



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du  
**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

**Délivré par :**

Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

**Discipline ou spécialité :**

Génie mécanique, mécanique des matériaux

---

**Présentée et soutenue par :**

Romain BRAULT

le : vendredi 04 octobre 2013

**Titre :**

Étude du comportement mécanique des matériaux composites par corrélation volumique : Application à l'analyse des effets du cisaillement transverse

---

**Ecole doctorale :**

ED MEGEP : Génie mécanique, mécanique des matériaux

**Unité de Recherche :**

Laboratoire Génie de Production (ENI de Tarbes) EA 1905

**Directeur(s) de thèse :**

Moussa KARAMA, Professeur des universités, ENI de Tarbes

Sébastien MISTOU, Maître de conférences, ENI de Tarbes

**Rapporteurs :**

Christine DÉLISÉE, Professeur des universités, Bordeaux Sciences Agro

Evelyne TOUSSAINT, Professeur des universités, Université de Clermont-Ferrand II

**Autre(s) membre(s) du jury :**

Bertrand WATTRISSE, Professeur des universités, Université de Montpellier II

Olivier POLIT, Professeur des universités, Université de Paris X

Arnaud GERMANEAU, Maître de conférences, Université de Poitiers

Marina FAZZINI, Maître de conférences, ENI de Tarbes



*Dans les sciences, le chemin est plus important que le but. Les sciences n'ont pas de fin.*

Erwin Chargaff



# Remerciements

Ce manuscrit constitue la synthèse des trois années consacrées à ce travail de recherche, réalisées au sein du Laboratoire Génie de Production de l'École Nationale d'Ingénieurs de Tarbes.

Même si les travaux de thèse sont souvent associés à l'autonomie et l'investissement personnel, il serait illusoire de nier que l'aboutissement de ce travail a été possible également via la participation, de près ou de loin, de nombreuses personnes.

Les prochaines lignes ont pour objet l'expression de ma gratitude et de ma sympathie vis à vis de celles-ci.

En premier lieu, je tiens à exprimer tous mes remerciements à M. Moussa Karama, Professeurs d'universités et Directeur de thèse durant ces travaux de recherche. Sa sympathie, sa constante bonne humeur, son expertise et son soutien ont été très appréciables durant ces trois années.

Aussi, je tiens à mettre noir sur blanc toute ma gratitude à l'égard de M. Sébastien Mistou, Maître de conférences et co-directeur de cette thèse. Après six années de collaboration, en tant que stagiaire, ingénieur puis doctorant, je le remercie très sincèrement pour sa confiance, son soutien et son amitié. Son suivi permanent ainsi que son

investissement dans cette activité scientifique ont joué un rôle essentiel dans la réussite de ces travaux, en particulier grâce l'environnement de travail de grande qualité qu'il sait créer pour ses collaborateurs. Merci pour tout Seb!

Je souhaite également saluer Mlle Marina Fazzini, Maître de conférences en co-encadrante de ce travail. Ses compétences et son investissement volontaire sur ce sujet m'ont aider dans la finalisation de ces travaux. Je la remercie également pour sa sympathie et son naturel qui ont rendu ces trois années agréables.

Ces remerciements s'adressent également à M. Arnaud Germaneau, Maître de conférences et co-encadrant de cette thèse. Malgré les 450 kms séparant Tarbes et Poitiers, je tiens à mettre en avant sa disponibilité, ses compétences scientifiques, sa volonté de suivi et d'investissement permanente sur l'ensemble des activités présentées dans ce mémoire. Sa grande sympathie et son accueil à Pprime ont été très importants et très enrichissants au cours de ces trois années et ont permis de transformer un co-encadrement en amitié.

Je tiens également à inclure M. Pascal Doumalin, Maître de conférences ainsi que M. Jean-Christophe Dupré, Chargé de recherche pour leur accueil, leur aide quotidienne lors de mes séjours au sein de leur laboratoire. Les nombreuses heures passées près du  $\mu$ -tomographe ont été autant d'occasion de discuter de nombreux sujets, scientifiques et autres, sans lesquels certains aspect de ces travaux n'aurait pas été traités. Je les remercie également pour leur sympathie, leur gentillesse et leur aide des plus précieuse.

J'associe également à ces lignes l'ensemble des membres de l'équipe PEM du laboratoire Pprime de l'Université de Poitiers, Franck, Pierre, Valérie, Fabrice, Mathieu, pour leur accueil et les bons moments passés lors de mes déplacement dans leurs locaux.

L'aboutissement de ce manuscrit et des ces trois années de thèse est évidemment une grande satisfaction. Néanmoins, cela marque également la fin de mon statut de doc-

---

torant du laboratoire, partagé avec de nombreuses personnes : Andrei, Éric, Christian, Malik, Vincent, Damien, Romain, Corentin, Adrien, Thibault, Florent, Goral, Laurence, Julie, Clélia, Adrien, Elodie, Cristina, Fabien, Samira, Stéphanie, Paula, Matthias, Juan-Diego, Arnaud, Mickael, Benjamin et encore beaucoup d'autres. J'en profite donc pour souhaiter bon courage et bonne réussite pour la fin des travaux des futurs docteurs et une bonne continuation pour les docteurs déjà diplômés. Aussi, de nombreux permanents m'ont également apporté leur soutien et leur aide chaque fois que j'en ai eu besoin. J'adresse également toute ma reconnaissance à Bernard, Gilles, Hélène, Marie-Laetitia, Loïc, Joël, Olivier(s), Valérie et Jean-Pierre.

De nombreuses personnes du LGP de l'ENIT m'ont quotidiennement aidé dans ce projet, je leur adresse également tous mes remerciements et toute ma sympathie. Parmi eux tous les techniciens du laboratoire, les agents d'entretien des locaux, le secrétariat du laboratoire ainsi que l'administration de l'ENIT et plus particulièrement, Cécile, Marie, Eliane, François, Virginie, Pierre, Joël, sans qui de nombreux problèmes n'auraient été résolus.

Ces lignes de remerciements s'adressent également à toute les personnes de l'aventure CRCC puis Nimitech. Parmi eux, Michel Niquet, sans qui je n'aurai pas eu l'occasion de mettre un pied dans le domaine des matériaux composites, ainsi que toutes les personnes rencontrées au CRCC : Vincent, Laurence, Céline, Toufik, Fred, Olivier, Nathalie, Jérôme, Thibault, puis à Nimitech : Pierrot, Rémi, Alexandra, Jean-Pierre, Valentin et Benjamin.

De nombreuses personnes m'ont également soutenu en dehors du cadre professionnel pour achever ces travaux. Merci à tous les volleyeurs de m'avoir permis de me défouler après certaines journées difficiles : Jean-No, Mat, Mat, Min's, Gambas, George, Armand, Ludo, Alex, Cédric,...Merci également à la propriétaire du restaurant « Les Bons Enfants » de Poitiers, dans lequel j'ai passé d'excellents moments à l'occasion de mes déplacements poitevins et dans lequel je reviendrai toujours avec plaisir.

## *Remerciements*

---

Je souhaite associer à ces remerciements des amis qui ont suivi de près ou de loin l'avancement de mes travaux et qui m'ont également toujours encouragés : Rémi, Éric, Pierrot, Johan, Loïc, Emil', Tonio, Clem', Gilles, Benj, Chou<sup>2</sup>, Thomas, Rémi.

Ma famille a également été d'un soutien sans faille jusqu'au jour de la soutenance de cette thèse. Je souhaite bien évidemment les remercier pour leur accompagnement permanent durant ces trois années. Maman, Francis, Damien, Mai, Marti Vincent : merci mille fois.

Enfin, je dédie l'aboutissement de ces années de travail à ma compagne, Lucile, qui a su me soutenir et m'accompagner au quotidien malgré toutes les difficultés rencontrées. Lucile, merci pour tout.



# Résumé

De nombreuses études ont été menées sur les matériaux composites, concernant le comportement mécanique à l'échelle macroscopique. D'autre part, le développement continu des techniques de détection et de mesures de champs permet d'aller plus loin dans l'analyse des structures composites. Ainsi, la corrélation volumique (DVC) basée sur des acquisitions de la structure interne à différents états de déformation, permet la mesure du champ des déplacements dans le volume de l'éprouvette. Le gauchissement des sections dû aux contraintes de cisaillement transverse est un phénomène propre aux structures anisotropes, comme les structures composites. De nombreuses études traitent du développement des modèles analytiques pour la modélisation numérique et la détermination des déplacements avec le plus de précision possible. Ainsi, de nombreux modèles existent, certains très complexes, pour la prise en compte de ce phénomène. Un des objectifs de ce travail est d'utiliser les mesures de champs issues de la corrélation volumique couplée à la tomographie rayons X, pour visualiser le gauchissement des sections pour un cas de sollicitation de flexion trois points. Une méthode de mesure ainsi qu'un système de chargement in-situ sont développés dans ce travail de recherche. Les modèles analytiques existants sont évalués et comparés à partir de mesures expérimentales. Un nouveau modèle est également proposé, par identification numérique, à partir des mesures de champs volumiques réalisées. Les résultats de ce travail de thèse permettront une meilleure compréhension des phénomènes physiques rencontrés lors de l'utilisation des matériaux composites vis à vis de leur conception et de leur mise en œuvre.



# Abstract

The complex mechanical behaviour of composite materials, due to internal heterogeneity and multi-layered composition impose deeper analysis. Several studies have already been conducted on the composite structures mechanical behavior at the macro level. On the other hand, the continuous development of detection techniques and field measurements can now go further in the analysis of complex structures, including composites. Thus, the digital volume correlation (DVC) based on the acquisition of the internal structure at different deformation states, allows the measurement of displacement fields through the thickness of the specimen. Warping sections due to transverse shear is a phenomenon linked to anisotropic structures, such as composite structures, which has been the subject of many studies to develop analytical models for the numerical modeling and the determination of displacements with the greatest possible precision. Many theories and models exist, some very complex, for the consideration of this phenomenon .. One goal of this doctoral work is to use measurements from the density correlation to determine whether these models the effects of transverse shear are physically consistent, and if their validity is good in the case of a kinematic measurement volume. A second objective of this thesis is to acquire know-how in the processing of information resulting from acquisitions by X-ray tomography In this sense, several studies are planned for the treatment and use of this information in an industrial context. The results of this work will provide a better understanding of physical phenomena encountered in the use of composite materials to generate optimization of their design and implementation paths.



# Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	vii
Abstract	ix
Table des matières	xi
Table des figures	xvii
Liste des tableaux	xxv
Table des notations	xxvii
Introduction	1
<b>1 Analyse expérimentale volumique du cisaillement trans-</b>	
<b>verse</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction analytique . . . . .	8
1.1.1 Le phénomène . . . . .	8

1.1.2	La prise en compte du cisaillement transverse . . . . .	9
1.1.3	Les fonctions raffinées de cisaillement transverse . . . . .	12
1.2	Techniques d'acquisition de données volumiques . . . . .	15
1.2.1	Tomographie optique de cohérence . . . . .	16
1.2.2	Imagerie par résonance magnétique . . . . .	17
1.2.3	Tomographie térahertz . . . . .	19
1.2.4	Tomographie par rayons X . . . . .	21
1.3	Techniques de mesures mécaniques dans les volumes . . . . .	22
1.3.1	Photoélasticimétrie 3D . . . . .	23
1.3.2	Elastographie . . . . .	24
1.3.3	Suivi de marqueurs volumiques . . . . .	25
1.3.4	Corrélation d'images volumiques . . . . .	26
1.4	Conclusion . . . . .	27

## **2 Étude analytique du cisaillement transverse dans les structures composites** **29**

2.1	Résolution analytique dans le cadre de la flexion trois points . . . . .	30
2.1.1	Méthode de résolution . . . . .	30
2.1.2	Principe des Travaux Virtuels (PTV) . . . . .	32
2.1.3	Équations d'équilibre . . . . .	36
2.1.4	Expressions des déplacements $u_1(x_1)$ et $u_3(x_1)$ . . . . .	37
2.2	Influence des théories de cisaillement transverse . . . . .	41
2.2.1	Configurations étudiées . . . . .	42
2.2.2	Calcul numérique des déplacements . . . . .	43
2.2.3	Calcul du taux de gauchissement $\Delta$ . . . . .	45
2.3	Résultats . . . . .	46
2.3.1	Profils de déplacement $u_1(x_3)$ . . . . .	47
2.3.2	Évaluation du gauchissement . . . . .	48
2.4	Conclusions . . . . .	50

<b>3</b>	<b>Modélisation numérique pour l'étude du cisaillement trans-</b>	<b>53</b>
	<b>verse</b>	
3.1	Objectifs et problématiques . . . . .	55
3.2	Propriétés matériaux . . . . .	56
3.2.1	Généralités sur la caractérisation mécanique des matériaux composites . . . . .	56
3.2.2	Essais de traction longitudinale . . . . .	59
3.2.3	Résultats des essais de traction longitudinale . . . . .	61
3.2.4	Essais de cisaillement Iosipescu . . . . .	64
3.2.5	Résultats des essais de cisaillement . . . . .	68
3.3	Modélisation éléments finis initiale . . . . .	70
3.4	Modélisation avancée . . . . .	72
3.4.1	Modélisation des zones hors appuis . . . . .	72
3.4.2	Modélisation des surfaces de contact . . . . .	74
3.5	Sensibilité des conditions aux limites . . . . .	74
3.5.1	Application des conditions aux limites . . . . .	76
3.5.2	Prise en compte du frottement aux contacts des appuis . . . . .	78
3.6	Sensibilité de l'application du chargement de flexion . . . . .	81
3.6.1	Position du point d'application du chargement . . . . .	82
3.6.2	Direction d'application du chargement $F_3$ . . . . .	84
3.7	Conclusions . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Approche expérimentale pour l'étude du cisaillement trans-</b>	<b>89</b>
	<b>verse</b>	
4.1	Problématiques . . . . .	91
4.2	Protocole . . . . .	92
4.3	Éprouvettes . . . . .	94
4.3.1	Géométrie . . . . .	95
4.3.2	Matériaux . . . . .	96

## TABLE DES MATIÈRES

---

4.3.3	Marqueurs . . . . .	97
4.3.4	Réalisation . . . . .	98
4.4	Machine d'essai . . . . .	100
4.4.1	Solution technique . . . . .	101
4.4.2	Dimensionnement . . . . .	102
4.5	Suivi des essais et pilotage . . . . .	104
4.5.1	Application de la charge . . . . .	104
4.5.2	Instrumentation . . . . .	105
4.6	La tomographie par rayons X . . . . .	107
4.6.1	Principe physique . . . . .	107
4.6.2	Matériel de mesure . . . . .	109
4.6.3	Reconstruction des images volumiques . . . . .	111
4.6.4	Bruits de mesure et artéfacts . . . . .	115
4.6.5	Traitement des images . . . . .	116
4.7	La corrélation d'images volumiques . . . . .	119
4.7.1	Principe général et discrétisation des volumes . . . . .	119
4.7.2	Corrélation volumique . . . . .	122
4.7.3	Précision sub-voxel . . . . .	123
4.7.4	Calcul des champs de déplacements et de déformations . . . . .	126
4.8	Conclusions . . . . .	127
<b>5</b>	<b>Analyse des résultats et exploitation</b>	<b>129</b>
5.1	Objectifs . . . . .	131
5.2	Analyses des résultats . . . . .	132
5.2.1	Caractérisation de la mesure des déplacements . . . . .	132
5.2.2	Traitement des résultats . . . . .	135
5.3	Résultats analytiques et numériques . . . . .	138
5.4	Étude de la fibre T700 . . . . .	142
5.4.1	Champs de déplacement $u_1$ et $u_3$ . . . . .	143
5.4.2	Champ de déformation $E'_{13}$ . . . . .	145



5.4.3	Confrontation des résultats . . . . .	146
5.4.4	Synthèse . . . . .	150
5.5	Étude de la fibre M55J . . . . .	150
5.5.1	Champs de déplacement $u_1$ et $u_3$ . . . . .	151
5.5.2	Champ de déformation $E'_{13}$ . . . . .	153
5.5.3	Confrontation des résultats . . . . .	153
5.5.4	Synthèse . . . . .	154
5.6	Étude du gauchissement . . . . .	158
5.6.1	Critère d'évaluation du gauchissement . . . . .	158
5.6.2	Résultats . . . . .	159
5.7	Analyse des effets volumiques . . . . .	160
5.8	Conclusions . . . . .	162
<b>6</b>	<b>Identification d'une fonction de cisaillement transverse</b>	<b>165</b>
6.1	Objectifs . . . . .	167
6.2	Méthode d'identification . . . . .	168
6.2.1	Algorithme de minimisation . . . . .	169
6.2.2	Gestion des minimums locaux . . . . .	170
6.3	Identification de la fonction de cisaillement transverse $f_{id}(x_3)$ . . . . .	172
6.3.1	Identification à partir des résultats expérimentaux . . . . .	173
6.3.2	Comparaison des résultats avec les théories existantes . . . . .	174
6.4	Exploitation du modèle $f_{id,1}(x_3)$ . . . . .	175
6.4.1	Calcul des déplacements $u_1(x_3)$ pour une poutre de forte épaisseur	176
6.4.2	Calcul des déplacements $u_1(x_3)$ pour une poutre d'épaisseur moyenne	177
6.4.3	Calcul des déplacements $u_1(x_3)$ pour une poutre de faible épaisseur	178
6.4.4	Interprétations . . . . .	179
6.5	Étude des polynômes pour la fonction $f(x_3)$ . . . . .	180
6.5.1	Identification polynômiale . . . . .	180
6.5.2	Comparaison avec les modèles existants . . . . .	181
6.5.3	Extension de la théorie naturelle . . . . .	182

*TABLE DES MATIÈRES*

---

6.5.4	Proposition d'un nouveau modèle $f(x_3)$ . . . . .	184
6.6	Conclusions . . . . .	188
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>191</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>195</b>

# Table des figures

1.1.1	Définition de la structure poutre étudiée . . . . .	9
1.1.2	Représentation des catégories de théories liées à la prise en compte du cisaillement transverse . . . . .	11
1.1.3	Tracés des fonctions de cisaillement transverse étudiées . . . . .	14
1.2.1	Principe de la mesure par tomographie optique de cohérence . . . . .	17
1.2.2	Visualisation de la fissuration d'un ménisque interne par IRM (Analyse Médicale du ménisque droit de R.BRAULT) . . . . .	18
1.2.3	Principe de la résonance magnétique nucléaire (RMN) . . . . .	19
1.2.4	Dispositif de mesure de volume par rayonnement THz (Brahm <i>et al.</i> , 2010)	20
1.2.5	Acquisition d'une balle de tennis de table par tomographie THz (Wang et Zhang, 2004) . . . . .	21
1.3.1	Principe de la photoélasticimétrie 3D(Germaneau, 2007) . . . . .	23
1.3.2	Analyse par photoélasticimétrie 3D des pressions de contact à l'intérieur d'une rotule aéronautique (Germaneau, 2007; Peyruseigt, 2008) . . . . .	24
1.3.3	Identification d'une inclusion cylindrique à deux épaisseurs différentes (a) 20mm et b) 40mm) par élastographie ultra-sonore (Said, 2006) . . . . .	25
2.1.1	Démarche de la résolution analytique . . . . .	31
2.1.2	Principe des travaux virtuels . . . . .	32
2.1.3	Description des efforts appliqués à la poutre . . . . .	34

TABLE DES FIGURES

---

2.1.4	Application de la résolution analytique au cas de la flexion trois points . . . . .	38
2.2.1	Configuration de l'essai de flexion trois points . . . . .	43
2.2.2	Schéma du calcul du taux de gauchissement $\Delta$ . . . . .	46
2.3.1	Profils de déplacement $u_1(x_3)$ pour $x_1 = \frac{l}{4}$ avec $\frac{l}{h} = 12,5$ . . . . .	48
2.3.2	Profils de déplacement $u_1(x_3)$ pour $x_1 = \frac{l}{4}$ avec $\frac{l}{h} = 5$ . . . . .	49
2.3.3	Profils de déplacement $u_1(x_3)$ pour $x_1 = \frac{l}{4}$ avec $\frac{l}{h} = 1,25$ . . . . .	49
3.2.1	Construction des matrices de rigidité en fonction des symétries matériaux des plis composites . . . . .	58
3.2.2	Géométrie « type B » de l'éprouvette de traction suivant la norme NF EN 2561 . . . . .	60
3.2.3	Courbes issues des essais de traction longitudinale sur les matériaux T700/4090 et M55/M18 . . . . .	62
3.2.4	Géométrie de l'éprouvette de cisaillement Iosipescu suivant la norme ASTM 5379-05 . . . . .	65
3.2.5	Montage spécifique de cisaillement Iosipescu suivant la norme ASTM 5379-05 . . . . .	66
3.2.6	Répartition de la déformation de cisaillement le long de la section sollicitée (Mistou <i>et al.</i> , 2010) . . . . .	67
3.2.7	Calcul du module de cisaillement $G_{13}$ par l'essai Iosipescu . . . . .	68
3.2.8	Courbes issues des essais de cisaillement Iosipescu sur les matériaux T700/4090 et M55J/M18 . . . . .	69
3.3.1	Modélisation éléments finis 2D de la poutre en flexion trois points . . . . .	71
3.4.1	Modélisation éléments finis 2D avec prise en compte des zones hors appuis . . . . .	72
3.4.2	Différence de résultats entre les deux modélisations étudiées . . . . .	73
3.4.3	Modélisation éléments finis 2D avec prise en compte des appuis de flexion . . . . .	75
3.4.4	Différence de résultats entre les deux modélisations étudiées et la modélisation avec appuis cylindriques . . . . .	75
3.5.1	Configurations de conditions aux limites testées . . . . .	76

---

3.5.2	Déplacements $u_1(x_3)$ pour les différentes configurations de conditions aux limites ( $u_{1,i}$ avec $i$ le numéro de la configuration des conditions aux limites); en cohérence (à gauche) et en incohérence (à droite) avec la théorie analytique . . . . .	77
3.5.3	Schématisation du modèle numérique avec prise en compte des contacts aux appuis avec glissement (à gauche) et sans glissement (à droite) . . .	78
3.5.4	Cartographies des déplacements $u_1(x_3)$ , respectivement avec contacts glissants (à gauche) et sans contacts glissants (à droite) . . . . .	79
3.5.5	Sensibilité du déplacement $u_1(x_3)$ aux coefficients de frottement pour la modélisation des contacts avec glissement aux appuis . . . . .	80
3.6.1	Modélisation éléments finis 2D de l'éprouvette complète en flexion trois points . . . . .	82
3.6.2	Schématisation du défaut de position du chargement $F_3$ suivant $x_1$ . . .	82
3.6.3	Cartographie des déplacements $u_1(x_3)$ , respectivement avec défaut (droite) et sans défaut (gauche) de position du chargement de flexion . . . . .	83
3.6.4	Sensibilité du déplacement $u_1(x_3)$ aux défauts de position du chargement $F_3$ suivant $x_1$ . . . . .	84
3.6.5	Schématisation du défaut de direction du chargement $F_3$ suivant $x_1$ . . .	85
3.6.6	Cartographie des déplacements $u_1(x_3)$ , respectivement avec défauts (droite) et sans défauts (gauche) d'orientation du chargement de flexion . . . . .	86
3.6.7	Sensibilité du déplacement $u_1(x_3)$ aux défauts de direction du chargement $F_3$ suivant $x_1$ . . . . .	86
4.2.1	Protocole de l'essai de flexion trois points in situ . . . . .	93
4.3.1	Dimensions des éprouvettes composites . . . . .	96
4.3.2	Réalisation des éprouvettes composites par le procédé pré-imprégné . . .	99
4.3.3	Réalisation d'une plaque de carbone/epoxy avec particules de cuivre par le procédé pré-imprégné . . . . .	100
4.4.1	Schéma de principe du système de chargement . . . . .	101

TABLE DES FIGURES

---

4.4.2	Conception du montage de chargement in situ pour la réalisation d'essai de flexion trois points . . . . .	103
4.4.3	Tube acier-PMMA-acier du dispositif de chargement in situ ainsi que le résultat du dimensionnement pour un chargement de traction de 12kN .	104
4.5.1	Capteur d'effort de capacité 20kN . . . . .	105
4.5.2	Photographie du système de chargement in situ développé pour les essais de flexion trois points . . . . .	106
4.6.1	Atténuation du faisceau de rayons d'après la loi de Beer-Lambert . . . .	108
4.6.2	Principe de fonctionnement de la mesure par tomographie par rayons X	109
4.6.3	Différents types d'équipements pour la tomographie par rayons X, a) Échantillon mobile; b) Échantillon fixe . . . . .	111
4.6.4	Projection sur le principe de la transformation de Radon . . . . .	113
4.6.5	Principe d'un algorithme de reconstruction itératif . . . . .	114
4.6.6	Exemple d'image de « blanc » tomographique . . . . .	117
4.6.7	Exemple d'image de « noir » tomographique . . . . .	118
4.6.8	Illustration du traitement d'images appliqué aux radiographies rayons X : à gauche : Radiographie brute et à droite : Radiographie après traitement . . . . .	119
4.7.1	Principe général de la corrélation d'images volumiques . . . . .	121
4.7.2	Interpolation tri-linéaire des niveaux de gris pour le calcul sub-voxel . .	124
5.2.1	Exemple de « courbe en S » en tomographie RX (Germaneau, 2007) . .	133
5.2.2	Évolution de l'erreur moyenne et de l'écart type de mesure en fonction du déplacement imposé pour le matériau T700/4090 . . . . .	134
5.2.3	Méthode de recalage des données expérimentales . . . . .	138
5.3.1	Profils de déplacement $u_1(x_3)$ pour $x_1 = +\frac{l}{4}$ avec $\frac{l}{h} = 12,5$ , calculés analytiquement et numériquement . . . . .	140
5.3.2	Profils de déplacement $u_1(x_3)$ pour $x_1 = +\frac{l}{4}$ avec $\frac{l}{h} = 5$ , calculés analytiquement et numériquement . . . . .	141

5.3.3	Profils de déplacement $u_1(x_3)$ pour $x_1 = +\frac{l}{4}$ avec $\frac{l}{h} = 1,25$ , calculés analytiquement et numériquement . . . . .	142
5.4.1	Courbe du chargement de flexion des éprouvettes T700/4090 . . . . .	143
5.4.2	Champ de déplacement $u_3$ mesuré pour le matériau T700/4090 pour un chargement de 1350N . . . . .	144
5.4.3	Champ de déplacement $u_3$ calculé numériquement pour le matériau T700/4090 pour un chargement de 1350N . . . . .	144
5.4.4	Champ de déplacement $u_1$ mesuré pour le matériau T700/4090, pour différents chargements . . . . .	146
5.4.5	Champ de déformation $E'_{13}$ mesuré pour le matériau T700/4090 pour un chargement de 1350N . . . . .	147
5.4.6	Champ de déformation $E'_{13}$ calculé numériquement pour le matériau T700/4090 pour un chargement de 1350N . . . . .	147
5.4.7	Profils de déplacement $u_1(x_3)$ pour $x_1 = +\frac{l}{4}$ du matériau T700/4090, pour un chargement de 400N . . . . .	148
5.4.8	Profils de déplacement $u_1(x_3)$ pour $x_1 = +\frac{l}{4}$ du matériau T700/4090, pour un chargement de 700N . . . . .	148
5.4.9	Profils de déplacement $u_1(x_3)$ pour $x_1 = +\frac{l}{4}$ du matériau T700/4090, pour un chargement de 1100N . . . . .	149
5.4.10	Profils de déplacement $u_1(x_3)$ pour $x_1 = +\frac{l}{4}$ du matériau T700/4090, pour un chargement de 1350N . . . . .	149
5.5.1	Courbe du chargement de flexion des éprouvettes M55J/M18 . . . . .	151
5.5.2	Champ de déplacement $u_3$ mesuré pour une éprouvette M55J/M18, pour un chargement de 1700N . . . . .	152
5.5.3	Champ de déplacement $u_3$ calculé numériquement pour une éprouvette M55J/M18, pour un chargement de 1700N . . . . .	153
5.5.4	Champ de déplacement $u_1$ mesuré pour une éprouvette M55J/M18 pour différents chargements . . . . .	154
5.5.5	Champ de déformation $E'_{13}$ mesuré pour une éprouvette M55J/M18, pour un chargement de 1700N . . . . .	155

