

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté de Génie Civil et d'Architecture
Département de Génie Civil

Polycopié de

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

RDM-II

Réalisé par

Pr. Zamila HARICHANE

Mars 2013

PRÉFACE

La définition de la résistance des matériaux, étant donnée dans la première partie désignée « *Polycopié de Résistance des Matériaux – I* ». Les objectifs de la RDM ainsi que la statique y sont fixés.

Dans la présent polycopié intitulé « *Polycopié de Résistance des Matériaux – II* », qui s'adresse également aux étudiants de deuxième année *LMD* en Génie Civil et les élèves ingénieurs des écoles préparatoires, l'accent est mis sur le dimensionnement des éléments d'une structure soumis aux sollicitations simples et composées de sorte à permettre à l'étudiant de dimensionner tous types d'éléments de structures isostatiques simples réalisés en bois, en acier ou en béton.

Il est rédigé de manière simplifiée et beaucoup d'exemples sont introduits après avoir donné des notions afin que l'étudiant puisse assimiler le contenu du cours et ait une vision claire de son application dans la vie courante. Des problèmes sont accompagnés de leurs solutions et à la fin de chaque chapitre des exercices sans solutions sont donnés pour que l'étudiant s'y entraîne.

Ce polycopié est divisé en cinq chapitres. Le contenu du premier chapitre concerne le calcul des caractéristiques géométriques d'une section plane. En effet, pour une sollicitation de traction ou compression simple, seule la donnée de l'aire de la section droite est nécessaire pour étudier ou vérifier la résistance d'une section d'une poutre par exemple. Tandis que pour tous les autres types de sollicitations, la forme et les dimensions de la section droite de la poutre jouent un rôle prépondérant sur le comportement aux différentes sollicitations de torsion ou de flexion.

Dans le deuxième chapitre, l'étudiant se familiarise avec les notions de sollicitation simple, de diagramme d'efforts intérieurs, de section dangereuse, de contrainte et enfin de dimensionnement. Il s'agit du dimensionnement des poutres droites isostatiques sollicitées en flexion simples.

Le troisième chapitre fait une entrée en sollicitations composées. On y aborde la flexion composée, droite et gauche. Une méthodologie progressive est tracée afin que l'étudiant s'entraîne aux calculs et dimensionnement des poutres à la résistance tout en sachant manipuler des équations un peu plus complexes.

Ayant pris connaissance du calcul des contraintes dans les cas de sollicitations simples et composées, l'état de contrainte, d'abord général puis en plan, est abordé au chapitre quatre. Ce chapitre permettra à l'étudiant de manipuler le cercle de *Mohr* dans la détermination des contraintes principales ainsi que l'état de contrainte sur un plan incliné. Il permettra également de déterminer la contrainte qui servira au dimensionnement en cas de sollicitation composée.

Le cinquième et dernier chapitre est consacré à un autre type de sollicitation pour l'étudiant. Il concerne le flambement des barres et poutres élancées. En effet, dans le cas du flambement, les déformations ne peuvent plus être supposées infiniment petites et négligées comme dans les chapitres précédents. De même, les forces extérieures ne sont plus proportionnelles aux déformations. Pour étudier le flambage, il faut tenir compte de la déformation de l'élément considéré et de ce fait abandonner une des hypothèses fondamentales de la RDM.

TABLE DES MATIÈRES

Page

Chapitre 1

Caractéristiques Géométriques des Sections Planes

1.1. Introduction	2
1.2. Aire d'une section	2
1.3. Moment statique	4
1.4. Centre de gravité	5
1.5. Moment d'inertie	8
1.5.1. Définition	8
1.5.2. Moment d'inertie polaire	10
1.6. Variations des moments d'inertie	11
1.6.1. Translation des axes	11
1.6.2. Rotation des axes	13
1.7. Module de résistance	17
1.8. Rayon de giration	17
1.9. Conclusion	18
Exercices	19

Chapitre 2

Dimensionnement des Poutres Droites Isostatiques Sollicitées en Flexion Simple

2.1. Système isostatique, système hyperstatique, mécanisme	23
2.2. Définition	23
2.3. Efforts tranchants, moments fléchissants	25
2.4. Diagrammes des Efforts tranchants et des moments fléchissants	26
2.5. Relation entre moment fléchissant et effort tranchant	28

2.6. Relation entre effort tranchant et chargement réparti	29
2.7. Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (flèche)	31
2.8. Calcul des contraintes	32
2.8.1. Cas de la flexion pure	32
2.8.2. Cas de la flexion simple	37
Exercices	47

Chapitre 3

Dimensionnement des Poutres Droites Isostatiques Sollicitées en Flexion Composée

3.1. Introduction	50
3.2. Flexion droite composée	50
3.2.1. Définition	50
3.2.2. Calcul des contraintes	50
3.2.3. Position de l'axe neutre et noyau central	51
3.3. Cas particulier: Traction (ou compression) droite excentrée	52
3.4. Flexion composée oblique	52
3.4.1. Calcul des contraintes	53
3.4.2. Position de l'axe neutre	54
3.5. Cas particulier: Traction (ou compression) gauche excentrée	54
3.5.1. Calcul des contraintes	55
3.5.2. Position de l'axe neutre	55
3.6. Calcul à la résistance	57
Exercices	67

Chapitre 4
Etats de Contraintes

4.1. Etat de contrainte en un point	71
4.2. Etat de contrainte plan	73
4.2.1. Définition	73
4.2.2. Convention de signe	73
4.2.3. Contraintes sur un plan incliné	76
4.3. Cercle de Mohr	77
4.4. Contraintes principales	81
Exercices	88

Chapitre 5
Flambement des Poutres Droites

5.1. Introduction	91
5.2. Définition	91
5.3. Charge critique d' <i>Euler</i>	91
5.4. Influence des liaisons aux appuis	95
5.5. Contrainte critique d' <i>Euler</i>	97
5.6. Critères de dimensionnement	99
Exercices	103
Références Bibliographiques	107
Annexe 1.1	110
Annexe 1.2	114

LISTE DES FIGURES

Fig. 1.1- Section plane.	4
Fig. 1.2- Translation des axes.	4
Fig. 1.3- Aire rectangulaire.	5
Fig. 1.4- Aire triangulaire.	5
Fig. 1.5 Moment quadratique d'une section.	8
Fig. 1.6 Moment d'inertie d'une section et translation des axes.	12
Fig. 1.7- Schématisation du théorème de Huygens.	12
Fig. 1.8- Moment d'inertie d'une section et rotation des axes.	14
Fig. 1.9- Cercle de <i>Mohr</i> .	16
Fig. 2.1- Exemples de Poutres: (a) isostatiques, (b) hyperstatiques, (c) mécanismes.	23
Fig. 2.2- Courbure d'une poutre.	24
Fig. 2.3- poutre en flexion simple.	24
Fig. 2.4- Exemple illustratif d'une poutre sollicitée en flexion simple.	25
Fig. 2.5- Conventions de signe.	26
Fig.2.6- Élément de poutre isolé non chargé.	28
Fig.2.7- Élément de poutre isolé chargé par une force uniformément répartie.	29
Fig.2.8- Élément de poutre isolé chargé par une force concentrée.	31
Fig.2.9- Poutre déformée.	31
Fig.2.10- Exemples de sections usuelles.	32
Fig. 2.11- Illustration de la flexion pure: (a) poutre en flexion pure, (b) tronçon de poutre en flexion pure.	33
Fig.2.12- Contrainte dans une fibre déformée.	33
Fig.2.13- Déformations dans une poutre fléchie.	35
Fig.2.14- Distribution des contraintes dans une section d'une poutre en flexion pure.	35
Fig.2.15- Tronçon de poutre non chargé longitudinal (a), transversal (b).	37
Fig.2.16- Exemples de distribution des contraintes tangentielles dans une section de poutre en flexion simple.	38
Fig.2.17- Distribution des contraintes dans une section de poutre en flexion simple.	40
	49

Fig. 3.1- Flexion droite composée.	
Fig. 3.2- Distribution des contraintes normales dans le cas de la flexion droite composée.	50
Fig. 3.3- Axe Neutre.	50
Fig. 3.4- Traction (ou compression) droite excentrée.	51
Fig. 3.5- Flexion composée oblique.	52
Fig. 3.6- Distribution des contraintes tangentielle.	53
Fig. 3.7- Traction (ou compression) gauche excentrée.	54
Fig. 3.8- Traction gauche excentrée.	55
Fig. 3.9- Schématisation de l'axe neutre dans le cas d'une traction gauche excentrée.	56
Fig. 3.10- Schématisation de l'axe neutre dans le cas général de la flexion composée.	57
Fig. 3.11- Coordonnées des points les plus éloignés de l'axe neutre dans le cas général de la flexion composée.	58
	70
Fig. 4.1- Etat de contrainte sur une facette.	
Fig. 4.2- Etat de contrainte sur une facette.	71
Fig. 4.3- Représentation de l'état de contrainte en un point.	71
Fig. 4.4- Etat de contrainte plan.	72
Fig. 4.5- Etat de contrainte sur un plan incliné.	76
Fig. 4.6- Cercle de <i>Mohr</i> .	77
	91
Fig. 5.1- Schématisation du flambage.	
Fig. 5.2- Poutre droite bi-articulée en compression.	91
Fig. 5.3- Allures des déformées associées aux deux premières charges critiques.	94
Fig. 5.4- Influence de la forme de la section.	95

LISTE DES TABLEAUX

	38
Tableau 2.1- Exemples de valeurs du coefficient de forme K .	
Tableau 5.1- Influence des liaisons aux appuis.	96

LISTE DES SYMBOLES

S_x, S_y	Les moments statiques d'une section
X_G, Y_G	Coordonnées du centre de gravité
G	Centre de gravité
I_x, I_y	Moments d'inertie axiaux
I_{xy}	Moment d'inertie centrifuge
I_p	Moment d'inertie polaire
I_{max}	Moments d'inertie axial maximal
I_{min}	Moments d'inertie axial minimal
W_{max}	Module de résistance maximal
W_{min}	Module de résistance minimal
i_x, i_y	Rayons de giration
M_y, M_z	Moments de flexion dans une section
T_y, T_z	Efforts tranchants dans une section
N_x	Effort normal dans une section
σ_x	Contrainte normale selon la direction x
τ_{xy}, τ_{xz}	Contraintes tangentielles sur la facette de normale x
K	Coefficient de forme d'une section
σ_{Eq}	Contrainte normale équivalente
$[\sigma]$	Contrainte normale admissible
$[\tau]$	Contrainte tangentielle admissible
f	Flèche d'une poutre
φ	Déformation angulaire d'une poutre
y_n, z_n	Coordonnées de l'axe neutre
σ_{max}	Contrainte normale maximale
σ_{min}	Contrainte normale minimale
τ_{max}	Contrainte tangentielle maximale
τ_{min}	Contrainte tangentielle minimale
σ'	Contrainte normale sur les plans secondaires
θ_p	Direction d'un plan principal
θ_s	Direction d'un plan secondaire
$v(x)$	Déformée dans un élément de structure due au flambement
E	Module de Young
P_c	Charge critique d'Euler

l_f	Longueur de flambement
σ_c	Contrainte critique d'Euler
σ_e	Limite d'élasticité
λ	L'élanement d'une barre
λ_c	L'élanement critique d'une barre
s	Coefficient de sécurité

CHAPITRE 1

CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES DES SECTIONS PLANES

1.1. Introduction

Pour une sollicitation de traction ou compression simple, seule la donnée de l'aire de la section droite est nécessaire pour étudier ou vérifier la résistance d'une section d'une poutre par exemple. Pour toutes les autres sollicitations, la forme et les dimensions de la section droite de la poutre jouent un rôle prépondérant sur le comportement aux différentes sollicitations de torsion ou de flexion. Nous allons nous intéresser dans le présent chapitre aux caractéristiques suivantes :

- Aire d'une section
- Moment statique par rapport à une droite (ou un axe)
- Centre de gravité
- Moment quadratique d'une section par rapport à une droite (ou un axe)
- Moment de résistance

1.2. Aire d'une section

Par définition l'aire A d'une section est définie par l'intégrale:

$$A = \int_A dA \quad (1.1)$$

• Exemple 1.1

Calculer l'aire d'un triangle.

• Solution 1.1

Soit la surface triangulaire plane montrée par la figure ci-dessous.

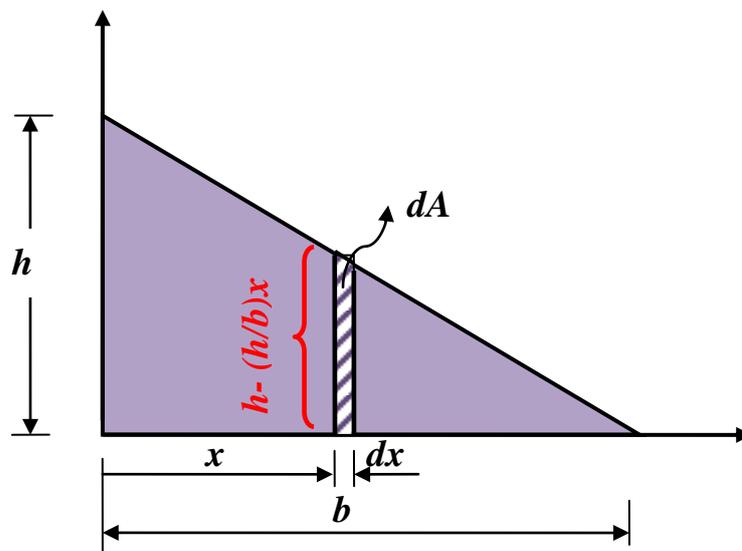


Fig. E1.1

Considérons une surface élémentaire telle que:

$$dA = h \left(1 - \frac{x}{b} \right) dx$$

$$A = \int_A dA = \int_0^b h \left(1 - \frac{x}{b} \right) dx = \frac{bh}{2}$$

- **Remarque**

Si la section est composée, nous la décomposons en sections usuelles et l'aire est calculée comme:

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

- **Exemple 1.2**

Calculer l'aire de la section droite de la poutre montrée par la figure ci-dessous. On donne $b_1 = 300 \text{ mm}$, $b_2 = 150 \text{ mm}$, $t_w = 10 \text{ mm}$, $t_{f1} = 20 \text{ mm}$, $t_{f2} = 15 \text{ mm}$, $h_w = 1000 \text{ mm}$.

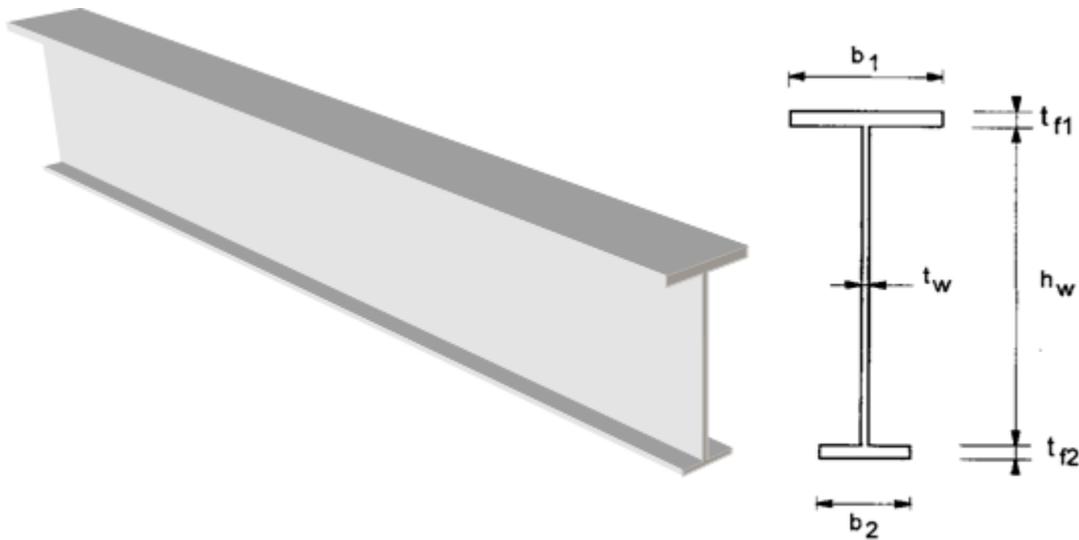


Fig. E1.2

- **Solution 1.2**

$$A = b_1 \times t_{f1} + b_2 \times t_{f2} + t_w \times h_w$$

$$A = 300 \times 20 + 150 \times 15 + 10 \times 1000 = 18250 \text{ mm}^2$$

1.3. Moment statique

Le moment statique S d'une section par rapport à un axe ox ou oy (Fig. 1.1) est donné par l'une des expressions suivantes:

$$S_X = \int_A y dA \quad (1.2)$$

$$S_Y = \int_A x dA \quad (1.3)$$

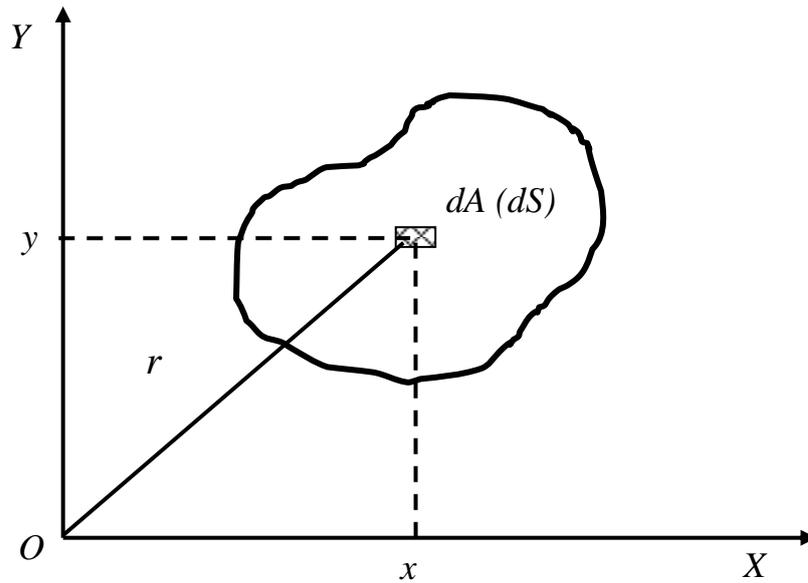


Fig. 1.1- Section plane.

Si on procède à des translations parallèlement aux axes ox et oy , les moments statiques changent. Soit la section montrée par la figure (1.2) telle que S_X, S_Y, A sont connus et on se propose de déterminer $S_{X'}$ et $S_{Y'}$.

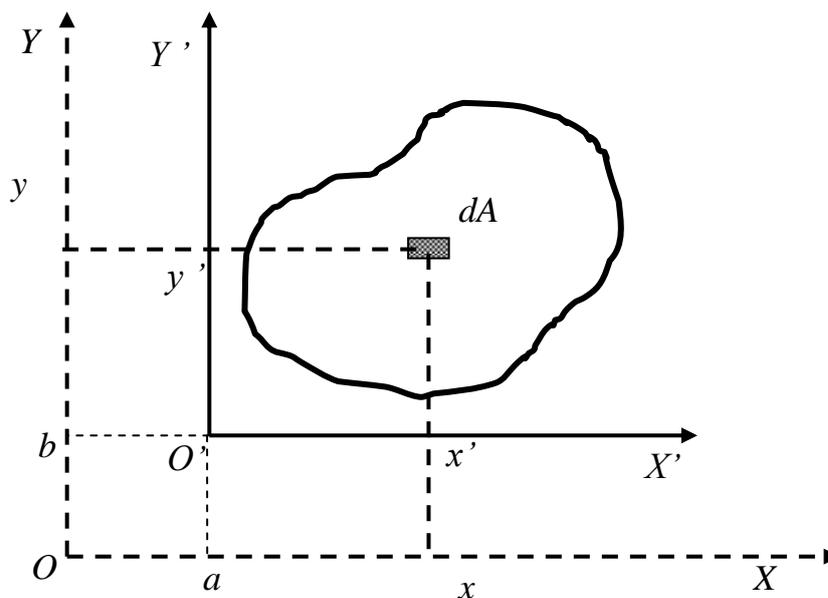


Fig. 1.2- Translation des axes.

De la figure (1.2), on a:

$$x' = x - a \quad ; \quad y' = y - b$$

Par définition, on a:

$$S_{X'} = \int_A y' dA = \int_A (y - b) dA$$

$$S_{Y'} = \int_A x' dA = \int_A (x - a) dA$$

d'où:

$$S_{X'} = S_X - b.A \tag{1.4}$$

$$S_{Y'} = S_Y - a.A \tag{1.5}$$

1.4. Centre de gravité

On peut choisir a et b de sorte que $S_{X'}$ et $S_{Y'}$ soient nuls, c-à-d :

$$a = S_Y/A \quad ; \quad b = S_X/A$$

- l'axe pour lequel le moment statique est nul s'appelle axe **central**
- le point d'intersection de deux axes centraux s'appelle **centre de gravité** d'une section.

Ainsi, les coordonnées du centre de gravité d'une section s'écrivent :

$$x_G = S_Y/A \quad ; \quad y_G = S_X/A \tag{1.6}$$

• Définition

Le centre de gravité G d'une section est le point tel que le moment statique de la section par rapport à n'importe quel axe passant par ce point est nul.

On peut dire que le moment statique d'une section est égal au produit de l'aire de la section par la distance entre son centre de gravité G et l'axe.

Les figures (1.3) et (1.4) montrent des exemples de positions de centres de gravité.

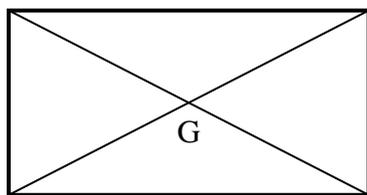


Fig. 1.3- Aire rectangulaire.

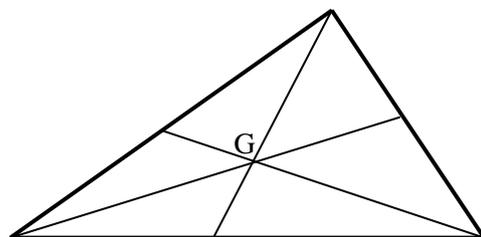


Fig. 1.4- Aire triangulaire.

- **Remarque**

Pour une section composée, les coordonnées du centre de gravité sont données par les expressions:

$$S_x = \sum y_{Gi} \cdot A_i ; i = 1, n \quad (1.7)$$

$$S_y = \sum x_{Gi} \cdot A_i ; i = 1, n \quad (1.8)$$

- **Exemple 1.3**

Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la section triangulaire ci-dessous.

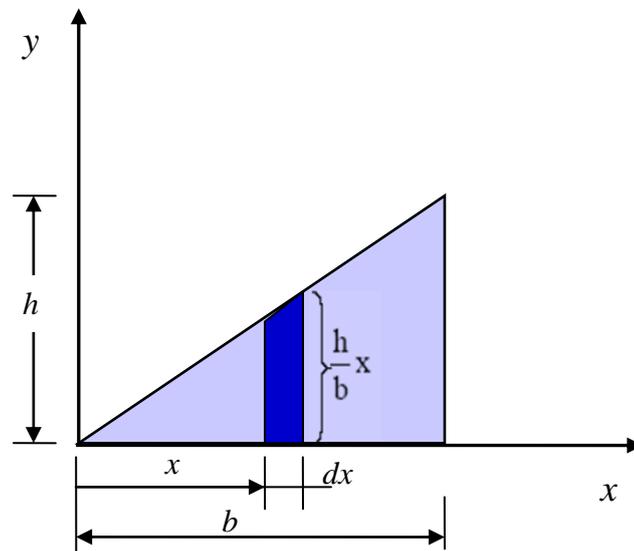


Fig. E1.3

- **Solution 1.3**

$$X_G = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b x \left(\frac{h}{b} x dx \right)}{\int_0^b \frac{h}{b} x dx}$$

D'où

$$X_G = \frac{2}{3} b$$

$$Y_G = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b \frac{1}{2} \left(\frac{h}{b} x \right) \left(\frac{h}{b} x dx \right)}{\int_0^b \frac{h}{b} x dx}$$

D'où

$$Y_G = \frac{1}{3}h$$

• **Propriétés**

Si la section possède un axe de symétrie, le centre de gravité G est situé sur cet axe. A défaut d'axes de symétrie on procède à:

- Choisir un référentiel (O,x,y)
- Calculer le moment statique S de la section par rapport aux axes du référentiel
- Calculer l'aire totale de la section
- Utiliser la propriété du moment statique $S_Y = X_G \cdot A$, $S_X = Y_G \cdot A$

• **Exemple 1.4**

Calculer les coordonnées du centre de gravité de la section plane suivante.

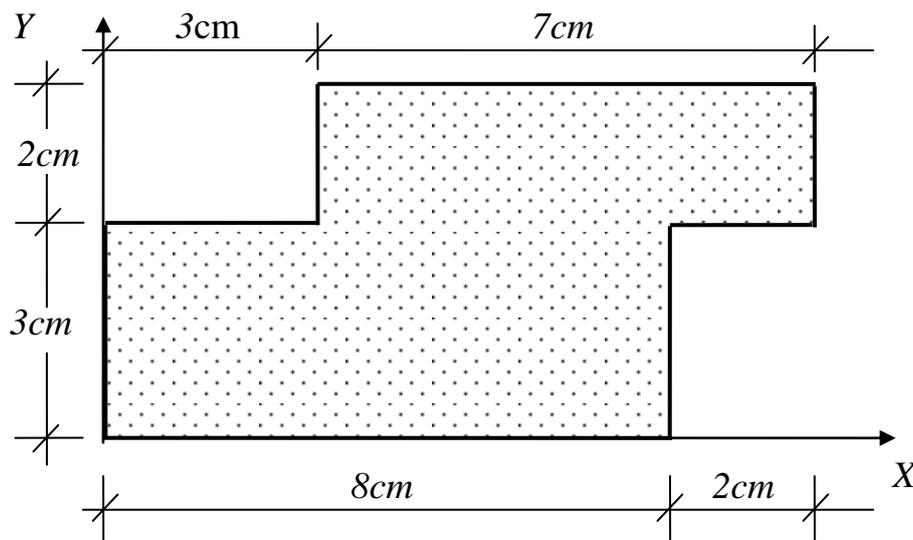


Fig. E1.4

• **Solution 1.4**

$$S_X = 2,5(5 \times 10) - 4(2 \times 3) - 1,5(3 \times 2) = 125 - 24 - 9 = 92 \text{ cm}^3$$

$$S_Y = 5(5 \times 10) - 1,5(2 \times 3) - 9(3 \times 2) = 250 - 9 - 54 = 187 \text{ cm}^3$$

$$X_G = S_Y / A = 187 / 38 = 4,9 \text{ cm}$$

$$Y_G = S_X / A = 92 / 38 = 2,4 \text{ cm}$$

1.5. Moment d'inertie

1.5.1. Définition

On définit le moment d'inertie ou moment quadratique d'une section comme le **degré de résistance** de cette section aux efforts extérieurs appliqués, en tenant compte de la forme de cette section.

Par définition, les intégrales:

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (1.9)$$

$$I_y = \int_A x^2 dA \quad (1.10)$$

S'appellent moments d'inertie de la section A par rapport aux axes ox et oy , respectivement, conformément à la figure 1.1. Ces expressions sont déduites de la définition suivante.

Le moment d'inertie d'une surface infiniment petite par rapport à un axe éloigné de cette surface est égal au produit de son aire par le carré de la distance à l'axe. Il est toujours positif et s'exprime en m^4 (cm^4 , mm^4).

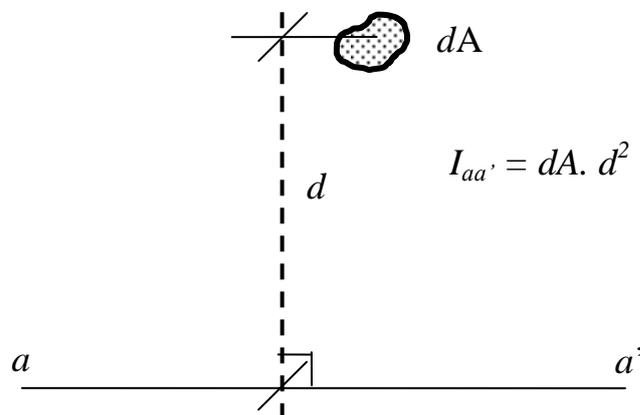


Fig. 1.5 Moment quadratique d'une section.

L'intégrale:

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (1.11)$$

S'appelle moment centrifuge ou produit d'inertie de la section A par rapport au système xoy .

- **Remarque**

Les moments quadratiques I_x et I_y sont toujours positifs, tandis que le moment produit I_{xy} peut être positif, négatif ou nul.

- **Exemple 1.5**

Calculer les moments quadratiques par rapport aux axes $o'x'$ et $o'y'$ et le moment produit pour le rectangle montré par la figure suivante.

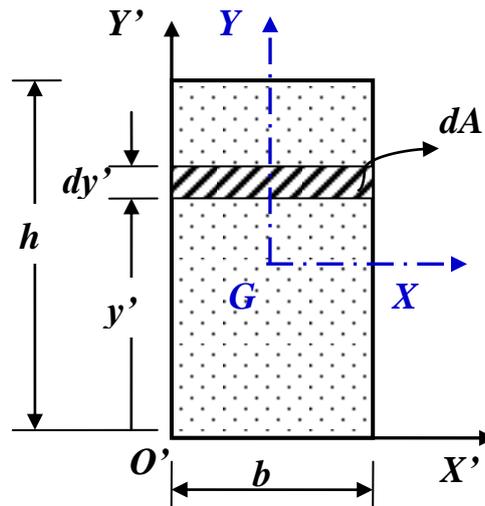


Fig. E1.5

- **Solution 1.5**

$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA$$

$$I_{x'} = \int_0^h y'^2 \cdot b \cdot dy' = \frac{bh^3}{3}$$

De la même manière

$$I_{y'} = \int_A x'^2 dA = \frac{b^3h}{3}$$

et

$$I_{x'y'} = \int_A x' \cdot y'^2 dA$$

$$I_{x'y'} = \int_0^h \int_0^b x' \cdot y' \cdot dx' \cdot dy' = \frac{b^2h^2}{4}$$

1.5.2. Moment d'inertie polaire

Le moment d'inertie polaire de la section montrée par la figure 1.1 est donné par la relation:

$$I_p = \int_A r^2 dA \quad (1.12)$$

Avec

$$r^2 = x^2 + y^2$$

d'où

$$I_p = I_x + I_y \quad (1.13)$$

Le moment d'inertie polaire est toujours positif et n'est jamais nul.

• Théorème

Le moment d'inertie polaire d'une section par rapport à tout point de cette section est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes perpendiculaires passant par ce point.

• Exemple 1.6

Pour le quart de cercle montré par la figure (E1.6-a), calculer le moment quadratique polaire I_O .

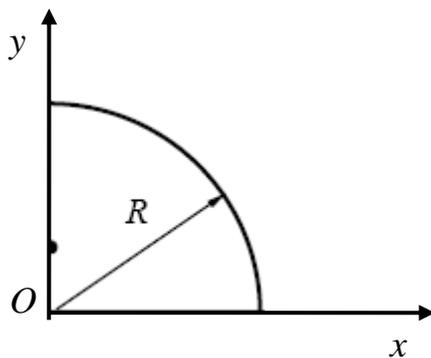


Fig. E1.6-a

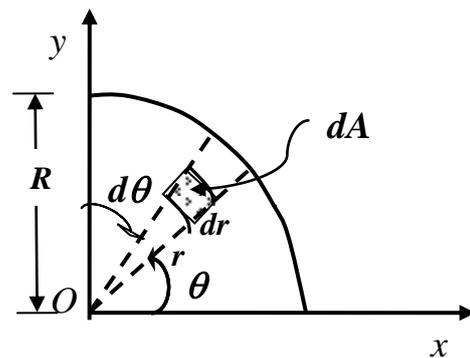


Fig. E1.6-b

• Solution 1.6

De la définition du moment d'inertie polaire et la figure (E1.6-b) on écrit:

$$I_O = \int_A r^2 dA = \int_A r^2 (r dr d\theta)$$

$$I_o = \left(\int_0^R r^3 dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) = \frac{\pi R^4}{8}$$

ou en terme du diamètre

$$I_o = \frac{\pi D^4}{128}$$

1.6. Variations des moments d'inertie

1.6.1. Translation des axes

Soit une section A , ses moments d'inertie dans le système xoy : I_x, I_y, I_{xy} sont connus. On se propose de calculer les moments d'inertie de la section A dans le système $x'o'y'$ en procédant aux translations des axes ox et oy conformément à la figure 1.6.

$$x' = x + a \quad ; \quad y' = y + b$$

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int_A y'^2 dA = \int_A (y + b)^2 dA \\ &= \int_A y^2 dA + 2b \int_A y dA + b^2 \int_A dA \end{aligned}$$

D'où

$$I_{x'} = I_x + 2bS_x + b^2 A \quad (1.14)$$

On suit le même raisonnement pour $I_{y'}$ et $I_{x'y'}$

Si le point O coïncide avec le centre de gravité G , les moments statiques S_x et S_y deviennent nuls et on a:

$$I_{x'} = I_x + b^2 A \quad (1.15)$$

$$I_{y'} = I_y + a^2 A \quad (1.16)$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + abA \quad (1.17)$$

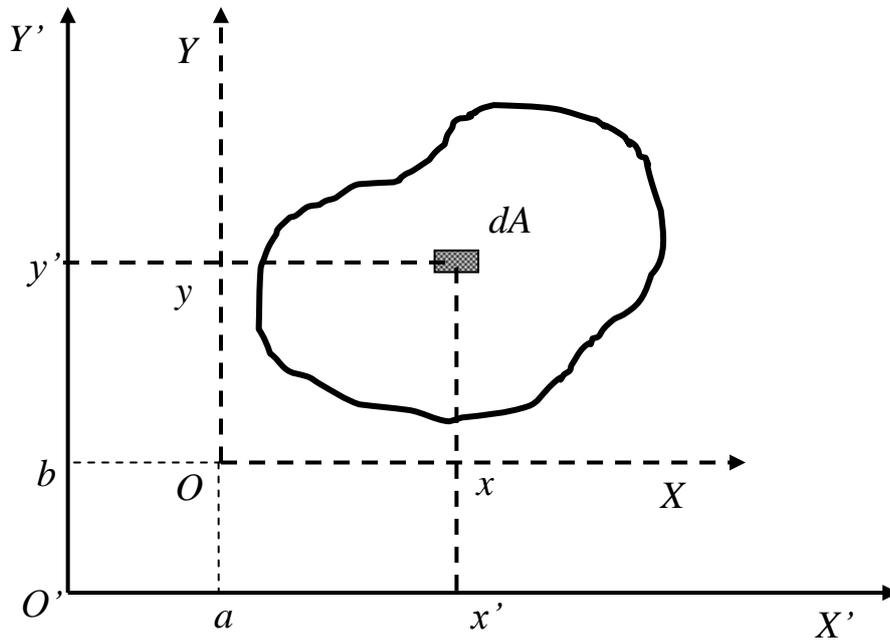


Fig. 1.6 Moment d'inertie d'une section et translation des axes.

• **Théorème de Huygens**

Le moment d'inertie d'une section par rapport à un axe quelconque Δ est égal au moment d'inertie de la section par rapport à l'axe passant par son centre de gravité et parallèle à Δ augmenté du produit de l'aire de la section par le carré de la distance entre les deux axes.

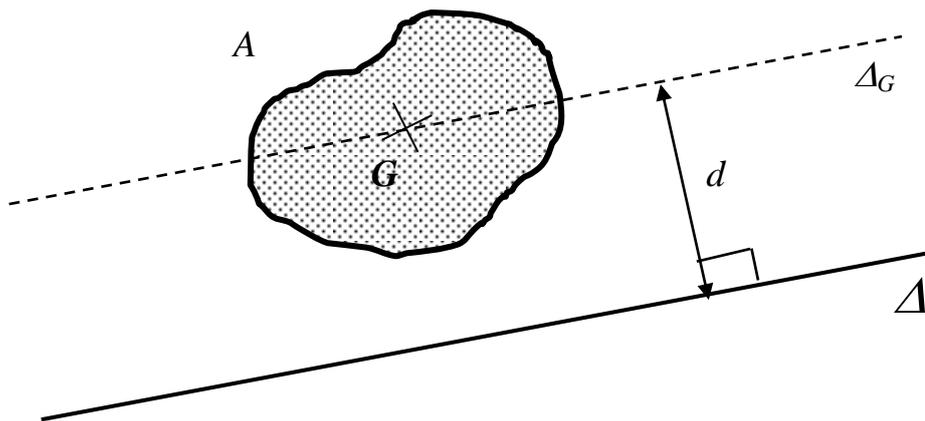


Fig. 1.7- Schématisation du théorème de Huygens.

$$I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + d^2 A \tag{1.18}$$

• **Exemple 1.7**

Déterminer les moments d'inertie par rapport au système xOy pour le rectangle montré par la figure ci-dessous.

