surface de contrôle Sc .

Si e désigne l'énergie par unité de masse, on a alors :

$$E_{\text{système}} = \int_{\text{système}} e \, dm = \int_{\text{système}} e \, \rho \, dV \quad (7.5)$$

avec

$$e = \underbrace{\frac{1}{2}v^2}_{\text{Énergie cinétique}} + \underbrace{u}_{\text{Énergie interne}} + \underbrace{gz}_{\text{Énergie potentielle}} \quad (7.6)$$

où u est l'énergie interne du système par unité de masse. Notons qu'en générale e inclue toutes les formes d'énergie.

7.2.2. Deuxième principe de la thermodynamique. Alors que le premier principe de la thermodynamique affirme la conservation de l'énergie mais sans imposer des conditions sur les types d'échanges possibles ou sur le sens de l'évolution, le deuxième principe permet de prévoir l'évolution de système. Ce principe pose la fondation pour le sens de transformation thermodynamique. Si $d\hat{S}$ désigne le changement de l'entropie du système \hat{S} et dQ

ÉQUATION DE BERNOULLI ET PERTE DE CHARGE

la quantité de chaleur échangée à la température T , le deuxième principe affirme que

$$d\hat{S} \geq \frac{dQ}{T} \quad (7.7)$$

L'équation d'énergie, de la conservation de masse et de quantité de mouvement sont à compléter par l'équation d'état du fluide qui s'écrit sous la forme

$$p = p(\rho, T) \quad (7.8)$$

7.3. L'équation d'énergie

Pour une masse de fluide en mouvement, dont le volume coïncide avec le volume de contrôle à un instant donnée, on a selon le théorème de transport de courant (B.1) :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e\rho \, dV + \int_{SC} e\rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = \frac{dQ}{dt} + \frac{dW}{dt} \quad (7.9)$$

La quantité du travail reçue par un fluide contenu dans un volume matériel (en l'occurrence le volume de contrôle, VC) par unité de temps est constitué de la contribution des forces de contraintes

$$W_s = \int_{S_c} \vec{v} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \, dS = \int_{VC} \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) \, dV.$$

La contribution de contraintes de cisaillement est, en général, petite et par conséquence négligeable par rapport au travail fait par la force de pression, \dot{W}_p , donné par

$$d\dot{W}_p = -p\vec{v} \cdot \vec{n}dS = -pv_n dS \quad (7.10)$$

et par conséquent

$$\dot{W}_p = - \int_{SC} pv_n \, dS \quad (7.11)$$

La chaleur Q apportée au fluide peut être seulement importante dans les écoulements avec de transfert thermique. De travail peut être aussi apporté au fluide par des machines externes dont la contribution nous notons par \dot{W}_m par unité de temps.

L'équation d'énergie s'écrit alors

$$\dot{Q} + \dot{W}_m + \dot{W}_p = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} (u + gz + \frac{1}{2}v^2)\rho dV + \int_{SC} (u + gz + \frac{1}{2}v^2)\rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (7.12a)$$

$$\dot{Q} + \dot{W}_m - \int_{SC} p v_n dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} (u + gz + \frac{1}{2}v^2)\rho dV + \int_{SC} (u + gz + \frac{1}{2}v^2)\rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (7.12b)$$

$$\dot{Q} + \dot{W}_m = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} (u + gz + \frac{1}{2}v^2)\rho dV + \int_{SC} (u + gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2)\rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (7.12c)$$

$$\dot{Q} + \dot{W}_m = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} (u + gz + \frac{1}{2}v^2)\rho dV + \int_{SC} (h + gz + \frac{1}{2}v^2)\rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (7.12d)$$

où $h = u + p/\rho$ est l'enthalpie massique du fluide.

Supposons maintenant que le volume de contrôle est un tube de courant et les grandeurs comme la densité, la vitesse, la pression et d'autres variables sont uniformes à travers toute section du tube ou sont des valeurs moyennes. Alors, on peut écrire pour un écoulement permanent

$$\dot{Q} + \dot{W}_m = (\rho v S)_2 \left(h + gz + \frac{1}{2}v^2 \right)_2 - (\rho v S)_1 \left(h + gz + \frac{1}{2}v^2 \right)_1 \quad (7.13)$$

où, ici, S représente la section du tube de courant.

La continuité impose $(\rho v S)_1 = (\rho v S)_2 = \dot{m}$. Ainsi, en fonction de valeurs intensives $q = \dot{Q}/\dot{m}$, $w_m = \dot{W}_m/\dot{m}$, l'équation (7.13) s'écrit sous la forme

$$(\rho v S)_1 \left(h + gz + \frac{1}{2}v^2 \right)_1 = \left(h + gz + \frac{1}{2}v^2 \right)_2 - q - w_m \quad (7.14)$$

7.4. Équation de Bernoulli : équation de l'énergie

Dans un écoulement incompressible non-visqueux et permanent l'énergie est conservée le long de toute ligne de courant :

$$\underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\text{Énergie cinétique}} + \underbrace{p}_{\text{Travail fait par les forces de pression}} + \underbrace{\rho g z}_{\text{Énergie potentielle}} = \text{Cte.} = e$$

Dans cette équation le fluide est supposé parfait et dans cet optique la vitesse est supposé uniforme. Mais dans la pratique les fluides réels sont visqueux ce qui rend la répartition de

ÉQUATION DE BERNOULLI ET PERTE DE CHARGE

vitesse à travers une section S non uniforme. Pour tenir compte de cette répartition une correction de l'énergie cinétique est effectuée.

$$\underbrace{\int_S \left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)(\vec{v} \cdot \vec{n})dS}_{\text{Flux de l'énergie cinétique à travers } S} = \alpha(\rho U S)\frac{U^2}{2} \quad (7.15)$$

où U est la vitesse moyenne à travers S . On appelle α *coefficient de correction de l'énergie cinétique*; α varie donc d'une section à une autre. Rappelons que pour un écoulement à un débit constant il est commode en pratique d'écrire

$$\left(\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z\right)_1 = \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z\right)_2 + H_{\text{frottement}} - H_{\text{pompe}} + H_{\text{turbine}} \quad (7.16)$$

Écoulement potentiel

8.1. Généralités

8.1.1. Introduction. Soit \mathcal{C} une courbe matérielle fermée que l'on suit dans son mouvement. Selon le théorème de Kelvin pour un fluide non visqueux ($\mu = 0$) et barotrope ($\rho = f(p)$), la circulation Γ autour \mathcal{C} est toujours nulle s'elle l'est à un instant quelconque. Évidemment un tel fluide 'idéal' n'existe pas dans la nature, mais on peut néanmoins envisager des conditions où un tel écoulement pourrait approximativement avoir lieu suffisamment loin d'obstacles ou de frontières. On voit alors qu'on peut anticiper que $\Gamma = 0$ dans des régions assez étendues. Donc il est utile d'étudier les écoulements irrotationnels, pour lesquels on doit avoir

$$\nabla \wedge \vec{v} = 0. \quad (8.1a)$$

Cela implique qu'il existe une fonction ϕ continûment dérivable telle que

$$\vec{v} = \nabla \phi \quad (8.1b)$$

ce qui, avec l'équation de continuité

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (8.1c)$$

pour un écoulement incompressible, conduit à l'équation de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (8.1d)$$

On appelle *écoulement potentiel* tout écoulement irrotationnel d'un fluide parfait incompressible satisfaisant au système (8.1). Alors il suffit de satisfaire l'équation de Laplace (8.1d) et les conditions aux limites appropriées pour déterminer l'écoulement. Le problème posé par ce système est entièrement cinématique car il s'agit de déterminer le potentiel ϕ . En d'autre terme, le fait que l'écoulement soit irrotationnel conduit à dire que **si l'écoulement est cinématiquement admissible il le serait dynamiquement**. Le problème dynamique se traduit alors par l'équation de Bernoulli pour un écoulement irrotationnel (6.14)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \Phi + \int \frac{dp}{\rho(p)} = C(t). \quad (8.2)$$

8.1.2. Propriétés générales de l'équation de Laplace.

8.1.2.1. *Linéarité de $\nabla^2\phi = 0$.* Puisque l'équation de Laplace est linéaire on peut appliquer le principe de superposition à la solution ϕ pour un problème donné. Cela revient à dire que la solution ϕ peut se reconstruire à partir de solutions plus simples. Par exemple, si ϕ_1 et ϕ_2 sont solutions vérifiant respectivement $\nabla^2\phi_1 = 0$ et $\nabla^2\phi_2 = 0$, il s'en suit que la fonction $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$ est aussi une solution de $\nabla^2\phi = 0$.

8.1.2.2. *Unicité de solution dans une région finie.* Soit S une surface sur laquelle la composante normale $\vec{v} \cdot \vec{n}$ est donnée, et supposons qu'il existe deux solutions continues ϕ_1 et ϕ_2 satisfaisant à

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2\phi &= 0 && \text{à l'intérieur de } S. \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} &= f(\vec{r}), && \text{une fonction donnée sur } S. \end{aligned} \right\} \quad (8.3a)$$

Alors, si $\phi_3 = \phi_2 - \phi_1$ il vient

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2\phi_3 &= \nabla^2(\phi_2 - \phi_1) = 0 && \text{à l'intérieur de } S. \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n}(\phi_2 - \phi_1) = 0 && \text{sur } S. \end{aligned} \right\} \quad (8.3b)$$

Soit V le volume contenu dans S , et \mathcal{T} l'énergie cinétique qui lui est associée. Alors

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\rho \int_V (\nabla\phi_3)^2 dV.$$

Mais

$$\begin{aligned} (\nabla\phi_3)^2 &= \nabla \cdot (\phi_3 \nabla\phi_3) - \phi_3 \nabla^2\phi_3, \\ &= \nabla \cdot (\phi_3 \nabla\phi_3) \end{aligned}$$

car $\nabla^2\phi_3 = 0$. Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2}\rho \int_V \nabla \cdot (\phi_3 \nabla\phi_3) dV \\ &= \frac{1}{2}\rho \int_S \phi_3 \frac{\partial\phi_3}{\partial n} dS \end{aligned}$$

compte tenu du théorème de la divergence. Mais nous savons que $\partial\phi_3/\partial n = 0$ sur S , et par conséquent

$$\mathcal{T} = 0.$$

Or, puisque \mathcal{T} est l'intégrale de $(\nabla\phi_3)^2$ qui n'est pas négative, il vient alors que $(\nabla\phi_3)^2$ ne peut pas s'annuler si elle n'est pas égale à zéro partout dans V . Cela équivaut à dire que

$$\nabla\phi_3 = 0 \quad \text{partout à l'intérieur de } S.$$

Cela montre que ϕ_1 et ϕ_2 conduisent au même champ de vitesse partout dans S , et le problème n'a qu'une seule solution.

Remarque – ϕ_1 et ϕ_2 peuvent être différentes l'une de l'autre à une constante près sans produire aucun changement dans le champ de vitesse $\nabla\phi$. ■

8.1.2.3. *Unicité de ϕ pour une région infinie.* Soit V le volume délimité par les deux surfaces S_1 et S comme indiqué sur la figure 8.1; la surface S_1 est définie par la distance $r = R$ mesurée d'un point sur ou au voisinage de S .

Considérons maintenant la solution tridimensionnelle satisfaisant à

$$\phi = O(1/r)$$

lorsque $r \rightarrow \infty$, et supposons qu'il existe deux solutions ϕ_1 et ϕ_2 pour le problème

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 && \text{à l'extérieur de } S. \\ \phi &= O(1/r) && \text{quand } r \rightarrow \infty, \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= f(\vec{r}) && \text{sur } S. \end{aligned} \right\} \quad (8.4a)$$

Alors $\phi_3 = \phi_1 - \phi_2$ satisfait à

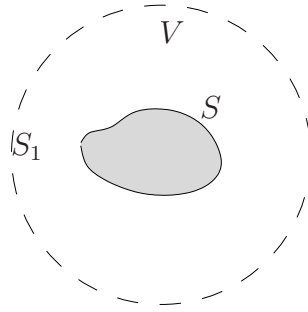


FIGURE 8.1. Schématisation pour §8.1.2.3.

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi_3 &= 0 && \text{à l'extérieur de } S. \\ \phi_3 &= O(1/r) && \text{quand } r \rightarrow \infty, \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial n} &= 0 && \text{sur } S. \end{aligned} \right\} \quad (8.4b)$$

Remarque – Notez que la différence entre deux fonctions qui sont de l'ordre $O(1/r)$ est, elle-même, $O(1/r)$. ■ Examinons maintenant l'énergie cinétique

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \phi_3)^2 dV.$$

Comme dans le cas précédent on peut montrer que

$$(\nabla \phi_3)^2 = \nabla \cdot (\phi_3 \nabla \phi_3)$$

et par conséquent le théorème de la divergence conduit à

$$\mathcal{T} = -\frac{1}{2} \rho \int_S \phi_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial n} dS + \frac{1}{2} \rho \int_{S_1} \phi_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial r} dS_1,$$

où le signe négatif provient de la direction du vecteur normal extérieur à S . Pour déterminer \mathcal{T} nous remarquons d'abord que le premier terme est nul car $\partial \phi_3 / \partial n = 0$ sur S . En ce qui

concerne le deuxième terme, on peut l'estimer de la manière suivante :

$$\begin{cases} dS_1 = O(R^2) & \text{car la sphère est d'une aire égale à } 4\pi R^2, \\ \phi_3 = O(1/R) & \text{à } r = R \text{ pour } R \text{ grand,} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial r} = O(R^{-2}) & \text{car } \phi_3 = O(1/R). \end{cases}$$

Il vient alors que

$$\int_{S_1} \phi_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial r} dS_1 = O(1/R)$$

qui tend vers zéro lorsque $R \rightarrow \infty$.

Donc l'énergie cinétique totale dans la région infinie à l'extérieur de S est nulle. Alors, comme précédemment, $\nabla \phi_3$ doit s'annuler partout à l'extérieur de S , et par conséquent ϕ_1 et ϕ_2 ont le même champ de vitesse.

Remarque – La démonstration d'unicité de la solution de l'équation de Laplace a été effectués pour des solutions tridimensionnelles. Pour le cas bidimensionnel d'une région infinie, il existe des difficultés associées à la circulation ainsi qu'avec une énergie totale qui devient infinie. ■

8.1.2.4. *Le théorème de Kelvin d'énergie minimale* . Considérons un écoulement incompressible dans l'espace tri-dimensionnel entre les deux surfaces S_1 et S_2 montré sur la figure 8.2. Soit

$$\vec{v} = \nabla \phi$$

la solution qui fournit les composantes normales de vitesse à S_1 et S_2 . Soit \vec{v}' un champ arbitraire de vitesse satisfaisant à

$$\nabla \cdot \vec{v}' = 0 \quad \text{dans } V$$

qui se raccorde avec les vitesses normales à S_1 et S_2 . Soit \mathcal{T} et \mathcal{T}' les énergies cinétiques associées. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{T}' - \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \rho \int_V (\vec{v}'^2 - \vec{v}^2) dV \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_V \{(\vec{v}' - \vec{v})^2 + 2(\vec{v}' - \vec{v}) \cdot \vec{v}\} dV \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_V \{(\vec{v}' - \vec{v})^2 + 2\nabla \cdot [\phi(\vec{v}' - \vec{v})]\} dV \end{aligned}$$

car

$$\vec{v} = \nabla \phi,$$

et

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}' = 0.$$

Finalement, en utilisant le théorème de la divergence, la dernière intégrale peut s'écrire sous forme d'intégrale de surface sur les frontières :

$$\int_V \nabla \cdot [\phi(\vec{v}' - \vec{v})] dV = \int_S \phi(\vec{v}' - \vec{v}) \cdot d\vec{S} = 0$$

car \vec{v} et \vec{v}' ont les mêmes composantes normales à S_1 et S_2 . Alors,

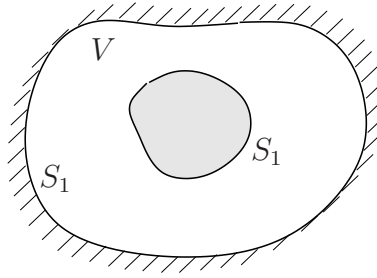


FIGURE 8.2. Schématisation pour §8.1.2.4.

$$\mathcal{T}' - \mathcal{T} = \frac{1}{2}\rho \int_V (\vec{v}' - \vec{v})^2 dV,$$

qui est positive définie car \vec{v}' est différente de \vec{v} . Donc \mathcal{T}' est supérieure à \mathcal{T} , et par conséquent l'énergie cinétique d'écoulement potentiel est la moindre parmi celles fournies par toutes autres solutions admissibles pour l'écoulement à l'intérieur de V .

8.2. Écoulements plans irrotationnels d'un fluide incompressible

Soit (u, v) les composantes du vecteur vitesse \vec{v} associées aux coordonnées Cartésiennes (x, y) . Pour un fluide incompressible, l'équation de continuité se réduit alors à

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (8.5)$$

Dans ce cas on peut introduire une fonction de courant $\psi(x, y, t)$ définie à une constante près du temps t et déterminée par

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8.6)$$

dans laquelle t est considéré comme un paramètre et non comme une variable indépendante.

L'écoulement étant irrotationnel $\nabla \wedge \vec{v} = 0$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (8.7)$$

ce qui implique qu'il existe une fonction $\phi(x, y, t)$, potentiel de vitesse, tel que

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (8.8)$$

où t est considéré aussi comme un paramètre. On appelle les lignes $\phi = \text{constante}$ les équipotentielles du champ de vitesse (u, v) .

Les équations (8.6) et (8.8) peuvent s'écrire sous forme vectorielle

$$\vec{v} = \nabla \phi = \nabla \psi \wedge \vec{k}, \quad (8.9)$$

ou

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases} \quad (8.10)$$

On appelle ces relations les *équations de Cauchy-Riemann*. Par suite, il existe une *fonction analytique* $f(z, t)$ de la variable complexe $z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, pouvant éventuellement dépendre de t , qui est dérivable par rapport à z ,

$$f(z, t) = \phi(x, y, t) + i\psi(x, y, t) \quad (8.11)$$

où $i^2 = -1$.

THÉORÈME 8.2.1 (Dérivabilité de $f(z)$).

Soit $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ une fonction dérivable en $z = x + iy$. Alors $\phi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ sont dérivables par rapport à x et y en tout point (x, y) tel que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

◀ Il existe une limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{df}{dz} = f'(z)$$

quelque soit le chemin utilisé pour approcher le point z .

Supposons d'abord que h tend vers zéro en demeurant réelle ($h = r$). Dans ce cas

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\phi(x+r, y) + i\psi(x+r, y) - \phi(x, y) - i\psi(x, y)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\phi(x+r, y) - \phi(x, y)}{r} + i \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\psi(x+r, y) - \psi(x, y)}{r} \end{aligned}$$

d'où

$$f'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Posons maintenant $h = is$, où $s \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\phi(x, y+s) + i\psi(x, y+s) - \phi(x, y) - i\psi(x, y)}{is} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\phi(x, y+s) - \phi(x, y)}{is} + i \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi(x, y+s) - \psi(x, y)}{is} \\ &= -i \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\phi(x, y+s) - \phi(x, y)}{s} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi(x, y+s) - \psi(x, y)}{s} \end{aligned}$$

d'où

$$f'(z) = -i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Les expressions pour $f'(z)$ aux deuxièmes membres de ces deux résultats sont égales

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Cela démontre le théorème. ▶

Alors, on a d'après le théorème que l'on vient de démontrer,

$$w(z, t) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = -i\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = u - iv. \quad (8.12)$$

On appelle $f(z, t)$ le *potentiel complexe de l'écoulement*, et $w(z, t)$ la vitesse complexe.

On peut exprimer la vitesse complexe en fonction de (v_r, v_θ) associées aux coordonnées polaires (r, θ) . Dans ce cas il suffit d'effectuer une différentiation par rapport à r de $f(z)$ avec θ fixé. On a alors $dz = e^{i\theta} dr$ et par conséquent

$$w(z, t) = \frac{df}{dz} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r} + i\frac{\partial\psi}{\partial r} \right) e^{-i\theta} = (v_r - iv_\theta)e^{-i\theta} \quad (8.13a)$$

Si l'on fixe r , on obtient

$$w(z, t) = \frac{df}{dz} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - i\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) e^{-i\theta} = (v_r - iv_\theta)e^{-i\theta}. \quad (8.13b)$$

Remarque – La multiplication du vecteur vitesse $u - iv$ par $e^{i\theta}$ induit une rotation d'angle θ de ce vecteur dans le sens de θ croissant. ■

8.3. Écoulements élémentaires

8.3.1. Écoulement rectiligne uniforme. Un écoulement rectiligne uniforme peut s'écrire sous la forme

$$\left. \begin{aligned} u = U &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ v = 0 &= \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

où U est constante. Alors, il en découle immédiatement

$$\phi = Ux, \quad \psi = Uy \quad (8.15a)$$

d'où

$$f(z) = \phi + i\psi = Uz. \quad (8.15b)$$

Un écoulement uniforme faisant un angle α avec l'axe des x est donnée par

$$f(z) = Ue^{-i\alpha}z. \quad (8.16)$$

8.3.2. Source et puits. Soit \mathcal{C} un cercle de rayon r et centré à l'origine O , et Q le débit par unité de longueur traversant \mathcal{C} . Une source ou un puits est caractérisé par un vecteur de vitesse $\vec{v} = (v_r(r), 0)$, et par le débit Q , dénommé intensité de la source ou du

puits. Alors

$$\begin{aligned}
 Q &= \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\ell \\
 &= \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \vec{e}_r(r d\theta) \\
 &= \oint_{\mathcal{C}} v_r(r d\theta) \\
 &= 2\pi r v_r.
 \end{aligned} \tag{8.17}$$

D'où

$$u = \frac{Q}{2\pi r^2} x, \quad v = \frac{Q}{2\pi r^2} y.$$

Par conséquent le potentiel complexe est

$$\frac{df}{dz} = u - iv = \frac{Q}{2\pi} \frac{x - iy}{r^2} = \frac{Q}{2\pi z}.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{Q}{2\pi} \ln z \\
 &= \frac{Q}{2\pi} \ln |z| + i \frac{Q}{2\pi} \arg z \\
 &= \underbrace{\frac{Q}{2\pi} \ln r}_{\phi} + i \underbrace{\frac{Q}{2\pi} \theta}_{\psi}
 \end{aligned}$$

à une constante près.

Dans le cas où la source est placée en z_0 le potentiel complexe s'écrit sous la forme

$$f_{z_0}(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0).$$

8.3.2.1. *Tourbillon ponctuel.* Le champ de vitesse d'un tourbillon ponctuel est caractérisé par des lignes de courant formant des cercles \mathcal{C} centré à l'origine et associé à une circulation Γ indépendante du rayon, c'est-à-dire $\vec{v} = (0, v_\theta)$ en coordonnées polaires (r, θ) . Alors

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} \\
 &= \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \vec{e}_\theta(r d\theta) \\
 &= \oint_{\mathcal{C}} r v_\theta d\theta
 \end{aligned}$$

ce qui suggère

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \oint_{\mathcal{C}} r v_\theta(r) d\theta && \text{car } \Gamma \text{ est indépendante } r \\
 \Gamma &= 2\pi r v_\theta(r)
 \end{aligned}$$

d'où

$$v_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Par suit, on a

$$u = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \frac{y}{r}$$

$$v = v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \frac{x}{r}.$$

Ainsi le potentiel complexe satisfait à

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= u - iv, \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y + ix}{r^2}, \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}, \end{aligned}$$

d'où

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z,$$

et

$$\begin{aligned} \phi + i\psi &= +\frac{\Gamma}{2\pi} \arg z - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln |z| \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln r. \end{aligned}$$

Le potentiel complexe d'un tourbillon centré en z_0 est donné par

$$f_{z_0}(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0).$$

8.3.2.2. *Doublet ou dipôle.* On appelle doublet l'écoulement plan irrotationnel construit par la superposition d'une source et un puits de même intensité absolue Q , et séparés par une distance ℓ tel que

$$\lim_{\substack{\ell \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} Q \times \ell \rightarrow \mu = \text{Cte.}$$

Soit donc une source d'intensité $+Q$ placée en (x', y') et un puits d'intensité $-Q$ situé en $(x' - \delta x', y')$. Alors le potentiel de vitesse ϕ en un point $M(x, y)$ est donné par

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \left\{ \ln [(x - x')^2 + y^2]^{1/2} - \ln [(x - x' + \delta x')^2 + y^2]^{1/2} \right\}$$

soit pour un doublet $\phi = \lim_{\substack{\delta x' \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} \frac{Q}{2\pi} \delta x' \frac{\ln [(x - x')^2 + y^2]^{1/2} - \ln [(x - x' + \delta x')^2 + y^2]^{1/2}}{\delta x'}$

$$= \frac{\mu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x'} \ln [(x - x')^2 + y^2]^{1/2}$$

$$= -\frac{\mu}{2\pi} \frac{x - x'}{r^2}$$

$$= -\frac{\mu \cos \theta}{2\pi r}$$

exprimé en coordonnées polaires (r, θ) dont l'origine est située en $(x', 0)$.

Les composantes du vecteur vitesse s'écrivent

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\mu \cos \theta}{2\pi r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r^2} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{aligned}$$

et la fonction de courant ψ

$$\Psi = \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r}.$$

Par suite, on a pour le potentiel complexe

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= u - iv \\ &= \frac{\mu \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{2\pi r^2} - i \frac{\mu 2 \cos \theta \sin \theta}{2\pi r^2} \\ &= \frac{\mu (\cos \theta - i \sin \theta)^2}{2\pi r^2} \\ &= \frac{\mu e^{-2i\theta}}{2\pi r^2} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

d'où

$$f(z) = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{z} = \frac{C}{z}$$

où $C = -\mu/2\pi$ est une constante.

8.3.2.3. *Écoulement dans un angle.* Considère l'écoulement $f(z) = Cz^n$ où C est une constante. En coordonnées polaires (r, θ) on a

$$f(z) = Cr^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

d'où $\phi = Cr^n \cos(n\theta)$ et $\psi = Cr^n \sin(n\theta)$. On voit immédiatement que les droites $\theta = 0$ et θ/n font parties des lignes de courant car $v_\theta = 0$. on a

$$w(z) = \frac{df}{dz} = nCr^{n-1}[\cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta].$$

On voit que la vitesse est nulle au sommet de l'angle si $n > 1$, c'est-à-dire $\theta < \pi$, et qu'elle est infinie si $n < 1$ c'est-à-dire $\theta > \pi$. Cela est impossible car une vitesse est équivoque, d'après le théorème de Bernoulli, à une pression infinie négative. Il faut donc qu'il y ait décollement au sommet.

8.3.2.4. *Écoulement autour d'un cylindre.* L'écoulement défini par le potentiel complexe

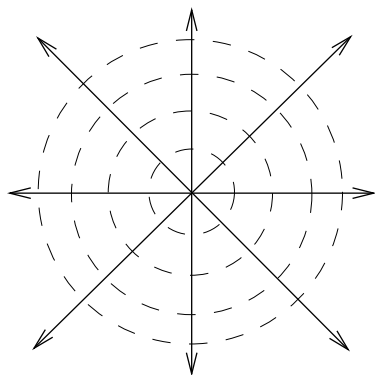
$$f(z) = C \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

représente l'écoulement potentiel autour d'un cylindre de rayon a .

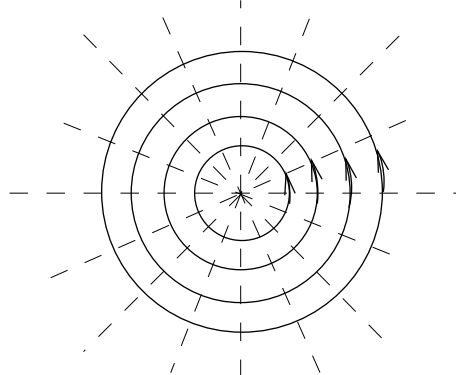
Les lignes de courant sont données par

$$\psi = Cy \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

(a) $f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z$



(b) $f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$



— lignes de courant

- - - - - lignes équipotentiellles

(c) $f(z) = \frac{C}{z}$

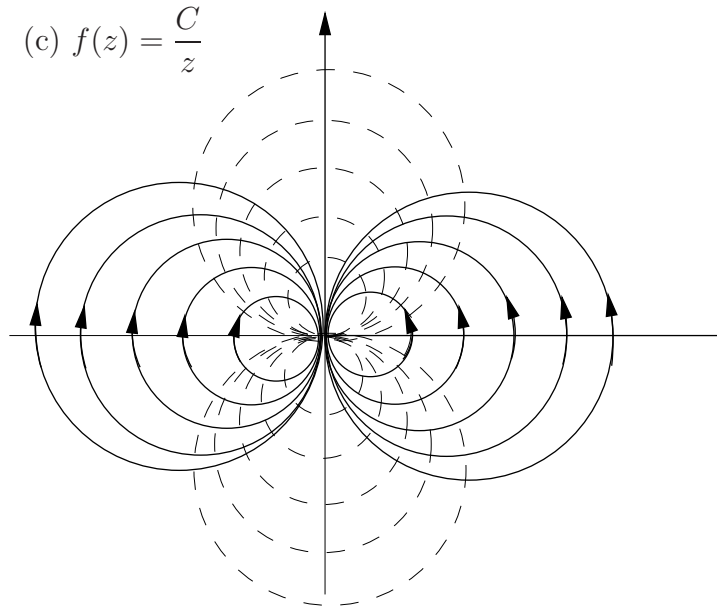


FIGURE 8.3. (a) Source, (b) Tourbillon ponctuel, (c) Doublet.

où $r^2 = x^2 + y^2$. Le champ de vitesse est donné par

$$\frac{df}{dz} = u - iv = C \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right).$$

La ligne de courant $\psi = 0$ est composée de l'axe des x et du cercle $x^2 + y^2 = a^2$.

8.3.2.5. *Écoulement autour d'un cylindre avec circulation.* Ajoutons au potentiel complexe précédent celui d'un tourbillon ponctuel centré à l'origine

$$f(z) = C \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

D'où

$$\psi = Cy \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta.$$

Le champ de vitesse associé est

$$\frac{df}{dz} = u - iv = C \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}$$

soit

$$u = C \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r} \sin \theta,$$

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos \theta - C \frac{a^2}{r^2} \sin 2\theta.$$

8.4. Force et Moment

Considérons l'écoulement stationnaire et bidimensionnel autour d'un cylindre \mathcal{C} de section arbitraire. La force \vec{F} et le moment $-kM$ appliqués par le fluide sur le cylindre peuvent être calculés en utilisant la théorie des variables complexes.

On a

$$\vec{F} = - \oint_{\mathcal{C}} p \vec{n} dl$$

Alors

$$F_x = \vec{i} \cdot \vec{F} = - \oint_{\mathcal{C}} p \vec{i} \cdot \vec{n} dl = - \oint_{\mathcal{C}} p \cos(\vec{n}, \vec{i}) dl$$

$$= - \oint_{\mathcal{C}} p \sin \theta dl = - \oint_{\mathcal{C}} p dy,$$

$$F_y = \vec{j} \cdot \vec{F} = - \oint_{\mathcal{C}} p \vec{j} \cdot \vec{n} dl = - \oint_{\mathcal{C}} p \cos(\vec{n}, \vec{j}) dl$$

$$= \oint_{\mathcal{C}} p \cos \theta dl = \oint_{\mathcal{C}} p dx$$

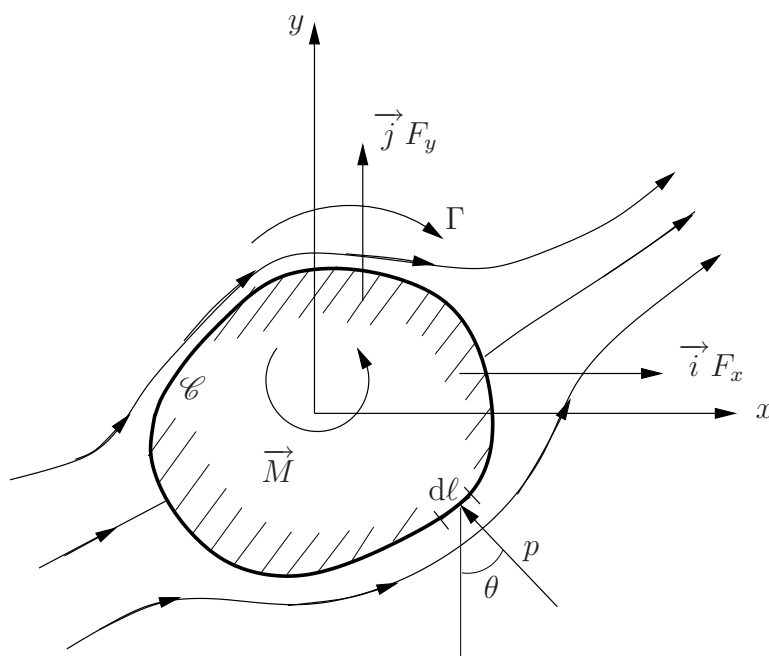
d'où
$$F_x - iF_y = -i \oint_{\mathcal{C}} p (dx - idy) = -i \oint_{\mathcal{C}} p d\bar{z}.$$

L'application du théorème de Bernoulli sur la surface \mathcal{C} du cylindre conduit à

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2)_{\mathcal{C}}$$

dans laquelle

$$(u^2 + v^2)_{\mathcal{C}} = [(u - iv)(u + iv)]_{\mathcal{C}} = (w\bar{w})_{\mathcal{C}}$$

FIGURE 8.4. Écoulement autour un cylindre de section \mathcal{C} arbitraire.

et p_0 est la pression au point d'arrêt. Sachant que p_0 ne contribue pas aux intégrales on obtient la relation

$$F_x - iF_y = i\frac{1}{2}\rho \oint_{\mathcal{C}} w\bar{w} d\bar{z}$$

dans laquelle

$$\begin{aligned} \bar{w} d\bar{z} &= (u + iv)(dx - idy) \\ &= udx + vdy - i(udy - vdx) \\ &= d\phi - id\psi. \end{aligned}$$

De la même façon on trouve $w dz = d\phi + id\psi$. Sachant que \mathcal{C} est une ligne de courant sur laquelle $d\psi = 0$, il vient

$$(\bar{w} d\bar{z})_{\mathcal{C}} = (w dz)_{\mathcal{C}}$$

et l'on obtient

$$\boxed{F_x - iF_y = i\frac{1}{2}\rho \oint_{\mathcal{C}} w^2 dz} \quad \text{formule de Blasius pour } \mathbf{F}.$$

Soit $P \in \mathcal{C}$. Alors le moment des efforts extérieurs qui s'appliquent au cylindre est

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{OP} \wedge d\vec{F} = \oint_{\mathcal{C}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \wedge (-p\vec{n})d\ell \\
 &= -\mathbf{k} \oint_{\mathcal{C}} p(x \sin(\mathbf{i}, \mathbf{n}) + y \sin(\mathbf{j}, \mathbf{n})) d\ell \\
 &= -\mathbf{k} \oint_{\mathcal{C}} p(x \cos \theta + y \sin \theta) d\ell = -\mathbf{k} \oint_{\mathcal{C}} p(xdx + ydy) \\
 &= -\frac{1}{2}\rho\mathbf{k} \oint_{\mathcal{C}} (u^2 + v^2)(xdx + ydy) \\
 &= -\frac{1}{2}\rho\mathbf{k}\Re \oint_{\mathcal{C}} w\bar{w}zd\bar{z} \\
 \mathbf{M} &= -\frac{1}{2}\rho\mathbf{k}\Re \oint_{\mathcal{C}} w^2zdz \quad \text{formule de Blasius pour } \mathbf{M}
 \end{aligned}$$

où \Re désigne la partie réelle de l'intégrale. On appelle ces formules les *formules de Blasius*.

CHAPITRE 9

ÉCOULEMENT DES FLUIDES RÉELS

9.1. Introduction

Les équations de Navier-Stokes sont des équations difficiles et il s'avère utile de se limiter aux cas simples ou particuliers dont les solutions sont connues. Nous nous limitons aux écoulements incompressibles pour lesquels $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ et nous supposons de plus que la viscosité demeure constante.

Par ailleurs, les problèmes traités seront tels que les conditions aux limites associées aux frontières sont simples à appliquer mathématiquement. Ainsi, nous allons essayer de résoudre

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

où p désigne la pression dynamique et μ la viscosité dynamique. Le système (9.1) est composé de quatre équations pour les quatre inconnues p et \mathbf{v} . Contrairement aux problèmes en dynamique la force $-\nabla p$ est à déterminer comme partie intégrale de la solution, car elle n'est pas donnée.

On sait que dans l'écoulement des fluides réels, les particules de fluide sont subies lors de leur mouvement aux forces de frottement dues à la viscosité et à la turbulence. Pour vaincre ces forces d'énergie cinétique est dissipée et transformée en énergie thermique traduit par une perte de charge (une chute de pression).

