

# Résistance des matériaux

## Cours et exercices corrigés

La Résistance des matériaux *RDM* est une partie de la mécanique des solides. Elle s'intéresse à l'étude, de manière théorique, de la réponse mécanique des structures soumises à des sollicitations extérieures (traction, compression, cisaillement, flexion et torsion). Elle permet d'évaluer les efforts internes, les contraintes (normale et tangentielle) ainsi que les déplacements des structures.

Cet ouvrage de *RDM* présente des méthodes de calcul, des formules pratiques illustrant des cas réels de dimensionnement des structures. Les nombreuses illustrations de l'ouvrage montrent en détail les éléments de base à prendre en compte lors du dimensionnement d'une structure quelconque en Génie Civil. Les méthodes analytiques les plus utilisées en calcul des systèmes isostatique et hyperstatique sont développées en détail.

*À qui s'adresse cet ouvrage ?*

- Aux élèves des sections post-baccalauréat de Génie Civil
- DUT : Génie Civil, Génie Mécanique
- BTS : Bâtiment, Travaux publics
- Licence et Maîtrise de Génie Civil
- Aux premières années élèves-ingénieurs
- Aux candidats à la préparation des concours du CAPET, de l'Agrégation de Génie Civil et de l'Agrégation de Génie Mécanique

# Sommaire

<b>Notations principales</b> .....	12
<b>Chapitre 1. Généralités sur la résistance des matériaux</b> .....	15
<b>1.1. Objectifs de la résistance des matériaux RDM</b> .....	15
<b>1.2. Notion de poutre</b> .....	15
<b>1.3. Exemples de sollicitations</b> .....	16
<b>1.3.1. <i>Traction/Compression</i></b> .....	16
<b>1.3.2. <i>Cisaillement</i></b> .....	17
<b>1.3.3. <i>Flexion</i></b> .....	17
<b>1.3.4. <i>Torsion</i></b> .....	18

<b>1.4. Conditions aux limites - Fixation des corps</b> .....	19
<b>1.4.1. Notion d'appui</b> .....	19
<b>1.4.2. Appui simple - Appui glissant</b> .....	19
<b>1.4.3. Appui double - Appui articulé</b> .....	19
<b>1.4.4. Appui triple - Encastrement</b> .....	20
<b>1.5. Équilibre d'un corps</b> .....	21
<b>1.5.1. Équations d'équilibre. Principe fondamental de la statique PFS</b> .....	21
<b>1.5.2. Différents systèmes mécaniques</b> .....	21
1.5.2.1. <i>Système astatique - Mécanisme</i> .....	21
1.5.2.2. <i>Système isostatique</i> .....	22
1.5.2.3. <i>Système hyperstatique</i> .....	22
<b>1.5.3. Application</b> .....	23

<b>1.6. Efforts internes</b> .....	24
<b>1.6.1. Principe de la coupe - Éléments de réduction</b> .....	24
<b>1.6.2. Conventions de signe des efforts internes</b> .....	26
1.6.2.1. Effort normal $N_x$ .....	26
1.6.2.2. Effort tranchant $T_y$ .....	26
1.6.2.3. Moment fléchissant $M_z$ .....	27
<b>1.6.3. Relations entre efforts internes</b> .....	27
<b>1.6.4. Diagrammes des efforts internes</b> .....	29
<b>1.6.5. Application</b> .....	30
<b>1.7. Équation de la déformée</b> .....	35
<b>1.7.1. Calcul de la flèche et de la rotation</b> .....	35
<b>1.7.2. Application</b> .....	35
<b>Chapitre 2. Caractéristiques géométriques des sections planes</b> .....	37
<b>Introduction</b> .....	37
<b>2.1. Centre de gravité</b> .....	37
<b>2.2. Moment statique</b> .....	38
<b>2.3. Application</b> .....	39
<b>2.4. Moment d'inertie</b> .....	40

2.5. Théorème des axes parallèles - Théorème de Huyghens.....	41
2.6. Moment d'inertie et produit d'inertie - Cas de translation d'axes .....	42
2.7. Moment d'inertie et produit d'inertie - Cas de rotation d'axes.....	43
2.8. Application.....	44
<b>Chapitre 3. Sollicitations simples .....</b>	<b>48</b>
<b>Généralités.....</b>	<b>48</b>
<b>3.1. Traction pure - Compression pure .....</b>	<b>48</b>
<b>3.1.1. Effet de l'effort normal .....</b>	<b>50</b>
3.1.1.1. <i>Contrainte normale</i> .....	50
3.1.1.2. <i>Déformation et déplacement</i> .....	51
<b>3.1.2. Condition de résistance .....</b>	<b>52</b>
<b>3.1.3. Application .....</b>	<b>52</b>
<b>3.2. Cisaillement pur.....</b>	<b>55</b>