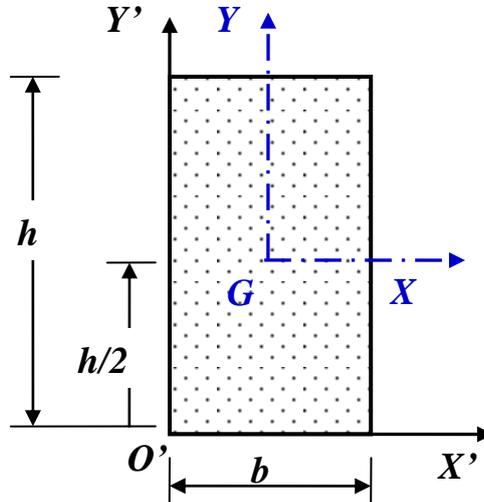


Fig. E1.7

• **Solution 1.7**

De la relation de Huygens on écrit:

$$I_x = I_{x'} - d^2 A$$

$$= \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12}$$

et

$$I_y = I_{y'} - d^2 A$$

$$= \frac{b^3 h}{3} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{b^3 h}{12}$$

De même

$$I_{xy} = I_{x'y'} - abA$$

$$= \frac{b^2 h^2}{4} - \frac{b}{2} \frac{h}{2} bh = 0$$

Car les axes x et y sont centraux.

1.6.2. Rotation des axes

Soit une section A , ses moments d'inertie dans le système xoy I_x , I_y , I_{xy} sont connus. On se propose de calculer les moments d'inertie de la section A dans le système uov qui fait un angle θ avec le système xoy (Fig. 1.8).

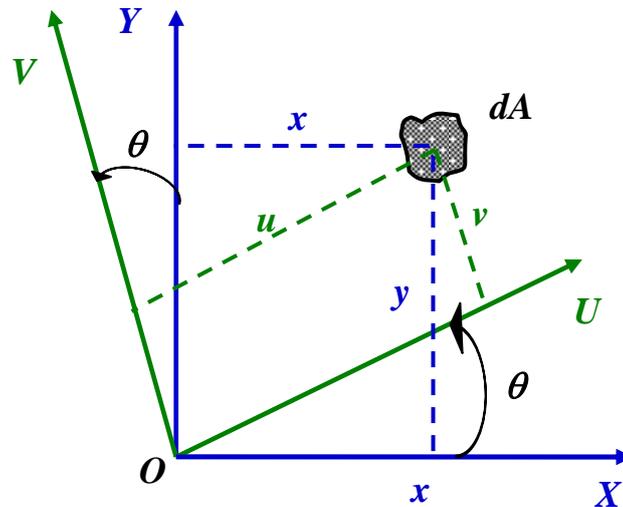


Fig. 1.8- Moment d'inertie d'une section et rotation des axes.

D'après la figure (1.8)

$$u = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$v = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

En utilisant la définition du moment d'inertite, on écrit:

$$\begin{aligned} I_u &= \int_A v^2 dA \\ &= \cos^2 \theta \int_A y^2 dA + \sin^2 \theta \int_A x^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int_A xy dA \\ &= \cos^2 \theta I_x + \sin^2 \theta I_y - 2 \sin \theta \cos \theta I_{xy} \end{aligned}$$

En utilisant les relations trigonométriques:

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}; \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

l'expression ci-dessus devient:

$$I_u = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} I_x + \frac{1 - \cos 2\theta}{2} I_y - \frac{1}{2} \sin 2\theta I_{xy}$$

Ou bien,

$$I_u = \frac{I}{2}(I_x + I_y) + \frac{I}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (1.19)$$

En suivant le même raisonnement on obtient:

$$I_v = \frac{I}{2}(I_x + I_y) - \frac{I}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (1.20)$$

$$I_{uv} = \frac{I}{2}(I_x - I_y)\sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (1.21)$$

On remarque que

$$I_x + I_y = I_u + I_v \quad (1.22)$$

Cela signifie que la somme des moments quadratiques par rapport à deux axes perpendiculaires reste constante quelque soit la valeur de l'angle de rotation θ .

On remarque aussi que I_u et I_v oscillent autour de la valeur moyenne $\frac{I_x + I_y}{2}$.

En dérivant I_u et I_v par rapport à 2θ on obtient:

$$-\frac{dI_u}{d(2\theta)} = +\frac{dI_v}{d(2\theta)}$$

Les extrema sont donnés pour:

$$\frac{d}{d(2\theta)} = 0$$

D'où

$$\operatorname{tg} 2\theta = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (1.23)$$

Cette relation est satisfaite pour deux valeurs de θ entre 0 et π qui correspondent à un maximum I_1 (I_{max}) et un minimum I_2 (I_{min}) qui sont les moments principaux d'inertie.

Les axes correspondant aux moments d'inertie principaux sont appelés axes principaux.

Pour déterminer (I_{max}) et (I_{min}), on peut utiliser le cercle de **Mohr**. Pour tracer le cercle de **Mohr**, on suit les étapes suivantes:

- 1- tracer un repère orthogonal et orthonormé (O, I_Q, I_{QR}) (Fig. 1.9)
- 2- placer les points $A(I_x, I_{xy})$ et $B(I_y, -I_{xy})$ dans ce repère
- 3- déduire le point C , point d'intersection de la droite AB et l'axe des abscisses
- 4- déduire du cercle de **Mohr** I_{max} (I_1) et I_{min} (I_2):

on a

$$I_{max} = I_1 = \overline{OC} + R$$

$$I_{min} = I_2 = \overline{OC} - R$$

D'où

$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} \quad (1.24)$$

$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} \quad (1.25)$$

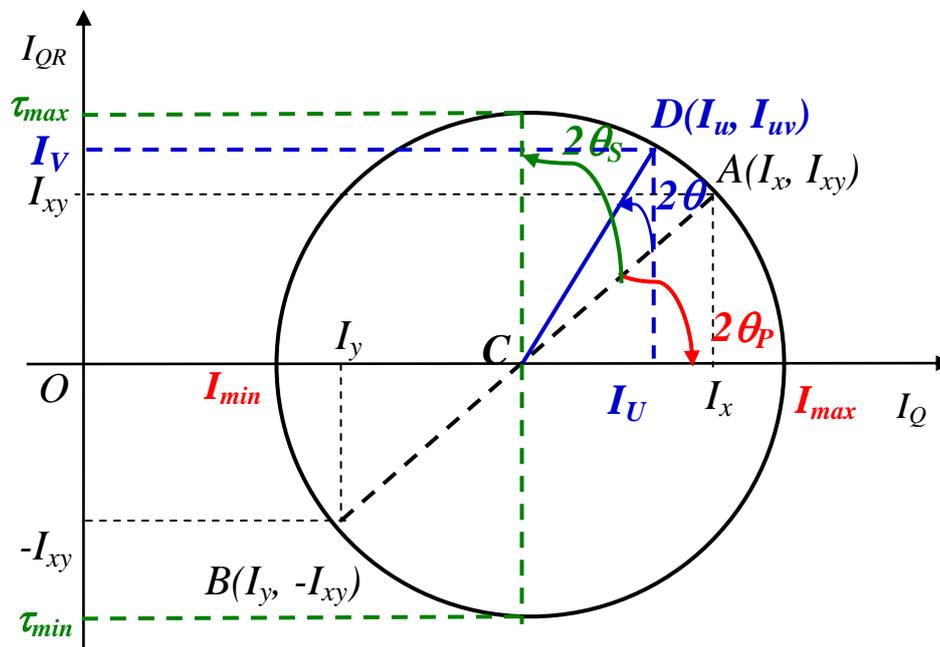


Fig. 1.9- Cercle de Mohr.

1.7. Module de résistance

Le moment de résistance d'une section droite est le rapport entre le moment d'inertie axial et la distance la plus éloignée de cet axe.

$$W_x^{\min} = \frac{I_x}{y^{\max}}; \quad W_y^{\min} = \frac{I_y}{x^{\max}} \quad (1.25)$$

• Exemple 1.8

Soit pour la figure suivante déterminer le moment de résistance minimal.

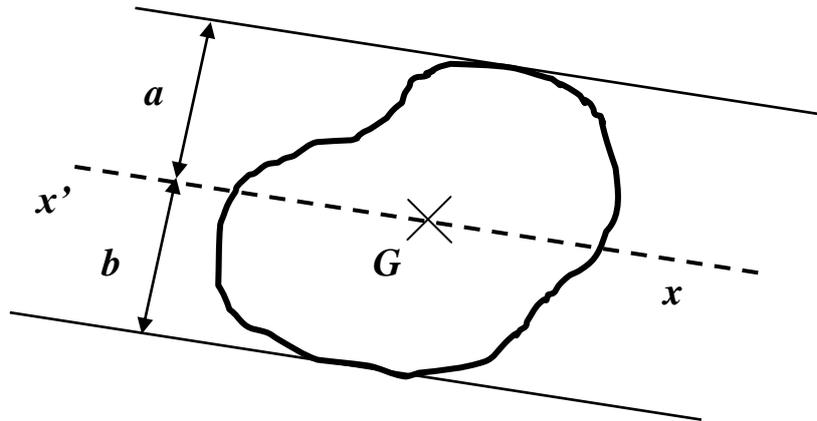


Fig. E1.8

• Solution 1.8

Deux cas se présentent :

- Si $a < b \Rightarrow W_x^{\min} = I_x / b$
- Si $a > b \Rightarrow W_x^{\min} = I_x / a$

1.8. Rayon de giration

Le rayon de *giration* d'une surface A selon l'axe x ou l'axe y est défini par:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad \text{ou} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (1.26)$$

• Exemple 1.9

Calculer les rayons de giration d'un rectangle.

- **Solution 1.9**

Soit la surface rectangulaire montrée par la figure suivante:

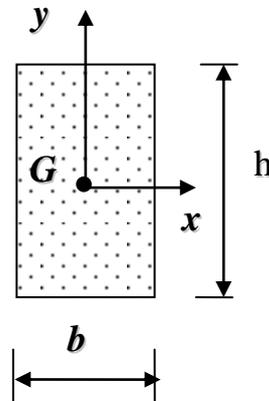


Fig. E1.9

Les rayons de giration sont:

$$i_x = \sqrt{\frac{(bh^3/12)}{bh}} \approx 0,3h \quad ; \quad i_y = \sqrt{\frac{(b^3h/12)}{bh}} \approx 0,3b$$

1.8. Conclusion

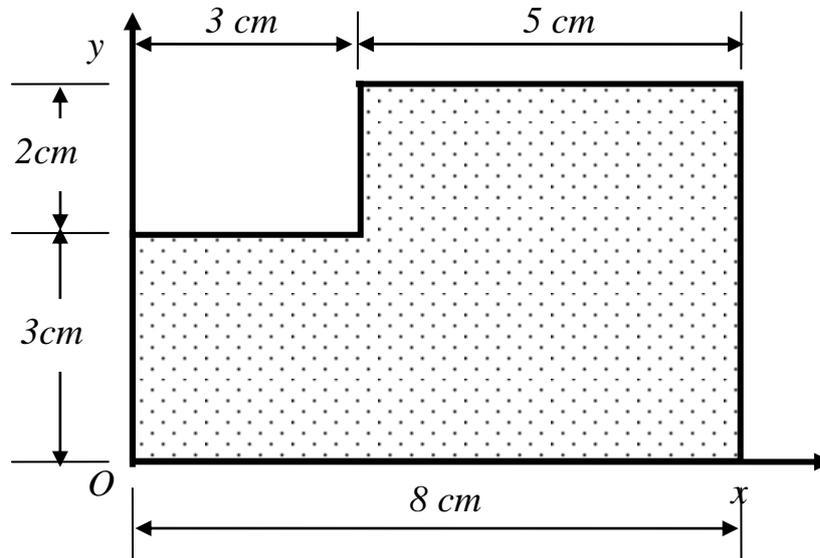
Dans ce chapitre, les caractéristiques géométriques des sections planes à manipuler dans le dimensionnement des éléments d'une structure sont présentées avec des exemples illustratifs.

Ce chapitre est accompagné de deux annexes. Dans la première annexe, les caractéristiques (aire, coordonnées du centre de gravité et moments quadratiques centraux) pour des sections usuelles sont données. Dans la deuxième annexe, on a présenté sous forme d'un tableau les étapes à suivre pour déterminer les moments d'inertie centraux pour des sections composées en procédant par décomposition en sections usuelles.

Exercices

Exercice N°1

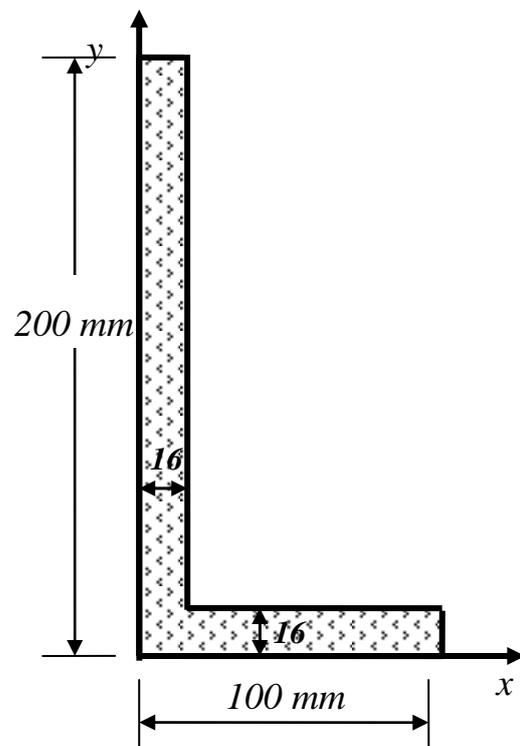
Déterminer l'aire et le centre de gravité de la section plane ci-dessous.



Exercice N°2

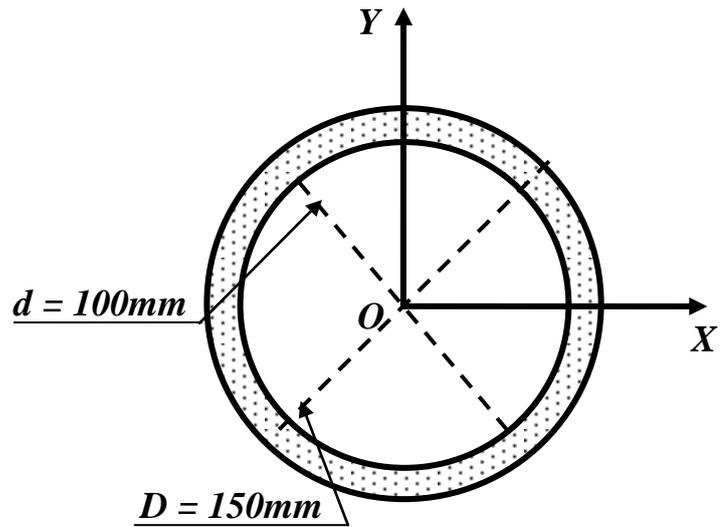
Déterminer les moments statique S_X et S_Y de la section représentée sur la figure ci-contre.

En déduire les coordonnées X_G et Y_G du centre de gravité de section.



Exercice N°3

Calculer, analytiquement, le moment quadratique polaire I_O de la section S représentée sur la figure ci-contre.

**Exercice N°4**

1- Exprimer le moment d'inertie quadratique (I_Y) de la section triangulaire montrée par la figure (a).

2- Montrer que le moment d'inertie quadratique (I_Y) de la section triangulaire montrée par

la figure (b) est: $I_y = \frac{b^3 h}{48}$

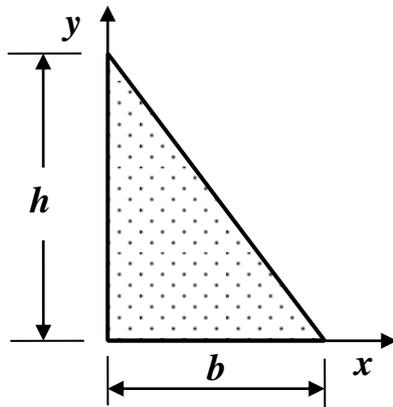


Figure (a)

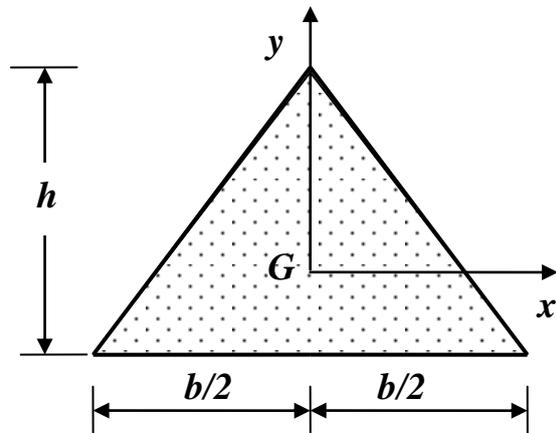
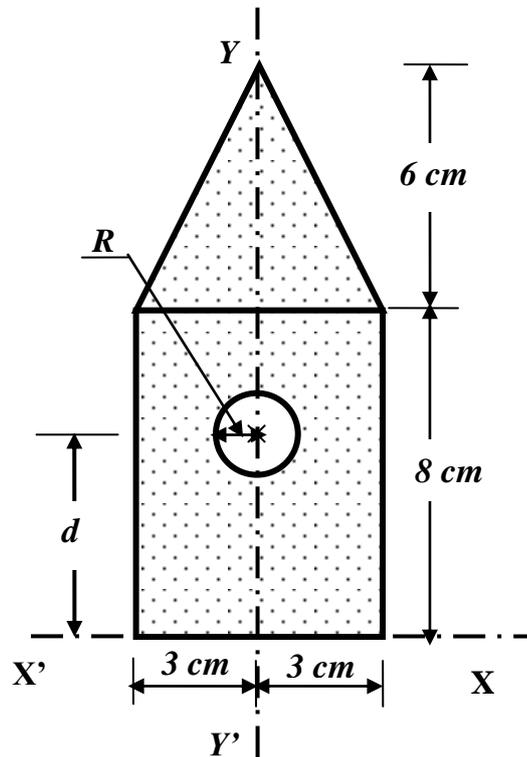


Figure (b)

Exercice N°5

Pour la section plane montrée par la figure ci-dessous, sachant que $I_{X'X} = 2690,44 \text{ cm}^4$ et $I_{Y'Y} = 158,44 \text{ cm}^4$, déterminer:

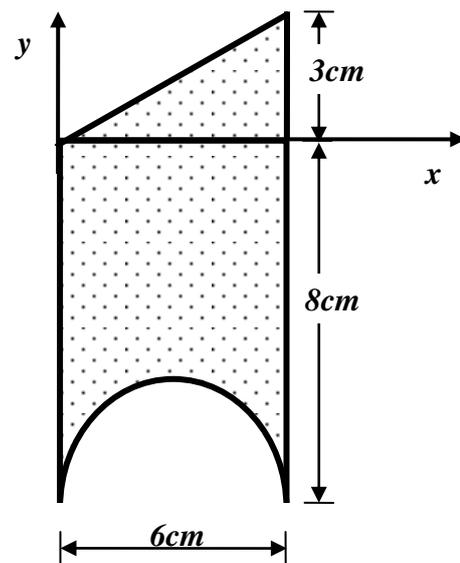
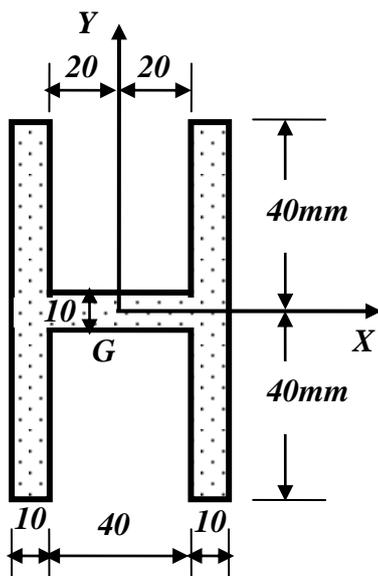
- le rayon " R " du creux circulaire,
- la position " d " du centre de gravité du creux circulaire par rapport à l'axe $X'X$.



Exercice N°6

Pour chacune des sections planes ci-dessous:

- 1- Calculer les moments d'inertie de la section par rapport aux axes passant par le centre de gravité G de la section.
- 2- Tracer le cercle de Mohr et déduire les moments d'inertie centraux principaux pour cette section.
- 3- Dessiner les axes centraux principaux dans un plan physique.
- 4- Déduire du cercle de Mohr le moment quadratique par rapport à un axe faisant un angle de 45° avec l'axe GX .



CHAPITRE 2

DIMENSIONNEMENT DES POUTRES DROITES ISOSTATIQUES SOLLICITÉES EN FLEXION SIMPLE

2.1. Système isostatique, système hyperstatique, mécanisme

Soit k le nombre d'équations d'équilibre (6 dans l'espace, 3 dans le plan). Soit r le nombre d'inconnues (résultantes de liaison et moments de liaison).

Si $r = k$: Les actions de liaison sont déterminées par les équations de la statique. La structure est dite *isostatique* (Fig. 2.1-a).

Si $r > k$: Le nombre d'équations d'équilibre est alors insuffisant à la détermination des actions de liaison inconnues. La structure est dite *hyperstatique* de degré $r - k$ (Fig. 2.1-b).

Si $r < k$: l'équilibre est impossible en général. Le système est *hypostatique (mécanisme)*. L'étude des mécanismes déborde du cadre de la résistance des matériaux (Fig. 2.1-c).

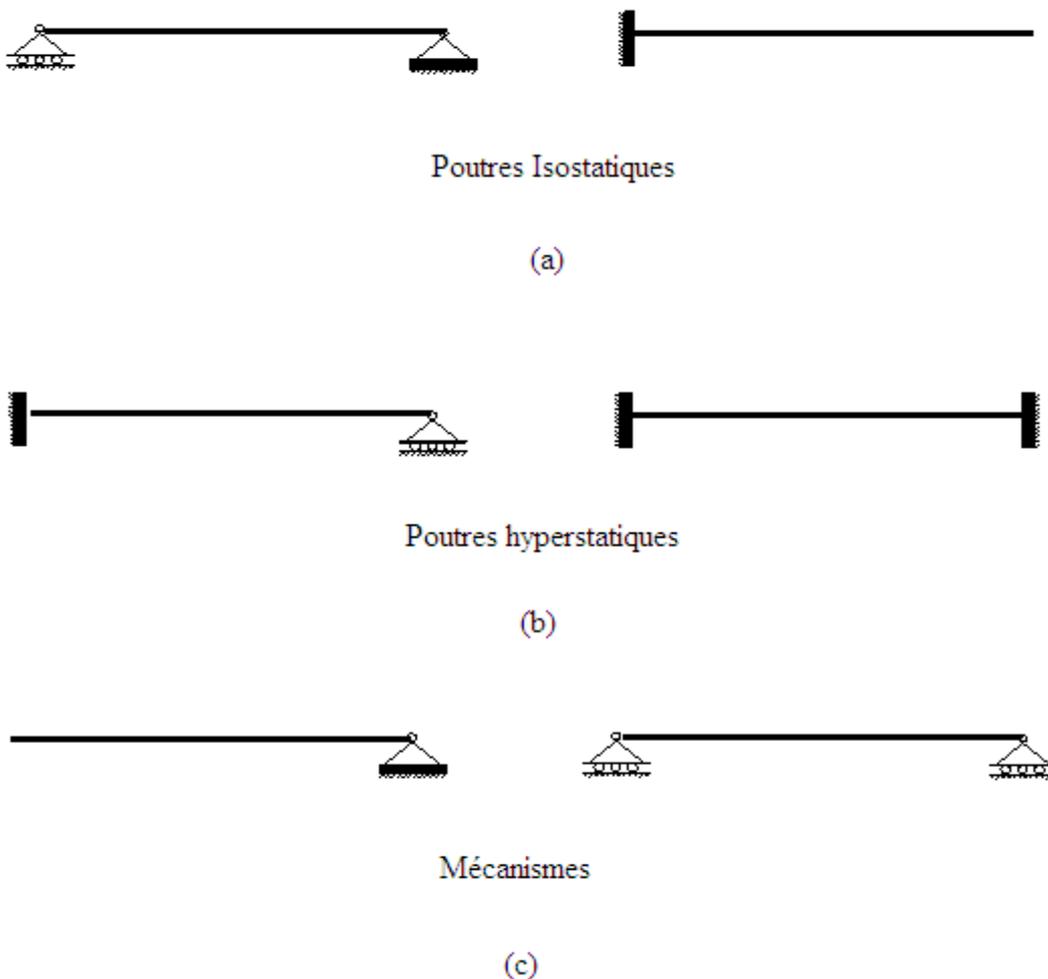


Fig. 2.1- Exemples de Poutres: (a) isostatiques, (b) hyperstatiques, (c) mécanismes.

2.2. Définitions

- Une poutre est soumise à la *flexion* lorsque les forces qui lui sont appliquées tendent à faire varier sa *courbure* (Fig. 2.2).

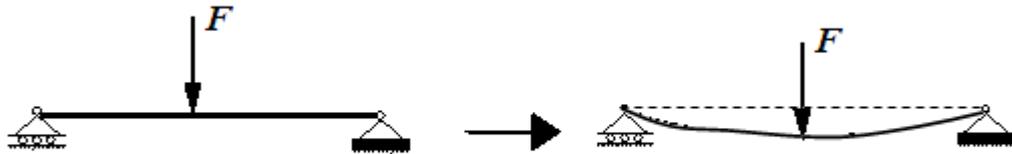


Fig. 2.2- Courbure d'une poutre.

- On entend par **flexion simple** un mode de sollicitation tel que dans les sections droites de la poutre il existe deux composantes des efforts intérieurs: le moment fléchissant M_{fz} (ou M_{fy}) et l'effort tranchant T_Y (ou T_Z).

La flexion est aussi dite **simple**, lorsque la poutre possède un **plan de symétrie** et que les forces fléchissantes agissent dans ce plan, **perpendiculairement** au grand axe de la poutre (Fig. 2.3).

Nous nous limiterons dans ce cours à l'étude de la flexion des poutres droites isostatiques, c'est-à-dire celles pour lesquelles les équations d'équilibre suffisent à la détermination des actions de liaison. Nous nous limiterons également aux poutres dont le plan de symétrie est vertical (Gxy).

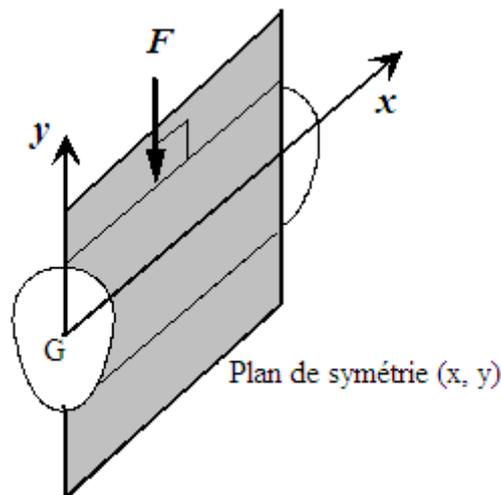


Fig. 2.3- poutre en flexion simple.

- **Hypothèses**

- Les déformations sont élastiques et suffisamment petites pour ne pas modifier l'intensité des forces ni leurs distances respectives.
- Toute fibre contenue dans un plan de symétrie demeure dans ce plan pendant la déformation.
- Hypothèse de Navier-Bernoulli(1705): les sections droites de la poutre demeurent planes et perpendiculaires à l'axe de celle-ci après déformation.

2.3. Efforts tranchants, moments fléchissants

Soit la poutre ci-dessous soumise à la flexion simple. Imaginons une coupure en un point C qui divise la poutre en deux parties notées *gauche* et *droite*. Chacune de ces deux parties est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs qu'elle reçoit et sous l'action des effets de l'autre partie (efforts intérieurs).

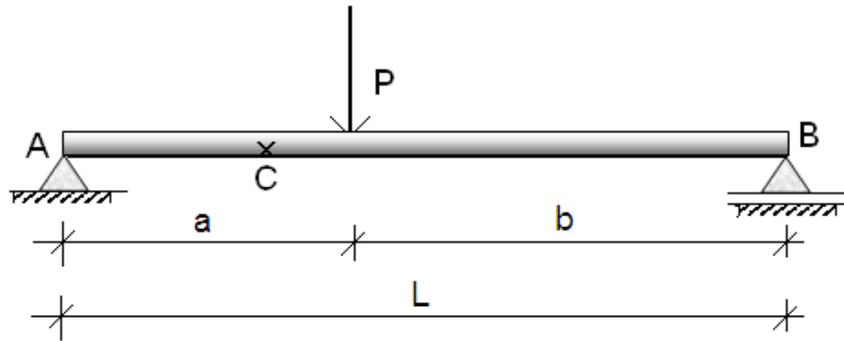


Fig. 2.4- Exemple illustratif d'une poutre sollicitée en flexion simple.

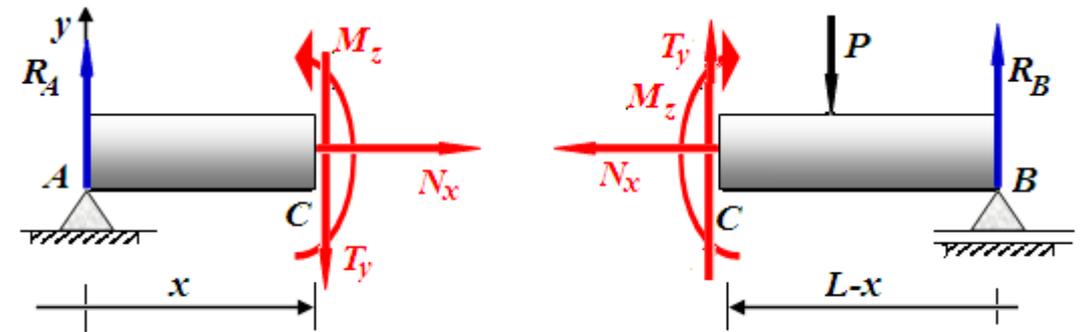
Chacune des deux parties agit sur l'autre de sorte que:

- Tous les mouvements horizontaux, verticaux et de rotation d'une partie par rapport à l'autre sont nuls.
- Chaque partie est en équilibre

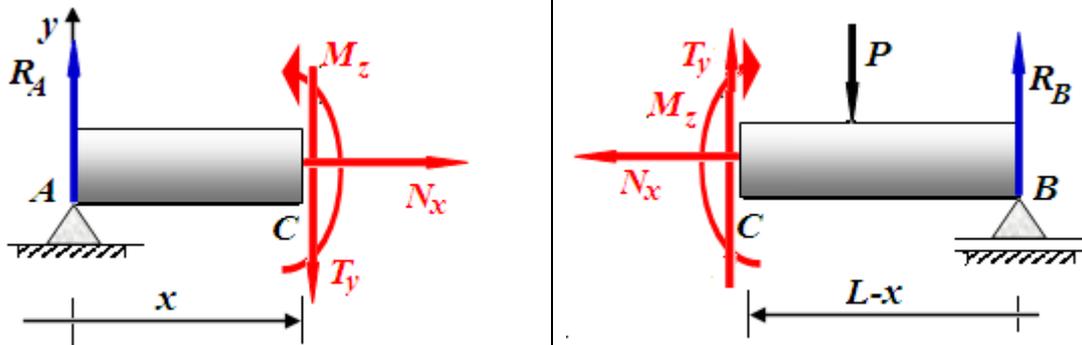
Pour qu'il y ait concordance en signe entre les deux parties, on utilise la convention de signe montrée sur la figure (2.5).

L'effort tranchant $T(x)$ dans une section d'abscisse x , séparant la poutre orientée en une partie *gauche* et une partie *droite*, est la résultante des forces extérieures s'exerçant sur *la partie gauche*.

Le moment fléchissant $M(x)$ dans une section d'abscisse x , séparant la poutre orientée en une partie *gauche* et une partie *droite*, est la somme des moments extérieurs (dus aux couples concentrés et aux efforts d'action et de réaction) s'exerçant sur *la partie gauche*.



(a)



- $\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0$
- $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_Y = Pb/L$
- $\sum M/C = 0 \Rightarrow M_Z = (Pb/L) \cdot x$

- $\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0$
- $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_Y = P - Pa/L$
 $\Rightarrow T_Y = Pb/L$
- $\sum M/C = 0 \Rightarrow M_Z = (Pa/L) \cdot (L-x) - p(L-x-b)$
 $\Rightarrow M_Z = (Pb/L) \cdot x$

(b)

Fig. 2.5 - Conventions de signe.

2.4. Diagrammes des Efforts tranchants et des moments fléchissants

Le diagramme des efforts tranchants est la courbe représentative de la fonction $T(x)$ et le diagramme des moments fléchissants est la courbe représentative de la fonction $M(x)$, où x est l'abscisse de la poutre de l'une de ses extrémités.

• **Exemple 2.1**

Exprimer et tracer la variation de l'effort tranchant et le moment fléchissant le long de la poutre schématisée par la figure ci-dessous.

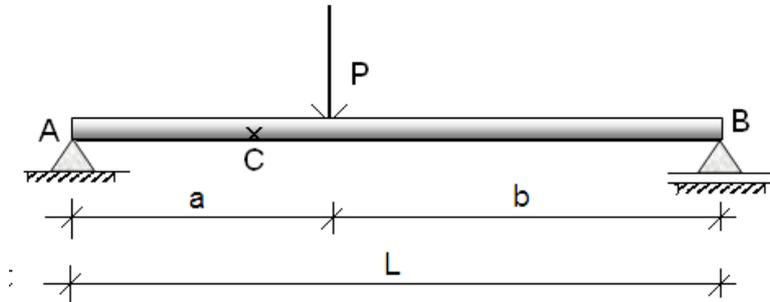


Fig. E2.1-a

• **Solution 2.1**

Supposons que la poutre soit coupée au point C (1^{ère} partie) puis au point D (2^{ème} partie).

1^{ère} partie : $0 \leq x \leq a$

2^{ème} partie : $a \leq x \leq L$

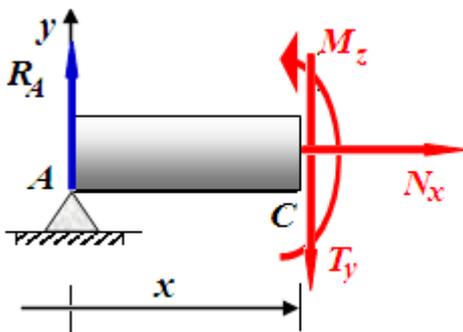


Fig. E2.1-b

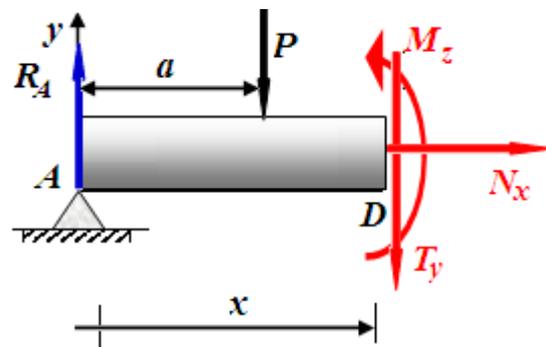


Fig. E2.1-c

- $\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0$
- $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = Pb/L$
- $\sum M_C = 0 \Rightarrow M_Z = (Pb/L) \cdot x$
 $M_Z(x=0) = 0$
 $M_Z(x=a) = Pab/L$

- $\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0$
- $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = -Pa/L$
- $\sum M_C = 0 \Rightarrow M_Z = (Pa/L) \cdot (L-x)$
 $M_Z(x=a) = Pab/L$
 $M_Z(x=L) = 0$

Ayant obtenu les expressions des efforts tranchants et moments fléchissants pour chacune des deux parties, traçons leurs variations le long de la poutre comme montrées par la figure ci-dessous.