Les forces d'inertie convectives par unité de volume, $\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ (associée au transport de quantité de mouvement par *convection*), et les force de viscosité, $\mu \nabla^2 \vec{v}$ (associées au transport de quantité de mouvement par *diffusion*), ne sont pas en général du même ordre de grandeur. L'ordre de grandeur de chaque terme dépend de la vitesse, la géométrie de l'écoulement et la viscosité μ ainsi que de la densité de fluide ρ . Si dans un écoulement sur un corps solide, dont la dimension naturelle est L (ou de *longueur caractéristique* L), la vitesse moyenne (ou *caractéristique*) est U , le flux de quantité de mouvement associé à la convection serait de l'ordre ρU^2 et celui associé à la diffusion serait de l'ordre $\mu U/L$. Le rapport entre ces deux flux est sans dimension et s'écrit sous la forme :

$$\frac{\text{flux convectif de la quantité de mouvement}}{\text{flux diffusif de la quantité de mouvement}} \approx \frac{\rho U^2}{\mu U/L} = \frac{UL}{\nu} = Re \quad (9.2)$$

où ν est la viscosité cinématique qui représente la diffusivité de la quantité de mouvement; on appelle ce rapport le nombre de Reynolds. Alors, suivant les vitesse et les géométries d'écoulement pour un fluide donné (c'est-à-dire suivant l'ordre de grandeur de Re), le transport de la quantité de mouvement d'un fluide peut être dominé par des phénomènes diffusifs ou convectifs.

On distingue deux régimes d'écoulements liés à l'ordre de grandeur de nombre de Reynolds : régime *laminaire* et régime *turbulent*. Dans un écoulement laminaire les particules de fluide se déplacent en formant des lames ou *couches* stables et régulières qui "glissent" l'une sur l'autre et ne se mélangent pas. Par contre, un écoulement turbulent est instationnaire et caractérisé par la formation-éclatement de tourbillons de tailles différentes conduisant ainsi au mélange ou brassage intensif des particules. La valeur des grandeurs de l'écoulement comme la pression, le vecteur vitesse, etc. en un point fixe présente des fluctuations aléatoires autour d'une valeur moyenne.

9.2. Écoulements unidirectionnels

Un écoulement est dit unidirectionnel quand les lignes de courant sont, à chaque instant, des droites parallèles à la direction de l'écoulement. Cela implique, par exemple, que la solution est de la forme $\vec{u} = u(y, z, t)\vec{x}$ dans le système cartésien, (x, y, z) , des coordonnées auquel on associe le vecteur vitesse $\vec{v} = (u, v, w)$, avec la direction des x choisie comme direction de l'écoulement; la non dépendance de u de x est déduite de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (9.3)$$

et puisque $\vec{u} = u(y, z, t)\vec{x}$ implique $v = w = 0$ on déduit que $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ c'est qui montre que u ne dépend pas de x .

Les équations de Navier-Stokes se réduisent alors à

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (9.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (9.6)$$

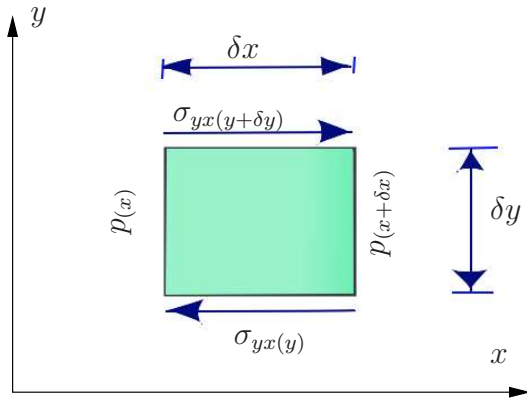
et la pression est donc fonction de (x, z, t) seulement : $p \equiv p(x, z, t)$. La troisième équation conduit donc à $p(z, x, t) = -\rho g z + P(x)$ ce qui montre que $\partial p / \partial x = P'(x) = dp/dx$.

9.2.1. Écoulement entre deux plaques planes. On étudie maintenant l'écoulement stationnaire d'un fluide situé entre deux plaques planes infinies et parallèles à distance d dans la direction y (voir figure (9.2)) où une plaque est fixe et l'autre se déplace parallèlement à elle-même à une vitesse constante U_p dans la direction Ox . Les considérations de l'écoulement montrent que les composantes de vitesse v et w s'annulent. L'analyse de l'équation de continuité montre alors que la composante u n'est fonction que de y . L'équation de Navier-Stoke devient alors

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (9.7a)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \quad (9.7b)$$

On peut déduire (9.7) par la considération de mouvement d'un élément infinitésimal comme suite :



Soit $\delta x \times \delta y \times 1$ un élément de fluide en mouvement dans la directions des x . Il vient alors que le bilan des forces agissant sur cet élément impose : $(\delta y \times 1)(p(x) - p(x + \delta x)) + (\delta x \times 1)(\sigma_{yx}(y) - \sigma_{yx}(y + \delta y)) = 0$

Soit :

$$-\frac{(p(x + \delta x) - p(x))}{\delta x} + \frac{(\sigma_{yx}(y) - \sigma_{yx}(y + \delta y))}{\delta y} = 0$$

Éventuellement en faisant δx et δy tendent vers zéro on obtient : $-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = 0$. Avec

$$\sigma_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ on retrouve l'équation (9.7a)}$$

FIGURE 9.1. Forces agissant sur un élément du fluide suivant Ox dans écoulement de Couette plan.

Puisque la vitesse u est une fonction de y seulement on se rend compte (voir (9.7b)) que le gradient de pression $\partial p / \partial x$ est constant.

En intégrant (9.7a) deux fois par rapport à y , on obtient:

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 \tag{9.8}$$

où C_1 et C_2 sont les constantes d'intégrations à déterminer en utilisant les conditions aux limites aux parois.

Les conditions aux limites se traduisent par la condition de non-glissement aux parois:

$$y = 0, \quad u = 0 \tag{9.9a}$$

$$y = d, \quad u = U_p \tag{9.9b}$$

En satisfaisant (9.9) on obtient de (9.8)

$$u = - \left(\frac{dp}{dx} \right) \frac{y(d - y)}{2\mu} + U_p \left(\frac{y}{d} \right) \tag{9.10}$$

Sur la figure 9.2 sont montrés des profils de vitesse pour différente configurations de gradient de pression. On appelle *écoulement de Couette* l'écoulement obtenu quand $dp/dx = 0$. Dans ce cas la répartition de vitesse est linéaire et, selon les résultats expérimentaux, valable pour un nombre de Reynolds de $Re = (dU_p/\nu) \leq 1500$.

Dans le cas où $U_p = 0$, on obtient un écoulement bidimensionnel entre deux plaques immobiles et la solution u prend la forme :

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(- \frac{dp}{dx} \right) (dy - y^2), \tag{9.11}$$

la répartition de vitesse est donc parabolique. Elle est valable, selon les mesures expérimentaux, pour un nombre de Reynolds $Re = (dU_p/\nu) \leq 1200$. Cet écoulement est appelé *écoulement*

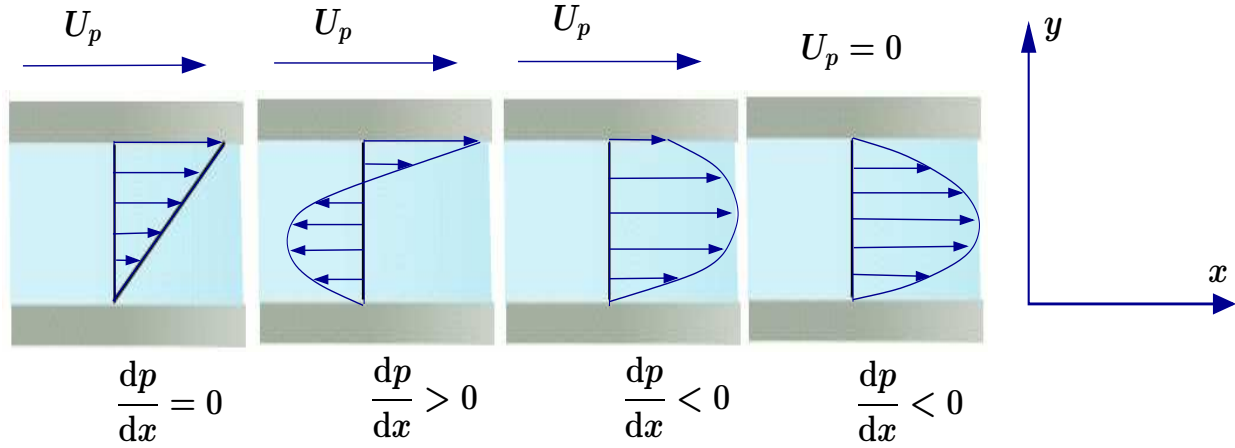


FIGURE 9.2. Écoulement entre deux plaques planes.

de Poiseuille plan. La vitesse maximale u_{\max} est obtenue dans la plan de symétrie du canal $y = d/2$ avec :

$$u_{\max} = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{d^2}{8\mu} \quad (9.12)$$

Le débit volumique Q , par unité de largeur du canal, est donné par:

$$Q = \int_0^d u(y) dy = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{d^3}{12\mu} \quad (9.13)$$

et la vitesse moyenne U est déterminée à partir de débit :

$$U = \frac{Q}{S} = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{d^2}{12\mu} = \frac{2}{3} u_{\max} \quad (9.14)$$

ce qui nous permet de calculer la chute de pression

$$\frac{\Delta p}{\Delta \ell} = \left(-\frac{dp}{dx} \right) = \frac{12\mu U}{d^2} \quad (9.15)$$

9.2.2. Écoulement dans une conduite cylindrique. On considère l'écoulement unidirectionnel, incompressible et stationnaire dans une conduite horizontale de rayon R ; l'écoulement est provoqué par un différence de pression $\Delta p = (p_1 - p_2)$ sur une longueur ℓ de ce la conduite. Suffisamment loin de l'entrée de conduite, la vitesse (u, v_r, v_θ) , exprimée dans le système de coordonnées cylindriques (x, r, θ) , dépendra uniquement de la distance r ($r^2 = y^2 + z^2$) à l'axe de la conduite; compte tenu du symétrie de révolution, les composantes (v_r, v_θ) s'annulent car l'écoulement est parallèle à l'axe des x . Les équations de Navier–Stokes en coordonnées cylindriques se réduit alors à :

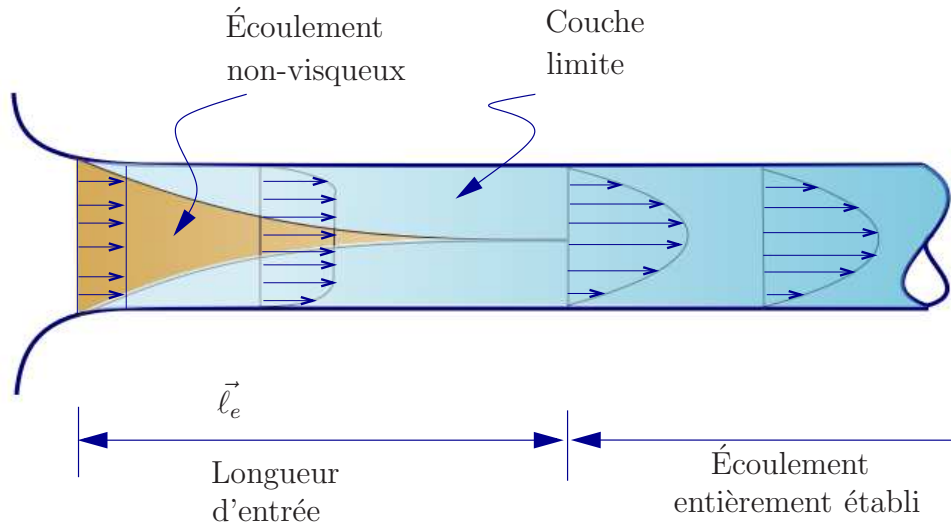


FIGURE 9.3. Écoulement dans un tube cylindrique.

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} - g \cos \theta, \quad (9.16)$$

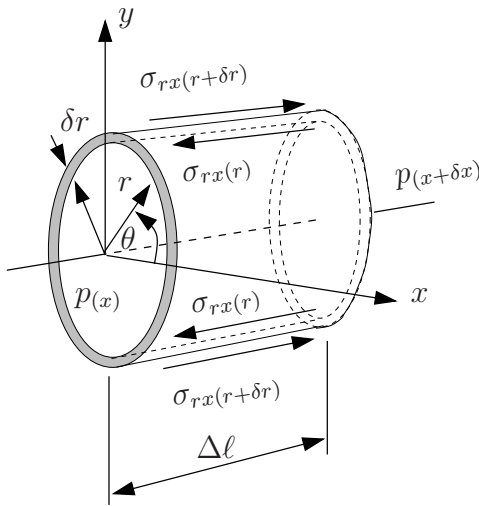
$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - g \sin \theta, \quad (9.17)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]. \quad (9.18)$$

Si nous admettons que la pression reste constante à toute section droite de la conduite, la pression est alors fonction de x seulement $p = p(x)$; on a ainsi supposé que l'effet de la pesanteur est négligeable devant la variation de pression dans la direction des x qui est, rappelons le, horizontale. L'équation (9.18) se réécrit comme :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) r \quad (9.19)$$

Comme dans la section précédent, on peut dans ce cas aussi déterminer l'équation de l'écoulement en considérant le mouvement d'un élément annulaire de fluide dans la direction Ox .



L'analyse des forces extérieures agissant sur un élément infinitésimal de fluide en mouvement suivant Ox nous permet d'écrire :

$$[2\pi(r + \delta r)\Delta\ell]\sigma_{rx}(r + \delta r) - [2\pi r\Delta\ell]\sigma_{rx}(r) + (2\pi r\delta r)(p(x) - p(x + \delta x)) = 0$$

D'où :

$$\frac{\sigma_{rx}(r + \delta r) - \sigma_{rx}(r)}{\delta r} + \frac{\sigma_{rx}(r + \delta r)}{r} - \frac{p(x + \delta x) - p(x)}{\Delta\ell} = 0$$

ce qui se ramène à $\frac{\partial\sigma_{rx}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rx}}{r} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$ quand δr et $\Delta\ell$ tendent vers zéro simultanément. Avec $\sigma_{rx} = \mu \frac{\partial u}{\partial r}$ on retrouve l'équation (9.18).

FIGURE 9.4. Un élément annulaire de fluide en mouvement suivant Ox .

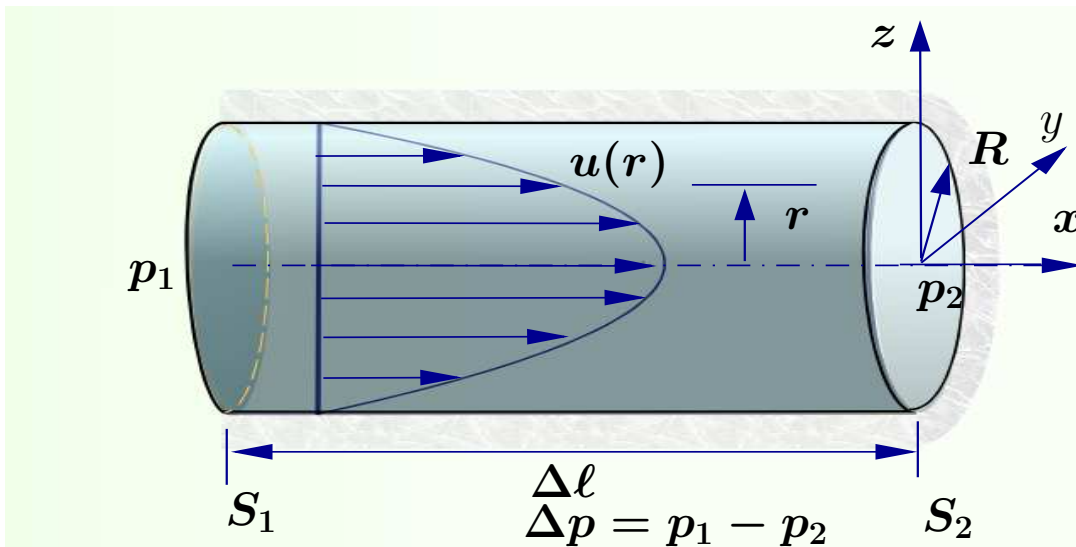


FIGURE 9.5. Écoulement de Hagen–Poiseuille dans une conduite circulaire.

Les conditions aux limites à satisfaire sont :

la condition de symétrie en $r = 0$: $u(r = 0) = u_{\max}$ soit $\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=0} = 0$ (9.20)

la condition de non-glissement à la paroi, $r = R$: $u(r = R) = 0$. (9.21)

En intégrant deux fois par rapport à r on obtient :

$$r \frac{du}{dr} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \frac{r^2}{2} + C_1, \quad (9.22)$$

$$u = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2 \quad (9.23)$$

où C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration à déterminer en utilisant les conditions (9.21) et (9.21); la première conduit à $C_1 = 0$ et la deuxième donne $C_2 = -(\frac{dp}{dx})(R^2/4\mu)$. La solution est alors

$$u = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) (R^2 - r^2). \quad (9.24)$$

On appelle *solution de Hagen-Poiseuille* la solution $u(r)$ donnée en (9.24).

La répartition de vitesse (figure 9.5) dans une conduite circulaire est donc parabolicoïde de révolution.

La vitesse maximale dans une section circulaire s'obtient à l'axe du cylindre $r = 0$:

$$u_{\max} = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) R^2 \quad (9.25)$$

ce qui permet de récrire (9.24) sous la forme

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (9.26)$$

Le débit volumique Q traversant la section est défini par

$$Q = \int_0^R u(2\pi r dr) \quad (9.27a)$$

$$= \int_0^R \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) (R^2 - r^2)(2\pi r dr) \quad (9.27b)$$

$$= \frac{\pi}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) R^4 = \frac{\pi}{128\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) D^4 \quad (9.27c)$$

où $D = 2R$ est le diamètre de la conduite.

La vitesse moyenne U est :

$$U = \frac{Q}{S} = \frac{\frac{\pi}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) R^4}{\pi R^2} = \frac{1}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) R^2 = \frac{1}{2} u_{\max} \quad (9.28)$$

On déduit des équations (9.26) et (9.28) que la vitesse moyenne est obtenue en $r = R\sqrt{2}$.

La chute de pression (ou perte de charge) Δp entre la section S_1 et $S - 2$, à distance $\Delta \ell$, est calculée de (9.28) :

$$\frac{\Delta p}{\Delta \ell} = -\frac{dp}{dx} = \frac{8 \mu U}{R^2} = \frac{32 \mu U}{D^2} \quad (9.29)$$

ÉCOULEMENT DES FLUIDES RÉELS

La chute de pression dans une conduite est provoquée par les forces de viscosité ce qui signifie que la perte de charge est régulière, h_r ; on écrit alors:

$$h_r = \frac{\Delta p}{\rho g} \quad (9.30a)$$

$$= \frac{32 \mu U}{\rho g D^2} \quad (9.30b)$$

$$= \left(\frac{64}{U D/\nu} \right) \frac{\Delta \ell}{D} \left(\frac{U^2}{2g} \right) \quad (9.30c)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{64}{Re} \right)}_{\text{coefficient de frottement}} \frac{\Delta \ell}{D} \underbrace{\left(\frac{U^2}{2g} \right)}_{\text{énergie cinétique par unité de volume}} \quad (9.30d)$$

$$= f \frac{\Delta \ell}{D} \left(\frac{U^2}{2g} \right) \quad (9.30e)$$

où $Re = U D/\nu$ est le nombre de Reynolds pour une conduite circulaire. On appelle f coefficient de frottement ou de perte de charge.

Ces résultats son valables seulement pour un écoulement laminaire dans conduite circulaire qui est obtenue quand

$$Re \leq 2000$$

Lorsque $Re > 2000$ l'écoulement devient unstable puis turbulent selon la valeur de Re .

La contrainte de cisaillement (τ) entre deux couches de fluide en mouvement, selon l'expression pour le tenseur de contraintes (C.4), est donnée par:

$$\tau = \mu \frac{du}{dr} \quad (9.31)$$

qui, après l'utilisation de (9.22), donduit à

$$\left. \begin{array}{l} r = 0 : \quad \tau = 0 \\ R = r : \quad \tau = \left(\frac{dp}{dx} \right) \frac{R}{2} = \tau_o \end{array} \right\} \quad (9.32)$$

La force de frottement, F , exercée *par* le fluide sur la paroi de conduite est donc

$$F = (2\pi R \times \Delta \ell)(-\tau_o) = (2\pi R \times \Delta \ell) \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{R}{2} = \pi R^2 \Delta \ell \frac{\Delta p}{\Delta \ell} = \pi R^2 \Delta p \quad (9.33)$$

ce qui montrent qu'elle est égale à la force de pression agissant sur le fluide contenu entre les sections S_1 et S_2 .

9.2.3. Écoulement dans un tube annulaire. On considère l'écoulement dans l'espace annulaire entre deux cylindres coaxiaux comme schématise sur la figure (9.6); le rayon du cylindre intérieur est r_1 et de l'extérieur r_2 . La solution pour cet écoulement est obtenue de

la même manière que pour l'écoulement dans une conduite circulaire dont le résultat (9.23) est toujours valable :

$$u = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2 \quad (9.23)$$

Les constantes C_1 et C_2 sont à déterminer en appliquant la condition de non-glissement en

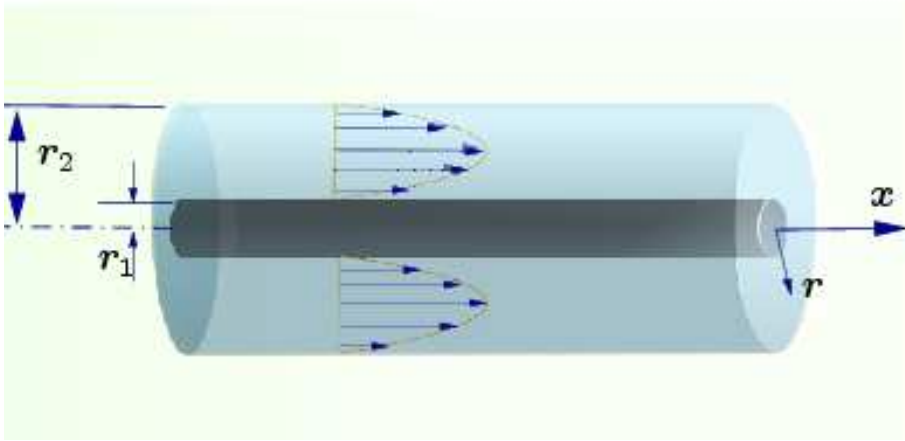


FIGURE 9.6. Écoulement dans l'espace entre deux cylindres concentriques.

$r = r_1$ et $r = r_2$:

$$\begin{aligned} r = r_1 : & \quad u = 0 \\ r = r_2 : & \quad u = 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$u = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \left[(r_2^2 - r^2) + (r_2^2 - r_1^2) \frac{\ln(r/r_2)}{\ln(r_2/r_1)} \right] \quad (9.34)$$

Le débit volumique Q dans une section annulaire est donnée par :

$$Q = \int_{r_1}^{r_2} u(2\pi r dr) = \frac{\pi}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \left[(r_2^4 - r_1^4) - \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{\ln(r_2/r_1)} \right] \quad (9.35)$$

9.2.4. Écoulement de couette cylindrique. On étudie le cas d'un écoulement incompressible entre deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 tournant autour de leur axe avec des vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2 (voir figure 9.7); l'écoulement ainsi produit est appelé écoulement de Couette cylindrique. On suppose que l'écoulement est uniquement provoqué par la rotation de cylindres et qu'aucun gradient de pression extérieur n'est appliqué. Le système de coordonnées (r, θ, x) est choisi avec Ox comme axe de rotation. Le vecteur vitesse associé est (v_r, v_θ, v_x) .

On s'intéresse à l'écoulement où les champs de vitesse et de pression sont indépendants de x et θ observées expérimentalement aux faibles vitesses. Par ailleurs, on suppose que

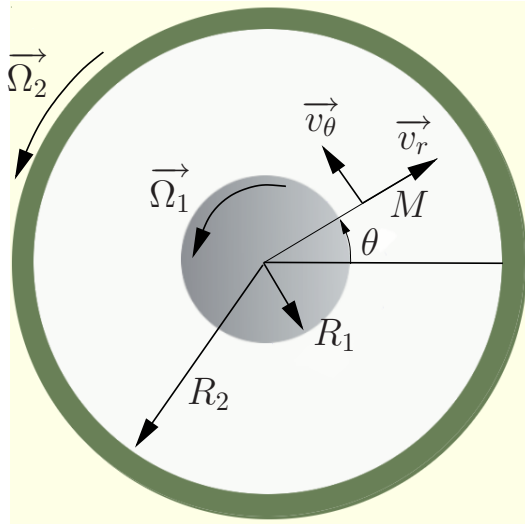


FIGURE 9.7. Écoulement de Couette entre deux cylindres concentriques en rotation.

l'écoulement est symétrique relativement aux plans orthogonaux à Ox : l'écoulement est invariable dans les directions x et θ . Dans ce cas l'équation de la conservation de masse ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$) se réduit alors à :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0 \quad (9.36)$$

ce qui implique que $rv_r = C = \text{constante}$. Or, les conditions de non-glissement aux parois de cylindres imposent que $v_r(r = R_1) = v_r(r = R_2) = 0$; il vient alors que $v_r = 0$ partout dans le fluide.

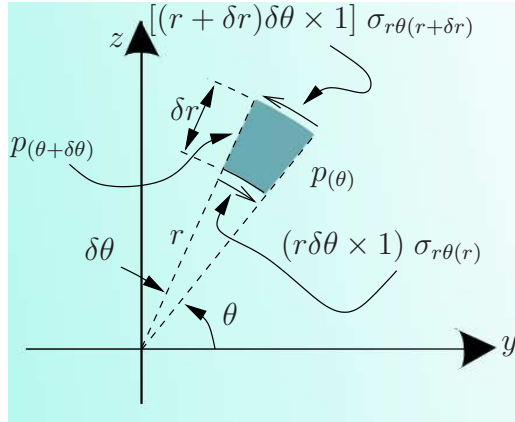
En tenant compte d'hypothèses du symétrie et de l'absence des gradients de pression extérieurs, l'équation de Navier-Stokes se réduit, en coordonnées cylindriques (voir équations C.6), à :

$$\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (9.37a)$$

$$0 = \nu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \quad (9.37b)$$

Le première équation exprime l'équilibre entre la force d'inertie centrifuge v_θ/r^2 , due à la courbure de trajectoire des particules de fluide, et le gradient de pression dans direction radiale. La deuxième équation correspond à l'équilibre entre les différentes composantes de la force de viscosité en coordonnées cylindriques.

On peut obtenir l'équation (9.37b) en considérant le mouvement en rotation d'un élément de fluide comme suite :



Le couple extérieur agissant sur l'élément $(\delta r \times r \delta \theta \times 1)$, qui est en rotation autour Ox , est nul :

$$(r + \delta r) \times [(r + \delta r) \delta \theta \times 1] \sigma_{r\theta(r+\delta r)} - r \times [r \delta \theta \times 1] \sigma_{r\theta(r)} = 0$$

car $p(\theta + \delta \theta) = p(\theta)$.

$$\text{Soit : } \frac{(r + \delta r)^2 \sigma_{r\theta(r+\delta r)} - r^2 \sigma_{r\theta(r)}}{\delta r} = 0$$

ce qui tend vers $\frac{\partial (r^2 \sigma_{r\theta})}{\partial r} = 0$

quand δr tendent vers zéro :

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) = \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

D'où on retrouve l'équation (9.37b).

FIGURE 9.8. Un élément $(\delta r \times r \delta \theta \times 1)$ de fluide en mouvement de rotation autour Ox .

En intégrant l'équation (9.37b) deux fois par rapport à r on obtient :

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} = C_1 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} = r C_1 \quad (9.38a)$$

$$r v_\theta = \frac{1}{2} C_1 r^2 + C_2 \quad \text{soit} \quad v_\theta = \frac{1}{2} C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (9.38b)$$

où C_1 et C_2 sont les constantes d'intégrations à déterminer par les conditions aux limites (conditions de non-glissement) :

$$v_\theta(r = R_1) = R_1 \Omega_1 \quad \text{et} \quad v_\theta(r = R_2) = R_2 \Omega_2. \quad (9.39)$$

On obtient ensuite :

$$v_\theta = \frac{(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2)}{R_2^2 - R_1^2} r - \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}. \quad (9.40)$$

Deux cas particuliers méritent d'être considérés à présent :

- quand R_1 et R_2 tendent vers l'infini (c'est-à-dire, $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 \rightarrow \infty$) de telle manière que la différence $R_2 - R_1 = d$ reste constante l'écoulement correspond alors à l'écoulement de Couette plan ;
- lorsque $\Omega_1 = \Omega_2$ la répartition de vitesse devient alors linéaire, $v_\theta = \Omega_1 r$. L'écoulement correspond dans ce cas à un mouvement de rotation en bloc.

Le moment des forces de viscosité (forces tangentielles) exerçant sur les cylindres est calculé à partir de $\sigma_{\theta r}$, donnée dans l'expression de tenseur de contraintes (C.4). On trouve :

$$\sigma_{\theta r} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) = -\frac{2C_2 \mu}{r^2} \quad (9.41)$$

où C_2 est le coefficient du terme en $1/r$ de la répartition de vitesse (9.40). Le couple \vec{M}_1 de frottement visqueux sur le cylindre intérieur, par unité de longueur suivant l'axe Ox est

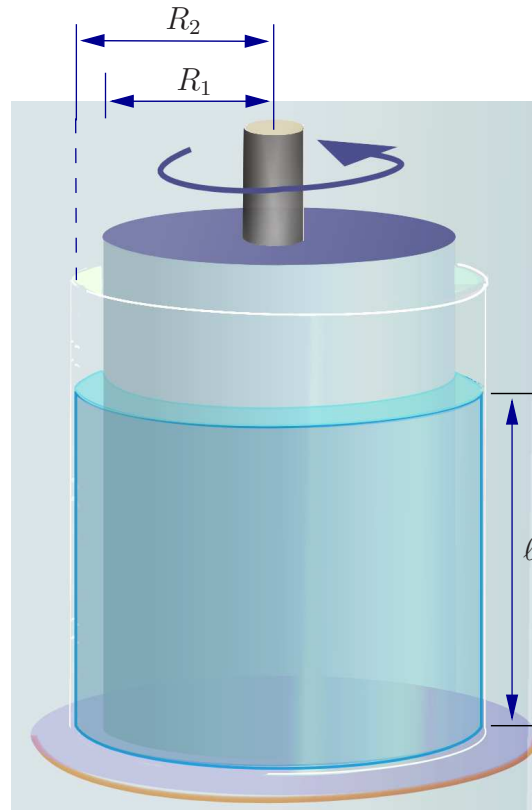


FIGURE 9.9. Viscosimètre de Couette cylindrique ; la rotation est imposée par à un des cylindre et le couple est mesuré sur celui-ci ou sur la surface lui faisant face.

donné par :

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_1 &= R_1 \vec{e}_r \wedge \vec{F}_{\text{frottement}} \\
 &= R_1 \vec{e}_r \wedge \left[\underbrace{(2\pi R_1 \times 1)}_{\substack{\text{surface du cylindre} \\ \text{par unité de longueur}}} \times \underbrace{\left(-\frac{2C_2\mu}{R_1^2} \right)}_{\substack{\text{contrainte de} \\ \text{frottement visqueux}}} \vec{e}_\theta \right] \\
 &= -4\pi\mu C_2 \vec{e}_x \\
 &= 4\pi\mu \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \vec{e}_x
 \end{aligned} \tag{9.42}$$

où $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_x)$ son les vecteurs unitaires associés au système des coordonnées cylindriques (r, θ, x) . Dans le cas où $R_2 = \Delta R + R_1$ avec $\Delta R \ll R_2$, on obtient pour une longueur ℓ du cylindre :

$$M \approx 2\pi R^2 \ell \mu (\Omega_2 - \Omega_1) \frac{R}{\Delta R} \tag{9.43}$$

Ce résultat nous ramène au viscosimètre de Couette.

9.2.5. Viscosimètre de Couette. Sur la figure 9.9 est schématisé un *viscosimètre de Couette* à cylindres coaxiaux dans lequel le liquide est placé entre deux cylindres concentriques dont un seul est mis en mouvement de rotation. L'espacement ΔR entre les deux cylindres est petit devant les rayons tel que $\Delta R \ll R_2$ et pour hauteur du liquide h , le taux de cisaillement, $\dot{\gamma}$ et la contrainte σ vérifient approximativement :

$$\sigma = \frac{M}{2\pi R^2 h} \quad (9.44a)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{R}{\Delta R} \omega_o \quad (9.44b)$$

où M est le moment du couple appliqué aux cylindres, ω_o la vitesse angulaire de rotation et R est la moyenne des rayons.

9.3. Écoulement à faible vitesse ou faible nombre de Reynolds

On s'intéresse ici aux écoulements où les forces d'inertie (forces d'accélération) sont négligeables par rapport aux forces de pression et force de viscosité. L'équation de Navier–Stokes s'écrit alors :

$$\nabla p + \rho g \vec{e}_z = \nabla(p + \rho g z) = \nabla p^* = \mu \nabla^2 \vec{v}. \quad (9.45)$$

On appelle cette équation l'*équation de Stokes*.

L'équation de continuité pour un écoulement incompressible, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, écrite dans le système cartésien prend la forme :

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (9.46)$$

Si on prend la divergence (le produit scalaire par l'opérateur ∇ , $\text{div} = \nabla \cdot$) de (9.45) et (9.46), on obtient (en tenant compte que l'on peut permuter les opérateurs div et ∇^2) :

$$\nabla \cdot (\nabla p^*) = \mu \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{v}) \quad (9.47)$$

et par conséquent

$$\nabla^2 p^* = 0. \quad (9.48)$$

On appelle *écoulement rampant* tout écoulement représenté par l'équation (9.48). Il s'agit d'un écoulement à potentiel de pression, obtenu lorsque le nombre de Reynolds, Re , tend vers zéro. Des exemples d'écoulements rampant sont offerts par l'écoulement de Stoke autour d'une sphère (ou une goutte fluide dans un autre fluide) et l'écoulement dans les milieux poreux; un faible Re peut être obtenu à basse vitesse, \vec{v} , et/ou à "suffisamment" grande viscosité cinématique, ν .

9.3.1. Écoulement dans les milieux poreux – Loi de Darcy.

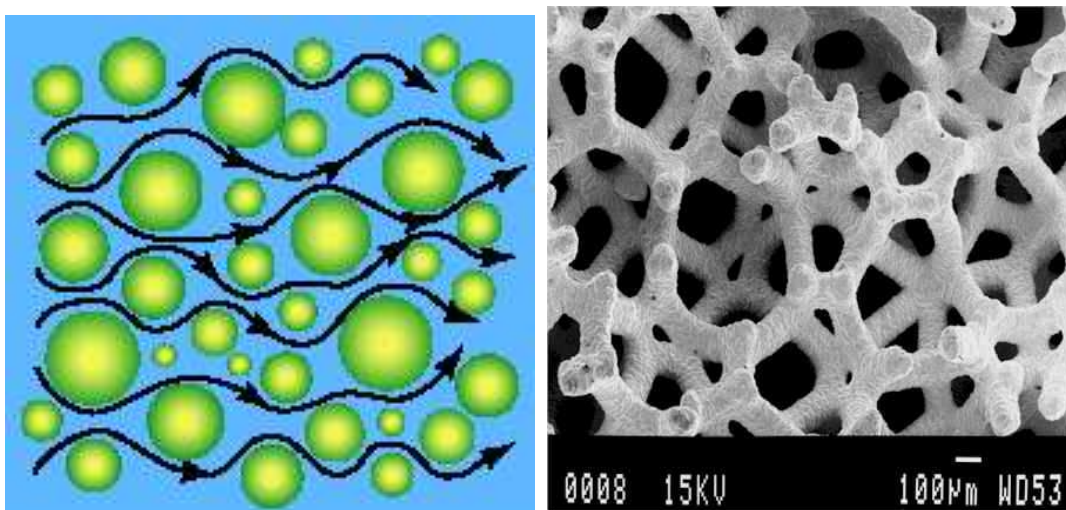


FIGURE 9.10. Exemples des milieux poreux.

Écoulement unidirectionnel à basse vitesse. Un milieu poreux est un solide ou un matériau massif délimitant et englobant des cavités ou *pores* (des inclusions vides) communiquant entre elles par des canaux; les pores peuvent contenir une ou plusieurs phases de fluides pouvant s'écouler.

L'écoulement dans un *milieu poreux* se fait à une vitesse assez faible pour que le nombre de Reynolds, basé sur la taille des pores et de la vitesse locale, soit très petit devant l'unité. Alors, On peut admettre, en écoulement stationnaire, que les gradients de pression sont proportionnels à la vitesse moyenne de la même manière que pour l'écoulement dans une conduite; elle est donnée par l'équation (9.28)

$$V_x = \frac{K}{\mu} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial x} \right) \quad (9.49)$$

On appelle cette équation l'*équation de Darcy*, et la constante de proportionnalité K le coefficient intrinsèque de *perméabilité*, qui est une caractéristique du milieu poreux. À une surface donnée K est homogène, et son ordre de grandeur est estimée par la section d'un pore individuel. Par exemple :

$$\text{Calcaire : } K = 2 \times 10^{-15} - 5 \times 10^{-14} \text{m}^2, \quad \text{Sable : } K = 12 \times 10^{-11} - 2 \times 10^{-12} \text{m}^2$$

Il est commode d'utiliser le Darcy ($1 (\mu\text{m})^2$) comme unité de mesure pour la perméabilité.