TABLE DES FIGURES

---

5.5.6	Champ de déformation $E'_{13}$ calculé numériquement pour le matériau M55J/M18, pour un chargement de 1700N . . . . .	155
5.5.7	Profils de déplacement $u_1(x_3)$ pour $x_1 = +\frac{l}{4}$ du matériau M55J/M18, pour un chargement de 600N . . . . .	156
5.5.8	Profils de déplacement $u_1(x_3)$ pour $x_1 = +\frac{l}{4}$ du matériau M55J/M18, pour un chargement de 1100N . . . . .	156
5.5.9	Profils de déplacement $u_1(x_3)$ pour $x_1 = +\frac{l}{4}$ du matériau M55J/M18, pour un chargement de 1700N . . . . .	157
5.5.10	Profils de déplacement $u_1(x_3)$ pour $x_1 = +\frac{l}{4}$ du matériau M55J/M18, pour un chargement de 2200N . . . . .	157
5.6.1	Méthode de traitement des valeurs expérimentales pour l'analyse du gauchissement . . . . .	159
5.6.2	Critères de gauchissement pour les deux matériaux étudiés en fonction du chargement . . . . .	160
5.7.1	Comparaison des profils de gauchissement à travers l'épaisseur du matériau M55J/M18 en $x_1 = +\frac{l}{4}$ , pour un chargement de 2200N . . . . .	161
6.2.1	Synoptique d'optimisation de la fonction $f_{id}(x_3)$ . . . . .	169
6.2.2	Définition statistique des paramètres $a_i$ pour l'initialisation de l'algorithme d'optimisation . . . . .	171
6.2.3	Méthode d'initialisation des paramètres à partir de tirages aléatoires . . . . .	172
6.3.1	Profils de déplacement $u_1(x_3)$ pour $x_1 = \frac{l}{4}$ identifié à partir des résultats expérimentaux . . . . .	174
6.3.2	Comparaison des profils $u_1(x_3)$ calculés avec $f_{id}(x_3)$ et avec les modèles raffinés . . . . .	175
6.4.1	Profils de déplacement $u_1(x_3)$ pour $x_1 = \frac{l}{4}$ avec $\frac{l}{h} = 1,25$ pour les modèles raffinés et $f(x_3) = f_{id}(x_3)$ . . . . .	176
6.4.2	Comparaison des profils de déplacement $u_1(x_3)$ pour $x_1 = \frac{l}{4}$ , avec $\frac{l}{h} = 5$ pour les modèles raffinés et $f(x_3) = f_{id}(x_3)$ . . . . .	178



6.4.3 Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = \frac{l}{4}$  avec  $\frac{l}{h} = 12,5$  pour les modèles raffinés et  $f(x_3) = f_{id}(x_3)$  . . . . . 179

6.5.1 Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = \frac{l}{4}$  identifié à partir des résultats expérimentaux, pour différents types de polynômes . . . . . 181

6.5.2 Tracés des fonctions de cisaillement transverse étudiées et identifiées . . 185

6.5.3 Visualisation du modèle  $f_{id,3}(x_3)$  . . . . . 187

6.5.4 Courbes de dérivée des modèles raffinés . . . . . 187

6.5.5 Utilisation du modèle  $f_{id,3}(x_3)$  pour la détermination des déplacements  $u_1(x_3)$  pour un chargement de  $F_3 = 6000\text{N}$ , avec  $E_{11} = 140000\text{MPa}$ ,  $G_{13} = 3500\text{MPa}$  et  $\frac{l}{h} = 1,25$  . . . . . 188



# Liste des tableaux

2.1	Abscisses $\xi_i$ et poids $w_i$ pour la méthode de Gauss-Legendre à sept points	44
2.2	Valeurs des coefficients $c_1$ à $c_4$ pour les six fonctions $f(x_3)$ , $\frac{l}{h} = 12,5$	44
2.3	Valeurs des coefficients $c_1$ à $c_4$ pour les six fonctions $f(x_3)$ , $\frac{l}{h} = 5$	45
2.4	Valeurs des coefficients $c_1$ à $c_4$ pour les six fonctions $f(x_3)$ , $\frac{l}{h} = 1,25$	45
2.5	Taux de gauchissement $\Delta$ en % en fonction de $f(x_3)$ , pour les différentes valeurs de $\frac{l}{h}$	50
3.1	Tableaux de synthèse des modules $E_{11}$ issus des essais de traction sur le matériau T700/4090, avec et sans marqueurs métalliques	63
3.2	Tableaux de synthèse des modules $E_{11}$ issus des essais de traction sur le matériau M55J/M18, avec et sans marqueurs métalliques	63
3.3	Tableaux de synthèse des modules $G_{13}$ issus des essais de cisaillement Iosipescu sur le matériau T700/4090, avec et sans marqueurs métalliques	69
3.4	Tableaux de synthèse des modules $G_{13}$ issus des essais de cisaillement Iosipescu sur le matériau M55J/M18, avec et sans marqueurs métalliques	70
3.5	Variations du coefficient de frottement aux contacts des appuis du montage de flexion trois points	80
3.6	Variations de la position du point d'application de $F_3$ utilisées	83
3.7	Variations de la direction du point d'application de $F_3$ utilisées	85

*LISTE DES TABLEAUX*

---

4.1	Configurations géométriques des éprouvettes . . . . .	95
4.2	Propriétés mécaniques des renforts composites . . . . .	97
4.3	Conditions de fabrication des éprouvettes composites . . . . .	99
4.4	Caractéristiques du tomographe Viscom X8050 de l'Université de Poitiers	111
5.1	Moyenne des écarts $E_c$ en % pour $u_1(+\frac{l}{4}, x_3)$ en fonction de $f(x_3)$ , pour les différentes valeurs de $\frac{l}{h}$ étudiées . . . . .	140
6.1	Écarts relatifs en % des modèles raffinés de $f(x_3)$ par rapport à la théorie naturelle, pour un rapport $\frac{l}{h} = 1,25$ . . . . .	177
6.2	Écarts relatifs en % des modèles raffinés de $f(x_3)$ par rapport à la théorie naturelle, pour un rapport $\frac{l}{h} = 5$ . . . . .	178
6.3	Écarts relatifs en % des modèles raffinés de $f(x_3)$ par rapport à la théorie naturelle, pour un rapport $\frac{l}{h} = 12,5$ . . . . .	179
6.4	Tableau des valeurs des paramètres $a_i$ pour les différents degrés de polynômes utilisés . . . . .	180
6.5	Valeurs des paramètres $a_i$ propres aux modèles existants (Karama <i>et al.</i> , 2009) . . . . .	182
6.6	Tableau des valeurs des paramètres $a_i$ pour une fonction d'ordre 9 sans extension de la théorie naturelle . . . . .	183
6.7	Valeurs des coefficients $c_1$ à $c_4$ pour différentes fonctions $f(x_3)$ avec $\frac{l}{h} = 1,25$ , $E_{11} = 318230\text{MPa}$ et $G_{13} = 3330\text{MPa}$ . . . . .	184

# Table des notations

$A$	Aire d'une section de poutre
$a_n$	Coefficients du développement polynomiale de la fonction de cisaillement transverse
$a_i$	Paramètre de la fonction de cisaillement transverse sous forme polynômiale
$B(x_i)$	Terme homogène à un moment
$b$	Largeur de la poutre
$C_{ij}$	Matrice de raideur
$C$	Coefficient de corrélation volumique
$c_i$	Coefficients de calculs
$D$	Domaine de corrélation
$\partial D$	Frontière de domaine
$E_{ii}$	Module d'élasticité longitudinal
$E'_{ij}$	Déformation de Green-Lagrange

Table des notations

---

$E_s$	Moyenne quadratique des écarts entre les profils adimensionnée
$E_c$	Ecart relatif entre deux profils
$E_g$	Erreur globale des mesures de corrélation volumique
$F_i$	Effort de contact dans la direction d'une normale
$F^R$	Effort de rupture
$f$	Valeur de reconstruction
$f(X)$	Niveau de gris de l'état initial
$f(x_3)$	Fonction de cisaillement transverse
$f^V$	Force extérieure à distance appliquée à un volume
$f^S$	Force extérieure de contact appliquée à une surface
$f_{id,i}(x_3)$	Fonctions de cisaillement transverse identifiées
$G_{ij}$	Module de cisaillement
$g(x)$	Niveau de gris de l'état final
$H(x_i)$	Terme homogène à un effort
$h$	Hauteur de la poutre
$I_{33}$	Moment d'inertie de la section transverse
$K$	Constante d'intégration
$k$	Coefficient de correction
$L$	Longueur de la poutre
$l$	Longueur entre appuis de flexion
$M(x_i)$	Moment de flexion

---

$m_i$	Moyenne de la loi normale des paramètres $a_i$
$N_0$	Intensité initial du faisceau de rayons X
$N$	Intensité du faisceau de rayons X transmis
$n$	Nombre de tirages aléatoires effectué pour chaque paramètre $a_i$
$P$	Vecteur de transformation matérielle
$p$	Valeur de projection
$Q$	Fonction coût utilisée pour l'identification des modèles
$R[\mu(\theta_i, u)]$	Transformée de Radon
$S$	Surface
$S_{ij}$	Matrice de souplesse
$S_f$	Terme de contribution du cisaillement au champ de déplacement
$S_{ct}$	Facteur de cisaillement transverse
$T$	Travail
$t$	Variable d'intégration de la méthode Gauss-Legendre
$U_{imp}$	Déplacement imposé à l'échantillon
$U_{i_{mes}}$	Déplacement mesuré par corrélation volumique dans une direction donnée
$U(X)$	Déplacement mesuré entre l'état initial et l'état final
$u(x_i, x_j)$	Champ de déplacement
$u_i$	Composante du champ de déplacement
$u_{i,j}$	Notation adoptée pour les termes dérivés
$u^0$	Déplacement de la fibre moyenne

*Table des notations*

---

$u'$	Régression linéaire à l'origine du déplacement longitudinal
$u^*$	Champ de déplacement virtuel
$V$	Volume
$w_i$	Poids du polynôme de Legendre
$X(X, Y, Z)$	État initial de corrélation
$x(x, y, z)$	État final de corrélation
$x_1$	Variable de la longueur de la poutre
$x_2$	Variable de la largeur de la poutre
$x_3$	Variable de la hauteur de la poutre
$\gamma^0$	Déformation de cisaillement de la fibre moyenne
$\gamma_{ij}$	Composante de déformation de cisaillement
$\Delta$	Taux de gauchissement
$\zeta$	Angle de chargement de l'éprouvette
$\xi_i$	Abscisses du polynôme de Legendre
$\varepsilon(x_i, x_j)$	Champ de déformation
$\varepsilon_{ii}$	Composante de déformation longitudinale
$\varepsilon_{ij}^R$	Déformation à rupture
$\varepsilon^*$	Champ de déformation virtuel
$\mu(x_i, y)$	Coefficient d'atténuation linéique de matériau
$\nu_{ij}$	Coefficient de Poisson
$\sigma_{ii}$	Contrainte normale



---

$\sigma_{ij}^R$	Contrainte à rupture
$\sigma_i$	Écart-type de la loi normale des paramètres $a_i$
$\tau_{ij}$	Contrainte de cisaillement
$\phi^0$	Rotation totale de la fibre moyenne
$\phi$	Rotation totale
$\phi(X)$	Transformation matérielle entre l'état initial et l'état final
$\Omega$	Amplitude de gauchissement
$\delta$	Variation d'un terme
$\omega_f$	Scalaire dépendant de la fonction de cisaillement transverse
$\Theta(x_i)$	Terme de contribution de la flexion au champ de déplacement
$\Psi(x_i)$	Terme de variation du cisaillement sur la ligne moyenne



# Introduction

L'utilisation des matériaux composites dans les applications industrielles tend à augmenter depuis plusieurs années, et cela dans toutes les industries : automobile, aéronautique, spatiale, marine, ferroviaire ou encore sportive, médicale et nucléaire. Les performances en termes de gain massique, de propriétés mécaniques et de fabrication offrent de nombreuses possibilités d'applications, parfois très complexes. Les activités de recherche propres à ces matériaux sont également très présentes dans les laboratoires du monde entier pour permettre de mieux comprendre le comportement des structures composites à travers de nombreux thèmes d'études, dans le but d'optimiser leur utilisation et leur adéquation avec l'application industrielle. Parmi eux, on peut citer les travaux liés à l'analyse du comportement mécanique des structures hétérogènes et multicouches. Les premiers développements effectués sur ce sujet, qui remontent aux années 1950, ont permis de proposer des théories analytiques pour le dimensionnement des structures composites. Certaines d'entre elles sont actuellement pleinement reconnues et utilisées industriellement par l'intermédiaire des outils de simulation numérique commerciaux. L'analyse du comportement mécanique continue d'être étudiée et enrichie de manière à faire progresser la maîtrise des matériaux composites dans le contexte industriel.

Une autre discipline est également en évolution constante depuis plusieurs dizaines d'années, il s'agit de la mesure en mécanique expérimentale. Le développement de techniques nouvelles, parfois basées sur des interactions physiques complexes, offrent de plus

en plus de possibilités d'investigation des matériaux et de leur comportement mécanique, thermique ou aérodynamique par exemple. Parmi les nombreuses techniques de mesures existantes, les mesures de champs permettent l'analyse sans contact du comportement. Les développements récents de cette thématique offrent de nombreuses possibilités d'applications, y compris pour l'analyse des matériaux composites pour le contrôle non destructif (CND) ainsi que pour la mesure de déplacements induits par divers types de chargement (statique, dynamique, impact, etc...). Parmi l'ensemble des techniques, on distingue les techniques de mesures surfaciques (2D ou 2,5D) permettant l'acquisition de données restituées sur des surfaces (planes ou courbes), ainsi que les mesures volumiques (3D), plus récentes, présentant l'intérêt d'évaluer la réponse mécanique tridimensionnelle du cas étudié. Ces techniques volumiques sont apparues par extension des méthodes surfaciques, et progressent en parallèle des possibilités de plus en plus riches des moyens de calculs informatiques. L'utilisation des mesures de champs est un outil très performant pour la corrélation entre le comportement réel des structures et les théories ou modélisations censées le reproduire, car il offre des possibilités très intéressantes pour la comparaison des résultats ainsi que pour l'optimisation des modèles par l'intermédiaire de l'identification des données d'entrée.

Ce travail de thèse vise à mettre en œuvre une démarche expérimentale d'analyse des structures composites pour la comparaison entre le comportement réel et le comportement représenté par les théories analytiques ou la modélisation numérique correspondante. Cette analyse expérimentale est basée sur l'utilisation des méthodes de mesures de champs volumiques pour permettre une investigation la plus complète possible des matériaux étudiés. Le contexte de ces travaux est ciblé sur l'analyse des effets du cisaillement transverse dans les matériaux composites, pouvant apparaître dans les structures composites multicouches soumises à de fortes contraintes de cisaillement telles que la flexion ou le flambement par exemple. La problématique majeure est de pouvoir prendre en compte ce phénomène dans le dimensionnement dans le but de mieux évaluer les variations mécaniques subies, pouvant être prépondérantes dans certaines applications. Ce phénomène mécanique complexe, bien connu et largement étudié par la communauté

---

scientifique fait l'objet de très peu d'études expérimentales, d'où l'intérêt porté sur cette application. Ce manuscrit, structuré selon six chapitres, présente les différentes méthodes utilisées et les développements effectués sur ce sujet suivant trois approches : analytique, numérique et expérimentale.

Le premier chapitre, intitulé « **Analyse expérimentale du cisaillement transverse dans les matériaux composites** » permet de décrire plus précisément la problématique de ce travail. La compréhension théorique du cisaillement transverse est effectuée ainsi que sa prise en compte dans le dimensionnement des structures, à partir des éléments issus de la littérature. Dans un second temps, une description de plusieurs méthodes de mesure volumique est effectuée. Celle-ci est construite autour de deux aspects indépendants : l'acquisition de données volumiques et la mesure de champs associée. L'objectif est de définir la meilleure adéquation possible entre la physique du problème et les moyens expérimentaux permettant la réalisation de mesures liées à ce sujet.

Le second chapitre intitulé « **Étude analytique du cisaillement transverse dans les structures composites** » présente une méthode de résolution analytique pour l'analyse théorique du cisaillement transverse, dans le cadre d'un problème de flexion trois points. A partir de travaux antérieurs, cette méthode est utilisée pour l'analyse des effets du phénomène étudié dans diverses configurations géométriques. Celle-ci est également enrichie par l'intermédiaire de modèles théoriques récents pour la prise en compte du cisaillement transverse, intégrés à la résolution. Ces résultats synthétisent une partie des travaux scientifiques réalisés sur ce sujet et permettent d'établir une base de comparaison avec les résultats expérimentaux.

Conformément à la résolution analytique proposée, le troisième chapitre intitulé « **Modélisation numérique pour l'étude du cisaillement transverse** » présente la modélisation numérique effectuée permettant de déterminer les déplacements induits par les contraintes de cisaillement transverse pour un essai de flexion trois points. Dans un premier temps, la méthode de caractérisation mécanique des matériaux effectuée est

décrite. Elle permet la détermination des propriétés mécaniques les plus influentes nécessaire à la modélisation. Concernant la construction du modèle numérique, plusieurs hypothèses sont également discutées pour faire le lien entre la résolution analytique et la réalité expérimentale, pouvant être source de différences des résultats. Aussi, une analyse de la sensibilité du modèle vis-à-vis de ses conditions aux limites est effectuée pour déterminer la modélisation la plus appropriée à cette étude. Enfin, les résultats ainsi déterminés sont comparés à ceux issus du chapitre précédent.

Le quatrième chapitre intitulé « **Approche expérimentale pour l'étude du cisaillement transverse** » décrit la méthode expérimentale mise en place pour mesurer les effets du cisaillement transverse. La première partie du chapitre permet d'identifier les différentes problématiques liées au développement d'une méthode de mesure permettant de visualiser et de quantifier le cisaillement transverse dans le cadre d'un essai de flexion trois points. Une machine d'essai est développée dans ce but pour la réalisation d'essais mécaniques à l'intérieur d'équipement de mesure par tomographie. Le protocole global est décrit de manière à comprendre la chronologie des essais et l'interaction entre les différentes techniques utilisées pour ces mesures. La micro-tomographie à rayons X et la corrélation d'images volumiques, qui sont respectivement les deux principales techniques d'acquisition et de mesure de champs, sont présentées et décrites en détails pour justifier leurs intérêts et analyser la faisabilité de leur utilisation dans le cadre de cette étude.

Les résultats issus de ce protocole de mesure sont présentés dans le cinquième chapitre de ce mémoire, intitulé « **Exploitation des résultats expérimentaux pour l'analyse du cisaillement transverse** ». Une première partie traite de la méthode de recalage des données expérimentales mesurées, à laquelle une attention particulière est apportée pour une exploitation cohérente de ces mesures vis-à-vis des résultats expérimentaux et numériques. Une analyse expérimentale des effets du cisaillement transverse est alors effectuée pour déterminer la représentativité des modèles théoriques retenus et de la modélisation numérique.

---

Le sixième et dernier chapitre de ce mémoire de thèse intitulé, « **Identification d'une fonction de cisaillement transverse** », propose de déterminer les paramètres d'un modèle analytique de prise en compte du cisaillement transverse par identification. En effet, certaines différences pouvant être observées entre l'expérience et les modèles théoriques, il est proposé d'utiliser les données mesurées pour identifier un modèle, représentatif des cas traités expérimentalement, et compatible avec l'utilisation de la résolution analytique. La démarche d'identification est explicitée puis appliquée à des cas de référence. Les résultats issus de cette identification sont également présentés et comparés à ceux des chapitres précédents. Une étude de l'influence des paramètres de construction des modèles de prise en compte du cisaillement transverse est également effectuée pour envisager leur optimisation.





# Chapitre 1

## Analyse expérimentale volumique du cisaillement transverse

1.1	Introduction analytique . . . . .	8
1.1.1	Le phénomène . . . . .	8
1.1.2	La prise en compte du cisaillement transverse . . . . .	9
1.1.3	Les fonctions raffinées de cisaillement transverse . . . . .	12
1.2	Techniques d'acquisition de données volumiques . . . . .	15
1.2.1	Tomographie optique de cohérence . . . . .	16
1.2.2	Imagerie par résonance magnétique . . . . .	17
1.2.3	Tomographie térahertz . . . . .	19
1.2.4	Tomographie par rayons X . . . . .	21
1.3	Techniques de mesures mécaniques dans les volumes . . . . .	22
1.3.1	Photoélasticimétrie 3D . . . . .	23
1.3.2	Elastographie . . . . .	24
1.3.3	Suivi de marqueurs volumiques . . . . .	25
1.3.4	Corrélation d'images volumiques . . . . .	26
1.4	Conclusion . . . . .	27

Ce premier chapitre aborde les différents aspects de l'étude visant à analyser le comportement des structures composites sous de fortes sollicitations de cisaillement transverse. En premier lieu, un état de l'art de la prise en compte analytique du problème est réalisé. Une première partie est dédiée aux différentes techniques existantes ainsi qu'à leurs particularités et limites vis-à-vis du sujet de ce travail. D'autre part, d'un point de vue expérimental, une bibliographie portant sur les techniques de mesure permettant d'accéder aux informations dans le volume, couramment nommées « techniques de mesures volumiques » est réalisée pour faire le lien entre les problématiques théorique et expérimentale du sujet. Les spécificités des matériaux composites au regard des méthodes volumiques sont également exposées afin de comprendre les éventuelles difficultés liés à leur utilisation.

## **1.1 Introduction analytique**

### **1.1.1 Le phénomène**

Le cisaillement transverse est un phénomène propre aux matériaux présentant des propriétés mécaniques anisotropes. Ainsi, plus l'anisotropie est élevée, plus les effets du cisaillement transverse sont importants. Ce phénomène est provoqué lors de fortes sollicitations engendrant des contraintes de cisaillement prépondérantes dans la structure. Un de ces effets est le gauchissement des sections induit par des contraintes de cisaillement transverse importantes. Le gauchissement des sections entraîne une augmentation de l'amplitude des déplacements dans la structure, et peut entraîner une rupture mécanique anticipée. Ainsi, en fonction de la sollicitation considérée, il peut s'avérer indispensable de prendre en compte le cisaillement transverse dans le dimensionnement mécanique de pièces composites. Dans cette optique, plusieurs théories ont été développées pour la prise en compte du cisaillement transverse, sur la base de la cinématique issue de la théorie des plaques. Celles-ci sont présentées dans les paragraphes suivants.

## 1.1.2 La prise en compte du cisaillement transverse

La prise en compte du cisaillement transverse dans l'étude des matériaux composites peut s'avérer prépondérante pour obtenir des résultats cohérents et exploitables, par la voie analytique comme par la voie numérique. Plusieurs approches existent pour le prendre en compte dans les structures composites. Ce phénomène a été étudié depuis très longtemps par les scientifiques, et plusieurs niveaux de complexité se distinguent dans la prise en compte du cisaillement transverse.

Considérons une poutre rectiligne de longueur  $L$  de largeur  $b$  et d'épaisseur  $h$ , dont les directions d'orthotropie correspondent aux trois axes d'un repère 3D orthonormé  $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ , illustrée en figure 1.1.1.

On note  $E_{11}$  le module d'élasticité suivant l'axe  $\vec{x}_1$  et  $G_{13}$  le module de cisaillement dans la plan  $(\vec{x}_1, \vec{x}_3)$ .

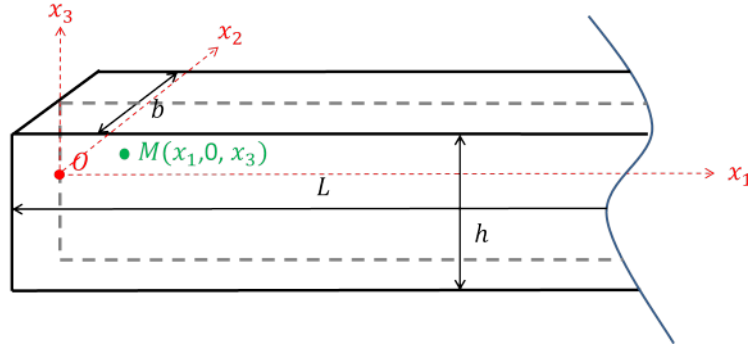


FIGURE 1.1.1: Définition de la structure poutre étudiée

La prise en compte du cisaillement transverse s'observe généralement par l'intermédiaire d'une fonction  $f(x_3)$ . Celle-ci est présente dans le modèle général de déplacement d'un point  $M$  appartenant à la structure considérée, issue de la théorie des plaques multicouches (Berthelot, 2005).

$$U(M) = \begin{cases} u_1(x_1, x_3) = u_1^0(x_1) - x_3 u_{3,1}^0(x_1) + f(x_3) \gamma_{13}^0(x_1) \\ u_3(x_1, x_3) = u_3^0(x_1) \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Cette cinématique fait apparaître les différents éléments suivants :

- $u_1^0(x_1)$  et  $u_3^0(x_1)$ , représentent les déplacements du plan moyen dans les directions  $x_1$  et  $x_3$
- $u_{3,1}^0(x_1)$  représentent la rotation de la section autour de l'axe  $x_2$ , induite par la flexion.
- $\gamma_{13}^0(x_1)$  représentent la déformation de cisaillement transverse par rapport à la ligne moyenne, également exprimée par

$$\gamma_{13}^0(x_1) = \left( u_{3,1}^0(x_1) - \omega^0(x_1) \right) \quad (1.1.2)$$

- $\omega^0(x_1)$  représente la rotation totale de la section par rapport à l'axe vertical
- $f(x_3)$  représentant la fonction de cisaillement transverse

On notera que ce modèle de champs de déplacement est issu de la théorie générale des coques multicouches, simplifiée par les hypothèses d'infinité des rayons de courbure et d'unité des métriques propres à la définition d'une plaque, plus la non prise en compte de la direction  $x_2$  de par la considération de poutre.

On peut distinguer et classer les différentes approches de prise en compte du cisaillement transverse en trois grandes catégories, comme l'illustre la figure 1.1.2.

Historiquement, d'après la théorie de Kirchhoff-Love, appelée « théorie classique » des plaques multicouches, le cisaillement transverse n'est pas pris en compte (Kirchhoff, 1850). L'hypothèse qui est alors faite est que les sections restent perpendiculaires et rectilignes par rapport à la ligne moyenne de la poutre. La théorie classique est la plus simple du point de vue de la résolution analytique, du fait que la fonction  $f(x_3)$  devient égale à 0, néanmoins elle néglige tous les effets liés aux contraintes de cisaillement transverse, notamment le gauchissement des sections.

Pour modéliser de manière plus réaliste le comportement des structures multi-

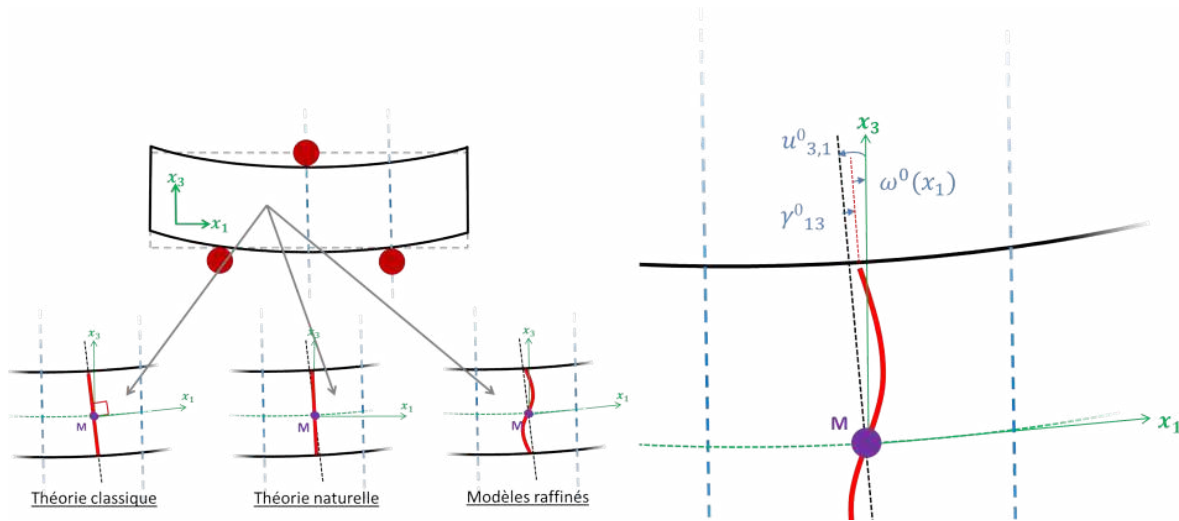


FIGURE 1.1.2: Représentation des catégories de théories liées à la prise en compte du cisaillement transverse

couches, la « théorie naturelle » a été proposée par Reissner et Mindlin (Reissner, 1945). Cette théorie est la première à prendre en compte le cisaillement transverse dans la résolution du champ de déplacement. On considère alors que  $f(x_3)=x_3$ , ce qui permet de prendre en compte la rotation des sections par rapport à la normale de la fibre moyenne. Cela entraîne donc une modification des valeurs de déplacements longitudinaux. Néanmoins, la distribution linéaire des déplacements le long de la hauteur des sections est critiquable, du fait de l'impossibilité d'analyser l'amplitude du gauchissement des sections. Un coefficient correcteur  $k$  sur les contraintes est souvent utilisé dans la loi de comportement pour accentuer la prise en compte du phénomène.