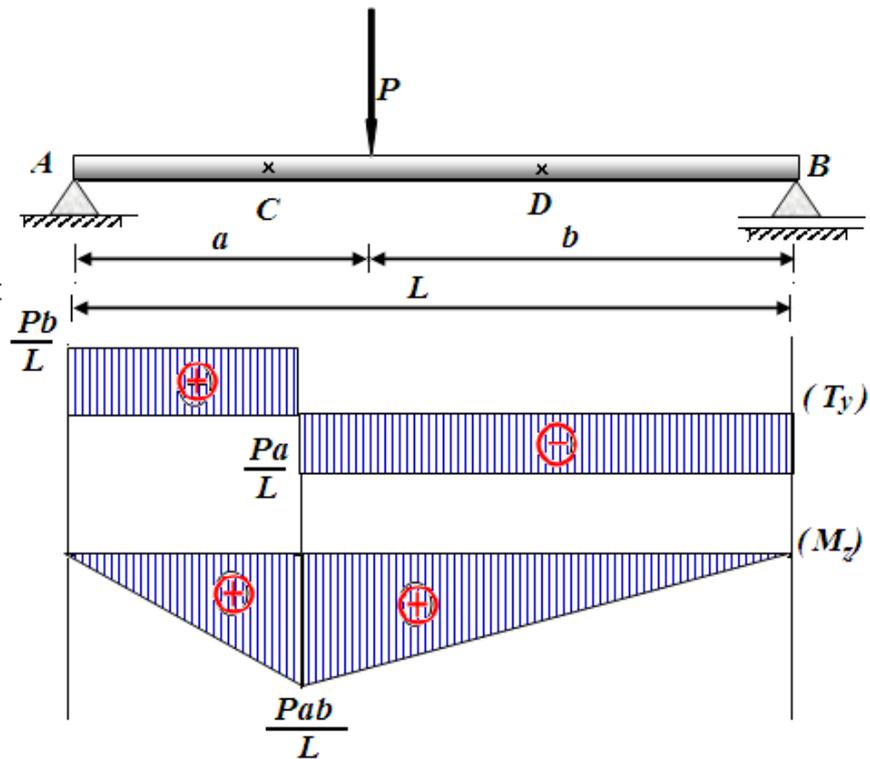


Fig. E2.1-d

2.5. Relation entre moment fléchissant et effort tranchant

Considérons un élément de poutre pris entre deux sections (Σ) et (Σ') infiniment voisines, distantes de dx (Fig. 2.6).

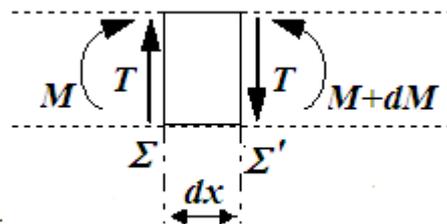


Fig.2.6 - Élément de poutre isolé non chargé.

L'influence de la partie gauche sur l'élément est représentée par T et M .
L'influence de la partie droite sur l'élément est représentée par T' et M' .

Si aucun effort ne s'exerce sur la poutre entre les sections (Σ) et (Σ'), les efforts tranchants de ces deux sections sont égaux ($T' = T$). Par contre les moments fléchissants M et M' ($M' = M + dM$) diffèrent. L'équilibre de l'élément s'écrit:

$$M + T dx - M - dM = 0$$

Soit:

$$\frac{dM}{dx} = T \quad (2.1)$$

Ainsi, sur toute portion de poutre comprise entre des charges, l'effort tranchant est la dérivée par rapport à l'abscisse x du moment fléchissant.

2.6. Relation entre effort tranchant et chargement réparti

Considérons le cas où une charge répartie, d'intensité p , s'exerce entre les sections (Σ) et (Σ') (Fig. 2.7). La charge totale appliquée sur l'élément est $p dx$.

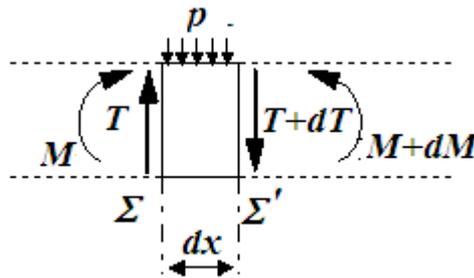


Fig.2.7 - Élément de poutre isolé chargé par une force uniformément répartie.

l'équilibre des forces sur l'élément mène à:

$$T - p dx - T - dT = 0$$

Ce qui veut dire que:

$$\frac{dT}{dx} = -p \quad (2.2)$$

L'équilibre des moments donne:

$$M + T dx - p dx dx/2 - M - dM = 0$$

En négligeant le terme du second ordre ($p \frac{(dx)^2}{2}$), il reste $T = \frac{dM}{dx}$. Ce qui veut dire que la relation entre l'effort tranchant et le moment fléchissant reste valable au premier ordre.

• Exemple 2.2

Pour la poutre console schématisée par la figure ci-dessous, exprimer et tracer la variation de l'effort tranchant et le moment fléchissant le long de la poutre.

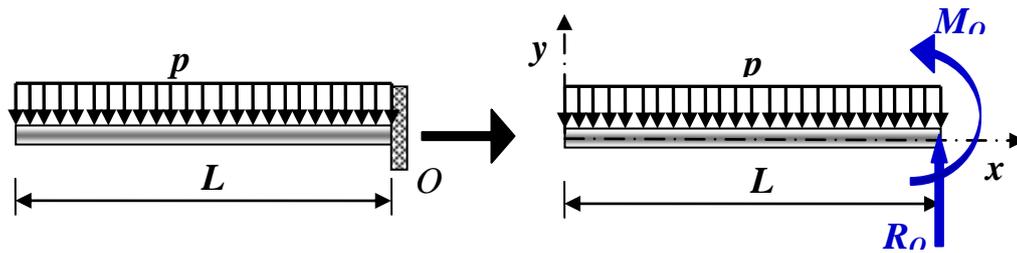


Fig. E2.2-a

• **Solution 2.2**

On a, pour $0 \leq x \leq L$:

$$T(x) = -p \cdot (x)$$

$$M(x) = -\frac{p \cdot (x)^2}{2}$$

Ces expressions montrent la variation de l'effort tranchant et du moment fléchissant en fonction de l'abscisse x . Leurs tracés sont montrés sur la figure E2.2-b.

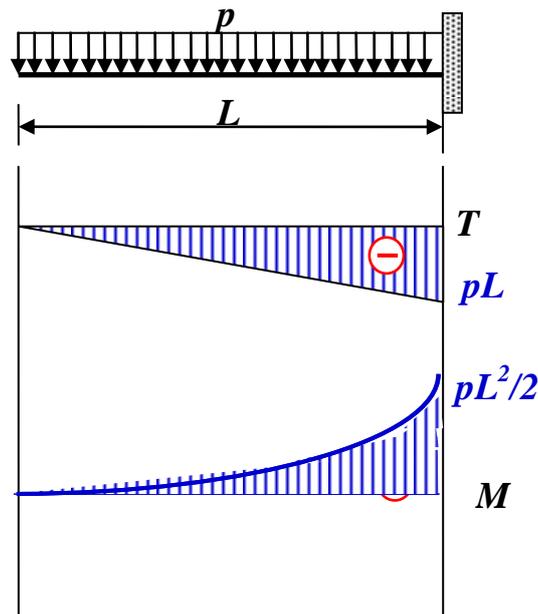


Fig. E2.2-b

• **Remarque**

Lorsqu'une charge concentrée s'exerce entre (Σ) et (Σ') (Fig. 2.8), l'équilibre s'écrit:

$$T' = T - F$$

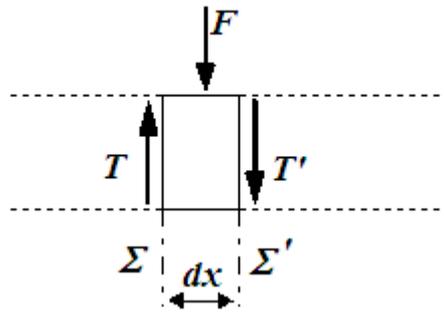


Fig.2.8 - Élément de poutre isolé chargé par une force concentrée.

L'effort tranchant varie d'une quantité F lorsqu'on dépasse le point d'application de la charge. En ce point, la pente du moment fléchissant (dM/dx) varie brusquement (point anguleux).

2.7. Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (flèche)

Sous l'effet des sollicitations auxquelles elle est soumise, une poutre se déforme. On désigne par **flèche** à l'abscisse x , le déplacement du centre de gravité de la section correspondant à cette abscisse. Elle est comptée positivement si le déplacement s'effectue vers le bas. Le nouveau lieu des centres de gravité de toutes les sections de la poutre prend le nom de **déformée** (Fig. 2.9).

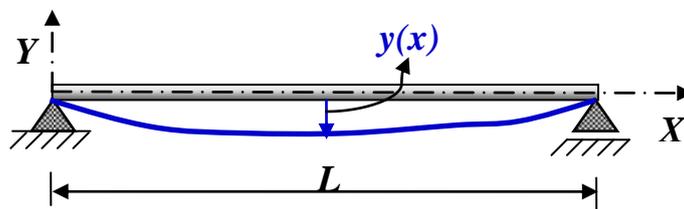


Fig.2.9 - Poutre déformée.

On admet la relation suivante qui permet le calcul de la déformée

$$y''(x) = \frac{M(x)}{EI} \quad (2.3)$$

$y''(x)$ est la dérivée seconde de la flèche par rapport à x

$M(x)$, le moment fléchissant à la section d'abscisse x .

E , le module d'élasticité longitudinale (module d'Young).

I , le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe Δ passant par le centre de gravité et perpendiculaire au plan moyen de la poutre. La figure (2.10) montre des expressions du moment d'inertie central pour des sections usuelles.

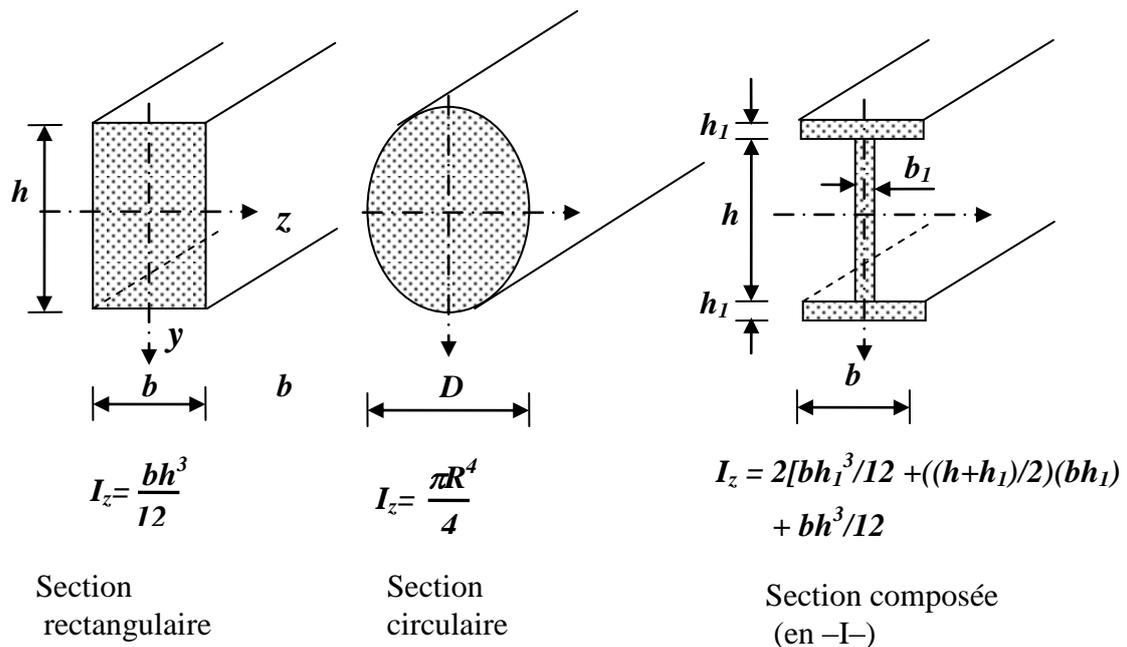


Fig.2.10 - Exemples de sections usuelles.

Pour avoir la flèche y (ou v), il faut donc intégrer cette équation deux fois, d'où l'obtention d'une équation fonction de deux constantes que l'on obtient par les conditions aux limites. Celles-ci s'écrivent, généralement:

- Pour **un appui** : $y = 0$
- Pour **un encastrement**: $y = 0$ et $y' = 0$ (formules de Bresse)

2.8. Calcul des contraintes

2.8.1. Cas de la flexion pure

On dit qu'une poutre est sollicitée en flexion pure si toutes les composantes des efforts intérieurs sont nulles à l'exception du moment fléchissant (M_{fz} or $M_{fy} \neq 0$) (Fig. 2.11). Autrement dit le moment fléchissant est constant,

$$T = dM/dx \text{ d'où } T = 0$$

• Exemples de poutres en flexion pure

Les figures (2.12-a) et (2.12-b) schématisent une poutre et un tronçon de poutre, respectivement, soumis à la flexion pure.

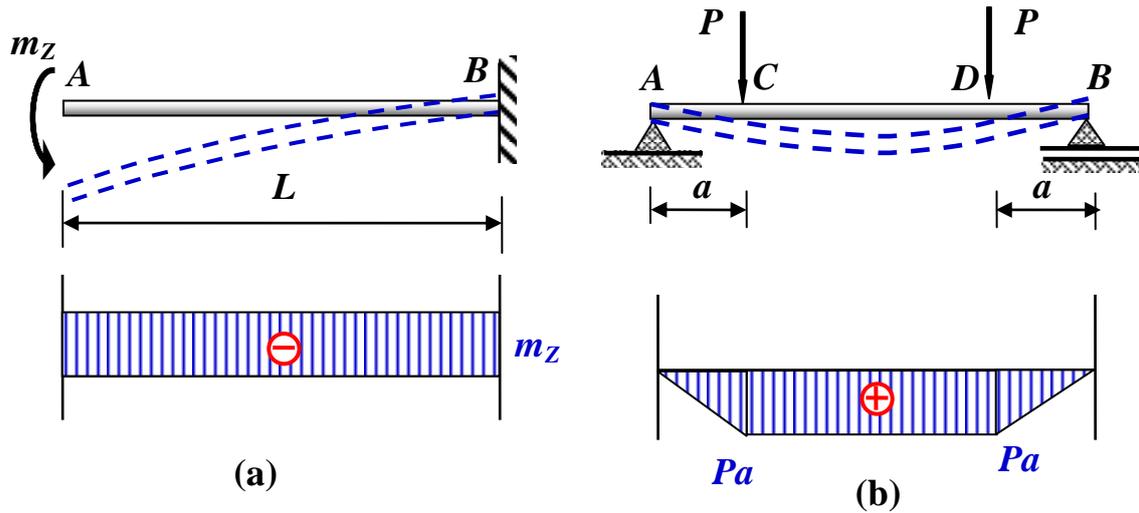


Fig. 2.11 – Illustration de la flexion pure: (a) poutre en flexion pure, (b) tronçon de poutre en flexion pure.

Pour un point P quelconque, selon l'hypothèse de *Bernouilli*, on peut écrire:

$$\sigma_x(y) = \frac{M_z}{I_z} y \quad (2.4)$$

Avec

$$I_z = \int_S y^2 dS \quad (2.5)$$

y_P est la distance à l'axe et I_z le moment d'inertie par rapport à l'axe de flexion

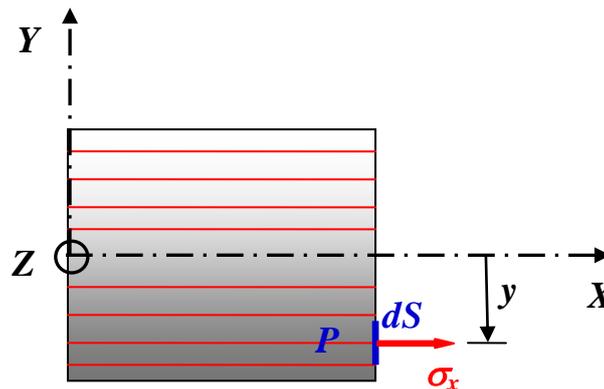


Fig.2.12- Contrainte dans une fibre déformée.

• **Dimensionnement**

Pour dimensionner la poutre on peut utiliser deux types de critères :

- un critère en contrainte normale (condition de résistance)
- un critère sur la flèche maximale (condition de rigidité)

Le critère sur la flèche maximale, traduit le fait que la flèche maximale $v(P)$ en un point P doit rester inférieure à une valeur donnée dépendante des conditions d'utilisation:

$$\text{Max}(v(P)) \leq [v] \quad (2.6)$$

Pour les poutres ordinaires, la valeur de la flèche admissible est de l'ordre de:

$$[v] = [f] = L/100 \div L/1000$$

où L est la longueur de la poutre. On pourrait aussi imaginer un critère de rotation maximale de la section droite.

1- Pour les poutres rigides, c à d $v \leq L/100$, la grandeur u est très petite devant v (Fig. 2.13), d'où on néglige son influence sur la déformation de la poutre et on ne tient compte que des deux composantes v et φ_z .

2- Puisque pour les poutres rigides φ_z est petite ($\varphi_z < 1^\circ$), on admet que:

$$\varphi_z \approx \text{tg} \varphi_z$$

D'autre part, on sait que, mathématiquement, $\text{tg} \varphi_z = dv/dx$, d'où:

$$\varphi_z = dv / dx \quad (2.7)$$

Ainsi, la déformation de la poutre fléchie est caractérisée par les composantes v et φ_z tel que:

$$\text{Max}|\varphi_z| \leq [\varphi] \quad (2.8)$$

• **Dimensionnement à la condition de résistance**

Le dimensionnement d'une poutre fléchie à la condition de résistance passe par les étapes suivantes:

- 1- Tracé du diagramme de M_f (M_Z ou M_Y) le long de la poutre,
- 2- Détermination de la section dangereuse à partir du diagramme de M_f ,
- 3- Calcul de la contrainte maximale σ_{max} , c'est-à-dire la contrainte au niveau du point dangereux le long de la section transversale de la poutre,
- 4- Satisfaction de la condition de résistance qui s'écrit selon la méthode des contraintes admissibles comme suit:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] \quad (2.9)$$

σ_{max} est obtenue en analysant la variation de σ_x dans une section dangereuse de la poutre. Dans ce cas M_Z et I_Z sont constants et σ_x dépend linéairement de la coordonnée y (Fig. 2.14).

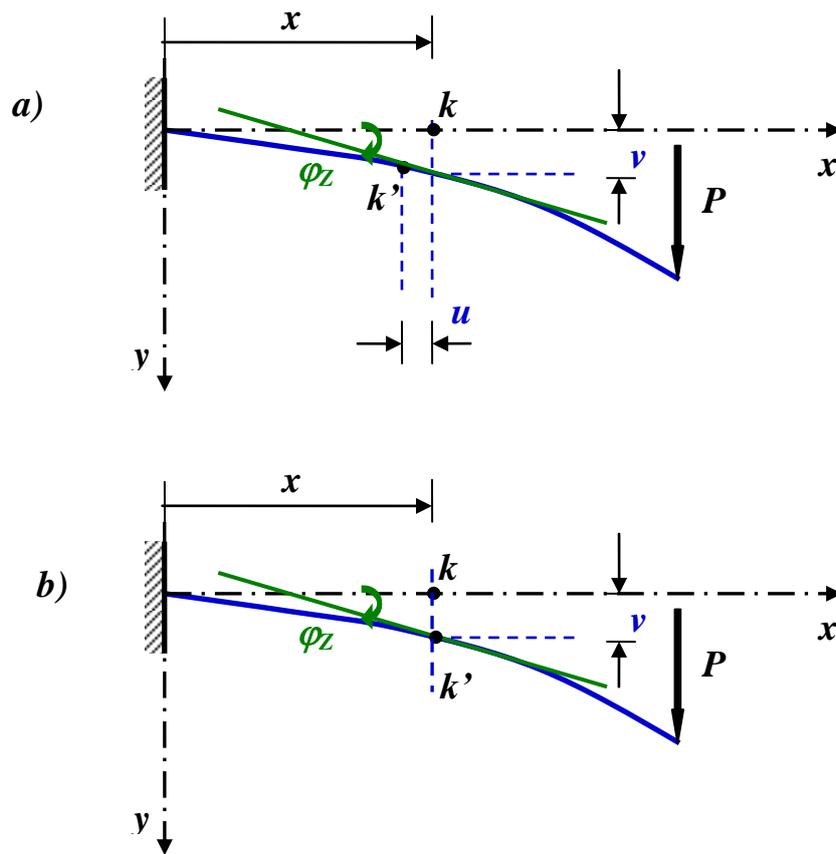


Fig.2.13- Déformations dans une poutre fléchie.

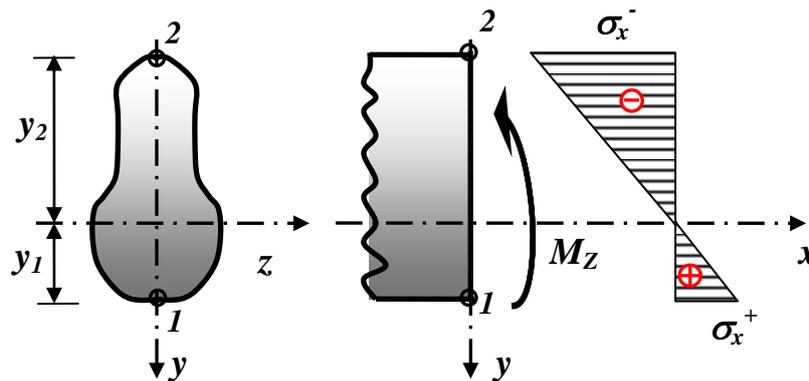


Fig.2.14- Distribution des contraintes dans une section d'une poutre en flexion pure.

- $\sigma_x = 0$ pour les points correspondant à l'axe z (l'axe neutre)
- Les valeurs maximales de σ_x correspondent aux points les plus éloignés de l'axe neutre (les points 1 et 2)

De l'équation $\sigma_x(y) = (M_Z / I_Z) \cdot y$ (équation de Navier), on obtient:

$$\sigma_{xmax}^{(1)} = M_Z^{max} / W_Z^{(1)} , W_Z^{(1)} = I_Z / y_1 = W_Z^{(t)} \quad (2.10-a)$$

$$\sigma_{xmax}^{(2)} = M_Z^{max} / W_Z^{(2)} , W_Z^{(2)} = I_Z / y_2 = W_Z^{(c)} \quad (2.10-b)$$

Où $W_Z^{(t)}$ et $W_Z^{(c)}$ sont les modules de flexion ou de résistance, calculés pour le point le plus tendu (point 1) et le point le plus comprimé (point 2), respectivement.

D'où, les conditions de résistance:

$$\sigma_{xmax}^{(+)} = M_Z^{max} / W_Z^{(t)} \leq [\sigma]^+ \quad (2.11-a)$$

$$\sigma_{xmax}^{(-)} = M_Z^{max} / W_Z^{(c)} \leq [\sigma]^- \quad (2.11-b)$$

Pour la majorité des poutres utilisées en construction:

$$W_Z^{(t)} = W_Z^{(c)}$$

et

$$\sigma_{xmax}^{(+)} = \sigma_{xmax}^{(-)}$$

alors les conditions de résistance ci-dessus peuvent être exprimées sous la forme:

$$\sigma_{xmax} = M_Z^{max} / W_Z \leq [\sigma] \quad (2.12)$$

• **Remarques**

a) Si $W_Z^{(t)} \neq W_Z^{(c)}$ mais $[\sigma]^+ \neq [\sigma]^-$, on peut utiliser la dernière condition de résistance en prenant pour $[\sigma]$ la valeur minimale (en module) entre $[\sigma]^+$ et $[\sigma]^-$.

b) Si $[\sigma]^+ = [\sigma]^-$ mais $W_Z^{(t)} \neq W_Z^{(c)}$, on peut utiliser la dernière condition de résistance en prenant pour W_Z la valeur minimale (en module) entre $W_Z^{(t)}$ et $W_Z^{(c)}$.

Notons qu'il existe d'autres méthodes de calcul des poutres à la résistance telle que la méthode des états limites.

2.8.2. Cas de la flexion simple

Pour le cas de la flexion simple, en plus du moment fléchissant qui est variable dans ce cas il existe la composante de l'effort tranchant T , c'est-à-dire en plus de la contrainte normale σ on a une contrainte tangentielle τ .

La contrainte normale s'exprime par l'équation précédente (2.4) de Navier (cas de la flexion pure). La contrainte tangentielle τ_{xy} est donnée par l'équation de Jouravsky:

$$\tau_{xy} = \frac{T_y \cdot S_{I_z}(y)}{I_z \cdot b(y)} \quad (2.13)$$

Avec

$$S_{Iz}(y) = \int_{S_I} y dS$$

est le moment statique de la surface située au dessus de la coordonnée y et par rapport à l'axe z (l'axe 3 sur la figure 2.15).

La quantité $b(y)$ est la largeur de la fibre étudiée correspondant à la coordonnée y .

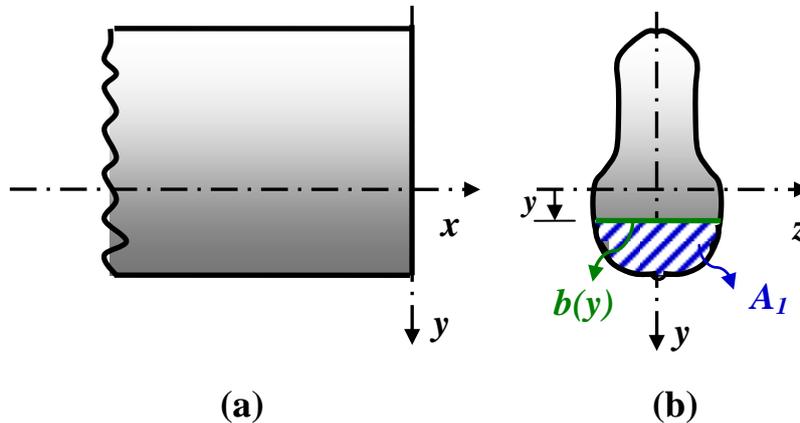


Fig.2.15- Tronçon de poutre non chargé longitudinal (a), transversal (b).

• **Remarques**

- Dans le cas de la figure ci-dessus ($S_{Iz}(y)$ positif), le signe de τ_{xy} dépend uniquement du signe de T_y .

- τ_{xy} varie le long de la hauteur de la section en fonction de $S_{Iz}(y)$ et $b(y)$. Pour les points les plus éloignés de l'axe neutre $\tau_{xy} = 0$.

Pour trouver la valeur maximale de τ_{xy} il faut (dans le cas général) analyser le digramme respectif de τ_{xy} . Notons que pour la majorité des poutres utilisées en construction (section symétrique par rapport à l'axe z), τ_{xy}^{max} a lieu au niveau de la fibre neutre. Cependant, il y a des exemples où τ_{xy} est maximale pour une des autres fibres (Fig. 2.16).

Pour les sections ordinaires, il est commode de déterminer τ_{xy}^{max} à l'aide de l'expression:

$$\tau_{xy}^{max} = K \frac{T_y}{S} \tag{2.14}$$

Où S est l'aire de la section et K un coefficient dépendant de la forme de la section (Tableau 2.1).

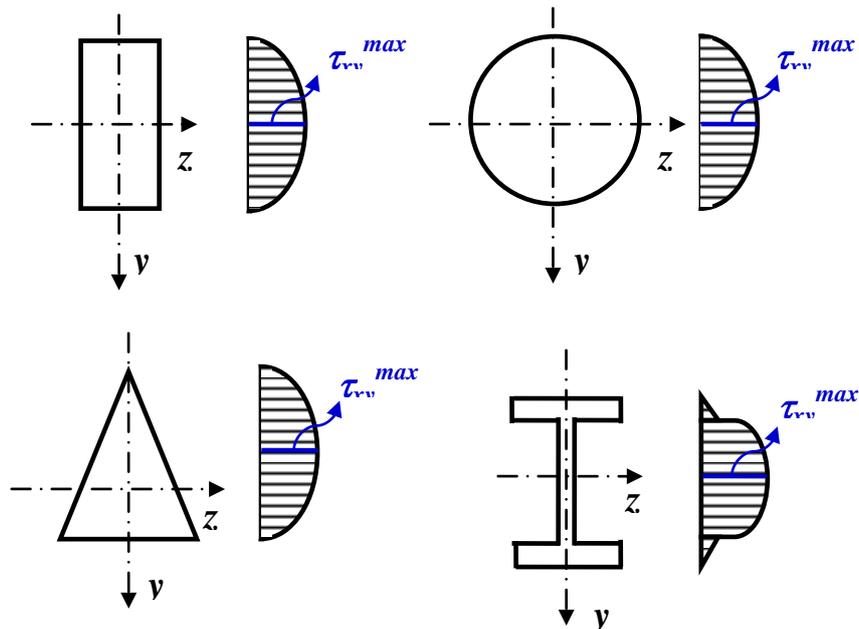


Fig.2.16- Exemples de distribution des contraintes tangentielles dans une section de poutre en flexion simple.

Tableau 2.1- Exemples de valeurs du coefficient de forme K .

Forme de la section	Rectangulaire	Ronde	Triangulaire
Coefficient K	$3/2$	$4/3$	$3/2$

• **Dimensionnement**

Pour dimensionner la poutre on utilise un critère en contrainte ou en flèche maximale comme dans le cas de la flexion pure.

• **Dimensionnement à la condition de résistance**

Le calcul à la résistance se fait comme dans le cas de la flexion simple (détermination des sections dangereuses et des points dangereux, satisfaction des conditions de résistances).

Pour la sélection des sections dangereuses, on distingue, généralement, trois cas:

- Si M_Z et T_Y ont des valeurs maximales dans la même section le long de la poutre, cette section est considérée dangereuse et on y effectue le calcul à la résistance.
- Si M_Z et T_Y ont des valeurs maximales dans des sections différentes le long de la poutre, on y effectue le calcul à la résistance dans chacune de celles-ci.
- Parfois, les sections sont dangereuses sans que les efforts y aient des valeurs maximales. Donc, on doit effectuer un calcul à la résistance.

Pour la satisfaction des conditions de résistances, on doit considérer les cas suivants:

1- Composer une condition de résistance pour le point où σ_x est maximale, dans une section où M_Z est maximal. En ce point τ_{xy} est généralement nul. La condition de résistance pour ce point s'écrit:

$$\sigma_x^{max} \leq [\sigma]$$

2- Composer une condition de résistance pour le point où τ_{xy} est maximale. Si la section est symétrique par rapport à l'axe z , τ_{xy}^{max} correspond habituellement à l'axe neutre où $\sigma_x = 0$ (Fig. 2.17). La condition de résistance pour ce point (dans une section où T_y est maximale) s'écrit:

$$\tau_{xy}^{max} \leq [\tau]$$

3- Si τ_{xy} est maximale dans le point qui ne correspond pas à l'axe neutre et où $\sigma_x \neq 0$ (Fig. 2.17), une satisfaction de la condition de résistance pour ce point doit se faire dans le cadre des théories de résistance (ç-à-d selon un critère de résistance). On utilise habituellement, en flexion plane, le critère de la contrainte tangentielle maximal (critère de Coulomb) ou le critère de l'énergie potentielle de déformation qui ont, respectivement, les deux expressions suivantes:

$$\sigma_{Eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (2.15-a)$$

$$\sigma_{Eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (2.15-b)$$

Et la condition de résistance est:

$$\sigma_{Eq} \leq [\sigma] \quad (2.16)$$

• Remarques

Pour la plus part des cas, on peut montrer que $\tau_{xy}^{max} / \sigma_x^{max}$ est du même ordre que h/L . Donc, la valeur de τ_{xy}^{max} peut être proche de la valeur de σ_x^{max} pour les poutres où h est comparable à L (pour les consoles courtes par exemple). Dans ce cas la condition $\tau_{xy}^{max} \leq [\tau]$ peut être déterminante en calcul à la résistance.

Cependant, habituellement on utilise en construction des poutres pour les quelles $h \ll L$ et par conséquent, $\tau_{xy}^{max} \ll \sigma_x^{max}$. Dans ce cas la condition $\tau_{xy}^{max} \leq [\tau]$ est satisfaite si la condition $\sigma_x^{max} \leq [\sigma]$ est satisfaite. C'est pourquoi, ordinairement le calcul à la résistance des poutres fléchies s'effectue selon la condition $\sigma_x^{max} \leq [\sigma]$ pour la section où M_Z est maximal. La condition $\tau_{xy}^{max} \leq [\tau]$ composée pour le point où τ_{xy} est maximale (dans la section où T_y est maximal) sert à la vérification.

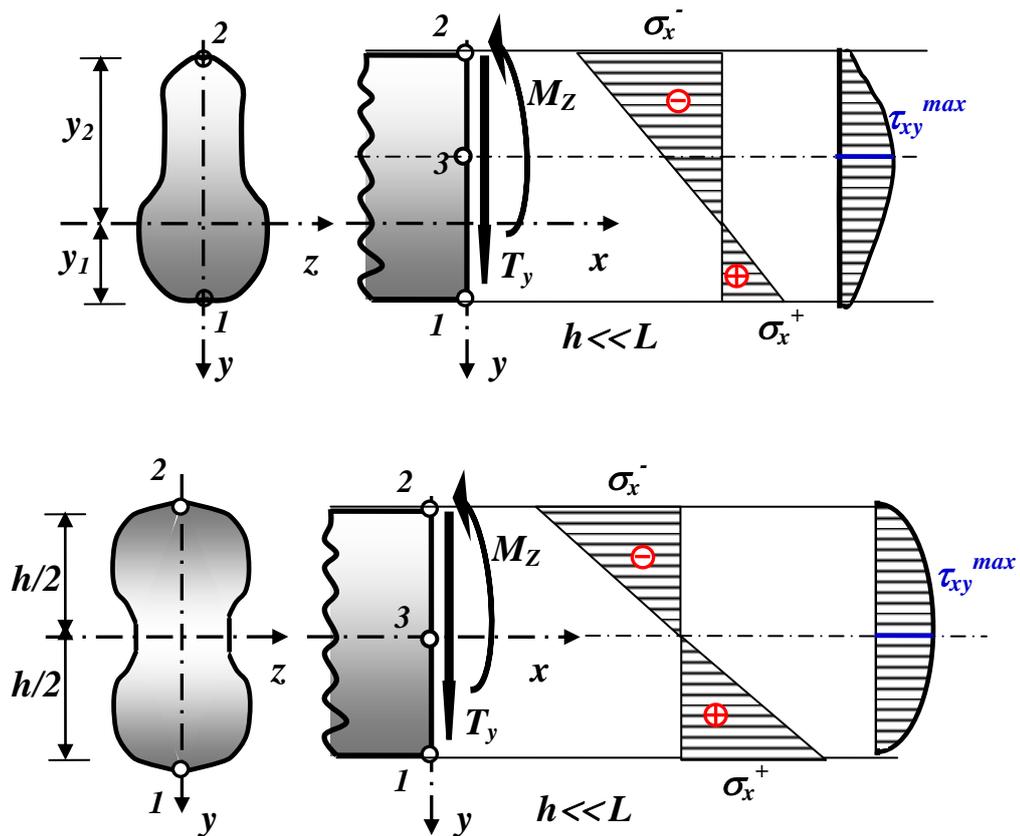


Fig.2.17 – Distribution des contraintes dans une section de poutre en flexion simple.

• **Exemple 2.3**

Calculer les contraintes normale et tangentielle maximales pour une poutre ayant une section transversale rectangulaire.