On appelle la vitesse moyenne V_x *vitesse superficielle* ou vitesse de débit, elle définie par le rapport entre le débit ΔQ et la section ΔS , d'un milieu poreux (phase solide plus espace vides), qu'il travers :

$$V_x = \frac{\Delta Q}{\Delta S}. \quad (9.50)$$

Il est aussi commode de définir une vitesse, V_x^* , appelée la vitesse de Darcy :

$$V_x^* = \frac{1}{\phi} \frac{\Delta Q}{\Delta S}. \quad (9.51)$$

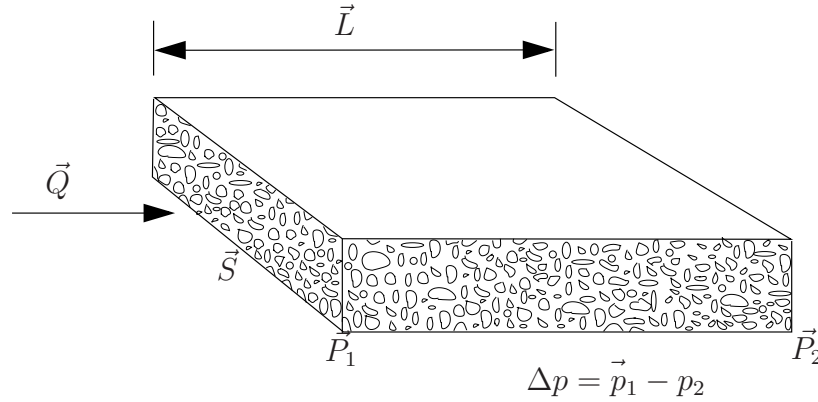


FIGURE 9.11. Schématisation de l'écoulement de Darcy dans un milieu poreux.

où ϕ représente la porosité définie comme le rapport entre le volume des pores (espace vide) et le volume total.

Équation de Darcy tridimensionnelle. On peut généraliser l'équation de Darcy (9.49) à trois dimensions; en présence de la pesanteur on écrit pour un milieu isotrope :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{Q}{S} \vec{n} = \frac{K}{\mu} (-\nabla p^*) \quad (9.52)$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la section S à travers laquelle on mesure le débit Q . On appelle souvent la vitesse \vec{V} *vitesse débitante*.

Supposons que K et \vec{n} sont constants. Alors, en prenant la rotationnel de vitesse, (9.52), on obtient :

$$\nabla \wedge \vec{V} = -\frac{K}{\mu} \nabla \wedge \nabla p^* = \nabla^2 p^* = 0 \quad (9.53)$$

ce qui suggère que :

$$\vec{V} = -\nabla \Phi \quad (9.54)$$

avec :

$$\Phi = \frac{K}{\mu} p^* = \frac{K}{\mu} (p + \rho g z). \quad (9.55)$$

Dans le cas où le fluide est incompressible, le champ de vitesse \vec{V} vérifie $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, d'où

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (9.56)$$

ce qui montre que la vitesse \vec{V} dérive d'un potentiel Φ comme dans le cas d'un fluide parfait.

L'équation de Darcy (9.52) exprime des relations linéaires entre la vitesse superficielle $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ et le gradient de pression p^* , est uniquement valable pour des écoulements laminaire où les forces d'inertie sont suffisamment faibles.

Des résultats expérimentaux montrent que pour d'écoulements dans un milieu poreux, comme le sable, restent laminaire il faut que le nombre de Reynolds satisfasse

$$Re = \frac{Vd}{\nu} \leq 10 \quad (9.57)$$

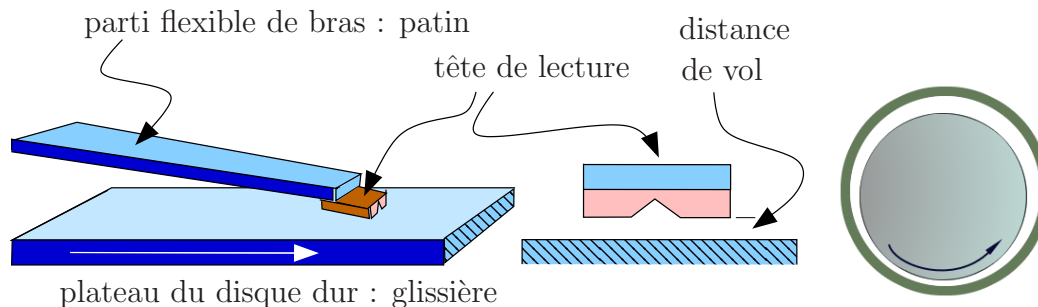


FIGURE 9.12. À gauche : une tête de lecture, à droite : un arbre cylindrique tournant à l'intérieur d'un cylindre de diamètre légèrement plus grand, les deux cylindres ne sont pas coaxiaux.

où V est l'une des composantes des vitesse, (V_x, V_y, V_z) , et d un diamètre caractéristique des grains de sable.

9.4. Lubrification Hydrodynamique

Le problème de frottement et de glissement entre deux surfaces en mouvement relatif, l'une par rapport à l'autre, est l'un des problèmes qui intéressa l'homme depuis l'antiquité. Tout mouvement relatif, par exemple, aux joints ou dans des applications industrielles est confronté au frottement et d'usure des pièce en mouvement. Le but de lubrification est de diminuer le frottement, réduire l'usure et améliorer la rentabilité économique de l'application. Des exemples sont fournie par la lubrification de machines tournantes ou celles liés aux déplacements caractérisés par un faible espacement entre les pièces, comme dans un piston-cylindre ou essieu-logement, voir figure 9.12.

Un autre exemple d'application de la lubrification hydrodynamique est fourni par le mécanisme de lecture/écriture de disque dur. Le disque tourne autour d'un axe à plusieurs milliers de tour par minute dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Grâce à une application de aéré lubrification, une couche d'air ultra mince est générée (entre la têtes de lecture/écriture et le disque) par la rotation des plateaux de disque. L'écoulement ainsi crée induit une augmentation importante de pression et par la suite une force de portance responsable pour la sustentation de tête à une "distance de vol" aussi petite que 3 nanomètre.¹

Une réduction importante de frottement est obtenue lorsque les deux surfaces en regard sont *presque* parallèles et séparées par un film mince de fluide visqueux. Pour une telle configuration, on constate que la pression augmente considérablement ce qui permet de supporter des charges importantes. L'écoulement ainsi produit est à faible nombre de Reynolds. Par exemple, si H représente une distance caractérisant l'espacement entre les deux surfaces, L une longueur dans le sens l'écoulement, et U une vitesse caractéristique de l'écoulement dont les valeurs sont :

$$\begin{aligned} U &= 10 \text{ m/s}; & L &= 10 \text{ cm} \\ \nu &= 4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}; & H &= 0.2 \text{ mm}. \end{aligned}$$

¹1 nanomètre = 10^{-9} m.

on obtient pour l'estimation de rapport entre les forces d'inertie et d'inertie :

$$\begin{aligned} \frac{\text{force d'origine inertielle}}{\text{force d'origine visqueuse}} &= \frac{u\partial u/\partial x}{\nu\partial^2 u/\partial y^2} = \frac{U^2/L}{\nu U/H^2} = \left(\frac{UL}{\nu}\right) \cdot \left(\frac{H}{L}\right)^2 \\ &= Re \varepsilon^2 = 0.25 \times 10^5 \times (2 \times 10^{-3})^2 = 0.1 \ll 1 \end{aligned}$$

où $\varepsilon = H/L$. Remarquons que le nombre de Reynolds basé sur H est

$$Re = \frac{UH}{\nu} = \frac{10 \times 0.2 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-5}} = 50.$$

Si on tient compte du fait que le nombre effectif de Reynolds est donné par le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité on se rend compte assez vite que l'écoulement considéré est à faible nombre de vitesse et l'équation de mouvement est (9.45).

9.4.1. Équations de mouvement. Commençons d'abord par l'écoulement entre deux plaques planes parallèle engendré par le mouvement par la plaque inférieure à la vitesse U ; on suppose que la plaque supérieure est de longueur ℓ . On appelle la plaque en mouvement *glissière* et la plaque fixe *patin*. Si l'envergure des faces en regard est suffisamment étendue on peut admettre que l'écoulement est parallèle à U . Soit Oxy un repère orthonormé lié au patin. Alors, l'équation de mouvement est donnée par

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (9.58)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} x = 0, & \quad p = p_1, \\ x = \ell, & \quad p = p_2, \\ y = 0, & \quad u = U, \\ y = h, & \quad u = 0 \end{aligned}$$

et la solution est par conséquent

$$u(y) = U \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{h^2 y}{2\mu h} \left(1 - \frac{y}{h}\right). \quad (9.59)$$

Le débit par unité de largeur est

$$Q = \int_0^h u dy = \frac{1}{2} hU + \frac{1}{12\mu} \left(-\frac{dp}{dx}\right) h^3. \quad (9.60)$$

En pratique, la pression est la même en amont et en aval de patin, soit $p_1 = p_2$ ce qui conduit à $dp/dx = 0$ quand les deux surfaces en regard sont parallèles. Le patin ne pourrait donc supporter aucune charge dans ce cas.

Par contre, si les deux plaques sont légèrement inclinées l'une par rapport à l'autre, h ne serait plus constante et le gradient de pression ne serait plus nul mais une fonction non-linéaire de h comme nous allons le démontrer par la suite. La configuration de l'écoulement est représentée sur la figure 9.13.

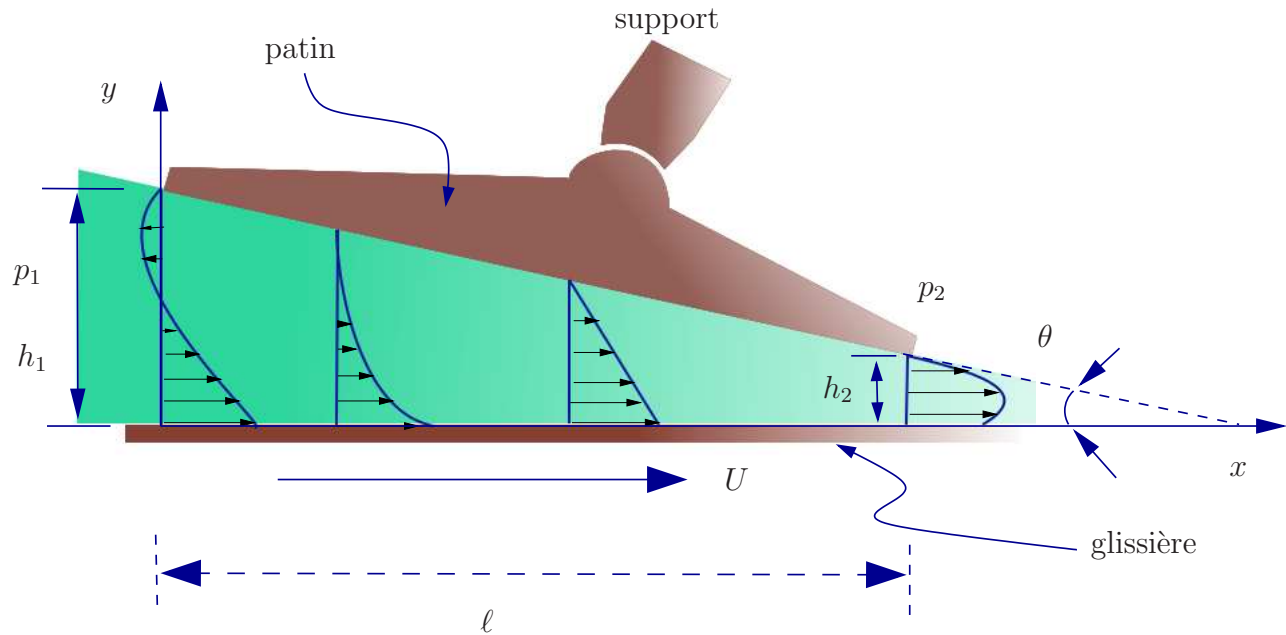


FIGURE 9.13. Schéma de l'écoulement induit par le mouvement relatif de glissière par rapport au patin.

En l'absence de fuit le débit reste constante, et on peut tirer de (9.60) une expression pour le gradient de pression local :

$$\frac{dp}{dx} = -12\mu \left(\frac{Q}{h^3} - \frac{U}{2h^2} \right) \quad (9.61)$$

En notant que

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dh} \frac{dh}{dx},$$

on peut réécrire (9.61) comme suit :

$$\frac{dp}{dh} = -12\mu \left(\frac{Q}{h^3} - \frac{U}{2h^2} \right) / \left(\frac{dh}{dx} \right) \quad (9.62a)$$

Or, $\frac{dh}{dx}$ est constant et donnée par

$$\frac{dh}{dx} = -\text{tg}\theta \approx -\theta = -(h_1 - h_2)/\ell$$

(car θ est petit), ce qui permet d'intégrer (9.62a) par rapport à h :

$$\int_{p_1}^{p(x)} dp = \frac{12\mu}{\theta} \int_{h_1}^{h(x)} \left(\frac{Q}{h^3} - \frac{U}{2h^2} \right) dh \quad (9.62b)$$

$$p(x) - p_1 = \frac{12\mu}{\theta} \left\{ \left[-\frac{Q}{2h^2} \right]_{h_1}^{h(x)} - \frac{1}{2}U \left[-\frac{1}{h} \right]_{h_1}^{h(x)} \right\} \quad (9.62c)$$

Alors,

$$p(x) = p_1 + \frac{6\mu}{\theta} \left[Q \left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h^2(x)} \right) - U \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h(x)} \right) \right] \quad (9.62d)$$

Ce résultat nous permet de déterminer la valeur de débit en posant $p(\ell) = p_1$. On trouve

$$Q = \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} U \quad (9.63)$$

Finalement, l'expression pour la distribution de pression prend la forme :

$$p(x) = p_1 + \frac{6\mu U}{\theta} \frac{(h - h_2)(h_1 - h)}{h^2(h_1 + h_2)} \quad (9.64)$$

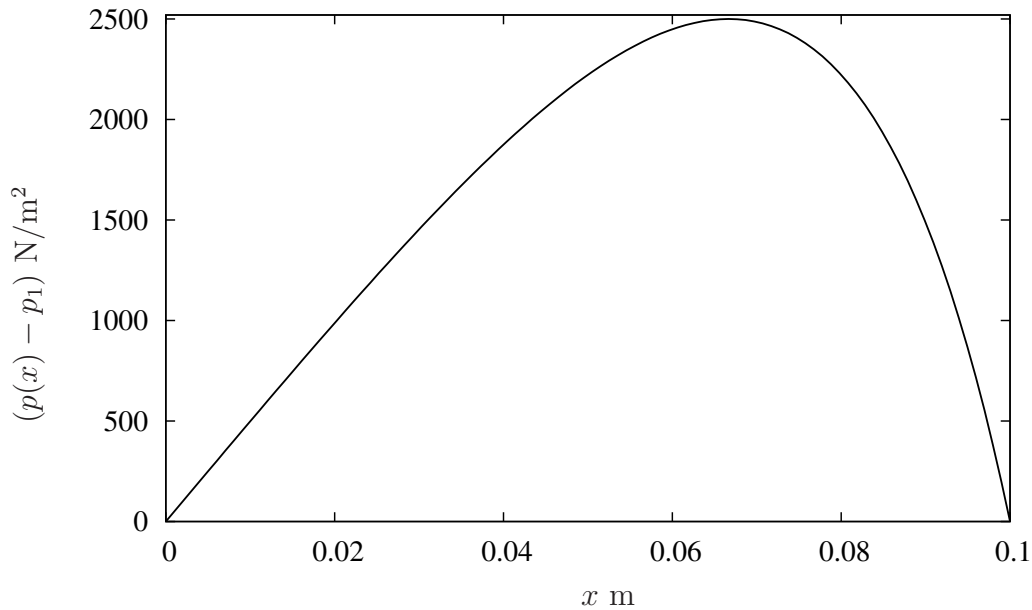


FIGURE 9.14. Distribution de $(p(x) - p(x = 0))$ pour $U = 10$ m/s, $\mu = 10^{-4}$ kg/m.s, $\ell = 10$ cm, $h_1 = 0.2$ mm, $h_2 = 0.1$ mm.

9.4.2. Force de pression s'exerçant sur le patin. La force de pression s'exerçant sur le patin, pour unité d'envergure, est donnée par

$$F = \int_{x=0}^{x=\ell} p dx = \frac{6\mu U}{\theta^2} \left(\ln \frac{h_1}{h_2} - 2 \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \right) \quad (9.65)$$

La portance du patin est égale à $F \cos \theta \approx F$ car $\theta \ll 1$. Par exemple, pour les données utilisées en figure 9.14, on trouve $F \approx 159$ N.

9.5. Expérience de Reynolds

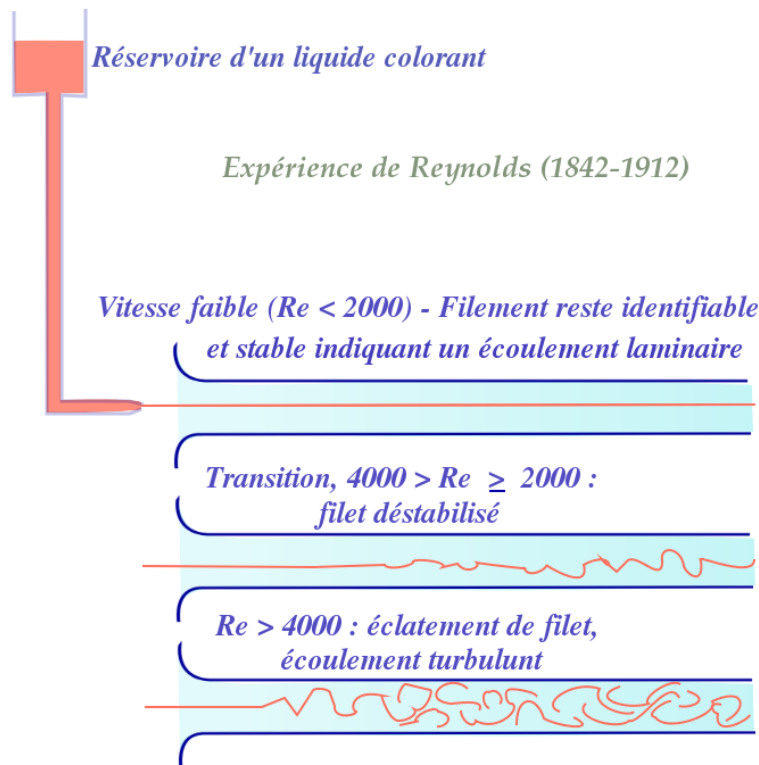


FIGURE 9.15. Expérience de Reynolds.

En 1883, Osborne Reynolds (1842–1912) a mise en évidence que l'écoulement dans un tube cylindrique dépend du diamètre, du fluide et de la vitesse de l'écoulement; il introduisit un filet d'un colorant dans l'écoulement d'eau dans un tube, voir figure 9.15. Pour un tube et un liquide (en l'occurrence l'eau) données, Reynolds observa que lorsque le débit fût faible le filet resta identifiable et stable. En faisant augmenter le débit jusqu'à un seuil critique de débit, Reynolds observa ensuite que, à une certaine distance de l'entrée du tube, le filet devint ondule (on dit aujourd'hui *instable*). Éventuellement, lorsque la valeur du débit atteignit un autre seuil critique (supérieur au précédent) le filet s'éclata "subitement" et le colorant se dispersa dans toute la section du tube.

Reynolds a ensuite démontré expérimentalement que l'état de l'écoulement est caractérisé par un nombre adimensionnel, aujourd'hui appelé le *nombre de Reynolds*, défini par :

$$Re = \frac{UD}{\nu} \quad \text{avec } U = \frac{Q}{S}, \quad S = \frac{\pi D^2}{4} \quad (9.66)$$

où U est la vitesse moyenne dans le tube, S la section, Q le débit, D le diamètre, et ν la viscosité cinématique du fluide.

La transition d'un régime d'écoulement de laminaire au turbulent relève d'un problème d'instabilité de l'écoulement. Or, l'instabilité est provoquée par des perturbations dont l'origine et les états initiaux peuvent varier ce qui empêche l'existence d'une valeur universelle et unique de nombre critique de Reynolds, Re_{crit} . L'expérience suggère néanmoins que, pour l'écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique, $Re_{\text{crit}} = 2000$ constitue une limite inférieure au dessous de laquelle l'écoulement reste en régime laminaire, l'état de transition s'obtient pour $2000 < Re < 4000$ et le régime turbulent s'établit lorsque $Re \geq 4000$.

L'expérience de Reynolds et les mesures précises de la vitesse ponctuelle permet de tirer quelques conclusions.

- 1-** La vitesse en tout point dans un écoulement laminaire et permanent reste constante.
- 2-** Selon Hinze, un mouvement turbulent "représente une conditions irrégulière de l'écoulement, dans lequel les diverse grandeurs présentent des variations aléatoires dans l'espace et dans le temps, de telle sorte que des valeurs moyennes statistiquement distinctes puissent être évaluées"²

Ainsi, la vitesse en un point quelconque dans un écoulement turbulent est caractérisée par des fluctuations aléatoires de haute fréquence, (u', v', w') , qui se superposent à des vitesses moyennes temporelles, $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$. La vitesse instantanée s'écrit alors comme :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u} + u' \\ \bar{v} + v' \\ \bar{w} + w' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{v}' \\ \bar{w}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.67)$$

Toute variable \mathcal{V} d'un écoulement turbulent s'écrit comme $\mathcal{V} = \bar{\mathcal{V}} + \mathcal{V}'$ avec $\bar{\mathcal{V}}' = 0$.

- 3-** Les écoulements turbulents sont caractérisés par des structures cohérentes, bien reconnaissables, telles que les tourbillons et des filaments.
- 4-** La diffusion de la quantité de mouvement, de l'énergie cinétique, de la masse et de la chaleur devient importante dans un écoulement turbulent. L'expérience montre qu'un écoulement turbulent est associé à un nombre de Reynolds, $Re = UL/\nu$, plus grand que celui associé à l'écoulement laminaire correspondant. Cela s'explique par le fait que le nombre de Reynolds représente aussi un rapport entre le temps

²Hinze J. O. (1975), *Turbulence*, McGraw-Hill Book Company, New York, USA. La citation en français et due à :

Walter H. Graf (en collaboration avec M. S. Altinakar) (1991), *Hydrodynamique*, Eyrolles.

de diffusion et le temps caractéristique par convection.³ Lorsqu'on note que la viscosité cinématique ν représente la diffusivité de la quantité de mouvement, on se rend compte assez vite que le temps caractérisant la diffusion sur une distance L est de l'ordre L^2/ν . De plus, on sait que le temps caractéristique de convection est représenté par le temps de parcours de la distance L à la vitesse de l'écoulement U , soit de l'ordre L/U . Ainsi, on obtient un rapport de temps caractéristique :

$$\frac{\text{temps caractéristique de diffusion}}{\text{temps caractéristique de convection}} = \frac{L^2/\nu}{L/U} = \frac{UL}{\nu} = Re. \quad (9.68)$$

³Rappelons nous que le nombre de Reynolds représente un rapport entre la force d'inertie (respectivement, le transport de la quantité de mouvement par convection) et la force de viscosité (respectivement, le transport de la quantité de mouvement par diffusion).

CHAPITRE 10

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE

10.1. Préambule

Les équations de Navier–Stokes, de la conservation de masse et d'énergie, ensemble avec leurs conditions aux limites et initiales, sont très complexes et le plus souvent difficiles à résoudre. Bien que les solutions analytiques restent toujours rares, même après des approximations justifiées les solutions numériques sont parfois lourdes de mise en oeuvre et coûteuses en temps de calcul, surtout si l'écoulement est turbulent et ceci malgré les progrès technologique d'ordinateurs. C'est pourquoi on fait bien souvent recours à l'étude expérimentale soit en vraie grandeur, soit par l'intermédiaire des maquettes à échelle réduite des prototypes. Les maquettes sont en général moins coûteux que les prototype et plus facile à mettre en oeuvre expérimentalement.

On appelle *prototype* le modèle en vraie nature et *maquette* le modèle réduit étudié expérimentalement.

Pour que les études réalisées sur maquette puissent être transposées au prototype il est important de savoir quels paramètres caractérisent le phénomène étudié et comment interviennent ils. C'est bien cela l'objet de l'analyse dimensionnelle et la théorie de similitude.

10.2. Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est fondée sur un principe très simple affirmant que toute relation entre des grandeurs physiques est indépendante du système d'unités de mesure, autrement dit, qu'elle est dimensionnellement homogène.

En mécanique on définit trois *grandeurs fondamentales* :

$$\begin{array}{llll} \text{la longueur} & L & [\text{distance}] & = L, \\ \text{la masse} & M & [\text{masse}] & = M, \\ \text{le temps} & T & [\text{temps}] & = T \end{array}$$

À ces trois s'ajoute une quatrième en cas de transfert thermique :

la température Θ .

On appelle L, M, T et Θ *unités fondamentales* desquelles on peut définir des unités dérivées comme montré dans la tableaux 10.1.

Remarques :

- Les grandeurs fondamentales de tout système sont indépendantes l'une de l'autre.
- Le passage d'un système d'unités à un autre n'introduit que des multiplicateurs de conversion.

TABLE 10.1. Grandeurs physiques, unités et dimensions.

Grandeur physique	symbole	Dimension	Unité, Système International S.I.
		Unités fondamentales	
Longueur	ℓ	L	m
Temps	t	T	s
Masse	m	M	kg
Température	T	Θ	°K, degré Kelvin
		Unités dérivées	
Vitesse	U	$[U] = L T^{-1}$	$m s^{-1}$
Accélération	$a = \frac{dv}{dt}$	$[a] = L T^{-2}$	$m s^{-2}$
Force	F	$[F] = M L T^{-2}$	$kg m s^{-2} = N$, Newton
Masse volumique	ρ	$[\rho] = M L^{-3}$	$kg m^{-3}$
Débit	Q	$[Q] = L^3 T^{-1}$	$m^3 s^{-1}$
Pression	p	$[p] = M L^{-1} T^{-2}$	$N m^{-2} = Pa$, Pascal
Contrainte	σ ou τ	$[\sigma] = M L^{-1} T^{-2}$	$N m^{-2}$
Travail	W	$[W] = M L^2 T^{-2}$	$N m = J$, joule
Énergie	E	$[E] = M L^2 T^{-2}$	$N m = J$, joule
Quantité de chaleur	ΔQ	$[\Delta Q] = M L^2 T^{-2}$	$N m = J$, joule
Puissance	\mathcal{P}	$[\mathcal{P}] = M L^2 T^{-3}$	$N m s^{-1} = W$, Watt
Viscosité dynamique	μ	$[\mu] = M L^{-1} T^{-1}$	$kg m^{-1} s^{-1}$
Viscosité cinématique	ν	$[\nu] = L^2 T^{-1}$	$m^2 s^{-1}$
Tension superficielle	σ_s	$[\sigma_s] = M T^{-2}$	$N m^{-1} = kg s^{-2}$

En général, un phénomène physique est lié à un certain nombre de grandeurs comme, par exemple, une longueur, une masse, une période, une vitesse, la pression, la viscosité \dots , etc, disons au nombre N . La dimension de certains de ces grandeurs peut être dérivée à partir des dimensions d'autres grandeurs. La dimension (et par conséquent l'unité de mesure) de grandeurs physiques sont dérivées soit à partir d'une définition ou soit à partir d'une loi. Par exemple, alors que les dimension de vitesse U et de masse volumique ρ sont dérivées à partir de leurs définitions en fonction de longueur, ℓ , et temps, t , pour la première et de longueur et masse m , pour la dernière : $[U] = [\ell]/[t] = LT^{-1}$, $[\rho] = [m]/[\ell]^3 = ML^{-3}$, celle de force est dérivée selon le principe fondamental de la mécanique (il s'agit d'une loi): *Force* (F) = *Masse* (M) \times *Accélération* (a) ce qui entrain $[F] = [m] \times [a] = M \times L T^{-2} = M L T^{-2}$. Dans ces exemples la longueur, la masse et le temps sont servis comme grandeurs fondamentales. En fait, rien ne nous empêche d'utiliser d'autres grandeurs physiques comme grandeurs fondamentales (à condition qu'elles soient indépendantes) comme, par exemple, la vitesse, la masse volumique et la force et par la suite dériver les dimensions (et par conséquent les

les unités) de longueur, de masse et de temps :

$$\begin{aligned} [\ell] &= [U]^{-1} \times [\rho]^{-1/2} \times [F]^{1/2}, \\ [m] &= [U] \times [\rho]^{-1/2} \times [F]^{3/2}, \\ [t] &= [U]^{-2} \times [\rho]^{-1/2} \times [F]^{1/2}. \end{aligned}$$

Dans un problème d'analyse dimensionnelle on procède en général de la manière suivante :

- (1) identifier toutes les variables *indépendantes* intervenant dans le problème étudié, soit au nombre N ,
- (2) spécifier les dimensions de ces variables en utilisant les dimensions de base (L, T, M, Θ),
- (3) choisir les grandeurs fondamentale convenables, disons au nombre r ,
- (4) utiliser une méthode appropriée pour identifier le nombre et la forme des paramètres sans dimensions (paramètres adimensionnels).

Il y a deux méthodes utilisées pour l'analyse dimensionnelle :

- i- la méthode de Rayleigh,
- ii- le théorème des π , ou théorème de Vaschy–Buckingham.

On présente ici le théorème des π .

10.3. Théorème de Vaschy–Buckingham ou théorème des π

On peut énoncer ce théorème de la manière suivante :

Énoncé : Toute grandeur \mathcal{B} d'un phénomène physique et fonction de N variables (ou causes) *indépendantes* $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N$, mesurée par r unités fondamentales, $r < N$, s'écrit comme

$$\mathcal{B} = \mathcal{F}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_N),$$

et s'exprime nécessairement en fonction de $(N - r)$ *paramètres adimensionnels* (sans dimension) sous la forme

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1^{a_1} \mathcal{B}_2^{a_2} \dots \mathcal{B}_r^{a_r} \overline{\mathcal{F}}(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{N-r}) \quad (10.1)$$

où $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{N-r}$ sont des paramètres de similitude à partir des formules suivantes :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\mathcal{B}_{r+1}}{\mathcal{B}_1^{a_{r+1,1}} \mathcal{B}_2^{a_{r+1,2}} \dots \mathcal{B}_r^{a_{r+1,r}}} \\ \pi_2 &= \frac{\mathcal{B}_{r+2}}{\mathcal{B}_1^{a_{r+2,1}} \mathcal{B}_2^{a_{r+2,2}} \dots \mathcal{B}_r^{a_{r+2,r}}} \\ &\vdots \\ \pi_{N-r} &= \frac{\mathcal{B}_N}{\mathcal{B}_1^{a_{N,1}} \mathcal{B}_2^{a_{N,2}} \dots \mathcal{B}_r^{a_{N,r}}} \end{aligned}$$

où $\{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r\}$ désigne un sous-ensemble de grandeurs physiques aux *dimensions indépendantes*, les exposantes a_1, a_2, \dots , et a_r sont à déterminer. En général, on pose

$$\pi = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}_1^{a_1} \mathcal{B}_2^{a_2} \dots \mathcal{B}_r^{a_r}}$$

et par conséquent (10.1) s'écrit comme

$$\pi = \overline{\mathcal{F}}(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{N-r}) \quad (10.2)$$

Ainsi, on peut écrire un tableau des exposants aux dimensions de $[\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N]$:

[Grandeur]	L	T	M	Θ
$[\mathcal{B}]$	α	β	γ	δ
$[\mathcal{B}_1]$	α_1	β_1	γ_1	δ_1
$[\mathcal{B}_2]$	α_2	β_2	γ_2	δ_2
\vdots	\dots	\dots	\dots	\dots
$[\mathcal{B}_{N-4}]$	α_{N-4}	β_{N-4}	γ_{N-4}	δ_{N-4}

Exemple : Un navire, de taille caractérisée par une longueur ℓ , est en mouvement à la vitesse U . L'eau dans laquelle la navire avance exerce une force de résistance (force de traînée), $F_{\text{traînée}}$, au mouvement que l'on peut penser dépendre, à part de ℓ et U , de la masse volumique ρ , de la viscosité dynamique μ et de la tension superficielle σ_s de l'eau ainsi que de l'accélération de la pesanteur g .

Selon la méthode de Rayleigh les la relation recherchée doit être de dimensions homogènes, c'est-à-dire :

$$F = \rho^{\alpha_1} U^{\alpha_2} \ell^{\alpha_3} \mu^{\alpha_4} g^{\alpha_5} \sigma_s^{\alpha_6},$$

d'où le tableau des exposants :

[Grandeur]	L	T	M	Θ	exposant
$[F_{\text{traînée}}]$	1	-2	1	0	1
$[\rho]$	-3	0	1	0	α_1
$[U]$	1	-1	0	0	α_2
$[\ell]$	1	0	0	0	α_3
$[\mu]$	-1	-1	1	0	α_4
$[g]$	1	-2	0	0	α_5
$[\sigma_s]$	0	-2	1	0	α_6

Si maintenant l'on examine assez bien le tableau de dimensions on se rend compte assez vite que l'on peut choisir ℓ , U et ρ comme variables fondamentales, soit $r = 3$, de préférence à σ_s , μ et g . Notons au passage que ce choix nous permet de récupérer les variables fondamentales L, T et M à partir de ℓ, U et ρ . Bien que μ et g sont importantes, une choix de μ comme variable fondamentale serait inapproprié car g ne pourrait pas constituer avec ℓ et U un système des variables dimensionnellement indépendantes. Notons aussi que μ, g et σ_s sont des grandeurs indépendantes l'une de des autres.

Ainsi, puisque la relation recherchée doit être dimensionnellement homogène, on déduit les équations suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
 & F_{\text{traînée}} & \rho \quad U \quad \ell \quad \mu \quad g \quad \sigma_s \\
 \text{somme d'exposants en } L : & +1 & = -3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 + 0 \\
 \text{somme d'exposants en } T : & -2 & = +0 - \alpha_2 + 0 - \alpha_4 - 2\alpha_5 - 2\alpha_6 \\
 \text{somme d'exposants en } M : & +1 & = +\alpha_1 + 0 + 0 + \alpha_4 + 0 + \alpha_6
 \end{array}$$

Par la suite, en résolvant par rapport aux variables fondamentales (à savoir ℓ , U et ρ) que l'on a choisi, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= 1 - \alpha_4 - \alpha_6 \\
 \alpha_2 &= +2 - \alpha_4 - 2\alpha_5 - 2\alpha_6 \\
 \alpha_3 &= +2 - \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_6
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 F_{\text{traînée}} &= \rho^{1-\alpha_4-\alpha_6} U^{2-\alpha_4-2\alpha_5-2\alpha_6} \ell^{2-\alpha_4+\alpha_5-\alpha_6} \mu^{\alpha_4} g^{\alpha_5} \sigma_s^{\alpha_6} \\
 &= \rho U^2 \ell^2 \left(\frac{\mu}{\rho U \ell} \right)^{\alpha_4} \left(\frac{g \ell}{U^2} \right)^{\alpha_5} \left(\frac{\sigma_s}{\rho U^2 \ell} \right)^{\alpha_6}.
 \end{aligned}$$

Il est commode de réécrire ce résultat sous la forme

$$F_{\text{traînée}} = \frac{1}{2} \rho U^2 S \mathcal{F}(Re, Fr, We)$$

où on a introduit le coefficient $1/2$ et posé $S = \ell^2$, avec

$$Re = \frac{\rho \ell U}{\mu} = \frac{\ell U}{\nu}, \quad Fr = \frac{U^2}{g \ell}, \quad We = \frac{\rho U^2 L}{\sigma_s}$$

qui sont respectivement les nombres sans dimensions de Reynolds, de Froude et de Weber.

Revenons maintenant au théorème de Vaschy–Buckingham. En total on a, à part de F , $N = 6$ variables, à savoir : ρ , U , L , μ , g et σ_s . Soit ρ , U et L les grandeurs fondamentales, au nombre $r = 3$ choisis de telle manière que les variables restant μ , g et σ_s sont de dimensions indépendantes. Alors, il existe $N - r = 3$ paramètres sans dimensions :

$$\begin{aligned}
 \pi_1 &= \frac{\mu}{\rho^{\alpha_1} U^{\beta_1} \ell^{\gamma_1}}, & \begin{cases} -1 = -3\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \\ -1 = -\beta_1 \\ 1 = \alpha_1 \end{cases} & \implies \begin{cases} \alpha_1 = 1, \\ \beta_1 = 1, \\ \gamma_1 = 1, \end{cases} \\
 \pi_2 &= \frac{g}{\rho^{\alpha_2} U^{\beta_2} \ell^{\gamma_2}}, & \begin{cases} 1 = -3\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \\ -2 = -\beta_2 \\ 0 = \alpha_2 \end{cases} & \implies \begin{cases} \alpha_2 = 0, \\ \beta_2 = 2, \\ \gamma_2 = -1 \end{cases} \\
 \pi_3 &= \frac{\sigma_s}{\rho^{\alpha_3} U^{\beta_3} \ell^{\gamma_3}}, & \begin{cases} 0 = -3\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \\ -2 = -\beta_3 \\ 1 = \alpha_3 \end{cases} & \implies \begin{cases} \alpha_3 = 1, \\ \beta_3 = 2, \\ \gamma_3 = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

avec

$$\pi = \frac{F_{\text{traînée}}}{\rho^\alpha U^\beta \ell^\gamma}, \quad \begin{cases} 1 = -3\alpha + \beta + \gamma \\ -2 = -\beta \\ 1 = \alpha \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 1, \\ \beta = 2, \\ \gamma = 2. \end{cases}$$

Ainsi, on obtient :

$$\pi = \frac{F_{\text{traînée}}}{\rho U^2 \ell^2}, \quad \pi_1 = \frac{\mu}{\rho U \ell}, \quad \pi_2 = \frac{g \ell}{U^2}, \quad \pi_3 = \frac{\sigma_s}{\rho U^2 \ell}$$

et l'on retrouve la relation

$$F_{\text{traînée}} = \rho U^2 \ell^2 \mathcal{F}(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = \rho U^2 \ell^2 \mathcal{F}(Re, Fr, We).$$

D'après ce résultats, on tire les conclusions suivantes :

- i-** : L'analyse dimensionnelle montre comment interviennent les différents paramètres, mais sans fournir la forme précise de la relation.
- ii-** : L'étude expérimentale de la résistance au mouvement d'un navire se revient à étudier la fonction

$$F_{\text{traînée}} = \rho U^2 \ell^2 \mathcal{F}(Re, Fr, We),$$

appelée la fonction de résistance ou de traînée au mouvement de navire.