Aussi, on a vu apparaître un grand nombre de théories, rassemblées sous l'appellation de « modèles raffinés » ou « modèles d'ordre supérieur » qui permettent une prise en compte plus significative du cisaillement transverse. Les fonctions de cisaillement permettent alors une distribution non uniforme des déplacements longitudinaux le long de la hauteur des sections. On voit alors apparaître le phénomène de gauchissement des sections, responsable de l'augmentation des déplacements et dans certains cas de l'initiation de délaminage dans les structures composites, ayant souvent pour conséquence,

par propagation, la rupture mécanique. Ces fonctions raffinées sont abordées plus en détail dans le paragraphe suivant.

Une autre approche consiste à prendre en compte les phénomènes liés aux interfaces entre les plis, comme la continuité des contraintes et des déformations à travers l'épaisseur du stratifié. Ainsi, les théories « zig-zag » ont été développées pour une meilleure prise en compte des phénomènes locaux liés aux empilements de couches.(Chaudhuri, 2008).

### 1.1.3 Les fonctions raffinées de cisaillement transverse

Dans l'optique d'une prise en compte du cisaillement transverse la plus précise possible, de nombreux modèles ont été développés et sont encore développés aujourd'hui. Ce paragraphe détaille les principales fonctions raffinées existantes.

Il est intéressant de noter que la majorité de ces différentes fonctions de cisaillement transverse, permettant de considérer un gauchissement des sections, sont basées sur un modèle de développement polynomial, de puissances impaires, de la fonction  $f(x_3)$  de la forme suivante :

$$f(x_3) = a_1 \cdot x_3 - a_3 \cdot \left( \frac{\pi^2}{3!} \cdot \frac{x_3^3}{h^2} \right) + a_5 \cdot \left( \frac{\pi^4}{5!} \cdot \frac{x_3^5}{h^4} \right) + \dots + (-1)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot a_n \cdot \left( \frac{\pi^{(n-1)}}{n!} \cdot \frac{x_3^n}{h^{(n-1)}} \right) \quad (1.1.3)$$

La construction des fonctions  $f(x_3)$  s'établit alors par le choix des coefficients  $a_n$  induits par l'ordre choisi pour le développement. On retrouve donc dans cette formulation générale de la fonction de cisaillement transverse la théorie classique, où les coefficients  $a_n$  sont tous égaux à 0, ainsi que la théorie naturelle où le coefficient  $a_1$  est égal à 1 et  $a_n = 0$  quand  $n > 1$ .

De très nombreuses études sont présentes dans la littérature, depuis les travaux

de Basset en 1890 (Basset, 1890), chacune proposant une théorie différente. Parmi ces travaux, on distinguera d'une part l'utilisation de fonctions polynomiales (Kaczkowski, 1968; Reissner, 1975; Panc, 1975), approfondies plus récemment avec des termes d'ordre supérieur (Reddy et Liu, 1985; Murthy, 1981). L'utilisation de fonctions trigonométriques a également été traitée par certains auteurs dans le but d'identifier des fonctions mathématiques connues, et donc facilement exploitables (Soldatos, 1992; Touratier, 1991; Mantari *et al.*, 2012b).

Sur cette base, les travaux retenus pour la suite de cette étude sont ceux de Reddy (Reddy, 1984) qui a proposé une fonction d'ordre 3, appelée « fonction cubique », Touratier (Touratier, 1991) et Karama (Karama *et al.*, 2009) qui ont respectivement proposé une fonction sinus (modèle Sinus) et une fonction exponentielle (modèle KAM). Ces fonctions mathématiques dont le développement polynomial correspond à des termes en puissances impaires sont donc parfaitement représentatives du gauchissement des sections. Enfin Mantari (Mantari *et al.*, 2012a) qui a récemment proposé une théorie basée sur l'utilisation du sinus et de l'exponentielle.

Les différentes fonctions étudiées sont présentées ci-dessous.

$$f(x_3) = 0 \quad \textit{Kirchhoff - Love} \quad (1.1.4)$$

$$f(x_3) = x_3 \quad \textit{Reissner - Mindlin} \quad (1.1.5)$$

$$f(x_3) = x_3 \left( 1 - \frac{4x_3^2}{3h^2} \right) \quad \textit{Reddy} \quad (1.1.6)$$

$$f(x_3) = \frac{h}{\pi} \sin \left( \frac{\pi x_3}{h} \right) \quad \textit{Touratier} \quad (1.1.7)$$

$$f(x_3) = x_3 e^{-2(x_3/h)^2} \quad \textit{Karama} \quad (1.1.8)$$

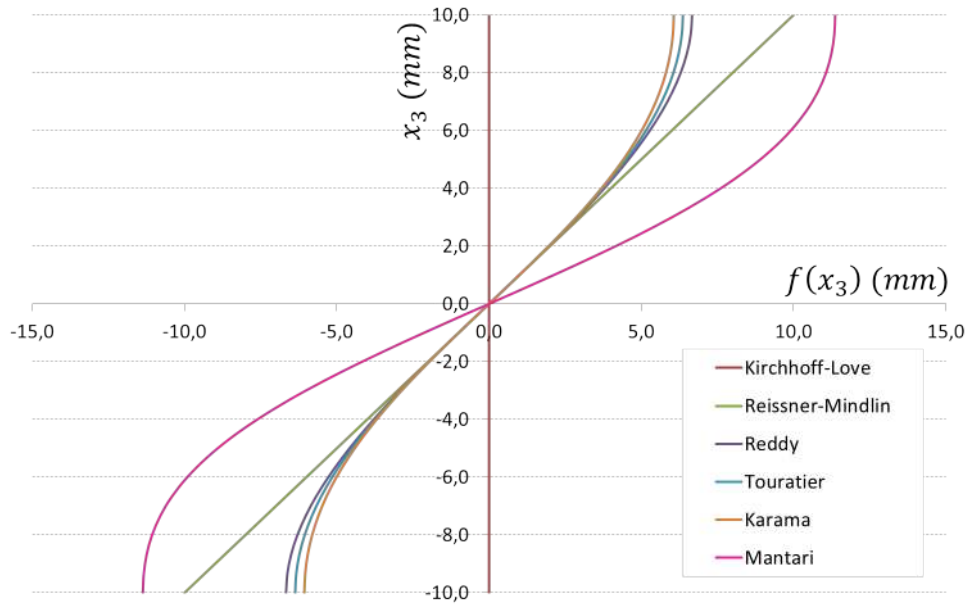


FIGURE 1.1.3: Tracés des fonctions de cisaillement transverse étudiées

$$f(x_3) = \sin\left(\frac{\pi x_3}{h}\right) e^{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi x_3}{h}\right)} + \frac{\pi}{2h} x_3 \quad \text{Mantari} \quad (1.1.9)$$

La figure 1.1.3 montre l'évolution de ces différents modèles pour une épaisseur de pièce de 20mm. Cette figure permet d'apprécier la tendance des développements à accentuer le phénomène de gauchissement de la section sollicitée. En effet, il apparaît clairement que la théorie de Mantari (plus récente) propose une amplitude du gauchissement nettement supérieure à celle proposée par les théories d'ordre supérieur précédentes.

Différentes théories analytiques de cisaillement transverse, utilisables dans la cinématique de la théorie des poutres, ont été mises en évidence. Les valeurs du champ de déplacement ainsi que le gauchissement sous un chargement donné peuvent être déterminées.

Ce sujet portant sur l'étude expérimentale du phénomène exposé dans le volume, le paragraphe suivant détaille les principales techniques de mesure volumique, les mé-



thodes de mesure cinématique compatibles pour accéder aux champs volumiques de déplacement, ainsi que leurs avantages et leurs limites dans le but de justifier le choix des méthodes expérimentales qui seront utilisées dans ce travail.

## 1.2 Techniques d'acquisition de données volumiques

Malgré de nombreuses études et développements sur les aspects analytiques de la prise en compte du cisaillement transverse et du gauchissement, on peut observer que très peu de travaux expérimentaux portant sur ce sujet ont été conduits en surfacique et aucun en volumique. Néanmoins, la possibilité de visualiser les effets du cisaillement transverse dans les structures composites semble intéressante dans le but d'enrichir les différents travaux déjà effectués par la communauté.

A travers différentes études présentes dans la littérature, de nombreuses techniques sont identifiables pour réaliser des mesures volumiques. Le paragraphe suivant vise à faire l'état des différentes méthodes d'investigation volumiques et d'identifier les particularités de chacune d'entre elles vis-à-vis de la problématique de cette étude. Parmi les techniques existantes, on peut dissocier celles s'appliquant uniquement en présence de milieux matériels transparents et celles qui peuvent être utilisées avec des matériaux non-transparentes, qui ne sont pas basées sur les principes physiques de l'optique visible. Le principe de la mesure volumique est basé sur l'émission d'une onde traversant un milieu matériel et sur la détection de l'onde résultante. Cette transmission est alors effectuée dans diverses positions pour permettre la reconstruction volumique de l'objet grâce à des méthodes mathématiques. Les ondes utilisées peuvent être de différentes natures en fonction des technologies mises en œuvre : lumineuse, ultra-sonore, rayons X ou magnétique. Il est donc intéressant de définir certaines de ces techniques et d'identifier leur champ d'applications. Les paragraphes suivants présentent certaines de ces techniques.

### 1.2.1 Tomographie optique de cohérence

Les ondes lumineuses peuvent être utilisées pour réaliser des mesures volumiques, dans des applications mettant en œuvre les matériaux transparents. Ainsi la tomographie optique de cohérence a été développée dans les années 1990, principalement pour des applications médicales ayant pour objectif l'analyse de tissus biologiques ou de l'œil humain (Huang *et al.*, 1991). Elle permet l'analyse par tranches d'échantillons de quelques millimètres d'épaisseur avec une résolution autour de 10 $\mu$ m (Grangeat, 2002). Le principe de la tomographie optique de cohérence (OCT : Optical Coherence Tomography) est le suivant : une onde lumineuse ayant une longueur d'onde proche du domaine infrarouge est émise par un laser. Celle-ci est divisée et redirigée pour être transmise vers l'objet et vers un miroir. Le phénomène d'interférométrie est exploité après combinaison des deux ondes réfléchies provenant du miroir et de l'objet. Le signal d'interférence est alors enregistré par un détecteur, qui traite celui-ci en analysant les différences entre le faisceau résultant de la réflexion avec le miroir (faisceau de référence) et le faisceau provenant de l'objet. L'analyse volumique est effectuée d'une part par le déplacement de l'objet pour une position fixe du miroir permettant de mesurer une tranche, et d'autre part grâce au déplacement du miroir qui permet la variation de profondeur de la mesure. La figure 1.2.1 illustre le principe de fonctionnement de la tomographie optique de cohérence.

En ce qui concerne les applications de l'OCT, elles sont principalement axées sur des problématiques du milieu médical, comme l'analyse oculaire en ophtalmologie, la gastroentérologie ou la dermatologie. Néanmoins, cette technique est également employée dans des cas plus industriels tels que l'analyse de microstructures polymères (avec ou sans fibres) (Dunkers *et al.*, 1999, 2001) ou comme technique non destructive de détection de défauts pour les matériaux composites verre/epoxy (Wiesauer *et al.*, 2007). Du point de vue de la science des matériaux, cette technique reste limitée par la faible profondeur de pénétration des signaux dans les échantillons qui est de quelques millimètres, rendant impossible les acquisitions sur des structures transparentes plus épaisses que les tissus biologiques. Des mesures cinématiques sont également possibles comme le montrent les travaux de Bosia *et al.* portant sur la mesure de déformation à travers

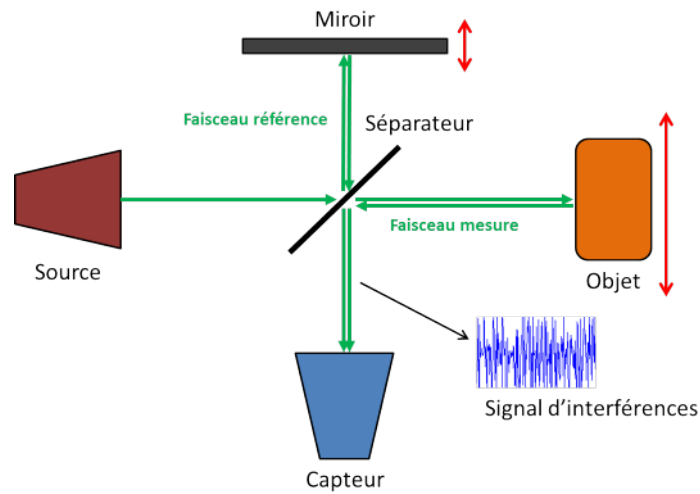


FIGURE 1.2.1: Principe de la mesure par tomographie optique de cohérence

l'épaisseur d'une structure composite thermoplastique (Bosia *et al.*, 2002). Cependant cette technique reste limitée pour notre cas d'étude du fait de l'impossibilité de l'utiliser pour des matériaux non-transparents tels que les matériaux composites.

## 1.2.2 Imagerie par résonance magnétique

Il est possible d'utiliser le phénomène de résonance magnétique pour la réalisation de mesures volumiques. La technique d'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM) est très largement employée en radiologie pour l'analyse des articulations ou du système nerveux depuis les années 1970, comme illustré en figure 1.2.2.

Le principe de mesure est basé sur l'utilisation d'un champ magnétique de forte puissance généré par un aimant qui provoque l'excitation de molécules particulières, et l'orientation des champs magnétiques propres aux protons des molécules d'eau, c'est la polarisation. L'intensité du champ magnétique est choisie en fonction de l'application, et peut varier entre 0 et 7 Teslas pour l'imagerie médicale. La mesure est effectuée par la détection du temps de relaxation des noyaux atomiques après annulation de la résonance, par l'intermédiaire d'une onde radiofréquence émise par une antenne (avec une excitation différente), simultanément à l'application du champ magnétique. Cette

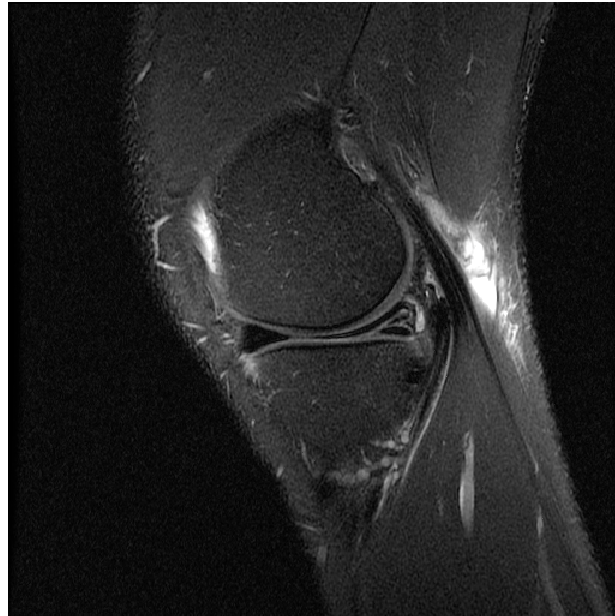


FIGURE 1.2.2: Visualisation de la fissuration d'un ménisque interne par IRM (Anlayse Medicales du ménisque droit de R.BRAULT)

mesure est effectuée par cette même antenne, à partir du courant alternatif sinusoïdal induit dans la bobine de réception, correspondant au signal de résonance (Follet, 2002). Les performances de cette technologie sont bonnes, malgré la nécessité d'adaptation du matériel de mesure en dehors du domaine médical. La résolution de la mesure peut atteindre  $100\mu\text{m}$  pour des échantillons de taille de l'ordre de 10cm. La figure 1.2.3 illustre le principe de la résonance magnétique.

Le champ d'application de l'imagerie par résonance magnétique est très vaste. Après avoir révolutionné le milieu médical, de nombreuses problématiques industrielles ont trouvé un fort intérêt à l'utilisation de cette technologie, non intrusive et non destructive. Parmi elles, on retiendra l'étude des structures composites avec les travaux de Endruweit et al. concernant l'analyse des renforts composites pré-imprégnés (Endruweit *et al.*, 2011) ainsi que l'étude sur la performance sur des structures sandwichs aluminium par Marble (Marble *et al.*, 2004). Laplante a également démontré l'utilisation de la résonance magnétique à travers une étude sur la détection d'humidité dans les composites sandwichs (Laplante *et al.*, 2005). Au delà des applications composites, cette

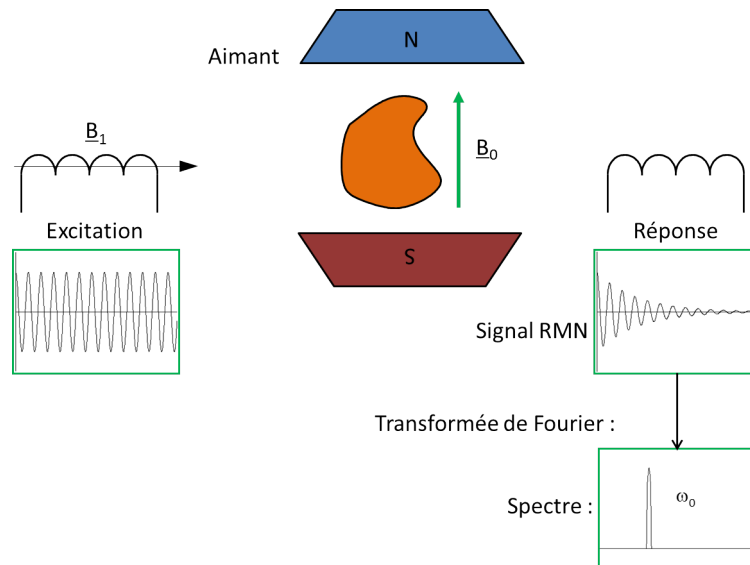


FIGURE 1.2.3: Principe de la résonance magnétique nucléaire (RMN)

technique est également employée dans les domaines des métaux, de la bio-mécanique, des polymères ou des céramiques pour la détection de défauts de structure, l'étude du vieillissement, ou l'analyse de constituants (Komoroski, 2012).

### 1.2.3 Tomographie térahertz

Une des techniques les plus récentes pour l'acquisition de données volumiques est la tomographie térahertz (THz), également appelée tomographie rayons T. Cette technique date du milieu des années 90 (Mittleman *et al.*, 1997), et est dérivée de l'imagerie térahertz 2D à laquelle ont été appliquées les techniques de reconstruction connues en tomographie médicale. Elle est basée sur l'utilisation d'une onde lumineuse dans les fréquences très élevées, autour de  $10^{12}$  Hz. La mesure est réalisée par la détection du temps de transmission d'une onde lumineuse à travers un échantillon, transparent ou non (Wang et Zhang, 2004; Brahm *et al.*, 2010). Les différences de temps, dépendant de l'atténuation du faisceau initial dans la matière, permettent de délimiter les frontières de couches dans la direction de l'épaisseur des matériaux traversés. La résolution des mesures, jusqu'à 0,5 mm, reste inférieure à celle des techniques les plus performantes. La

figure 1.2.4 présente un dispositif de mesure volumique exploitant le rayonnement térahertz. Celui-ci est composé d'une source laser émettant un faisceau de longueur d'onde proche de 800nm. Cette onde lumineuse est déviée pour l'émission du signal THz, puis transmise à l'échantillon qui est fixé sur une platine permettant le positionnement des différentes coupes à enregistrer.

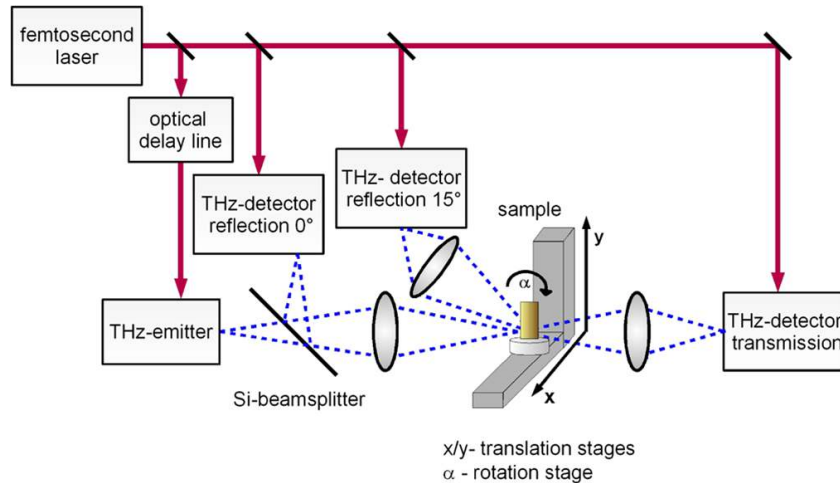


FIGURE 1.2.4: Dispositif de mesure de volume par rayonnement THz (Brahm *et al.*, 2010)

Cette technologie est employée dans des applications de CND (Kawase *et al.*, 2010), notamment pour la sécurité aux aéroports avec la détection d'armes et de produits stupéfiants. Des applications industrielles existent également, par exemple en aéronautique avec la détection de défauts et de zones endommagées dans une structure composite (Stoik *et al.*, 2010). Dans un autre contexte, Groves *et al.* présentent l'analyse approfondie d'une peinture d'art grâce à l'imagerie térahertz (Groves *et al.*, 2009) mais des limitations existent dans la mise en place du matériel de mesure permettant l'émission et la détection du rayonnement térahertz dans un contexte industriel. Néanmoins, des progrès restent à faire pour l'adaptation des méthodes de reconstruction aux rayons T (Recur *et al.*, 2011). La figure 1.2.5 présente un exemple d'acquisition tomographique d'un objet courant par cette technique.

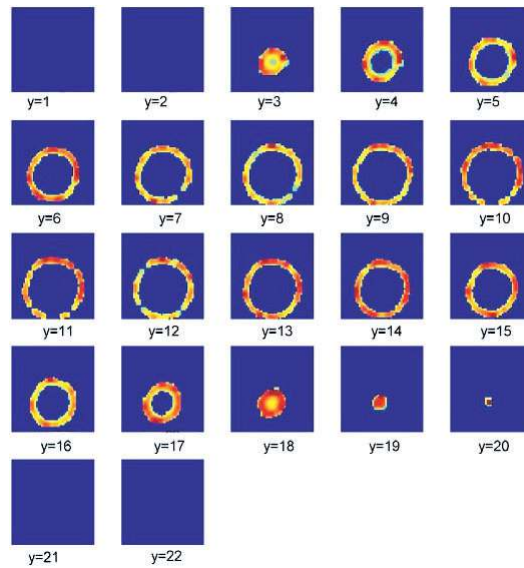


FIGURE 1.2.5: Acquisition d'une balle de tennis de table par tomographie THz (Wang et Zhang, 2004)

### 1.2.4 Tomographie par rayons X

Différentes techniques de mesure volumique ont été présentées dans ce premier chapitre. La majorité d'entre elles sont issues du domaine médical. Ce secteur d'imagerie reste en très fort développement dans de nombreux laboratoires. Comme cela a été illustré, le champ d'applications de ces techniques est très vaste. La tomographie par rayons X est la technique de mesure la plus répandue pour l'analyse interne des matériaux. Elle est également issue de la radiographie médicale (Grangeat, 2002), mais elle est également très présente dans les laboratoires, grâce au développement de tomographes et  $\mu$ -tomographes permettant des résolutions de mesure très intéressantes pour différentes problématiques scientifiques. La tomographie par rayons X est basée sur l'émission d'un faisceau de rayons X traversant un objet. Un détecteur permet la réception du faisceau résiduel transmis pour visualiser la microstructure de l'objet étudié dans de multiples positions angulaires de celui-ci, appelées « projections ». L'ensemble de ces projections est traité informatiquement pour réaliser la reconstruction volumique de l'objet, permettant l'accès aux informations de sa structure interne. L'interaction entre les rayons

X et la densité des différents matériaux traversés permet une visualisation en niveaux de gris des différents constituants de l'objet. L'intensité de ce signal est dictée par la capacité d'absorption de chaque matériau présent ce qui engendre des variations de niveaux de gris permettant la détection de défauts, ou la visualisation d'éléments particuliers. De nombreuses applications extérieures au domaine médical existent concernant la tomographie par rayons X, notamment dans le contrôle non destructif pour les possibilités de détection sur des matériaux très divers (Cloetens *et al.*, 1997; Buffière *et al.*, 2005; Babin *et al.*, 2007; Babout *et al.*, 2001; Ferrié *et al.*, 2006). Aussi, des études intéressantes ont également été menées concernant des problématiques relatives aux matériaux composites, démontrant l'intérêt de cette technique pour ce type de matériaux (Perret *et al.*, 2012; Maire *et al.*, 2003; Bayraktar *et al.*, 2006; Carmona, 2009; Chateau *et al.*, 2011).

Pour les matériaux composites, on constate que le contraste provoqué par la microstructure demande un équipement très sensible voir un rayonnement du type synchrotron dans le but de bénéficier des meilleures possibilité en terme de résolution spatiale et de détections des contrastes. Naturellement, les structures composites ne présentent pas systématiquement un contraste suffisant pour des mesures effectuées avec des équipements classiques de laboratoire. Toutefois, il existe des méthodes pour rendre ces mesures possibles, c'est pourquoi la tomographie à rayons X a été retenue dans ce travail pour l'analyse volumique des matériaux composites et est présentée dans le détail du point de vue physique comme du point de vue de son exploitation dans le chapitre 4 de ce mémoire.

## 1.3 Techniques de mesures mécaniques dans les volumes

Différentes méthodes permettent de réaliser des mesures mécaniques sur la base de données volumiques. Le paragraphe suivant présente une comparaison de ces différentes méthodes, leurs champ d'applications ainsi que leurs limites.



### 1.3.1 Photoélasticimétrie 3D

La photoélasticimétrie 3D est une technique qui permet de visualiser la répartition des contraintes dans les matériaux transparents sous sollicitations. Elle est dérivée de la photoélasticimétrie 2D dans laquelle l'échantillon est placé entre deux polariseurs où l'on observe des franges photoélastiques grâce au phénomène de biréfringence. Pour des études tridimensionnelles, deux plans lasers isolent une tranche de l'objet, comme illustré sur la figure 1.3.1. La mesure s'effectue par l'observation de franges dans le matériau, créées par les variations d'indice optique de celui-ci induites par le chargement. On réalise donc une mesure tridimensionnelle par découpage optique. La variation locale d'indice étant liée à l'élasticité du matériau, il est possible de déterminer le champ de contraintes planes de la tranche observée. On observe ainsi les isochromes, qui traduisent la différence des contraintes principales, et les isoclines qui traduisent la direction de ces contraintes. Les performances de cette technique sont intéressantes. La taille d'une tranche varie de 0,5mm jusqu'à 12mm, ce qui donne la résolution spatiale de discrétisation dans l'épaisseur de l'échantillon. La principale limitation de cette technique est la nécessité de l'utilisation de matériaux transparents. Néanmoins, la photoélasticimétrie 3D permettant d'observer les champs de contraintes, il est possible de réaliser des analyses complexes en utilisant des maquettes représentatives des structures étudiées, réalisé à l'aide de matériaux transparents. Par exemple, Germaneau et Peyruseigt ont analysé la répartition des pressions de contact à l'intérieur d'une rotule aéronautique (Germaneau, 2007; Peyruseigt, 2008), illustrée en figure 1.3.2.