• **Solution 2.3**

On a:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x^{max-} = \frac{M_z}{I_z / y_{max}^-} = \frac{M_z}{W_Z^{min-}} \\ \sigma_x^{max+} = \frac{M_z}{I_z / y_{max}^+} = \frac{M_z}{W_Z^{min+}} \end{cases}$$

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{I_z} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right) \Rightarrow \tau_{xy}^{max} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{S} = K \frac{T_y}{S}; \quad K = \frac{3}{2}$$

Sur la figure (E2.3) on trace la distribution des contraintes normale et tangentielle le long de la section transversale de la poutre.

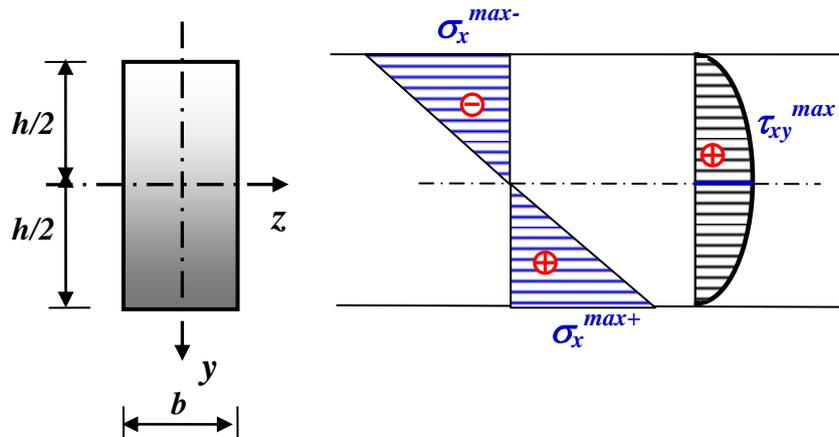


Fig. E2.3

• **Exemple 2.4**

Pour une poutre simplement appuyée, de longueur L et supportant une charge uniformément répartie, montrer que le rapport $\frac{\tau_{xy}^{max}}{\sigma_x^{max}}$ est comparable à $\frac{h}{L}$. la section transversale de la poutre est supposée rectangulaire.

• **Solution 2.4**

La figure (E2.4) montre la variation de l'effort tranchant et le moment fléchissant le long de la poutre.

La contrainte normale maximale correspond à la section où le moment fléchissant est maximale ($x = L/2, M_z^{max} = \frac{qL^2}{8}$) et la contrainte tangentielle maximale correspond à la section où l'effort tranchant est maximal ($x = 0$ ou $x = L, T_y^{max} = \frac{qL}{2}$).

$$M_z^{max} = \frac{qL^2}{8}, T_y^{max} = \frac{qL}{2}, S = bh, W_z = \frac{bh^2}{6}$$

$$\sigma_x^{max} = \frac{M_z^{max}}{W_z} = \frac{3qL^2}{4bh^2}$$

$$\tau_{xy}^{max} = K \frac{T_y^{max}}{S} = \frac{3}{2} \frac{qL}{2bh} = \frac{3qL}{4bh}$$

$$\frac{\tau_{xy}^{max}}{\sigma_x^{max}} = \frac{h}{L}$$

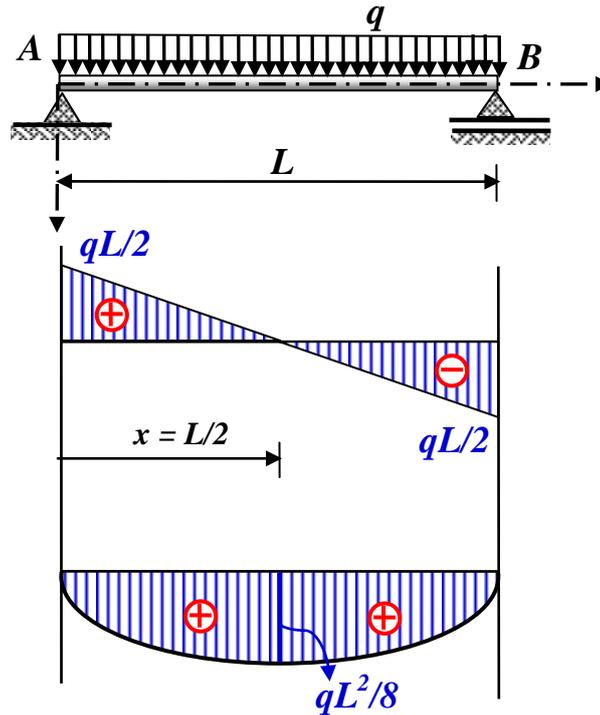


Fig. E2.4

• Exemple 2.5

Soit une poutre en acier de section transversale ronde, comme le montre la figure ci-dessous.

- 1- Calculer les réactions aux appuis.
- 2- Tracer les diagrammes des efforts intérieurs tout au long de la poutre.
- 3- Pour la section où le moment fléchissant est maximal, tracer la distribution des contraintes normale et tangentielle tout au long de la section transversale de la poutre.
- 4- Déterminer le diamètre D de la section si $[\sigma]=1600 \text{ kg/cm}^2$, $[\tau]=1100 \text{ kg/cm}^2$.

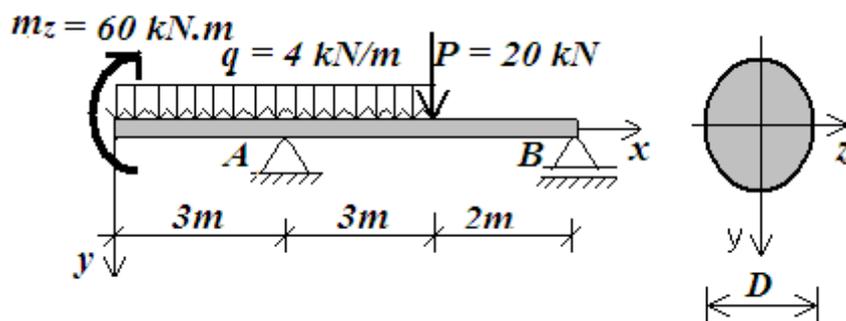


Fig. E2.5-a

• **Solution 2.5**

1- Réactions aux appuis

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow R_{Ax} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow R_{Ay} + R_B = 44kN \\ \sum M /_A = 0 &\Rightarrow R_B = 24kN \\ \sum M /_B = 0 &\Rightarrow R_{Ay} = 20kN \end{aligned}$$

Vérification

$$R_{Ay} + R_B = 44kN \Leftrightarrow 20 + 24 = 44$$

2- Diagrammes des efforts intérieurs

Section 1-1 $0 \leq x \leq 3m$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow N_x = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow T_y = -4x \quad d'o\grave{u} \begin{cases} T_y(x=0) = 0 \\ T_y(x=3) = -12kN \end{cases} \\ \sum M /_C = 0 &\Rightarrow M_z = 60 - 2x^2 \quad d'o\grave{u} \begin{cases} M_z(x=0) = 60kN.m \\ M_z(x=3) = 42kN.m \end{cases} \end{aligned}$$

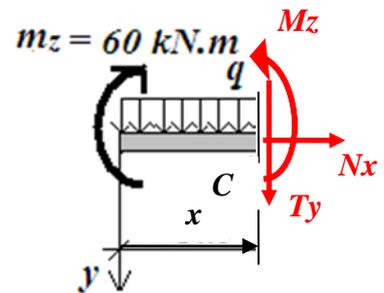


Fig. E2.5-b

Section 2-2 $3 \leq x \leq 6m$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow N_x = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow T_y = 20 - 4x \\ &\Rightarrow \begin{cases} T_y(x=3) = +8kN \\ T_y(x=6) = -4kN \end{cases} \end{aligned}$$

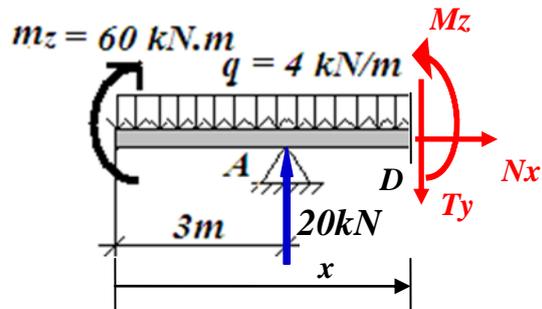


Fig. E2.5-c

$$\begin{aligned} \sum M /_D = 0 &\Rightarrow M_z = 60 + 20(x-3) - 2x^2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} M_z(x=3) = 42kN.m \\ M_z(x=6) = 48kN.m \end{cases} \\ T_y = 0 &\Rightarrow x = 5m \\ M_z^{max} &= M_z(x=5m) = 50kN.m \end{aligned}$$

Section 3-3 $6 \leq x \leq 8m$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = -24kN$$

$$\sum M / E = 0 \Rightarrow M_z = 24(8-x)d' \text{ où } \begin{cases} M_z(x=6) = 48 \text{ kN.m} \\ M_z(x=8) = 0 \end{cases}$$

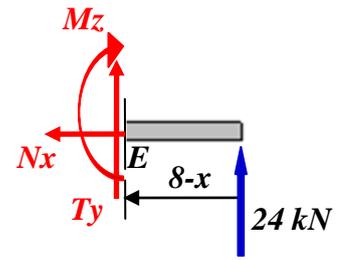


Fig. E2.5-d

Les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant sont représentés sur la figure E2.5-e.

3- Distribution des contraintes (Fig. E2.5-f)

$$M_z^{max} = 60kN.m; \quad T_y^{cor} = 0$$

$$\begin{cases} \sigma_x(y) = \frac{M_z}{I_z} y = \frac{60 \cdot 10^4}{\frac{\pi D^4}{64}} y \\ \tau_{xy} = \frac{T_y \cdot S_{I_z}(y)}{I_z \cdot b(y)} = 0 \end{cases}$$

4- Dimensionnement

Le dimensionnement à la condition de résistance se fait selon la condition:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]$$

$$\frac{6111,55 \cdot 10^3}{D^3} \leq 1600 \Rightarrow D \geq 18,3cm$$

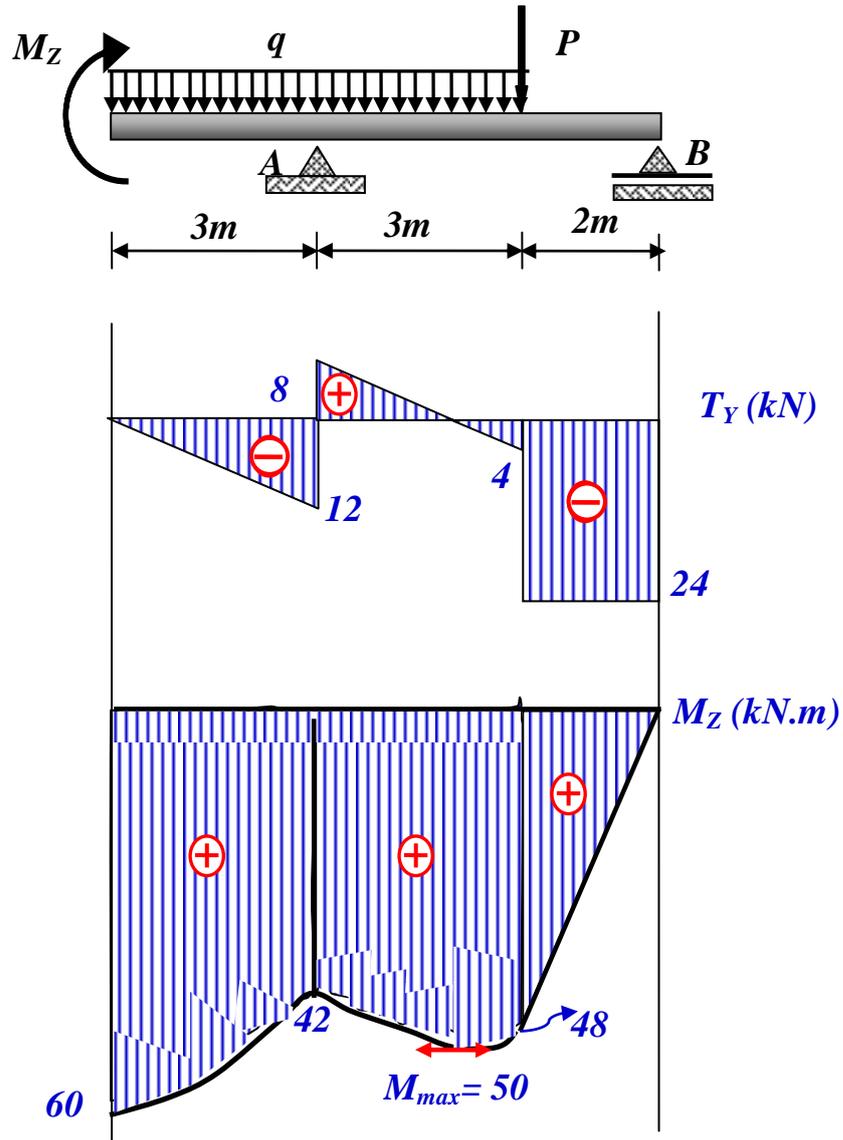


Fig. E2.5-e

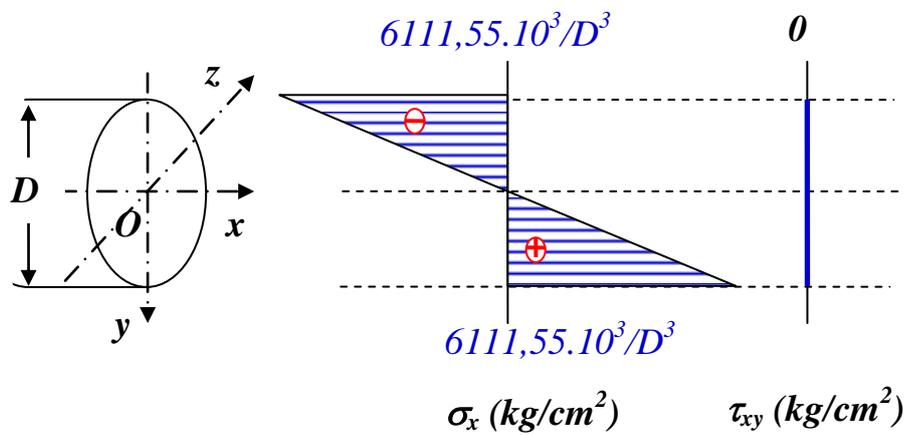
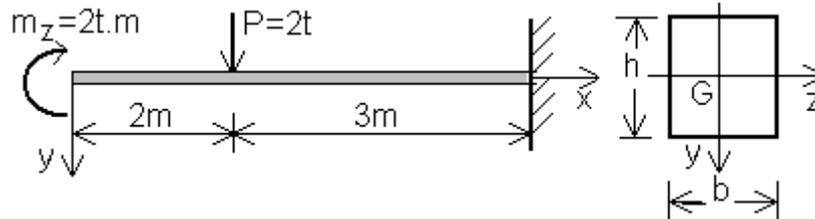


Fig. E2.5-f

Exercices

Exercice N°1

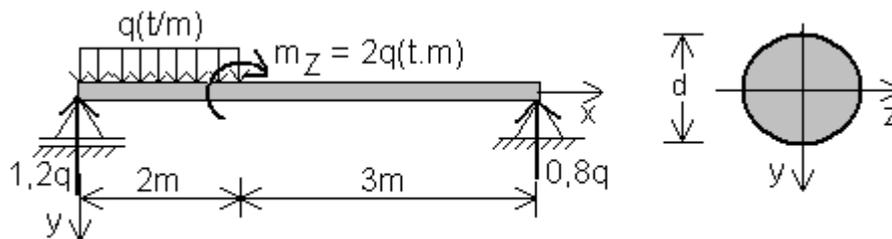
Soit une poutre en acier de section transversale rectangulaire, comme le montre la figure ci-dessous.



- 1- Calculer les réactions aux appuis.
- 2- Tracer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissant tout au long de la poutre.
- 3- Déterminer la section (ou les sections) dangereuse.
- 4- Tracer la distribution des contraintes normale et tangentielle tout au long de la section transversale de la poutre, pour la section (ou les sections) dangereuse.
- 5- Déterminer la dimension b sachant que $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$, $[\tau] = 1100 \text{ kg/cm}^2$, $h = 15 \text{ cm}$.

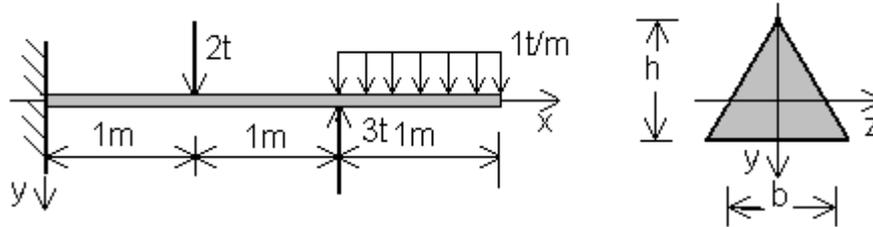
Exercice N°2

Soit une poutre en bois de section transversale ronde. Déterminer une capacité de chargement $q(\text{t/m})$. On donne $[\sigma]^+ = 100 \text{ kg/cm}^2$, $[\sigma]^- = 120 \text{ kg/cm}^2$, $[\tau] = 20 \text{ kg/cm}^2$, $d = 20 \text{ cm}$.



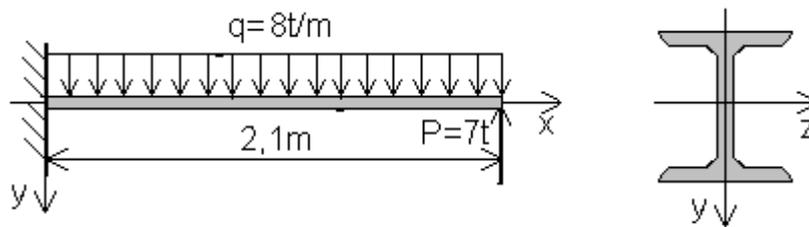
Exercice N°3

Soit une poutre en acier de section transversale triangulaire. Déterminer la dimension b de la section transversale. On donne $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$, $[\tau] = 1100 \text{ kg/cm}^2$, $h = 12 \text{ cm}$.



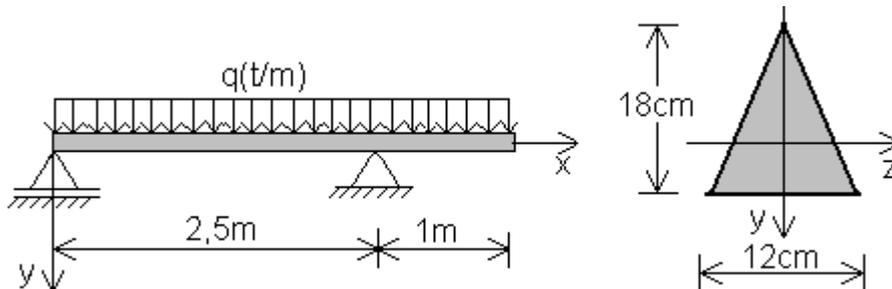
Exercice N°4

Soit une poutre en acier profilée en I (IPE). Déterminer les dimensions de la section droite. On donne $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$, $[\tau] = 1100 \text{ kg/cm}^2$.



Exercice N°5

Soit une poutre en bois de section transversale triangulaire. Déterminer une capacité de chargement $q(\text{t/m})$. On donne $[\sigma]^+ = 100\text{kg/cm}^2$, $[\sigma]^- = 120 \text{ kg/cm}^2$, $[\tau] = 20 \text{ kg/cm}^2$.



CHAPITRE 3

DIMENSIONNEMENT DES POUTRES DROITES ISOSTATIQUES SOLLICITÉES EN FLEXION COMPOSÉE

3.1. Introduction

Une poutre est dite soumise à la flexion composée, si elle est soumise simultanément à la flexion et à la traction (ou compression). Un tel mode de sollicitation s'appelle aussi une flexion et traction (ou compression).

3.2. Flexion droite composée

3.2.1. Définition

Une flexion droite composée (Fig. 3.1), est caractérisée par une action commune de la traction (ou compression) et de la flexion plane. Ce cas particulier de la flexion composée a lieu, si les charges extérieures sont appliquées dans l'un des plans de coordonnées. Ici, dans la section droite de la poutre, il existe les efforts: N_x , T_y et M_z .

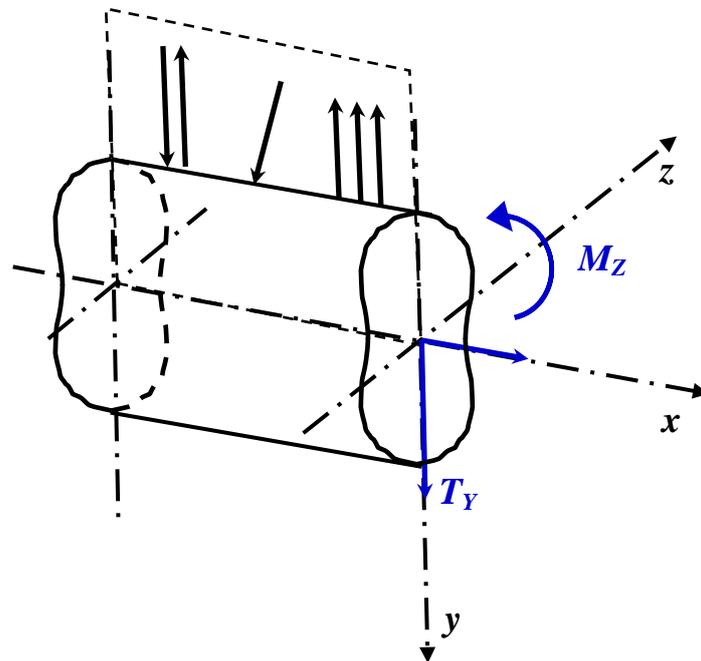


Fig. 3.1- Flexion droite composée.

3.2.2. Calcul des contraintes

Les efforts N_x et M_z provoquent des contraintes normales (σ_x) dans une section droite de la poutre; l'effort T_y provoque une contrainte tangentielle (τ_{xy}).

$$\sigma_x = \sigma_{N_x} + \sigma_{M_z} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y \quad (3.1-a)$$

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{I_{Gz}} \cdot \frac{S_{Iz}(y)}{b(y)} \quad (3.1-b)$$

On voit sur le schéma que la superposition des deux effets peut donner trois solutions différentes: soit σ_x est positif partout (Fig. 3.2-c), soit il est positif partout mais s'annule à l'extrémité supérieure (Fig. 3.2-b), soit il est positif et négatif (Fig. 3.2-d).

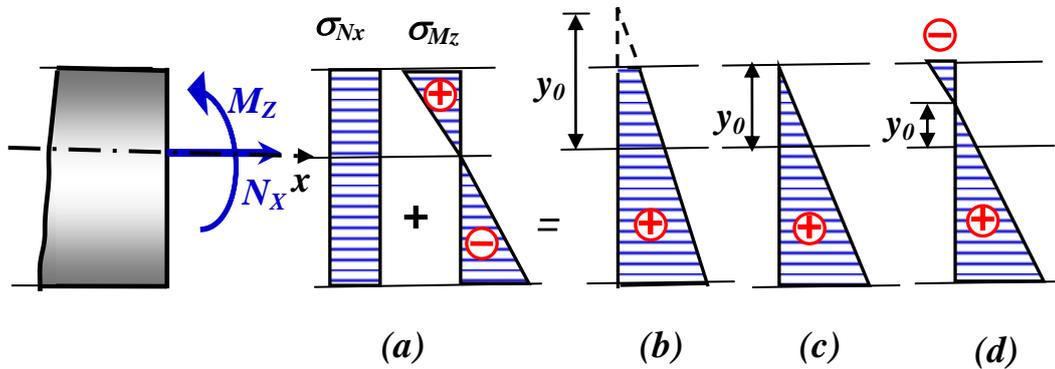


Fig. 3.2- Distribution des contraintes normales dans le cas de la flexion droite composée.

3.2.3. Position de l'axe neutre et noyau central

Dans chacun des trois cas sur les schémas précédents, on définit une coordonnée y_0 qui est la distance entre la force appliquée et la position où σ_x est nulle. Il s'agit donc de y_0 tel que:

$$\frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_0 = 0 \quad (3.2-a)$$

D'où

$$y_0 = -\frac{N_x}{M_z} \cdot \frac{I_z}{A} \quad (3.2-b)$$

On peut décrire cette double sollicitation M_z et N_x comme étant équivalente à la même force N_x excentrée en un point E d'une distance e (Fig.3.3). A ce moment là, on a que:

$$M_z = N_x \cdot e \quad (3.3)$$

et l'axe neutre devient alors :

$$y_0 = -\frac{I_{Gz}}{e \cdot A} \quad (3.4)$$

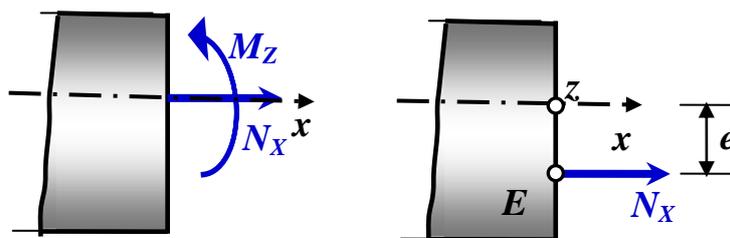


Fig. 3.3- Axe Neutre.

On définit le noyau central comme étant la zone de la section telle que, si E s'y trouve, σ_x ne change pas de signe sur toute la section (Fig. 3.2-b, Fig. 3.2-c).

3.3. Cas particulier: Traction (ou compression) droite excentrée

Dans le cas de la traction (ou compression) droite excentrée, la section droite de la poutre est sollicitée par les efforts N_x et M_z . Ici les charges extérieures appartiennent à l'un des plans de coordonnées (Fig. 3.4).

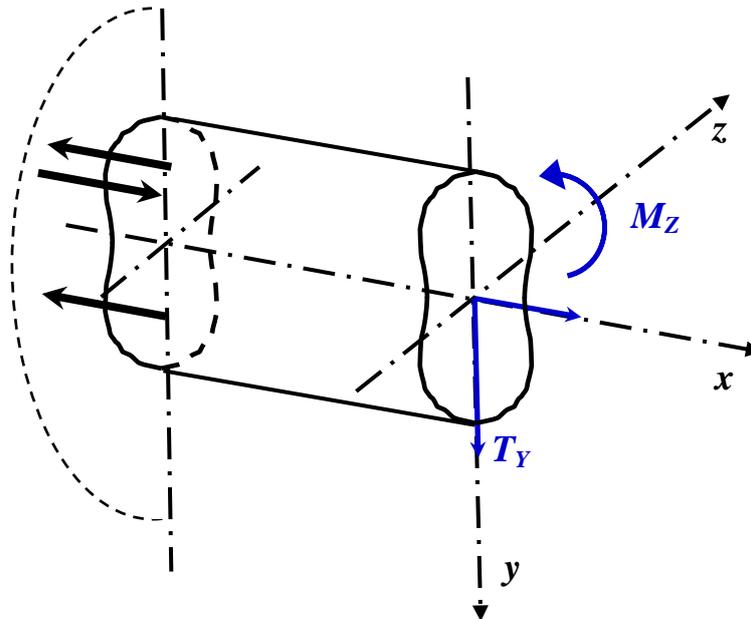


Fig. 3.4- Traction (ou compression) droite excentrée.

Pour éviter qu'il ait flambement de la poutre, nous nous limiterons à l'étude des poutres (ou barres) courtes dont la longueur n'excède pas 8 fois la plus petite dimension transversale.

La contrainte se calcule par l'équation (3.1-a) tandis que la contrainte tangentielle est nulle.

$$\sigma_x = \sigma_{N_x} + \sigma_{M_z} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y \quad (3.5-a)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad (3.5-b)$$

3.4. Flexion composée oblique

Une poutre est dite sollicitée en flexion composée oblique (ou flexion composée gauche) si elle est soumise à une action commune de la traction (ou compression) et des flexions planes par rapport aux axes y et z . Donc, dans une section droite de la poutre, il existe les efforts N_x , T_Y , M_z , T_z et M_Y (Fig. 3.5).

La flexion composée oblique peut être effectuée par un système de charges qui appartiennent aux plans passant par l'axe x ; c'est-à-dire que les charges peuvent être non perpendiculaires à l'axe x .

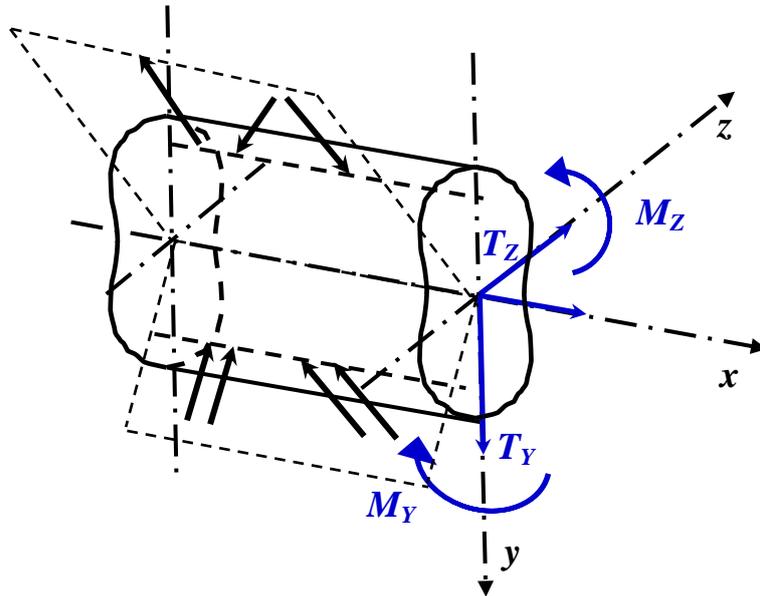


Fig. 3.5- Flexion composée oblique.

3.4.1. Calcul des contraintes

Dans ce cas, la contrainte normale est donnée par l'expression:

$$\sigma_x = \sigma_{N_x} + \sigma_{M_z} + \sigma_{M_y} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (3.6)$$

Tans disque la contrainte tangentielle peut être exprimée par l'équation (3.7) comme montré par la figure Fig.3.6:

$$\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \quad (3.7-a)$$

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{I_z} \cdot \frac{S_{I_z}(y)}{b(y)} \quad (3.7-b)$$

$$\tau_{xz} = \frac{T_z}{I_y} \cdot \frac{S_{I_y}(z)}{b(z)} \quad (3.7-c)$$

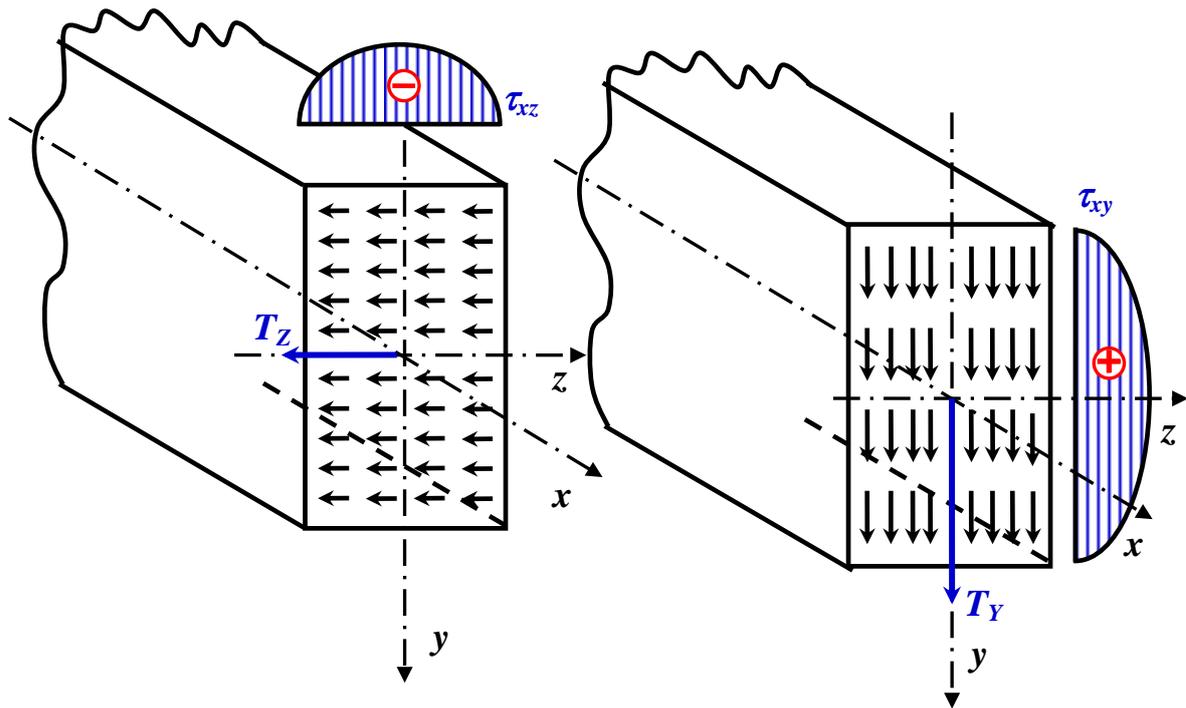


Fig. 3.6- Distribution des contraintes tangentielle.

Il faut rappeler que le signe de σ_x dépend des signes des efforts N_x , M_y et M_z et des coordonnées y et z . Les signes de τ_{xy} et τ_{xz} coïncident avec les signes des efforts T_y et T_z .

3.4.2. Position de l'axe neutre

Dans le cas général de la flexion composée, l'équation de l'axe neutre ($\sigma_x = 0$) peut être déterminée à partir de l'équation (3.6):

$$\frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_0 + \frac{M_y}{I_y} z_0 = 0 \quad (3.8)$$

Où y_0 et z_0 sont les coordonnées de l'axe neutre.

3.5. Cas particulier: Traction (ou compression) gauche excentrée

Si les charges extérieures sont dans l'espace et parallèles à l'axe x , la sollicitation est dite traction (ou compression) gauche excentrée (Fig. 3.8).

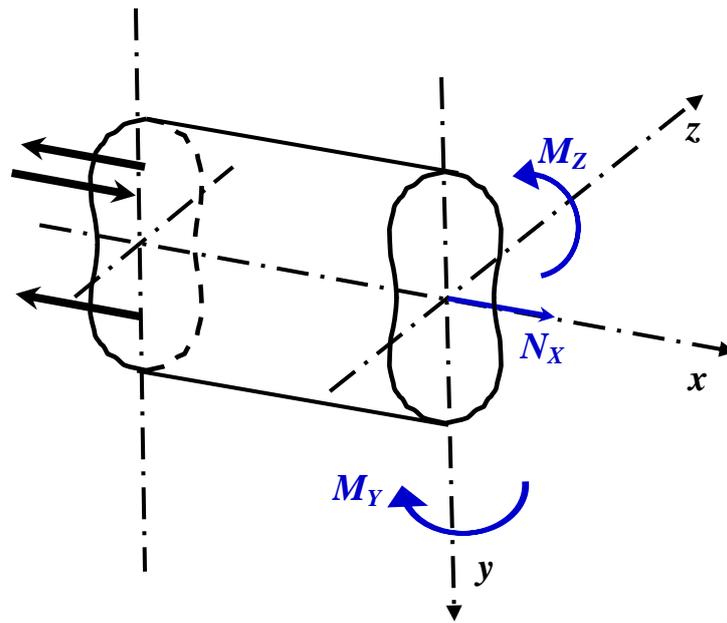


Fig. 3.7- Traction (ou compression) gauche excentrée.

3.5.1. Calcul des contraintes

Dans ce cas, la contrainte normale est donnée par l'expression (3.6) et les contraintes tangentielles sont nulles ($\tau_x = 0$):

3.5.2. Position de l'axe neutre

Dans ce cas il est commode de représenter la contrainte σ_x (Eq. 3.6) sous une autre forme. Considérons le cas de la figure 3.8. Dans une section droite de la poutre, les efforts sont:

$$N_x; \quad M_Y = N_x \cdot e_z; \quad M_Z = N_x \cdot e_y$$

Où e_y et e_z sont les coordonnées du centre de chargement (point d'application de l'effort N_x ou P).