10.4. Paramètres sans dimensions

L'exemple précédent a mis en évidence l'existence de trois paramètres sans dimensions :

- (1) Le **nombre de Reynolds** qui a traduit l'effet de viscosité ou l'influence des forces de traînée de l'eau sur la coque de navire.
- (2) Le **nombre de Froude** qui a traduit l'effet de la pesanteur ou l'influence de sillage, c'est-à-dire l'influence de système de vagues produit derrière le navire.
- (3) Le **nombre de Weber** qui a traduit l'effet des forces de tension superficielle qui sont négligeables pour cet exemple.

On rencontre dans la mécanique des fluides un nombre des paramètres adimensionnels dont quelques uns interviennent dans un écoulement donné. Quelques paramètres importants et leurs définitions sont donnés au tableau 10.2.

10.5. Similitude et théorie des maquettes

Alors que l'étude expérimentale est le plus souvent nécessaire, les essais en vraie grandeur (par exemple d'un barrage, d'une construction portuaire, de navire en bassin de carène, d'une turbine ou d'un avion, etc ...) sont rares et très coûteux, et ne sont possibles que dans un nombre limité de cas. C'est pourquoi on fait souvent recours aux modèles aux échelles réduites (appelés *maquettes*) du système en vraie grandeur (appelé *prototype*) à étudier.

Pour que les résultats obtenus expérimentalement sur maquette puissent être extrapolés au prototype, un nombre des principes de similitude doit être respectés. Pour mettre en évidence ces principes on écrit d'abord l'équation de Navier–Stokes, ainsi que les conditions aux limites et initiales, sous une forme adimensionnelle. L'état de tout écoulement se

TABLE 10.2. Analyse dimensionnelle et similitude : ici, la grandeur c représente la vitesse de son dans le milieu fluide, t^* un temps caractérisant la variation locale, $\kappa = c_v/\rho\lambda$ la diffusivité thermique, c_v la chaleur massique à volume constant, c_p la chaleur massique à pression constante et σ_s la tension superficielle de fluide; τ_0 désigne la contrainte (de cisaillement) pariétale (c'est-à-dire, à la parois).

Paramètre	Définition	Explication	Domaine d'application
Nombre de Reynolds	$Re = \frac{\rho UL}{\mu}$	$\frac{\text{force d'inertie}}{\text{force visqueuse}}$	Écoulements visqueux
Nombre de Froude	$Fr = \frac{U^2}{Lg}$	$\frac{\text{force d'inertie}}{\text{force de la pesanteur}}$	Écoulement à surface libre
Nombre de Mach	$Ma = \frac{U}{c}$	$\frac{\text{vitesse d'écoulement}}{\text{vitesse de son}}$	Écoulement compressible
Rapport de capacités thermique	$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$	$\frac{\text{enthalpie}}{\text{énergie interne}}$	Transfert thermique
Nombre de Strouhal	$St = \frac{(L/U)}{\tau}$	$\frac{\text{temps d'advection}}{\text{temps de variation locale}}$	Écoulement instationnaire
Nombre de Prandtl	$Pr = \frac{\kappa}{\nu}$	$\frac{\text{diffusivité thermique}}{\text{diffusivité visqueuse}}$	Transfert thermique
Nombre de Péclet	$Pe = \frac{(L/U)}{\lambda/(\rho c_p U^2)}$	$\frac{\text{temps d'advection}}{\text{temps de diffusion thermique}}$	Transfert thermique
Nombre d'Eckert	$Ec = \frac{U^2}{c_v \Delta T}$	$\frac{\text{variation d'énergie cinétique}}{\text{variation d'énergie interne}}$	Transfert thermique
Nombre de Weber	$We = \frac{\rho U^2 L}{\sigma_s}$	$\frac{\text{force d'inertie}}{\text{force de tension superficielle}}$	Écoulement à surface libre
Coefficient de frottement	$C_D = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2}$	$\frac{\text{force de traînée}}{\text{force dynamique}}$	Aérodynamique, Hydrodynamique
Rugosité adimensionnelle	$\frac{\varepsilon}{L}$	$\frac{\text{rugosité}}{\text{longueur caractéristique}}$	Écoulement turbulent, surface rugueuse

caractérisé par des données géométriques, cinématique, dynamiques, ou encore thermodynamiques y compris les valeurs des grandeurs physiques du fluide μ, ρ, k, c_p et c_v .

- Pour un écoulement sur un corps quelconque, les données géométriques sont exprimées en fonction d'une longueur caractéristique que nous notons D , par exemple le diamètre d'un cylindre ou la longueur d'un profil.
- Les données cinématiques sont liées par exemple à la façon que le fluide se met en mouvement; elles s'expriment par une vitesse U et un temps caractéristiques peut être exprimé par D/U .
- Les données dynamiques sont liées aux forces surfaciques et volumiques qui s'exercent sur le fluide. Les premières se manifestent comme forces de pression, contraintes de cisaillement ou tension superficielle. Les forces volumiques peuvent être représentées par la force de pesanteur ou des forces d'origine électromagnétique. Ces données sont exprimée en termes des paramètres caractéristiques, comme par exemple l'accélération g due à la force de pesanteur, un *gradient de pression* ou encore une force de cisaillement caractéristique.

Pour simplifier, nous supposons que l'écoulement étudié est incompressible et prendrons ρ constante. Afin d'alléger la notation nous affectons aussi un astérisque $*$ aux différentes grandeurs t, \vec{x}, \vec{v} , et p , et posons $\vec{f} = \vec{g} = -g\vec{z}$. Ainsi, nous employons les symboles sans astérisque pour désigner les grandeurs sans dimensions. On pose

$$t^* = \frac{D}{U} t, \quad \vec{x}^* = D \vec{x}, \quad \vec{v}^* = U \vec{v}, \quad p^* = \rho U^2 p. \quad (10.3)$$

Les équations avec dimensions se ré-écrivent alors comme :

$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{v}^* = 0, \quad (10.4a)$$

$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \vec{v}^* \cdot \vec{\nabla}^* \vec{v}^* = \vec{g}^* - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}^* p^* + \nu \Delta^* \vec{v}^*. \quad (10.4b)$$

En portant le changement des variables dans (10.4a) et (10.4b), et multipliant ensuite les équations ainsi trouvées par D/U et D/U^2 respectivement, nous obtenons :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (10.5a)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{accélération locale}} + \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}}_{\text{accélération par convection}} = \underbrace{\frac{1}{Fr} \vec{z}}_{\substack{\text{Forces volumiques} \\ \text{Forces d'inertie}}} - \underbrace{\vec{\nabla} p}_{\substack{\text{Forces de pression} \\ \text{Forces d'inertie}}} + \underbrace{\frac{1}{Re} \Delta \vec{v}}_{\substack{\text{Forces visqueuses} \\ \text{Forces d'inertie}}} \quad (10.5b)$$

où

$$Fr = \frac{U^2}{Dg}, \quad Re = \frac{DU}{\nu}.$$

Les équations (10.5) sont sans dimensions et ne font intervenir que deux nombres sans dimensions qui dépendent de l'écoulement. Cela traduit alors le fait que tout écoulement n'est défini que par les valeurs de nombres sans dimensions qui lui caractérisent.

Notons que les conditions aux limites s'appliquent aux frontières du système, donc liées à la géométrie du système, et les conditions initiales exprime l'état du système à l'instant initial. Alors pour des conditions aux limites données il faut que les solutions soient uniques,

pour le prototype et la maquette, en particulière aux frontières ce qui implique une correspondance géométrique des frontières. Maintenant, si on désigne par l'indice 1 les grandeurs relatives au prototype (respectivement au premier écoulement), et par l'indice 2 celles correspondant au maquette (respectivement au deuxième écoulement), les distances d_1 et d_2 reliant des points homologues, par exemple $(AB)_{\text{prototype}}$ et $(AB)_{\text{maquette}}$, on devra satisfaire une relation du type :

$$k_g = \frac{d_1}{d_2} = \text{Cte}$$

Ainsi, on parle de la similitude géométrique.

L'analyse des équations sans dimensions (10.5) nous permettent de mettre en évidence les principes suivants de la similitude :

- (1) **Similitude géométrique :** *Toute les dimensions linéaire de maquette correspondent aux celles de prototype par un facteur d'échelle constante k_g :* En notant

$$x = \frac{x_1^*}{D_1} = \frac{x_2^*}{D_2}, \quad y = \frac{y_1^*}{D_1} = \frac{y_2^*}{D_2}, \quad z = \frac{z_1^*}{D_1} = \frac{z_2^*}{D_2}, \quad \dots \text{ etc.}$$

on tire

$$\frac{x_1^*}{x_2^*} = \frac{y_1^*}{y_2^*} = \frac{z_1^*}{z_2^*} = \frac{D_1}{D_2} \quad (10.6)$$

De plus, en se référant, par exemple, au bateau schématisé dans 10.1 il vient que :

$$k_g = \frac{H_p}{H_m} = \frac{L_p}{L_m} = \frac{D_p}{D_m} = \frac{D_1}{D_2} = \dots$$

où k_g est un facteur d'échelle géométrique.

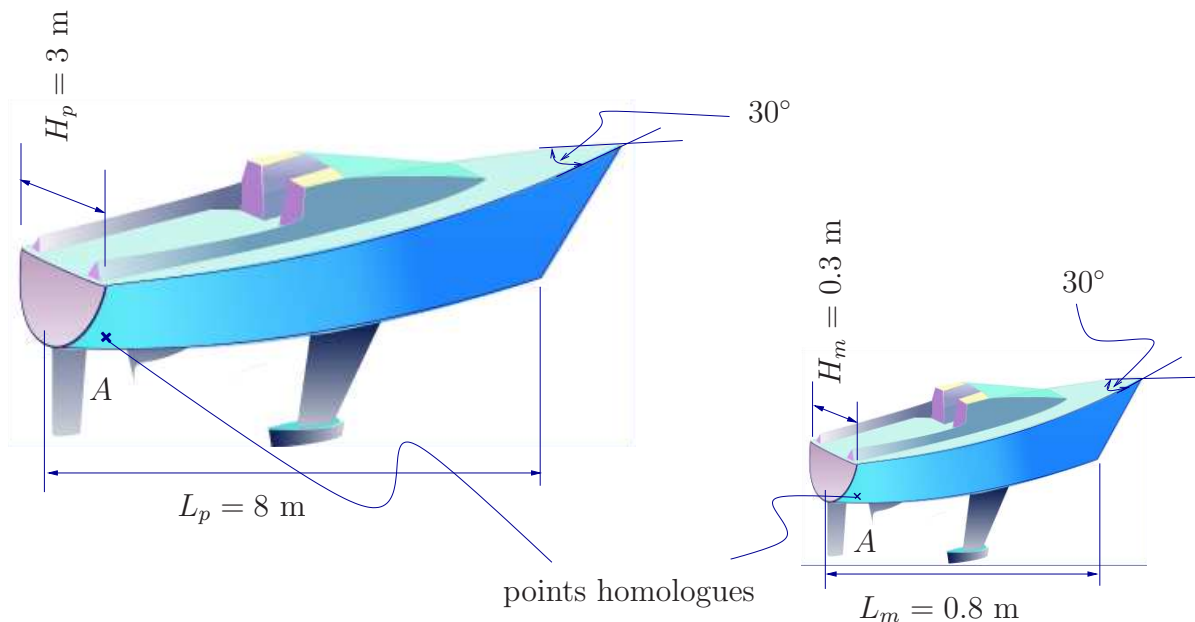


FIGURE 10.1. Les dimensions de maquette sont telles que les points homologues satisfont la relation $H_p/H_m = L_p/L_m = D_1/D_2 = k_g$.

La similitude géométrique préserve non seulement la correspondance entre les points appartenant aux surfaces de solides mais aussi les angles et orientations par à l'écoulement ainsi que les lignes de courant des deux écoulements.

- (2) **Similitude cinématique** : Toutes les vitesses homologues aux points homologues sont liées par

$$u = \frac{u_1^*}{U_1} = \frac{u_2^*}{U_2}, \quad v = \frac{v_1^*}{U_1} = \frac{v_2^*}{U_2}, \quad w = \frac{w_1^*}{U_1} = \frac{w_2^*}{U_2}$$

avec

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\frac{D_2}{U_2}}{\frac{D_1}{U_1}} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right) \left(\frac{U_1}{U_2}\right) = \text{Cte} = k_t$$

D'où

$$\frac{U_1}{U_2} = k_t \frac{D_1}{D_2} = k_g k_t = k_c = \text{Cte}$$

Rappelons aussi :

$$\frac{u_1^*}{u_2^*} = \frac{v_1^*}{v_2^*} = \frac{w_1^*}{w_2^*} = \frac{U_1}{U_2} = \text{Cte} = k_c$$

Les vitesses aux points homologues sont proportionnelles par un facteur d'échelle constant, k_c .

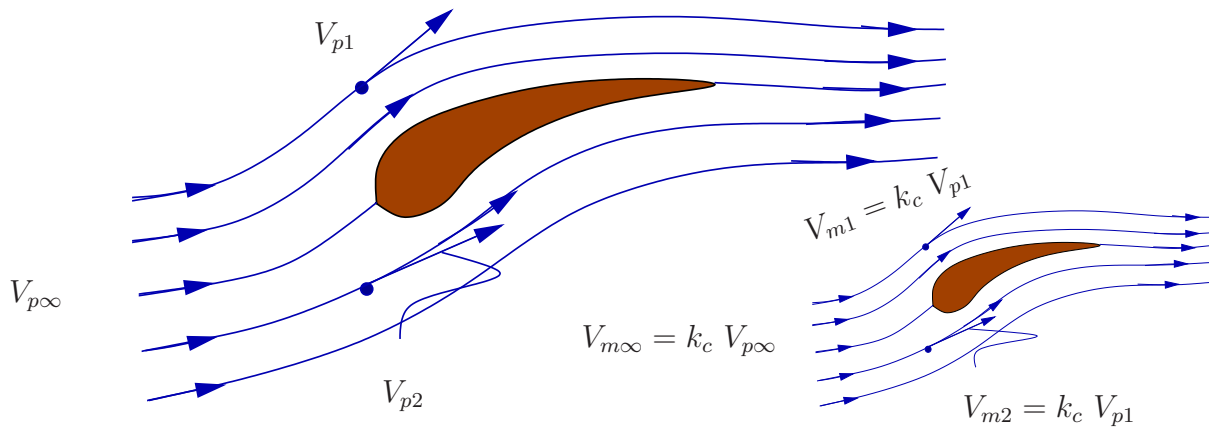


FIGURE 10.2. Deux écoulements avec similitude cinématique

- (3) **Similitude dynamique** : De la même manière on peut montrer que les forces aux points matériels homologues sont aussi homologues, c'est-à-dire, elles sont proportionnelles par un facteur d'échelle constant, k_d .

Pour des fluides homogènes, par exemple, la distribution des masses dans la maquette et le prototype sont semblables, et par conséquent la similitude géométrique entraîne la similitude de masse.

Selons le principe fondamental de la dynamique, les forces sont proportionnelles aux accélérations.

La similitude dynamique implique, par exemple, que les pressions sont entre elles comme:

$$\frac{p_1^*}{p_2^*} = \frac{\rho_1 U_1^2}{\rho_2 U_2^2} = k_m k_g^3 k_c^2 = \text{Cte}$$

où k_m est une constante de proportionnalité entre les masses de prototype et de maquette. Par le même, Les forces sont entre elles comme :

$$\frac{F_1^*}{F_2^*} = \frac{\rho_1 U_1^2 D_1^2}{\rho_2 U_2^2 D_2^2} = \text{Cte} = k_d$$

Alors on dit que deux écoulements sont semblables si les nombres sans dimensions ont les mêmes valeurs :

$$\frac{D_1 U_1}{\nu_1} = \frac{D_2 U_2}{\nu_2} = \frac{D_1 k_g U_1 k_c}{\nu_2}$$

D'où on tire que $k_g k_c = 1$ pour le même fluide.

En général, la similitude dynamique exige que les conditions suivantes soient satisfaites :

- (a) Écoulement incompressible sans surfaces libres : $Re_p = Re_m$.
- (b) Écoulement incompressible avec surfaces libres : $Re_p = Re_m, Fr_p = Fr_m$.
- (c) Écoulement compressible : $Re_p = Re_m, Ma_p = Ma_m, \gamma_p = \gamma_m$
- (d) Écoulement avec tension superficielle : $Re_p = Re_m, We_p = We_m$

Résumons :

- (1) La similitude géométrique exige que l'échelle linéaire de longueur k_g soit la même.
- (2) La similitude cinématique exige que l'échelle linéaire et l'échelle de temps soient les mêmes, c'est-à-dire, l'échelle de vitesse k_c soit la même.
- (3) La similitude dynamique requiert que les échelles linéaires, de temps et de force sont les mêmes.

Exemple : Pour estimer la force de frottement, F_p , sur un prototype sonde, on utilise les données obtenues sur une maquette testée dans une soufflerie. Au tableau ci-dessous sont montrées les données de teste et les caractéristiques du prototype.

Paramètre	Prototype	Maquette
Géométrie	Sphère	Sphère
D	0.4 m	0.15 m
V	2.5 m/s	à déterminer
F	à déterminer	25 N
ρ	1000 kg/m ³	1.2 kg/m ³
ν	1.3×10^{-6} m ² /s	1.5×10^{-5} m ² /s

Solution. La force de frottement F sur une sphère dépend de la vitesse de l'écoulement, V , de diamètre D , de la densité de fluide ρ et la viscosité cinématique μ . Alors selon le théorème des π on a $N = 4$. Les variables D , V et ρ sont indépendantes et consistent donc

des grandeurs fondamentales, au nombre $r = 3$, pour ce problème. On a donc 2 paramètres à déterminer

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\rho^{\alpha_1} D^{\beta_1} V^{\gamma_1}}$$

avec

$$\pi = \frac{F}{\rho^\alpha D^\beta V^\gamma} \mathcal{F}(\pi_1)$$

On trouve

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\rho DV} = \frac{\nu}{DV} = \frac{1}{Re}, \quad \pi = \frac{F}{D^2 \rho V^2}.$$

L'analyse dimensionnelle montre alors que la force de frottement est liée au nombre de Reynolds par un paramètre sans dimension appelé le coefficient de frottement, ou plutôt le coefficient de traînée pour cet exemple :

$$C_D = \mathcal{F}\left(\frac{F/D^2}{\rho V^2}\right) = \mathcal{F}(Re).$$

Or, le nombre de Reynolds est connu pour le prototype :

$$Re_p = \frac{2.5 \text{ m/s} \times 0.4 \text{ m}}{1.3 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 7.69 \times 10^6,$$

ce qui conduit, selon le principe de la similitude, à

$$Re_m = Re_p = \left(\frac{VD}{\nu}\right)_m$$

et par la suite on trouve

$$V_m = \left(\frac{7.69 \times 10^6 \times 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}}{0.15 \text{ m}}\right) = 76.9 \text{ m/s}.$$

La similitude exige

$$C_D|_p = C_D|_m$$

ce qui donne pour la force de frottement sur le prototype :

$$F_p = F_m \left(\frac{\rho_p V_p^2 D_p^2}{\rho_m V_m^2 D_m^2}\right) = 156.58 \text{ N}$$

CHAPITRE 11

Couches limites

11.1. Introduction

Tout écoulement réel sur un corps imperméable quelconque doit satisfaire aux conditions suivantes :

- Nul fluide ne peut pénétrer une frontière imperméable qui se traduit par

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{w} \cdot \vec{n} \quad (11.1)$$

où \vec{w} est la vitesse du corps au point du contact. Cette condition traduit l'imperméabilité de frontière au fluide et dénommée *condition de non-pénétration* ou *condition de glissement*.

- Compte tenu des forces de viscosité, toute particule fluide en contact avec la frontière d'un corps imperméable est au repos relativement à cette dernière :

$$\vec{v} \cdot \vec{t} = \vec{w} \cdot \vec{t}. \quad (11.2)$$

Cette condition traduit le *non-glissement* du fluide sur la paroi du corps sur lequel le fluide s'écoule. La présence des forces de viscosité rend toute particule fluide en contact avec la surface immobile relativement à cette dernière : l'écoulement près de la paroi est ralenti, et on y observe *un fort gradient de vitesse* normal à la paroi, $\partial u / \partial y$. La zone où ces effets se produisent est généralement "fine", et dénommée *couche limite*. C'est au sein de la couche limite que la transition d'une vitesse nulle (relativement à la paroi) à la vitesse de l'écoulement non perturbé par la présence du corps s'effectue. Dans cette zone une petite viscosité de cisaillement μ exerce un effet considérable sur la contrainte pariétale $\tau_p = \mu \partial u / \partial y|_{\text{paroi}}$ qui pourrait prendre des valeurs très grandes.

11.2. Équations de la couche limite – théorie de Prandtl (1904)

Afin de mettre en évidence le phénomène de la couche limite nous considérons les équation de Navier–Stokes et la conservation de la masse sous forme adimensionnelle, rappelées ci-dessous, mais en négligeant les forces volumiques :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (11.3a)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{accélération locale}} + \underbrace{\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}}_{\text{accélération due à la convection}} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{force de pression}} + \underbrace{\frac{1}{Re} \Delta \vec{v}}_{\text{force visqueuse}}. \quad (11.3b)$$

En pratique, pour les écoulements externes sur un corps quelconque, particulièrement en aérodynamique, le nombre de Reynolds Re peut être très grand : $10^3 \lesssim Re \lesssim 10^9$ ce qui suggère qu'une bonne approximation pourrait être obtenue en négligeant les forces de viscosité. Cela conduit à l'équation d'Euler :

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{accélération locale}} + \underbrace{\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}}_{\text{accélération due à la convection}} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{force de pression}} \quad (11.4)$$

qui est une dégénérescence significative (dite dégénérescence extérieure) de l'équation de Navier–Stokes. À l'encontre de ces dernières qui sont du second ordre, les équations d'Euler sont du premier ce qui implique que l'une des conditions aux limites (11.1) et (11.2) ne peut pas être satisfaite. Nous sommes donc face à un problème appelé *problème de perturbation singulière*.

Rappelons nous que l'équation d'Euler est appliquée aux *fluides parfaits* où les forces de viscosité sont a priori négligées : en théorie du fluide parfait on ne peut satisfaire à la paroi que la condition de glissement (11.1).

Revenons au problème de la couche limite, et considérons pour fixer les idées l'écoulement incompressible bidimensionnel d'un fluide visqueux le long d'une plaque plane semi-infinie; la masse volumique ρ et viscosité de cisaillement μ sont supposées constantes et l'écoulement uniforme à l'infini amont.

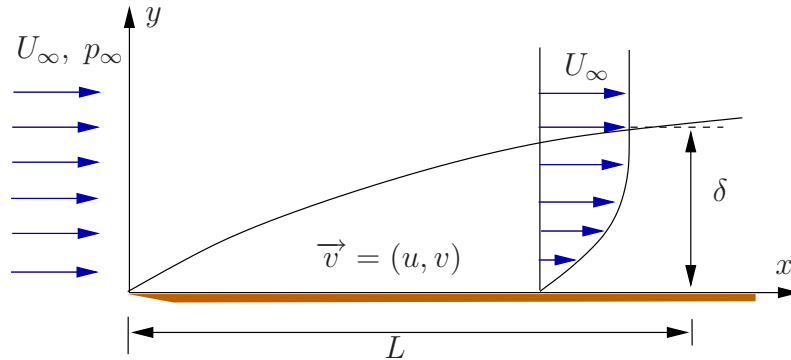


FIGURE 11.1. Couche limite sur une plaque plane.

Pour estimer l'ordre de grandeur de différents termes dans les équations de mouvement, nous prenons une vitesse U_∞ , une longueur L caractéristiques parallèlement à la plaque, et une échelle caractérisant l'épaisseur de la couche limite δ (U_∞ et L sont constantes). La pression p et le temps sont supposés d'ordre ρU_∞^2 et L/U_∞ respectivement. Nous supposons aussi, et ceci est sans perte de généralité, que U_∞ et L sont $O(1)$. On note $y = 0$ la plaque plane et $Re = LU_\infty/\nu$.

Il est avantageux de commencer en considérant l'équation de la conservation de la masse. Ici nous admettons que $\partial u/\partial x$ est de l'ordre U_∞/L et $\partial v/\partial y$ de l'ordre V_0/δ , V_0 étant une

échelle caractéristique pour v . Pour satisfaire l'équation de la conservation de la masse il faut que ces deux termes soient du même ordre de grandeur. Alors, on en déduit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{U_\infty}{L} \quad \frac{V_0}{\delta}$$

d'où $V_0 = O\left(\frac{\delta U_\infty}{L}\right)$. (11.5)

Avec cette estimation prise en compte, examinons maintenant les ordres de grandeurs des différents termes de l'équation de la quantité de mouvement :

$$\begin{array}{l} \text{selon } x : \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \text{d'ordre} \quad \frac{U_\infty^2}{L} \quad \frac{U_\infty^2}{L} \quad \frac{\delta U_\infty U_\infty}{L \delta} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\rho U_\infty^2}{L} \quad \frac{\nu U_\infty}{L^2} \quad \frac{\nu U_\infty}{\delta^2} \\ \text{soit } \propto \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{Re} \quad \frac{1}{Re} \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \end{array} \quad (11.6a)$$

$$\begin{array}{l} \text{selon } y : \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \text{d'ordre} \quad \frac{\delta U_\infty^2}{L^2} \quad \frac{\delta U_\infty^2}{L^2} \quad \frac{\delta U_\infty \delta U_\infty}{L L \delta} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\rho U_\infty^2}{\delta} \quad \frac{\nu \delta U_\infty}{L^3} \quad \frac{\nu \delta U_\infty}{L \delta^2} \\ \text{soit } \propto \quad \frac{\delta}{L} \quad \frac{\delta}{L} \quad \frac{\delta}{L} \quad \frac{L}{\delta} \quad \frac{1}{Re} \left(\frac{\delta}{L}\right) \quad \frac{1}{Re} \left(\frac{L}{\delta}\right) \end{array} \quad (11.6b)$$

Avant d'appliquer le principe de la moindre dégénérescence nous nous trouvons devant deux possibilités :

- δ est $O(L)$ ce qui conduit pour Re grand à négliger les deux termes où interviennent la viscosité.
- δ est petit par rapport à L ce qui permet de garder le terme en $\nu \partial^2 u / \partial y^2$ dans (11.6a) où intervient la viscosité. Pour cela on doit avoir :

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 = O(1)$$

d'où $\delta \sim Re^{-1/2} L$. (11.7)

Avec ce choix pour δ les équations (11.6a) et (11.6b) se réduisent à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (11.8a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (11.8b)$$

à l'ordre dominant en Re . On appelle ce système d'équations *les équation de Prandtl* pour la couche limite.

En conclusion, les effet visqueux sont importants dans une couche fine d'épaisseur $O(Re^{-1/2})$ où la pression est invariable en y et d'ordre $Re^{-1/2}$. Dans cette couche *les équations réduites de Navier–Stokes* sont connues sous la dénomination *équations de la couche limite ou équations de Prandtl*.

Pour le problème bidimensionnel sur une plaque plane ces équations s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (11.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (11.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (11.11)$$

auxquelles on adjoint les conditions aux limites

$$y = 0 : u = v = 0; \quad y = \infty : u = U_e(x, t). \quad (11.12)$$

En ce qui concerne la pression, elle est déterminée à partir de l'écoulement à l'extérieur de la couche limite $\vec{v} = (U_e(x, t), 0)$:

$$\frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (11.13)$$

supposé irrotationnel, $\nabla \wedge \vec{v} = \vec{0}$. De plus, à cela il faut ajouter :

- (1) à l'instant $t = 0$, la description de l'écoulement dans la couche limite $\forall x, y$; et
- (2) à une section donnée, disons $x = x_0$, un profil de vitesse bien défini.

11.3. Développement de la couche limite

Considérons une couche limite laminaire en écoulement permanent. Selon la théorie de Prandtl, la pression à l'intérieur de la couche limite est constante (par rapport à y) pour tout x , et le gradient de pression y est imposé par l'écoulement extérieur, c'est-à-dire le profile de vitesse u s'adapte selon la variation de la vitesse extérieure, U_e . On constant alors en examinant l'équation de la couche limite (11.8a) que la courbure du profile de vitesse à la paroi, avec $u(x, y = 0) = v(x, y = 0) = 0$, ne dépend que du gradient de pression :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0},$$

qui, compte tenu de (11.13), conduit à :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -\frac{1}{\nu} U_e \frac{dU_e}{dx} \quad (11.14)$$

car U_e et p ne dépendent que de x .

Notez que cette condition donne d'information sur la courbure du profile de vitesse en $y = 0$, $\partial^2 u / \partial y^2|_{y=0}$, mais non pas sur la tangente du profile, $\partial u / \partial y|_{y=0}$. Cela implique

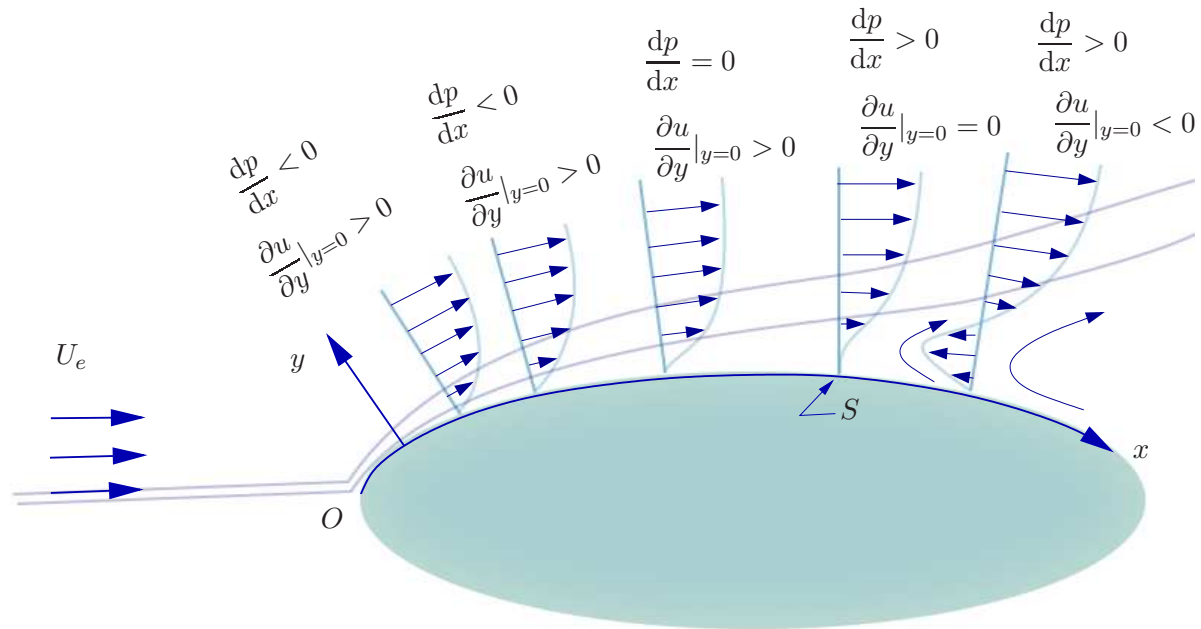


FIGURE 11.2. Évolution de la couche limite sur un corps solide, x est l'abscisse curviligne, S le *point de décollement* ou de *séparation*.

que pour la même courbure on peut avoir, mathématiquement parlant, deux tangentes différentes, soit deux pentes différentes.

Un gradient de pression négative, $dp/dx < 0$, implique une augmentation de vitesse U_e , $dU_e/dx > 0$, soit une accélération dans le sens de l'écoulement. En revanche, un gradient positive conduit à la décélération de l'écoulement. C'est pourquoi le gradient de pression dans le premier cas est dit *favorable* et dans le deuxième *défavorable*.

Un gradient de pression défavorable peut donc provoquer un *décollement* : la vitesse près de la paroi est affaiblie progressivement dans le sens de l'écoulement, de plus en plus de l'énergie cinétique est dissipée pour vaincre les forces de frottement et l'accroissement dans la pression ; un courant de retour près de la paroi peut éventuellement se produire conduisant ainsi au décollement des lignes de courant de la paroi, voir la figure 11.2. C'est à partir du point S , où $(\partial u/\partial y)_{y=0} = 0$, que ce phénomène se produit ; on appelle S *point de décollement* ou *point de séparation*. Le décollement de la couche limite est accompagné d'une formation de tourbillons (voir figure 11.3) et peut avoir de graves conséquences sur la stabilité de l'écoulement et la transition au régime turbulent, et par conséquent sur l'augmentation de la traînée et la perte de charge.

11.3.1. Couche limite sur une plaque plane – solution de Blasius. Cherchons maintenant la solution quand la vitesse de l'écoulement extérieur est constante et parallèle

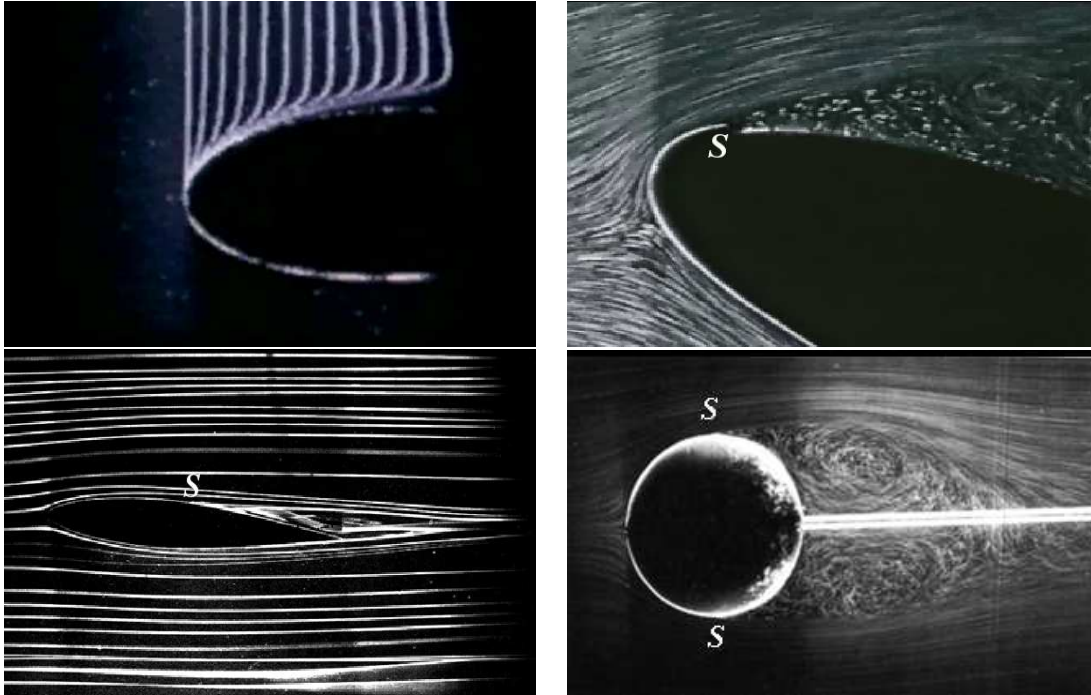


FIGURE 11.3. Visualisation des couches limites se développant sur des obstacles différents ; dans la première image la couche limite est attachée (n'est pas décollée) ; S point de séparation.