<b>3.2.1. Effet de l'effort tranchant</b> .....	55
3.2.1.1. <i>Contrainte de cisaillement</i> .....	55
3.2.1.2. <i>Déformation de cisaillement</i> .....	56
<b>3.2.2. Condition de résistance</b> .....	57
<b>3.2.3. Application</b> .....	58
<b>3.3. Flexion pure</b> .....	59
<b>3.3.1. Effet du moment fléchissant</b> .....	60
3.3.1.1. <i>Contrainte normale</i> .....	60
3.3.1.2. <i>Déformation normale</i> .....	62
<b>3.3.2. Condition de résistance</b> .....	63
<b>3.3.3. Application</b> .....	64
<b>3.4. Torsion pure</b> .....	65
<b>3.4.1. Torsion d'une barre circulaire</b> .....	66
3.4.1.1. <i>Observations expérimentales</i> .....	66
3.4.1.2. <i>Effet du moment de torsion</i> .....	67
<b>3.4.2. Torsion d'une barre rectangulaire</b> .....	69
<b>3.4.3. Condition de résistance</b> .....	71
<b>3.4.4. Application</b> .....	71

<b>Chapitre 4. Sollicitations composées</b> .....	73
<b>Généralités</b> .....	73
<b>4.1. Flexion plane</b> .....	74
<b>4.1.1. Contrainte normale</b> .....	75
<b>4.1.2. Contrainte de cisaillement</b> .....	75
<b>4.1.3. Application</b> .....	77
<b>4.1.4. Calcul de la résistance</b> .....	78
<b>4.1.5. Calcul de la rigidité</b> .....	79
<b>4.1.6. Application</b> .....	79
<b>4.2. Flexion déviée</b> .....	82
<b>4.2.1. Contrainte normale</b> .....	83
<b>4.2.2. Contrainte de cisaillement</b> .....	84
<b>4.2.3. Calcul de la résistance</b> .....	84
<b>4.2.4. Calcul de la rigidité</b> .....	85
<b>4.2.5. Application</b> .....	86

4.3. Flexion composée.....	88
4.3.1. <i>Contrainte normale</i> .....	89
4.3.2. <i>Contrainte de cisaillement</i> .....	90
4.3.3. <i>Calcul de la résistance</i> .....	90
4.3.4. <i>Calcul de la rigidité</i> .....	90
4.3.5. <i>Application</i> .....	91
4.4. Flexion-torsion.....	95
4.4.1. <i>Contrainte normale</i> .....	95
4.4.2. <i>Contrainte de cisaillement</i> .....	96
4.4.3. <i>Calcul de la résistance</i> .....	96
4.4.4. <i>Application</i> .....	97
<b>Chapitre 5. Systèmes isostatiques à treillis</b> .....	99
<b>Généralités</b> .....	99
5.1. <b>Système à treillis</b> .....	100
5.1.1. <i>Détermination du degré d'hyperstaticité</i> .....	100
5.1.2. <i>Exemple</i> .....	101
5.2. <b>Calcul des efforts normaux - Méthode des sections</b> .....	102



5.3. Déplacement d'un système à treillis .....	103
5.4. Application - Étude d'une ferme .....	103
<b>Chapitre 6. Systèmes hyperstatiques</b> .....	106
<b>Généralités</b> .....	106
<b>6.1. Poutres continues</b> .....	106
6.1.1. <i>Méthode des trois moments - Formules de Clapeyron</i> .....	106
6.1.2. <i>Relations entre efforts internes et moments aux appuis</i> .....	108
6.1.3. <i>Application - Étude d'une poutre reposant sur quatre appuis</i> .....	109
<b>6.2. Méthode des déplacements</b> .....	114
6.2.1. <i>Principe de la méthode</i> .....	114
6.2.2. <i>Barres soumises à des charges</i> .....	116
6.2.3. <i>Application - Étude d'un portique</i> .....	120
<b>Bibliographie</b> .....	125

# Chapitre 1

## Généralités sur la résistance des matériaux

### 1.1. Objectifs de la résistance des matériaux RDM

La RDM est une partie de la mécanique des solides déformables. Elle s'intéresse à l'étude, de manière théorique, de la réponse mécanique des structures soumises à des sollicitations extérieures (traction, compression, cisaillement, flexion et torsion). Elle permet d'évaluer les efforts internes, les contraintes ainsi que les déplacements et les rotations des structures.

### 1.2. Notion de poutre

Les notions abordées dans ce chapitre ne sont valables que pour des solides ayant une forme de poutre (figure 1.1.), c'est-à-dire un solide pour lequel :

- il existe une ligne moyenne  $l_m$ , continue, passant par les centres de gravité des sections du solide ;
- la longueur  $L$  est supérieure ou égale à 5 fois le diamètre  $D$  ;
- il n'existe pas de défauts de variation de section (trous, épaulements) ;
- le solide admet un seul et même plan de symétrie pour le chargement et la géométrie.