En introduisant ces expressions des efforts dans l'équation (3.6), nous obtenons:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{N_x \cdot e_y}{I_z} y + \frac{N_x \cdot e_z}{I_y} z$$

Pour trouver la position de l'axe neutre ($\sigma_x = 0$), on détermine ses coordonnées telles que:

$$\sigma_x = N_x \left(\frac{1}{A} + \frac{e_y}{I_z} y + \frac{e_z}{I_y} z \right) = 0$$

c-à-d

(3.9)

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} \left(1 + \frac{e_y y}{i_z^2} + \frac{e_z z}{i_y^2} \right) = 0$$

Avec $i_y = I_Y / A$; $i_z = I_Z / A$ sont les rayons de giration. D'où, les coordonnées de l'axe neutre y_N et z_N (Fig. 3.10) s'obtiennent:

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad y_N = -\frac{i_z^2}{e_y} \quad (3.10-a)$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad z_N = -\frac{i_y^2}{e_z} \quad (3.10-b)$$

• **Remarque**

Dans le cas de la flexion composée, l'axe neutre ne passe pas par le centre de gravité de la section.

3.6. Calcul à la résistance

- Le calcul à la résistance se fait selon les étapes considérées en flexion simple.
- Les contraintes normales sont maximales pour les points les plus éloignés de l'axe neutre (Fig. 3.10-a).
- Ordinairement, pour ces points, les contraintes tangentielles sont assez petites et même nulles (traction ou compression droite ou gauche, ou pour les sections rectangulaires et qui peuvent être inscrites dans un rectangle (Fig. 3.10-a)).
- Pour cette raison, on néglige habituellement l'influence de τ_x sur la résistance pour les points les plus éloignés de l'axe neutre et les conditions de résistance s'écrivent:

$$\sigma_x^{max(+)} \leq [\sigma]^+ \quad (3.11-a)$$

$$\sigma_x^{max(-)} \leq [\sigma]^- \quad (3.11-b)$$

- On détermine $\sigma_x^{max(+)}$ et $\sigma_x^{max(-)}$ à l'aide de l'équation:

$$\sigma_x^{max} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_e + \frac{M_y}{I_y} z_e \quad (3.12)$$

Où y_e et z_e sont les coordonnées des points *A* et *B* (Fig. 3.11).

- Dans le cas de la flexion composée (droite ou oblique), les contraintes tangentielles peuvent influencer la résistance de la poutre. Ordinairement, τ_x est maximale au centre de gravité de la section où $\sigma_x \neq 0$. Donc le calcul à la résistance se fait selon une des théories de la résistance mentionnées dans le chapitre précédent. Cependant, l'expérience montre que la condition (3.11) est suffisante.

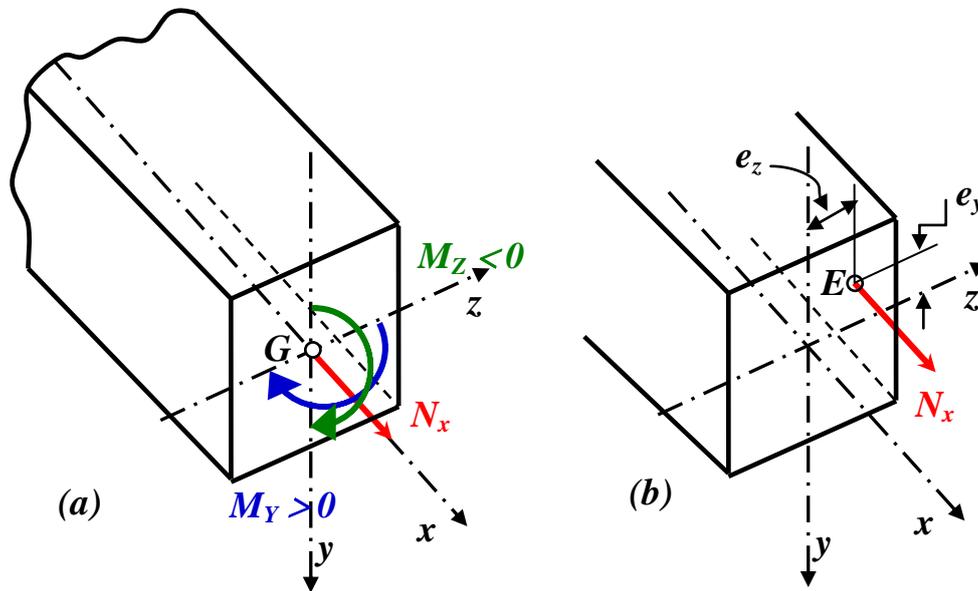


Fig. 3.8- Traction gauche excentrée.

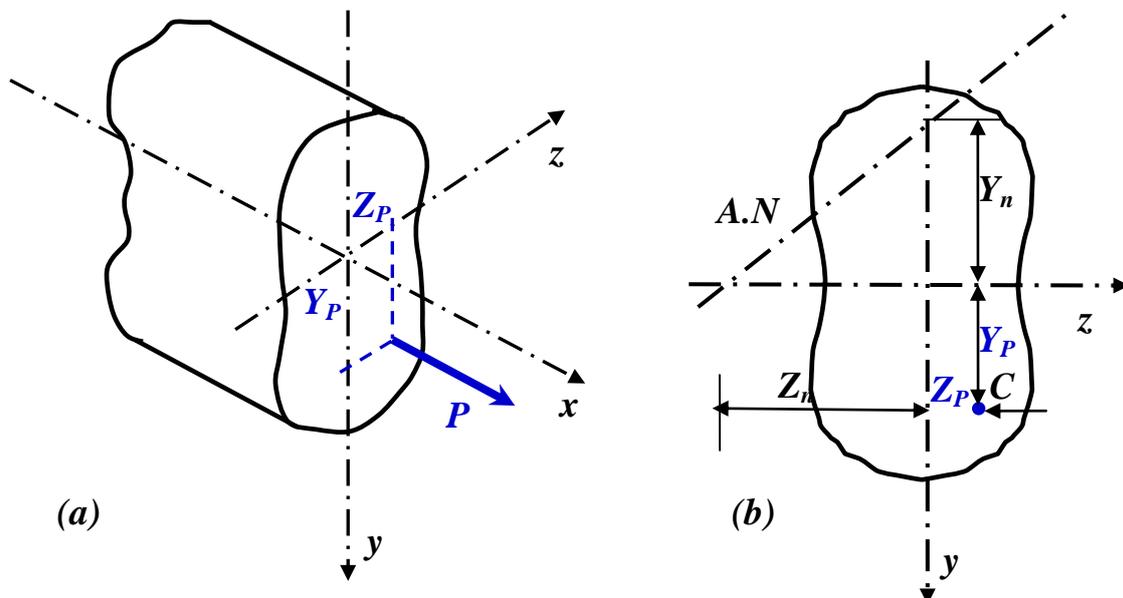


Fig. 3.9- Schématisation de l'axe neutre dans le cas d'une traction gauche excentrée.

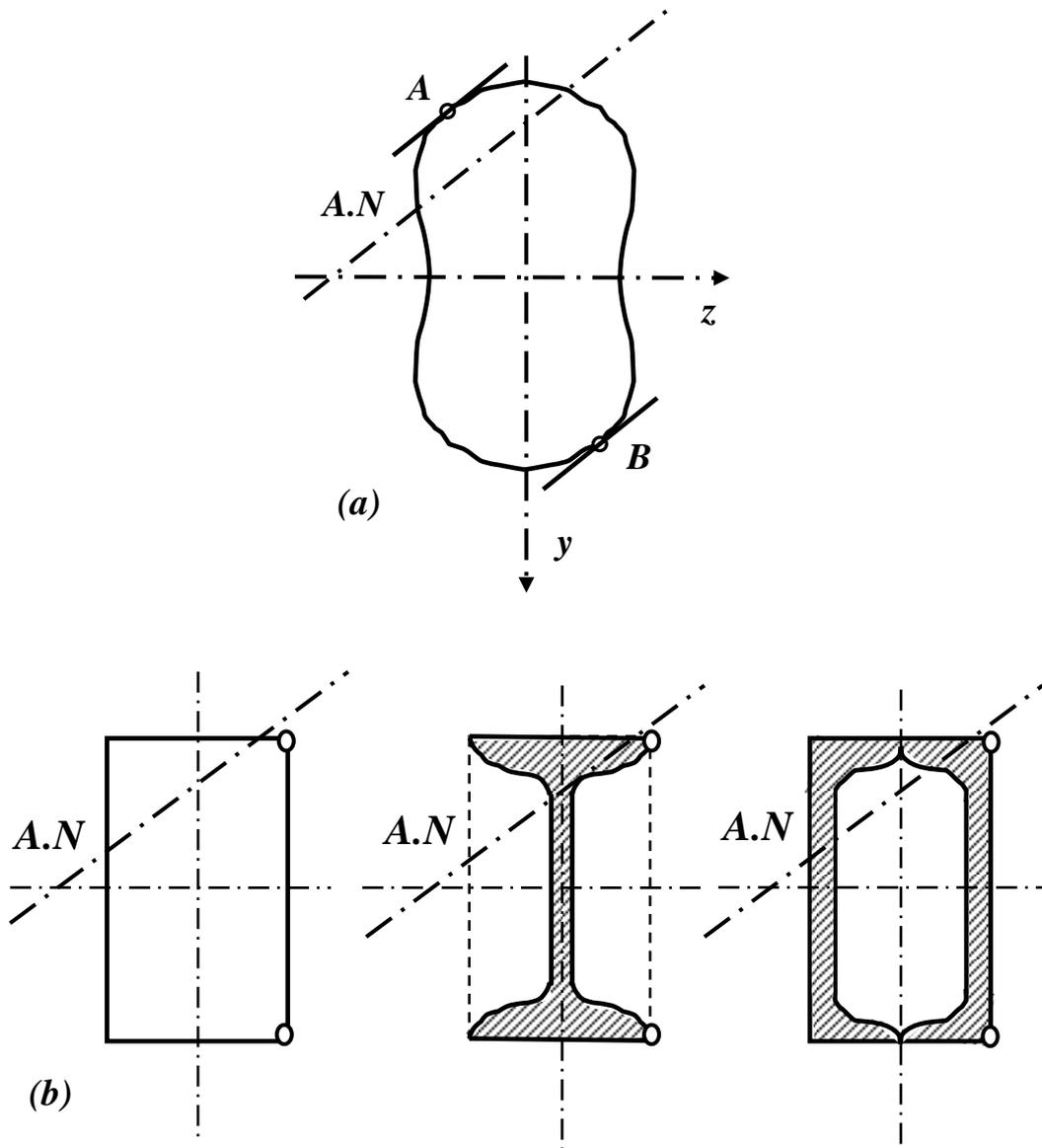


Fig. 3.10- Schématisation de l'axe neutre dans le cas général de la flexion composée.

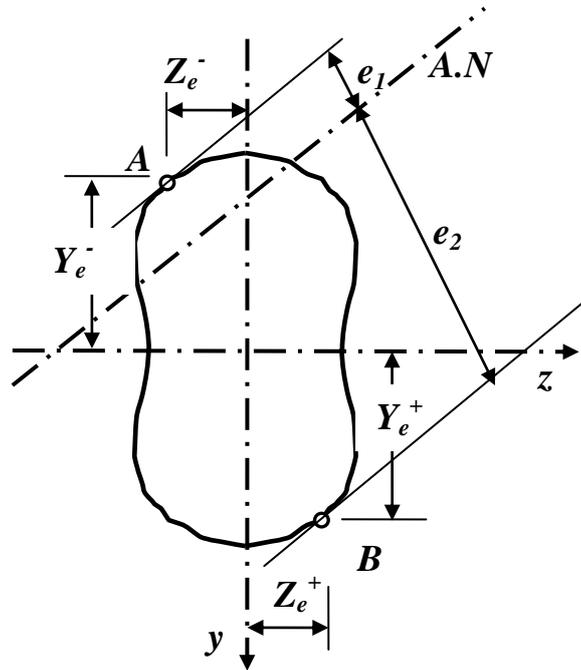


Fig. 3.11- Coordonnées des points les plus éloignés de l'axe neutre dans le cas général de la flexion composée.

• **Exemple 3.1**

Soit une poutre en acier de section transversale rectangulaire ($4\text{cm} \times h$) encastrée à son extrémité gauche et porte une charge de 8 tonnes à son extrémité droite, comme le montre la figure ci-dessous.

- 1- Donner le type de sollicitation.
- 2- Tracer les diagrammes des efforts intérieurs tout au long de la poutre.
- 3- Tracer la distribution des contraintes le long d'une section transversale de la poutre.
- 4- Déterminer la dimension h de la poutre. On donne $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$.

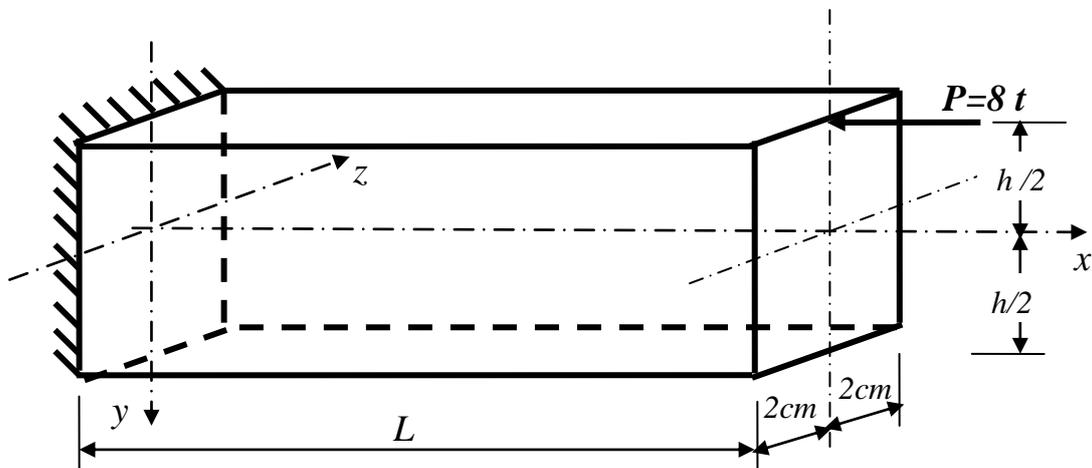


Fig. E3.1-a

• **Solution 3.1**

1- Compression droite excentrée.

2- Diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

Le schéma correspondant à la poutre est représenté sur la figure E3.1-b.

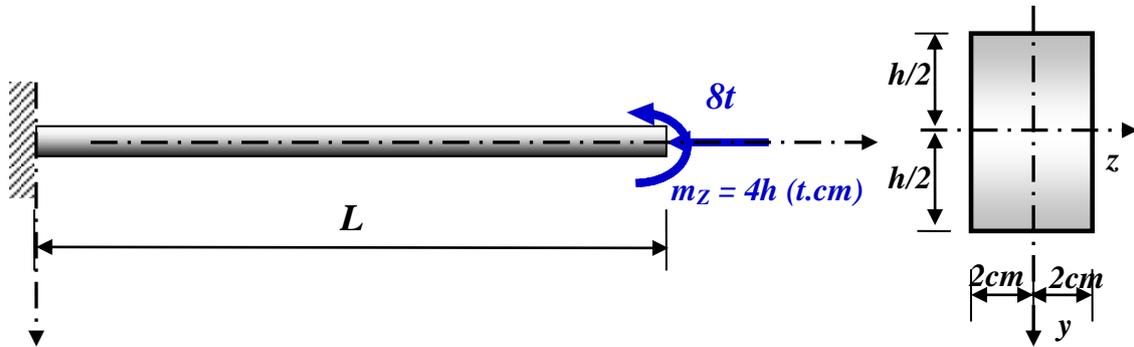


Fig. E3.1-b

Avant de tracer les diagrammes des efforts intérieurs, déterminons leurs expressions. Soit la section montrée par la figure E3.1-c:

$$\forall x \in [0, L]$$

- $\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = -8t$
- $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = 0$
- $\sum M/C = 0 \Rightarrow M_Z = m_z = 4h$

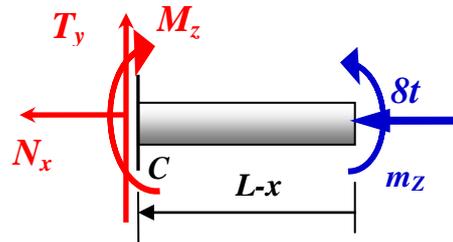


Fig. E3.1-c

Les expressions ainsi obtenues sont tracées sur la figure E3.1-d.

3- Distribution des contraintes.

$$\forall x \leq L$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_x(N_x) + \sigma_x(M_z) \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_x = \frac{-8000}{4h} + \frac{4h \cdot 10^3}{\frac{bh^3}{12}} y = \frac{-2000}{h} + \frac{12000}{h^2} y$$

Ces équations sont tracées sur la figure E3.1-e.

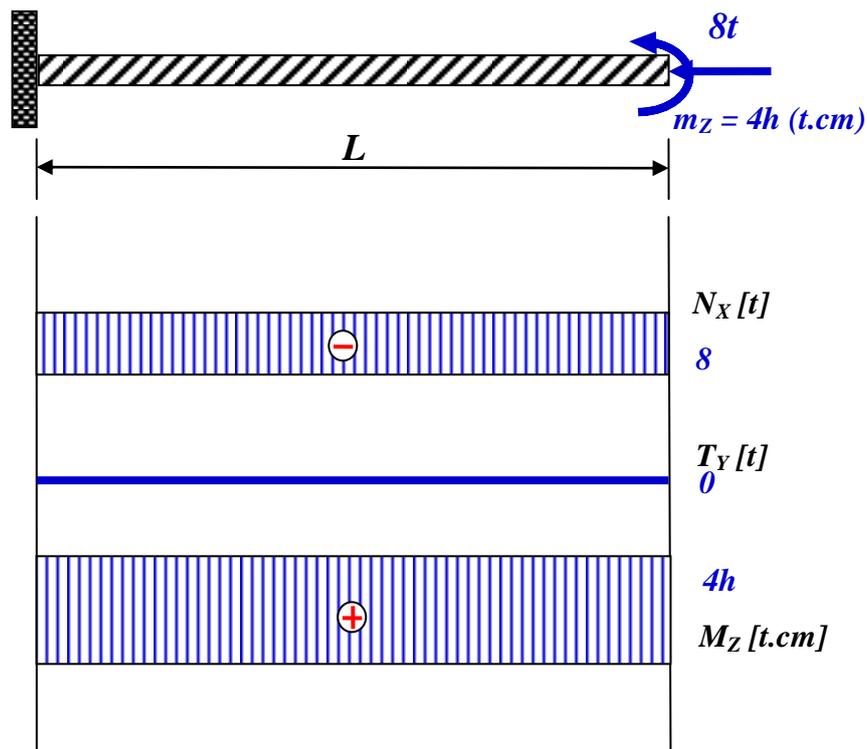


Fig. E3.1-d

4- Dimensionnement

On dimensionne à la conditions de résistance:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]$$

$$\left| \frac{-2000}{h} \right| + \left| \frac{6000}{h} \right| \leq 1600$$

$$\Rightarrow h \geq 5cm$$

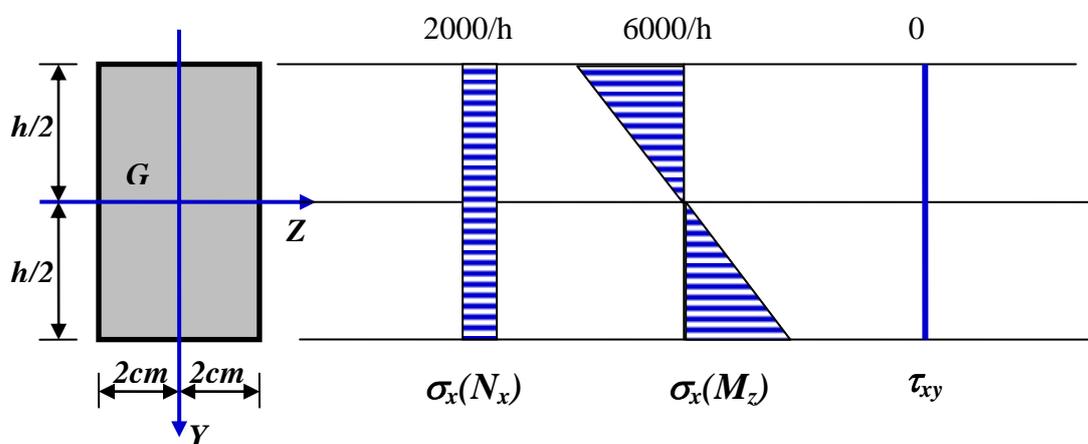


Fig. E3.1-e

• **Exemple 3.2**

Soit une poutre en bois de section transversale rectangulaire (6 x 10cm) encastrée à son extrémité gauche et sollicitée comme le montre la figure ci-dessous. On donne $P_x = 1,2P$, $P_y = 0,86P$, $P_z = 0,5P$ (P en Kg), $L = 200$ cm, $[\sigma]^+ = 100$ kg/cm² et $[\sigma]^- = 120$ kg/cm².

- 1- Donner le mode de sollicitation.
- 2- Tracer les diagrammes des efforts intérieurs tout au long de la poutre.
- 3- Tracer la distribution des contraintes à la section dangereuse.
- 4- Tracer l'axe neutre.
- 5- Déterminer une capacité de charge P à partir des conditions de résistance.

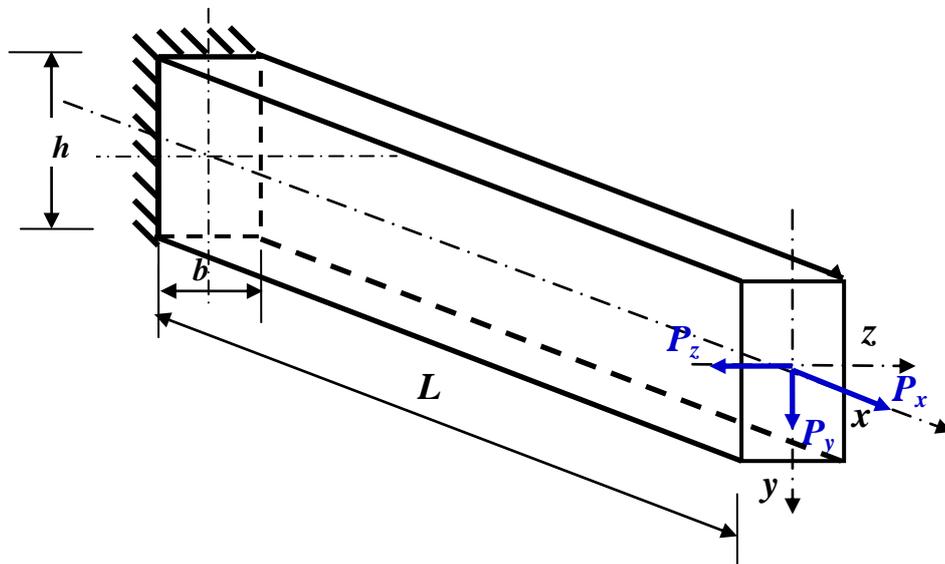


Fig. E3.2-a

• **Solution 3.2**

La poutre est schématisée sur la figure (E3.2-b).

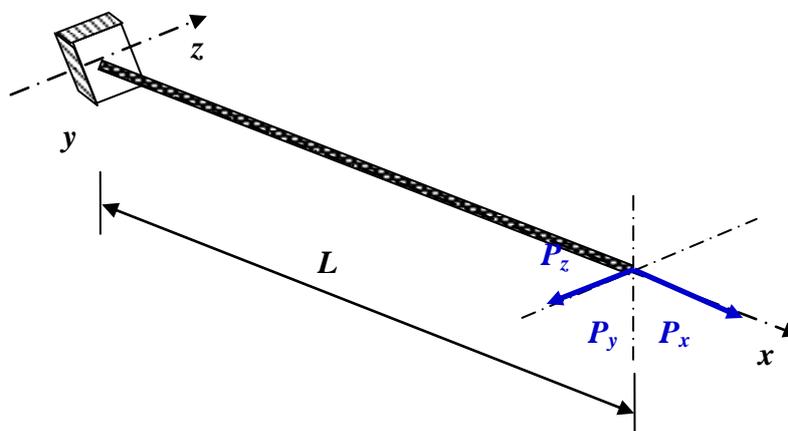


Fig. E3.2-b

1- Flexion composée déviée

2- Diagrammes des efforts intérieurs

Pour $0 \leq x \leq L$ (Fig. E3.2-c)

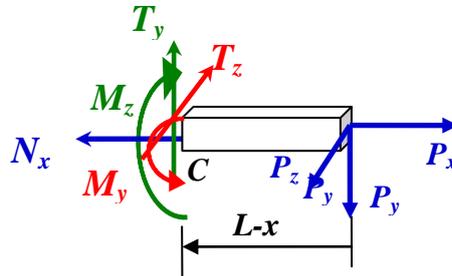


Fig. E3.2-c

- $N_x = P_x = 1,2 P$ (kg)

Plan xoy

- $T_y = P_y = 0,86P$ (kg)
- $M_z = -P_y(x) = -0,86P(x)$ (kg.cm)

Plan xoz

- $T_z = -P_z = -0,5P$ (kg)
- $M_y = P_z(x) = 0,5P(x)$ (kg.cm)

Les diagrammes des efforts intérieurs sont tracés sur la figure (E3.2-d).

3- Distribution des contraintes à la section dangereuse

La section dangereuse est à l'encastrement avec:

$$N_x = 1,2 P \text{ (kg)}, T_y = 0,86P \text{ (kg)}, M_z = -0,86P(x) \text{ (kg.cm)}, T_z = -0,5P \text{ (kg)},$$

$$M_y = 0,5P(x) \text{ (kg.cm)}$$

Nous avons un cas de flexion composée oblique, le calcul de la contrainte normale se fait selon l'équation (3.6):

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

$$A = bh = 60 \text{ cm}^2$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \cdot 10^3}{12} = 500 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{b^3 h}{12} = \frac{6^3 \cdot 10}{12} = 180 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_x = \frac{1,2P}{60} - \frac{172}{500} y + \frac{100}{180} z$$

$$\sigma_x = 0,02P - 0,344Py + 0,556Pz$$

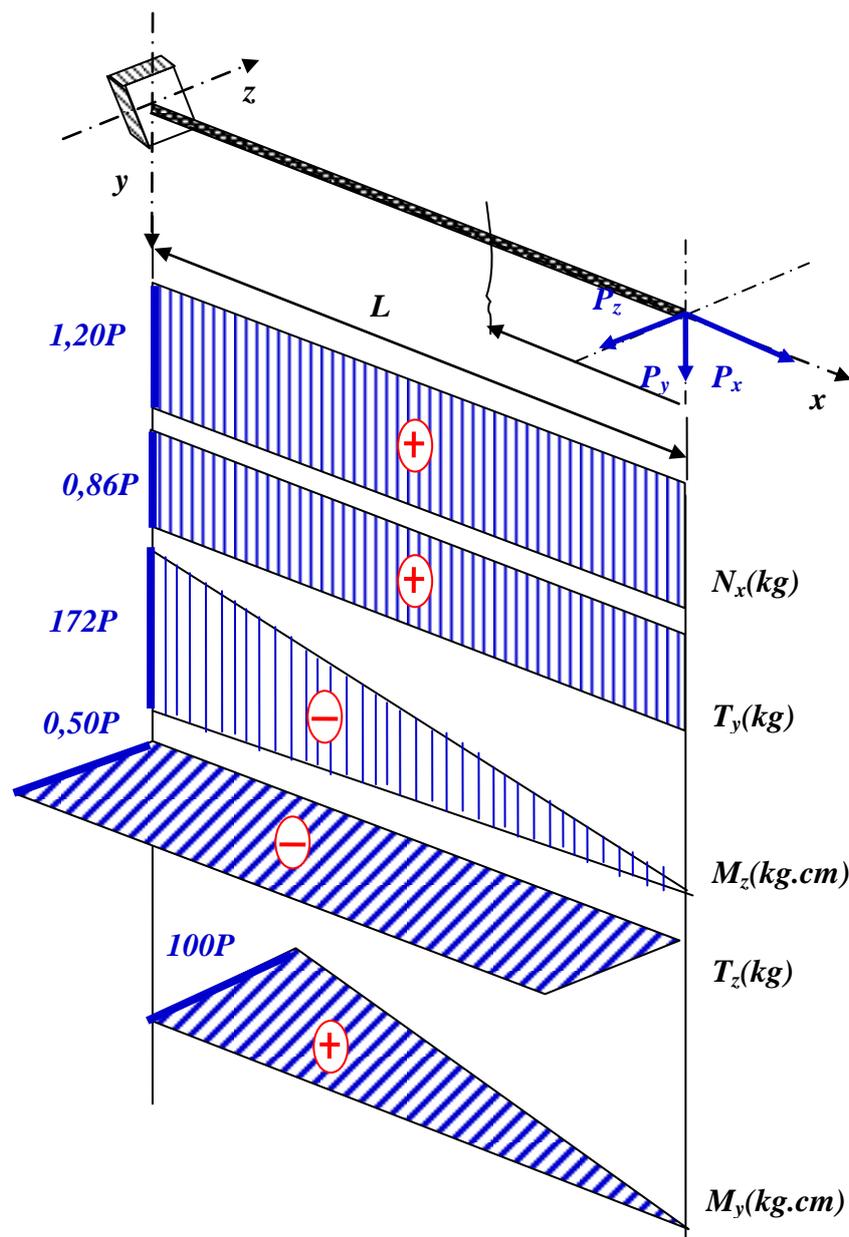


Fig. E3.2-d

Puisque la section droite de la poutre est rectangulaire, nous calculons les contraintes aux quatre points A, B, C, D, nous obtenons les valeurs:

$$\sigma_x^A = 0,02P - 0,344P(-5) + 0,556P(-3) = 0,07P$$

$$\sigma_x^B = 0,02P - 0,344P(-5) + 0,556P(+3) = 3,41P$$

$$\sigma_x^C = 0,02P - 0,344P(+5) + 0,556P(+3) = -0,03P$$

$$\sigma_x^D = 0,02P - 0,344P(+5) + 0,556P(-3) = -3,37P$$

Ces valeurs sont tracées à la section dangereuse comme montré sur la figure (E3.2-e).

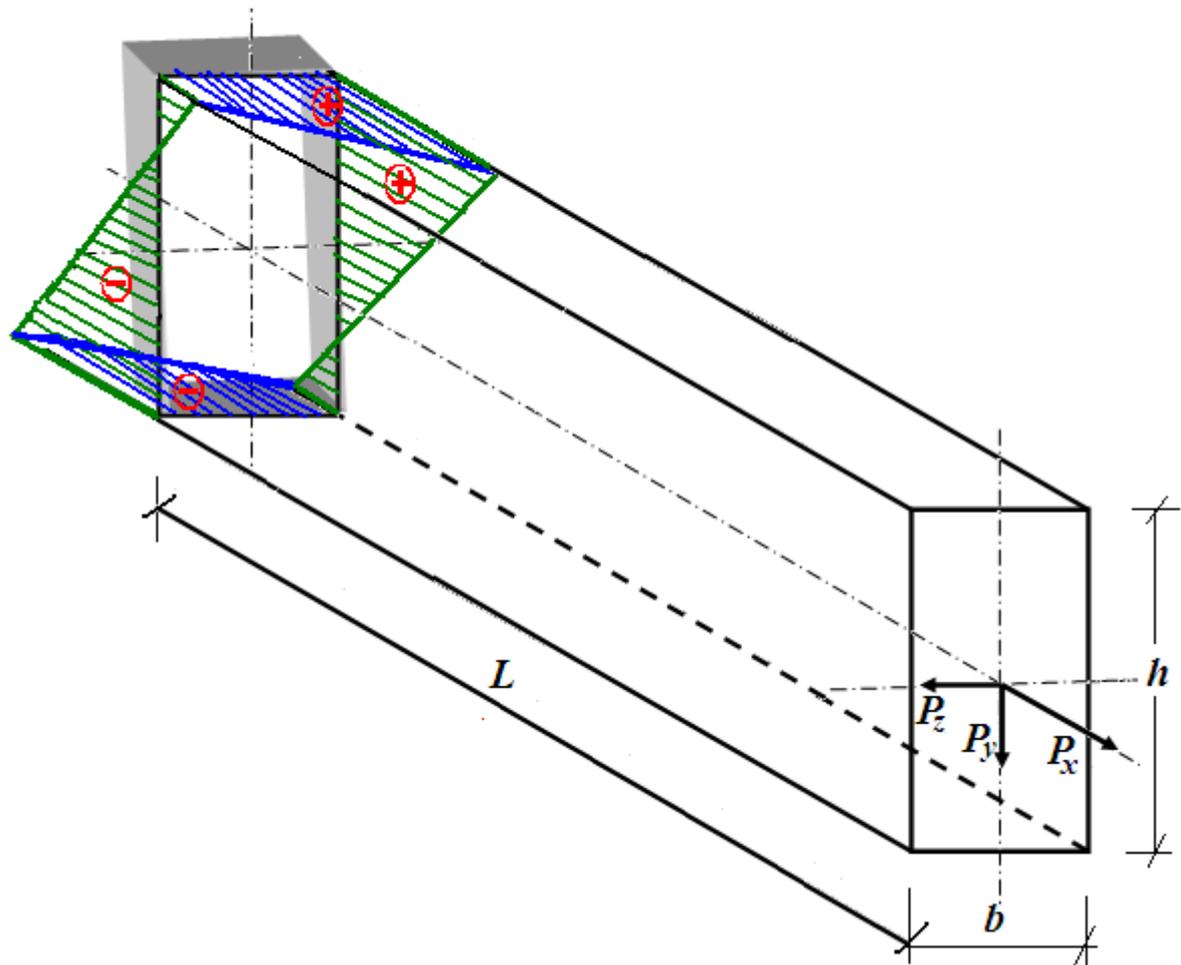


Fig. E3.2-c

4- Tracé de l'axe neutre

Pour tracer l'axe neutre on résout l'équation:

$$\sigma_x = 0,02P - 0,344Py_0 + 0,556Pz_0 = 0$$

$$\begin{cases} z_0 = 0 \Rightarrow y_n = 0,058\text{cm} \\ y_0 = 0 \Rightarrow z_n = -0,04\text{cm} \end{cases}$$

y_n et z_n sont les coordonnées de l'axe neutre que l'on reporte sur la figure (E3.2-f).

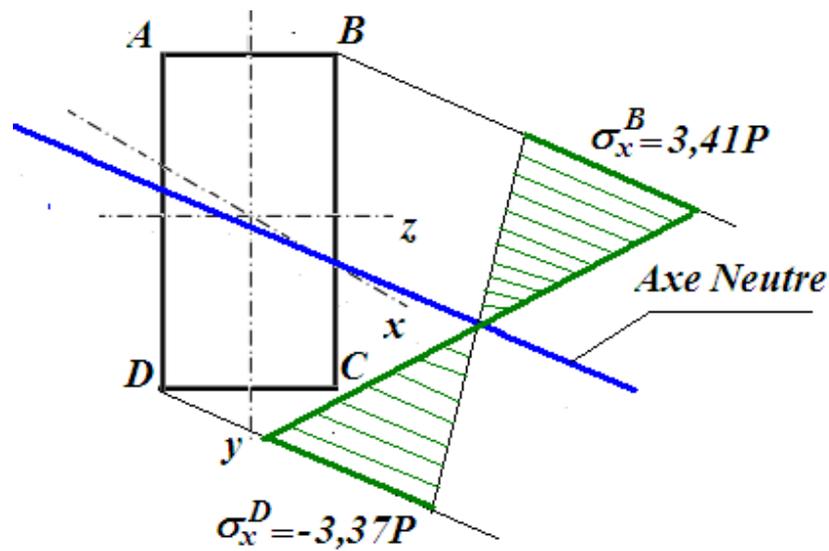


Fig. E3.2-f

On constate que la contrainte normale atteint ses extremums aux points les plus éloignés de l'axe neutre. Le point B étant le plus tendu, la contrainte est σ_{max}^+ . le point D étant le plus comprimé, la contrainte est σ_{max}^- .

Les contraintes tangentielles se calculent par les équation (3.7) et leurs représentations sont similaires à celles de la figure (3.6).

5- Capacité de charge P à partir des conditions de résistance.