à \vec{x} suffisamment loin de la palque. Nous nous limitons à l'écoulement laminaire incompressible, bidimensionnel et stationnaire, avec :

$$\vec{v} = U_\infty \vec{x}, \quad p_\infty = \text{Cte} \quad \text{à l'infini,}$$

d'où
$$(U_e, V_e, p_e) = (U_\infty, 0, \text{Cte}). \quad (11.15)$$

Alors, la solution du problème extérieur (11.13), auquel on adjoint la condition (11.15), est de manière évidente :

$$U_e = U_\infty, \quad V_e = 0, \quad p_e = \text{Cte}. \quad (11.16)$$

Compte tenu de ces résultats l'équation de la couche limite se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (11.17a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (11.17b)$$

auxquelles on adjoint les conditions aux limites

$$u(x, y = 0) = v(x, y = 0) = 0, \quad (11.18a)$$

$$u(x, y = \infty) = U_\infty. \quad (11.18b)$$

Pour résoudre ce problème commençons par intégrer l'équation de conservation de la masse par rapport à y . On trouve :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u dy + v(x, y) - v(x, y = 0) = 0 \quad (11.19)$$

ce qui montre qu'il existe une fonction $\psi(x, y)$ définie par

$$\psi(x, y) = \int_0^y u dy \quad (11.20)$$

qui satisfait l'équation de la conservation de la masse :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{tel que} \quad \psi(x, y = 0) = 0. \quad (11.21)$$

Cherchons donc une solution sous la forme :

$$\psi(x, y) = \sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta) \quad \text{avec} \quad y = \eta \sqrt{\nu x / U_\infty}.$$

Alors

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\eta}{2x},$$

ce qui conduit, avec les relations (11.21), à :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_\infty f'(\eta), \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu U_\infty}{x} \right)^{1/2} (\eta f'(\eta) - f(\eta)). \end{aligned} \right\} \quad (11.22)$$

En portant ces expressions dans l'équation (11.17b) nous obtenons :

$$-\frac{U_\infty^2}{2x} \eta f' f'' + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu U_\infty}{x} \right)^{1/2} (\eta f' - f) \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} U_\infty f'' = \nu \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right) U_\infty f'''.$$

D'où on obtient une *équation unique pour f*

$$\boxed{f''' + 2f f'' = 0} \quad \text{Solution de Blasius} \quad (11.23a)$$

dite *équation de Blasius*. Les conditions aux limites (11.18a) et (11.18b) deviennent :

$$\boxed{\eta = 0 : f = 0, f' = 0; \quad \eta = \infty : f' = 1.} \quad (11.23b)$$

L'équation (11.23a) soumise à des conditions aux limites (11.23b) admet une solution unique que l'on doit nécessairement calculer numériquement. On trouve $f''(0) = 0.332$.

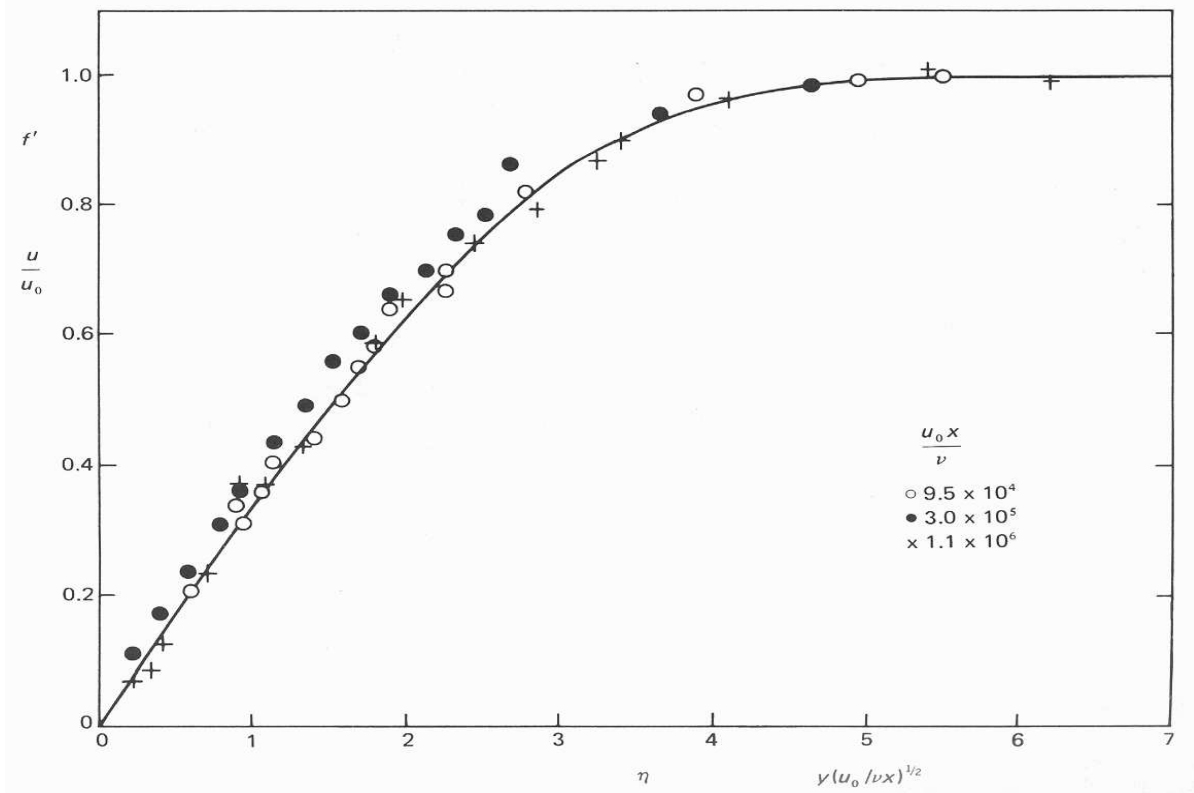


FIGURE 11.4. Figure 11.2 dans Physical Fluid Dynamics, par D.J. Tritton, Oxford Science Publications, 1988

11.3.2. Frottement à la paroi. La force de traînée $\vec{x} F_x$ (pour une largeur b) à laquelle une face de la plaque est soumise est donnée par

$$F_x = b \int_{x'=0}^{\ell} \tau_p dx' \quad (11.24)$$

où τ_p est la contrainte de cisaillement à la paroi :

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu U_\infty \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} f''(\eta = 0) = \rho U_\infty^2 Re_x^{-1/2} f''(\eta = 0) \quad (11.25)$$

avec $Re_x = (xU_\infty)/\nu$ désignant le nombre *local* de Reynolds basé sur la longueur x de la plaque.

Il est préférable d'exprimer la traînée à l'aide d'un *coefficient de frottement* C_f que l'on définit par

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U_e^2} = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 0.664 Re_x^{-1/2} \quad (11.26)$$

Revenons au calcul de la traînée par unité de largeur sur une face de la plaque. On trouve :

$$F_x = b \int_{x'=0}^{x'=\ell} \rho U_\infty^2 Re_x^{-1/2} f''(\eta = 0) dx'$$

$$= 0.664 bl\rho U_\infty^2 Re_\ell^{-1/2} \quad (11.27)$$

où $bl = A$ est la superficie de la plaque.

Un *coefficient de traînée* est défini comme

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A} \quad (11.28)$$

qui, pour la solution de Blasius, vaut

$$C_x = 1.328 Re_\ell^{-1/2}. \quad (11.29)$$

11.4. L'épaisseur de la couche limite

Dans les sections précédentes nous avons évité de définir, avec précision, l'épaisseur de la couche limite. On a vu également que cette notion *caractérise* la couche limite, et est étroitement liée à une limite asymptotique. C'est bien pour cela qu'on la trouve formuler de plusieurs manières différentes destinées à mettre en valeur l'influence physique du frottement à la paroi.

Une définition naturelle de l'épaisseur pourrait être tirée de l'évolution asymptotique de la composante tangentielle de vitesse dans la couche limite u , quand u atteint la vitesse de l'écoulement externe U_e , à savoir la valeur de y pour laquelle $U_e - u \sim \varepsilon U_e$. Une telle définition dépend alors de ε et par conséquent elle s'échappe à la "précision" ! Souvent l'épaisseur de la couche limite est définie par la valeur de y pour laquelle $u/U_e = 0,99$. Pour l'écoulement le long d'une plaque plane cette définition se traduit par

$$\delta = \delta_{0,99} \simeq 5x Re_x^{-1/2}. \quad (11.30)$$

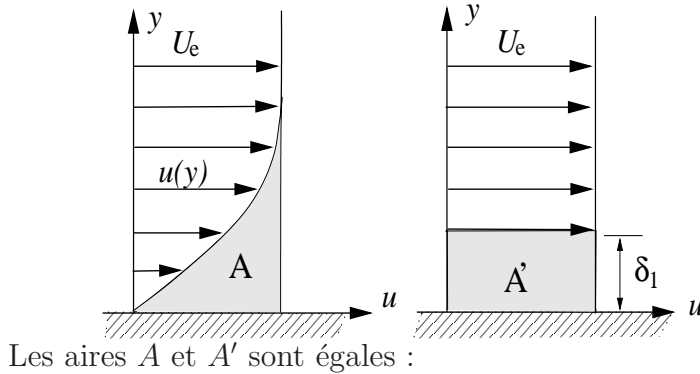
11.4.1. Paramètres caractéristiques de la couche limites. Le caractère asymptotique de l'épaisseur de la couche limite nous permet aussi d'introduire des définitions basées sur les notions de conservation de la masse, quantité de mouvement et d'énergie. Dans cet optique, on introduit respectivement les définitions de l'*épaisseur de déplacement* δ_1 , l'*épaisseur de la quantité de mouvement* δ_2 , et l'*épaisseur en énergie* δ_3 .

11.4.1.1. *Épaisseur de déplacement.* La première décrit le déplacement δ_1 des lignes de courant de l'écoulement non-visqueux (potentiel) extérieurement à la couche limite. Pour fixer les idées, considérons les débits volumiques en fluide parfait Q_p et en fluide visqueux Q_v comptés de la plaque $y = 0$ à la cote $y = h$ lorsque celle-ci tend vers l'infini :

$$Q_p = \int_0^{h \rightarrow \infty} U_e dy$$

et

$$Q_v = \int_0^{h \rightarrow \infty} u dy$$



$$A = A' = \int_0^{\infty} (U_e - u) dy$$

FIGURE 11.5. Définition de l'épaisseur de déplacement δ_1

L'épaisseur de déplacement permet alors de décrire le déficit de débit $Q_p - Q_v$ comme si l'écoulement près de la paroi était en fluide parfait :

$$U_e \delta_1 = \int_0^{h \rightarrow \infty} U_e dy - \int_0^{h \rightarrow \infty} u dy$$

d'où

$$\delta_1 = \int_0^{h \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy. \quad (11.31)$$

Alors, δ_1 représente le déplacement que devrait subir chaque point de la paroi pour qu'un écoulement fictif à vitesse constant U_e s'effectuant entre $y = \delta_1$ et l'infini, voir la figure 11.5.

11.4.1.2. *Épaisseur de la quantité de mouvement, épaisseur d'énergie.* De la même manière on définit l'épaisseur de la quantité de mouvement δ_2 :

$$U_e^2 \delta_2 = \int_0^{h \rightarrow \infty} U_e u dy - \int_0^{h \rightarrow \infty} u^2 dy$$

d'où

$$\delta_2 = \int_0^{h \rightarrow \infty} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy, \quad (11.32)$$

et l'épaisseur en énergie δ_3 :

$$U_e^2 (U_e \delta_3) = \int_0^{h \rightarrow \infty} U_e^2 u dy - \int_0^{h \rightarrow \infty} u^3 dy$$

d'où

$$\delta_3 = \int_0^{h \rightarrow \infty} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u^2}{U_e^2}\right) dy. \quad (11.33)$$

11.4.1.3. *Relations utiles.* Ces définitions nous permet de tirer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^\delta u \, dy &= \int_0^\infty u \, dy - \int_\delta^\infty u \, dy \\ &= \int_0^\infty u \, dy - \int_0^\infty U_e \, dy - \int_\delta^0 U_e \, dy \\ &= U_e(\delta - \delta_1) \end{aligned} \quad (11.34)$$

$$\int_0^\delta u^2 \, dy = U_e^2(\delta - \delta_1 - \delta_2) \quad (11.35)$$

$$\int_0^\delta u^3 \, dy = U_e^3(\delta - \delta_1 - \delta_3) \quad (11.36)$$

11.5. Solutions approchées

La variation avec x des paramètres τ_p , δ_1 , δ_2 et δ_3 peuvent en général être calculés à partir de $u(x, y)$, bien entendu si elle est déjà connue. Or le calcul de champs de vitesse, en elle-même, présente beaucoup de difficultés pour la majorité d'applications industrielles ce qui a motivé la recherche pour des solutions approchées de champs de vitesse pour les écoulements en couches limites. L'une de ces méthodes, souvent employée car facile à mettre en œuvre, consiste de trouver une solution approchée pour u satisfaisant à des conditions aux limites à la paroi et aux limites extérieures de la couche limite définies par $\delta(x)$. Pour cela on procède à partir des équations de Prandtl

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (11.9bis)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (11.10bis)$$

avec les conditions aux limites

$$y = 0 : u = v = 0; \quad y = \infty : u = U_e(x, t). \quad (11.12bis)$$

À ces conditions aux limites, on peut déduire d'autres pour la fonction u en appliquant leurs dérivées par rapport à y :

$$\left. \begin{array}{l} \text{à la paroi} \quad y = 0, \quad u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\nu} U_e \frac{dU_e}{dx} \\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \text{ etc } \dots \\ \text{aux limites extérieures} \quad y \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow U_e, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 0, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial y^n} \rightarrow 0 \end{array} \right\} \quad (11.37)$$

La solution u , étant affine, est supposée alors de la forme

$$u(x, y) = U_e(x) f(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)} \quad (11.38)$$

où $\delta(x)$ est l'épaisseur de la couche limite. Il est raisonnable de supposer que les conditions aux limites imposées quand $y \rightarrow \infty$ sont satisfaites en $y = \delta(x)$. Ainsi, la fonction $f(\eta)$ doit satisfaire les conditions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \text{en } y = 0, \quad \eta = 0 \quad f(0) = 0, \quad f''(0) = -\frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx} \\ \qquad \qquad \qquad f'''(0) = 0 \quad f''''(0) = \frac{\delta^3}{\nu} f'(0) \frac{d}{dx} \left(\frac{U_e f'(0)}{\delta} \right), \text{ etc } \dots \\ \text{en } y = \delta, \quad \eta = 1 \quad f(1) = 1, \quad f'(1) = f''(1) = f'''(1) = \dots = 0 \end{array} \right\} \quad (11.39)$$

D'après Pohlhausen (1921), on peut supposer que la vitesse u est donnée par un polynôme de quatrième ordre :

$$\frac{u}{U_e} = f(\eta) = c_1\eta + c_2\eta^2 + c_3\eta^3 + c_4\eta^4 \quad (11.40)$$

Notez que cette forme satisfait identiquement la condition $u(x, y = 0) = 0$. Les coefficients c_i sont déterminés en appliquant les conditions aux limites suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \text{en } \eta = 0; \quad f''(0) = -\frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx} = -\Lambda \\ \text{en } \eta = 1; \quad f(1) = 1, \quad f'(1) = f''(1) = 0 \end{array} \right\} \quad (11.41)$$

On trouve :

$$u = U_e \left[2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 + \frac{1}{6}\Lambda\eta(1 - \eta)^3 \right] \quad (11.42)$$

Considérons à titre d'exemple des solutions approchées pour l'écoulement sur une plaque plane lorsque le gradient de pression vaut nul, en l'occurrence le problème de Blasius. Les résultats sont montrés dans la tableau ci-dessous et sont comparés avec ceux obtenus à partir de la solution de Blasius.

Comme montré au tableau 11.1 la méthode de solutions approchées conduit aux résultats satisfaisants pour le cas d'écoulement sur une plaque plane à incidence nul, c'est-à-dire à gradient de pression nul. Les solutions approchées sont utilisées en calculant δ_1 et δ_2 , et par la suite τ_p en utilisant l'équation intégrale de von Kármán développée dans la section suivante.

11.6. Équation intégrale de von Kármán

En pratique, l'ingénieur fait recours aux méthodes approchées qui puissent fournir des résultats satisfaisant. Or, les épaisseurs qu'on vient de définir en section §11.4 nous permettent d'écrire un bilan de la quantité de mouvement sur l'épaisseur de la couche limite, et par la suite établir une relation utile et bien pratique qui permet de calculer la force de frottement :

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2} - \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (2\delta_2 + \delta_1) = \frac{1}{2} C_f - \frac{\delta_2}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (H + 2) \quad (11.43)$$

TABLE 11.1. Résultats de calcul pour la couche limite sur une plaque plane à gradient de pression nul basés sur la théorie de solutions approchées. Référence : Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill Book, NewYork (1966)

	Répartition de vitesse $\frac{u}{U_\infty} = f(\eta)$	α_1	α_2	β_1	$\delta_1 \times$ $\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	$\frac{\tau_p}{\mu U_\infty} \times$ $\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$	$C_x \times$ $\sqrt{\frac{U_\infty \ell}{\nu}}$	$H =$ $\frac{\delta_1}{\delta_2}$
1	$f(\eta) = \eta$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1	1.732	0.289	1.155	3.00
2	$f(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$	$\frac{39}{280}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$	1.740	0.323	1.292	2.70
3	$f(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$	$\frac{37}{315}$	$\frac{3}{10}$	2	1.752	0.343	1.372	2.55
4	$f(\eta) = \sin(\frac{1}{2}\pi\eta)$	$\frac{4-\pi}{2\pi}$	$\frac{\pi-2}{\pi}$	$\frac{\pi}{2}$	1.741	0.327	1.310	2.66
5	exacte	—	—	—	1.721	0.332	1.328	2.59

Glossaire : $\delta_2 = \alpha_1 \delta$, $\alpha_1 = \int_0^1 f(1-f)d\eta$, $\delta_1 = \alpha_2 \delta$, $\alpha_2 = \int_0^1 (1-f)d\eta$, $\beta_1 = f'(0)$,

$$C_x \left(\frac{U_\infty \ell}{\nu} \right)^{1/2} = 2\delta_2 \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{1/2}.$$

où $H = \delta_1/\delta_2$ est connue sous la dénomination *paramètre de forme*. Cette relation fournit une équation différentielle pour l'épaisseur de la couche limite pourvu qu'une forme convenable pour le profil de vitesse soit admise. On appelle (11.43) *équation intégrale de von Kármán*.

À cette fin on utilise en général soit les équations de Prandtl ou l'intégrale générale sur un volume de contrôle. Commencant par la deuxième méthode.

11.6.1. Équation intégrale de von Kármán à partir des équation intégrales de mouvement. Considérons l'écoulement incompressible permanent, bidimensionnel, en couche limite laminaire le long d'une surface dont le rayon de courbure est très grand devant l'épaisseur de la couche limite δ comme montrer dans la figure 11.6. On peut montrer dans

ce cas qu'un tel écoulement est bien représenté par les équation de Prandtl :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

avec

$$u(x, y = 0) = v(x, y = 0) = 0; \quad u(x, y = \delta) = U_e(x, t), \quad p + \frac{1}{2} \rho U_e^2 = \text{Cte}$$

Soit $ABCD$ un volume élémentaire de contrôle de largeur unité comme montré dans la

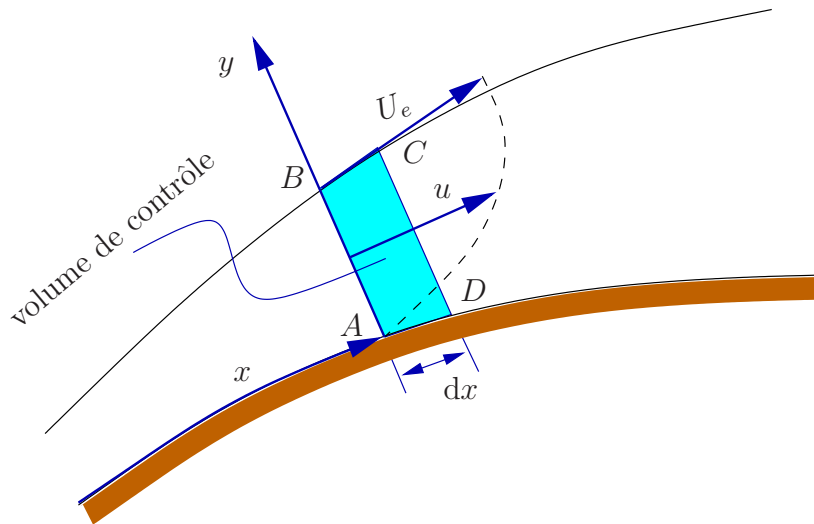


FIGURE 11.6. Couche limite développant sur une surface quelconque : x est l'abscisse curviligne mesuré le long de la surface $y = 0$, et y est la distance normale.

figure 11.6. Le bilan de débit massique traversant les frontières de cet élément implique :

$$\begin{aligned} \text{débit massique entrant à travers } AB : \quad \dot{m} &= \int_0^{\delta} \rho u \, dy \\ &= \rho U_e (\delta - \delta_1) \end{aligned} \quad (11.44)$$

$$\text{débit massique sortant à travers } CD : \quad \dot{m}_{CD} = \dot{m} + \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} dx \quad (11.45)$$

$$\text{débit massique entrant à travers } BC : \quad \dot{m}_{BC} = \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} dx \quad (11.46)$$

De la même façon, on a pour le bilan de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \text{quantité entrant à travers } AB : \quad \mathcal{M} &= \int_0^\delta \rho u^2 dy \\ &= \rho U_e^2 (\delta - \delta_1 - \delta_2) \end{aligned} \quad (11.47)$$

$$\text{quantité sortant à travers } CD : \quad \mathcal{M}_{CD} = \mathcal{M} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} dx \quad (11.48)$$

$$\text{quantité entrant à travers } BC : \quad \mathcal{M}_{BC} = U_e \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} dx \quad (11.49)$$

Alors, le théorème de la quantité de mouvement donne

$$\begin{aligned} -\mathcal{M} + \left(\mathcal{M} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} dx \right) - U_e \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} dx &= p\delta - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \left(\delta + \frac{\partial \delta}{\partial x} dx \right) + \\ &+ p \frac{\partial \delta}{\partial x} dx - \tau_p dx \end{aligned}$$

soit :

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} - U_e \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} = -\delta \frac{\partial p}{\partial x} - \tau_p$$

En substituant pour \dot{m} et \mathcal{M} calculés respectivement en (11.44) et (11.47), et puis en tenant compte de

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho U_e \frac{\partial U_e}{\partial x},$$

il vient :

$$\begin{aligned} 2U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} (\delta - \delta_1 - \delta_2) + U_e^2 \frac{\partial}{\partial x} (\delta - \delta_1 - \delta_2) - U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} (\delta - \delta_1) - U_e^2 \frac{\partial}{\partial x} (\delta - \delta_1) \\ = \delta U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \tau_p \end{aligned}$$

D'où on obtient finalement l'équation intégrale de von Kármán :

$$\boxed{U_e^2 \frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho} - U_e \frac{dU_e}{dx} (2\delta_2 + \delta_1)} \quad (11.50)$$

11.6.2. Équation intégrale de von Kármán à partir des équations de la couche limite. Rappelons d'abord les équations de Prandtl en utilisant les grandeurs avec dimensions mais avec les étoiles supprimées.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (11.51a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (11.51b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (11.51c)$$

avec $u = v = 0$ en $y = 0$, (11.52a)

et $u \rightarrow U_e$ lorsque $y \rightarrow \infty$. (11.52b)

Pour obtenir l'équation intégrale de von Kármán, nous commençons par intégrer l'équation (11.51b) par rapport à y sur l'épaisseur de la couche limite :

$$\int_0^\infty \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) dy = \int_0^\infty \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) dy = \left[\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^\infty$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} - \underbrace{u \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)}_{\substack{\text{égale à zéro} \\ \text{compte tenu de (11.51a)}}} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) dy = -\frac{1}{\rho} \tau_p. \quad (11.53)$$

Compte tenu de (11.51c) on a :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp_e}{dx},$$

et par suite :

$$U_e \frac{dU_e}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_e}{dx} \quad (\text{l'équation de Bernoulli})$$

Finalement, l'équation (11.53) devient :

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} - U_e \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = -\frac{1}{\rho} \tau_p,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x} (u^2 - uU_e) + \frac{\partial}{\partial y} (v(u - U_e)) + \frac{dU_e}{dx} (u - U_e) \right) dy = -\frac{1}{\rho} \tau_p,$$

d'où $\frac{dU_e^2 \delta_2}{dx} - [v(u - U_e)]_0^\infty + U_e \frac{dU_e}{dx} \delta_1 = \frac{1}{\rho} \tau_p$

soit $\frac{dU_e^2 \delta_2}{dx} + U_e \frac{dU_e}{dx} \delta_1 = \frac{1}{\rho} \tau_p.$

En développant le premier terme et en divisant par U_e^2 , on trouve la forme standard de l'équation de von Kármán :

$$\boxed{\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2} - \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (2\delta_2 + \delta_1) = \frac{1}{2} C_f - \frac{\delta_2}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (H + 2)} \quad (11.54)$$

où $H = \delta_1/\delta_2$ est connue sous la dénomination *paramètre de forme*. Cette relation fournit une équation différentielle pour l'épaisseur de la couche limite pourvu qu'une forme convenable pour le profil de vitesse soit admise.

Exercice 3.1 Dans certains problèmes l'ingénieur mécanicien des fluides préfère utiliser les méthodes d'approximation dans le calcul de la force de traînée et le champs de vitesse. Une méthode qui s'est montrée forte utile est basée sur la méthode de calcul intégral présentée dans §11.6. Dans cette méthode l'écoulement est supposé incompressible et la composante tangentielle de vitesse à l'extérieur de la couche limite $U(x)$ est donnée à priori. On note $\delta(x)$ l'épaisseur de la couche limite ($u(y = \delta)/U_e = 1$) et admet que u satisfait un profil de vitesse sous la forme d'un polynôme

$$\frac{u}{U_e} = f(\eta) = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4 \quad (E3.1.1)$$

où $\eta = y/\delta$, a, b, c et d sont des constantes à déterminer.

- (1) Écrire les conditions aux limites sur la plaque $y = 0$ et en $y = \delta$.
- (2) En posant

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{\partial U_e}{\partial x}$$

déterminer les constantes a, b, c et d en fonction de Λ .

- (3) Dessiner les profils de vitesse pour $\Lambda = 30, 12, 0, -6$ et -30 .
- (4) Calculer la contrainte pariétale τ_p , les épaisseurs de déplacement, et de la quantité de mouvement.
- (5) On pose

$$K = Z \frac{dU_e}{dx} \quad \text{avec} \quad Z = \frac{\delta_2^2}{\nu} \quad (E3.1.2)$$

où K est un paramètre de forme. Montrer que Λ et K sont liés par

$$K = \left(\frac{37}{315} - \frac{1}{945}\Lambda - \frac{1}{9072}\Lambda^2 \right)^2 \Lambda. \quad (E3.1.3)$$

- (6) Calculer $H = \delta_1/\delta_2$ et en déduire que l'on peut écrire $H \equiv H(K)$. De la même manière montrer que

$$\frac{\tau_p \delta_2}{\mu U_e} = f_1(K). \quad (E3.1.4)$$

Expliciter f_1 .

- (7) En déduire qu'il existe une relation de la forme

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{F(K)}{U_e} \quad (E3.1.5)$$

et donner l'expression décrivant $F(K)$ en fonction de Λ .

- (8) On suppose que le calcul du champs de vitesse commence au point d'arrêt amont, c'est-à-dire en $x = 0$ où $U_e = 0$ avec dU_e/dx fini et différent du nul. Déterminer la valeur de Λ en ce point et dessiner le profile de vitesse correspondant.
- (9) À quelle valeur de Λ aurait-on un profile du décollement ? Dessiner ce profile sur le même graphique que les autres et commenter vos résultats.

Introduction à la turbulence

12.1. Préambule

À l'encontre des écoulements laminaires exposés aux chapitres précédents, les écoulements réels se caractérisent souvent, par ce qu'on appelle *turbulence*, une des grandes questions physiques et mathématiques posées depuis long temps, et reste posée au vingt-unième siècle, et peut-être aux siècles à venir. Le sujet de la turbulence est très interdisciplinaire et ne touche pas seulement à la mécanique des fluides mais aussi à la physique, à la météorologie et à l'astrophysique. Les écoulements turbulents font partie de l'expérience quotidienne : le jet d'eau du robinet, les volutes de la fumée d'une cigarette, les siallges d'un bateau (si la vitesse est suffisante), les écoulements autour d'une automobile et même la circulation du sang à l'intérieur des vaisseaux sanguins.

Si comme nous avons déjà constaté, l'écoulement laminaire dans une conduite devient instable quand le nombre de Reynolds atteint un seuil critique, annonçant ainsi un état de transition vers un régime turbulent, le développement de l'écoulement en couche limite (sur une plaque "semi-infinie") d'une zone d'écoulement laminaire à une zone d'écoulement turbulente passe par une région intermédiaire de transition comme montré sur la figure 12.2. Dans la zone laminaire, l'écoulement est permanent et correspond à l'état qu'on vient de présenter au chapitre précédent. L'écoulement devient instable dans la partie initiale de la zone de transition où le mouvement reste laminaire mais oscillatoire. Par la suite l'écoulement devient de plus en plus aléatoire, complexe et caractérisé par des structures tourbillonnaires avant finalement aboutir à un état d'une turbulence complètement établie sauf au voisinage immédiat de la paroi où une *sous-couche laminaire* subsiste.

L'évolution d'un régime laminaire à un régime turbulent est, bien entendu, relié au nombre de Reynolds. Bien que dans le premier exemple cité cidessus, le nombre de Reynolds est basé sur le diamètre D de conduite, et donc ne varie en apparence qu'avec la vitesse moyenne U : le débit volumique divisé par la section droite ($Re_D = UD/\nu$), il est basé dans le deuxième exemple sur la distance le long de la plaque mesurée du bord d'attaque x , ($Re_x = xU/\nu$) où U est la vitesse de courant libre. Le paramètre caractérisant l'écoulement dans les deux cas est le nombre de Reynolds. Rappelons que celui-ci représente en effet le rapport entre la force d'inertie, $\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ (terme non-linéaire), et la force de viscosité $\mu\nabla^2\vec{v}$ (terme linéaire) :

$$\frac{|\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}|}{\mu\nabla^2\vec{v}} \approx \frac{\rho U^2 L^{-1}}{\mu U L^{-2}} = \frac{UL}{\nu} = Re,$$

où L et U sont respectivement une longueur et une vitesse caractéristiques de l'écoulement. Le nombre de Reynolds représente aussi un rapport entre deux longueurs : une longueur d'*advection* L et une longueur de *difusion* visqueuse ν/U . À faible nombre de Reynolds la

longueur de diffusion traversée par une particule est plus grande que celle traversée par la même particule par advection. Voilà pourquoi les termes non-linéaires dans les équations de Navier–Stokes sont très petites devant les termes visqueuses. Par contre, à grand nombre de Reynolds les termes non-linéaire deviennent dominant et jouent un rôle prédominant dans l’instabilité de l’écoulement, sa transition au turbulent et finalement dans l’évolution de cette dernière.

Pour fixer les idées, nous donnons à titre d’exemple le nombre de Reynolds pour trois catégories d’écoulements où le fluide est l’air, dont la viscosité cinématique est environ $1.0 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$:

- (1) Écoulement autour d’une automobile de longueur $L = 4 \text{ m}$ et à vitesse $U = 90 \text{ km/h}$:
 $Re = 10^7$.
- (2) Écoulement météorologique à vitesse $U = 36 \text{ km/h}$ sur une échelle de 1000 km :
 $Re = 10^{12}$.
- (3) Vole d’un papillon de longueur 2 cm à vitesse $U = 0.5 \text{ m/s}$:
 $Re = 10^3$.
- (4) Un poisson de longueur 10 cm à vitesse $U = 1 \text{ m/s}$ dans l’eau, avec $\nu = 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$:
 $Re = 10^5$.
- (5) Écoulement d’eau dans une conduite de section circulaire, du diamètre 2 cm à
 $U = 10 \text{ cm/s}$:
 $Re = 2000$.

Dans l’expérience de Reynolds à faible nombre de Reynolds, toute particule fluide (et par conséquent du colorant) reste en mouvement uniforme caractérisé par une trajectoire rectiligne : l’écoulement est alors régulier et les particules se déplacent dans les couches ou lames voisines. À un nombre de Reynolds plus grand, un tel état d’écoulement cesse d’exister et un fort processus de brassage (mélange), provoqué par un mouvement subsidiaire superposé perpendiculairement à l’écoulement principale (dont la direction est parallèle à l’axe de conduite), s’installe entre toutes les particules de l’écoulement. L’écoulement se caractérise alors par des fluctuations : lors de ce brassage (mélange) dans la direction transversale, le mouvement subsidiaire en tout point fixe conduit aux échanges de quantité de mouvement (et par conséquent d’énergie) dans une direction orthogonale à l’écoulement principale tandis que chaque particule tend à retenir en grande partie la quantité de mouvement qui lui est associée dans la direction de l’écoulement. Voilà pourquoi dans un écoulement turbulent la répartition de vitesse en toute section de conduite devient largement uniforme tandis qu’en écoulement laminaire elle est parabolique, voir figure 12.1.

En effet, compte de l’adhérence du fluide à la paroi la turbulence y disparaît. Mais en s’éloignant de la paroi les mouvements d’agitation macroscopique peuvent se développer de plus en plus librement, de sorte que la *diffusion turbulente* l’emporte sur la *diffusion moléculaire* (visqueuse) et par la suite la turbulence intensifie le brassage (“l’homogénéisation spatiale”) des propriétés. D’où une répartition de vitesse plus uniforme dans un régime turbulent par rapport au régime laminaire.

Les résultats que Reynolds (1883) obtint pour la première fois ont été, depuis lors, confirmés expérimentalement par plusieurs auteurs. On trouve que la valeur de Re_{crit} est

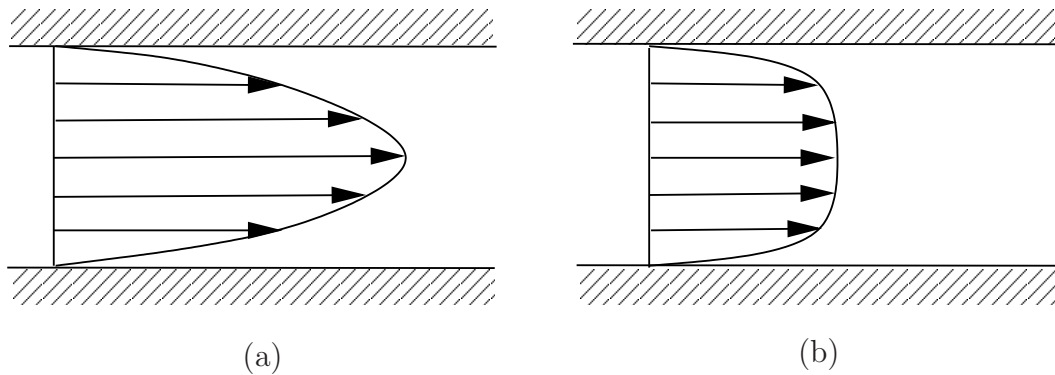


FIGURE 12.1. La répartition de vitesse dans une conduite circulaire ; (a) laminaire ; (b) turbulent.

caractérisé par une limite inférieure, $Re_{crit} \approx 2000$, au dessous de laquelle l'écoulement reste laminaire et cela même en présence de très fortes fluctuations.

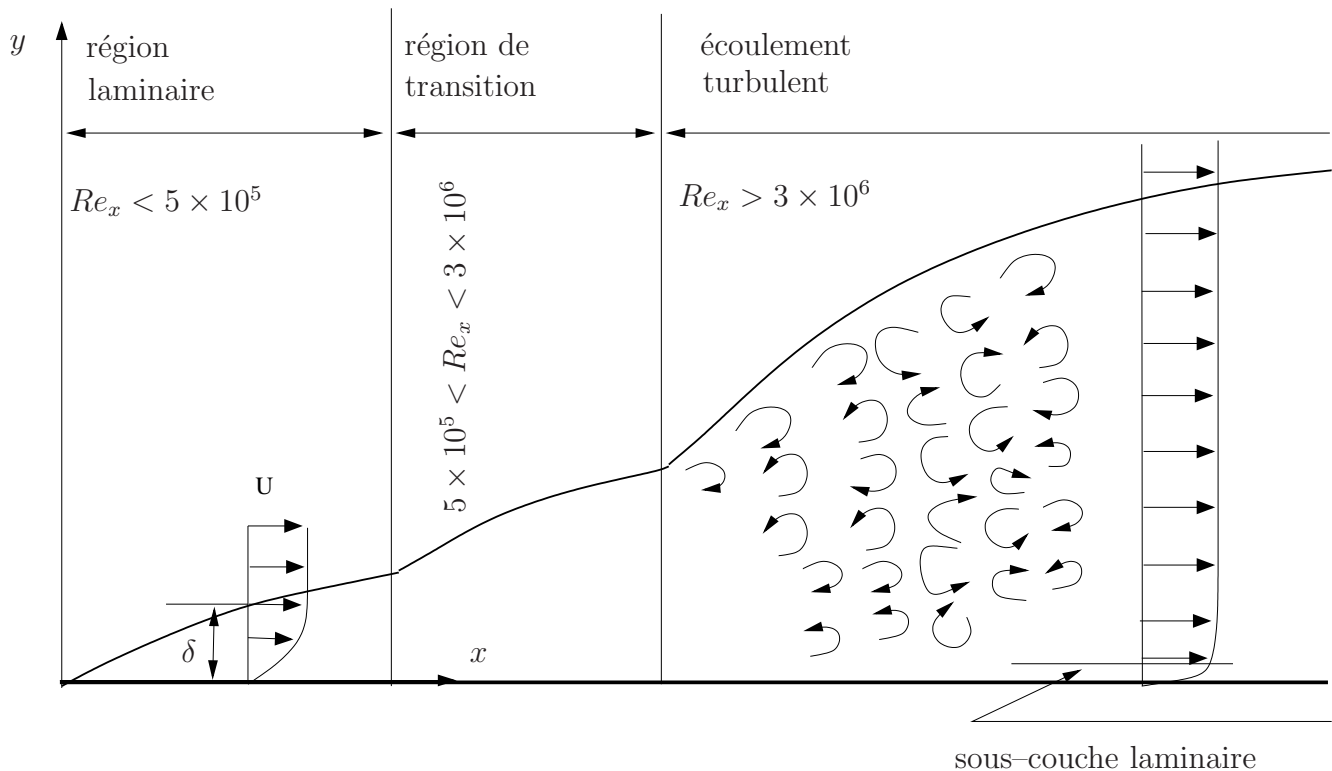


FIGURE 12.2. Développement de la couche limite sur une plaque plane.