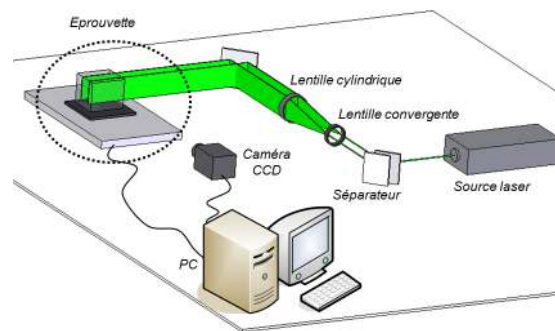


FIGURE 1.3.1: Principe de la photoélasticimétrie 3D (Germaneau, 2007)

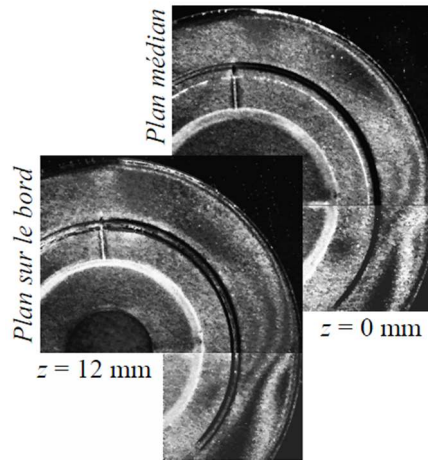


FIGURE 1.3.2: Analyse par photoélasticimétrie 3D des pressions de contact à l'intérieur d'une rotule aéronautique (Germaneau, 2007; Peyruseigt, 2008)

### 1.3.2 Elastographie

L'élastographie est une technique de mesure, basée sur l'élasticité mécanique des objets mesurés, qui permet une visualisation à travers l'épaisseur (Said, 2006). Elle est également issue du domaine médical pour l'analyse des tissus ou la détection de tumeurs. La mesure par élastographie s'effectue avec un objet sous contraintes, dans lequel la distribution des valeurs de module d'Young est mesurée pour dissocier les hétérogénéités internes. Une sollicitation de cisaillement ou de compression est transmise par le biais d'une onde, induisant alors un champ de déformation qui devient hétérogène dans le cas où il y a présence de défauts ou de tumeurs. Il existe plusieurs types d'analyses élastographiques, parmi elles on citera l'élastographie ultra-sonore, la plus ancienne et la plus répandue ainsi que l'élastographie à résonance magnétique (MRE : Magnetic Resonance Elastography), datant de 1995 (Muthupillai *et al.*, 1995). La figure 1.3.3 suivante présente un exemple de détection d'une inclusion cylindrique dans un milieu homogène, à deux épaisseurs différentes, issu des travaux de Said en 2006.

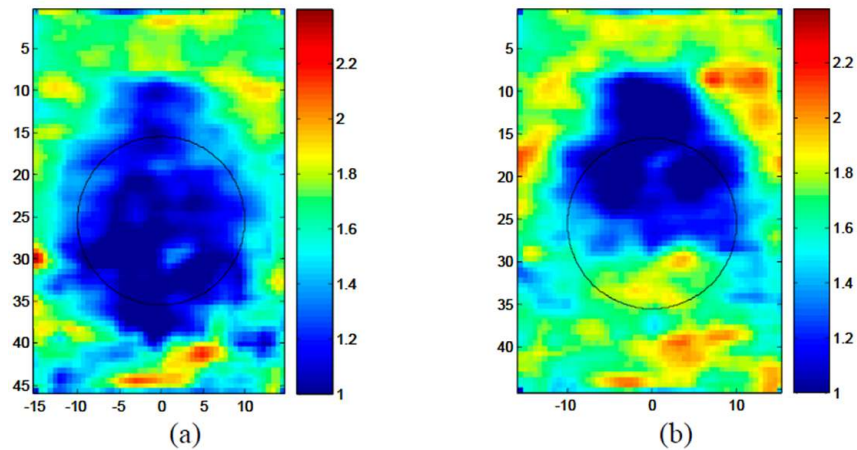


FIGURE 1.3.3: Identification d'une inclusion cylindrique à deux épaisseurs différentes (a) 20mm et b) 40mm) par élastographie ultra-sonore (Said, 2006)

Les applications mettant en œuvre l'élastographie sont logiquement centrées sur le domaine médical pour l'étude des tissus vivants présentant une élasticité cohérente avec le principe physique utilisé. Son potentiel est ainsi reconnu dans les domaines de la cardiologie ou de la cancérologie.

### 1.3.3 Suivi de marqueurs volumiques

Le suivi de marqueurs volumiques est une méthode dérivée du suivi de marqueurs 2D, très couramment utilisé pour l'analyse sans contact d'essais mécaniques. La mesure est basée sur la détection de marqueurs identifiables dans l'acquisition du volume. Une attention particulière doit être portée à la proportion de marqueurs insérés dans le matériau, de manière à conserver le comportement mécanique initial. Pour différents états de chargement enregistrés, on détermine la position de tous les marqueurs dans les différents volumes. Les changements de coordonnées de chaque marqueur permettent le calcul du déplacement dans les trois directions du repère utilisé. Par dérivation de la position des marqueurs, la détermination des valeurs de déformation est également effectuée. D'après les travaux de Nielsen, la résolution de cette mesure peut atteindre 0,01mm pour les valeurs de déplacements (Nielsen *et al.*, 2003). Plus récemment, d'autres techniques sont développées dans le but de réaliser des mesures par suivi de marqueurs.

On citera les travaux de Kaddhour, basés sur la reconnaissance fine des marqueurs de manière géométrique, appliquées à la compression triaxiale de volumes remplis de grains de sables (Kaddhour *et al.*, 2013). Néanmoins, cette technique est plus adaptée aux matériaux présentant une structure en grains qu'aux matériaux homogènes ou fibreux.

### 1.3.4 Corrélation d'images volumiques

Une technique intéressante pour l'analyse des structures dans le volume est la corrélation d'images volumiques (DVC). Cette technique est la plus complète pour la détermination des grandeurs mécaniques tridimensionnelles. Les premiers développements de cette technique datent des travaux de Bay en 1999 (Bay *et al.*, 1999). La DVC rassemble les avantages de la corrélation d'images numériques 2D, dont elle est l'extension, ainsi que ceux de son association avec les méthodes d'acquisition de données volumiques permettant l'accès à une importante quantité d'informations, notamment à travers l'épaisseur des échantillons. Le principe est identique à celui de la corrélation d'images numériques 2D. Une discrétisation des volumes étudiés est effectuée pour construire une grille 3D, sur laquelle les déplacements entre un état initial et un état déformé sont recherchés. À partir des valeurs numériques de niveaux de gris de chaque voxels (extension volumique du pixel de l'image 2D) qui composent les différentes images volumiques disponibles. La corrélation est effectuée pour suivre la position des points de la grille au cours d'un essai pour en déduire les déplacements. D'autre part, le calcul des déformations est également possible par dérivation des champs de déplacements calculés dans les trois directions de l'espace de travail utilisé. L'utilisation de la corrélation volumique demande un contraste important dans la microstructure de manière à bénéficier d'une large distribution des niveaux de gris dans les images acquises. Ce contraste peut parfois être créé de manière artificielle par l'utilisation de marqueurs internes.

De nombreuses applications de la DVC existent dans la littérature, notamment sur l'étude de matériaux granulaires, poreux, ou présentant naturellement certaines inclusions hétérogènes (Zauel *et al.*, 2006; Youssef, 2004; Leclerc *et al.*, 2010; Limodin *et al.*, 2009). D'autre part, certaines applications sur des matériaux homogènes peuvent

être effectuées par l'intermédiaire de l'insertion de marqueurs dans la fabrication des échantillons étudiés de manière à construire un mouchetis volumique (Germaneau *et al.*, 2008b,a; Haldrup *et al.*, 2008). Du point de vue des matériaux hétérogènes, certains travaux existent également, notamment pour l'études du bois ou des matériaux à base de fibres végétales (Tran *et al.*, 2013).

Cette technique a été retenue pour réaliser cette étude sur l'analyse des effets du cisaillement transverse dans les matériaux composites. De même que pour la tomographie par rayons X, le chapitre 4 présente en détail le principe de cette technique de mesure de déplacement ainsi que son utilisation dans le cadre de ces travaux.

## 1.4 Conclusion

Ce chapitre propose une description du contexte dans lequel cette étude expérimentale des effets du cisaillement transverse dans les structures composites est conduite. La première partie présente les éléments analytiques nécessaires à la compréhension de la problématique. Les différentes méthodes de prise en compte du cisaillement transverse et du gauchissement sont décrites. Dans ce sens, plusieurs modèles raffinés sont présentés d'après des études antérieures présentes dans la littérature. Cinq modèles sont retenus pour la suite du travail, de manière à identifier la pertinence des différents développements proposés.

La seconde partie de ce chapitre présente, dans un premier temps, les différentes techniques d'acquisition de données volumiques, et dans un second temps, les méthodes de mesures cinématiques, déjà utilisées pour l'étude volumique des matériaux composites. La plupart de ces techniques basées sur des principes physiques différents, sont issues du domaine médical, dans lequel la mesure volumique est exploitée historiquement, et reconnue. A partir de la description de leur principe et de leurs limites, deux techniques sont identifiées pour répondre à la problématique du sujet : la tomographie à rayons X et la corrélation d'images volumiques. Celles-ci sont retenues de par leur possibilité d'utilisation avec les matériaux composites pour la mesure de champs ainsi que les bonnes performances en termes de résolution de mesure.

D'après les éléments théoriques établis dans ce premier chapitre, une méthode de résolution analytique est proposée et décrite dans le chapitre 2. Celle-ci est appliquée à un cas de chargement particulier qui permettra l'étude des différents profils de déplacement. Ce cas sera également exploité du point de vue de la modélisation numérique et de l'approche expérimentale.

# Chapitre 2

## Étude analytique du cisaillement transverse dans les structures composites

2.1	Résolution analytique dans le cadre de la flexion trois points . . . . .	30
2.1.1	Méthode de résolution . . . . .	30
2.1.2	Principe des Travaux Virtuels (PTV) . . . . .	32
2.1.3	Équations d'équilibre . . . . .	36
2.1.4	Expressions des déplacements $u_1(x_1)$ et $u_3(x_1)$ . . . . .	37
2.2	Influence des théories de cisaillement transverse . . . . .	41
2.2.1	Configurations étudiées . . . . .	42
2.2.2	Calcul numérique des déplacements . . . . .	43
2.2.3	Calcul du taux de gauchissement $\Delta$ . . . . .	45
2.3	Résultats . . . . .	46
2.3.1	Profils de déplacement $u_1(x_3)$ . . . . .	47
2.3.2	Évaluation du gauchissement . . . . .	48
2.4	Conclusions . . . . .	50

Ce chapitre présente le développement analytique utilisé dans cette étude pour analyser les effets du cisaillement transverse dans les structures composites. Le cadre de ce développement est limité à un essai classique de flexion trois points. L'objectif de cette analyse est d'observer la distribution du déplacement longitudinal, dû aux effets du cisaillement transverse, le long de la hauteur de l'éprouvette. Différentes théories analytiques de prise en compte du cisaillement issues de la littérature sont utilisées pour permettre la comparaison entre les différents résultats.

## **2.1 Résolution analytique dans le cadre de la flexion trois points**

Les paragraphes suivants présentent une méthode de résolution analytique des valeurs de déplacements  $u_1(x_1, x_3)$  et  $u_3(x_1, x_3)$ , basée sur la cinématique présentée dans le chapitre 1, d'après la théorie des plaques multicouches.

Ce développement, relatif à des travaux antérieurs, a pour avantage d'être indépendant du choix de la fonction de cisaillement transverse, et sert ainsi de départ à une étude comparative des résultats en fonction de  $f(x_3)$ , qui sera faite dans plusieurs configurations possibles de l'essai de flexion trois points. Ce développement analytique est basé sur la méthode proposé par Dufort (Dufort, 2000)

### **2.1.1 Méthode de résolution**

Pour cette étude, la méthode de résolution qui a été retenue est celle développée dans les travaux de Laurent Dufort (Dufort, 2000), ayant pour objectif la résolution analytique des valeurs de déplacement dans le cadre d'un essai de flexion trois points. Cet essai est retenu car d'une part, il permet de bien visualiser les effets du cisaillement transverse, et d'autre part, étant largement utilisé dans des études similaires disponibles dans la littérature, il permet de nombreuses possibilités de comparaison et de perspec-



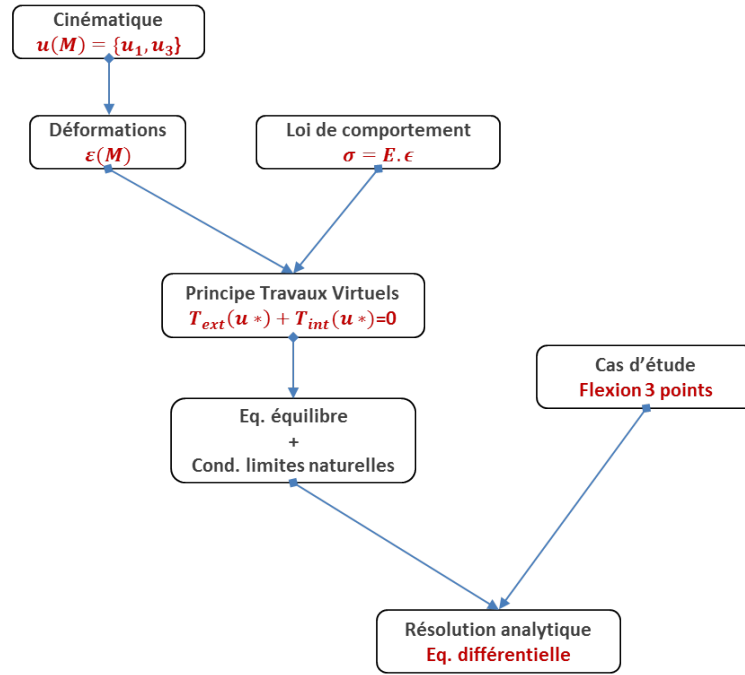


FIGURE 2.1.1: Démarche de la résolution analytique

tives dans l'étude. Comme cela est précisé précédemment, le point de départ de cette résolution est le cadre défini par la figure 1.1.1 ainsi que le champ de déplacement donné dans l'équation 1.1.1.

La résolution rappelée dans ce paragraphe suit la démarche suivante exposée sur la figure 2.1.1

Le champ de déformation au point  $M$  suivant est déduit de l'équation 1.1.1 par simple dérivation.

$$\varepsilon(M) = \begin{cases} \varepsilon_{11}(x_1, x_3) = u_{1,1}^0(x_1) - x_3 u_{3,11}^0(x_1) + f(x_3) \gamma_{13,1}^0(x_1) \\ \gamma_{13}(x_1, x_3) = f_{,3}(x_3) \gamma_{13}^0(x_1) \end{cases} \quad (2.1.1)$$

A partir de  $\varepsilon(M)$ , il est possible d'exprimer également le tenseur des contraintes au point  $M$ . En négligeant l'influence du terme  $\varepsilon_{33}$  et des coefficients de Poisson, les hypothèses d'élasticité et des petites perturbations permettent d'exprimer  $\sigma(M)$ .

$$\sigma(M) = \begin{cases} \sigma_{11} = E_{11}\varepsilon_{11} \\ \sigma_{13} = G_{13}\gamma_{13} \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Comme cela est fait dans la plupart des travaux de la littérature, la résolution passe par l'utilisation du Principe des Travaux Virtuels (PTV), afin d'accéder aux équations d'équilibre du problème.

### 2.1.2 Principe des Travaux Virtuels (PTV)

Considérons un domaine  $D$  sur lequel est appliqué un ensemble de sollicitations extérieures, en tout point de ce domaine représenté par le terme  $f^V$  homogène à une densité volumique de forces, ainsi qu'un ensemble de sollicitations appliquées à la frontière  $\partial D$  du domaine, représenté par le terme  $f^S$  homogène à une densité surfacique de force, comme illustré par la figure 2.1.2.

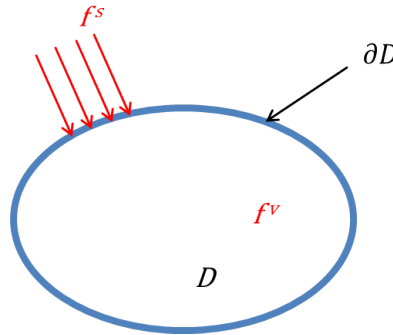


FIGURE 2.1.2: Principe des travaux virtuels

Le PTV exprime le fait que pour tout champ de déplacement virtuel  $u^*(M)$ , la somme des travaux de tous les efforts considérés est nulle dans le cas statique :

$$T_{ext}(u^*) + T_{int}(u^*) = 0, \quad \forall u^* \quad (2.1.3)$$

Les expressions des travaux  $T_{ext}(u^*)$  et  $T_{int}(u^*)$  sont données par :

$$T_{int}(u^*) = - \int_D \sigma : \varepsilon^* dV \quad (2.1.4)$$

$$T_{ext}(u^*) = \int_D f^V \cdot u^* dV + \int_{\partial D} f^S \cdot u^* dS \quad (2.1.5)$$

avec  $\varepsilon^*(M)$  le tenseur des déformations virtuelles associé au déplacement virtuel  $u^*(M)$ .

Si on considère  $u^*(M)$  comme une variation de  $U(M)$ , notée  $\delta U(M)$ , le champ virtuel peut être exprimé dans la base du repère  $(O, x_1, x_2, x_3)$ .

$$u^*(M) = \begin{pmatrix} \delta u(M) \\ \delta \omega(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta u_1(M)x_1 + \delta u_3(M)x_3 \\ \delta \omega^0(x_1)x_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.6)$$

Les équations 1.1.1 et 1.1.2 permettent d'écrire le champ de déplacement virtuel :

$$\begin{cases} u_1^*(M) = \delta u_1^0(x_1) - x_3 \delta u_{3,1}^0(x_1) + f(x_3) [\delta u_{3,1}^0(x_1) - \delta \omega^0(x_1)] \\ u_3^*(M) = \delta u_3^0(x_1) \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Le tenseur des déformations virtuelles peut donc être déduit de l'équation 2.1.7 :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^*(x_1) = \delta u_{1,1}^0(x_1) - x_3 \delta u_{3,11}^0(x_1) + f(x_3) [\delta u_{3,11}^0(x_1) - \delta \omega_{,1}^0(x_1)] \\ \gamma_{13}^*(x_1) = f_{,3}(x_3) [\delta u_{3,1}^0(x_1) - \delta \omega^0(x_1)] \end{cases} \quad (2.1.8)$$

On considère que le chargement appliqué à la poutre est de type force ponctuelle suivant et  $\vec{x}_3$ , appliqué en  $x_1 = l$ , comme définie par la figure 2.1.3. On peut donc écrire le travail de l'effort extérieur  $F_3$ , dans la direction  $x_3$ , avec ces nouvelles données :

$$T_{ext} = \int_0^l (F_3(l) \cdot \delta u_3^0(l)) dx_1 \quad (2.1.9)$$

La description du tenseur des déformations et des contraintes permet d'écrire le

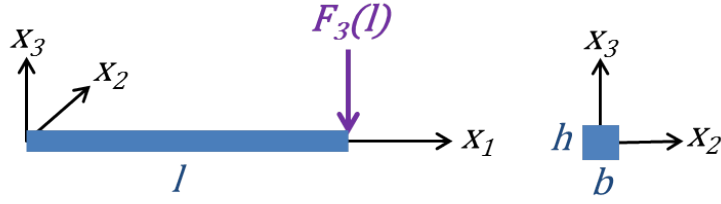


FIGURE 2.1.3: Description des efforts appliqués à la poutre

travail des forces intérieures :

$$T_{int} = - \int_0^l \left[ \int_S \sigma_{11} \cdot (\delta u_{1,1}^0(x_1) - x_3 \delta u_{3,11}^0(x_1) + f(x_3) \delta \gamma_{13}^0(x_1)) dS + \int_S \sigma_{13} \cdot f_{,3}(x_3) \delta \gamma_{13,1}^0(x_1) dS \right] dx_1 \quad (2.1.10)$$

$$= - \int_0^l \left[ M(x_1) \delta u_{3,11}^0(x_1) + B(x_1) \delta \gamma_{13,1}^0(x_1) + H(x_1) \delta \gamma_{13}^0(x_1) \right] dx_1$$

où on peut identifier le moment de flexion  $M(x_1)$ , ainsi que deux termes dus à la prise en compte du cisaillement transverse par le terme  $f(x_3)$ ,  $B(x_1)$  un terme homogène à un moment et enfin  $H(x_1)$  un terme homogène à une force :

$$M(x_1) = - \int_S x_3 \sigma_{11} dS \quad (2.1.11)$$

$$= -E_{11} \left[ u_{1,1}^0(x_1) \int_S x_3 dS - u_{3,11}^0(x_1) \int_S x_3^2 dS + \gamma_{13,1}^0(x_1) \int_S x_3 f(x_3) dS \right]$$

$$B(x_1) = \int_S \sigma_{11} f(x_3) dS \quad (2.1.12)$$

$$= E_{11} \left[ u_{1,1}^0(x_1) \int_S f(x_3) dS - u_{3,11}^0(x_1) \int_S x_3 f(x_3) dS + \gamma_{13,1}^0(x_1) \int_S f^2(x_3) dS \right]$$

$$H(x_1) = \int_S \sigma_{13} f_{,3}(x_3) dS = G_{13} \left[ \gamma_{13}^0(x_1) \int_S f_{,3}^2(x_3) dS \right] \quad (2.1.13)$$

En considérant que  $\int_S x_3 dS = 0$  et  $\int_S f(x_3) dS = 0$  du fait que  $f(x_3)$  est une fonction impaire, les équations 2.1.11, 2.1.12 et 2.1.13 permettent de définir les coefficients  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  et  $c_4$  tels que :

$$\begin{cases} M(x_1) = c_1 \cdot u_{3,11}^0(x_1) - c_2 \cdot \gamma_{13,1}^0(x_1) \\ B(x_1) = -c_2 \cdot u_{3,11}^0(x_1) + c_3 \cdot \gamma_{13,1}^0(x_1) \\ H(x_1) = c_4 \cdot \gamma_{13}^0(x_1) \end{cases} \quad (2.1.14)$$

Par transposition, on obtient alors :

$$c_1 = E_{11} \int_S x_3^2 dS \quad (2.1.15)$$

$$c_2 = E_{11} \int_S x_3 f(x_3) dS \quad (2.1.16)$$

$$c_3 = E_{11} \int_S f^2(x_3) dS \quad (2.1.17)$$

$$c_4 = G_{13} \int_S f_{,3}^2(x_3) dS \quad (2.1.18)$$

Les coefficients  $c_2$ ,  $c_3$  et  $c_4$  sont dépendants du choix de la fonction de cisaillement transverse utilisée pour la résolution. Ainsi, cette étude vise à déterminer l'influence du choix de la fonction sur les résultats des déplacements  $u_1(x_1)$  et  $u_3(x_1)$ .

Par définition, on peut exprimer le coefficient  $c_1$  par le produit du module d'Young

$E_{11}$  et du moment d'inertie  $I_{33}$ , qui vaut  $I_{33} = \frac{bh^3}{12}$  pour une section rectangulaire,  $c_1$  est donc uniquement dépendant de la géométrie de la poutre étudiée.

Finalement, en appliquant directement le PTV décrit dans l'équation 2.1.3, on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
 - \int_0^l \left[ M(x_1) \delta u_{3,11}^0(x_1) + B(x_1) \delta \gamma_{13,1}^0(x_1) + H(x_1) \delta \gamma_{13}^0(x_1) \right] dx_1 & \quad (2.1.19) \\
 + \int_0^l F_3(l) \cdot \delta u_3^0(l) = 0, \quad \forall (\delta u_3^0, \delta \omega^0) &
 \end{aligned}$$

### 2.1.3 Équations d'équilibre

Pour déterminer les équations d'équilibre permettant de définir  $u_1(x_1)$  et  $u_3(x_1)$ , la méthode classiquement observée dans la littérature est d'utiliser l'intégration par partie sur l'équation 2.1.19, en tenant compte de l'égalité définie dans l'équation 1.1.2.

$$\begin{aligned}
 - \int_0^l \left( \left( \left( (M(x_1) + B(x_1))_{,1} - H(x_1) \right)_{,1} \right) \delta u_3^0 + (B_{,1}(x_1) - H(x_1)) \delta \omega^0 \right) dx_1 & \quad (2.1.20) \\
 + \left[ \left( (M(x_1) + B(x_1))_{,1} - H(x_1) \right) \delta u_3^0 - (M(x_1) + B(x_1)) \delta u_{3,1}^0 + B(x_1) \delta \omega^0 \right]_0^l & \\
 + F_3(l) \delta u_3^0(l) = 0, \quad \forall (\delta u_3^0, \delta \omega^0) &
 \end{aligned}$$

L'équation 2.1.20 permet donc de déduire les deux équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{cases} \forall \delta \omega^0 & B_{,1}(x_1) - H(x_1) = 0 \\ \forall \delta u_3^0 & - \left( (M(x_1) + B(x_1))_{,1} - H(x_1) \right)_{,1} = 0 \end{cases} \quad (2.1.21)$$

Ainsi que les trois conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \forall \delta \omega^0 & B(x_1) = 0 \\ \forall \delta u_{3,1}^0 & M(x_1) + B(x_1) = 0 \\ \forall \delta u_3^0 & (M(x_1) + B(x_1))_{,1} - H(x_1) + F_3(l) = 0 \end{cases} \quad (2.1.22)$$

### 2.1.4 Expressions des déplacements $u_1(x_1)$ et $u_3(x_1)$

A partir de l'expression de ces équations d'équilibre, la résolution analytique du déplacement longitudinal  $u(x_1)$  et du déplacement transverse  $u(x_3)$  peut être réalisée, pour un cas de flexion trois points suivant la configuration définie par la figure 2.1.4.

Le cas de résolution est l'étude du comportement d'une poutre soumise à une charge ponctuelle de flexion en  $x_1 = \frac{l}{2}$ , en appui simple aux extrémités tel que :

$$u_3^0(x_1 = 0) = u_3^0(x_1 = l) = 0 \quad (2.1.23)$$

Ce problème peut être simplifié par l'étude de la demi poutre par la symétrie dans le plan  $(\vec{x}_2, \vec{x}_3)$ , ce qui induit l'absence de rotation de la section dans le plan de symétrie. On obtient alors les conditions aux limites suivantes :

$$u_{3,1}^0(x_1 = \frac{l}{2}) = 0 \quad (2.1.24)$$

$$\omega^0(x_1 = \frac{l}{2}) = 0 \quad (2.1.25)$$

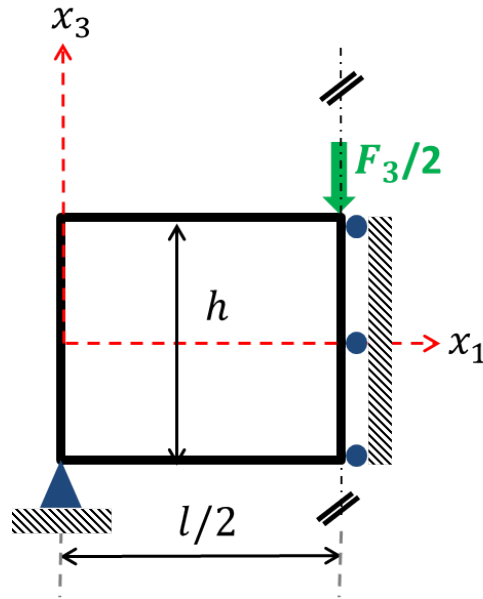


FIGURE 2.1.4: Application de la résolution analytique au cas de la flexion trois points

Les équations 2.1.21 permettent également de déduire certaines conditions aux limites :

$$\begin{cases} B(0) = 0 \\ B(0) + M(0) = 0 \\ M_{,1}(\frac{l}{2}) + B_{,1}(\frac{l}{2}) - H(\frac{l}{2}) + \frac{F_3}{2} = 0 \end{cases} \quad (2.1.26)$$

L'utilisation des équations d'équilibre définies précédemment et les conditions aux limites ci-dessus, permet d'écrire l'équation différentielle qui induira la résolution du problème.