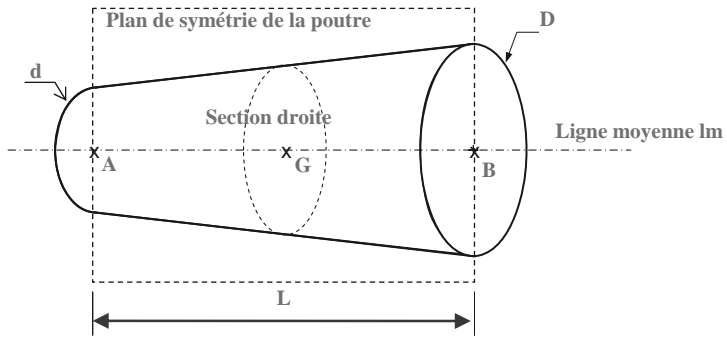


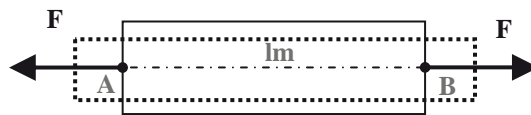
Figure 1.1. Élément de poutre

### 1.3. Exemples de sollicitations

Ces exemples de sollicitations seront traités, en détail, dans le *chapitre 3*.

#### 1.3.1. Traction/Compression

Une poutre est sollicitée en **traction** (ou en **compression**) lorsque les actions aux extrémités se réduisent à deux forces égales et opposées, portées par la ligne moyenne  $lm$ .



(a). Traction (allongement)

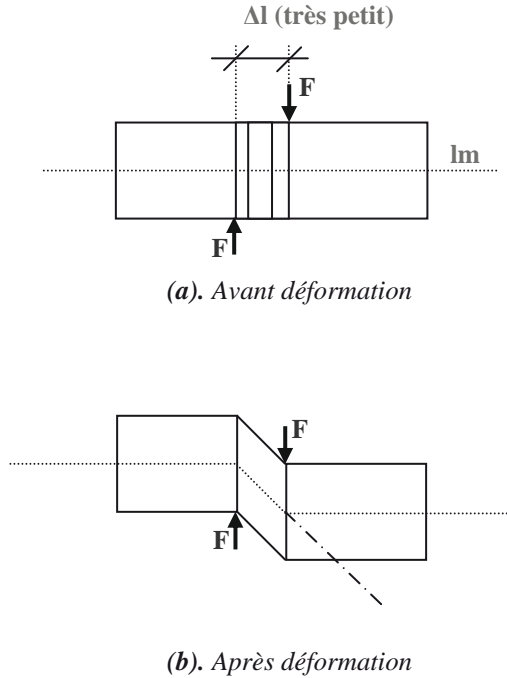


(b). Compression (rétrécissement)

Figure 1.2. Traction/compression : (a). Traction, (b). Compression

### 1.3.2. Cisaillement

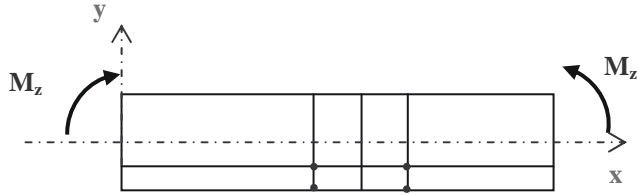
La direction du chargement est perpendiculaire à la ligne moyenne  $lm$  de la poutre, figure 1.3.



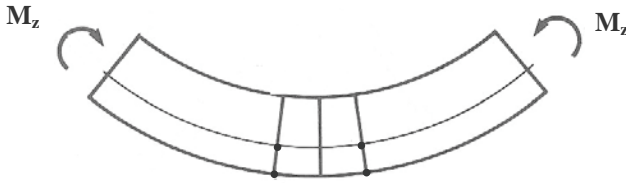
**Figure 1.3.** Cisaillement pur : (a). Avant déformation, (b). Après déformation

### 1.3.3. Flexion

Le chargement est un moment autour l'axe  $Z$ . Le moment  $M_z$  est appelé **moment fléchissant**.



(a). Avant déformation



(b). Après déformation

Figure 1.4. Flexion pure : (a). Avant déformation, (b). Après déformation

### 1.3.4. Torsion

Une poutre est sollicitée en *torsion* lorsque les actions aux extrémités se réduisent à deux moments de torsion  $M_t$  *égaux* et *opposés*, portés par la ligne moyenne  $lm$ .