La transition d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent est fortement accélérée par la présence des perturbations et la rugosité de surface sur laquelle le fluide s'écoule.

12.2. Quelques caractéristiques d'écoulements turbulents¹

Dans un écoulement turbulent, l'état d'un fluide en tout point \mathbf{x} et à tout instant t , la vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ présente un caractère tourbillonnaire où la taille, la localisation et l'orientation des tourbillons changent constamment. C'est pourquoi un régime turbulent est intrinsèquement un phénomène aléatoire. Les écoulements turbulents se naissent lorsque la force motrice (ou la source d'énergie cinétique) qui met le fluide en mouvement est relativement intense devant les forces de viscosité que le fluide oppose pour se déplacer. La force motrice peut prendre plusieurs formes :

- gradients de pression
- impulsion initiale pour les jets
- une force d'Archimède (de flottabilité) due à une différence de température dans le champ de pesanteur.

Un écoulement turbulent conduit à :

- la réduction d'inhomogénéités cinématiques, thermiques, massiques au sein de l'écoulement, tout en augmentant les transferts paritaires. Cela est traduit ce qu'on appelle *diffusion turbulente* ;
- l'augmentation de la traînée de frottement visqueux, diminution possible de la traînée de forme (lié à la pression), en retardant d'éventuels décollements ;
- favoriser le mélange d'une phase dispersée, mais pouvant également provoquer la coalescence de gouttelettes dans des écoulements diphasiques.

Les écoulements turbulents sont caractérisés par différentes échelles de longueur :

- Échelle de **mouvement d'ensemble**, L , correspondant à l'évolution "moyenne" ou "global" de l'écoulement,
- Échelle de **mouvement d'agitation turbulente**, ℓ , miroitant des tourbillons réellement présents dans l'écoulement,
- Échelle de **mouvement d'agitation moléculaire**, l_m , reflétant seuls les effets macroscopiques dans une approche de type milieu continu.

La réduction d'inhomogénéité dans l'écoulement a pour source le phénomène de diffusion qui, en turbulence, se traduit par la **diffusion turbulente** ou **diffusion par mouvement continu** associée au **transport** d'une propriété quelconque par les **écarts** de vitesse entre la valeur locale instantanée et une certaine valeur moyenne ou d'ensemble.

En s'inspirant de coefficients de *diffusivité* (L^2T^{-1}), qui sont des propriétés physiques du fluide (indépendantes du mouvement), on définit des "*diffusivité turbulentes*" qui sont a priori des fonctions de l'écoulement.

Cela conduit à définir :

- une échelle de vitesse u' ,
- une échelle de longueur ℓ

suite auxquelles on déduit l'ordre de grandeur d'une *diffusivité par diffusion turbulente* ν_T :

$$\nu_T \sim u' \times \ell$$

¹Source des textes cités/adaptés :

Chassaing, P. , *Turbulence en mécanique des fluides*, CÉPADUÈS-ÉDITIONS

Ainsi, le rapport à la diffusivité ν du fluide :

$$\frac{\nu_T}{\nu} \sim \frac{u' \times \ell}{\nu} = Re_T,$$

qui est un nombre de Reynolds de turbulence compris entre :

$$10^2 < Re_T < 10^7$$

suivant la configuration d'écoulement turbulent.

Pour mettre en relief l'effet relatif de la diffusion turbulente par rapport à la diffusion moléculaire, on considère la couche limite sur une plaque plane semi-infinie. Bien que l'épaisseur de la couche limite laminaire $\delta(x)$ de Blasius est donnée par l'évolution parabolique :

$$\delta(x) \approx 5xRe_x^{-1/2} = 5(\nu/U_\infty)^{1/2}x^{1/2}, \quad (Re_x = U_\infty x/\nu),$$

l'évolution de l'épaisseur de la couche limite en régime turbulent suit une loi d'épaississement en $x^{4/5}$:

$$\delta(x) = 0,37xRe_x^{-1/5} = 0,37(\nu/U_\infty)^{1/5}x^{4/5}.$$

Quant à l'effet de mélange, on note (toujours d'après Chassaing) que :

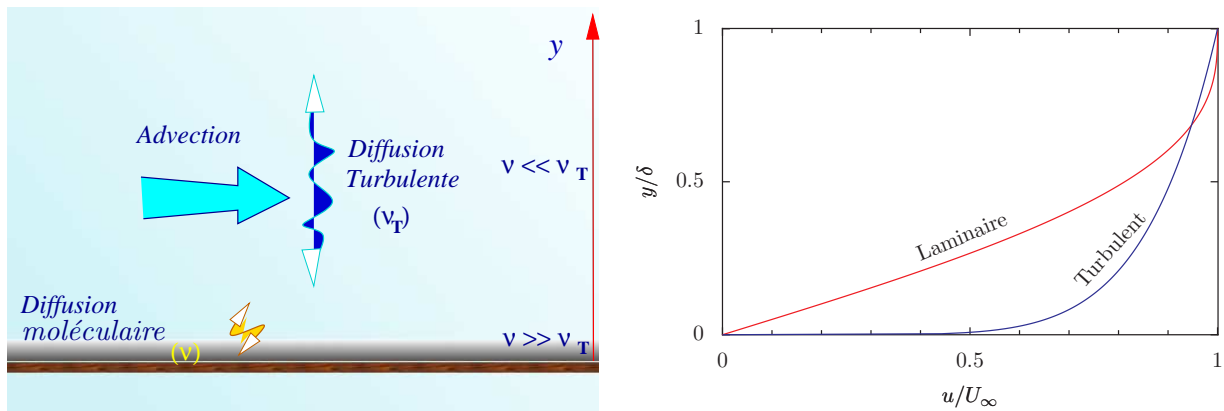


FIGURE 12.3. Localisation préférentielle des diffusions par agitation moléculaire et turbulente, et profil des vitesses associées aux régimes laminaire et turbulent. D'après Chassaing

- “la diffusion turbulente agit comme un “activateur” de la diffusion moléculaire, à la quelle elle ne peut se substituer, mais dont elle inensifie considérablement les effets en accroissant la “surface effective” d'échange où siègent les gradients locaux.”
- “l'intensification du mélange par la turbulence peut être mesurée par sa répercussion sur le profil des vitesses d'un écoulement en conduite, que l'on sait re parabolique avec la distance à l'axe dans le cas laminaire'. En régime turbulent, et s'agissant de ce même profil pour la vitesse moyenne (\bar{U} , au sens temporel par exemple), la distribution est plus plate au centre de l'écoulement ($y = R$), puisque :

$$\bar{U}(y)/\bar{U}(R) = (y/R)^{1/n}$$

où n est compris entre 6 et 10 selon la valeur du nombre de Reyonolds globale de l'écoulement.”

12.3. Mouvement moyen et fluctuations en écoulement incompressible

Pour décrire le mouvement turbulent il est commode de décomposer le mouvement en *un mouvement moyen* en *un mouvement de fluctuation*, ou *mouvement tourbillonnaire* (eddy motion en anglais). La moyenne est comptée sur un intervalle assez long et désigné, pour la composante u de vitesse, par exemple, par \bar{u} ; la vitesse de fluctuation est notée par u' . De cette manière on pose

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w', \quad p = \bar{p} + p' \quad (12.1)$$

Dans le cas d'un écoulement turbulent compressible, il est aussi nécessaire de poser

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad T = \bar{T} + T' \quad (12.2)$$

La moyenne en temps est calculée en un point fixe dans l'espace et donnée, par exemple, par

$$\bar{u} = \frac{1}{t_1} \int_{t_0}^{t_0+t_1} u \, dt \quad (12.3)$$

où l'intervalle t_1 est assez long de sorte que

$$\bar{u}' = \bar{v}' = \bar{w}' = \bar{p}' = \bar{\rho}' = \bar{T}' = 0 \quad (12.4)$$

Avant établir les équations pour la couche limite turbulente il est utile de rappeler les règles à suivre pour le calcul des grandeurs moyennées :

$$\begin{aligned} \overline{\bar{f}} &= \bar{f}; \quad \overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}, \\ \overline{\bar{f} \cdot g} &= \bar{f} \cdot \bar{g}, \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}, \quad \int \bar{f} \, ds = \int \bar{f} \, ds \end{aligned} \quad (12.5)$$

où s représente l'une des variables x, y, z ou t .

Appliquons ces formules aux grandeurs de flux, par exemple, $\overline{v_i \cdot v_j}$ où $v_i = u, v$ ou w :

$$v_i \cdot v_j = (\bar{v}_i + v'_i)(\bar{v}_j + v'_j) = \bar{v}_i \bar{v}_j + \bar{v}_i v'_j + v'_i \bar{v}_j + v'_i v'_j$$

qui, d'après (12.5) conduit à

$$\overline{v_i \cdot v_j} = \bar{v}_i \bar{v}_j + \overline{v'_i v'_j}$$

12.4. Equations de mouvement et le tenseur de contraintes de Reynolds

Pour déterminer les équations régissant le mouvement moyen nous reprenons d'abord les équations de Navier–Stokes incompressibles en système de coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (12.6)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u, \quad (12.7)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v, \quad (12.8)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w. \quad (12.9)$$

Ensuite, nous multiplions l'équation de continuité (12.6) par ρu et puis ajoutons le résultat à l'équation (12.7), ainsi on obtient :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(v u)}{\partial y} + \frac{\partial(w u)}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u, \quad (12.10)$$

De la même manière il vient

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(u v)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(w v)}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v, \quad (12.11)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(u w)}{\partial x} + \frac{\partial(v w)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w. \quad (12.12)$$

Maintenant remplaçons u , v et p respectivement par $\bar{u} + u'$, $\bar{v} + v'$ et $\bar{p} + p'$ et par la suite prenons la moyenne en temps des équations ainsi trouvées. Sans perte de généralité, nous donnons ci-dessous les équations de Navier–Stokes pour des écoulements turbulents en régime permanent :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \quad (12.13)$$

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right) \quad (12.14a)$$

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v} - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right) \quad (12.14b)$$

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{w} - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right) \quad (12.14c)$$

Notez que les termes quadratiques en composantes de vitesse turbulente ont été portés aux deuxièmes membres respectifs. À ce stade un examen précis de ces termes et une comparaison avec le tenseur de contraintes s'impose. Il nous permet de se rendre comptes

assez vite qu'ils représentent des composantes de tenseur de contraintes dû à la vitesse turbulente :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & \sigma'_{xy} & \sigma'_{xz} \\ \sigma'_{xy} & \sigma'_{yy} & \sigma'_{yz} \\ \sigma'_{xz} & \sigma'_{yz} & \sigma'_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \rho \overline{u'^2} & \rho \overline{u'v'} & \rho \overline{u'w'} \\ \rho \overline{u'v'} & \rho \overline{v'^2} & \rho \overline{v'w'} \\ \rho \overline{u'w'} & \rho \overline{v'w'} & \rho \overline{w'^2} \end{pmatrix} \quad (12.15)$$

Les composantes de ce tenseur représentent en effet les contraintes apparentes produites par le mouvement turbulent comme il serait démontré dans les section suivantes.

12.4.1. Contraintes apparentes de mouvement turbulent (d'après Schlichting). Soit dS une surface élémentaire dans un courant turbulent dont la vitesse est (u, v, w) . La normale à dS est comptée parallèle à x , et les directions des y et z sont parallèles dans plan de dS . La masse passant par dS dans un intervalle du temps dt est donnée par $dS \rho u dt$ et par conséquent le flux de quantité de mouvement dans les directions x, y et z sont respectivement $dJ_x = dS \rho u^2 dt$, $dJ_y = dS \rho uv dt$ et $dJ_z = dS \rho uw dt$. La masse volumique étant constante, on peut calculer la moyenne en temps du flux de la quantité de mouvement par unité du temps :

$$\begin{aligned} \frac{dJ_x}{dt} &= dS \rho \overline{u^2} = dS \rho \overline{(\bar{u} + u')^2} = dS \rho (\bar{u}^2 + \overline{u'^2}) \\ \frac{dJ_y}{dt} &= dS \rho \overline{uv} = dS \rho \overline{(\bar{u} + u')(\bar{v} + v')} = dS \rho (\bar{u} \bar{v} + \overline{u'v'}) \\ \frac{dJ_z}{dt} &= dS \rho \overline{uw} = dS \rho \overline{(\bar{u} + u')(\bar{w} + w')} = dS \rho (\bar{u} \bar{w} + \overline{u'w'}) \end{aligned}$$

Ces grandeurs désignent en effet le taux de variation de la quantité de mouvement dont la

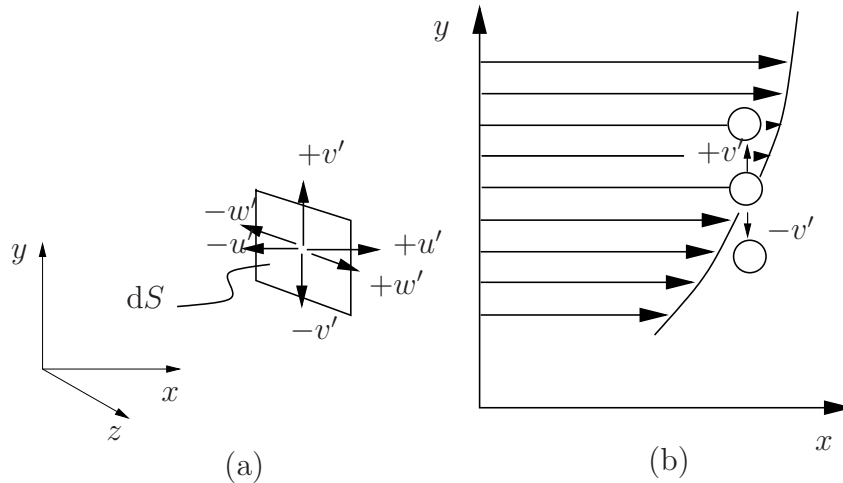


FIGURE 12.4. (a) Transport de la quantité de mouvement dû aux fluctuations (a) à travers une surface élémentaire, dS ; (b) dans un écoulement de cisaillement avec $\partial \bar{u} / \partial y > 0$.

dimension est d'une forces agissant sur la surface élémentaire dS . Ainsi, en divisant par dS on obtient les dimensions de force par unité de surface, soit les dimensions de contraintes. Or, puisque le flux de quantité de mouvement par unité de temps traversant une surface est toujours équivalent à une force égale et opposée, exercée sur la surface par le milieu

environnant, il vient que la surface dS est soumise aux contraintes $-\rho(\overline{u^2} + \overline{u'^2})$ dans la direction x , $-\rho(\overline{u} \overline{v} + \overline{u'v'})$ dans la direction y , et $-\rho(\overline{u} \overline{w} + \overline{u'w'})$ dans la direction z . Le premier de ces trois termes s'agit alors d'une contrainte normale tandis les derniers deux sont des contraintes de cisaillement. Il vient alors que la superposition des fluctuations sur le mouvement moyenné donne lieu à trois contraintes supplémentaires :

$$\sigma'_x = -\rho \overline{u'^2}; \quad \sigma'_y = -\rho \overline{u'v'}; \quad \sigma'_z = -\rho \overline{u'v'} \quad (12.16)$$

agissant sur dS . On appelle ces termes *Contraintes* ou *tensions* "apparentes" ou "virtuelles" de Reynolds (produites par l'écoulement turbulent), à ajouter aux contraintes visqueuses produites par l'écoulement permanent comme on l'a précédemment vu. Des résultats correspondants s'appliquent aussi aux surfaces élémentaires normales aux directions y et z . Ensemble, ces contraintes constituent le *tenseur de contraintes de Reynolds de l'écoulement turbulent*, donné par l'équation (12.15).

Poursuivons. Supposons maintenant que le mouvement moyenné est, par exemple, donné par $\overline{u} \equiv \overline{u}(y)$, $\overline{v} = 0$ et $\overline{w} = 0$ avec $d\overline{u}/dy > 0$, voir figure 12.4b. Bien que les moyennes $\overline{u'}$ et $\overline{v'}$ sont nulles, le produit $\overline{u'v'}$ est par contre différent de nul. Voici pourquoi : compte tenu de mouvement turbulent, toute particule se déplaçant dans la direction positive \overline{y} ($v' > 0$) arrive à la couche y d'une région où une vitesse moyenne \overline{u} plus petite règne. Or puisque toute particule tend, globalement, à préserver sa vitesse de départ \overline{u} , il se produit que la composante u' soit négative en arrivant à la couche y . En revanche, pour toute particule se déplaçant dans la direction opposée, $-\overline{y}$ ($v' < 0$), il se produit que u' soit positive en y . Il vient alors que la moyenne en temps $\overline{u'v'}$ n'est pas seulement différente de nulle mais elle est aussi négative. Ainsi, la contrainte de cisaillement $\tau'_{xy} = -\rho \overline{u'v'}$ est positive et du même signe que la contrainte correspondante due à la cisaillement laminaire $\tau_l = \mu du/dy$. Ce fait est aussi exprimé en affirmant qu'il existe une *correlation* entre les fluctuations longitudinale et transversale de la vitesse en un point donné.

C'est pourquoi on réécrit les équations (12.14a,b,c) sous la forme :

$$\rho \left(\overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \overline{u} + \left(\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} \right) \quad (12.17a)$$

$$\rho \left(\overline{u} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \overline{v} + \left(\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} \right) \quad (12.17b)$$

$$\rho \left(\overline{u} \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{w}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \overline{w} + \left(\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} \right) \quad (12.17c)$$

Le système d'équations (12.17) montre que chacune des composantes de la vitesse moyenne d'un écoulement turbulent satisfait, en effet, la même équation que celle satisfaite par un écoulement laminaire, sauf que les contraintes laminaires sont maintenant augmentés par les contraintes additionnelles données par le tenseur de contraintes (12.15). On appelle ces contraintes additionnelles *contraintes apparentes*, ou *virtuelle de l'écoulement turbulent* ou *contraintes* (ou *tensions*) *de Reynolds*. Il vient alors qu'on dit, par analogie aux termes visqueux habituels, que ces contraintes sont provoquées par ce qu'on appelle *viscosité tourbillonnaire* ou *eddy viscosity*, et on réécrit les éléments de tenseur de contraintes sous la

forme :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_x &= -p + 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{\rho u'^2}, \\ \sigma_{xy} = \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \overline{\rho u'v'}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (12.18)$$

► **REMARQUE 12.1 :** Les contraintes apparentes sont, en général, de loin plus grandes que les composantes visqueuses et, par conséquent, on peut à un bon degré d'approximation négliger ces dernières dans plusieurs cas d'écoulements turbulents. ◀

Conditions aux limites. Les conditions de non-glissement et de non-pénétration aux surfaces imperméables s'appliquent toujours aux parois :

$$\bar{v}_n(x_n = 0) = \bar{v}_t(x_t = 0) = v'_n(x_n = 0) = v'_t(x_t = 0) = 0. \quad (12.19)$$

Les indices n et t désignent respectivement les directions normale et parallèle à la paroi. Il vient alors que toutes les composantes du tenseur de contraintes turbulentes disparaissent aux parois et sont, par conséquent, très petites à leurs voisinages immédiats. Les seules contraintes qui y restent actives sont les contraintes (laminaires) visqueuses dont les valeurs y deviennent très grandes devant celles des contraintes apparentes. Voilà pourquoi il vient que dans un écoulement turbulent il existe une couche très mince sous-jacente à la paroi et dans laquelle l'écoulement est, par essence, laminaire. On appelle une telle couche *sous-couche laminaire* dans laquelle les vitesses sont tellement petites que les forces visqueuses y deviennent dominantes par rapport aux forces d'inertie. La sous-couche laminaire s'adjoint à une couche de transition où la vitesse de fluctuation devient assez grande pour donner lieu aux contraintes turbulentes comparables dans leurs ordres de grandeurs aux contraintes visqueuses. En s'éloignant encore des parois, aux distances encore plus grandes, les contraintes turbulentes deviennent largement plus grandes que les contraintes visqueuses. C'est précisément à cette couche que l'écoulement turbulent devient complètement établi.

L'épaisseur de la sous-couche laminaire est tellement petite qu'il est impossible, ou très difficile, d'observer expérimentalement. Pourtant, le rôle joué par cette couche est décisif car elle est le siège du phénomène qui détermine le cisaillement, et par conséquent la force de traînée à la paroi.

Bref, en notations indicielles, l'interprétation du champ moyen et de fluctuation peut être illustré de la manière suivante :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (12.20a)$$

$$\underbrace{\rho \frac{D\bar{u}_i}{Dt}}_{\text{Force moyenne d'inertie}} = \underbrace{-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}}_{\text{Force moyenne de pression}} + \underbrace{\rho \bar{f}_i}_{\text{Force moyenne de volume}} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{Force moyenne de viscosité}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{u}_i u_j)}_{\text{Tensions de Reynolds}} \quad (12.20b)$$

► **REMARQUE 12.2 :** Ensemble, les équations (12.15) et (12.17) ne sont pas suffisantes pour une évaluation rationnelle de l'écoulement moyen tant que la relation entre les composantes moyennes et turbulentes reste inconnue. Une telle relation ne peut, à ce jour, être obtenue que d'une façon empirique et constitue le contenu essentiel de tous les hypothèses concernant la turbulence à discuter dans ce qui suit. ◀

12.5. Hypothèses pour les écoulements turbulents

Aujourd'hui, nous comprenons mieux certains aspects du mécanisme de turbulence mais nous sommes toujours très loin d'une compréhension complète. C'est pourquoi des tentatives innombrables ont été faites pour établir des bases théoriques pour décrire les écoulements turbulents à partir des hypothèses semi-empiriques. Par exemple, Boussinesq (1870) suggère une expression pour le coefficient de frottement ou de mélange (viscosité tourbillonnaire ou eddy viscosity), ν_T , pour la contrainte de Reynolds d'écoulement turbulent :

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \nu_T \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (12.21)$$

par analogie à la contrainte visqueuse, τ_l , régnant dans les écoulements laminaires :

$$\tau_l = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (12.22)$$

où μ est le coefficient de la viscosité dynamique. Malheureusement cette hypothèse possède un grand désavantage intrinsèque car le coefficient ν_T ne constitue pas une propriété du fluide comme μ , mais dépend de la vitesse moyenne \bar{u} . Alors que les forces visqueuses dans un écoulement turbulent sont approximativement proportionnelles au carré de vitesse moyenne, elles sont dans le cas d'écoulement laminaire linéairement proportionnelles à la vitesse.

Il est commode d'utiliser la viscosité apparente (tourbillonnaire) cinématique $\varepsilon = \nu_T/\rho$ par analogie à la viscosité cinématique μ/ρ , et on écrit alors

$$\begin{aligned} \tau_l &= \rho \nu \frac{du}{dy} \\ \text{et} \quad \tau_t &= \rho \varepsilon \frac{d\bar{u}}{dy}. \end{aligned} \quad (12.23)$$

De cette manière on peut écrire l'équation de couche limite turbulente sous la forme :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \varepsilon) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \quad (12.24a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0. \quad (12.24b)$$

Les conditions aux limites sont $\bar{u}(y=0) = \bar{v}(y=0) = 0$ et $\bar{u}(y \rightarrow \infty) \rightarrow U_e$.

12.5.1. Longueur de mélange de Prandtl. Il est évident que si la dépendance de ν_T sur la vitesse reste inconnue, les hypothèses (12.21) et (12.23) seraient inutilisables. Il est donc nécessaire de trouver une relation empirique entre le coefficient ν_T et la vitesse moyenne. À cette fin Prandtl (1925) fit une avancée considérable que nous présentons pour le cas d'écoulement parallèle où la vitesse varie d'une ligne de courant à une autre. Considérons un cas où l'écoulement principale est compté parallèlement à x tels que :

$$\bar{u} = \bar{u}(y); \quad \bar{v} = \bar{w} = 0.$$

Un tel écoulement peut être obtenu dans un canal rectangulaire. Dans ce cas la seule non-zéro composante de la contrainte de cisaillement turbulente est

$$\tau'_{xy} = \tau_l = -\overline{\rho u'v'} = \nu_T \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (12.25)$$

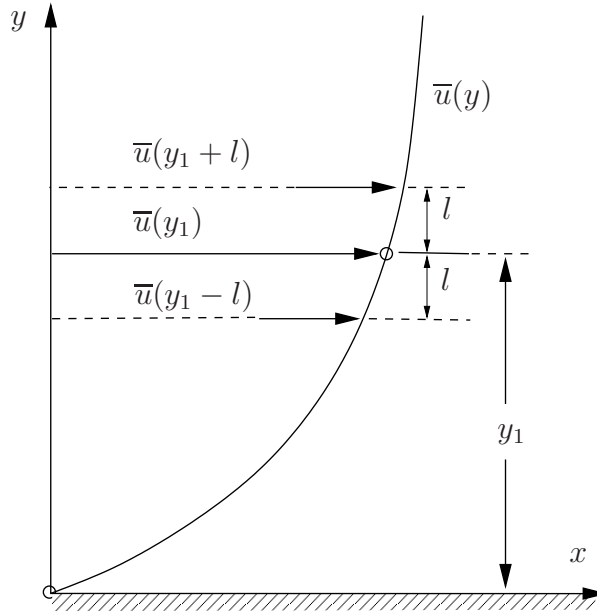


FIGURE 12.5. Explication de la notion de longueur de mélange.

Selon Prandtl, lorsqu'un fluide dans un écoulement turbulent passe le long de paroi, des particules fluide se réunissent pour former des agglomérations qui se déplacent en tant que parcelles en traversant une distance donnée, que ce soit dans la direction longitudinale ou transversale, tout en gardant la quantité de mouvement dans la direction des x . Supposons maintenant qu'une telle parcelle traverse une distance l , par exemple, de la lame $(y_1 - l)$ à la vitesse $\bar{u}(y_1 - l)$ dans la direction y positive ($v' > 0$), voir figure 12.5. On appelle la distance l *longueur de mélange de Prandtl*. Comme la parcelle fluide retient la quantité de mouvement qui lui est associée, la vitesse à la nouvelle lame y_1 est plus petite que la vitesse qui y règne. Il vient alors que les différences dans les vitesses est

$$\Delta u_1 = \bar{u}(y_1) - \bar{u}(y_1 - l) = \bar{u}(y_1) - \left(\bar{u}(y_1) - l \frac{d\bar{u}}{dy} + O(l^2) + \dots \right) \approx l \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_1.$$

De la même manière une parcelle fluide qui arrive en y_1 de la lame $(y_1 + l)$ possède une vitesse plus grande que celle en y_1 , la différence est alors

$$\Delta u_2 = \bar{u}(y_1 + l) - \bar{u}(y_1) = \bar{u}(y_1) + l \frac{d\bar{u}}{dy} + O(l^2) + \dots - \bar{u}(y_1) \approx l \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_1.$$

Dans ce cas $v' < 0$. La différence de vitesse ainsi produite par le mouvement peut être vue comme la composante de vitesse de turbulence en y_1 . Il vient qu'on peut calculer la

moyenne temporelle de la valeur absolue de cette fluctuation :

$$|\overline{u'}| = \frac{1}{2} (|\Delta u_1| + |\Delta u_2|) = l \left| \left(\frac{d\overline{u}}{dy} \right)_1 \right|. \quad (12.26)$$

Compte tenu de cette équation on peut avancer l'interprétation physique suivante pour la longueur de mélange l . La longueur de mélange est la distance dans la direction transversale qu'une parcelle des particules fluide doivent parcourir à la vitesse moyenne originale pour que la différence entre cette vitesse et la vitesse à la nouvelle lame soit égale à la fluctuation moyenne de l'écoulement turbulente. Pourtant, que lors de son déplacement dans la direction transversale, la parcelle du fluide retienne complètement sa vitesse de la lame d'origine ou elle s'adapte partiellement à la vitesse de la lame traversée tout en continuant son parcours dans la même direction, reste à vraie dire une question entièrement ouverte. Le concept de longueur de mélange de Prandtl est en fait analogue, jusqu'à certain degré, à la notion de parcours moyen utilisé dans la théorie cinétique des gaz, la différence étant que cette dernière est associée au mouvement microscopique des molécules, tandis que la première traite le mouvement macroscopique d'une agglomération de particules fluide.

On pourrait aussi imaginer que la vitesse transversale de fluctuation prend naissance de la manière suivante : Considérons deux parcelles du fluide se rencontrant dans une lame à distance y_1 , la plus lente provenant de $(y_1 - l)$ avant la plus rapide de $(y_1 + l)$. Dans ce cas une collision aura lieu à la vitesse $2u'$ entre ces deux parcelles et elles s'éloignent obliquement. Cela est en effet équivalent à l'existence d'une composante transversale de vitesse dans les deux directions par rapport à la couche en y_1 . Si les deux parcelles apparaissent dans l'ordre inverse, elles auront été séparé à une vitesse égale à $2u'$ avec l'espace entre elles ainsi laissé vide serait rempli par le fluide environnant, donnant lieu aussi à une composante transversale de vitesse dans les deux directions en y_1 . Cet argument implique la composante transversale v' est du même ordre de grandeur que u' et on pose

$$|\overline{v'}| = \text{constante} \times |\overline{u'}| = \text{constante} \times l \frac{d\overline{u}}{dy}. \quad (12.27)$$

A fin de trouver une expression pour la contrainte de cisaillement à partir de l'équation (12.25) un examen plus approfondi de la valeur moyenne $\overline{u'v'}$ est nécessaire. Il en suit de la présentation précédente que les parcelles qui arrivent à la couche y_1 avec une valeur positive de v' donne lieu "plus probablement" à u' négative de sorte que leur produit $u'v'$ est négatif. Les parcelles à une valeur négative de v' (provenant d'en haut selon la figure 12.5) sont "plus probablement" associée à u' positive et le produit $u'v'$ est négatif une fois encore. Le terme qualitatif "plus probablement" dans le contexte plus haut exprime le fait que l'apparence des particules pour lesquelles u' est d'un signe opposé à celui ci-dessus n'est pas exclu mais est, néanmoins, beaucoup moins fréquent. Ainsi que la moyenne temporelle $\overline{u'v'}$ est différente de nulle, et négative. On suppose alors que

$$\overline{u'v'} = -c |\overline{u'}| \cdot |\overline{v'}|, \quad (12.28)$$

où $0 < c < 1$ ($c \neq 0$).

► REMARQUE 12.3 : Rien n'est en fait connu sur le facteur numérique c dans l'équation (12.28),

mais il paraît qu'il soit, en essence, identique au facteur de corrélation défini par

$$\psi = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}}\sqrt{\overline{v'^2}}}$$

et dont la valeur s'étend jusqu'à $\psi = -0.45$. ◀

Il vient qu'on obtient en combinant les équations (12.26) et (12.28) :

$$\overline{u'v'} = -\text{constante} \times l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2.$$

Par ailleurs on note que la constante dans cette équation est différente de celle dans l'équation (12.27), car la première contient implicitement le facteur c de l'équation (12.28). La constante peut être incluse dans la longueur de mélange, qui est encore inconnue, et on peut écrire

$$\overline{u'v'} = -l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2.$$

Par conséquent, la contrainte de cisaillement donnée dans l'équation (12.25) peut s'écrire comme

$$\tau_t = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2.$$

En tenant compte que le signe de τ_t doit changer avec celui de $d\bar{u}/dy$, il vient qu'il est plus correct d'écrire

$$\tau_t = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (12.29)$$

Voilà donc l'hypothèse de longueur de mélange de Prandtl.

En comparant l'équation (12.29) avec l'hypothèse de Boussinesq dans l'équation (12.21), on trouve l'expression suivante pour la viscosité tourbillonnaire (ou apparente) :

$$\nu_T = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (12.30a)$$

et pour la viscosité cinématique tourbillonnaire (ou apparente) de l'équation (12.23) :

$$\varepsilon = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|. \quad (12.30b)$$

Il est à noter que la longueur de mélange l est une notion locale.

► **REMARQUE 12.4 :** Notons que l'équation de Prandtl, (12.30), pour la contrainte de cisaillement dans un écoulement turbulent, est en fait insatisfaisante car elle implique que la viscosité cinématique apparente, ε dans (12.30b), s'annule aux points où $d\bar{u}/dy = 0$, c'est-à-dire aux points où la vitesse est maximale. Mais un tel résultat est certainement en contradiction avec non seulement l'analyse physique, compte tenu du fait que la mélange provoquée par la turbulence ne s'annule point là où la vitesse est maximale, mais également en contradiction avec les résultats obtenus expérimentalement. ◀

12.5.2. Hypothèse de similitude de Von Kármán. Alors que Prandtl proposa une analyse phénoménologique, Von Kármán suivit en revanche une démarche basée sur l'analyse dimensionnelle et similitude pour l'écoulement turbulent. Von Kármán fit une tentative pour établir une règle de similitude pour les fluctuations turbulentes à tous points du champ de vitesse, c'est-à-dire qu'elles diffèrent d'un point à l'autre seulement par des échelles de temps et de longueur. Les unités du temps et de longueur peuvent alors être remplacées par des unités fondamentales de temps et de vitesse. À cette fin la longueur de mélange l peut être choisie comme une longueur caractéristique pour la fluctuation, tandis qu'une vitesse caractéristique de turbulence peut être formée en se basant sur la contrainte de cisaillement turbulente :

$$v_* = \sqrt{\frac{|\tau_t|}{\rho}} = \sqrt{|u'v'|} \quad (12.31)$$

La vitesse v_* est appelée *vitesse de frottement* et représente une mesure de l'intensité de turbulence tourbillonnaire et du transfert de quantité de mouvement provoqués par ces fluctuations.

Par conséquent Von Kármán arriva à la relation suivante

$$l = \chi \left| \frac{d\bar{u}/dy}{d^2\bar{u}/dy^2} \right| \quad (12.32)$$

où χ est une constante sans dimensions. Ensuite Von Kármán obtint, en se basant sur le principe de similitude, l'expression suivante pour la contrainte de cisaillement turbulent :

$$\tau_t = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (12.33)$$

qui est identique à la formule déduite par Prandtl selon la théorie de longueur de mélange, à savoir l'équation (12.29). Il en suit alors qu'en combinant (12.32) avec (12.33) que la contrainte de cisaillement turbulent s'écrit sous la forme :

$$\tau_t = \rho \chi^2 \frac{\left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^4}{\left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right)^2}. \quad (12.34)$$

12.5.3. Distribution universelle de vitesse de Kármán–Prandtl. Nous sommes maintenant en mesure de développer une expression pour la distribution de vitesse. Pour cela on considère un courant d'écoulement turbulent le long d'une plaque plane dont la vitesse est $u(y)$, y désignant la distance mesurée de la paroi. Supposons en suivant Prandtl qu'au voisinage de la paroi la longueur de mélange est proportionnelle à la distance y :

$$l = \chi y, \quad (12.35)$$

où χ est une constante adimensionnelle à déterminer expérimentalement. Cette hypothèse est en effet raisonnable car la contrainte de cisaillement turbulent s'annule à la paroi car

simplement les fluctuations y disparaissent. Il vient alors, toujours selon Prandtl, que la contrainte de cisaillement turbulent prend la forme :

$$\tau_t = \rho \chi^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (12.36)$$

Ensuite, Prandtl supposa que la contrainte de cisaillement demeure constante, c'est-à-dire $\tau = \tau_{y=0} = \tau_0$ ce qui permet de réécrire l'expression pour la vitesse de frottement sous la forme :

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \quad (12.37)$$

et par conséquent

$$u_*^2 = \chi^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2. \quad (12.38)$$

D'où :

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{\chi y}. \quad (12.39)$$

En intégrant cette équation, il vient :

$$u = \frac{u_*}{\chi} \ln y + C \quad (12.40)$$

La constante d'intégration est à déterminer grâce aux conditions à la paroi où elle sert à raccorder la distribution de vitesse turbulente à celle dans la sous-couche laminaire. Ainsi, on détermine C en appliquant la condition que $u = 0$ à une certaine distance y_0 mesurée de la paroi. D'où on pose :

$$y_0 = \beta \frac{\nu}{u_*}, \quad (12.41)$$

où β désigne une constante adimensionnelle. En rapportant β dans (12.40), on obtint :

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left[\ln \frac{y u_*}{\nu} - \ln \beta \right] \quad (12.42)$$

où $(y u_* / \nu)$ est un nombre de Reynolds et $\beta = u_* \tau_{y=0} / \nu$ est une constante sans dimension exprimant l'ordre de grandeur de la sous-couche laminaire, voir figure 12.2. κ est une constante adimensionnelle à déduire des résultats expérimentaux.

On appelle la loi (12.42) *loi logarithmique (universelle) de vitesse*, trouvée séparément par Von Kármán et Prandtl. Pourquoi universelle ? Car cette relation est indépendante de nombre Reynolds caractérisant l'écoulement.

La loi de vitesse (12.42) fut dérivée pour décrire la distribution de vitesse dans une conduite de section rectangulaire mais elle s'est avérée aussi valable pour une conduite cylindrique.

La constante κ est "indépendante" de la nature de paroi (rugueuse ou non-rugueuse) et *universelle*. On appelle κ *constante universelle de Von Kármán*, $\kappa \approx 0.4$.