Pour cela on utilise également les coefficients  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  et  $c_4$  qui vont permettre d'effectuer la résolution indépendamment de la fonction de cisaillement transverse et de la géométrie de la poutre.

D'après les équations 2.1.21, 2.1.23 et 2.1.26 et avec les définitions données en 2.1.15 et 2.1.14, le système d'équation obtenu est le suivant :



$$\begin{cases} -c_2 u_{3,111}^0 + c_3 \gamma_{13,11}^0 - c_4 \gamma_{13}^0 = 0 \\ (c_1 - c_2) u_{3,1111}^0 - (c_2 - c_3) \gamma_{13,111}^0 - c_4 \gamma_{13,1}^0 = 0 \end{cases} \quad (2.1.27)$$

D'autre part, les conditions aux limites 2.1.26 peuvent aussi être réécrites tel que :

$$\begin{cases} (c_1 - c_2) u_{3,11}^0(0) - (c_2 - c_3) \gamma_{13,1}^0(0) = 0 \\ -c_2 u_{3,11}^0 + c_3 \gamma_{13,1}^0 = 0 \\ (c_1 - c_2) u_{3,111}^0(\frac{l}{2}) - (c_2 - c_3) \gamma_{13,11}^0(\frac{l}{2}) - c_4 \gamma_{13}^0(\frac{l}{2}) + \frac{F_3}{2} = 0 \end{cases} \quad (2.1.28)$$

Par combinaison des deux lignes de l'équation 2.1.27, on obtient :

$$\begin{cases} -c_2 u_{3,111}^0(0) + c_3 \gamma_{13,11}^0(0) = c_4 \gamma_{13}^0 \\ -c_1 u_{3,111}^0 + c_2 \gamma_{13,11}^0 = K \end{cases} \quad (2.1.29)$$

Une équation différentielle fonction de  $\gamma_{13}^0$  est alors obtenue par substitution dans l'expression 2.1.29, avec  $K$  une constante d'intégration :

$$\gamma_{13,11}^0 - \left( \frac{c_1 c_4}{c_1 c_3 - c_2^2} \right) \gamma_{13}^0 = - \left( \frac{c_2}{c_1 c_3 - c_2^2} \right) K \quad (2.1.30)$$

La solution de l'équation différentielle proposée par Dufort met en évidence le terme  $\omega_f$  qui permet de proposer une solution de cette équation de la forme :

$$\gamma_{13}^0(x_1) = \frac{c_2}{c_4 c_1} K + \alpha \sinh(\omega_f x_1) + \beta \cosh(\omega_f x_1) \quad (2.1.31)$$

avec

$$\omega_f = \sqrt{\frac{c_1 c_4}{c_1 c_3 - c_2^2}} \quad (2.1.32)$$

Par sa définition, on notera la dépendance du terme  $\omega_f$  à l'expression de la fonction de cisaillement transverse considérée.

A partir de la solution générale de l'équation différentielle proposée en 2.1.31, à l'aide des conditions aux limites, après résolution, le champ de déplacement proposé par Dufort (2000) est le suivant :

$$u_1(x_1, x_3) = -x_3 \frac{F_3 l^2}{48 E_{11} I_{33}} (\Theta_{,1}(x_1) + 2S_f \Psi_{f,1}(x_1)) + f(x_3) \frac{F_3 l^2}{24 c_2} S_f \Psi_{f,1}(x_1) \quad (2.1.33)$$

$$u_3(x_1, x_3) = \frac{F_3 l^2}{48 E_{11} I_{33}} (\Theta(x_1) + 2S_f \Psi_f(x_1)) \quad (2.1.34)$$

Ces expressions introduisent les termes suivants :

$$\Theta(x_1) = -x_1 \left( 4 \left( \frac{x_1}{l} \right)^2 - 3 \right) \quad (2.1.35)$$

qui représente la contribution de la flexion seule dans la valeur du déplacement calculé, et deux autres termes dépendant de la fonction de cisaillement transverse  $f(x_3)$  :

$$S_f = \frac{12}{l^2} \left( \frac{c_2^2}{c_1 c_4} \right) \quad (2.1.36)$$

déterminant la contribution du cisaillement transverse dans la valeur du déplacement,

et

$$\Psi_f(x_1) = x_1 - \frac{\sinh(\omega_f x_1)}{\omega_f \cosh\left(\omega_f \frac{l}{2}\right)} \quad (2.1.37)$$

représentant la variation du cisaillement transverse sur la hauteur de la section, en fonction de la position de la section par rapport à la ligne moyenne.

Les expressions 2.1.33 et 2.1.34 sont numériquement résolues dans le paragraphe suivant afin d'évaluer l'influence des théories de cisaillement transverse sur les résultats de déplacement d'une poutre homogène orthotrope dans le cadre d'un essai standard de flexion trois points.

L'évolution des déplacements longitudinaux le long de la hauteur d'une section transverse est déterminée ainsi que l'amplitude du gauchissement pour les théories de Kirchhoff-Love, Reissner-Mindlin, Reddy, Touratier, Karama et Mantari, comme explicité au début du paragraphe 1.1.3. La notion de gauchissement est détaillée dans le paragraphe 2.2.3.

## 2.2 Influence des théories de cisaillement transverse

Ce paragraphe présente l'influence du choix de la fonction de cisaillement transverse sur les résultats analytiques. Les expressions des déplacements  $u_1(x_1)$  et  $u_3(x_1)$  (expressions 2.1.33 et 2.1.34) sont reprises pour effectuer les tracés de profils de déplacement dans plusieurs configurations d'essai et pour plusieurs sections le long de la poutre. Ceux-ci permettront d'observer et de quantifier le gauchissement induit par les contraintes de cisaillement transverse.

En complément de ces résultats analytiques, le facteur  $S_{ct}$  défini par Berthelot (Berthelot, 2005) démontre l'influence du rapport des propriétés mécaniques et du rap-

port d'élanement de la poutre sur le cisaillement transverse.

$$S_{ct} = \frac{E_{11}}{G_{13}} \cdot \left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad (2.2.1)$$

Celui-ci correspond exactement au facteur  $S_f$  défini dans la résolution analytique par l'expression 2.1.36. Le facteur  $S_{ct}$  est l'équivalent de  $S_f$  correspondant à l'utilisation de la théorie naturelle de Reissner-Mindlin.  $S_f$  définit la sensibilité de la structure (propriétés géométriques et mécaniques) pour le cas général, indépendamment de la fonction de cisaillement transverse  $f(x_3)$ .

Le facteur est utilisé pour déterminer les cas d'étude intéressants pour l'évaluation de la prise en compte des effets du cisaillement transverse par les différentes théories listées dans le paragraphe 1.1.3.

## 2.2.1 Configurations étudiées

Pour analyser les différences de résultats entre les six fonctions  $f(x_3)$  retenues, trois configurations d'essai seront étudiées. Le but de ces variations est d'identifier les éventuelles divergences entre les théories en fonction de la configuration de test.

Ainsi, en conservant un rapport des propriétés mécaniques de la poutre  $\frac{E_{11}}{G_{13}}$  constant, les trois configurations diffèrent par le rapport géométrique  $\frac{l}{h}$  de la poutre et la distance entre appuis choisie pour l'essai de flexion trois points. La figure 2.2.1 détaille la configuration de l'essai de flexion trois points.

On considèrera alors trois typologies distinctes de poutres, dont le rapport des propriétés matériaux  $\frac{E_{11}}{G_{13}}$  est fixé à la valeur de 40 ( $E_{11} = 140000\text{MPa}$  et  $G_{13} = 3500\text{MPa}$ ). L'épaisseur  $b$  est supposée constante et égale à 4mm.

- Une poutre de faible largeur, de rapport  $\frac{l}{h} = 12,5$  avec  $l = 25\text{mm}$  et  $h = 2\text{mm}$
- Une poutre d'épaisseur moyenne, de rapport  $\frac{l}{h} = 5$  avec  $l = 25\text{mm}$  et  $h = 5\text{mm}$
- Une poutre de forte épaisseur, de rapport  $\frac{l}{h} = 1,25$  avec  $l = 25\text{mm}$  et  $h = 20\text{mm}$

Le chargement considéré pour la réalisation de ces calculs est de  $F_3 = -6000\text{N}$ .

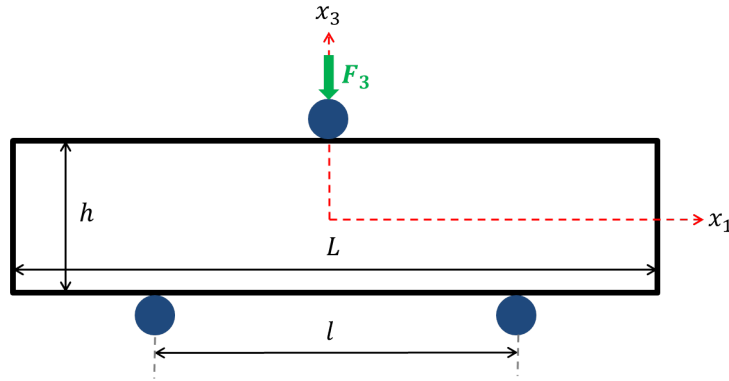


FIGURE 2.2.1: Configuration de l'essai de flexion trois points

## 2.2.2 Calcul numérique des déplacements

Pour atteindre les valeurs numériques des déplacements longitudinaux et transversaux de la poutre durant la flexion, il est nécessaire d'utiliser la formulation analytique décrite par les équations 2.1.33 et 2.1.34. Comme défini précédemment, ces expressions font intervenir les coefficients  $c_1, c_2, c_3$  et  $c_4$ , dont les trois derniers dépendent de la forme mathématique de  $f(x_3)$ . En effet, comme cela est décrit dans les équations 2.1.16 à 2.1.18, on note qu'il est nécessaire de passer par une intégration de la fonction de cisaillement pour déterminer les valeurs de déplacement. Pour la majorité des fonctions utilisées, une intégration analytique classique peut être effectuée car il est possible de déterminer les primitives de  $x_3 f(x_3)$ ,  $f^2(x_3)$ ,  $f^2_3(x_3)$  par des fonctions mathématiques usuelles. En ce qui concerne les fonctions proposées par Karama (Karama *et al.*, 2009) et Mantari (Mantari *et al.*, 2012b), les intégrations des fonctions basée sur les fonctions trigonométriques n'existent pas toujours.

Pour cette étude, le choix est fait d'utiliser une méthode d'intégration numérique pour le calcul des coefficients  $c_2, c_3$  et  $c_4$  qui permettront alors le calcul des valeurs numériques de  $u_1(x_1, x_3)$  et  $u_3(x_1, x_3)$ . Parmi le nombre important de méthodes disponibles pour effectuer une intégration numérique, la méthode de Gauss-Legendre à sept points d'intégration a été utilisée :

Abscisses $\xi_i$	Poids $w_i$
-0,94910791	0,12948497
-0,74153119	0,27970539
-0,40584515	0,38183005
0	0,41795918
0,40584515	0,38183005
0,74153119	0,27970539
0,94910791	0,12948497

Tableau 2.1: Abscisses  $\xi_i$  et poids  $w_i$  pour la méthode de Gauss-Legendre à sept points

$f(x_3)$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$\omega_f$	$S_f$	$S_{ct}$
Kirchhoff-Love	373333,33	0	0	0	0	/	/
Reissner-Mindlin	373333,33	373333,34	373333,34	28000,00	$+\infty$	0,26	0,26
Reddy	373333,33	298666,67	241777,78	14933,33	2,29	0,31	/
Touratier	373333,33	288973,75	116959,45	14000,00	2,06	0,31	/
Karama	373333,33	278984,98	212208,94	13108,17	1,87	0,30	/
Mantari	373333,33	541379,97	807495,26	109068,22	2,20	0,14	/

Tableau 2.2: Valeurs des coefficients  $c_1$  à  $c_4$  pour les six fonctions  $f(x_3)$ ,  $\frac{l}{h} = 12,5$

$$I = \int_b^a f(x)dx = \int_{-1}^1 f(t)dt = \sum_{i=1}^7 f(\xi_i) \cdot w_i \quad (2.2.2)$$

avec  $\xi_i$  et  $w_i$  respectivement les abscisses et les poids associés au polynôme de Legendre. En utilisant le changement de variable  $t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot x$ , il est possible de se ramener à une résolution par la forme initiale de  $I$  entre les bornes  $[-1; 1]$  (Guilpin, 1999).

Le Tableau 2.1 décrit les valeurs des abscisses  $\xi_i$  et poids  $w_i$  pour une utilisation de la méthode de Gauss-Legendre à sept points d'intégration (Mistou, 2000) :

Dans un souci de cohérence dans ce travail, le calcul des coefficients  $c_2$ ,  $c_3$  et  $c_4$  a été effectué par intégration numérique pour toutes les fonctions de cisaillement utilisées. Cela permet donc d'avoir la même approximation mathématique pour tous les résultats.

Selon les trois configurations proposées, les tableaux 2.2 à 2.4 présentent les résultats des coefficients  $c_1$  à  $c_4$ ,  $\omega_f$  et  $S_f$  pour les six fonctions  $f(x_3)$  retenues.

$f(x_3)$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$\omega_f$	$S_f$	$S_{ct}$
Kirchhoff-Love	5833333,33	0	0	0	0	/	/
Reissner-Mindlin	5833333,33	5833333,39	5833333,39	70000,00	$+\infty$	1,60	1,60
Reddy	5833333,33	4666666,70	3777777,802	37333,33	0,92	1,92	/
Touratier	5833333,33	4515214,86	3546241,42	35000,00	0,83	1,92	/
Karama	5833333,33	4359140,32	3315764,74	32770,42	0,75	1,91	/
Mantari	5833333,33	8459061,99	12617113,40	121954,02	0,59	1,931	/

Tableau 2.3: Valeurs des coefficients  $c_1$  à  $c_4$  pour les six fonctions  $f(x_3)$ ,  $\frac{l}{h} = 5$

$f(x_3)$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$\omega_f$	$S_f$	$S_{ct}$
Kirchhoff-Love	373333333,33	0	0	0	0	/	/
Reissner-Mindlin	373333333,33	373333337,11	373333337,11	280000	$+\infty$	25,60	25,60
Reddy	373333333,33	298666669,14	241777779,30	149333,33	0,23	30,72	/
Touratier	373333333,33	288973750,84	226959450,79	140000	0,21	30,67	/
Karama	373333333,33	278984980,48	212208943,21	131081,67	0,19	30,54	/
Mantari	373333333,33	541379967,48	807495257,84	321562,48	0,12	46,87	/

Tableau 2.4: Valeurs des coefficients  $c_1$  à  $c_4$  pour les six fonctions  $f(x_3)$ ,  $\frac{l}{h} = 1, 25$

### 2.2.3 Calcul du taux de gauchissement $\Delta$

Dans le but de quantifier les effets du cisaillement transverse, pour un cas donné et avec un choix de fonction  $f(x_3)$  donné, un critère de détermination du taux de gauchissement de la section est proposé. En effet, l'amplitude du phénomène peut être évaluée en analysant la distribution des déplacements longitudinaux le long de la section, c'est à dire le profil  $u_1(x_3)$ . La pente à l'origine  $u'_1(x_3)$  est calculée par régression linéaire entre deux points symétriques, espacés de la valeur  $\lambda$ , au voisinage du point situé sur la fibre moyenne de la poutre, où  $x_3 = x_{3_0}$ , tel que :

$$u'_1(x_3) = \left[ \frac{u_1(x_{3_0} + \frac{\lambda}{2}) - u_1(x_{3_0} - \frac{\lambda}{2})}{(x_{3_0} + \frac{\lambda}{2}) - (x_{3_0} - \frac{\lambda}{2})} \right] x_3 \quad (2.2.3)$$

La droite ainsi obtenue peut être étendue aux bornes inférieures et supérieures de  $x_3$ , entre  $-\frac{h}{2}$  et  $+\frac{h}{2}$ . Le taux de gauchissement, notée  $\Delta$ , est alors calculé par la

différence entre les valeurs extrêmes de  $u_1(x_3)$  et  $u'_1(x_3)$  rapportée à la valeur maximum du déplacement longitudinal  $u_1(x_3)$  calculée.

$$\Delta = \frac{(u_1(\frac{h}{2}) - u'_1(\frac{h}{2}))}{\max(u_1(x_3))} = \frac{(u_1(-\frac{h}{2}) - u'_1(-\frac{h}{2}))}{\max(u_1(x_3))} \quad (2.2.4)$$

On note que la symétrie permet d'exprimer l'égalité entre les résultats calculés aux bornes inférieures et supérieures de  $x_3$ .

La figure 2.2.2 illustre le calcul du taux de gauchissement  $\Delta$ .

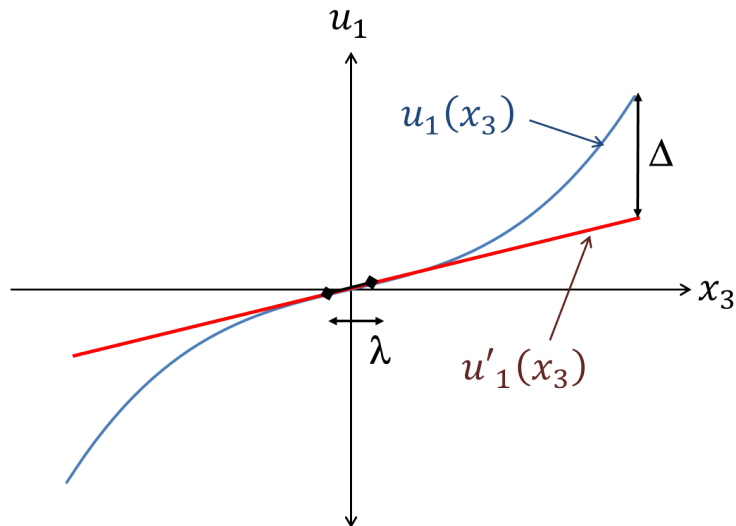


FIGURE 2.2.2: Schéma du calcul du taux de gauchissement  $\Delta$

## 2.3 Résultats

Les paragraphes précédents ont permis de mettre en place la détermination des résultats analytiques, en utilisant six fonctions de prise en compte du cisaillement transverse.

Le taux de gauchissement  $\Delta$  défini dans le paragraphe 2.2.3 est utilisé et commenté pour établir les conclusions et perspectives de cette étude. Néanmoins, ce critère ne peut



être appliqué qu'à la comparaison des différents modèles raffinés car il est indépendant de l'amplitude du chargement  $F_3$ .

### 2.3.1 Profils de déplacement $u_1(x_3)$

Pour l'analyse de ces résultats, on définit la position idéale permettant l'observation du gauchissement comme étant la section où  $x_1 = +/ - \frac{l}{4}$ . Cette position est équidistante des conditions aux limites prises en compte et permet ainsi de visualiser les résultats où les contraintes de cisaillement transverse ont le plus d'influence sur le champ de déplacement.

Les figures 2.3.1 à 2.3.3 présentent les profils de déplacement en  $x_1 = -\frac{l}{4}$  pour les trois configurations présentées dans le paragraphe 2.2.1.

On notera que dans le cas où  $\frac{l}{h} = 12,5$  (figure 2.3.1) il y a une très bonne correspondance des résultats entre les différents modèles. Cette configuration illustrant le cas d'une poutre de faible épaisseur, le phénomène de cisaillement transverse et donc de gauchissement est naturellement faible. Dans ce cas, l'utilisation des modèles raffinés pour déterminer précisément le champ de déplacement de la structure n'est pas indispensable.

Néanmoins, lorsque l'épaisseur de la poutre devient plus importante ( $\frac{l}{h} = 5$ ), on observe des divergences de résultats montrant que toutes les fonctions  $f(x_3)$  ne peuvent pas s'adapter à tous les cas de figure. Ainsi, la figure 2.3.2 qui concerne une poutre d'épaisseur moyenne, montre que seuls les modèles de Reddy, Touratier et Karama concordent pour l'évaluation des valeurs de déplacement et de gauchissement. Pour la fonction de Mantari, le gauchissement de la section est surévalué vis-à-vis des trois autres modèles raffinés. On notera également que les valeurs issues de la théorie naturelle sont logiquement cohérente avec les autres profils. Cette théorie donne une bonne approximation des déplacements mais sans pouvoir déterminer l'amplitude du gauchissement subi par la structure.

Ces remarques se confirment en analysant les profils de la figure 2.3.3 concernant le cas d'une poutre de forte épaisseur ( $\frac{l}{h} = 1,25$ ). Dans ce cas de figure, il est intéressant de noter en premier lieu que l'amplitude globale du déplacement est plus faible

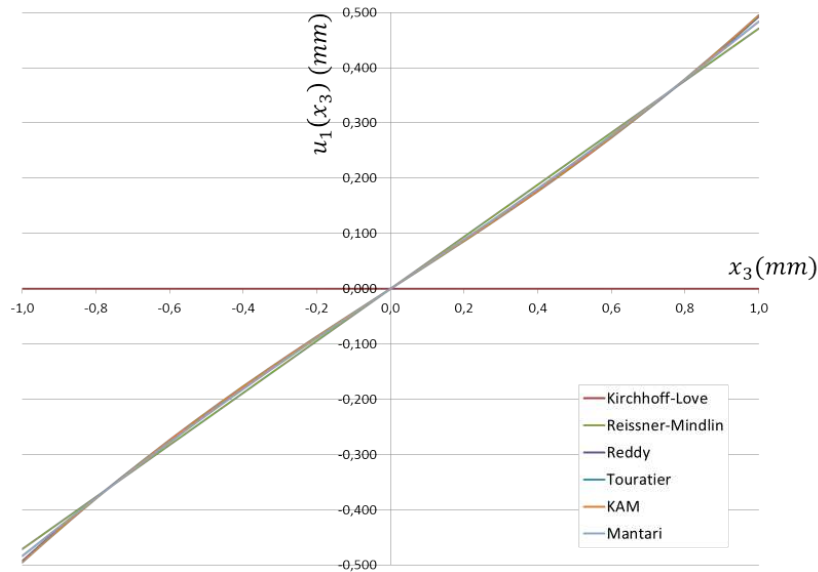


FIGURE 2.3.1: Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = \frac{l}{4}$  avec  $\frac{l}{h} = 12,5$

que pour des poutres d'épaisseur inférieure, malgré une augmentation significative des contraintes de cisaillement transverse. Aussi, le phénomène de gauchissement est logiquement accentué par l'augmentation de l'épaisseur. Si l'on analyse la pente à l'origine des différentes courbes, on s'aperçoit que dans le cas de la théorie naturelle, on conserve une pente positive (comme dans les cas précédents), alors que dans le cas des modèles raffinés, le signe de cette pente à l'origine s'est inversé. A la vue des différents profils de déplacement longitudinal, ce cas d'étude semble être particulièrement discriminatoire pour les fonctions  $f(x_3)$ .

## 2.3.2 Évaluation du gauchissement

Ce paragraphe vise à analyser les différents résultats concernant le taux de gauchissement  $\Delta(\%)$ , défini dans le paragraphe 2.2.3. Les théories classique et naturelle ne permettant pas d'intégrer le phénomène de gauchissement, celles-ci ne sont pas prises en compte dans cette partie de l'étude.

Le Tableau 2.5 résume les valeurs de  $\Delta$ , pour les trois configurations d'essai, en fonction des modèles raffinés de cisaillement transverse.

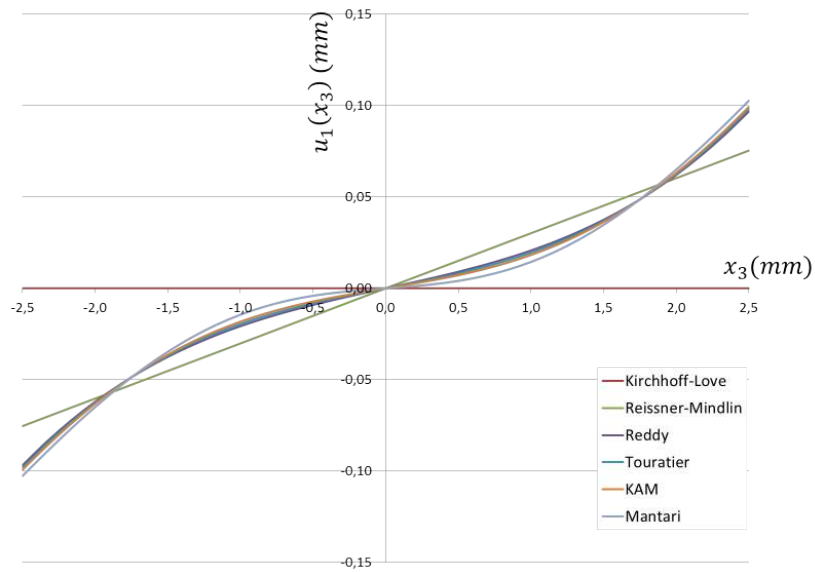


FIGURE 2.3.2: Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = \frac{l}{4}$  avec  $\frac{l}{h} = 5$

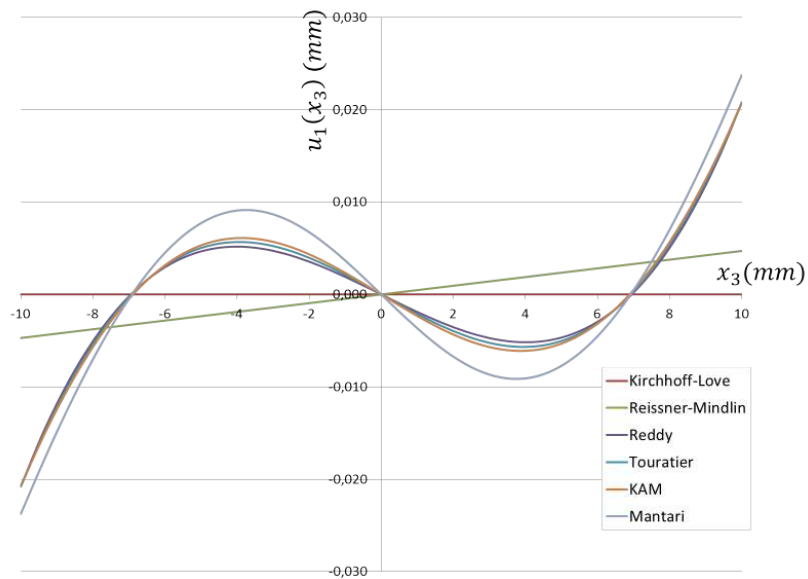


FIGURE 2.3.3: Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = \frac{l}{4}$  avec  $\frac{l}{h} = 1,25$

$f(x_3)$	$\frac{l}{h} = 12,5$	$\frac{l}{h} = 5$	$\frac{l}{h} = 1,25$
Reddy	10,83	54,98	192,40
Touratier	12,15	60,84	203,53
Karama	13,52	66,84	214,69
Mantari	8,29	85,14	256,87

Tableau 2.5: Taux de gauchissement  $\Delta$  en % en fonction de  $f(x_3)$ , pour les différentes valeurs de  $\frac{l}{h}$

Les résultats montrent que, comme cela est défini par Berthelot, plus le rapport  $\frac{l}{h}$  est faible, plus le gauchissement est important. Cela se traduit par une augmentation de la valeur de  $\Delta$ . L'ordre de grandeur des valeurs de  $\Delta$  exploitées permet de confirmer qu'il semble indispensable de prendre en compte le gauchissement lorsque les calculs sont effectués pour des structures présentant une forte épaisseur et une forte anisotropie. On notera que le critère  $\Delta$ , basé sur l'exploitation des valeurs de déplacement  $u_1(x_1)$  semble moins discriminant que le rapport  $S_f$  en considérant des rapports de valeurs entre deux configurations de poutres distinctes, pour un modèle donné.