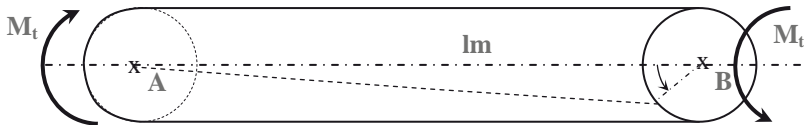


Figure 1.5. Torsion d'une barre circulaire

## 1.4. Conditions aux limites - Fixation des corps

### 1.4.1. Notion d'appui

Un appui est un élément extérieur en contact avec la structure étudiée et la réaction d'appui dépend de la nature de la liaison appui-structure.

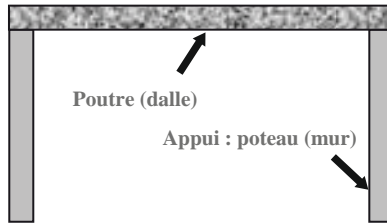


Figure 1.6. Notion d'appui

### 1.4.2. Appui simple - Appui glissant

Un contact ponctuel avec la structure (figure 1.7.) :

- une inconnue (réaction verticale) ;
- deux degrés de liberté dll (un déplacement suivant x et une rotation).



Figure 1.7. Appui simple

### 1.4.3. Appui double - Appui articulé

- Deux inconnues (réactions verticale et horizontale) ;
- un dll (une rotation).

### 3.1.2. Condition de résistance

La condition de résistance s'écrit :

$$\sigma_{\max} = \frac{N_x}{A} \leq \bar{\sigma}_a = \frac{\sigma_e}{s} \quad [3.8.]$$

$\sigma_{\max}$  : contrainte maximale en MPa ;

$\bar{\sigma}_a$  : résistance admissible du matériau en MPa ;

$\sigma_e$  : résistance élastique du matériau en MPa ;

$s$  : coefficient de sécurité.

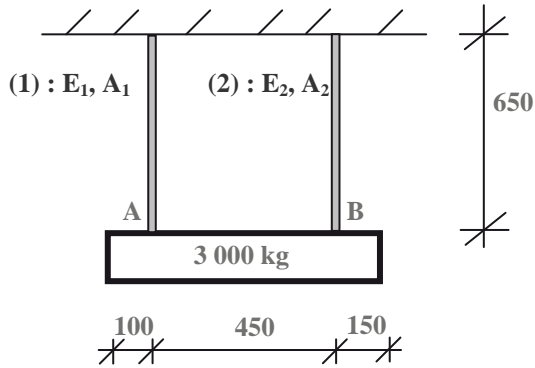
### 3.1.3. Application

Calculer les contraintes et les allongements subis par chacune des barres supportant le corps rigide de section constante et de masse de 3 000 kg.

Les caractéristiques des barres sont :

- Barre (1) :  $E_1 = 70\,000$  MPa ;  $A_1 = 240$  mm<sup>2</sup>
- Barre (2) :  $E_2 = 210\,000$  MPa ;  $A_2 = 180$  mm<sup>2</sup>

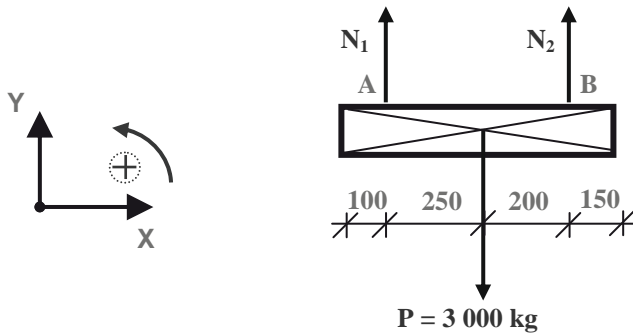
Les barres (1) et (2) sont soumises à une traction sous l'effet du poids du bloc.



**Figure 3.4.** Bloc suspendu. Dimensions en mm

On isole le bloc des deux barres (1) et (2).

- On remplace les coupures par des efforts internes (et les efforts extérieurs).
- On vérifie l'équilibre (PFS), on détermine les inconnues du problème.



**Figure 3.5.** Modèle mécanique. Dimensions en mm



Équations d'équilibre :

$$\sum M_{/A} = -P \times 250 + N_2 \times 450 = 0 \Rightarrow N_2 = 1666,67 \text{ kg}$$

$$\sum M_{/B} = P \times 200 - N_1 \times 450 = 0 \Rightarrow N_1 = 1333,33 \text{ kg}$$

$$\text{Vérifiant : } N_1 + N_2 = P \Rightarrow 1333,33 + 1666,67 = 3000 \text{ kg}$$

Contraintes dans les barres :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{13333,3}{240} = 55,55 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{16666,7}{180} = 92,59 \text{ MPa}$$

Allongements dans les barres :

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{13333,3 \times 650}{70000 \times 240} = 0,52 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{16666,7 \times 650}{210000 \times 180} = 0,28 \text{ mm}$$