Notons qu'à l'encontre de κ , la valeur de β dépend de la nature de surface et est en fait associée à la rugosité.

► REMARQUE 12.5 :

- La loi universelle de la répartition de vitesse, équation (12.40), n'est pas valable dans la sous-couche laminaire où la contrainte de cisaillement turbulent devient trop petite devant la contrainte de cisaillement laminaire.
- L'hypothèse de contrainte de cisaillement turbulent constant, équation (12.37), valable seulement dans la sous-couche laminaire, implique une répartition linéaire de vitesse :

$$\rho u_*^2 = \tau_0 \cong \tau_{xy} = \mu \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (12.43a)$$

D'où

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu}. \quad (12.43b)$$

- L'épaisseur de la sous-couche laminaire est donnée par

$$\delta \cong 5(\nu/u_*) \quad (12.44)$$

et par conséquent $0 < u_* y / \nu < 5$. ◀

Il est commode de poser

$$u^+ = \frac{u}{u_*}, \quad (12.45a)$$

$$y^+ = \frac{y u_*}{\nu} \quad (12.45b)$$

et réécrire l'équation (12.42) sous la forme

$$u^+ = A \ln y^+ + B \quad (12.46a)$$

où

$$A = \frac{1}{\kappa} = 2.5; \quad B = -\frac{1}{\kappa} \ln \beta \quad (12.46b)$$

En dérivant la loi (12.42) seules les tensions (contraintes) de Reynolds ont été prises en compte; (12.42) peut donc être vue comme une *approximation asymptotique* uniquement valable pour un grand nombre de Reynolds.

Quand le de Reynolds est plus petit, l'influence du frottement laminaire s'étend à l'extérieur de la sous-couche laminaire, et l'expérience montre qu'il existe une loi de puissance pour la distribution de vitesse :

$$u^+(y^+) = C y^{+1/n}. \quad (12.47a)$$

où l'exposant n est approximativement égale à $1/7$, mais varie dans certain mesure avec le nombre de Reynolds.

La loi logarithmique de répartition de vitesse est également valable loin de la paroi. Si $\bar{u} = u = U_{\max} = U_{\infty}$ en $y = \delta$, on obtient alors pour la constante de l'intégration C (voir (12.40)) :

$$\frac{U_{\infty}}{u_*} = \frac{1}{\chi} \ln \delta + C$$

et par conséquent on peut exprimer la répartition de vitesse en fonction de la différence de vitesse :

$$\frac{U_{\infty} - u}{u_*} = \frac{1}{\chi} \ln \left(\frac{\delta}{y} \right). \quad (12.48)$$

12.5.4. Force du frottement à la paroi. Pour calculer la force de frottement sur une plaque plane à zéro incidence ($\partial p/\partial x = 0$) on utilise souvent la loi de puissance en supposant que la distribution de vitesse satisfait la relation

$$\frac{u}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad (12.49)$$

où U_∞ est la vitesse de courant libre et $\delta(x)$ désigne l'épaisseur de la couche limite exprimée en fonction de la distance x de bord d'attaque. Cette hypothèse implique en fait que les profils de vitesse le long de la plaque obéissent à une lois de *similitude*.

L'équation exprimant la contrainte de cisaillement à la paroi en fonction de δ est la même que celle pour l'écoulement dans une conduite circulaire :

$$\frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U_\infty \delta}\right)^{1/4} \quad (12.50)$$

où $\tau_0 = \tau_{y=0}$ est la valeur de contrainte à la paroi. À partir des définitions de l'épaisseur de déplacement (11.31) et l'épaisseur de la quantité de mouvement (11.32) on peut calculer δ_1 et δ_2 :

$$\delta_1 = \frac{\delta}{8}; \quad \delta_2 = \frac{7}{72} \delta \quad (12.51)$$

En rapportant ces résultats dans (11.43), et puis en utilisant (12.50), on obtient l'équation différentielle

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U_\infty \delta}\right)^{1/4} \quad (12.52)$$

dont l'intégration, avec la valeur initiale $\delta(x=0) = 0$, conduit à

$$\delta(x) = 0.37x \left(\frac{U_\infty x}{\nu}\right)^{-1/5} \quad (12.53)$$

et par conséquent

$$\delta_2 = 0.036x \left(\frac{U_\infty x}{\nu}\right)^{-1/5} \quad (12.54)$$

Alors que l'épaisseur de la couche limite laminaire s'accroît avec $x^{1/2}$, on remarque que l'épaisseur de la couche limite turbulent varie avec $x^{4/5}$.

Pour une plaque de longueur l et largeur b , la force de frottement est donnée par

$$D(x) = b \int_0^x \tau(x') dx' = b\rho \int_0^{\delta(x)} u(U_\infty - u) dy = b\rho U_\infty^2 \delta_2 \quad (12.55a)$$

compte tenu de (11.32) et (11.43). Il vient

$$D(l) = 0.036l \left(\frac{U_\infty l}{\nu}\right)^{-1/5} \quad (12.55b)$$

Avec ce résultat on définit un coefficient de frottement C_f et un coefficient de traînée C_x :

$$C_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 2\frac{d\delta_2}{dx}, \quad \text{ou} \quad C_x = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 bl} = 2\frac{\delta(l)}{l}. \quad (12.56)$$

On peut écrire à partir de (12.54),

$$C_f = 0.0576 \left(\frac{U_\infty x}{\nu} \right)^{-1/5}, \quad \text{et} \quad C_x = 0.072 \left(\frac{U_\infty l}{\nu} \right)^{-1/5} \quad (12.57)$$

La dernière formule fournit un bon accord avec les résultats expérimentaux pour des plaques dont la couche limite turbulente est comptée à partir du bord d'attaque, si la constante numérique 0.072 est remplacée par 0.074. Ainsi :

$$C_x = 0.074 Re_l^{-1/5}; \quad 5 \times 10^5 < Re_l < 10^7. \quad (12.58)$$

Écoulements compressibles

13.1. Introduction

On dit qu'un écoulement est compressible dès que la vitesse caractéristique y devient de l'ordre de (ou supérieure à) la vitesse du son dans le milieu fluide. Deux phénomènes caractérisent alors l'écoulement des écoulements incompressibles : le premier prend la forme d'une discontinuité (un saut ou un changement brutale) dans les propriétés de l'écoulement appelé onde de choc; le deuxième relève de l'étranglement de l'écoulement qui se manifeste quand les conditions en aval, au-delà d'une valeur (ou valeurs) critique(s), n'ont aucune effet sur les conditions en amont.

Des écoulements compressibles sont rencontrés dans des nombreux processus naturels et technologiques. Quant au fluide, il peut être l'air, la vapeur, de gaz naturel, l'azote, l'hélium ou d'autre fluide.

13.2. L'équation d'énergie et le premier et deuxième principe de la thermodynamique

L'équation de la conservation d'énergie (D.13) s'écrit sous la forme :

$$\frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla(\lambda \nabla T) + \frac{1}{\rho} \Phi \quad (13.1)$$

où e désigne l'énergie massique interne, λ la conductivité thermique de fluide, T la température thermodynamique et Φ la dissipation thermique due à la viscosité.

Le premier principe de la thermodynamique est donné par

$$de = dq - pd\vartheta = de - pd \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

où ϑ désigne le volume massique. En fonction de l'entropie, cette équation s'écrit sous la forme :

$$Tds = de + pd \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (13.2)$$

En notant que pour un fluide en mouvement la forme différentielle

$$\frac{d(\cdot)}{dt}$$

représente la dérivée particulière

$$\frac{D(\cdot)}{Dt}$$

l'équation (13.2) s'écrit alors sous la forme

$$T \frac{Ds}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla(\lambda \nabla T) + \frac{1}{\rho} \Phi \quad (13.3)$$

Il vient alors qu'un processus adiabatique n'implique pas seulement l'absence d'échange thermique mais aussi l'absence de dissipation visqueuses, soit $\Phi = 0$ qui est bien le cas pour tout fluide parfait. D'où :

$$T \frac{Ds}{Dt} = 0. \quad (13.4)$$

Par ailleurs, on peut aussi exprimer l'équation de l'énergie en fonction de l'enthalpie. Cela fait en notant que

$$\frac{De}{Dt} + p \frac{D\vartheta}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p \frac{D\vartheta}{Dt} + \vartheta \frac{Dp}{Dt} - \vartheta \frac{Dp}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - \vartheta \frac{Dp}{Dt}$$

ce qui conduit à écrire :

$$\frac{Dh}{Dt} = \vartheta \frac{Dp}{Dt} - \frac{1}{\rho} \nabla(\lambda \nabla T) + \frac{1}{\rho} \Phi \quad (13.5)$$

On utilisera cette équation pour décrire les relations de saut de part et d'autre d'une onde de choc.

13.3. Ondes sonores : propagation des petites perturbations de pression

Il est commode de commencer l'étude d'écoulements compressibles par l'étude des propagations d'ondes de pression à faible amplitude permettant à négliger le terme non linéaire $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ dans l'équation d'Euler. On considère alors un fluide au repos perturbé par des changements infinitésimales $(.)'$ dans les grandeurs physiques. Cela nous ramène à poser :

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \vec{v} = \vec{v}' \quad (13.6)$$

où les valeurs $(.)_0$ sont des valeurs de l'équilibre au repos tel que $\rho' \ll \rho_0$ et $p' \ll p_0$. En rapportant ces variables dans l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

on tire au premier ordre d'approximation

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}' = 0 \quad (13.7a)$$

où nous avons écrit $\vec{v}' = \vec{v}$ pour alléger la notation. L'équation d'Euler

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p$$

se réduit alors à :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p'. \quad (\text{où } \vec{v}' = \vec{v}) \quad (13.7b)$$

Avec (13.7a) et (13.7b) on dispose de deux équations en trois inconnus, à savoir ρ' , p' et \vec{v}' . Il nous faut donc une troisième pour fermer le modèle ce qui nous renvoi aux relations thermodynamiques. Or, en notant que pour un fluide parfait une onde sonore représente

un processus adiabatique (donc isentropique) on se rend compte que ρ' et p' peuvent être reliés en faisant usage de la notion de compressibilité isentropique

$$\kappa_s = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial p_0} \right)_s .$$

aux conditions $(.)_0$ de propagation de l'onde.

► REMARQUE 13.1 : Pour un gaz parfait l'on obtient :

$$\rho' = \kappa_s \rho_0 p', \quad \kappa_s = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial p_0} \right)_s = \frac{1}{\gamma p_0} = \frac{c_v}{c_p p_0} \quad (13.8)$$

car le processus est isentropique¹. ◀

Il est opportune maintenant d'introduire le potentiel de vitesses φ ($\vec{v} = \nabla \varphi$) et déduire par conséquence de l'équation (13.7b) que

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (13.9)$$

En combinant (13.7a), (13.8) et (13.9) on trouve une équation pour φ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a_0^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad a_0^2 = \frac{1}{\rho_0 \kappa_s} = \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \right)_s. \quad (13.10a)$$

On aurait pu, par ailleurs, éliminer \vec{v} et ρ' pour aboutir à une équation en p' uniquement (ou éliminer ρ' et p' pour aboutir à une équation en \vec{v}), soit

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a_0^2 \nabla^2 p' = 0, \quad (13.10b)$$

ou soit

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - a_0^2 \nabla^2 \vec{v} = 0, \quad (13.10c)$$

Ces trois équations ont la même forme appelée *équation d'ondes* où la constante a_0 désigne la célérité de propagation d'ondes sonores ou en abrégé célérité du son.

13.3.1. Ondes planes. Si l'ondes se propage dans une seule direction, par exemple la direction des x , les équations (13.10) se réduisent alors à :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (13.11a)$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0, \quad (13.11b)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (13.11c)$$

¹En utilisant le développement de Taylors :

$$(\rho(p_0 + p'))_s = \rho_0 + p' \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial p_0} \right)_s + \dots = \rho_0 + \rho'$$

on tire $\rho' = p' \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial p_0} \right)_s$ au premier ordre d'approximation.

► REMARQUE 13.2 : *Le front d'une telle onde prend localement la forme d'un plan normale à la direction de propagation. Le front d'une onde engendrée par une source ponctuelle est sphérique.*

◀

La solution générale de (13.11) se présente sous la forme :

$$\varphi(x, t) = f(x - a_0 t) + g(x + a_0 t)$$

qui représente une onde progressive plane. Les autres grandeurs (ρ', p', u) ont, eux aussi, des solutions ayant la même forme que cette relation. Pour fixer les idées, supposons que $g = 0$. Il vient alors que la valeur de toute grandeur $(\rho', p'$ ou $u)$ portée par une telle onde reste constante à une valeur $\eta = x - a_0 t = \text{constante}$ quelque soit x et t pour une c donnée. Cela signifie que l'onde se propage dans le sens des x positifs car t est toujours positif. En revanche, une onde ayant la forme $g(x + a_0 t)$ représente une onde se propageant dans le sens négatif des x .

En posant $\varphi = f(x - a_0 t)$ pour le potentiel de vitesse l'on obtient :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f'(x - a_0 t)$$

et l'équation (13.9) conduit alors à :

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho_0 a_0 f'(x - a_0 t).$$

D'où

$$p' = \rho_0 a_0 u \tag{13.12}$$

Cette relation montre que les oscillations de vitesse ont le même signe que celles de pression. En combinant (13.12) avec (13.8) on obtient une relation entre la vitesse et les oscillation en masse volumique :

$$u = \frac{a_0 p'}{\rho_0}. \tag{13.13}$$

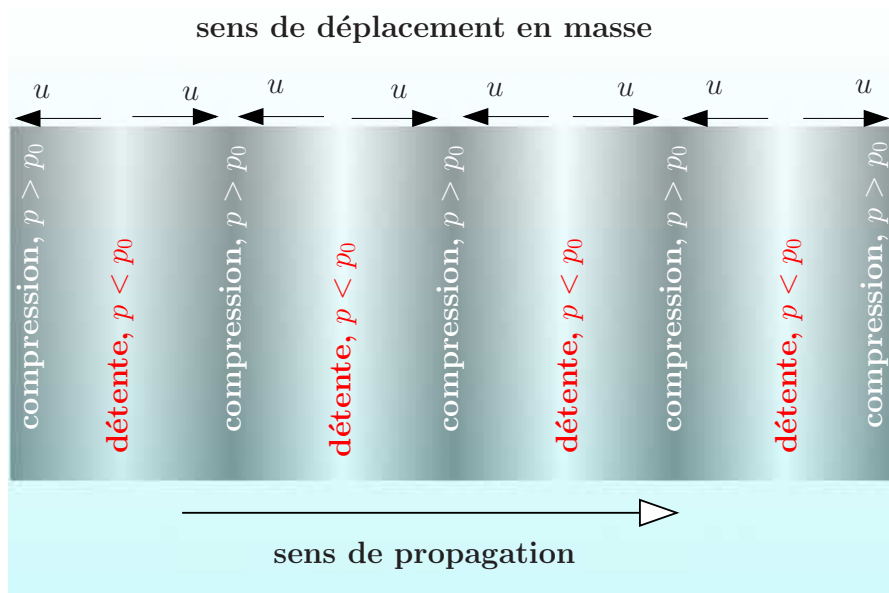


FIGURE 13.1. Zones de compression et détente, déplacement en masse, direction de vitesse d'oscillations et le sens de propagation d'onde sonore

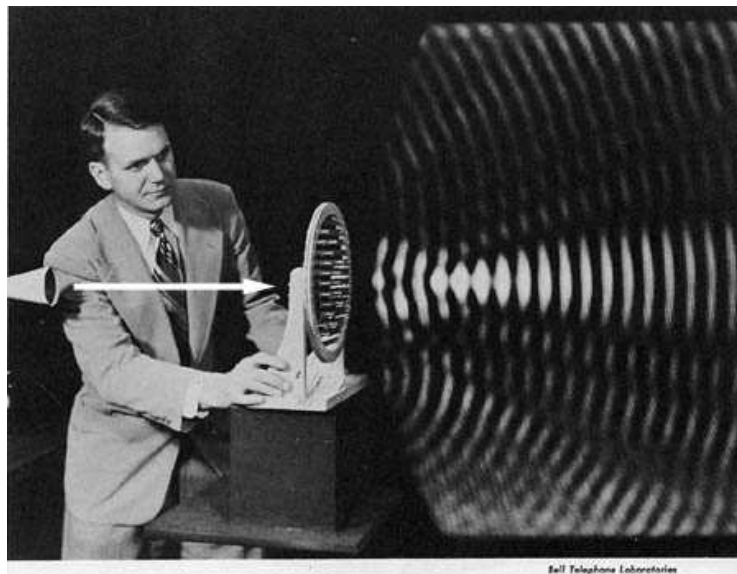


FIGURE 13.2. Visulisation d'une onde sonore, photo prise de livre : David C. Knight & Franklin Watts, *The First Book of Sound : A Basic Guide to the Science of acoustics, Inc.* New York (1960), p. 80.

Nous avons vu en Thermodynamique que les chaleur spécifiques peuvent être exprimées sous la forme²

$$c_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\rho, \quad c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \quad \text{compte tenu de } v = 1/\rho$$

A partir de ces deux relations on peut démontrer la relation de Reech

$$\gamma = \frac{\kappa_T}{\kappa_s}$$

où κ_T est la compressibilité isotherme. Ainsi on peut écrire pour la célérité :

$$a_0 = \left(\frac{\gamma}{\rho_0 \kappa_T} \right)^{1/2}. \quad (13.14a)$$

Pour un gaz parfait, l'on obtient alors :

$$a_0 = \left(\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \right)^{1/2}, \quad (13.14b)$$

ce qui nous permet d'évaluer la célérité en fonction des conditions locales de température et de pression.

13.3.2. Énergie et propagation d'ondes sonores. L'équation de la conservation d'énergie est donnée par :

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{v} - \nabla(\lambda \nabla T) + \Phi \quad (13.15)$$

où Φ représente la dissipation thermique produite par les forces visqueuses, λ la conductivité thermique du fluide, T la température et e l'énergie interne par unité de masse. Comme on s'intéresse aux ondes sonores, on pose :

$$e = e_0 + e', \quad T = T_0 + T'$$

tels que $e' \ll e_0$ et $T' \ll T_0$, et l'on considère le cas d'un fluide parfait ce qui nous permet de négliger la dissipation thermique le transfert thermique par conduction. Notons que cette dernière s'annule à tout cas dans un processus isentropique qui est en effet le cas d'ondes sonores. En portant ces relation de l'équation d'énergie, l'on obtient au premier ordre d'approximation

$$\rho_0 \frac{De'}{Dt} = -(p_0 + p') \nabla \cdot \vec{v}' = -(p_0 + p') \nabla \cdot \vec{v} \quad (13.16)$$

où le terme en p' a été retenu car l'énergie cinétique est représentée par un terme quadratique en v' . Ici, nous avons posé $\vec{v}' = \vec{v}$ comme indiqué précédemment, voir équations (13.7a) et (13.7b). La première équation fournit

$$\nabla \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{D\rho'}{Dt}$$

²Voir polycopié de cours de Thermodynamique, chapitre 4, eqs (4.14) et (4.15)

qui, combinée avec (13.8), conduit à :

$$\nabla \cdot \vec{v} = -\kappa_s \frac{Dp'}{Dt}$$

et par conséquent l'équation (13.16) devient :

$$\rho_0 \frac{De'}{Dt} = \kappa_s (p_0 + p') \frac{Dp'}{Dt} \quad (13.17)$$

Étant donné que le développement en cours se fait dans le cadre des approximations linéaires, on admet que :

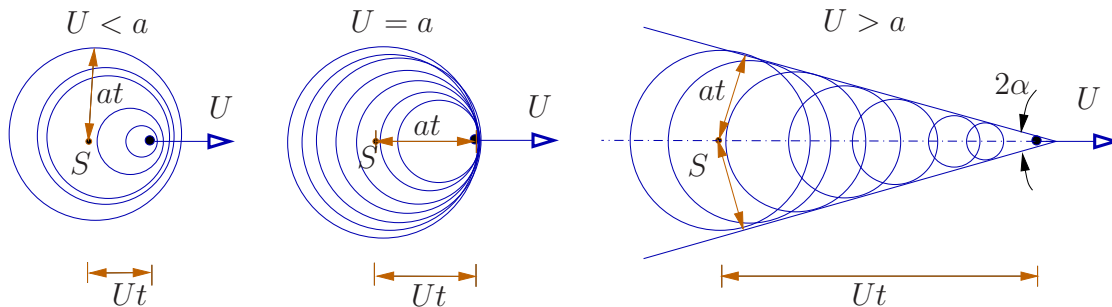
$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t},$$

et l'équation (13.17) s'intègre en :

$$\rho_0 e' = \kappa_s p_0 p' + \frac{1}{2} \kappa_s p'^2 \quad (13.18a)$$

où la constante de l'intégration a été déterminée de l'état $(.)_0$. Noter que le premier terme reflète le travail des forces de pression produit par la propagation de son. Quant au terme quadratique en p' , il désigne ce que l'on appelle l'énergie acoustique potentielle et prend la forme de travail dû uniquement aux oscillations en pression et masse volumique.

13.3.3. Onde sonore d'une source mobile. On considère maintenant une source sonore S en mouvement, à une vitesse constante U , dans un fluide au repos s'étendant à l'infini. Il existe trois cas à distinguer selon le rapport entre la vitesse de source et la vitesse de son.



$U < a$: vu que la distance parcourue par la source Ut dans ce cas est inférieure à celle parcourue par le front d'onde at , les fronts d'ondes sonores émises par la source au cours de temps deviennent emboîtés.

$U > a$: la distance parcourue par la source Ut est supérieure à celle parcourue par le front d'onde at . Les ondes émises par la source au cours de son mouvement dans ce cas forme une enveloppe conique dont le demi angle au sommet est égale à

$$\sin \alpha = \frac{at}{Ut} = \frac{a}{U} = \frac{1}{M}. \quad (13.19)$$

On appelle le nombre $M = U/a$ le nombre de Mach et α l'angle de Mach.

$U = a$: ce cas représente la limite intermédiaire entre les deux cas précédents lorsque les fronts de tous les ondes émises par la source au cours de son mouvement s'emboîtent à un seul point donné par la position de source sonore en mouvement.

On appelle respectivement ces trois régimes : régime subsonique, régime supersonique et régime transsonique; ce dernier correspond à la formation d'ondes de choc, provoquée par l'emboîtement d'ondes de surpression en un seul correspondant au point source. Quand la vitesse de source augment de $U < a$ à $U > a$, une onde de choc se forme à l'instant où $U = a$, on dit alors la source franchit le mur du son dès que U dépasse a ; un bel exemple est fourni à la figure 13.3.3.



FIGURE 13.3. Franchissement du mur de son

13.4. Onde de choc en 1D : l'exemple d'un piston en mouvement

dans cette section on considère l'onde de choc produite par le mouvement rapide d'un piston (par exemple suite à la phase d'ignition d'un moteur à quatre temps). Posons u_p pour la vitesse de piston et c ($u_p > c$, pourquoi ?) pour celle du choc et désignons par l'indice 1 toute variable en aval de l'onde et par 2 sa valeur en amont de l'onde. On constate que la vitesse de toute particule fluide se trouvant entre le piston et l'onde est égale à la vitesse du piston tandis qu'en amont de l'onde la vitesse est celle de fluide non perturbé, donc égale à nulle. La repartition de vitesse est ainsi discontinue comme illustrée sur la figure.

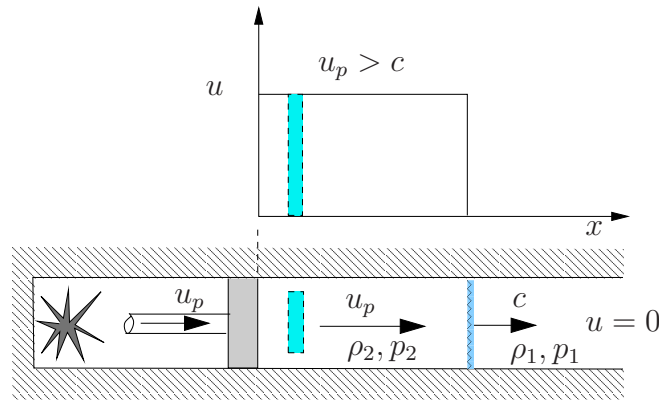


FIGURE 13.4. Onde de choc produite unidimensionnelle.

Analysons maintenant l'écoulement dans un repère lié à l'onde en ajoutant une vitesse égale à $-c$ au fluide. Pour appliquer les principes de la conservation de masse et de quantité de mouvement on considère un volume de contrôle entourant l'onde de choc, comme illustré dans la figure suivante :

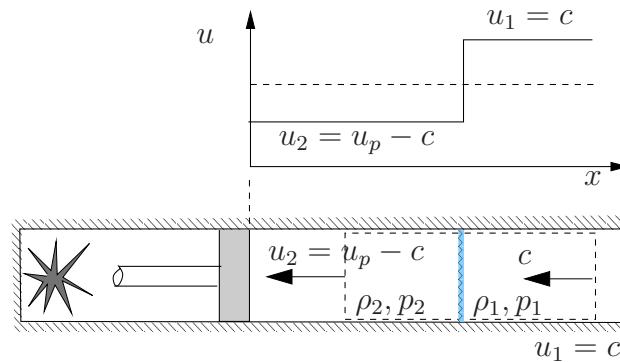


FIGURE 13.5. Onde de choc produite unidimensionnelle.

On obtient alors :

$$\rho_1 c S = \rho_2 (u_p - c) S \quad (13.20a)$$

et :

$$-\rho_1 c^2 S + \rho_2 (u_p - c)^2 S = (p_1 - p_2) S \quad (13.20b)$$

où S est la section de piston. En combinant ces deux équations l'on obtient :

$$\llbracket p \rrbracket = p_2 - p_1 = \rho_1 c^2 - \frac{\rho_1^2 c^2}{\rho_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\rho_2 - \rho_1) c^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \llbracket \rho \rrbracket c^2 \quad (13.20c)$$

où $\llbracket . \rrbracket$ désigne le saut dans la valeur de variable à travers l'onde de choc. Ainsi, la vitesse de choc est donnée par

$$c = \left(\frac{\rho_2 \llbracket p \rrbracket}{\rho_1 \llbracket \rho \rrbracket} \right)^{1/2} \quad (13.20d)$$

D'après cette équation, on note que la vitesse de propagation d'une onde de choc dépend des conditions de pression et de densité en aval et en amont de choc. Notons aussi que quand $p_2 \rightarrow p_1$, $\rho_2 \rightarrow \rho_1$, et par la suite cette formule tend vers la forme suivante :

$$c \cong \left(\frac{\Delta p}{\Delta \rho} \right)^{1/2} \cong \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)^{1/2} = a, \text{ vitesse de son} \quad (13.20e)$$

13.5. Onde de choc

Nous allons maintenant mettre en évidence les conditions de saut et leur dépendance de conditions thermodynamiques de l'écoulement. Pour cela on considère un écoulement unidimensionnel en régime permanent d'un fluide parfait à comportement de **gaz parfait**, c'est-à-dire d'un fluide idéal ($\mu = \lambda = 0$). Les variables ne dépendent alors que d'une dimensions (x). Comme dans la section précédent, on utilisera les indice 1 et 2 pour désigner respectivement les conditions en amont (avant) et en aval (après) de l'onde de choc. De plus, nous supposons que les chaleurs spécifiques de gaz parfait restent constantes à travers le choc. Ainsi, les équations de la conservation de masse, de quantité de mouvement et de l'énergie (13.5) se réduisent à :

$$\frac{d\rho u}{dx} = 0, \quad (13.21a)$$

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx}, \quad (13.21b)$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dx} = \frac{dp}{dx} \quad (13.21c)$$

où on a utilisé $dh = c_p dT$ pour un gaz parfait.

À ces équations, on doit adjoindre l'équation d'état :

$$p = R\rho T \quad (13.21d)$$

où R est la constante du gaz en J/(kg K).

Alors, l'équation de continuité contuité (13.21a) donne :

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (13.22a)$$

Si on utilise, (13.21a), l'équation (13.21b) se modifie en :

$$u \frac{d\rho u}{dx} + \rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx}$$

soit :

$$\frac{d}{dx} (\rho u^2) + \frac{dp}{dx} = 0$$

qui s'intègre en :

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \quad (13.22b)$$

Quant à l'équation (13.21c), en remplaçant dp/dx par $-d(\frac{1}{2}u^2)/dx$, l'on obtient après intégration :

$$c_p T_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = c_p T_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \quad (13.22c)$$

Comparer ce dernier résultat avec l'équation de conservation d'énergie démontrée en thermodynamique pour un système fermé en écoulement stationnaire.

Pour un gaz parfait, on note que la vitesse de son est donnée par :

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\partial}{\partial \rho} (\text{Cte.} \times \rho^\gamma) = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma RT = \gamma(c_p - c_v)T = (\gamma - 1)c_p T$$

ce qui permet de réécrire l'équation (13.22c) sous la forme :

$$\frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}u_1^2 = \frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}u_2^2 \quad (13.23)$$

Si l'on introduit le nombre de Mach, défini par :

$$M = \frac{\text{vitesse de l'écoulement}}{\text{vitesse de son dans le milieu fluide}} = \frac{u}{a} \quad (13.24)$$

dans (13.23), on obtient alors pour un écoulement à nombre de Mach unité $M = 1$, c'est-à-dire $u = u_c = a_c$, la relation suivante :

$$\frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}u_1^2 = \frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}u_2^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{a_c^2}{2} \quad (13.25)$$

13.5.1. L'équation de Rankine-Hugoniot. La célèbre équation de Rankine-Hugoniot exprimant la différence de l'enthalpie de part et d'autre du choc peut être obtenue à partir de (13.22a), (13.22b) et (13.21c) exprimée en fonction de l'enthalpie. Pour un écoulement unidimensionnel en régime permanent l'on obtient de l'équation d'énergie :

$$\rho \frac{dh}{dx} = \frac{dp}{dx} = \rho \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{2}u^2 \right) \quad (13.26)$$

Ainsi, à l'aide de (13.22a) et (13.22b), cet équation peut se réécrire après intégration sous la forme :

$$\begin{aligned} h_2 - h_1 &= \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2) = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)(u_1 - u_2) \\ &= \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 u_1}, \quad \text{en utilisant (13.22a) puis (13.22b)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) (p_2 - p_1), \quad \text{en utilisant (13.22a)}. \end{aligned} \quad (13.27)$$

On appelle (13.27) l'équation de Rankine-Hugoniot.

13.5.1.1. *Relation de saut entre la pression et densité de part et d'autre du choc.* Pour un gaz parfait on a :

$$h = c_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$$

Alors, en reportant cet équation dans (13.27) on tire la relation suivante donnant p_2/p_1 en fonction ρ_2/ρ_1 :

$$\frac{p_2}{p_1} = \left[1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} - \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \right] \left[1 - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{\rho_1}{\rho_2} \right]^{-1} \quad (13.28)$$

La courbe établie sur cette relation est souvent dénommée *adiabate dynamique du gaz* pour la distinguer de courbe isentrope basée sur

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma.$$

Ces deux courbes sont représentées sur la figure 13.6.

Notons qu'une singularité s'obtient quand

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}.$$

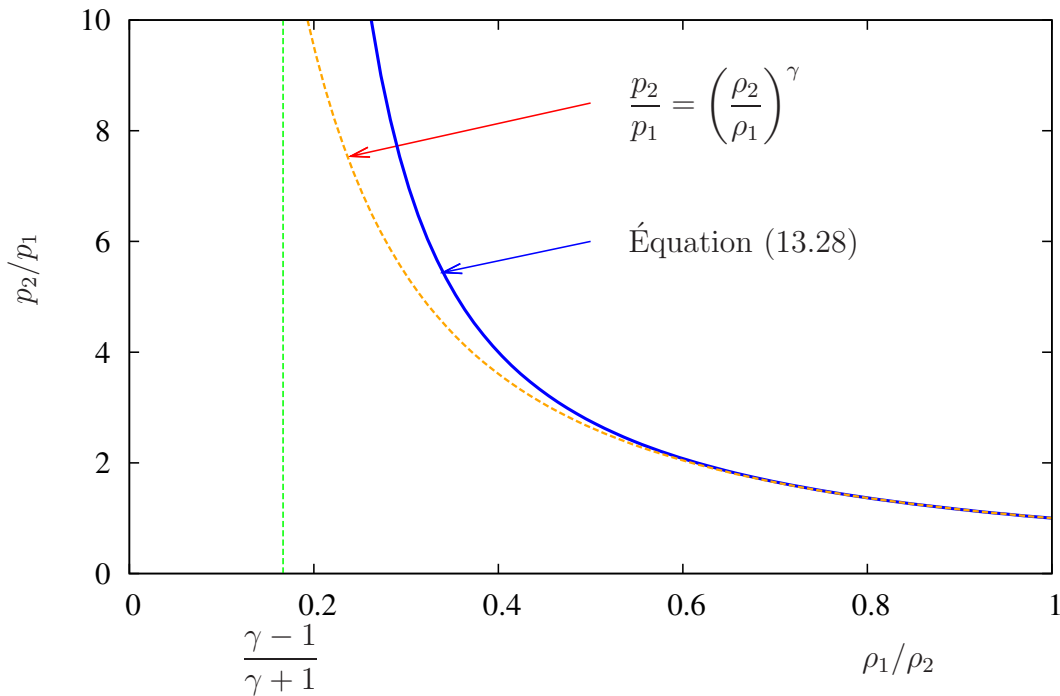


FIGURE 13.6. Illustration de courbe de Rankine-Hugoniot d'un gaz parfait à $\gamma = 1.4$

13.5.1.2. *Relation de Prandtl du choc* $u_1 u_2 = a_c^2$. À partir des équations de la conservation de masse (13.22a) et de quantité de mouvement (13.22b), l'on obtient :

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1 (u_1 - u_2) \quad (13.29a)$$

$$\rho_2 - \rho_1 = \rho_1 (u_1/u_2 - 1) \quad (13.29b)$$

D'où :

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = u_1 u_2 \quad (13.30)$$

Compte tenu de l'équation d'état d'un gaz parfait, l'équation d'énergie (13.22c) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} u_1^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} u_2^2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{a_c^2}{2} \quad (13.31)$$

Or, la différence de vitesse (d'après (13.22a) et (13.22b)) s'exprime par :

$$u_1 - u_2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 u_1} = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} - \frac{p_1}{\rho_1 u_1} \quad (13.32)$$

En utilisant (13.31), on peut trouver des expressions pour le premier et deuxième termes du deuxième membre de (13.32) :

$$\frac{p_1}{\rho_1 u_1} = \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{a_c^2}{u_1} - \frac{\gamma-1}{2\gamma} u_1, \quad \frac{p_2}{\rho_2 u_2} = \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{a_c^2}{u_2} - \frac{\gamma-1}{2\gamma} u_2$$

Ainsi, l'équation (13.29a) se transforme en :

$$u_1 - u_2 = \frac{\gamma+1}{2\gamma} a_c^2 \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) + \frac{\gamma-1}{2\gamma} (u_1 - u_2) \quad (13.33)$$

D'où, l'on obtient :

$$(u_1 - u_2) \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{a_c^2}{u_1 u_2} - 1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right) = 0$$

dont les solutions sont $u_1 = u_2$, (une solution triviale) et :

$$\boxed{u_1 u_2 = a_c^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}, \quad \text{La relation de Prandtl du choc}} \quad (13.34)$$

13.6. Écoulement unidimensionnel isentropique

Ici nous nous intéressons aux écoulements idéaux (écoulements en fluide parfait) unidimensionnel d'un gaz parfait en régime permanent dans une conduite de section $A(x)$. Notre intérêt sera particulièrement porté sur les relations exprimant l'évolution des variables physiques en fonction de nombre de Mach le long de la conduite. Mais pourquoi étudie-t-on un écoulement aux conditions idéales ? Une telle étude s'avère importante pour deux raisons :

- (1) elle fournit d'informations sur l'évolution de l'écoulement et mettre en évidence des paramètres importants,
- (2) elle permet d'introduire ultérieurement des facteurs pouvant tenir compte des déviations de l'état idéal.

13.6.1. L'état de stagnation du modèle de gaz parfait. Par l'état de stagnation on entend dire un état théorique dans lequel l'écoulement est ramener dans un processus isentropique à un état d'équilibre à vitesse nulle sans faire intervenir aucune force extérieure telle que la force de gravité. On notera un tel état par l'indice zéro "0".