## 2.4 Conclusions

Ce chapitre propose une analyse des effets du cisaillement transverse, dans le cadre d'un essai de flexion trois points, par la voie du calcul analytique.

Une méthode de résolution analytique, proposée par Dufort et al. (Dufort, 2000; Dufort *et al.*, 2001), a été présentée et enrichie pour une prise en compte plus exhaustive des modèles  $f(x_3)$  qui ont été développés depuis plusieurs dizaines d'années. Ainsi, six fonctions ont été retenues pour une analyse comparative, basée sur la résolution du champ de déplacement avec une formulation reposant sur les concepts de la théorie des plaques multicouches.

Pour trois configurations géométriques de poutre distinctes, les valeurs des déplacements longitudinaux  $u_1(x_3)$  ont été calculées et confrontées entre elles, d'après la méthode de résolution proposée.

L'analyse des résultats analytiques de cette étude a permis de mettre en évidence

des éléments intéressants pour l'analyse du problème du problème par cette voie. Ces données seront exploitées pour la détermination des paramètres géométriques et matériaux des éprouvettes utilisées, ainsi que le choix des configurations de test les plus intéressantes à mettre en œuvre. Ainsi, une géométrie ayant une forte épaisseur est retenue pour le développement de la méthode expérimentale de ce travail, pour bénéficier d'une forte sensibilité au gauchissement.

Le chapitre suivant présente le développement d'un modèle numérique de la configuration de flexion trois points étudiée dans ce second chapitre. L'objectif de cette modélisation est de définir les valeurs de déplacement par la méthode de calcul par éléments finis, pour la comparaison des valeurs calculées analytiquement et mesurées expérimentalement.



# Chapitre 3

## Modélisation numérique pour l'étude du cisaillement transverse

3.1	Objectifs et problématiques . . . . .	55
3.2	Propriétés matériaux . . . . .	56
3.2.1	Généralités sur la caractérisation mécanique des matériaux composites . . .	56
3.2.2	Essais de traction longitudinale . . . . .	59
3.2.3	Résultats des essais de traction longitudinale . . . . .	61
3.2.4	Essais de cisaillement Iosipescu . . . . .	64
3.2.5	Résultats des essais de cisaillement . . . . .	68
3.3	Modélisation éléments finis initiale . . . . .	70
3.4	Modélisation avancée . . . . .	72
3.4.1	Modélisation des zones hors appuis . . . . .	72
3.4.2	Modélisation des surfaces de contact . . . . .	74
3.5	Sensibilité des conditions aux limites . . . . .	74
3.5.1	Application des conditions aux limites . . . . .	76
3.5.2	Prise en compte du frottement aux contacts des appuis . . . . .	78
3.6	Sensibilité de l'application du chargement de flexion . . . . .	81
3.6.1	Position du point d'application du chargement . . . . .	82
3.6.2	Direction d'application du chargement $F_3$ . . . . .	84

**3.7 Conclusions . . . . . 86**



Cette troisième partie traite de la modélisation numérique réalisée pour atteindre les valeurs du champ de déplacement dans la structure, et les comparer, d'une part aux résultats analytiques présentés dans le chapitre 2 et d'autre part, aux résultats expérimentaux. Différentes modélisations sont étudiées pour comprendre l'influence de certaines hypothèses sur les résultats. Les calculs par éléments finis nécessitant la connaissance de certains paramètres intrinsèques aux matériaux étudiés, une caractérisation expérimentale des modules d'élasticité et des modules de cisaillement est effectuée pour définir les données d'entrée nécessaires aux calculs. Pour prédire au mieux le comportement réel de la structure dans les conditions du test de flexion trois points, une étude de sensibilité est effectuée pour évaluer l'influence de différents paramètres de modélisation sur les résultats. Celle-ci permettra également de discuter les hypothèses de la résolution analytique et d'anticiper l'interprétation des essais expérimentaux. Les résultats de cette analyse numérique permettent donc de constituer les valeurs de référence de l'étude.

## 3.1 Objectifs et problématiques

Ce chapitre propose le détail de la démarche effectuée au cours de cette étude pour la construction et l'exploitation d'un modèle numérique de l'essai de flexion trois points utilisé. Plusieurs objectifs du travail sont concernés par l'utilisation de la méthode des éléments finis. Le principal est l'utilisation des valeurs déterminées numériquement pour la comparaison avec les résultats analytiques, mettant en œuvre les différentes théories de cisaillement transverse et les résultats expérimentaux qui seront déterminés par corrélation volumique. Un autre objectif est l'utilisation d'un modèle numérique pour la comparaison des résultats exploitant les conditions aux limites expérimentales qui permettront la prise en compte des phénomènes liés aux conditions d'essai.

Une des problématiques à traiter est l'étude de l'influence des particules de cuivre insérées dans la fabrication du composite, afin de réaliser des mesures expérimentales dans le volume, par augmentation du contraste dans la structure interne. Une caractérisation précise des propriétés mécaniques les plus influentes est à effectuer pour fiabiliser les données d'entrée du modèle numérique et analyser les éventuelles différences de compor-

tement mécanique entre les deux types de structures. L'étude de sensibilité des conditions aux limites du modèle est également proposée dans le but de modéliser l'essai de flexion au plus proche du cas expérimental, de manière à minimiser les sources de divergences des résultats et apporter des éléments d'interprétation des résultats expérimentaux.

## 3.2 Propriétés matériaux

Des modèles numériques sont développés pour permettre de reproduire fidèlement l'essai de flexion mis en œuvre dans cette étude. La connaissance des propriétés matériaux est impérative pour réaliser des simulations cohérentes et exploitables pour la corrélation des résultats. D'après le traitement analytique du cisaillement transverse abordé dans le chapitre 2, le module d'élasticité  $E_{11}$  ainsi que le module de cisaillement transverse  $G_{13}$  sont identifiés comme les propriétés du matériau composite ayant le plus d'influence sur le gauchissement. Une détermination précise de ces données est faite pour construire les modèles numériques par des essais de caractérisation mécanique. D'autre part, ces données sont également nécessaires pour l'exploitation de la résolution analytique présentée au chapitre 2.

### 3.2.1 Généralités sur la caractérisation mécanique des matériaux composites

La propriété d'anisotropie, fréquemment rencontrée dans l'utilisation des matériaux composites, a pour conséquence de compliquer la connaissance des propriétés mécaniques des matériaux étudiés. Néanmoins, elles sont indispensables pour une étude et une maîtrise complète de la mise en œuvre de cette technologie. La caractérisation mécanique devient complexe dans le sens où de nombreux essais sont nécessaires, parfois coûteux et difficiles à réaliser, en comparaison avec l'utilisation de matériaux parfaitement isotropes où un simple essai homogène peut donner la majorité des données nécessaires à une étude.

En conservant un état de contrainte purement élastique, on considère seulement 2 constantes à déterminer pour les matériaux isotropes et homogènes, appelées « constantes de l'ingénieur » :

- Module d'élasticité longitudinale  $E$
- Coefficient de Poisson  $\nu$

Dans le cas général de l'utilisation d'un pli composite à fibres longues, l'anisotropie nécessite la détermination de 21 constantes de l'ingénieur.

Certaines simplifications existent du fait des différentes armatures de tissage couramment rencontrées, elles permettent de déduire le nombre de constantes à utiliser en fonction du type de renfort étudié :

- Unidirectionnels (UD) (isotrope transverse) : 5 constantes :  $E_{11}$ ,  $E_{33}$ ,  $G_{13}$ ,  $\nu_{13}$  et  $\nu_{23}$
- Tissus (orthotrope) : 9 constantes :  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $E_{33}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{13}$ ,  $G_{23}$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{13}$  et  $\nu_{23}$
- Tissus équilibrés : 6 constantes :  $E_{11}$ ,  $E_{33}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{13}$ ,  $\nu_{12}$  et  $\nu_{13}$

Ces constantes sont utilisées pour construire la matrice de rigidité du pli unitaire dans l'orientation standard  $0^\circ$ , qui permet d'écrire la loi de comportement du matériau suivante :

$$[\sigma_i] = [C_{ij}] \cdot [\varepsilon_j] = [S_{ij}]^{-1} \cdot [\varepsilon_j], \quad (3.2.1)$$

où le terme  $[\sigma]$  exprime le vecteur de contraintes généralisées,  $[C_{ij}]$  et  $[S_{ij}]$ , respectivement les tenseurs de rigidité et de souplesse du pli et  $[\varepsilon]$  le vecteur de déformations généralisées, avec  $i$  et  $j$  les directions de l'espace : 1, 2 ou 3.

L'équation 3.2.2 exprime cette loi de comportement dans le repère tridimensionnel.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

La réduction du nombre de constantes à déterminer varie en fonction des symétries matériaux propres aux types de fibres utilisées, comme le montre la figure 3.2.1.

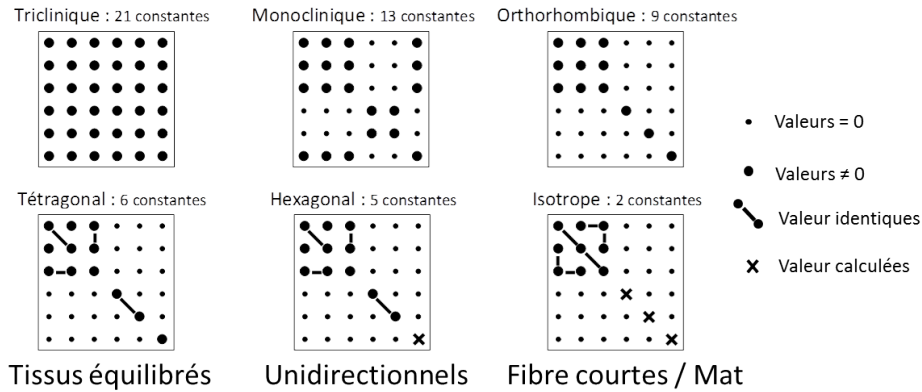


FIGURE 3.2.1: Construction des matrices de rigidité en fonction des symétries matériaux des plis composites

Pour cette étude, les matériaux utilisés possèdent des armatures UD, qui permettent de mieux observer les effets des contraintes de cisaillement transverse. Sur la base de l'équation 3.2.2, on peut donc exprimer la loi de comportement du pli UD en fonction des 5 constantes de l'ingénieur à caractériser :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & \frac{-\nu_{23}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{-\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

Deux essais sont mis en place pour accéder à ces propriétés mécaniques : l'essai de traction et l'essai de cisaillement Iosipescu sont détaillés dans les paragraphes suivants. Ils permettront la détermination des modules  $E_{11}$  et  $G_{13}$ .

### 3.2.2 Essais de traction longitudinale

L'essai de traction est mis en œuvre afin de connaître le comportement des matériaux utilisés pour cette étude. Il permet d'accéder aux propriétés élastiques de rigidité et de rupture dans les directions de sollicitation choisies pour l'essai. C'est un essai classique de caractérisation mécanique car il est simple à mettre en œuvre et permet d'accéder aux propriétés les plus intéressantes pour le dimensionnement de structure dans des cas simples.

#### 3.2.2.1 Définition de l'essai de traction

L'essai de traction est utilisé dans la détermination des propriétés mécaniques suivantes du pli unitaire :

- Module d'élasticité longitudinale (Module d'Young)  $E_{ii}$
- Coefficient de Poisson  $\nu_{ij}$
- Contrainte à la rupture  $\sigma_{ii}^R$
- Déformation à la rupture  $\varepsilon_{ii}^R$

Pour cette étude, les essais de traction sont réalisés suivant la norme *NF EN 2561 (NF-EN-2561, 1998)*. Cette norme propose deux géométries d'éprouvette. Pour ces essais, la

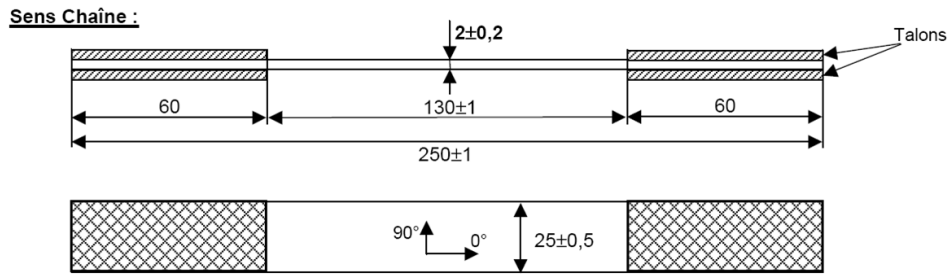


FIGURE 3.2.2: Géométrie « type B » de l'éprouvette de traction suivant la norme NF EN 2561

géométrie retenue est le « type B », avec les dimensions suivantes :

- Longueur  $L$  : 250mm
- Longueur utile  $l$  : 130mm
- Largeur  $b$  : 25mm
- Épaisseur  $h$  : minimum 2mm

Cette géométrie est illustrée sur la figure 3.2.2

L'éprouvette est mise en place dans les mors d'une machine de traction. Un déplacement à vitesse constante de  $1\text{mm} \cdot \text{min}^{-1}$  est appliqué de manière à solliciter l'éprouvette dans une direction donnée jusqu'à la rupture de l'échantillon.

L'acquisition est réalisée en continu de manière à enregistrer la charge et le déplacement de la traverse de la machine de traction. La déformation est enregistrée par l'intermédiaire de jauges d'extensométrie. Celles-ci sont collées sur la surface de l'éprouvette dans les directions  $0^\circ$  et  $90^\circ$  au centre de la zone utile, ce qui permet le calcul du module d'élasticité  $E_{11}$  et du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$ . La charge de traction supportée par l'éprouvette est enregistrée par la cellule de charge propre à la machine de traction, qui a une capacité de 100kN.

### 3.2.2.2 Résultats

Les données de charge  $F$  dans la direction de traction ainsi que les valeurs de déformation  $\varepsilon_{ii}$  permettent le calcul du module  $E_{ii}$  et du coefficient de Poisson  $\nu_{ij}$ .

La plage de valeur retenue pour le traitement des données est bornée par la valeur

de charge à rupture  $F^R$  entre  $\frac{F^R}{10}$  et  $\frac{F^R}{2}$ , où le comportement du matériau est supposé être linéaire de manière à vérifier les hypothèses d'élasticité pour le calcul des propriétés mécaniques. Le calcul des valeurs recherchées se fait comme suit :

$$E_{ii} = \left( \frac{1}{b \cdot h} \right) \cdot \frac{\left( \frac{F^R}{2} - \frac{F^R}{10} \right)}{\left( \varepsilon_{ij} \left( \frac{F^R}{2} \right) - \varepsilon_{ij} \left( \frac{F^R}{10} \right) \right)} \quad (3.2.4)$$

$$\nu_{ij} = \left| \frac{\varepsilon_{jj} \left( \frac{F^R}{2} \right) - \varepsilon_{jj} \left( \frac{F^R}{10} \right)}{\varepsilon_{ii} \left( \frac{F^R}{2} \right) - \varepsilon_{ii} \left( \frac{F^R}{10} \right)} \right| \quad (3.2.5)$$

### 3.2.3 Résultats des essais de traction longitudinale

Les essais de traction ont été réalisés pour les deux matériaux étudiés dans ce mémoire, correspondant à aux renforts unidirectionnels suivant :

- fibre carbone T700 associée à la résine epoxy 4090, étant un renfort HR (Haute Résistance) qui favorise la résistance à la rupture du matériau
- fibre carbone M55J associée à la résine epoxy M18, étant un renfort (THM) (Très Haut Module) qui favorise la grande rigidité des fibres

Pour chaque matériau, une série d'éprouvettes a été réalisée avec et sans insertion de marqueurs métalliques, utilisés pour la DVC.

L'un des objectifs est d'identifier s'il existe des différences dues aux marqueurs dans le comportement mécanique du matériau.

La machine de traction utilisée pour ces essais est une machine Instron 5082, mise à disposition par la société Nimitech Études<sup>1</sup>. On notera que sa capacité maximale de chargement étant de 100kN, elle ne permet pas d'atteindre la rupture des éprouvettes. En effet, celles-ci ont été prélevées dans les mêmes plaques dont sont issues les éprouvettes utilisées pour les essais de flexion trois points, ainsi leur section est de  $25 \times 4 = 100\text{mm}^2$ . D'après la contrainte de traction admissible donnée par le fournisseur du renfort, une

---

1. Nimitech Études : 1 Avenue des victimes du 11 juin 1944 65200 Bagnères de Bigorre; Tel : +33(0)5 62 92 23 80; Mail : contact@nimitech.fr

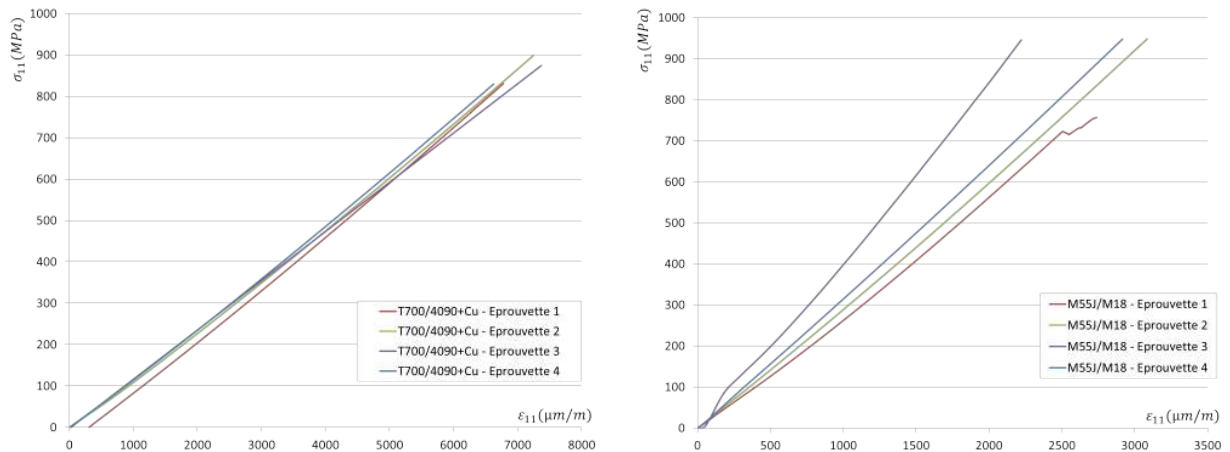


FIGURE 3.2.3: Courbes issues des essais de traction longitudinale sur les matériaux T700/4090 et M55/M18

force d'environ 500kN serait nécessaire pour atteindre la rupture. Néanmoins, cette étude vise uniquement à comparer les valeurs de module d'élasticité  $E_{11}$ , ainsi sur la base du comportement élastique linéaire du composite unidirectionnel, les essais effectués jusqu'au chargement de 100kN sont suffisants.

La figure 3.2.3 représente l'évolution de la contrainte de traction  $\sigma_{11}$  en fonction de la déformation longitudinale  $\varepsilon_{11}$  mesurée durant ces essais, pour le matériau T700/4090 avec particules métalliques et pour le matériau M55J/M18.

En premier lieu, on notera la très bonne répétabilité des résultats sur chacune des séries d'éprouvettes, qui de plus confirme le comportement élastique linéaire supposé. Ces séries de données sont donc utilisées pour la détermination des modules  $E_{11}$ , synthétisés dans les tableaux 3.1 et 3.2.

En prenant le matériau sans particule de cuivre comme référence, on détermine l'écart relatif entre les deux modules d'élasticité moyens  $E_{11}$  évalués. Celui-ci est de 1,19GPa, soit 0,97% de différence entre le matériau T700/4090 et son équivalent avec insertion de particules. Concernant le matériau M55J/M18, les essais ont permis d'identifier un écart de 1,53% sur les valeurs de rigidité dans le sens des fibres entre les deux configurations. Cette différence peut être considérée comme faible, et confirme que l'utilisation des particules métalliques en faible pourcentage (<2%) ne perturbe pas le



Éprouvettes	Module $E_{11}$ (GPa)	Éprouvettes	Module $E_{11}$ (GPa)
T700/4090_1	125,51	T700/4090+Cu_1	125,09
T700/4090_2	114,21	T700/4090+Cu_2	123,76
T700/4090_3	122,15	T700/4090+Cu_3	123,92
T700/4090_4	128,02	T700/4090+Cu_4	121,85
Moyenne	122,47	Moyenne	123,66
Écart-type/Moyenne	0,04	Écart-type/Moyenne	0,01

Différence des $E_{11}$ (GPa)	Écart relatifs (%)
1,19	0,97 %

Tableau 3.1: Tableaux de synthèse des modules  $E_{11}$  issus des essais de traction sur le matériau T700/4090, avec et sans marqueurs métalliques

Éprouvettes	Module $E_{11}$ (GPa)	Éprouvettes	Module $E_{11}$ (GPa)
M55J/M18_1	317,71	M55J/M18+Cu_1	331,55
M55J/M18_2	332,86	M55J/M18+Cu_2	298,13
M55J/M18_3	310,55	M55J/M18+Cu_3	325,28
M55J/M18_4	331,57	M55J/M18+Cu_4	317,96
Moyenne	323,17	Moyenne	318,23
Écart-type/Moyenne	0,03	Écart-type/Moyenne	0,05

Différence des $E_{11}$ (GPa)	Écart relatifs (%)
4,94	1,53 %

Tableau 3.2: Tableaux de synthèse des modules  $E_{11}$  issus des essais de traction sur le matériau M55J/M18, avec et sans marqueurs métalliques

comportement mécanique du matériau composite et est valable pour l'analyse volumique des matériaux non transparents. L'utilisation des particules de cuivre pour la fabrication des éprouvettes est abordée dans le chapitre 4 de ce manuscrit.

### 3.2.4 Essais de cisaillement Iosipescu

La détermination du module de cisaillement transverse  $G_{13}$  est effectuée par l'essai normalisé de cisaillement Iosipescu. Il permet également d'accéder aux valeurs limites de contrainte et de déformation dans le cas d'une sollicitation de cisaillement des plis. La mise en œuvre de cet essai est plus délicate que pour l'essai de traction, car la fiabilité des résultats est très sensible aux conditions de tests : orientation, type de renfort, conditions aux limites, montage de l'éprouvette, qualité de l'instrumentation, etc...

#### 3.2.4.1 Définition de l'essai de cisaillement Iosipescu

L'essai de cisaillement a été développé par Iosipescu en 1967 dans le but de contribuer à l'amélioration des méthodes permettant de mesurer les modules de cisaillement des matériaux composites, notamment dans les cas hors plan (Pierron, 1994). Le document standard associé à la réalisation de ces essais est la norme *ASTM 5379-05* (ASTM-D5379-05, 2005).

La réalisation des éprouvettes Iosipescu est effectuée par usinage de plaques composites, dans lesquelles les échantillons sont détournés. Une attention particulière doit être portée à cet usinage de manière à obtenir une géométrie correcte des encoches de réduction de la section pour ne pas provoquer de concentrations de contraintes en fond d'encoche qui pourrait entraîner une rupture prématurée de l'éprouvette testée. Les dimensions des échantillons sont présentées en figure 3.2.4.

Cet essai nécessite la mise en place d'un montage spécifique sur la machine de test, illustré en figure 3.2.5. Il est composé de deux mors en contact avec les surfaces supérieures et inférieures de l'éprouvette. Un des mors est mobile, guidé par une vis à billes pendant l'essai. Le mors opposé étant fixe, il en résulte une sollicitation de cisaillement de la partie centrale de l'éprouvette, où la contrainte est concentrée par une

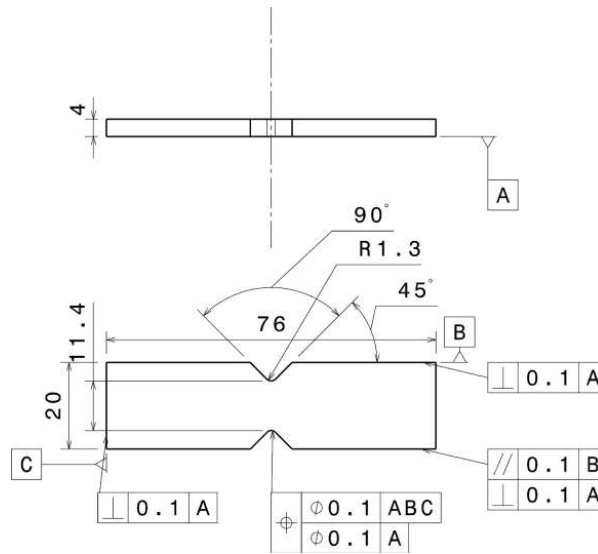


FIGURE 3.2.4: Géométrie de l'éprouvette de cisaillement Iosipescu suivant la norme ASTM 5379-05

réduction de la section.

L'essai s'effectue par application d'un déplacement de compression sur la machine qui agit sur le mors mobile du montage, à la vitesse de  $2\text{mm} \cdot \text{min}^{-1}$ , définie par la norme. La fin de l'essai est déterminée par la détection de la rupture de l'éprouvette caractérisée par un affaiblissement de la charge de compression due à une diminution de la section résistante.

Deux jauges d'extensométrie sont collées à  $+45^\circ$  et  $-45^\circ$  sur la surface visible de l'éprouvette dans le but d'enregistrer l'évolution de la déformation en fonction de la charge appliquée. Ces données sont ensuite utilisées pour calculer le module de cisaillement du matériau, dans l'orientation choisie pour l'échantillon. Il a été montré que la répartition du champ de cisaillement le long de la section de l'éprouvette n'est pas homogène, comme le montre la figure 3.2.6. Il y a une forte dépendance de l'orientation des plis du stratifié dans la détermination du module  $G_{13}$  mesuré (Mistou *et al.*, 2010). Les courbes présentées montrent que dans le cas d'un stratifié orienté à  $0^\circ$  la position centrale de la rosette le long de la section de l'éprouvette ne permet pas d'évaluer le maximum des déformations de cisaillement, ce qui entraîne une surévaluation du module  $G_{13}$ . Les valeurs proches des bords libres de l'éprouvette divergent de la valeur au centre de la

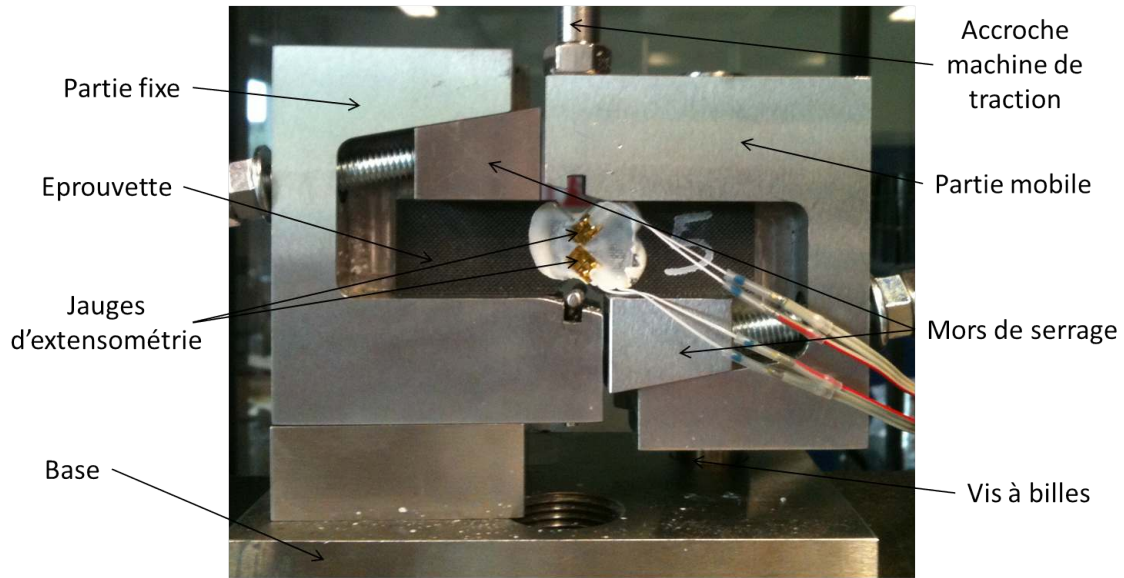


FIGURE 3.2.5: Montage spécifique de cisaillement Iosipescu suivant la norme ASTM 5379-05

section. La position et la longueur de jauge ont donc une influence importante sur la précision de la valeur de module obtenue. Néanmoins, un des objectifs de ces essais de caractérisation étant de comparer les matériaux avec et sans particules de cuivre, la méthode de mesure (identique pour tous les essais) est acceptable et est conforme à la norme utilisée.