A partir des conditions de résistance:

$$\sigma_x^{max(+)} \leq [\sigma]^+ \Rightarrow 3,41P \leq 100 \Rightarrow P \leq 29,33\text{kg}$$

$$\sigma_x^{max(-)} \leq [\sigma]^- \Rightarrow 3,37P \leq 120 \Rightarrow P \leq 35,61\text{kg}$$

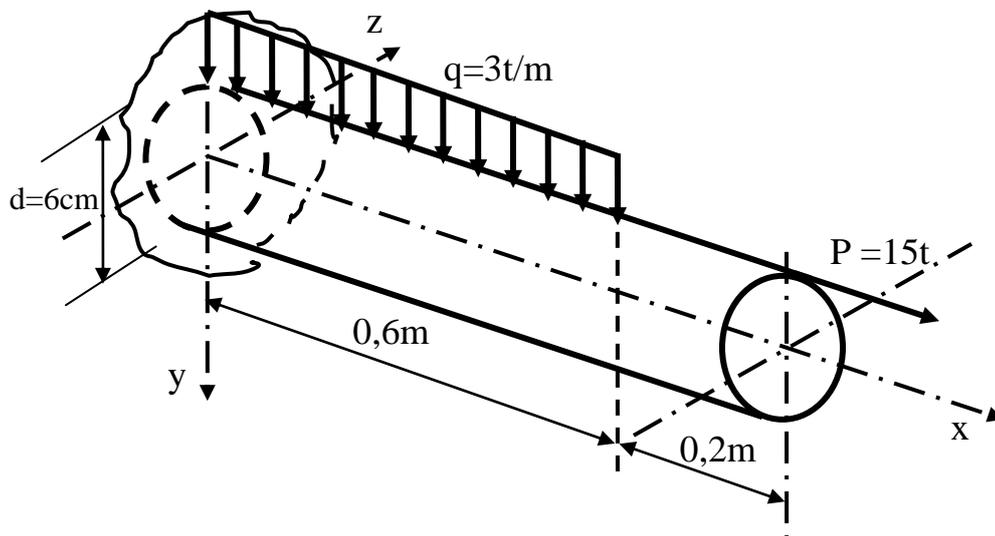
D'où $P \leq 29,33\text{kg}$

Exercices

Exercice N°1

Soit une poutre en acier de section transversale ronde, comme le montre la figure ci-dessous.

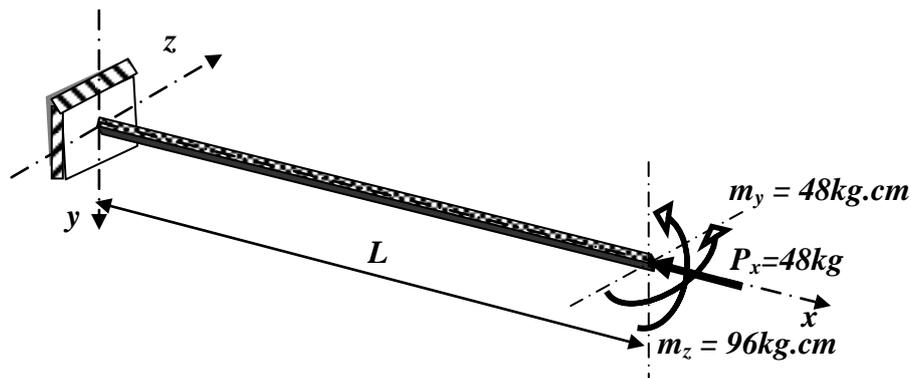
- 1- Donner le type de sollicitation.
 - 2- Tracer les diagrammes des efforts intérieurs tout au long de la poutre.
 - 3- Déterminer la section dangereuse.
 - 4- Tracer la distribution des contraintes normales et tangentielle tout au long de la section transversale de la poutre, pour la section dangereuse.
 - 5- Vérifier si les conditions de résistance sont satisfaites au niveau de la section dangereuse.
- On donne $[\sigma]=1600 \text{ kg/cm}^2$ et $[\tau]=1100 \text{ kg/cm}^2$.



Exercice N°2

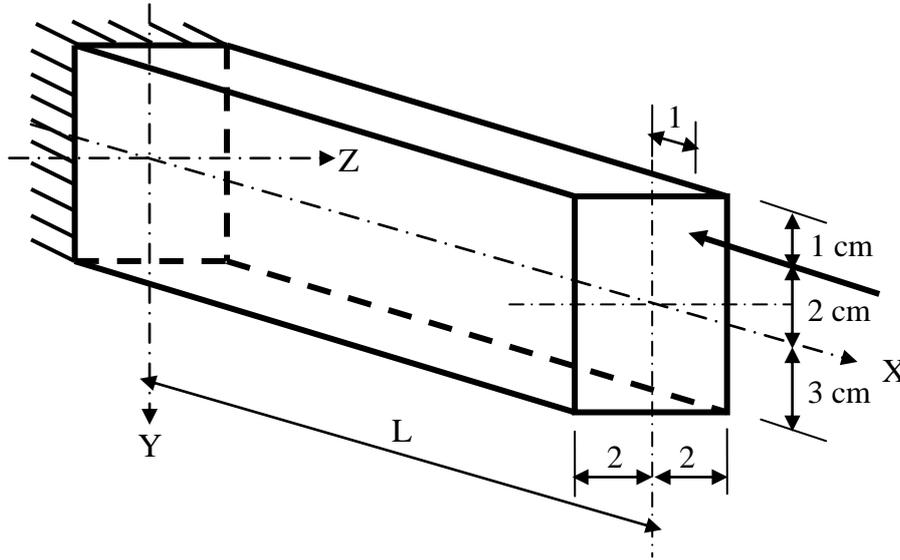
Pour la poutre schématisée par la figure ci-dessous:

- 1- Déterminer le type de sollicitation.
- 2- Tracer les diagrammes des efforts intérieurs.
- 3- Construire le diagramme des contraintes normales le long d'une section droite de la poutre.



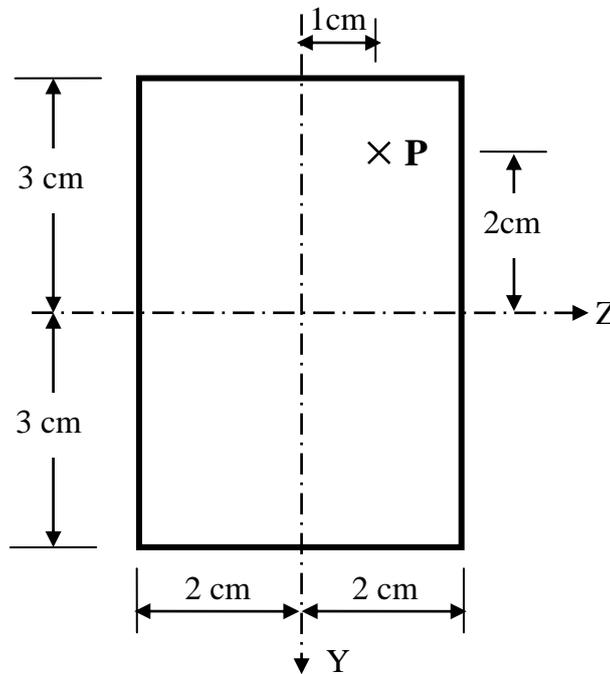
Exercice N°3

Vérifier la résistance de la poutre schématisée par la figure ci-dessous. Le matériau utilisé est du béton non armé, $[\sigma]^+ = 3 \text{ kg/cm}^2$, $[\sigma]^- = 20 \text{ kg/cm}^2$.



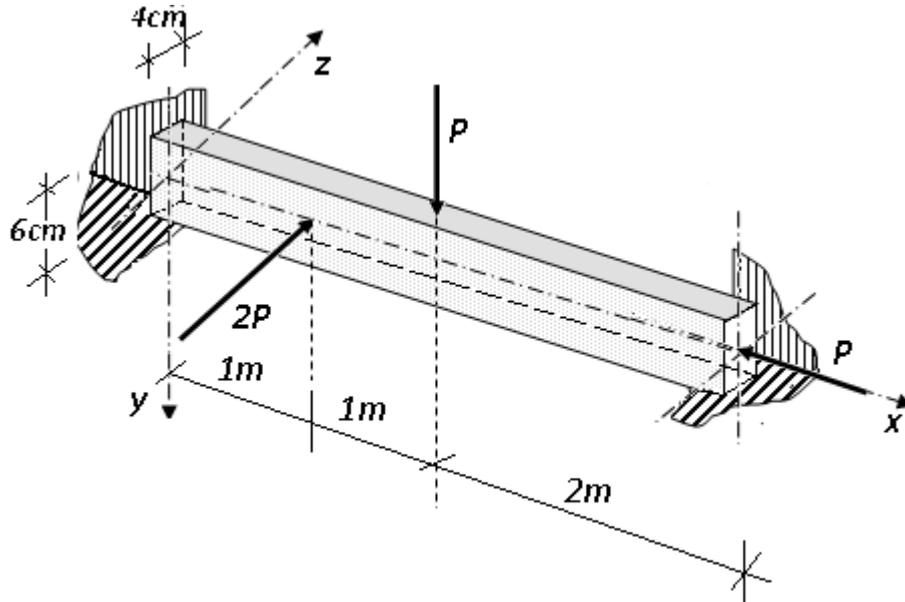
Exercice N°4

Tracer l'axe neutre pour la section droite, montrée par la figure ci-dessous, d'une poutre sollicitée en compression gauche excentrée. On donne $P = 48 \text{ kg}$.



Exercice N°5

Soit une poutre en acier de section transversale rectangulaire appuyée simplement à ses extrémités et chargée comme montré sur la figure ci-dessous. Déterminer une capacité de charge P . on donne $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$.



CHAPITRE 4

ETATS DE CONTRAINTES

4.1. Etat de contrainte en un point

Un système de forces extérieures appliqué à un corps crée à l'intérieur de ce corps des efforts intérieurs. Celles-ci naissent des effets des particules élémentaires du corps entre elles. Pour chaque force élémentaire existe une contrainte. Le vecteur *contrainte* peut être décomposé en un vecteur *normal* à la facette sur laquelle il s'exerce et en un vecteur *tangent* (Fig. 4.1).

Rappelons qu'une contrainte est un effort par unité de surface qui s'exerce dans le matériau.

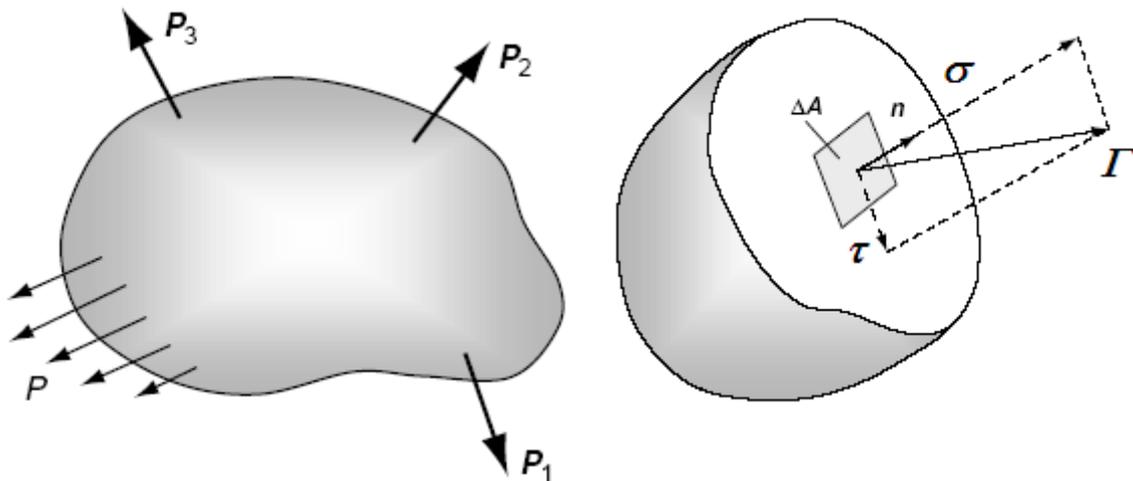


Fig. 4.1- Etat de contrainte sur une facette.

- On appelle σ *contrainte normale*,
- et on appelle τ *contrainte tangentielle* (ou de cisaillement).

• Définition

On appelle *état de contrainte* en un point d'un corps, l'ensemble des contraintes normales et tangentielles qui s'exercent dans toutes les directions à partir de ce point.

Pour pouvoir déterminer, en un point, la contrainte sur une facette quelconque il suffit donc de connaître les contraintes, en ce point, sur 3 facettes. Pour faciliter les calculs nous considérerons les trois facettes ayant pour normales x , y , z . Sur ces facettes les composantes des contraintes ont les valeurs indiquées sur la figure 4.2.

- σ est guidé par la normale et τ est guidé par la normale et la facette.

Ainsi, dans le cas général, tout point matériel d'un corps, sollicité arbitrairement, se trouve soumis à « neuf » composantes de contraintes (Fig. 4.3).

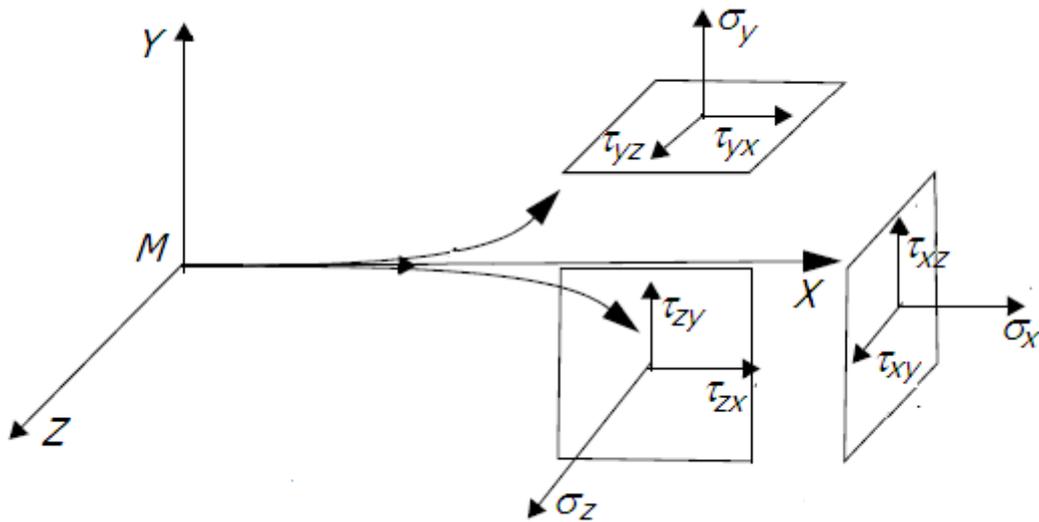


Fig. 4.2- Etat de contrainte sur une facette.

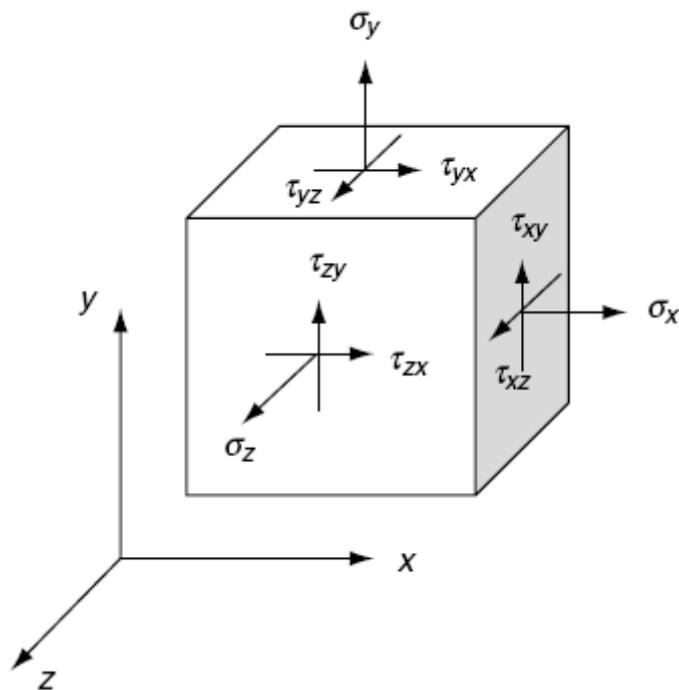


Fig. 4.3- Représentation de l'état de contrainte en un point.

L'état de contrainte en un point est, donc, représenté par un tenseur (Eq. 4.1):

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Pour que le corps soit en équilibre, il faut que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (4.2)$$

4.2. Etat de contrainte plan

4.2.1. Définition

Si un élément plan est soumis aux contraintes σ_x , σ_y et τ_{xy} (Fig. 4.4), on dit que l'élément est en *état de contraintes plan*.

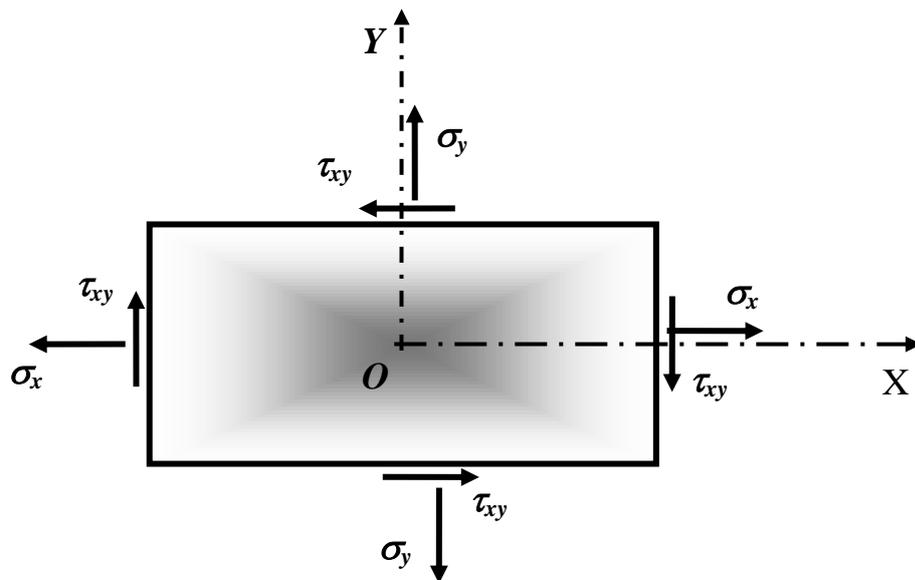


Fig. 4.4- Etat de contrainte plan.

4.2.2. Convention de signe

- 1) Contraintes normales
 - Contrainte de compression: $\sigma < 0$
 - Contrainte de traction: $\sigma > 0$
- 2) Contraintes tangentielles
 - Dans le sens des aiguilles d'une montre: $\tau > 0$
 - Dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre: $\tau < 0$

- **Exemple 4.1**

Soit une barre droite, de section A constante, soumise à une force axiale F .

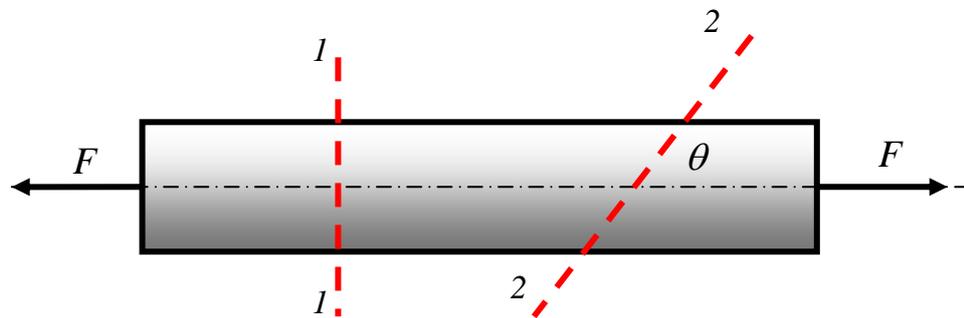


Fig. E4.1-a

Déterminer les contraintes normales et tangentielles sur un plan normal à l'axe de la barre (plan 1-1) et sur un autre faisant un angle θ avec l'axe de la barre (plan 2-2).

- **Solution 4.1**

Plan 1-1

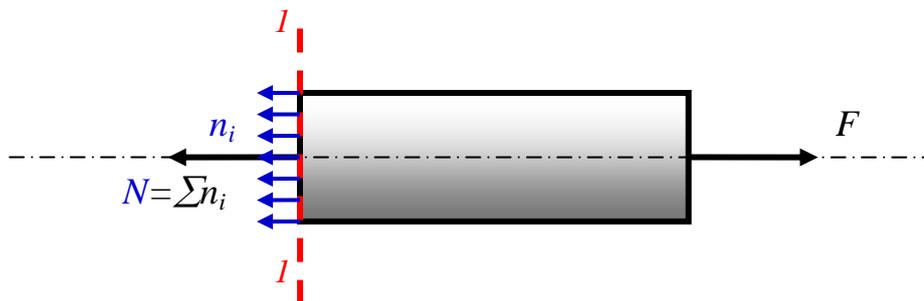


Fig. E4.1-b

$$\begin{cases} \sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} = \sigma_x; & \sigma \leq [\sigma] \\ \tau = 0 \end{cases}$$

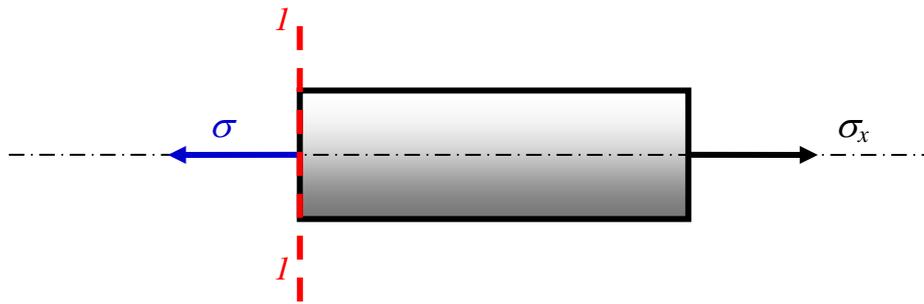


Fig. E4.1-c

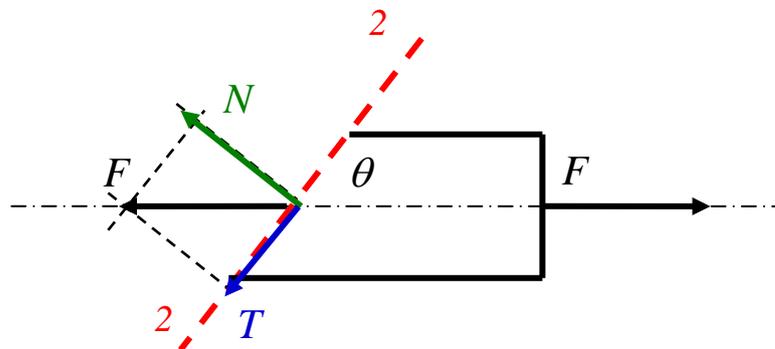
Plan 2-2

Fig. E4.1-d

$$\sigma_{\theta} = N/A' = F/A \cdot \sin^2 \theta = \sigma_x \cdot \sin^2 \theta$$

$$\tau_{\theta} = T/A' = F/A \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta = \sigma_x \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$$

Avec

$$N = F \cdot \sin \theta, T = F \cdot \cos \theta, A' = A / \sin \theta$$

Des relations trigonométriques:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}, \quad \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sin(2\alpha)}{2}$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_x / 2 \cdot (1 - \cos 2\theta) \quad ; \quad \sigma_{\max} = \sigma_x / 2 \quad \text{pour } \theta = 90^\circ$$

$$\tau_{\theta} = \sigma_x / 2 \cdot \sin 2\theta \quad ; \quad \tau_{\max} = \sigma_x / 2 \quad \text{pour } \theta = 45^\circ$$

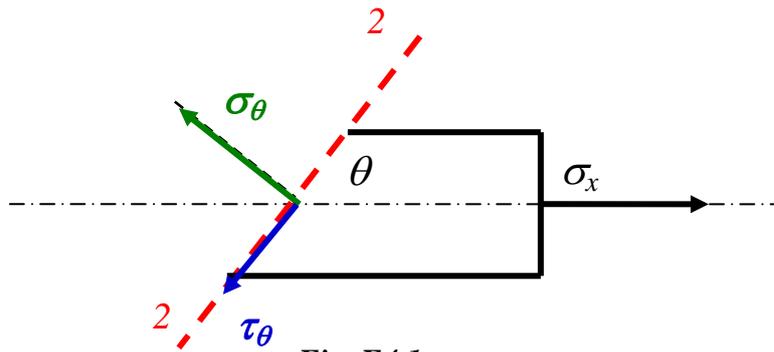


Fig. E4.1-e

- La contrainte normale maximale agit sur les sections perpendiculaires à l'axe de la barre.
- La contrainte tangentielle maximale agit sur un plan faisant un angle de 45° par rapport à l'axe de la barre.

4.2.3. Contraintes sur un plan incliné

On considère l'état de contraintes plan (Fig. 4.5). On voudrait étudier l'état de contraintes sur un plan incliné dont la normale fait un angle α avec l'axe ox .

$$\sum F_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_\alpha \cdot S_\alpha - \sigma_x \cdot S_x \cdot \cos \alpha - \sigma_y \cdot S_y \cdot \sin \alpha + \tau_{xy} \cdot S_x \cdot \sin \alpha + \tau_{xy} \cdot S_y \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tau_\alpha \cdot S_\alpha - \sigma_x \cdot S_x \cdot \sin \alpha + \sigma_y \cdot S_y \cdot \cos \alpha - \tau_{xy} \cdot S_x \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} \cdot S_y \cdot \sin \alpha = 0$$

Ou encore

$$\sigma_\alpha \cdot 1 - \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha - \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \cdot \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{xy} \cdot \sin \alpha \cos \alpha = 0 \quad (4.3-a)$$

$$\tau_\alpha \cdot 1 - \sigma_x \cdot \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_y \cdot \sin \alpha \cos \alpha - \tau_{xy} \cdot \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \cdot \sin^2 \alpha = 0 \quad (4.3-a)$$

Des relations trigonométriques:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

On obtient:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (4.4)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (4.5)$$

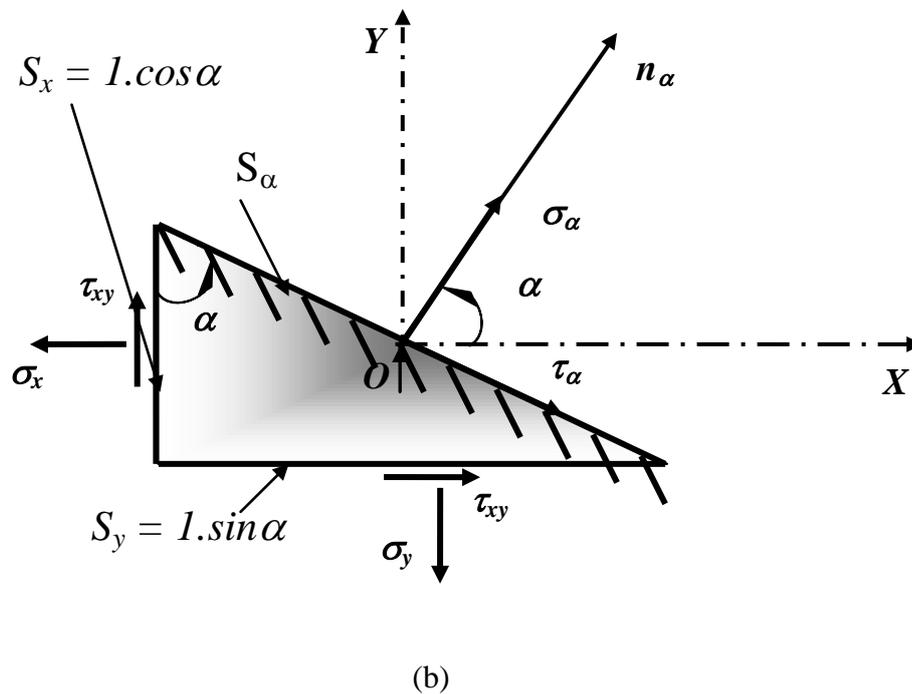
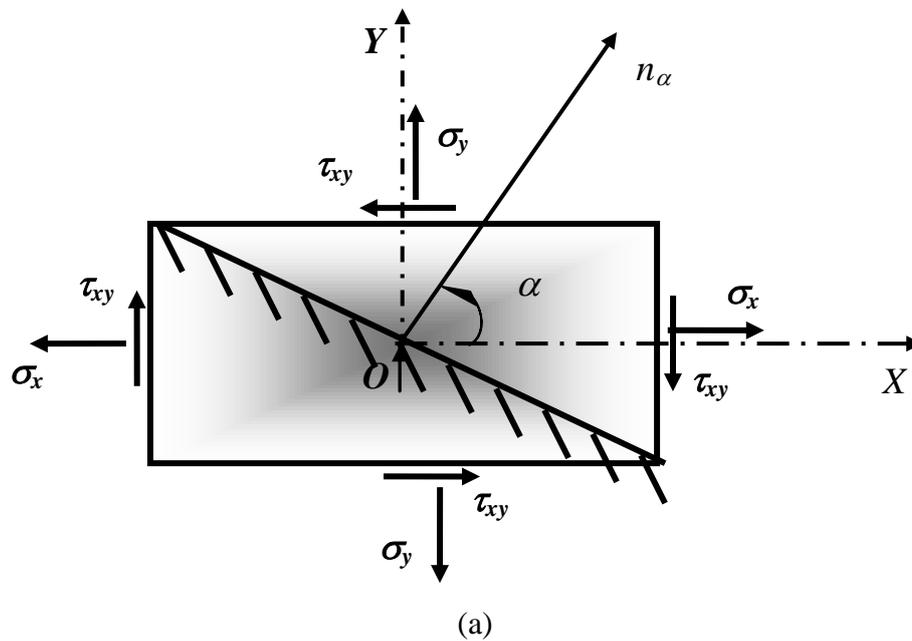


Fig. 4.5- Etat de contrainte sur un plan incliné.

4.3. Cercle de Mohr

Pour tracer le cercle de Mohr on suit les étapes suivantes (Fig. 4.6):

- 1- tracer un repère perpendiculaire et orthonormé (O, σ, τ)
- 2- placer les points $A(\sigma_x, \tau_{xy})$ et $B(\sigma_y, -\tau_{xy})$ dans ce repère

3- déduire le point C , point d'intersection de la droite AB et l'axe des abscisses

Pour déduire du cercle de *Mohr* les contraintes sur un plan incliné dont la normale fait un angle α avec l'axe ox , il suffit de déterminer le point « D » qui fait un angle 2α avec le point A et dans le même sens, c-à-d $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})2\alpha$.

Les coordonnées du point D sont $(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$.

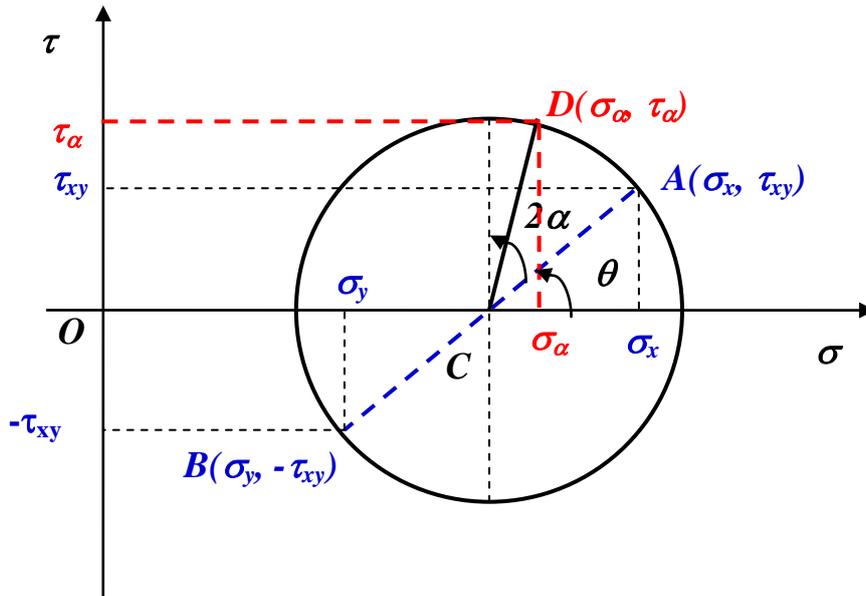


Fig. 4.6- Cercle de *Mohr*.

Du cercle de *Mohr* on remarque que:

$$\sigma_\alpha = \overline{OC} + R \cos(\theta + 2\alpha); \quad \tau_\alpha = R \sin(\theta + 2\alpha)$$

Avec

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; \quad R \cos \theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}; \quad R \sin \theta = \tau_{xy}$$

et les relations trigonométriques:

$$\cos(\theta + 2\alpha) = \cos \theta \cos 2\alpha - \sin \theta \sin 2\alpha$$

$$\sin(\theta + 2\alpha) = \sin \theta \cos 2\alpha + \cos \theta \sin 2\alpha$$

Nous retrouvons les équations (4.4) et (4.5).

- **Exemple 4.2**

Un élément plan est soumis aux contraintes $\sigma_x = 50 \text{ MPa}$ et $\sigma_y = 50 \text{ MPa}$. Déterminer la contrainte de cisaillement existante dans cet élément. Quelle forme prend le cercle de Mohr ?

- **Solution 4.2**

En remplaçant les contraintes σ_x et σ_y dans les équations (4.4) et (4.5), on obtient:

$$\forall \alpha, \sigma_\alpha = 50 \text{ MPa et } \tau_\alpha = 0$$

Cet état de contraintes est représenté sur la figure (E4.2):

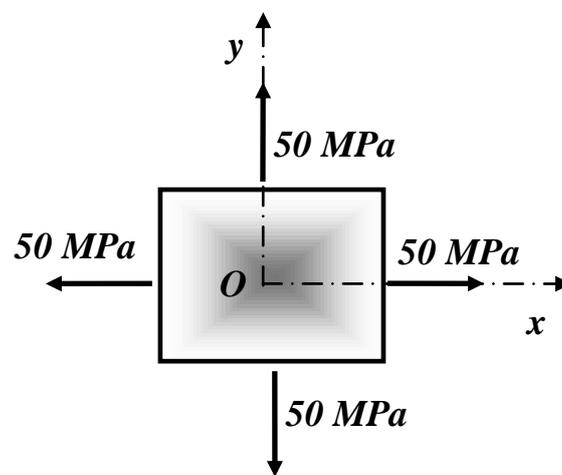


Fig. E4.2

Le cercle de **Mohr** prend la forme d'un point.

- **Exemple 4.3**

Tracer le cercle de **Mohr** pour un élément plan soumis aux contraintes $\sigma_x = 50 \text{ MPa}$ et $\sigma_y = -50 \text{ MPa}$. Déduire du cercle de **Mohr** l'état de contraintes sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 20^\circ$ avec l'axe ox .