L'équation d'énergie peut s'écrire alors sous la forme :

$$h + \frac{1}{2} u^2 = h_0 \quad (13.35a)$$

qui, pour un gaz parfait, prend la forme :

$$c_p T + \frac{1}{2} u^2 = c_p T_0 \quad (13.35b)$$

où nous admettons que les chaleurs spécifiques restent constantes. Or compte tenu de la relation thermodynamique $R = c_p - c_v = c_p(\gamma - 1)/\gamma$ pour un gaz parfait, et la célérité du son locale $a^2 = \gamma p/\rho = \gamma RT$, l'équation (13.35b) peut s'écrire, après division par $c_p T$, sous la forme :

$$1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u^2}{a^2} = \frac{T_0}{T} \quad (13.35c)$$

Alors, en introduisant le nombre de Mach $M = u/a$ dans cette équation l'on obtient :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (13.36)$$

Ainsi, on déduit que pour un gaz parfait en écoulement isentropique (unidimensionnel et en régime permanent) les relations suivantes :

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad (13.37)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/(\gamma-1)} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (13.38)$$

Quant au rapport des vitesses acoustiques, on obtient :

$$\frac{a_0}{a} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/2} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{1/2} \quad (13.39)$$

Introduisant maintenant le cas $M = M_c = 1$ désigné par l'indice c . Les rapports des valeurs correspondant à $M = 1$ aux valeurs de stagnation ne dépendent que des rapports des chaleurs suivantes :

$$\frac{T_c}{T_0} = \frac{a_c^2}{a_0^2} = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad (13.40)$$

$$\frac{p_c}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\gamma/(1+\gamma)}, \quad (13.41)$$

$$\frac{\rho_c}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/(1+\gamma)} \quad (13.42)$$

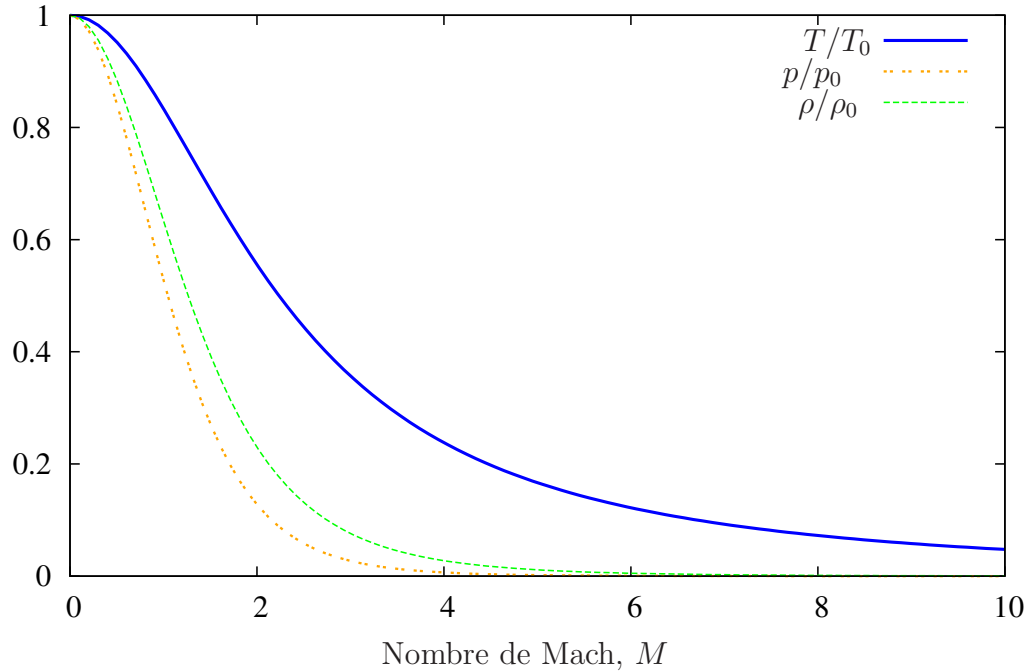


FIGURE 13.7. Évolution des propriétés physiques par rapport aux conditions de stagnation avec le nombre de Mach ; un gaz parfait à $\gamma = 1.4$

13.6.2. Relations à faible nombre de Mach. À faible nombre de Mach, par exemple $M \leq 0.1$, on peut utiliser le développement de Taylor pour trouver de bonnes approximations mettant en évidence l'effet de compressibilité sur l'écoulement. Ainsi, il suffit d'appliquer le développement polynôme :

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

aux expressions précédentes pour p_0/p et ρ_0/ρ . On trouve :

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{\gamma}{2}M^2 + \frac{\gamma}{8}M^4 + \frac{\gamma(2-\gamma)}{48}M^6 + \dots \quad (13.43)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \frac{1}{2}M^2 + \frac{(2-\gamma)}{8}M^4 + \frac{(2-\gamma)(3-2\gamma)}{48}M^6 + \dots \quad (13.44)$$

D'où on obtient les expressions normalisées suivantes :

$$\frac{p_0 - p}{p} = \frac{\gamma}{2}M^2 + \frac{\gamma}{8}M^4 + \frac{\gamma(2-\gamma)}{48}M^6 + \dots \quad (13.45)$$

$$\frac{\rho_0 - \rho}{\rho} = \frac{1}{2}M^2 + \frac{(2-\gamma)}{8}M^4 + \frac{(2-\gamma)(3-2\gamma)}{48}M^6 + \dots \quad (13.46)$$

Quant à la chute de pression $(p_0 - p)$ normalisée par l'énergie cinétique $\rho u^2/2$, elle peut être déterminée comme suite :

$$\begin{aligned} \frac{p_0 - p}{\frac{1}{2}\rho u^2} &= \frac{p_0 - p}{\frac{1}{2}\rho M^2 a^2} \\ &= \frac{p_0 - p}{\frac{1}{2}\rho M^2 (\gamma p / \rho)} \\ &= \frac{p_0 - p}{p} \frac{2}{\gamma M^2} \end{aligned}$$

Ainsi, en multipliant l'expression (13.45) par $(2/\gamma M^2)$ on obtient l'expression recherchée pour la chute de pression :

$$\frac{p_0 - p}{\frac{1}{2}\rho u^2} = 1 + \underbrace{\frac{1}{4}M^2 + \frac{(2 - \gamma)}{24}M^2 + \dots}_{\text{correction de compressibilité}} \quad (13.47)$$

On récupère alors l'équation de Bernoulli pour un écoulement incompressible quand $M \rightarrow 0$.

13.6.3. Tuyère de Laval.

Il s'agit d'une conduite convergente-divergente d'axe rectiligne à section $A(x)$ variable comme schématisé ci-contre sur la figure 13.8. Le fait que dans un écoulement adiabatique (échange thermique nul avec l'extérieur) implique que la température de stagnation T_0 sera constante. cela conduit alors à une pression de constante stagnation. Alors, si l'on connaît le nombre de Mach ou la température, on peut d'après les équations (13.40), (13.41) et (13.44) déterminer l'évolution d'autres grandeurs physiques. Les seules grandeurs à relier sont alors la section de conduite et le nombre de Mach.

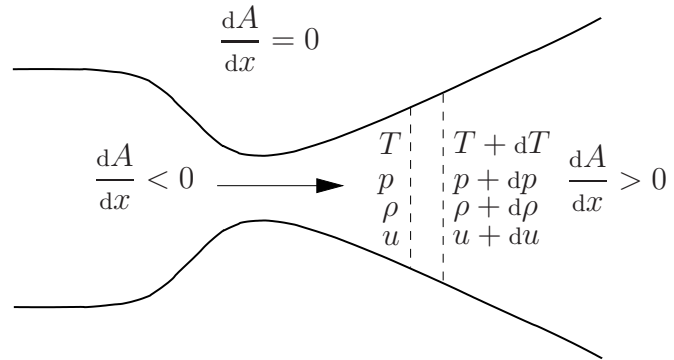


FIGURE 13.8. Tuyère de Laval avec un volume de contrôle.

Pour déterminer la relation entre l'évolution de nombre de Mach avec la section de conduite, on considère les équations de la conservation de masse. Compte tenu du caractère isentropique, la célérité du son dans les conditions locales de l'écoulement est donnée par :

$$dp = a^2 d\rho \quad (13.48a)$$

L'équation de conservation de masse, de quantité de mouvement, d'énergie ainsi que l'équation d'état. La première,

$$\rho u A = \text{constante} = \rho_c u_c A_c,$$

écrite sous forme différentielle se transforme en :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0. \quad (13.48b)$$

En combinant l'équation d'énergie :

$$dh + udu = 0$$

et la relation thermodynamique :

$$Tds = dh - \frac{dp}{\rho}$$

on déduit la relation suivante pour un processus isentropique :

$$\frac{dp}{\rho} + udu = 0 \quad (13.48c)$$

De plus, en dérivant l'équation d'état d'un gaz parfait, $p = R\rho T$, et puis en divisant par $R\rho T$, on obtient le résultats différentiel suivant :

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (13.48d)$$

Alors, il vient qu'en remplaçant du/u obtenue de (13.48b) dans (13.48c) :

$$\frac{dp}{\rho} - u^2 \overbrace{\left[\frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} \right]}^{\frac{du}{u}} = 0 \quad (13.49)$$

Or, étant donnée que le processus adiabatique pour un gaz parfait est un processus polytrophe, $p = p(\rho)$, il vient que

$$d\rho = \frac{d\rho}{dp} dp = \frac{1}{a^2} dp$$

et l'équation (13.49) se transformera alors en :

$$\left[1 - \frac{u^2}{a^2} \right] \frac{dp}{\rho} = u^2 \frac{dA}{A} \quad (13.50a)$$

ou en fonction de nombre de Mach :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\rho u^2}{A} \frac{1}{1 - M^2} \frac{dA}{dx} \quad (13.50b)$$

De plus, si l'on tient compte de (13.48c), on peut aussi écrire :

$$\frac{A du}{u dx} = \frac{1}{M^2 - 1} \frac{dA}{dx} \quad (13.50c)$$

qui exprime l'accélération de l'écoulement le long de Tuyère. Quant à l'évolution de la densité, l'on obtient

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{\rho M^2}{A} \frac{1}{1 - M^2} \frac{dA}{dx} = -\frac{\rho M^2}{u} \frac{du}{dx} \quad (13.51)$$

Comment la température évolue-t-elle avec le nombre de Mach ? La réponse à cette question peut être déduite en se rendant compte que les conditions de stagnation sont constantes. Cela implique

$$\frac{dT_0}{dx} = 0.$$

Ainsi, on obtient en dérivant (13.36) par rapport à x :

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dx} = -\frac{(\gamma - 1)M}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M^2} \frac{dM}{dx} \quad (13.52)$$

13.6.3.1. *Variations de grandeurs physiques avec le nombre de Mach.* Examinons maintenant les implications physiques de l'équation (13.50b) tout en notant d'abord que les termes $(\rho u^2/A)$ et $(\rho M^2/A)$ sont toujours positifs. On distingue alors les cas suivants :

- **Cas subsonique** : $M < 1$

$$\frac{dA}{dx} < 0 \implies \begin{cases} \frac{dp}{dx} < 0, \\ \frac{du}{dx} > 0 \end{cases}$$

$$\frac{dA}{dx} > 0 \implies \begin{cases} \frac{dp}{dx} > 0, \\ \frac{du}{dx} < 0 \end{cases}$$

- **Cas supersonique** : $M > 1$

$$\frac{dA}{dx} > 0 \implies \begin{cases} \frac{dp}{dx} < 0, \\ \frac{du}{dx} > 0 \end{cases}$$

$$\frac{dA}{dx} < 0 \implies \begin{cases} \frac{dp}{dx} > 0, \\ \frac{du}{dx} < 0 \end{cases}$$

- **Cas sonique** : $M = 1$; dans ce cas il est nécessaire que $dA/dx = 0$, ce qui interviendra au col de Tuyère.

► **REMARQUE 13.3** : Bien que le cas $M = 1$ implique nécessairement que $dA/dx = 0$, celui de $dA/dx = 0$ n'implique nullement que $M = 1$. ◀

13.6.4. Relation entre la section A et le nombre de Mach M . Pour la relation entre la section A le nombre de Mach M , il suffit de retourner à l'équation (13.48d) et en substituer pour dp , $d\rho$ et dT respectivement à partir de (13.50b), (13.51) et (13.52). On obtient :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\rho M}{A} \frac{1}{(1-M^2)} \frac{dA}{dx} - \frac{(\gamma-1)M}{1+\frac{1}{2}(\gamma-1)M^2} \frac{dM}{dx} = \frac{\rho u^2}{p} \frac{1}{A} \frac{1}{(1-M^2)} \frac{dA}{dx},$$

$$\left(\frac{M^2}{A(1-M^2)} - \frac{\overbrace{\rho u^2}^{M^2}}{\gamma p} \frac{1}{A(1-M^2)} \right) \frac{dA}{dx} = \frac{(\gamma-1)M}{1+\frac{1}{2}(\gamma-1)M^2} \frac{dM}{dx}$$

D'où :

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = \frac{M^2-1}{M(1+\frac{1}{2}(\gamma-1)M^2)} \frac{dM}{dx} \quad (13.53)$$

13.6.4.1. *Interprétation de l'équation (13.53).* Pour interpréter l'implication physique de (13.53), notons d'abord que A et $[M(1+(\gamma-1)M^2/2)]$ prendre toujours des valeurs positives. Il vient alors que (M^2-1) joue un rôle déterminant pour l'évolution de nombre de Mach avec la section A . On distingue alors les cas suivants :

(1) **Cas subsonique** : $M < 1$

$$M < 1 : \begin{cases} \frac{dA}{dx} < 0 \implies \frac{dM}{dx} > 0, & \begin{cases} \frac{dp}{dx} < 0, \\ \frac{du}{dx} > 0 \end{cases} \\ \frac{dA}{dx} > 0 \implies \frac{dM}{dx} < 0, & \begin{cases} \frac{dp}{dx} > 0, \\ \frac{du}{dx} < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (13.54a)$$

(2) **Cas supersonique** : $M > 1$

$$M > 1 : \begin{cases} \frac{dA}{dx} < 0 \implies \frac{dM}{dx} < 0, & \begin{cases} \frac{dp}{dx} > 0, \\ \frac{du}{dx} < 0 \end{cases} \\ \frac{dA}{dx} > 0 \implies \frac{dM}{dx} > 0, & \begin{cases} \frac{dp}{dx} < 0, \\ \frac{du}{dx} > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (13.54b)$$

(3) **Cas sonique** : $M = 1$ ce cas ce qui implique nécessairement que quand $M = 1$, $dA/dx = 0$. Cela veut dire que, pour un écoulement interne, l'écoulement doit

passer par un dispositif convergent-divergent pour atteindre une vitesse supersonique.

Ces résultats sont illustrés sur la figure 13.6.4.1.

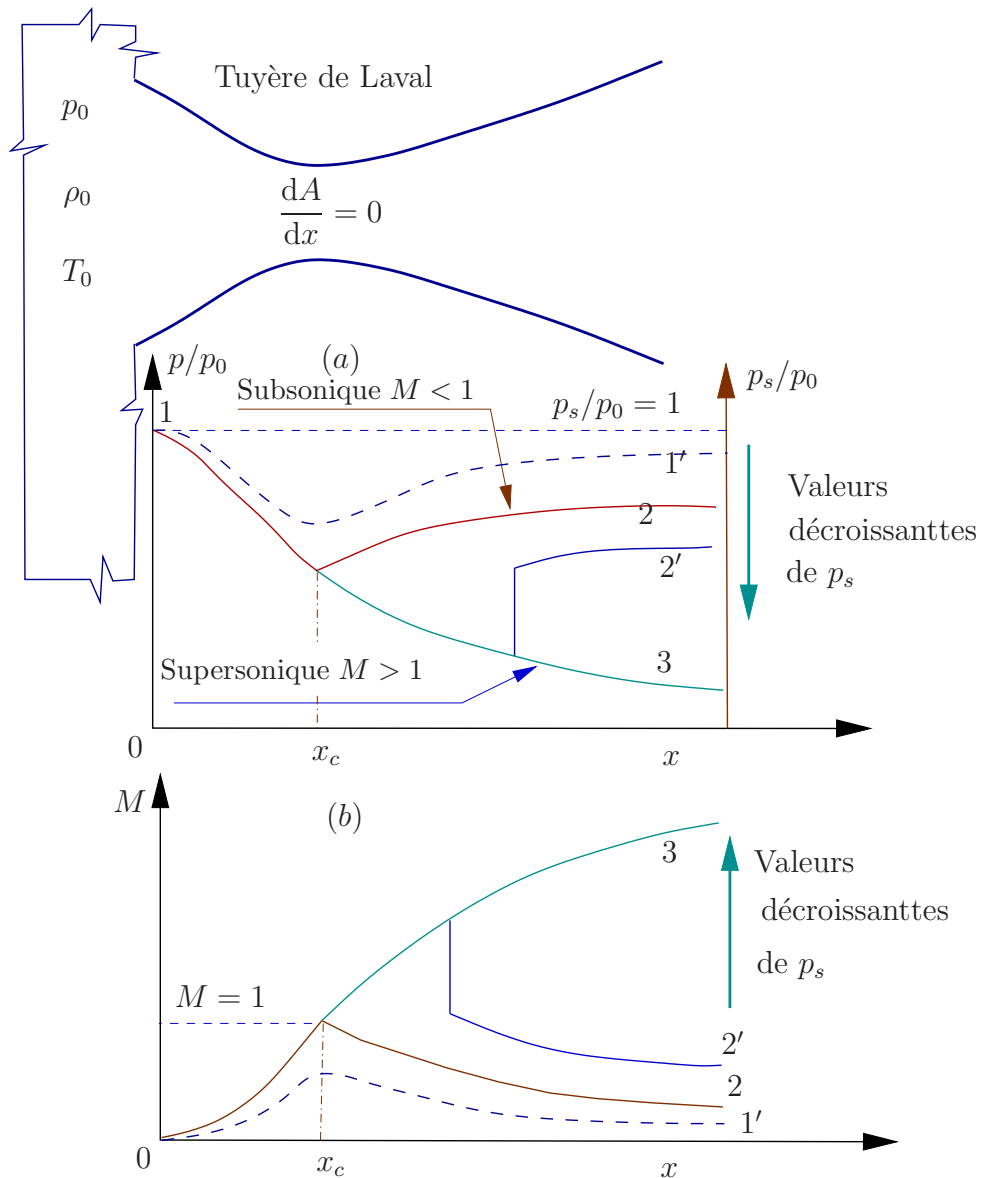


FIGURE 13.9. Variations de la pression statique, (a), et de nombre de Mach, (b), dans une tuyère convergente–divergente. p_0 désigne la pression de stagnation (supposée constante) régnant à l’entrée de tuyère, p_s la pression statique à la sortie de tuyère.

► REMARQUE 13.4 : La condition $dA/dx = 0$ n’implique nullement que $M = 1$ compte tenu du cas $dM/dx = 0$. Dans la partie subsonique, un rétrécissement de la section fait (mathématiquement

parlant) accélérer l'écoulement et conduit à l'accroissement de nombre de Mach. Par contre, une augmentation de la section conduit à une baisse de vitesse et de nombre de Mach. ◀

13.7. Résumé de relations d'écoulements isentropiques : Théorèmes de Hugoniot

Les résultats obtenus exprimant l'évolution de propriétés physiques dans un écoulement isentropique le long de la Tuyère de Laval constituent ce qu'on appelle les théorèmes de Hugoniot. Ils sont données sous forme de variations logarithmes du/u , dp/p , $d\rho/\rho$, dT/T et dM/M :

$$\text{Vitesse :} \quad \frac{du}{u} = \frac{1}{M^2 - 1} \frac{dA}{A} \quad (13.55a)$$

$$\text{Pression :} \quad \frac{dp}{p} = -\frac{\gamma M^2}{M^2 - 1} \frac{dA}{A} \quad (13.55b)$$

$$\text{Densité :} \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{dA}{A} \quad (13.55c)$$

$$\text{Température :} \quad \frac{dT}{T} = \frac{(1 - \gamma)M^2}{M^2 - 1} \frac{dA}{A} \quad (13.55d)$$

$$\text{Nombre de Mach :} \quad \frac{dM}{M} = \frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M^2}{M^2 - 1} \frac{dA}{A} \quad (13.55e)$$

ANNEXE A

Formules et Identités Vecorielles

$$\nabla \cdot (a\vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla a + a \nabla \cdot \vec{b} \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \wedge (a\vec{b}) = (\nabla a) \wedge \vec{b} + a \nabla \wedge \vec{b} \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \wedge \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \wedge \vec{b}) \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + \vec{a} (\nabla \cdot \vec{b}) - \vec{b} (\nabla \cdot \vec{a}) - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + \vec{a} \wedge (\nabla \wedge \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) \quad (\text{A.5})$$

$$(\vec{a} \cdot \nabla) \vec{a} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{a} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \vec{a}^2 \right) \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{a}) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \wedge (\nabla a) = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a} \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \wedge (\vec{a} \cdot \nabla \vec{a}) = (\nabla \wedge \vec{a}) (\nabla \cdot \vec{a}) + \vec{a} \cdot \nabla (\nabla \wedge \vec{a}) - (\nabla \wedge \vec{a}) \cdot \nabla \vec{a} \quad (\text{A.10})$$

Soit S une surface délimitant un volume V , \mathcal{C} une courbe délimitant une surface S , \vec{n} le vecteur unitaire normal extérieur à un élément dS de S et $\vec{r} = (x, y, z)^t$. Alors

$$\int_S a \vec{n} dS = \int_V \nabla a dV \quad (\text{A.11})$$

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{a} dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{a}) dV \quad (\text{A.12})$$

$$\int_S \vec{n} \wedge \vec{a} dS = \int_V (\nabla \wedge \vec{a}) dV \quad (\text{A.13})$$

$$\int_S \vec{n} \wedge (\nabla a) dS = \int_{\mathcal{C}} a d\vec{r} \quad (\text{A.14})$$

$$\int_S \vec{n} \cdot (\nabla \wedge \vec{a}) dS = \int_{\mathcal{C}} \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad (\text{A.15})$$

ANNEXE B

Théorème de transport de Reynolds

Soit un volume matériel $\mathcal{D}(t)$ délimité par la surface $\partial\mathcal{D}(t)$; $\mathcal{D}(t)$ pouvant se déplacer et se déformer. À l'instant t_0 , on fait confondre $\mathcal{D}(t)$ avec un volume de contrôle V délimité lui même par la surface S ; à l'instant $t_0 + \delta t$, $\mathcal{D}(t)$ se confond avec un autre volume de contrôle V' délimité par S' . Soit $v(\vec{r}, t)$ la vitesse de fluide en un point (\vec{r}, t) appartenant à la surface $\partial\mathcal{D}(t)$, voir figure 2.1.

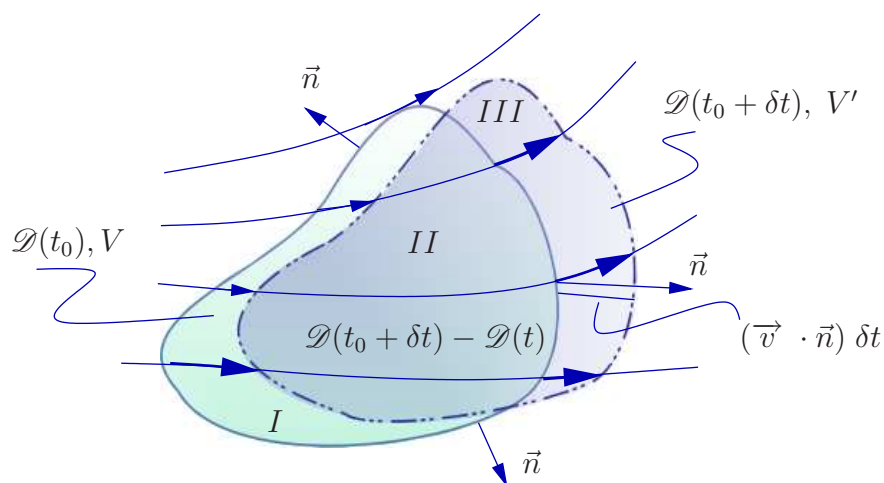


FIGURE 2.1. Lors de son déplacement le volume matériel $\mathcal{D}(t)$ occupe à l'instant t_0 l'espace désigné par $(I + II)$ et l'espace désigné par $II + III$ à l'instant $t_0 + \delta t$.

Soit l'intégrale

$$F(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} f(\vec{r}, t) dV$$

où $f(\vec{r}, t)$ est une propriété physique quelconque associée au fluide et variant en espace et en temps. Alors, il vient

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{F(t_0 + \delta t) - F(t_0)}{\delta t} \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(F_{II} + F_{III})(t_0 + \delta t) - F_V(t_0)}{\delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(F_{II} + F_{III} + F_I)(t_0 + \delta t) - F_I(t_0 + \delta t) - F_V(t_0)}{\delta t} \\
 &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{(F_I + F_{II})(t_0 + \delta t) - F_V(t_0)}{\delta t} + \frac{F_{III}(t_0 + \delta t) - F_I(t_0 + \delta t)}{\delta t} \right] \\
 &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{F_V(t_0 + \delta t) - F_V(t_0)}{\delta t} + \frac{F_{III}(t_0 + \delta t) - F_I(t_0 + \delta t)}{\delta t} \right] \\
 &= \frac{\partial F}{\partial t} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{F_{III}(t_0 + \delta t) - F_I(t_0 + \delta t)}{\delta t}
 \end{aligned}$$

car le volume de contrôle V est fixe dans l'espace.

Lors de son mouvement, la surface $\partial\mathcal{D}(t)$ balaye soit un volume nouvellement occupé ou soit un volume évacué par le fluide. Le terme $[F_{III}(t_0 + \delta t) - F_I(t_0 + \delta t)]/\delta t$ représente précisément le changement induit par le mouvement de $\partial\mathcal{D}(t)$:

$$\begin{aligned}
 F_{III}(t_0 + \delta t) &= \text{changement en } F \text{ dû au volume nouvellement occupé} \\
 F_I(t_0 + \delta t) &= \text{changement en } F \text{ dû au volume évacué}
 \end{aligned}$$

Une surface élémentaire, dS , en mouvement à la vitesse \vec{v} balaye un volume $(\vec{v} \cdot \vec{n}) \delta t dS$ lors de son mouvement dans un intervalle δt . Alors, il vient

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{F_{III}(t_0 + \delta t) - F_I(t_0 + \delta t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\int_S f(\vec{r}, t) (\vec{v} \cdot \vec{n}) \delta t dS}{\delta t}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
 \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V f(\vec{r}, t) dV + \int_S f(\vec{r}, t) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \\
 &= \underbrace{\int_V \frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} dV}_{\text{variation locale}} + \underbrace{\int_S f(\vec{r}, t) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{flux de } f(\vec{r}, t) \text{ à travers la surface } S} \\
 &= \int_V \frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (f(\vec{r}, t) \vec{v}) dV \tag{B.1} \\
 &= \int_V \frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} dV + \int_V [(\vec{v} \cdot \nabla) f(\vec{r}, t) + f(\vec{r}, t) \nabla \cdot \vec{v}] dV \\
 &= \int_V \left[\frac{Df(\vec{r}, t)}{Dt} + f(\vec{r}, t) \nabla \cdot \vec{v} \right] dV
 \end{aligned}$$

On appelle cette équation l'*équation de transport de Reynolds*.

ANNEXE C

Tenseur de contraintes, équations de mouvement ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$)

Nous écrivons dans ce qui suit les équation de la conservation de la masse et Navier–Stokes dans les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

3.1. Coordonnées cartésiennes (x, y, z) avec (u, v, w)

Tenseur de contraintes

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \sigma_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \sigma_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} & \sigma_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{C.1}$$

Équations de Navier–Stokes

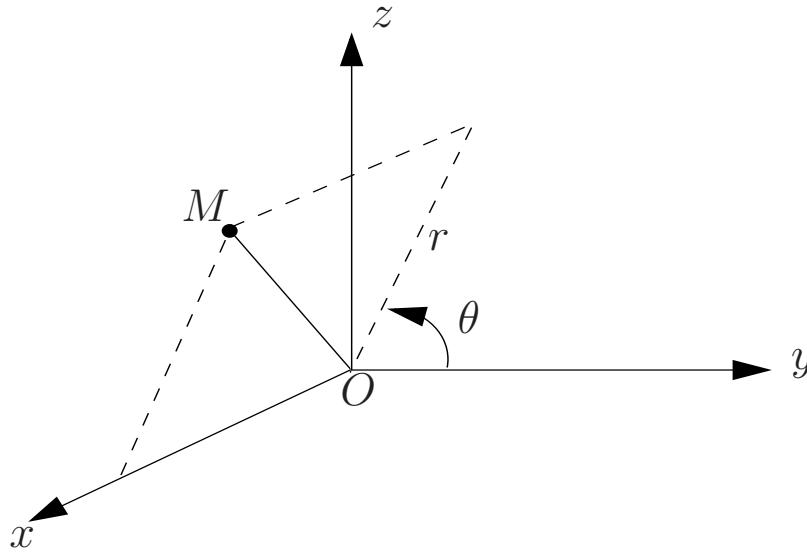
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),\tag{C.2a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right),\tag{C.2b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right).\tag{C.2c}$$

Équation de la conservation de la masse

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\tag{C.3}$$



3.2. Coordonées cylindriques (r, θ, x) avec (v_r, v_θ, v_x)

Tenseur des contraintes

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} & \sigma_{r\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \\
 \sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} & \sigma_{xr} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \\
 \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) & \sigma_{\theta x} &= \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} \right)
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

Équation de la conservation de masse

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \tag{C.5}$$

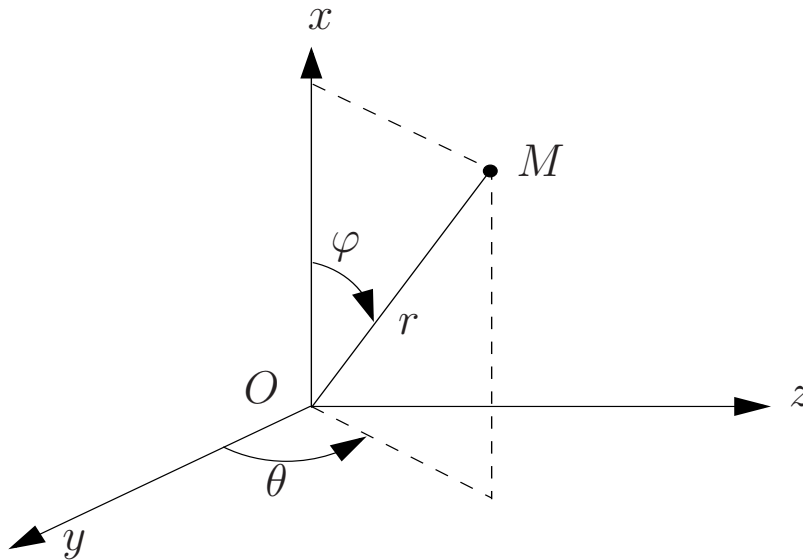
Équation de Navier–Stokes

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} \\
 = f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right), \tag{C.6a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \\ = f_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.6b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.6c})$$

3.3. Coordonées sphériques (r, φ, θ) avec $(v_r, v_\varphi, v_\theta)$



Tenseur de contraintes

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} & \sigma_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right. & \sigma_{\varphi\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \right. \\ & \quad \left. + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\varphi \operatorname{ctg} \varphi}{r} \right) & & \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \varphi}{r} \right) \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right) & \sigma_{\theta r} &= \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Équation de la conservation de la masse

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial (\sin \varphi v_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (\text{C.8})$$

Équation de Navier–Stokes

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi^2 + v_\theta^2}{r} = f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ + \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r v_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \varphi}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \text{ctg} \varphi}{r^2} v_\varphi \right\}, \quad (\text{C.9a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\varphi}{r} - \frac{v_\theta^2 \text{ctg} \varphi}{r} = f_\varphi - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ + \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r v_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \varphi}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right. \\ \left. - \frac{2 \text{ctg} \varphi}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \varphi} \right\}, \quad (\text{C.9b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\varphi v_\theta \text{ctg} \varphi}{r} = f_\theta - \frac{1}{\rho r \sin \varphi} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ + \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r v_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \varphi}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right. \\ \left. + \frac{2}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{2 \text{ctg} \varphi}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \varphi} \right\}. \quad (\text{C.9c}) \end{aligned}$$

ANNEXE D

Équation de la conservation d'énergie

Soit $\mathcal{D}(t)$ un volume matériel de fluide (homogène et isotrope) en mouvement délimité par une surface de contrôle $\partial\mathcal{D}(t)$; le volume $\mathcal{D}(t)$ se confond à l'instant t avec un volume de contrôle V fixe délimité par une surface de contrôle S . L'énergie totale E contenue dans $\mathcal{D}(t)$ à l'instant t est alors :

$$E_{\mathcal{D}(t)} = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \mathcal{E} dV = \int_V \rho \left(\underbrace{e}_{\substack{\text{énergie} \\ \text{interne massique}}} + \underbrace{\frac{1}{2}v^2}_{\substack{\text{énergie} \\ \text{cinétique}}} \right) dV \quad (\text{D.1})$$

Il vient, d'après le théorème de transport de Reynolds– voir annexe B– que le taux temporel de variation de E s'écrit sous la forme :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \mathcal{E} dV = \int_V \left[\frac{D(\rho \mathcal{E})}{Dt} + \rho \mathcal{E} \nabla \cdot \vec{v} \right] dV \quad (\text{D.2})$$

Selon le premier principe de la Thermodynamique, la variation temporelle de l'énergie E est donnée par :

$$\frac{dE}{dt} = \underbrace{\frac{dQ}{dt}}_{\substack{\text{chaleur reçue} \\ \text{par unité de temps}}} + \underbrace{\frac{dW}{dt}}_{\substack{\text{travail reçu} \\ \text{par unité de temps}}} \quad (\text{D.3a})$$

Pour la chaleur \dot{Q} reçue par unité de temps, on a d'après la loi de Fourier :

$$\dot{Q} = \int_S (-\lambda \nabla T) \cdot \vec{n} dS = - \int_V \nabla \cdot (\lambda \nabla T) dV \quad (\text{D.3b})$$

où λ est la conductivité thermique de fluide. En l'absence de tout travail mécanique, la puissance de travail effectué par le milieu extérieur au $\mathcal{D}(t)$ (à l'instant t) sur le fluide (contenu en $\mathcal{D}(t)$ à l'instant t), est constitué de la puissance de travail fait par les forces surfaciques :

$$\dot{W}_s = \int_S \vec{v} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) dS = \int_S \vec{n} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{v}) dS = \int_V \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) dV \quad (\text{D.3c})$$

et de celui de force volumique \vec{f} :

$$\dot{W}_v = \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV \quad (\text{D.3d})$$

où $\vec{\sigma}$ est le tenseur de contraintes.

Il vient alors qu'en combinant équations (D.2) et (D.3) l'on obtient :

$$\int_V \left(\frac{D(\rho \mathcal{E})}{Dt} + \rho \mathcal{E} \nabla \cdot \vec{v} \right) dV = \int_V \left(-\nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} \right) dV, \quad (\text{D.4})$$

valable quelque soit V . D'où on tire l'équation aux dérivée partielles suivante pour la conservation d'énergie :

$$\frac{D(\rho \mathcal{E})}{Dt} + \rho \mathcal{E} \nabla \cdot \vec{v} = -\nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} \quad (\text{D.5})$$

On peut simplifier encore cette équation en faisant usage de l'équation de Navier–Stokes exprimée sous la forme :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \vec{v} \times \vec{\omega} \right) = -\nabla p + \rho \vec{f} + \nabla \cdot \vec{\tau} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \vec{\sigma} \quad (\text{D.6})$$

et l'équation de continuité écrite sous la forme :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{D.7})$$

où $\vec{\tau} = p \vec{I} + \vec{\sigma}$ est le tenseur de contraintes visqueuses.

Ensuite, on projette l'équation (D.6) sur \vec{v} (sur une ligne de courant) :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -\vec{v} \cdot \nabla p + \rho \vec{v} \cdot \vec{f} + \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{\tau} \quad (\text{D.8a})$$

et multiplie (D.7) par \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} \frac{D\rho}{Dt} + \mathcal{E} \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (\text{D.8b})$$

afin d'en soustraire les résultats de (D.5) pour arriver à :

$$\underbrace{\rho \frac{De}{Dt}}_{\textcircled{1}} = - \underbrace{p \nabla \cdot \vec{v}}_{\textcircled{2}} - \underbrace{\nabla \cdot (\lambda \nabla T)}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\tau}) - \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{\tau}}_{\textcircled{4}} \quad (\text{D.9})$$

où

- ① : variation de l'énergie interne d'une particule en mouvement par unité de temps,
- ② : puissance de travail de pression,
- ③ : puissance thermique échangée par conduction,
- ④ : puissance de dissipation visqueuse.

Il est d'usage de poser

$$\begin{aligned}\Phi &= \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\tau}) - \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{\tau} = \vec{\sigma} : \nabla(\vec{v}) \\ &= \begin{pmatrix} p + \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & p + \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & p + \sigma_{zz} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

en coordonnées cartésiennes. On trouve :

$$\begin{aligned}\Phi &= (p + \sigma_{xx}) \frac{\partial u}{\partial x} + (p + \sigma_{yy}) \frac{\partial v}{\partial y} + (p + \sigma_{zz}) \frac{\partial w}{\partial z} \\ &\quad + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \sigma_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \sigma_{zx} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (\text{D.10})\end{aligned}$$

Il est utile de noter que :

$$\begin{aligned}\rho \frac{De}{Dt} + p \nabla \cdot \vec{v} &= \rho \frac{De}{Dt} - \frac{p D\rho}{\rho Dt} \\ &= \rho \left[\frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] \\ &= \rho \left[\frac{De}{Dt} + p \frac{D\vartheta}{Dt} \right] \quad (\text{D.11})\end{aligned}$$

où ϑ est le volume massique du fluide. Il vient alors que (D.9) se réécrit alors sous la forme :

$$\rho \left[\frac{De}{Dt} + p \frac{D\vartheta}{Dt} \right] = -\nabla(\lambda \nabla T) + \Phi \quad (\text{D.12})$$

où

$$\rho \left[\frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] = -\nabla(\lambda \nabla T) + \Phi \quad (\text{D.13})$$

qui traduit l'application du premier principe de la thermodynamique.