### 3.2.4.2 Analyse des essais

Les mesures effectuées pendant l'essai de cisaillement permettent de mettre en correspondance la charge relevée par la machine de traction ainsi que les déformations à  $+45^\circ$  notée  $\epsilon_{+45^\circ}$ , et à  $-45^\circ$  notée  $\epsilon_{-45^\circ}$ , relevées par les deux jauges d'extensométrie collées sur la surface de l'éprouvette.

A partir de la géométrie de l'éprouvette et des valeurs de déformation, il est donc possible de déterminer à chaque point de mesure la valeur de la contrainte de cisaillement  $\tau_{13}$  supportée par l'échantillon, tel que :

$$\tau_{13} = \frac{F_{13}}{S_i} \quad (3.2.6)$$

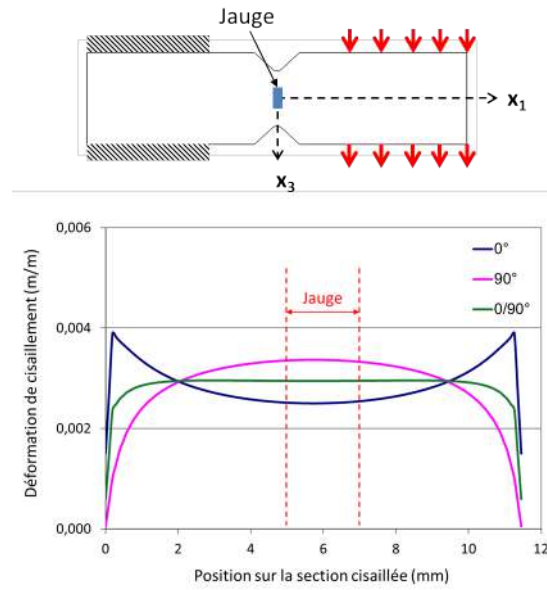


FIGURE 3.2.6: Répartition de la déformation de cisaillement le long de la section sollicitée (Mistou *et al.*, 2010)

avec  $F_{13}$  la valeur du chargement de cisaillement dans le plan (1, 3) et  $S_i$  la valeur de la section résistante initiale de l'éprouvette qui correspond à la section entre les deux entailles usinées

La déformation de cisaillement  $\gamma_{13}$  est obtenue en sommant les deux signaux de chacune des jauges d'extensométrie comme exprimée dans l'équation 3.2.7.

$$\gamma_{13} = |\varepsilon_{+45^\circ}| + |\varepsilon_{-45^\circ}| \quad (3.2.7)$$

A partir des deux séries de valeurs  $\gamma_{13}$  et  $\tau_{13}$ , on peut alors tracer la courbe des contraintes en fonctions des déformations de l'essai à analyser, sur laquelle on peut identifier la valeur du module de cisaillement  $G_{13}$ , comme explicité par la figure 3.2.7.

Le module  $G_{13}$  correspond à la pente de la partie linéaire de la courbe  $\tau_{13}(\gamma_{13})$ , d'où :

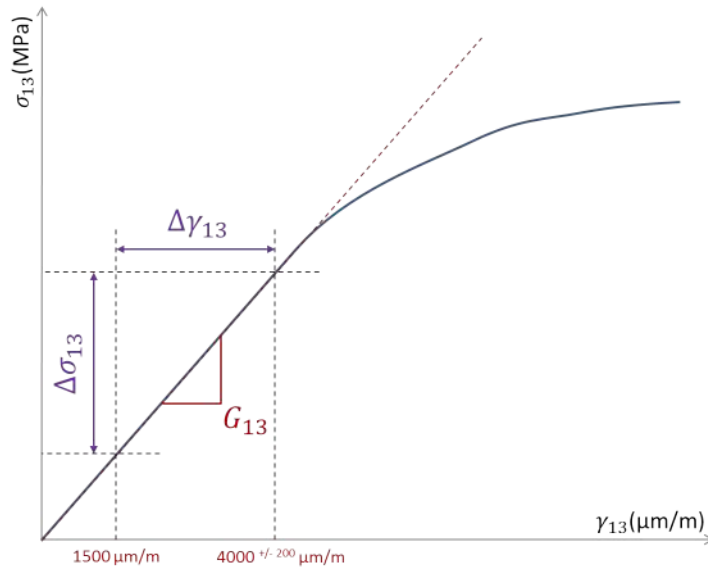


FIGURE 3.2.7: Calcul du module de cisaillement  $G_{13}$  par l'essai Iosipescu

$$G_{13} = \frac{\Delta\tau_{13}}{\Delta\gamma_{13}} \quad (3.2.8)$$

### 3.2.5 Résultats des essais de cisaillement

De la même manière que pour les essais de traction, une série d'essai de cisaillement a été effectuée pour les deux matériaux utilisés avec et sans particules de cuivre. Une comparaison est effectuée entre les résultats obtenus dans les deux configurations, pour les deux matériaux étudiés, présentés en tableaux 3.3 et 3.4. Pour illustrer ces résultats sur les deux matériaux étudiés, la figure 3.2.8 montre les courbes de la contrainte  $\tau_{13}$  en fonction de la déformation  $\gamma_{13}$ , d'une part pour le matériau T700/4090 et d'autre part pour le matériau M55J/M18. La reproductibilité des tests effectués est assurée, malgré une dispersion des résultats plus importante que pour les résultats des essais de traction. Les tableaux de synthèse mettent en évidence une sensibilité plus importante des modules de cisaillement vis-à-vis de l'insertion des particules métalliques dans la

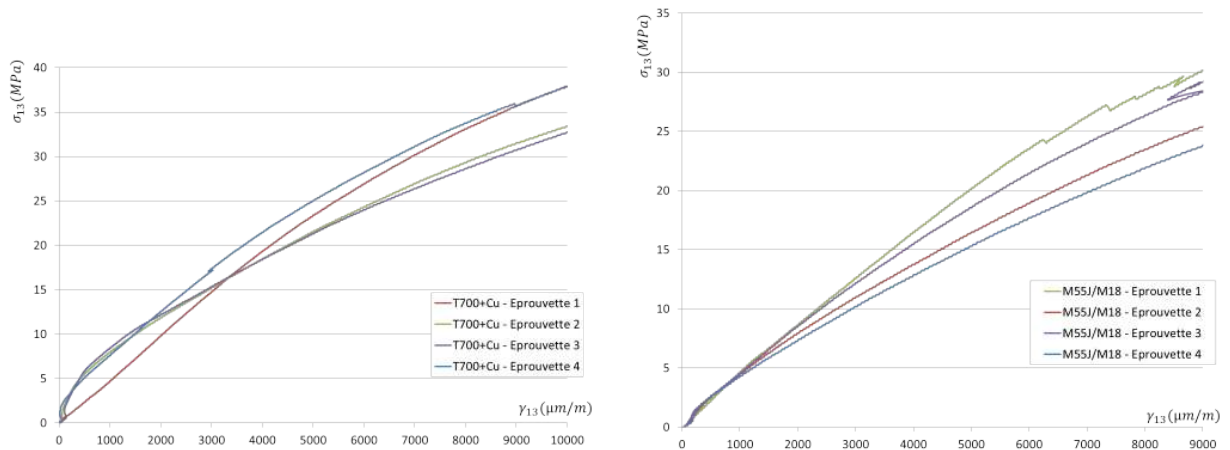


FIGURE 3.2.8: Courbes issues des essais de cisaillement Iosipescu sur les matériaux T700/4090 et M55J/M18

fabrication des matériaux composites. Les écarts relatifs mesurés entre les matériaux avec et sans marqueurs sont de 7,50% et 4,89%, respectivement pour le matériau T700/4090 et M55J/M18. Ces écarts sont cinq à sept fois supérieurs à ceux déterminés par les tests de traction. Néanmoins, la différence des modules  $G_{13}$  caractérisés reste faible et permet une analyse cohérente du phénomène, puisque les rapports  $\frac{E_{11}}{G_{13}}$  conservent une valeur traduisant une forte sensibilité aux contraintes de cisaillement transverse, comme cela est détaillé dans le paragraphe 2.2.

Éprouvettes	Module $G_{13}$ (GPa)	Éprouvettes	Module $G_{13}$ (GPa)
T700/4090_1	3,01	T700/4090+Cu_1	3,85
T700/4090_2	3,30	T700/4090+Cu_2	3,25
T700/4090_3	3,41	T700/4090+Cu_3	3,03
T700/4090_4	3,08	T700/4090+Cu_4	3,63
Moyenne	3,20	Moyenne	3,44
Écart-type/Moyenne	0,06	Écart-type/Moyenne	0,09

Différence des $G_{13}$ (GPa)	Écart relatifs (%)
0,24	7,50 %

Tableau 3.3: Tableaux de synthèse des modules  $G_{13}$  issus des essais de cisaillement Iosipescu sur le matériau T700/4090, avec et sans marqueurs métalliques

Éprouvettes	Module $G_{13}$ (GPa)	Éprouvettes	Module $G_{13}$ (GPa)
M55J/M18_1	3,82	M55J/M18+Cu_1	3,75
M55J/M18_2	2,86	M55J/M18+Cu_2	3,23
M55J/M18_3	3,36	M55J/M18+Cu_3	3,32
M55J/M18_4	2,65	M55J/M18+Cu_4	3,02
Moyenne	3,17	Moyenne	3,33
Écart-type/Moyenne	0,10	Écart-type/Moyenne	0,09

Différence des $G_{13}$ (GPa)	Écart relatifs (%)
0,16	4,89 %

Tableau 3.4: Tableaux de synthèse des modules  $G_{13}$  issus des essais de cisaillement Iosi-pescu sur le matériau M55J/M18, avec et sans marqueurs métalliques

### 3.3 Modélisation éléments finis initiale

L'objectif de cette étude est de comparer les résultats fournis par les différentes théories de cisaillement transverse, intégrée dans une résolution analytique du problème, pour le cas d'un test de flexion trois points.

Néanmoins, aucun de ces résultats ne peut être considéré comme la solution exacte du problème. Ainsi, comme cela est souvent observé dans des études similaires (Karama *et al.*, 1993, 1998; Dufort *et al.*, 2001; Karama *et al.*, 2003; Vidal et Polit, 2009), la solution de référence est donnée par l'utilisation de la méthode des éléments finis.

Une modélisation éléments finis a été réalisée pour fournir des résultats de référence. La méthode adoptée est basée sur la modélisation d'une section transverse de la poutre, qui permettra d'observer les déplacements  $u_1(x_1, x_3)$  et  $u_3(x_1, x_3)$ .

La méthode de calcul par éléments finis étant, dans ce cas, effectuée en accord avec les lois classiques d'élasticité des matériaux, il n'y a pas de dépendance à l'utilisation d'une théorie de cisaillement transverse particulière.

Une modélisation initiale est effectuée pour étudier les résultats de gauchissement par méthodes numériques. Celle-ci est représentative des hypothèses admises dans la méthode de résolution analytique du chapitre 2, à savoir la symétrie du problème sur l'axe  $x_3$  et une application ponctuelle du chargement et des conditions de blocage des degrés



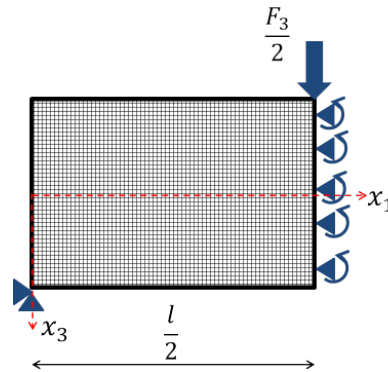


FIGURE 3.3.1: Modélisation éléments finis 2D de la poutre en flexion trois points

de liberté aux appuis. La modélisation prend en compte le comportement orthotrope de la section transverse, on conserve alors les valeurs matériaux  $E_{11}$  et  $G_{13}$  données dans le paragraphe 2.2.1. Pour étudier la modélisation, le matériau sélectionné pour les simulations est le couple fibre/résine carbone UD/Epoxy avec un module  $E_{11} = 140\text{GPa}$  et un module  $G_{13} = 3,5\text{GPa}$ .

Pour simplifier les calculs, dans un premier temps, la symétrie du cas de l'étude par rapport à l'axe du chargement de flexion est utilisée, ainsi la moitié de la structure est modélisée.

Les conditions aux limites prises en compte sont les suivantes :

- $u_3(x_1 = 0) = 0$ , représentant l'appui inférieur
- $\frac{F_3}{2}$ , représentant l'effort de flexion
- $u_1(x_1 = \frac{l}{2}) = 0$  et  $\theta(x_1 = \frac{l}{2}) = 0, \forall x_3$ , représentant la condition de symétrie

Cette modélisation a été mise en œuvre avec le code de calcul commercial *Abaqus CAE 6.10-2*. Le type d'éléments finis adopté est un élément à 8 nœuds en contraintes planes « CPS8 ». Le maillage de la demi-section est constitué de 1000 éléments de taille 0,5mm.

La figure 3.3.1 illustre la construction du modèle initial.

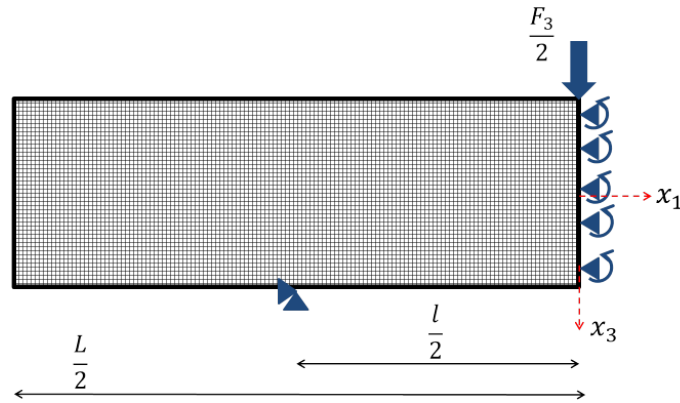


FIGURE 3.4.1: Modélisation éléments finis 2D avec prise en compte des zones hors appuis

## 3.4 Modélisation avancée

Une modélisation avancée est proposée pour se rapprocher du comportement de l'éprouvette étudiée durant les essais expérimentaux. Certaines hypothèses issues de la résolution analytique ne sont pas suffisantes pour modéliser l'essai de flexion de manière complètement réaliste. Des modifications sont donc effectuées sur la base de la modélisation initiale proposée précédemment, ainsi qu'une comparaison des résultats.

### 3.4.1 Modélisation des zones hors appuis

L'objectif de ce travail étant de mettre en place une observation expérimentale 3D du phénomène de gauchissement induit par le cisaillement transverse, la modélisation éléments finis adoptée doit être la plus fidèle possible aux conditions d'essai. Dans ce but, les profils de déplacement ont également été calculés par un modèle prenant en compte les parties de la poutre se situant en dehors des appuis de flexion, afin d'évaluer d'éventuelles influences.

Le modèle prenant en compte cette différence est présenté en figure 3.4.1.

Ces parties de la poutre ne sont pas prises en considération dans la résolution analytique exposée dans la partie 2.1. Néanmoins, il demeure intéressant de connaître leur participation au champ de déplacements résultant d'un effort de flexion pour mieux ap-

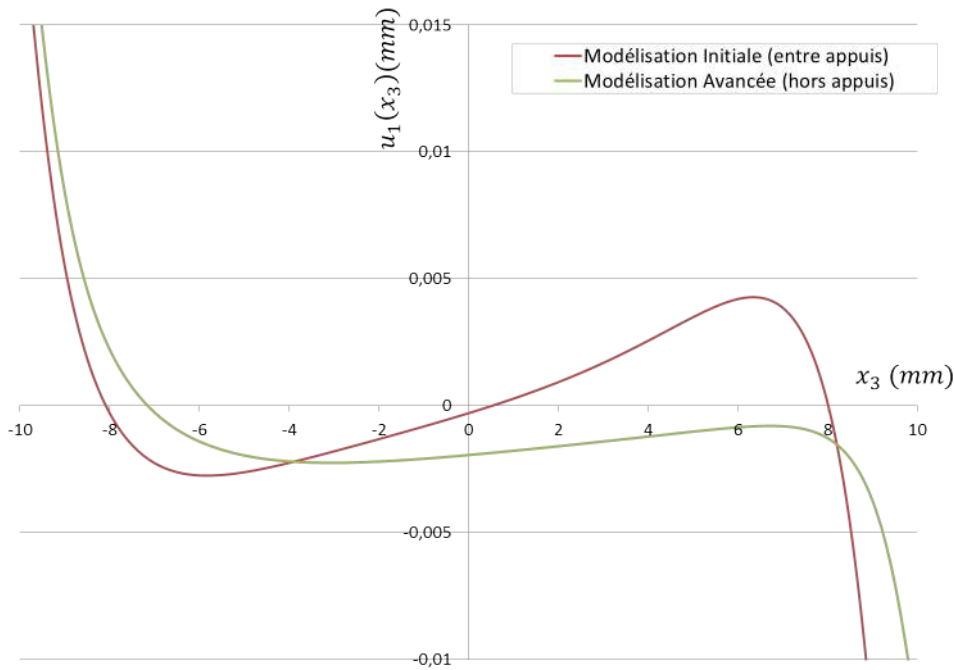


FIGURE 3.4.2: Différence de résultats entre les deux modélisations étudiées

préhender la corrélation des résultats expérimentaux avec ceux issus de calculs éléments finis.

Considérons la configuration d'essai où  $\frac{l}{h} = 1.25$ , avec un chargement retenu de  $\frac{F_3}{2} = 3000\text{N}$ . La figure 3.4.2 présente les profils de déplacement  $u_1(x_3)$  de la section située à  $x_1 = -\frac{l}{4}$ , d'une part pour la modélisation initiale, présentée en figure 3.3.1, et d'autre part pour une modélisation plus proche des conditions expérimentales (figure 3.4.1).

La figure 3.4.2 permet d'identifier l'influence de la partie hors appuis sur les valeurs des champs de déplacements calculées par éléments finis. En comparaison avec la modélisation initiale, il n'y a pas de symétrie des valeurs de déplacement longitudinal de part et d'autre de la ligne moyenne de la section, la fibre neutre n'est donc pas identique entre les deux modélisations. Cette dernière remarque sera à considérer pour l'analyse des résultats expérimentaux. Aussi, il apparaît clairement que l'amplitude du gauchissement est diminuée si l'on prend en compte l'intégralité de la poutre dans la modélisation numérique, ce qui a également une influence dans l'analyse des différentes théories de cisaillement transverse.

### 3.4.2 Modélisation des surfaces de contact

Dans le but de réaliser une modélisation la plus proche possible des conditions aux limites expérimentales, on peut également s'interroger sur l'influence des appuis du montage de flexion sur la distribution des déplacements le long des sections observées. Pour analyser cette problématique, une modélisation a été faite en tenant compte des appuis, présentée en figure 3.4.3. Les hypothèses admises ici sont que les appuis sont infiniment rigides de manière à transmettre l'intégralité du déplacement à l'éprouvette. Cette hypothèse reste proche de la réalité au regard des ordres de grandeurs de la raideur relative des appuis et de l'éprouvette dans les directions transverses. Les plis UD ont très peu de rigidité dans les directions transverses  $x_2$  et  $x_3$ , où la résine reprend en grande partie les efforts avec un module d'Young inférieur à 5GPa, en comparaison des appuis aluminium utilisés ayant un module d'Young de l'ordre de 70GPa. Cette dernière remarque peut expliquer les risques de matage sur les surfaces libres des éprouvettes dans les zones proches des appuis de flexion, pouvant perturber la cohérence des conditions aux limites modélisées.

D'après les courbes présentées par la figure 3.4.4, on peut identifier que l'influence des appuis sur les résultats de la modélisation n'est pas globalement significative sur les profils de gauchissement obtenus. Néanmoins, on observe localement près des appuis inférieurs de flexion, un lissage du déplacement représentant une distribution répartie sur plusieurs nœuds par contact de l'appui. Cette distribution n'existe pas dans la modélisation théorique car le déplacement imposé est affecté au seul nœud supérieur en  $x_3 = 0$ , sur le plan de symétrie longitudinal. Ces éléments seront également à considérer pour mieux interpréter les résultats expérimentaux.

## 3.5 Sensibilité des conditions aux limites

Des différences ont été observées selon le type de modélisation numérique adoptée pour représenter le comportement de l'éprouvette en flexion trois points. Pour compléter ces résultats, une étude de sensibilité spécifique sur les conditions aux limites est présen-

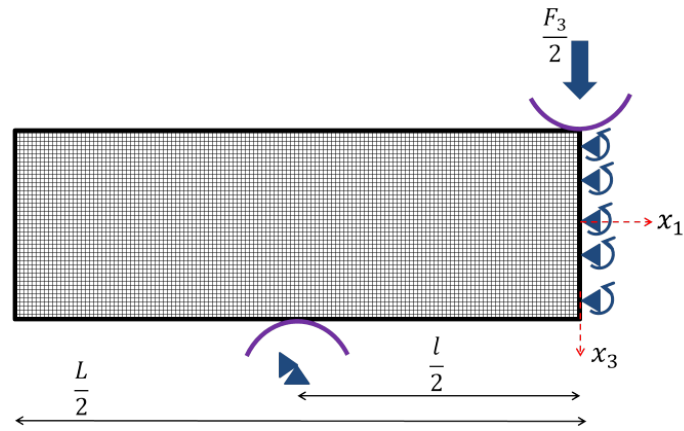


FIGURE 3.4.3: Modélisation éléments finis 2D avec prise en compte des appuis de flexion

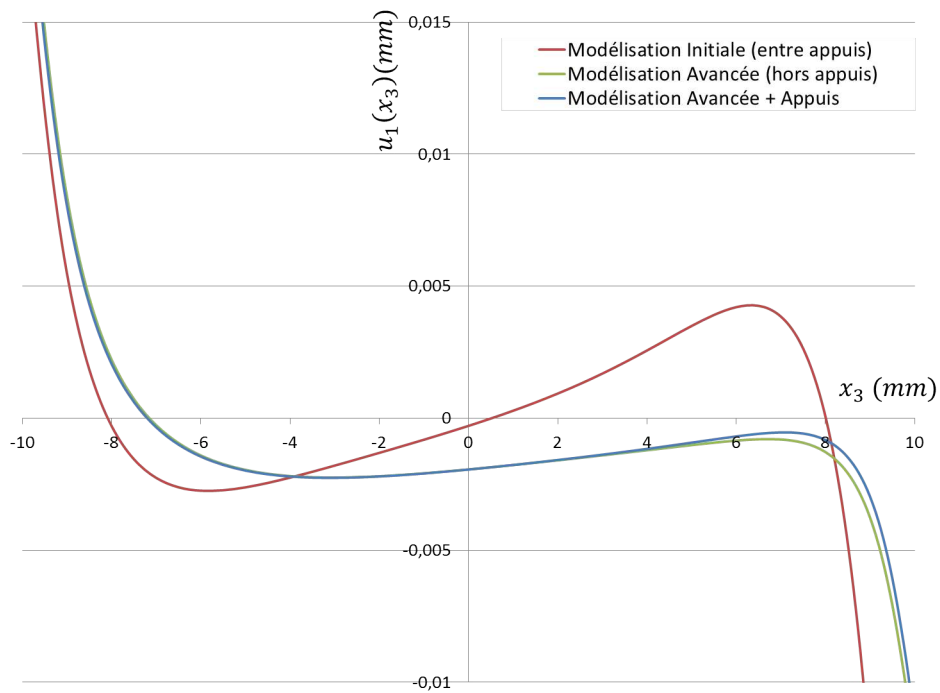


FIGURE 3.4.4: Différence de résultats entre les deux modélisations étudiées et la modélisation avec appuis cylindriques

tée ici pour accentuer la représentativité du modèle avancé et anticiper l'interprétation des résultats expérimentaux.

### 3.5.1 Application des conditions aux limites

Sur la base de la modélisation proposée par la figure 3.4.3, une analyse de sensibilité des conditions aux limites est réalisée pour identifier la manière la plus appropriée de modéliser celles-ci. On distingue trois méthodes d'application des différentes conditions :

- application ponctuelle
- application sur la demi-hauteur de la section
- application sur la hauteur totale de la section

L'objectif de cette analyse est d'observer les divergences de résultats du modèle numérique en fonction de la méthode d'application des conditions aux limites. Les différentes configurations testées sont illustrées en figure 3.5.1.

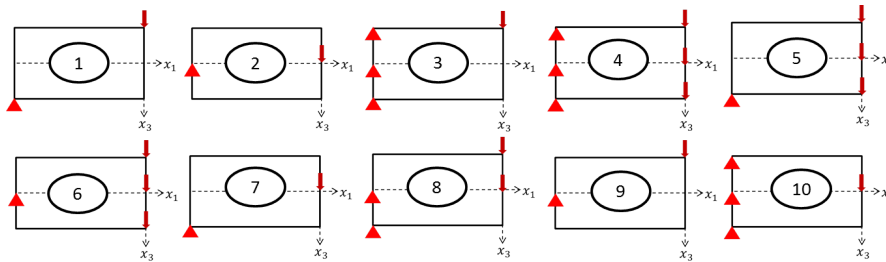


FIGURE 3.5.1: Configurations de conditions aux limites testées

A partir d'un cas d'étude similaire ( $\frac{l}{h} = 1,25, \frac{F_3}{2} = 3000\text{N}$ ), les profils de déplacement  $u_1(x_3)$  ont été tracés pour toutes les configurations, une synthèse de ces courbes est représentée en figure 3.5.2. pour illustrer la comparaison des résultats.

La notation adoptée sur cette figure suit la règle suivante :  $u_{1,i}$  avec  $i$  le numéro de la configuration donnée en figure 3.5.1.

On peut identifier deux tendances distinctes. La première permet de mettre en évidence le gauchissement de la section avec une bonne cohérence vis-à-vis des résultats connus de l'analytique et de la littérature, illustrée par les courbes  $u_{1,1}$ ,  $u_{1,4}$ , et  $u_{1,6}$ .

La deuxième tendance permet alors de distinguer les configurations de conditions aux limites sources de résultats incohérents, illustrée par  $u_{1,2}$ ,  $u_{1,3}$ ,  $u_{1,5}$ ,  $u_{1,7}$ ,  $u_{1,8}$ ,  $u_{1,9}$ ,  $u_{1,10}$ . La configuration qui semble être idéale au sens de l'analytique est la numéro 4, car il y a une symétrie du résultat autour de la fibre moyenne ainsi qu'une tangente horizontale pour  $x_3 = 0$ , ce qui s'explique par le fait d'avoir un cisaillement pur de par l'application de conditions aux limites sur les longueurs totales des éléments géométriques. De plus, cette configuration est conforme à l'homogénéisation du comportement des structures multicouches, à travers l'utilisation des modèles et théories analytiques. En effet, l'homogénéisation ne prend pas en compte une variation des conditions aux limites pour les différents plis en fonction de leur position dans l'épaisseur, lorsqu'elle est utilisée dans le cadre d'étude en modélisation poutre. Ainsi on considère que tous les plis du multicouche supportent les conditions aux limites.