- **Solution 4.3**

Cet état de contrainte est dessiné sur le plan physique et le cercle de **Mohr** suivants:

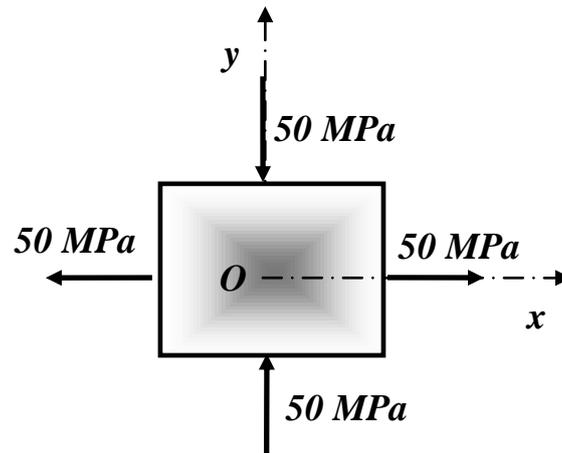


Fig. E4.3-a

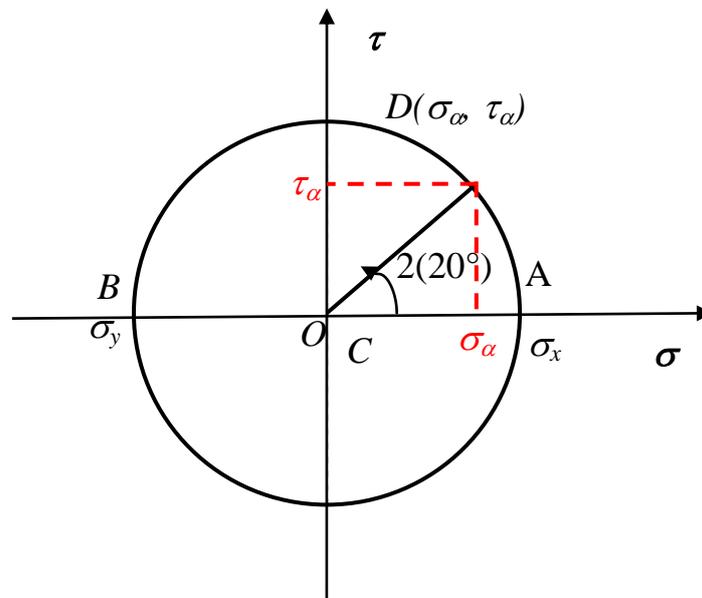


Fig. E4.3-b

On a $R = \sigma_x$

$$\sigma_\alpha = R \cos 40^\circ = 38,3 \text{ MPa}$$

$$\tau_\alpha = R \sin 40^\circ = 32,1 \text{ MPa}$$

4.4. Contraintes principales

Il existe des valeurs de α pour lesquelles les contraintes σ sont extremum pour un état de contraintes défini par σ_x , σ_y et τ_{xy} . Ces valeurs peuvent être obtenues en dérivant l'équation (4.4) par rapport à α .

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0 &\Rightarrow -2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0 \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau_\alpha = 0$$

D'où

$$\operatorname{tg}(2\alpha_p) = -\frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \quad (4.6)$$

- α varie de 0 à 180°
- 2α varie de 0 à $360^\circ \Rightarrow 2$ solutions à l'équation (4.4) : ($2\alpha_0$ et $2\alpha_0 + 180^\circ$)

En remplaçant dans l'équation (4.4) α par (α_0) et (α_0 et $+90^\circ$), on détermine les contraintes extremum σ_{max} et σ_{min} avec:

$$\cos(2\alpha_0 + 180^\circ) = -\cos 2\alpha_0 \quad ; \quad \sin(2\alpha_0 + 180^\circ) = -\sin 2\alpha_0$$

D'où :

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4.7-a)$$

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4.7-b)$$

- Les contraintes σ_{max} et σ_{min} sont appelées *contraintes principales* et les plans sur lesquels s'y trouvent s'appellent *plans principaux*.
- Les contraintes tangentielles sont nulles sur les *plans principaux*.

❖ Contraintes tangentielles extremum

On obtient les valeurs de α pour lesquelles les contraintes tangentielles sont extremum en dérivant l'équation (4.5) par rapport à 2α .

$$\operatorname{tg}(2\alpha_s) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (4.8)$$

On appelle les plans qui font l'angle α_s avec l'axe ox , les *plans secondaires* et les contraintes tangentielles qui s'y trouvent sont *extremum*:

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4.7-a)$$

$$\tau_{min} = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4.7-b)$$

- La contrainte normale à ces plans est par l'expression:

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (4.8)$$

● Exemple 4.4

Considérons l'état plan de contraintes au point P représenté sur la figure ci-dessous (Fig. E4.4-a).

1- Ecrire la matrice des contraintes au point P dans le repère (O,x,y,z) .

2- Déterminer les éléments principaux des contraintes puis les représenter dans le plan (x,y) .

3- Calculer les valeurs des contraintes de cisaillement extremums. Dans quels plans se trouvent-elles?

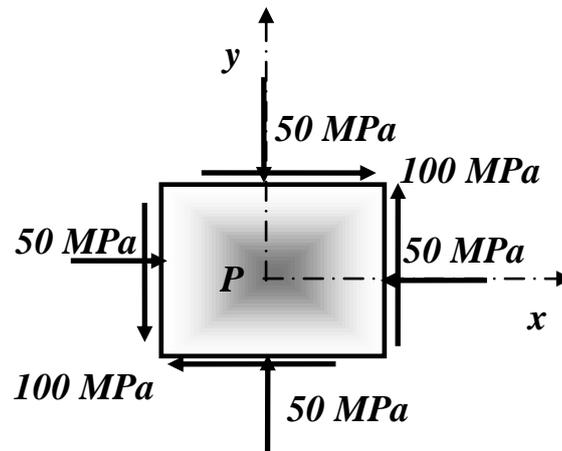


Fig. E4.4-a

• **Solution 4.4**

1- Matrice des contraintes au point P

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -50 & -100 & 0 \\ -100 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2- Les éléments principaux

$$\sigma_{max} = \frac{-50 - 50}{2} + \sqrt{\left(\frac{-50 + 50}{2}\right)^2 + (-100)^2}$$

$$\sigma_{max} = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{min} = \frac{-50 - 50}{2} - \sqrt{\left(\frac{-50 + 50}{2}\right)^2 + (-100)^2}$$

$$\sigma_{min} = -150 \text{ MPa}$$

$$\text{tg}(2\alpha_p) = -\frac{-100}{\frac{-50 + 50}{2}} \Rightarrow 2\alpha_p = 90^\circ \Rightarrow \alpha_p = 45^\circ$$

C'est-à-dire les normales aux plans principaux sont les bissectrices au plan (x,y) comme montré sur la figure (E4.4-b).

3- Contraintes de cisaillement extremums

$$\tau_{\max,\min} = \pm \sqrt{\left(\frac{-50 + 50}{2}\right)^2 + (100)^2}$$

$$\tau_{\max} = 100 \text{ MPa}; \quad \tau_{\min} = -100 \text{ MPa}$$

$$\text{tg}(2\alpha_s) = \frac{-50 + 50}{100}$$

$$\alpha_s = 0$$

Cela signifie que les contraintes de cisaillement extremum se trouvent sur les facettes de normales x et y (Fig. E4.4-b).

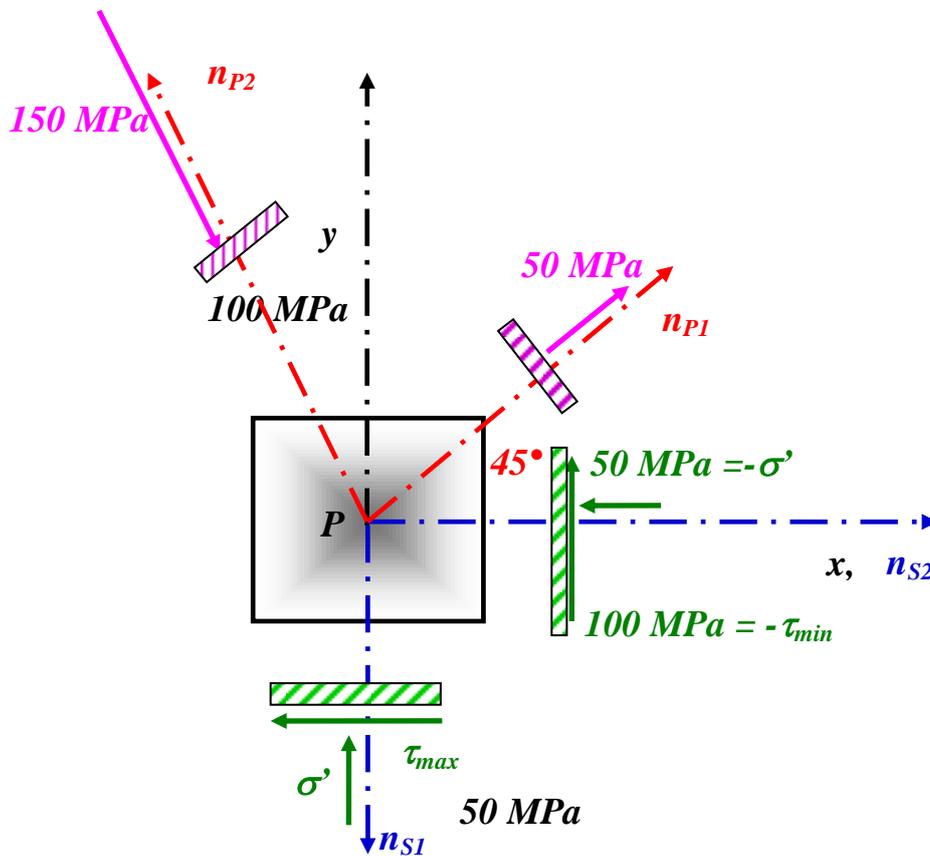


Fig. E4.4-b

• Exemple 4.5

Soit une plaque rectangulaire d'une épaisseur $e = 2 \text{ mm}$, sollicitée comme la montre la figure (E4.5-a).

1- Déterminer et dessiner l'état de contrainte en un point M de la plaque sur deux plans perpendiculaires.

2- Dessiner le cercle de **Mohr** de cet état de contrainte.

3- En déduire les valeurs et les directions des contraintes principales et les dessiner dans un plan physique.

4- En déduire les valeurs et les directions des contraintes tangentiels extrêmes et la contrainte normale correspondante et les dessiner dans le même plan physique précédent.

5- En déduire l'état de contrainte sur un plan dont la normale fait un angle de 45° avec l'axe des x .

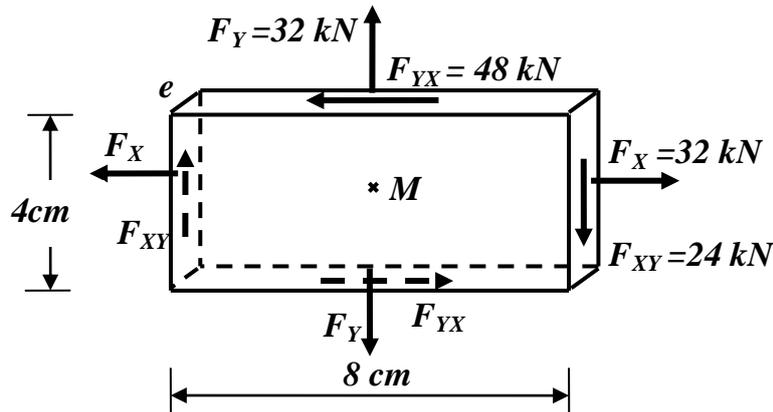


Fig. E4.5-a

• Solution 4.5

1- L'état de contrainte est déterminé de la manière suivante:

$$\sigma_x = \frac{F_x}{A_{xy}} = \frac{32}{0,2 \times 4} = 40 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{xy} = \frac{F_{xy}}{A_{xy}} = \frac{24}{0,2 \times 4} = 30 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A_{yx}} = \frac{32}{0,2 \times 8} = 20 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{yx} = \frac{F_{yx}}{A_{yx}} = \frac{48}{0,2 \times 8} = 30 \text{ kN/cm}^2$$

L'état de contrainte ainsi obtenu est dessiné sur le plan physique ci-dessous (Fig. E4.5-b):

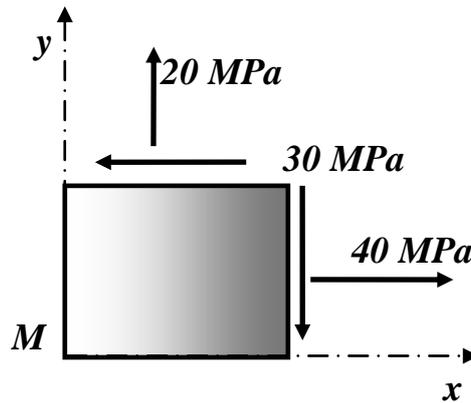


Fig. E4.5-b

2- Tracé du cercle de Mohr (Fig. E4.5-c)

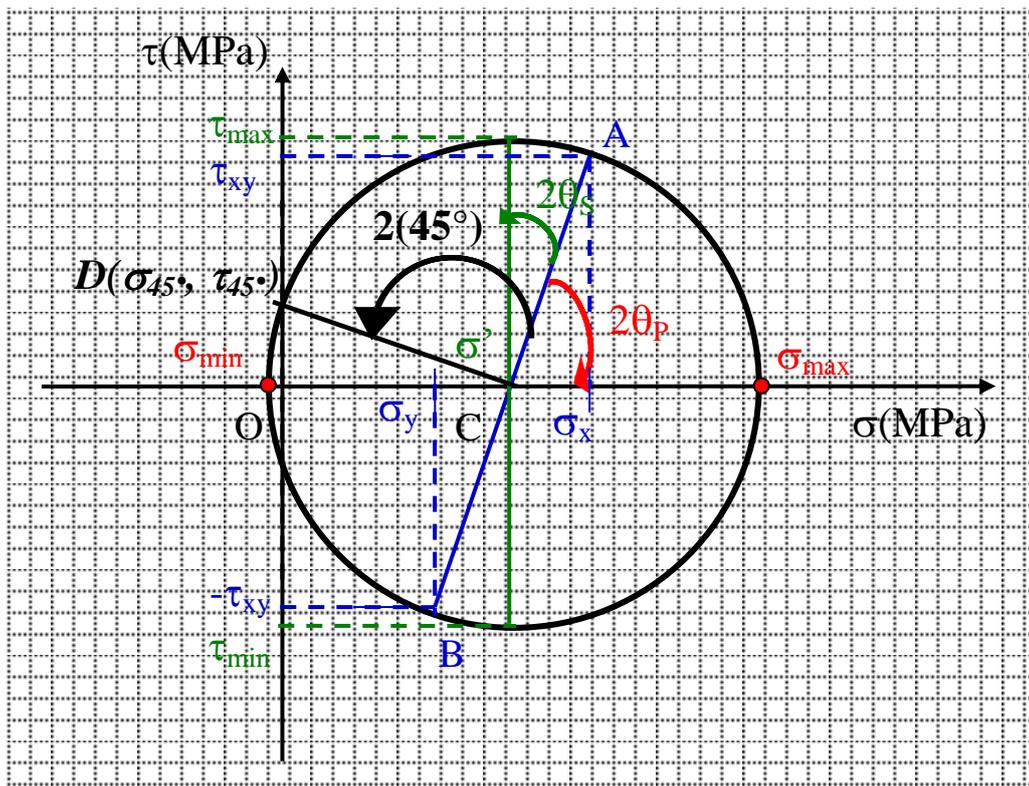


Fig. E4.5-c

3- Contraintes principales (Fig. E4.5-d)

$$\sigma_{max} = \overline{OC} + R = 30 + 31,6 = 61,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{min} = \overline{OC} - R = 30 - 31,6 = -1,6 \text{ MPa}$$

$$2\alpha_p = -71,6^\circ \Rightarrow \alpha_p = -35,8^\circ$$

4- Contraintes tangentielles extremums (Fig. E4.5-d)

$$\tau_{max} = +R = 31,6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{min} = -R = -31,6 \text{ MPa}$$

$$2\alpha_s = 18,4^\circ \Rightarrow \alpha_p = 9,2^\circ$$

$$\sigma' = \overline{OC} = 30 \text{ MPa}$$

5- Etat de contrainte sur un plan incliné (Fig. E4.5-d)

On détermine le point $D(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$ avec $\alpha = 45^\circ$ sur le cercle de Mohr

$$\sigma_\alpha = \sigma_{45^\circ} = 0$$

$$\tau_\alpha = \tau_{45^\circ} = 10 \text{ MPa}$$

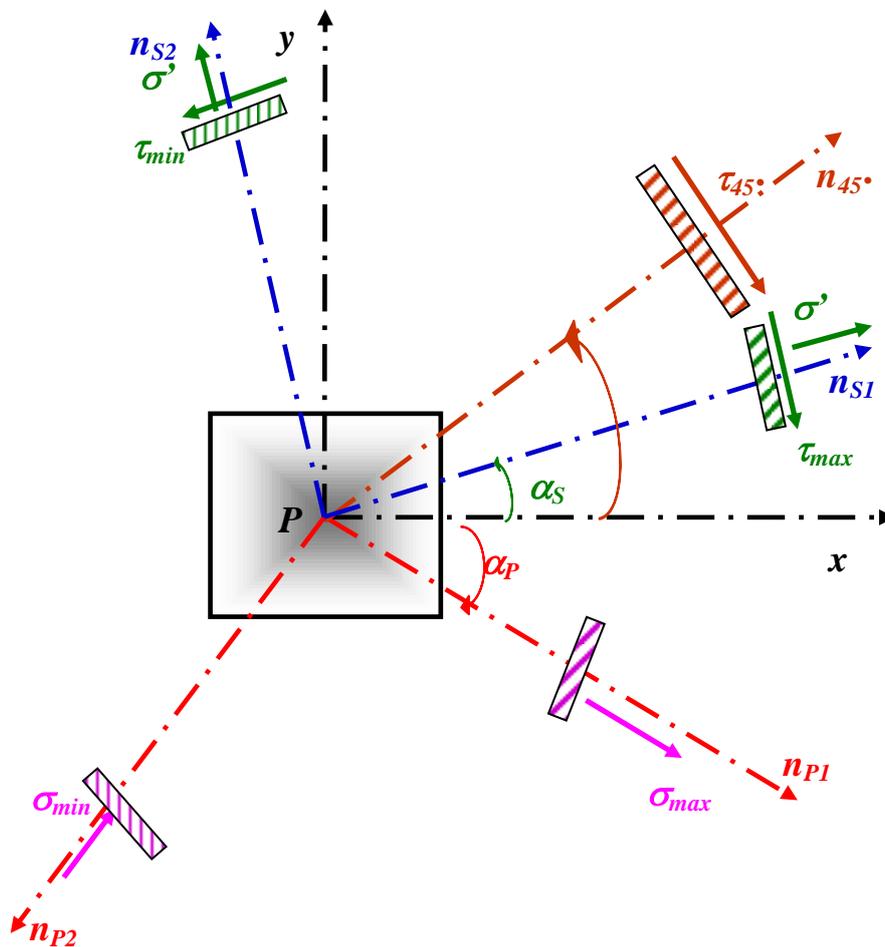
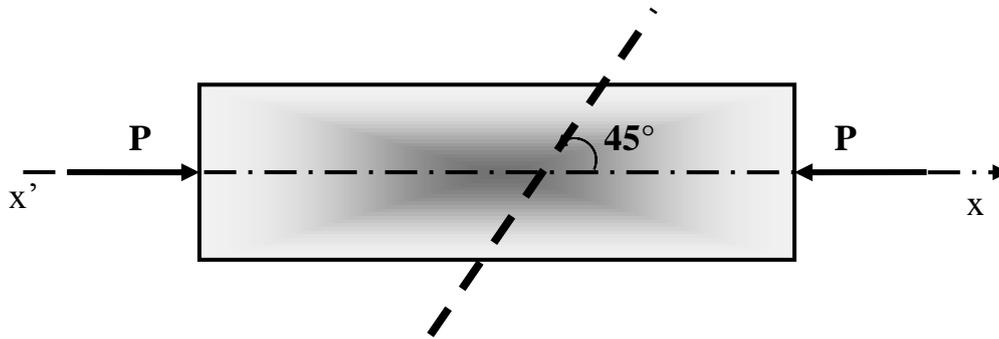


Fig. E4.5-d

Exercices

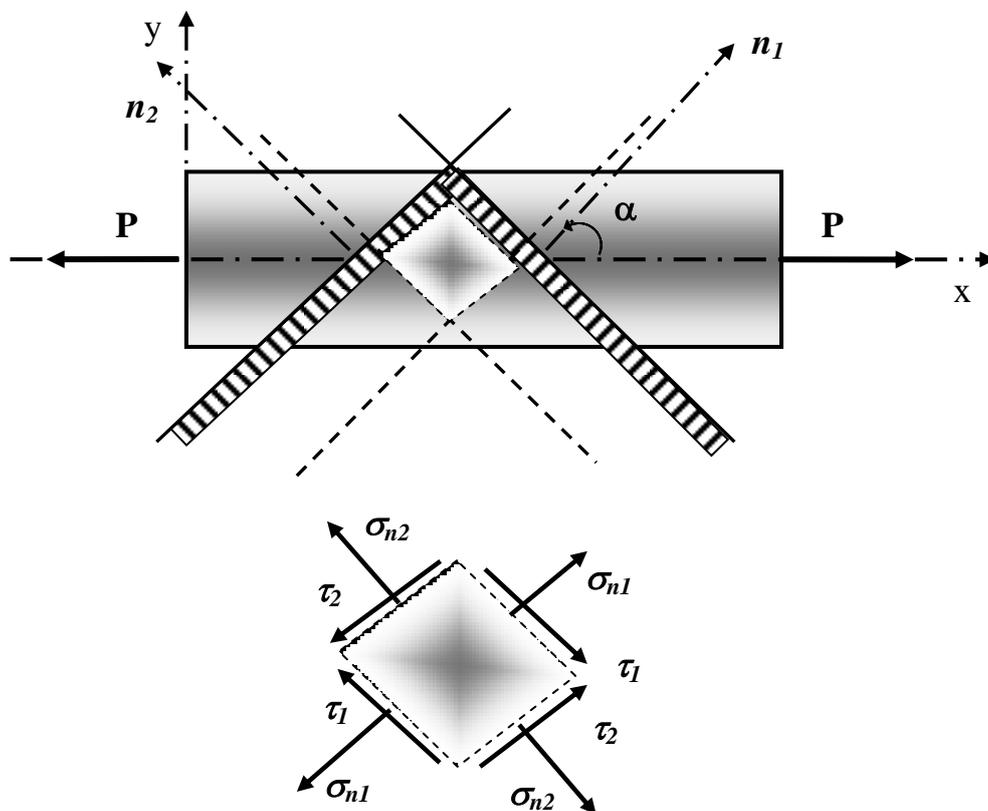
Exercice N°1

Une barre courte en béton de section droite $20 \times 20 \text{ cm}$ est comprimée par une force P . Quelle est la valeur de cette force, si la contrainte normale sur une facette, inclinée d'un angle de 45° par rapport à l'axe des x , est égale à -15 kg/cm^2 ?



Exercice N°2

Sur les deux facettes perpendiculaires de l'élément de la figure ci-dessous agissent les contraintes normales $\sigma_{n1} = 843,6 \text{ bars}$ et $\sigma_{n2} = 421,8 \text{ bars}$. Déterminer les contraintes σ_x et τ_l .



Exercice N°3

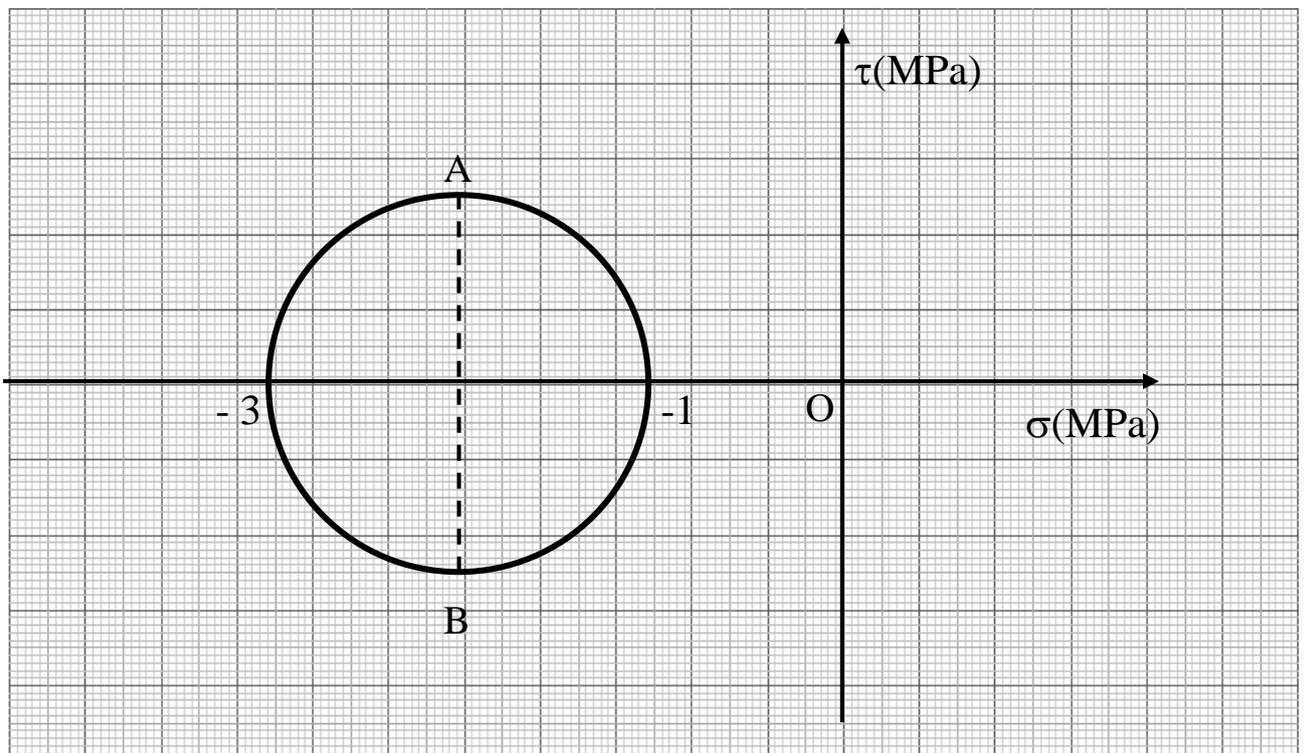
L'état de contrainte sur deux plans perpendiculaires de normales ox et oy est défini comme suivant:

$$\vec{\Gamma}(O, \vec{x}) = \begin{cases} -80 \text{ MPa} \\ 60 \text{ MPa} \end{cases} ; \quad \vec{\Gamma}(O, \vec{y}) = \begin{cases} -60 \text{ MPa} \\ 40 \text{ MPa} \end{cases}$$

- 1- Dessiner cet état de contrainte dans un plan physique.
- 2- Dessiner le cercle de *Mohr* de cet état de contrainte.
- 3- Dédire du cercle de *Mohr* les valeurs et les directions des contraintes principales puis les représenter dans un plan physique.
- 4- Dédire du cercle de *Mohr* les valeurs et les directions des contraintes tangentielles extremum et des contraintes normales correspondantes, puis les représenter dans le même plan physique précédent.

Exercice N°4

Soit l'état de contrainte, défini par σ_x , σ_y et τ_{xy} , représenté sur le cercle de *Mohr* ci-dessous.



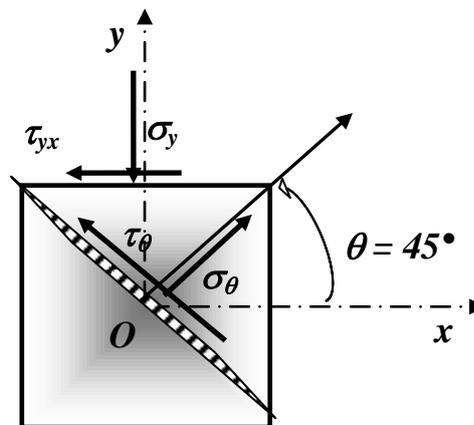
- 1- Dédire du cercle de *Mohr* cet état de contrainte et le dessiner dans un plan physique.
- 2- Dédire du cercle de *Mohr* les valeurs et les directions des contraintes principales, puis les représenter dans le même plan physique précédent.

3- Déduire du cercle de *Mohr* les valeurs et les directions des contraintes tangentielles extremum et des contraintes normales correspondantes, puis les représenter dans le même plan physique précédent.

5- Déduire du cercle de *Mohr* l'état de contrainte sur un plan dont la normale fait un angle de 45° par rapport à l'axe ox , puis les représenter dans le même plan physique précédent.

Exercice N 5

Soit l'état de contrainte défini par $\sigma_x \neq 0$, $|\sigma_y| = 6\text{MPa}$, $|\tau_{xy}| = 4\text{MPa}$ et la figure ci-dessous.



- 1- Calculer σ_x sachant que: $|\sigma_\theta| = 2\text{MPa}$, $|\tau_\theta| = 4\text{MPa}$
- 2- Dessiner le cercle de *Mohr* de cet état de contrainte.
- 3- Déterminer les valeurs et les directions des contraintes principales puis les représenter dans un plan physique.
- 4- Déterminer les valeurs et les directions des contraintes tangentielles extremum et des contraintes normales correspondantes, puis les représenter dans le même plan physique précédent.
- 5- Calculer l'état de contrainte sur un plan dont la normale fait un angle de 30° par rapport à l'axe ox , puis le représenter dans le même plan physique précédent.

CHAPITRE 5

FLAMBEMENT DES POUTRES DROITES

5.1. Introduction

Le flambement est une sollicitation composée de compression et de flexion, mais dont l'étude est différente de la flexion composée parce que les méthodes sont différentes et que le flambement est un phénomène rapidement destructif.

En effet, dans le cas du flambement, les déformations ne peuvent plus être supposées infiniment petites et négligées comme dans les chapitres précédents. De même, les forces extérieures ne sont plus proportionnelles aux déformations. Pour étudier le flambage, il faut tenir compte de la déformation de l'élément considéré et de ce fait abandonner une des hypothèses fondamentales de la RDM.

Le risque de flambement d'un élément étant lié aux dimensions de cet élément, on dit que le flambement est un phénomène d'instabilité de forme.

Le flambage a été décrit par le mathématicien Suisse **Leonhard Euler** (1707 – 1783) qui a déterminé la valeur théorique d'un effort de compression sous lequel une barre se dérobe. Cette valeur est appelée *charge critique d'Euler*.

5.2. Définition

Le *flambage* ou *flambement* est un phénomène d'instabilité d'une structure ou d'un élément d'une structure, qui soumis à une force de compression, a tendance à fléchir et à se déformer dans une direction perpendiculaire à la force de compression. On utilise, en génie civil, plutôt le terme *flambement*.

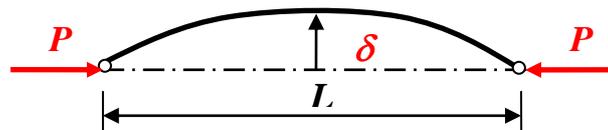


Fig. 5.1- Schématisation du flambage.

5.3. Charge critique d'Euler

Considérons le cas d'une poutre articulée en O et en appui simple en A , initialement droite, soumise à un effort de compression P (Fig. 5.2).

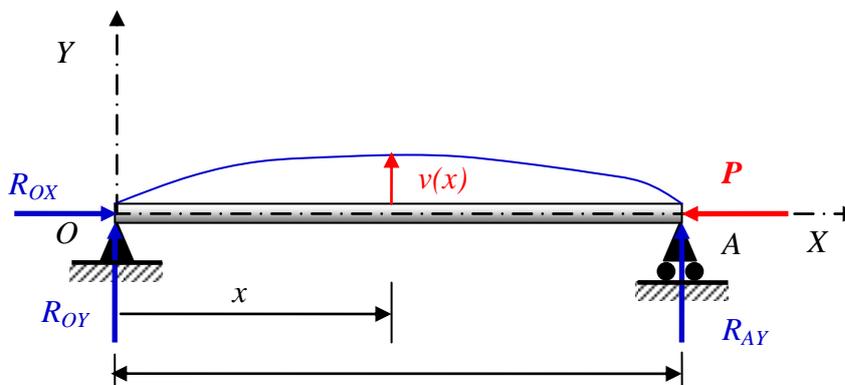


Fig. 5.2- Poutre droite bi-articulée en compression.

On considère l'équilibre statique de la poutre tout en tenant compte de l'influence des déformations. On suppose que la barre a fléchi de la grandeur $v(x)$ à l'abscisse x . Le moment de flexion dans la section vaut:

$$M_z = -v(x).P \quad (5.1)$$

La poutre est donc soumise à la compression et la flexion pure. L'équation de la déformée en flexion vue au chapitre 3 s'écrit alors:

$$EI_{Gz}.v''(x) = M_z \quad (5.2)$$

Où E est le module de Young, I_{Gz} le moment d'inertie de la section transversale de la barre par rapport l'axe centrale. En substituant l'équation (5.1) dans l'équation (5.2), on obtient:

$$v''(x) + \frac{P}{EI_{Gz}}v(x) = 0 \quad (5.3)$$

L'équation (5.3) est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

En posant:

$$\omega = \sqrt{\frac{P}{EI_{Gz}}} \quad (5.4)$$

L'équation (5.3) se réécrit sous la forme:

$$v''(x) + \omega^2v(x) = 0 \quad (5.5)$$

La solution générale de cette équation s'écrit alors:

$$v(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x) \quad (5.6)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires qui doivent vérifier les conditions aux limites. Le point O étant en articulation et le point A en appui simple, les deux conditions aux limites à vérifier s'écrivent:

$$\begin{cases} v(x=0) = 0 \\ v(x=L) = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

En utilisant l'expression de $v(x)$ donnée par l'équation (5.6), on déduit:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 \cos(\omega L) + C_2 \sin(\omega L) = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

À partir de la première équation on déduit directement $C_1 = 0$. La deuxième équation s'écrit:

$$C_2 \sin(\omega L) = 0 \quad (5.9)$$

Deux cas se présentent:

- Soit $C_2 = 0$, l'expression de la déformée s'écrit: $v(x) = 0$, et le moment fléchissant M_z est nul aussi. Ainsi la poutre est soumise à la compression pure et ne flambe pas.
- Soit $\sin(\omega L) = 0$, qui a pour conséquence que $\omega L = k\pi$ où k est un entier strictement supérieur à 1. Dans ce cas la poutre flambe, la déformée a pour expression générale:

$$v(x) = C_2 \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \quad (5.10)$$

Dans le cadre du flambement c'est bien l'équation (5.10) qui nous intéresse. Soit pour $k = 1$, on peut obtenir la première valeur de l'effort P pour lequel la poutre flambe. Cette valeur que l'on note par P_c est la première charge critique d'Euler vérifiant:

$$\omega L = \pi \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{P_c}{EI_{Gz}}} \quad (5.11)$$

La première charge critique d'Euler s'écrit alors:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI_{Gz}}{L^2} \quad (5.12)$$

Plusieurs cas de comportement de la poutre sont possibles:

- Si $P < P_c$: la poutre est en compression simple et reste droite, elle est dite en *équilibre stable*.
- Si $P = P_c$: la poutre peut rester droite ou fléchir (flamber) avec une flèche égale à C_2 ($v_{max} = C_2 \cdot 1$), elle est dite en *équilibre neutre*. Notons que $C_2 = v_{max}$ est en général petit.

- Si $P > P_c$: il y a instabilité en position droite (équilibre instable) avec une forte tendance au flambement. C_2 augmentera très rapidement avec un léger accroissement de l'effort normal.

La déformée s'écrit alors:

$$v(x) = C_2 \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \quad (5.13)$$

Notons que cette méthode c-à-d la théorie d'Euler ne permet pas de déterminer complètement la solution du problème. Car C_2 est indéterminé et la déformée de la poutre ne peut donc pas être obtenue. Cependant, la première charge critique de flambage est parfaitement connue.

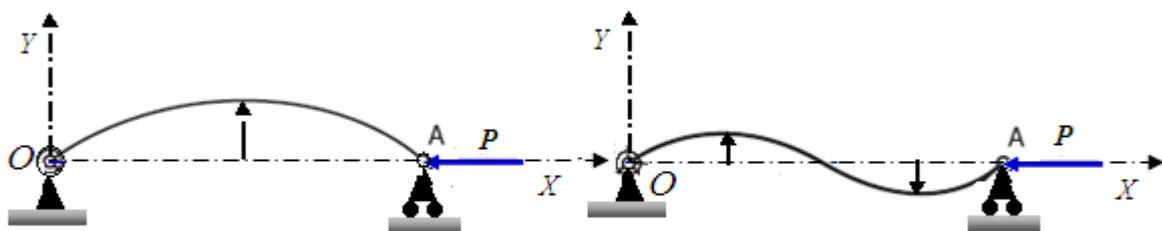
On peut de la même manière déterminer les autres valeurs des charges critiques pour $k = 2, 3, 4, \dots$. Par exemple pour $k = 2$, la charge critique vaut:

$$\omega_2 = 2\pi/L \quad ; \quad P_2 = 4 \frac{\pi^2 EI_{Gz}}{L^2} \quad (5.14)$$

L'équation de la déformée est donc:

$$v(x) = C_2 \sin\left(\pi \frac{2x}{L}\right) \quad (5.15)$$

Les expressions des déformées associées aux deux premières charges critiques permettent de tracer leurs allures comme le montre la figure (5.3).



(a)- 1^{er} mode de flambement.

(b)- 2^{ème} mode de flambement.

Fig. 5.3- Allures des déformées associées aux deux premières charges critiques.

Les déformées associées aux charges critiques sont appelées les *modes de flambement*. Sur la figure (5.3), le mode 1 (associé à la première charge critique) comporte un seul "ventre", (Fig. 5.3-a) tandis que le mode 2 (associé à la deuxième charge critique) comporte deux "ventres" (Fig. 5.3-b).

- **Remarque**

Le flambement se produit suivant un axe perpendiculaire à l'axe du moment quadratique le plus faible. Pour les deux sections représentées sur la figure (5.4), $I_y < I_z$, le flambement se produit dans le plan (x, z) .

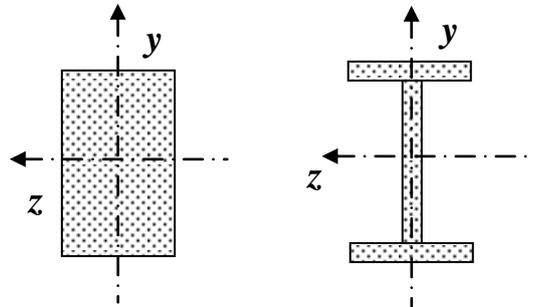


Fig. 5.4- Influence de la forme de la section.

- **Exemple 5.1**

Considérons une barre en acier de section transversale rectangulaire (40mm x 50mm), articulée à ses deux extrémités et soumise à une compression axiale. La longueur de la barre est égale à 2 m et son module de Young vaut 200 GPa.

- Déterminer la charge de flambement en utilisant l'expression d'Euler.

- **Solution 5.1**

La charge de flambement est la première charge critique d'Euler qui s'écrit:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI_{Gz}}{L^2}$$

Le moment d'inertie minimal de la section est:

$$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12} = \frac{(50)(40)^3}{12} = 2,67 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

D'où

$$P_c = \frac{\pi^2 (200 \times 10^9) (2,67 \times 10^5 \times 10^{-12})}{(2)^2} = 1317,6 \times 10^2 \text{ N} = 131,76 \text{ kN}$$

5.4. Influence des liaisons aux appuis

La charge critique se définit donc comme la charge axiale qui suffit à maintenir une barre élançée sous une forme légèrement fléchie.

On peut généraliser les résultats établis pour la poutre bi-articulée pour des poutres dont les conditions d'appuis sont différentes. L'expression générale de la charge critique d'Euler est:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI_{Gz}}{l_f^2} \text{ ou } P_c = \frac{\pi^2 EI_{Gy}}{l_f^2} \quad (5.16)$$

où l_f est la longueur de flambement de la poutre.

Le facteur l_f représente une longueur équivalente à celle d'une poutre *articulée - articulée*. Il s'agit de la distance séparant deux points d'inflexions de la poutre. Ainsi, nous exprimons dans le tableau (5.1) la longueur de flambement selon le type de liaison:

- pour une poutre articulée aux deux extrémités, $l_f = 1 \times L$;
- pour une poutre encastree aux deux extrémités, $l_f = 0,5 \times L$;
- pour une poutre encastree-articulée, $l_f = 0,7 \times L$;
- pour une poutre encastree-libre, $l_f = 2 \times L$.

L est la longueur de la poutre.

Tableau 5.1- Influence des liaisons aux appuis.

Type de liaison	Schéma	Longueur de flambement (l_f)	Charge critique (P_c)
Appui simple - Rotule		L	$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$
Libre - encastrement		2L	$P_c = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$
Encastrement - Encastrement		0,5L	$P_c = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$
Appui simple - Encastrement		0,7L	$P_c = \frac{2,05\pi^2 EI}{L^2}$

5.5. Contrainte critique d'Euler

A la charge critique d'Euler P_c correspond une contrainte critique σ_c , qui peut prendre le nom de *contrainte critique limite* ou admissible, donnant un élément de sécurité vis-à-vis du flambement.

Pour une poutre comprimée de section S , la contrainte critique σ_c est définie par la relation:

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 EI_{Gz}}{l_f^2 \cdot S} \text{ ou } \sigma_c = \frac{\pi^2 EI_{Gy}}{l_f^2 \cdot S} \quad (5.17)$$

Sachant que:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_{Gz}}{S}} \text{ ou } i_y = \sqrt{\frac{I_{Gy}}{S}} \quad (5.18)$$

étant le rayon de giration, on définit une nouvelle grandeur:

$$\lambda_z = \frac{l_{fz}}{i_z} \text{ ou } \lambda_y = \frac{l_{fy}}{i_y} \quad (5.19)$$

Qui est un paramètre géométrique, sans unité, appelé élancement. λ_y ou λ_z sont les élancements dans la direction y ou z , *respectivement*.

La contrainte critique s'exprime alors sous la forme:

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (5.20)$$

Dans l'expression (5.20), λ peut être λ_y ou λ_z .

Supposons que la poutre soit parfaitement rectiligne, que l'effort de compression (P) soit centré et que le matériau soit parfaitement homogène. Soit:

$$\sigma = \frac{P}{S} \quad (5.21)$$

La contrainte dans la poutre peut être comme ci-dessous:

- Si $\sigma_c < \sigma_e$ (où σ_e est la limite élastique): il y aura ruine par flambement dès que σ atteindra la valeur σ_c ($\sigma = \sigma_c$). Le dimensionnement se fait au flambement.
- Si $\sigma_c > \sigma_e$: la poutre périra par écrasement (ou compression simple sans flambement) dès que σ atteindra la valeur σ_e ($\sigma = \sigma_e$). Dans ce cas, il n'y a aucun risque de flambement. Le dimensionnement se fait en compression simple.

- **Remarque**

Ce raisonnement n'est plus valable en flexion composée (si la poutre a un défaut de rectitude ou si P n'est pas bien centrée,...). Le flambement surviendra dans ce cas avant que σ n'atteigne σ_c .

La relation (5.20) fait apparaître la notion d'élanement critique (pour $\sigma_c = \sigma_e$), à partir duquel la poutre devra être calculée au flambement:

$$\lambda_c = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}} \quad (5.22)$$

Notons que cette valeur de l'élanement critique ne dépend que des caractéristiques mécaniques du matériau.

- **Exemple 5.2**

Déterminer la contrainte axiale dans la barre de l'exemple 5.1.

- **Solution 5.2**

La contrainte axiale dans la barre immédiatement avant qu'elle assume sa configuration de flambement est la contrainte critique d'Euler donnée par:

$$\sigma_c = \frac{P_c}{S} = \frac{131,76 \times 10^3}{(40 \times 50 \times 10^{-6})} = 65,88 \text{ MPa} = 658,8 \text{ kN/cm}^2$$

- **Exemple 5.3**

Déterminer l'élanement d'une barre dont la limite d'élasticité $\sigma_e = 210 \text{ MPa}$ et le module de Young vaut 200 GPa .

Discuter la solution.

- **Solution 5.3**

La valeur 210 MPa représente la limite supérieure de la contrainte pour laquelle l'équation (5.20) est valable. L'élanement de la barre s'obtient donc:

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \Leftrightarrow 210 \times 10^6 = \frac{\pi^2 (200 \times 10^9)}{\lambda^2}$$

D'où

$$\lambda = 96,95 \approx 100$$

Cela signifie que pour ce matériau la charge de flambement (Eq. 5.12) et la contrainte correspondante (5.20) sont valables seulement pour des barres ayant des élanements ≥ 100 . Pour celles ayant des valeurs inférieures à 100, la contrainte de compression

dépasse la limite d'élasticité avant que le flambement élastique ait lieu et ces équations ne sont plus valables.

L'équation (5.20) peut être tracée sur la figure suivante. Pour le présent matériau, le point A marque la limite supérieure d'applicabilité de la courbe. La portion de la courbe à gauche de la valeur 100 n'est pas valable.

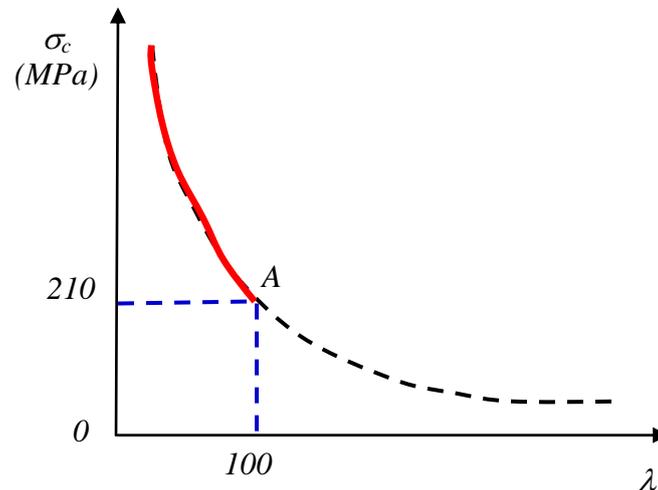


Fig. E5.3

5.6. Critères de dimensionnement

- **Critère en contrainte**

Le premier critère de dimensionnement est directement lié aux contraintes normales de compression. Le critère en contrainte traduit le fait que le matériau doit rester dans la zone élastique:

$$s \cdot \sigma \leq \sigma_e \quad (5.23)$$

où $s > 1$ est un coefficient de sécurité.

- **Critère en charge (condition de non flambement)**

L'autre critère va traduire le fait que la poutre ne flambe pas:

$$s' \cdot P \leq P_c \quad (5.24)$$

avec $s' > 1$ un coefficient de sécurité.

En pratique, la formule d'Euler n'est pas directement utilisée pour dimensionner une poutre. Mais elle est plutôt employée sous la forme (5.20) car optimiser le dimensionnement d'une

poutre c'est choisir une section pour laquelle la résistance à la compression (liée à la limite élastique) sera sensiblement égale à la résistance au flambement (charge critique).

On peut alors déterminer la charge critique P_c applicable sur une poutre en comparant sa valeur d'élanement λ à la valeur critique λ_c . trois cas peuvent alors être distingués:

- Si $\lambda \leq 20$ (poutre courte), la poutre est en compression simple:

$$P_c = \sigma_c \cdot S \quad (5.25)$$

- Si $20 < \lambda \leq \lambda_c$ (poutre moyenne), on utilise alors la formule expérimentale de *Rankine*:

$$P_c = \frac{2\sigma_e S}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (5.26)$$

- Si $\lambda > \lambda_c$ (poutre élancée), on utilise alors la formule d'*Euler*, qui peut se réécrire sous la forme:

$$P_c = \frac{\sigma_e S}{\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (5.27)$$

- **Remarque**

La formule d'*Euler* n'est pas applicable aux poteaux et butons en béton armé, en raison de la variation de l'inertie sur la longueur du fait de la fissuration du béton ce qui conduit à des calculs complexes.

- **Exemple 5.4**

Considérons une barre en acier de section transversale rectangulaire (40mm x 50mm), articulée à ses deux extrémités et soumise à une compression axiale. Si la limite d'élasticité du matériau est égale à 230 MPa et le module de Young égal à 200 GPa, déterminer la longueur minimale pour laquelle la théorie d'*Euler* est valable pour déterminer la charge de flambement.

- **Solution 5.4**

Le moment d'inertie minimal de la section est

$$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12} = \frac{(50)(40)^3}{12} = 2,67 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

La contrainte axiale étant

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 EI_{Gz}}{l_f^2 \cdot S}$$

Avec $l_f = L$ (poutre simplement appuyée).

La longueur minimale pour laquelle l'équation d'Euler est applicable est obtenue en remplaçant la contrainte critique dans l'équation ci-dessus par la limite d'élasticité du matériau, c-à-d :

$$230 \times 10^6 = \frac{\pi^2 (200 \times 10^9) (2,67 \times 10^5 \times 10^{-12})}{L^2 (40 \times 50 \times 10^{-6})}$$

D'où $L = 1,07 \text{ m}$.

• Exemple 5.5

Une barre en acier de section circulaire de diamètre égal à 25mm, articulée à ses extrémités, est soumise à une compression axiale, comme la montre la figure (E5.5-a).

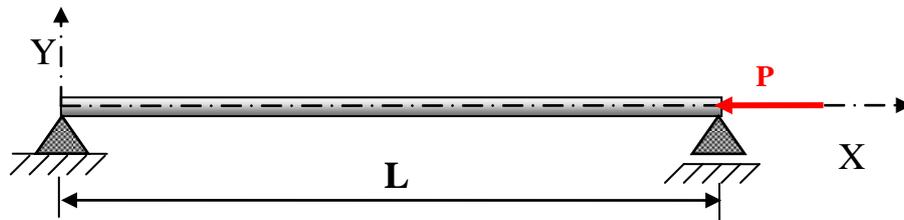


Fig. E5.5-a

1- Déterminer la charge de compression critique d'Euler lorsque la longueur de la poutre est égale à 1,50m sachant que le module de Young $E = 21000 \text{ daN/mm}^2$.

2- Calculer la valeur de la contrainte critique d'Euler.

3- Tracer la déformée de la poutre correspondant à la charge de compression critique d'Euler, sachant que l'équation de la déformée est: $v(x) = B \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ où k est un entier strictement supérieur à 1 et B une constante.

• Solution 5.5

1- La charge de compression critique d'Euler est donnée par la formule:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI_{Gz}}{L^2}$$

Pour une poutre articulée à ses deux extrémités $l_f = L = 1500 \text{ mm}$.

$$I_{Gz} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64} = 19174,76 \text{ mm}^4$$

D'où $P_c = 1763,62 \text{ daN}$.

2- Valeur de la contrainte critique d'Euler

$$\sigma_c = \frac{P_c}{S}; \quad S = \pi R^2 = \pi \frac{D^2}{4} = 490,87 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_c = 3,59 \text{ daN/mm}^2$$

3- Déformée de la poutre:

La charge critique d'Euler correspond à $k = 1$

$$v(x) = B \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \quad \text{ou } x=L \\ v_{\max} = B & \text{si } x = \frac{L}{2} \end{cases}$$

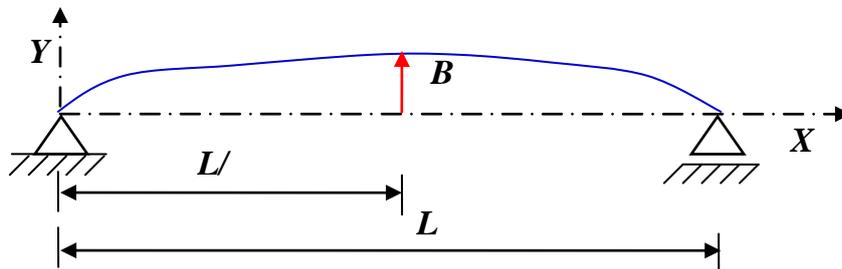
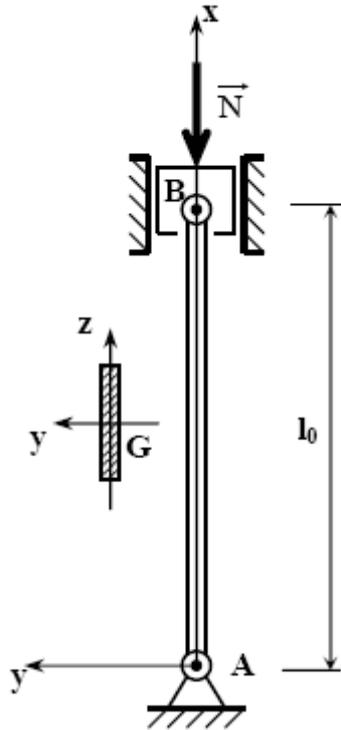


Fig. E5.5-b

Exercices

Exercice N°1

Une barre en acier de section rectangulaire $25 \times 50 \text{ mm}^2$, articulée à ses deux extrémités, est soumise à une compression axiale, comme la montre la figure ci-dessous.



1- Déterminer la longueur minimum pour laquelle l'équation:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI_{Gz}}{l_0^2}$$

reste applicable sachant que le module de Young $E = 21000 \text{ daN/mm}^2$ et que la limite de d'élasticité est de 21 daN/mm^2 .

2- Calculer la valeur de la contrainte critique lorsque la longueur est égale à 1,50m.

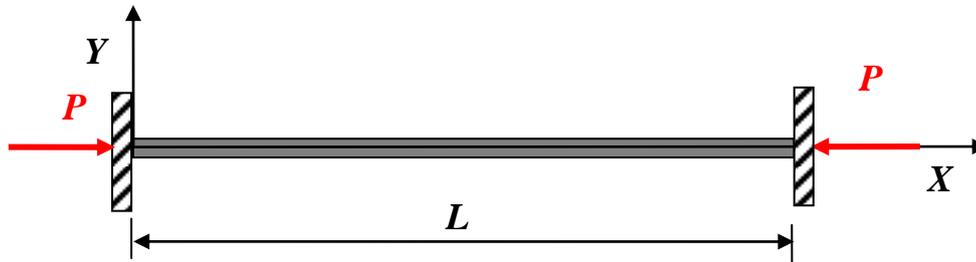
Exercice N°2

Déterminer la charge de compression critique pour un profilé en I (IPE160) articulé aux deux extrémités et dont la longueur est de 1,80m.

Exercice N°3

Une barre en acier de section circulaire de diamètre égal à 25mm , encastrée à ses extrémités, est soumise à une compression axiale, comme la montre la figure ci-dessous.

1- Déterminer la charge de compression critique lorsque la longueur est égale à $1,50\text{m}$.



2- Calculer la valeur de la contrainte critique d'Euler.

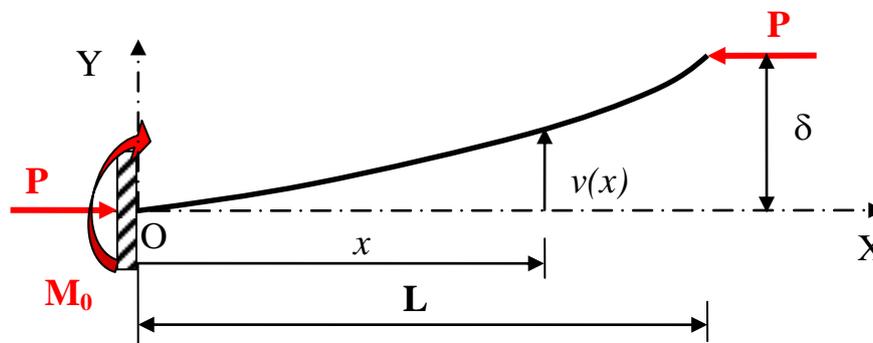
3- Vérifier le critère de contrainte si la limite élastique vaut 21 daN/mm^2 .

Exercice N°4

Soit une poutre en acier de section rectangulaire, encastrée à l'une de ses extrémités et libre à l'autre extrémité, de longueur égale à 1500 mm .

1- Déterminer les dimensions b et h de la section si la valeur de la charge critique est de 48000 daN et $h = 2b$.

2- Déterminer l'élanement de la poutre.

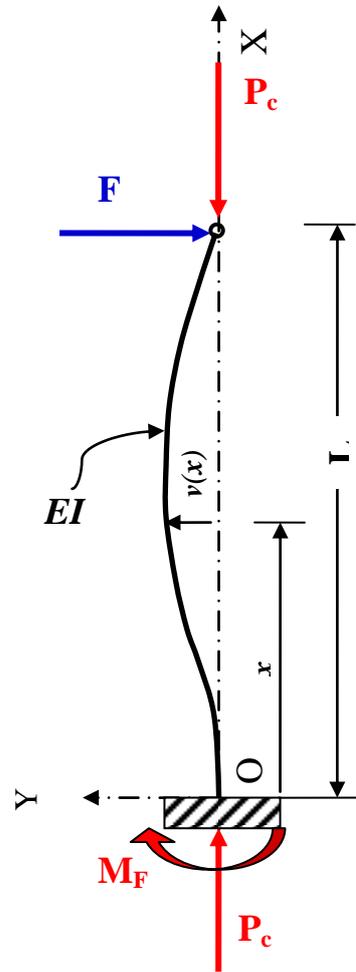
**Exercice N°5**

Soit une longue et fine barre en acier de rigidité EI , encastrée à une extrémité et libre de rotation à l'autre extrémité mais nécessitant une force F pour maintenir sa position.

1- Déterminer l'équation de la déformée.

2- En déduire l'équation de la charge critique P_c .

3- Exprimer l'élanement de la barre.

**Exercice N°6**

Soit une barre en acier, articulée à ses deux extrémités, de longueur égale à 275 mm et possède une section transversale circulaire. Si elle suppose supporter une charge axiale de 250 kN, déterminer le rayon de la barre si la théorie d'*Euler* est applicable. Le module de *Young* est supposé égal à 210 GPa.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Alexandru D.C. *Quelques chapitres de la résistance des matériaux*. Ed. OPU, Alger, 267p.

Anisimov A. *Calcul des barres dans le cas de sollicitation composée (Partie I de RDM II)*. Ed. OPU, Alger, 1993, 111p.

Boucard P.A. *Cours de Dimensionnement des Structures - Résistance des Matériaux*. IUT Cachan, Paris, 2011, 89p.

Case J., Chilver L., Ross C.T.F. *Strength of Materials and Structures*. Ed. John Wiley & Sons Inc., New York, 1999, 699p.

Del Pedro M., Gmür T., Botsis J. *Introduction à la mécanique des solides et structures*. PPUR presses polytechniques et Universitaires Romandes, CH-1015 Lausanne, 2004 - 313p.

Dias da Silva V. *Mechanics and strength of materials*. Ed. Springer, New York, 2006, 529p.

FANCHON J.L. *Guide de mécanique: Sciences et technologies industrielles*. Ed. Nathan, Paris, 1996, 480p.

Karnovski I.A., Lebed O.I. *Formulas for structural dynamics: Tables, Graphs, and Solutions*. McGraw-Hill, 2004, 491p.

Mott R.L. *Applied Strength of Materials*. Ed. Prentice Hall, New Jersey, 1990, 559p

Mott R.L. *Solution manual to accompany Applied Strength of Materials*. Ed. Prentice Hall, New Jersey, 2002, 235p

Nash W.A. *Theory and problems of strength of materials*. 4th Ed. McGraw-Hill, New York, 1998, 474p.

Patnaik S.N., Hopkins D.A. *Strength of materials: A unified theory*. Ed. Elsevier, USA, 2004, 750p.

Richard Liew J.Y., Shanmugam N.W., Yu C.H. *Structural Analysis*. in *Structural Engineering Handbook*. Ed. Chen Wai-Fah Boca Raton: CRC Press LLC, 1999, 189p.

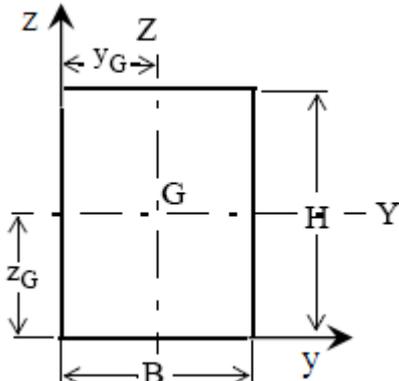
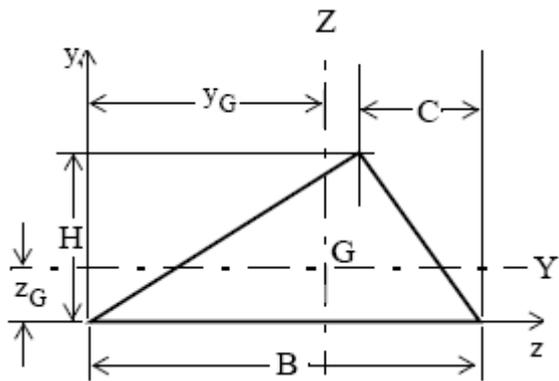
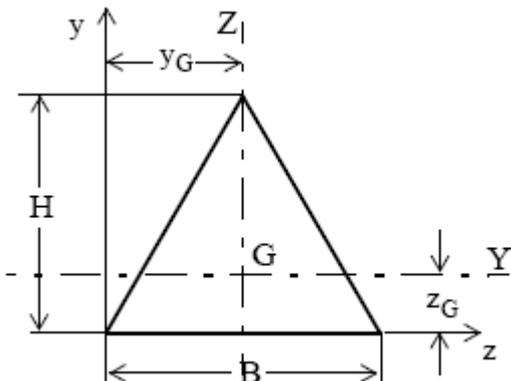
Timoshenko S. *Résistance des matériaux – Tome 1: Théorie élémentaire et problèmes*. 3^{ème} Ed. Dunod, Paris, 1968, 420p.

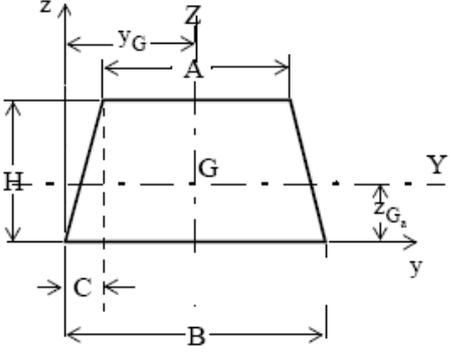
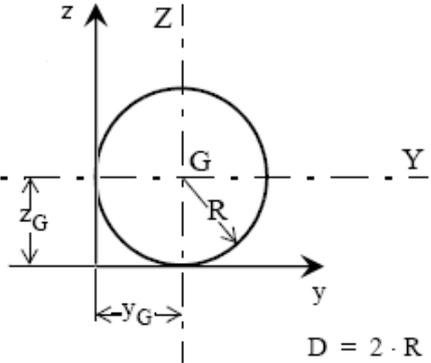
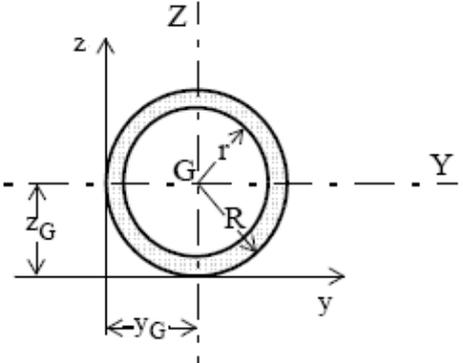
Timoshenko S. *Résistance des matériaux – Tome 2: Théorie développée et problèmes*, Dunod, Paris, 1968. 3^{ème} Ed. Dunod, Paris, 1968, 464p.

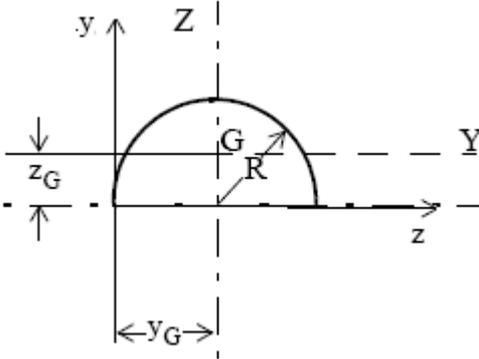
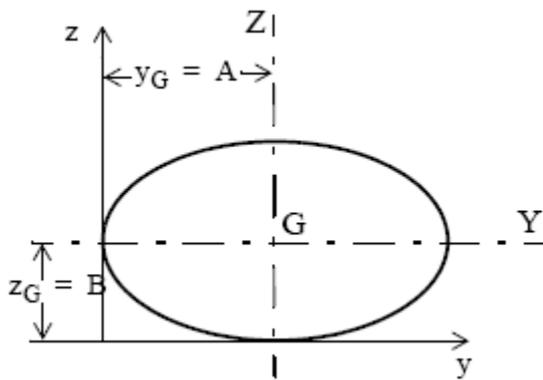
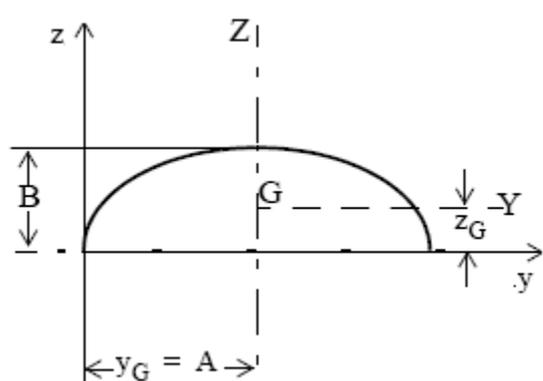
ANNEXES

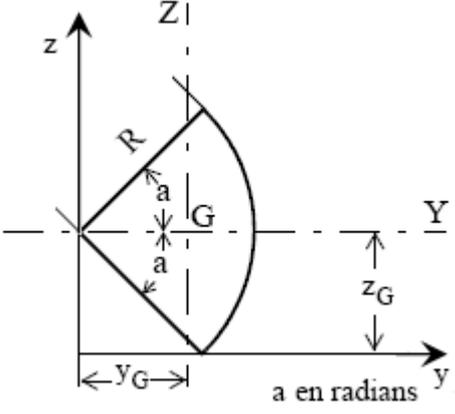
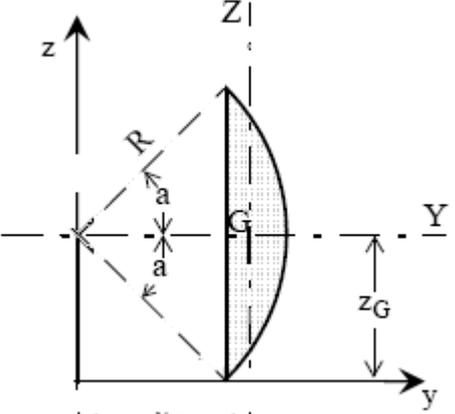
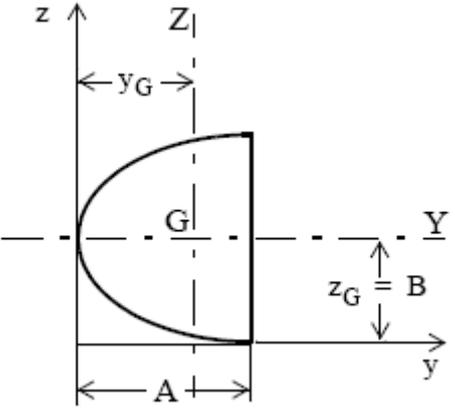
Annexe 1.1

Caractéristiques géométriques des sections usuelles

Section	Aire / Coordonnées du centre de gravité	Moments quadratiques
<u>Rectangle</u> 	$A = B.H$ $y_G = \frac{B}{2}$ $z_G = \frac{H}{2}$	$I_Y = \frac{BH^3}{12}$ $I_Z = \frac{HB^3}{12}$
<u>Triangle quelconque</u> 	$A = B.H / 2$ $y_G = \frac{2B + C}{3}$ $z_G = \frac{H}{3}$	$I_Y = \frac{BH^3}{36}$ $I_Z = \frac{BH}{36} \cdot (B^2 + C^2 - BC)$
<u>Triangle équilatéral</u> 	$A = B.H / 2$ $y_G = \frac{B}{2}$ $z_G = \frac{H}{3}$	$I_Y = \frac{BH^3}{36}$ $I_Z = \frac{B^3 H}{48}$

<p style="text-align: center;"><u>Trapèze isocèle</u></p> 	$A = (A + B) \cdot H / 2$ $y_G = \frac{B}{2}$ $z_{G_a} = \frac{H \cdot (B + 2A)}{3 \cdot (B + A)}$	$I_Y = \frac{H^3 \cdot (A^2 + 4AB + B^2)}{36 \cdot (A + B)}$ $I_Z = \frac{H \cdot (A + B) \cdot (A^2 + B^2)}{48}$
<p style="text-align: center;"><u>Cercle</u></p> 	$A = \pi R^2$ $y_G = R$ $z_G = R$	$I_Y = \frac{\pi \cdot R^4}{4}$ $= 0.0491 \cdot D^4$ $I_Z = \frac{\pi \cdot R^4}{4}$ $= 0.0491 \cdot D^4$
<p style="text-align: center;"><u>Cercle creux (tube)</u></p> 	$A = \pi (R^2 - r^2)$ $y_G = R$ $z_G = R$	$I_Y = \frac{\pi \cdot (R^4 - r^4)}{4}$ $I_Z = \frac{\pi \cdot (R^4 - r^4)}{4}$

<p style="text-align: center;"><u>Demi-cercle</u></p> 	$A = \pi R^2 / 2$ $y_G = R$ $z_G = 0.2122 \cdot D$ $= 0.4244 \cdot R$	$I_Y = 0.1098 \cdot R^4$ $I_Z = 0.3927 \cdot R^4$
<p style="text-align: center;"><u>Ellipse</u></p> 	<p style="text-align: center;">Aire = $\pi \cdot A \cdot B$</p> $y_G = A$ $z_G = B$	$I_Y = \frac{\pi \cdot AB^3}{4}$ $= 0.7854 \cdot AB^3$ $I_Z = \frac{\pi \cdot A^3 B}{4}$ $= 0.7854 \cdot A^3 B$
<p style="text-align: center;"><u>Demi-ellipse</u></p> 	<p style="text-align: center;">Aire = $\pi \cdot A \cdot B / 2$</p> $y_G = A$ $z_G = 0.424 \cdot B$	$I_Y = 0.1098 \cdot AB^3$ $I_Z = 0.3927 \cdot A^3 B$

<p style="text-align: center;"><u>Secteur circulaire</u></p>  <p style="text-align: center;">$\varphi = 2.a$ (en degré)</p>	$A = (\pi/360^\circ) \cdot \varphi \cdot R^2$ $y_G = \frac{2}{3} \cdot \frac{R \sin a}{a}$ $z_G = R \sin a$	$I_Y = \frac{R^4}{4} \cdot (a - \sin a \cos a)$ $I_Z = \frac{R^4}{4} \cdot \left(a - \frac{16(\sin a)^2}{9a} + \frac{\sin 2a}{2} \right)$
<p style="text-align: center;"><u>Segment circulaire</u></p>  <p style="text-align: center;">a en radians</p>	$A = \frac{R^2}{2} (2a - \sin 2a)$ $y_G = \frac{4R(\sin a)^3}{3(2a - \sin 2a)}$ $z_G = R \sin a$	$I_Y = \frac{AR^2}{4} \left(1 - \frac{2(\sin a)^3 \cos a}{3(a - \sin a \cos a)} \right)$ $I_Z = \frac{AR^2}{4} \left(1 + \frac{2(\sin a)^3 \cos a}{a - \sin a \cos a} - \frac{4R^6(\sin a)^6}{9A} \right)$
<p style="text-align: center;"><u>Segment parabolique</u></p>  <p style="text-align: center;">$z_G = B$</p>	$A = (2/3) \cdot (2B \cdot A)$ $y_G = 0.6 \cdot A$ $z_G = 0.375 \cdot B$	$I_Y = 0.0396 \cdot AB^3$ $I_Z = 0.0457 \cdot A^3 B$

Annexe 1.2

Calcul des caractéristiques géométriques des sections planes par décomposition

N°	A_i (cm^2)	x_i (cm)	y_i (cm)	$x_i.A_i$ (cm^3)	$y_i.A_i$ (cm^3)	$x_G = \frac{\sum(x_i.A_i)}{\sum(A_i)}$ (cm)	$y_G = \frac{\sum(y_i.A_i)}{\sum(A_i)}$ (cm)
1							
2							
3							
·							
·							
·							
n							
<i>Total</i>	$\sum(A_i)$			$\sum(x_i.A_i)$	$\sum(y_i.A_i)$		

N°	$a_i = x_G - x_i$ (cm)	$b_i = y_G - y_i$ (cm)	I_{xi} (cm^4)	I_{yi} (cm^4)	I_{xiyi} (cm^4)
1					
2					
3					
·					
·					
·					
n					
<i>Total</i>	$\sum(A_i)$			$\sum(x_i.A_i)$	$\sum(y_i.A_i)$

N°	$I_{Gxi} = (I_{xi} + b_i^2.A_i)$ (cm^4)	$I_{Gyi} = (I_{yi} + a_i^2.A_i)$ (cm^4)	$I_{GxGy} = (I_{xiyi} + a_i.b_i.A_i)$ (cm^4)
1			
2			
3			
·			
·			
·			
n			
<i>Total</i>	$I_{Gx} = \sum(I_{Gxi})$	$I_{Gy} = \sum(I_{Gyi})$	$I_{GxGy} = \sum(I_{GxiGyi})$