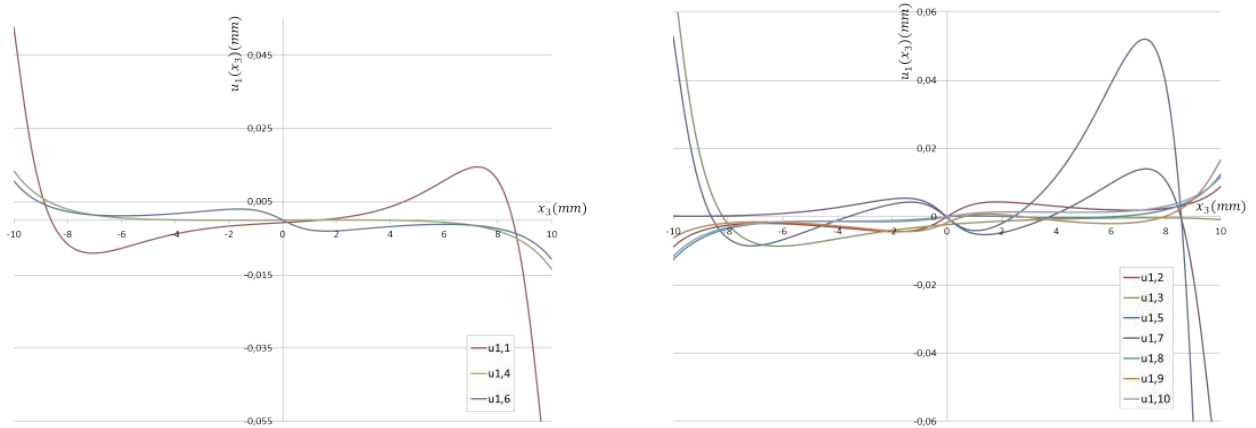


FIGURE 3.5.2: Déplacements  $u_1(x_3)$  pour les différentes configurations de conditions aux limites ( $u_{1,i}$  avec  $i$  le numéro de la configuration des conditions aux limites) ; en cohérence (à gauche) et en incohérence (à droite) avec la théorie analytique

### 3.5.2 Prise en compte du frottement aux contacts des appuis

Le paragraphe précédent a permis de mettre en évidence la sensibilité du modèle vis-à-vis de la méthode d'application des conditions aux limites du modèle. Il est également important d'étudier l'influence de la modélisation des appuis du montage de flexion trois points, ainsi que la sensibilité des résultats sur le paramétrage du frottement aux contacts éprouvette/appuis. Différentes méthodes de modélisation des appuis et de leurs contacts sont ici présentées ainsi que les résultats des simulations associées.

Pour toutes les simulations, les appuis sont considérés infiniment rigides afin de prendre en compte le fait que ceux-ci ne se déforment pas durant l'essai.

La première méthode de modélisation des contacts consiste à négliger les éventuels glissements entre l'éprouvette et les appuis. On considère alors un contact « dur » au coefficient de frottement infini entre la surface de l'éprouvette et les appuis de flexion. La seconde méthode permet de prendre en compte le glissement entre les surfaces de contact de l'échantillon et les appuis du montage. Pour la modélisation, la valeur du coefficient de frottement entre les deux matériaux en contact est fixée à 0,2. Cette valeur est régulièrement retrouvée dans des études traitant de la friction des composites et des métaux (Schon, 2004). Les deux modèles sont présentés en figure 3.5.3.

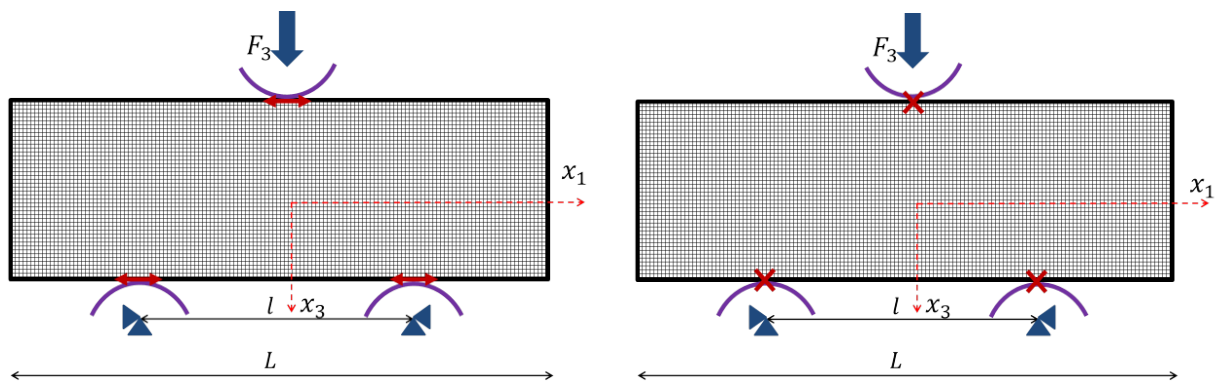


FIGURE 3.5.3: Schématisation du modèle numérique avec prise en compte des contacts aux appuis avec glissement (à gauche) et sans glissement (à droite)



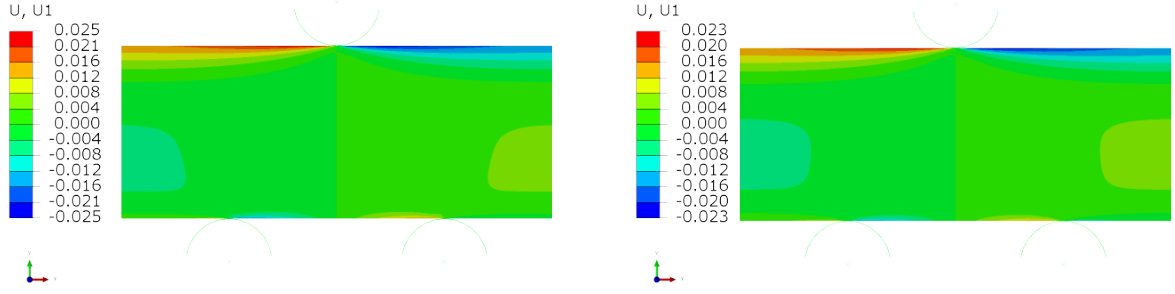


FIGURE 3.5.4: Cartographies des déplacements  $u_1(x_3)$ , respectivement avec contacts glissants (à gauche) et sans contacts glissants (à droite)

Les résultats des deux calculs sont présentés en figure 3.5.4.

La valeur du coefficient de frottement introduite dans la modélisation n'ayant pas été fiabilisée par un essai de caractérisation, il est proposé ici d'évaluer la sensibilité des résultats obtenus en fonction de différentes valeurs de celui-ci. Classiquement, un coefficient de frottement  $\geq 0,3$  permet de considérer l'absence de glissement entre deux surfaces en contact.

Les résultats des calculs présentés en figure 3.5.5 ont été réalisés avec trois valeurs de coefficient de frottement, présentés dans le tableau 3.5, où figurent également les valeurs des écarts  $E_s$  correspondant à la moyenne quadratique des écarts entre le profil avec défaut et le profil de référence, adimensionnée par la valeur du déplacement  $u_{1Ref}(x_3)$  en  $x_3 = 0$ , tel que :

$$E_s = \frac{\sqrt{\left[\frac{1}{n} \left(\sum_n^1 (u_{1Exp}(x_3) - u_{1RM})^2\right)\right]}}{u_{1Ref}(x_3 = 0)} \quad (3.5.1)$$

On notera que la configuration de référence ainsi que le calcul de l'écart  $E_s$  restent identiques pour les autres défauts étudiés dans les paragraphes suivants.

Cas	Valeur du coefficient de frottement	Écart $E_s$
1	0,1	Référence
2	0,2	0,07
3	0,8	0,54

Tableau 3.5: Variations du coefficient de frottement aux contacts des appuis du montage de flexion trois points

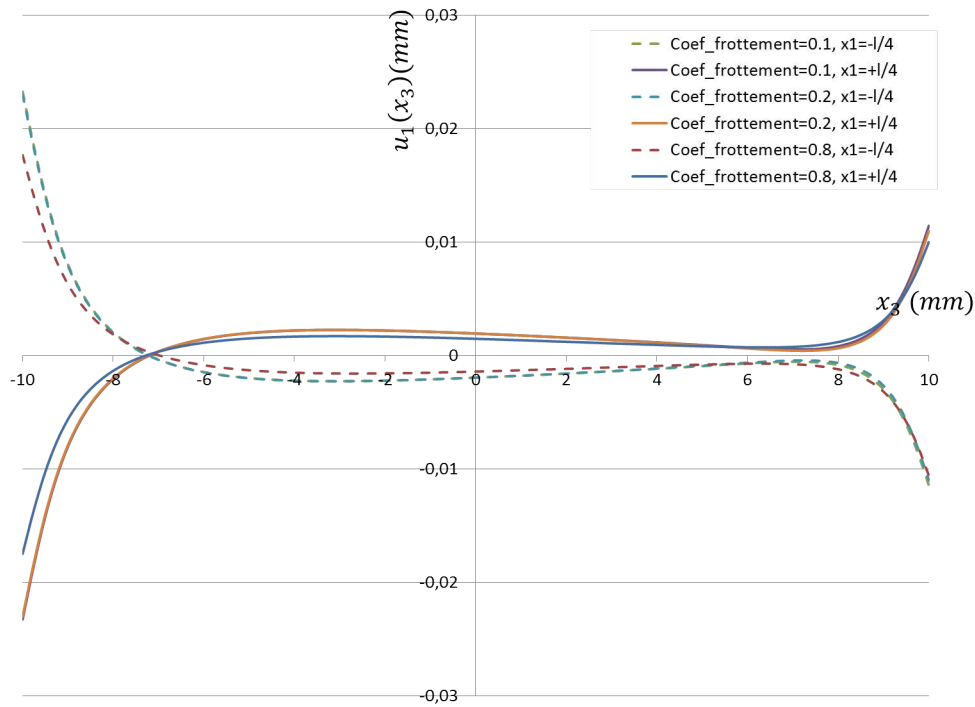


FIGURE 3.5.5: Sensibilité du déplacement  $u_1(x_3)$  aux coefficients de frottement pour la modélisation des contacts avec glissement aux appuis

D'après la figure 3.5.5, on peut considérer que la valeur du coefficient de frottement entre l'échantillon en carbone/epoxy et les appuis du montage en aluminium n'a pas une influence très significative sur les profils de gauchissement observés dans ce cas d'étude, en  $x_1 = -\frac{l}{4}$  et  $x_1 = +\frac{l}{4}$ . La valeur des écarts  $E_s$  calculés entre les résultats avec un coefficient de frottement d'une part égal à 0,1 et d'autre part égal à 0,8 sont respectivement de 0,07 et de 0,54. Ces valeurs sont faibles en comparaison des valeurs de déplacement obtenues. Ce résultat s'explique par les parfaites symétries du modèle

du point de vue du chargement et des conditions aux limites, qui n'entraînent pas de perturbations pouvant engendrer un glissement significatif aux appuis. Néanmoins cette symétrie n'est pas parfaitement cohérente avec le cas réel, c'est pourquoi la dissymétrie du modèle sera également évaluée dans les paragraphes suivants. Pour la suite des travaux, la modélisation retenue conserve la prise en compte du contact glissant aux appuis du montage avec un coefficient de frottement égal à 0,2 de manière à ne pas contraindre le modèle en vue de l'interprétation des résultats expérimentaux.

## 3.6 Sensibilité de l'application du chargement de flexion

Cette partie présente une étude de sensibilité des résultats vis-à-vis de l'application du chargement de flexion, modélisée par l'intermédiaire d'une force ponctuelle  $F_3$ . Deux aspects sont traités :

- un défaut de positionnement du point d'application du chargement, pouvant être décalé du plan de symétrie de l'éprouvette, correspondant au plan médian des deux appuis inférieurs
- un défaut de l'orientation du chargement de flexion, pouvant être différente de la direction  $x_3$ , normale à ligne moyenne à l'état non chargé, correspondant à l'épaisseur de l'éprouvette,

Des simulations sont donc réalisées sur un modèle représentant l'intégralité de l'éprouvette. En effet, si un défaut est introduit pour modéliser le chargement  $F_3$ , les conditions de symétrie longitudinale suivant la direction  $x_1$  ne sont plus respectées et donc la modélisation de la moitié de l'éprouvette n'est plus valable. La modélisation adoptée pour cette étude est présentée en figure 3.6.1. Le maillage utilisé est constitué ici de 4000 éléments CPS8. Le matériau utilisé dans le modèle est identique à celui présenté dans la partie 3.3, de même que le chargement conservé à  $F_3 = 6000\text{N}$ .

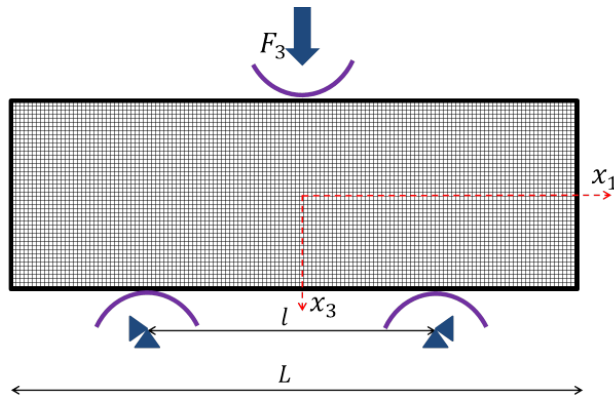


FIGURE 3.6.1: Modélisation éléments finis 2D de l'éprouvette complète en flexion trois points

### 3.6.1 Position du point d'application du chargement

Pour prendre en compte l'influence des variations de position du chargement  $F_3$  des simulations sont réalisées en appliquant un décalage de la coordonnée  $x_1$  du point de chargement. Ce décalage représente un défaut d'alignement de l'appui supérieur avec le plan de symétrie suivant  $x_1$ , comme représenté sur la figure 3.6.2.

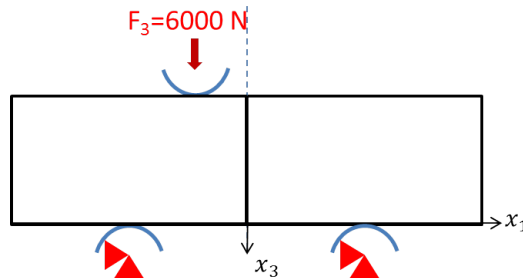


FIGURE 3.6.2: Schématisation du défaut de position du chargement  $F_3$  suivant  $x_1$

Les paramètres appliqués pour la variation de la position du point d'application du chargement ainsi que les écarts déterminés sont présentés dans le tableau 3.6. Le premier cas est la référence où la position théorique du point de chargement est respectée. Le défaut maximum correspond à un scénario très pessimiste où le chargement de flexion est localisé à mi distance entre le plan de symétrie de l'éprouvette et l'appui inférieur.

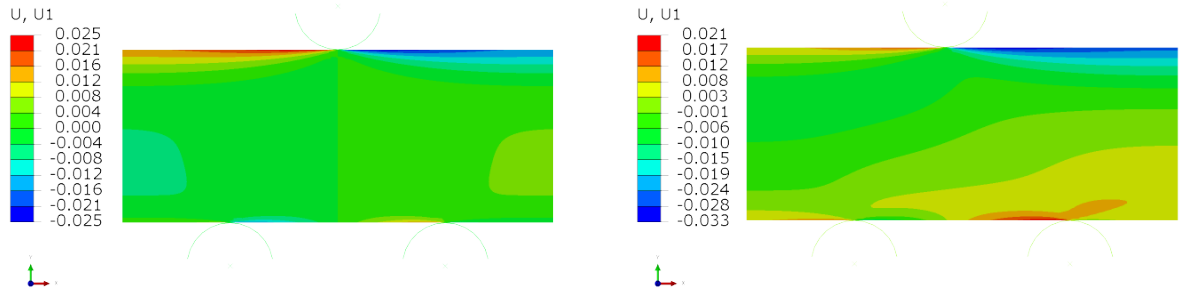


FIGURE 3.6.3: Cartographie des déplacements  $u_1(x_3)$ , respectivement avec défaut (droite) et sans défaut (gauche) de position du chargement de flexion

Cas	Coordonnée $x_1$ pour l'application de $F_3$	Écart $E_s$
1	$x_1 = 0\text{mm}$	Référence
2	$x_1 = -2\text{mm}$	2,76
3	$x_1 = -5\text{mm}$	7,59

Tableau 3.6: Variations de la position du point d'application de  $F_3$  utilisées

Les résultats des simulations issues des différentes positions d'application du chargement de flexion sont présentés sur la figure 3.6.3, où figurent les courbes  $u_1(x_1 = \frac{l}{4}, x_3)$  et  $u_1(x_1 = -\frac{l}{4}, x_3)$  pour chaque cas de défaut. Il apparaît clairement que ceux-ci ont une influence significative sur le résultat qui se traduit par une perturbation des valeurs de déplacement longitudinal. On observe une évolution linéaire de cette perturbation en fonction du décalage du point de chargement, entraînant une rotation du profil de déplacement autour de la valeur médiane, en  $x_3 = 0$ . D'autre part, on observe que les valeurs des déplacements calculés sont très supérieures aux valeurs de référence dans le cas où le défaut est le plus important, près du point de chargement. Les valeurs écarts  $E_s$  inscrites dans le tableau 3.6 confirment les remarques précédentes et permettent de justifier que la position du point d'application peut affecter les résultats recherchés.

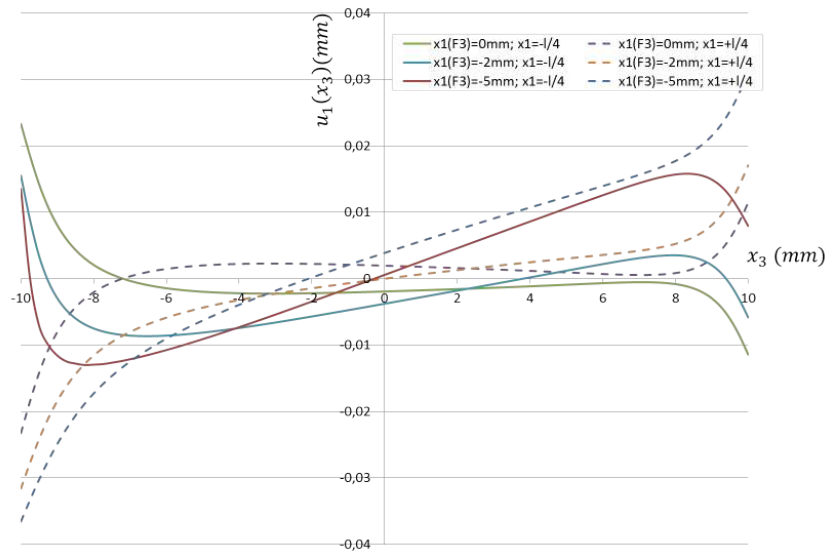


FIGURE 3.6.4: Sensibilité du déplacement  $u_1(x_3)$  aux défauts de position du chargement  $F_3$  suivant  $x_1$

### 3.6.2 Direction d'application du chargement $F_3$

Une autre source de défaut qui peut être observée durant les essais est la direction d'application du chargement. En effet, dans le cas théorique comme pour la résolution analytique, on considère que le chargement de flexion est appliqué suivant une direction parfaitement perpendiculaire à la fibre moyenne de l'éprouvette, dans son état non chargé. Une analyse de l'influence de cette direction sur les profils de déplacements longitudinaux  $u_1(x_3)$  est également effectuée pour permettre son identification et sa correction dans l'analyse expérimentale. La figure 3.6.5 schématise la prise en compte de ce défaut dans le modèle numérique. La résultante de l'effort appliqué est conservée à sa valeur de  $F_3 = 6000\text{N}$ , mais les variations sur les composantes de sa direction suivant  $x_1$  et  $x_3$  engendrent une répartition différente de cet effort dans la structure qui doit être analysée.

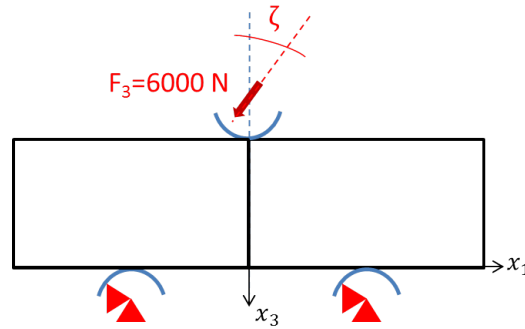


FIGURE 3.6.5: Schématisation du défaut de direction du chargement  $F_3$  suivant  $x_1$

Les différentes directions de chargement de flexion étudiées ainsi que les écarts  $E_s$  sont présentés dans le Tableau 3.7.

Cas	Composantes $(x_1; x_3)$ de $F_3$	Angle $\zeta$	Écart $E_s$
1	$(0; 1)$	$0^\circ$	Référence
2	$(-0,08; -0,99)$	$5^\circ$	45,32
3	$(-0,25; -0,97)$	$15^\circ$	94,10

Tableau 3.7: Variations de la direction du point d'application de  $F_3$  utilisées

Comme pour l'analyse de l'influence de la position de l'application du chargement, la figure 3.6.7 permet de visualiser les déplacements issus des calculs des différents cas de défaut d'orientation de la charge  $F_3$ . Les courbes montrent que l'influence de ce défaut est logiquement très importante dans la zone proche de l'application de la charge ( $x_3 = 0$ ), et moindre pour les déplacements proches des appuis inférieurs du montage d'essai. Néanmoins, l'ordre de grandeur des déplacements est plus important pour les défauts d'orientation comparé aux défauts de position. Pour les cas traités, on observe un coefficient proche de 10 sur les valeurs en  $x_3 = 0$ . Le respect de l'orientation de la charge semble donc être prépondérant sur sa position. Cette analyse est confirmée par les importantes valeurs d'écarts observées. Celles-ci sont nettement supérieures à celles des défauts précédemment étudiés, ce qui traduit la grande influence de ce paramètre sur les valeurs du champ  $u_1$ .

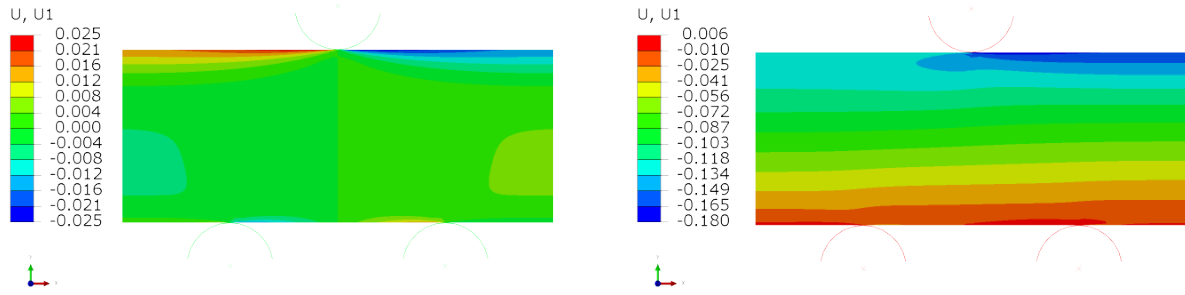


FIGURE 3.6.6: Cartographie des déplacements  $u_1(x_3)$ , respectivement avec défauts (droite) et sans défauts (gauche) d'orientation du chargement de flexion

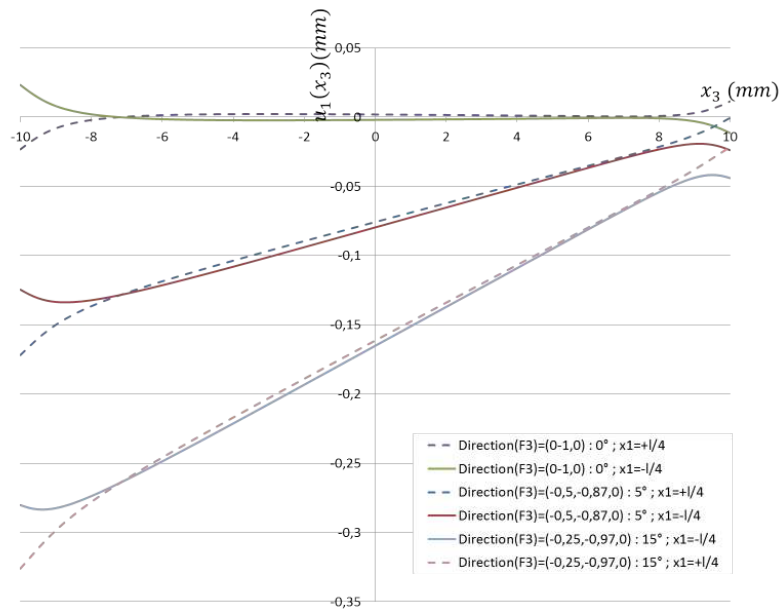


FIGURE 3.6.7: Sensibilité du déplacement  $u_1(x_3)$  aux défauts de direction du chargement  $F_3$  suivant  $x_1$

### 3.7 Conclusions

Ce chapitre a permis de définir et de construire la modélisation numérique qui sera utilisée pour la détermination des déplacements  $u_1(x_3)$ , pour différents cas de chargement et pour les différents matériaux étudiés dans cette étude. A partir de la connaissance



du comportement mécanique d'un pli composite unidirectionnel, une méthode de caractérisation est utilisée pour permettre la détermination des propriétés mécaniques des matériaux, indispensables à la réalisation des simulations numériques. Ainsi une série d'essais de traction longitudinale et une série d'essais de cisaillement Iosipescu sont réalisées pour les deux matériaux de cette étude, de manière à déterminer les grandeurs  $E_{11}$  et  $G_{13}$ . Ces tests sont effectués pour les matériaux avec et sans insertion de marqueurs métalliques pour permettre d'identifier l'influence des particules métalliques sur le comportement mécanique du pli, qui sont nécessaires pour l'utilisation de la corrélation volumique associée à la tomographie à rayons X. Les très faibles écarts de valeurs obtenus pour les modules d'élasticité  $E_{11}$  et de cisaillement  $G_{13}$  permettent de confirmer que cette méthode est cohérente pour l'investigation des matériaux composites sans perturbation du comportement pour de petites déformations dans le domaine élastique.

Afin d'anticiper l'analyse des essais expérimentaux et leur interprétation, une étude de sensibilité du modèle numérique proposé est effectuée pour différents aspects, tel que l'application des conditions aux limites, la prise en compte du frottement ou les défauts de chargement. Les conclusions qui peuvent être faites sont multiples. En effet, il apparaît nécessaire de prendre en compte les parties hors appuis de l'éprouvette pour ne pas négliger leur participation dans le calcul du champ de déplacement  $u_1$ , tout comme la modélisation des surfaces de contact du montage de flexion trois points. Aussi, les simulations effectuées montrent la forte dépendance des résultats vis-à-vis de la qualité de l'application du chargement associé à la prise en compte du montage de flexion trois points. Ces évolutions de la modélisation initiale permettent d'être plus proche des conditions expérimentales, mais peuvent ne pas être cohérentes avec les hypothèses dans lesquelles la résolution analytique du problème est effectuée. Ainsi il semble important de conserver les résultats des deux modélisations afin de confronter les données analytiques aux mesures expérimentales. La pertinence des résultats numériques fournis est analysée dans le chapitre 5 dans le but de justifier la modélisation adoptée et d'en déterminer les limites. Les résultats des simulations numériques effectuées sont très utiles pour appréhender le développement de la méthode expérimentale qui est développée pour la visualisation des effets du cisaillement transverse, entre autre pour la conception et le

dimensionnement du système de chargement des éprouvettes.

Le chapitre suivant aborde la troisième et dernière source de résultats qui sera étudiée dans ce travail, la méthode de mesure volumique. En effet, le protocole et les développements effectués sont exposés en détail pour répondre aux différentes problématiques de cette étude dans le cadre d'un essai de flexion trois points in situ.

# Chapitre 4

## Approche expérimentale pour l'étude du cisaillement transverse

4.1	Problématiques . . . . .	91
4.2	Protocole . . . . .	92
4.3	Éprouvettes . . . . .	94
4.3.1	Géométrie . . . . .	95
4.3.2	Matériaux . . . . .	96
4.3.3	Marqueurs . . . . .	97
4.3.4	Réalisation . . . . .	98
4.4	Machine d'essai . . . . .	100
4.4.1	Solution technique . . . . .	101
4.4.2	Dimensionnement . . . . .	102
4.5	Suivi des essais et pilotage . . . . .	104
4.5.1	Application de la charge . . . . .	104
4.5.2	Instrumentation . . . . .	105
4.6	La tomographie par rayons X . . . . .	107
4.6.1	Principe physique . . . . .	107
4.6.2	Matériel de mesure . . . . .	109
4.6.3	Reconstruction des images volumiques . . . . .	111
4.6.4	Bruits de mesure et artéfacts . . . . .	115
4.6.5	Traitement des images . . . . .	116
4.7	La corrélation d'images volumiques . . . . .	119
4.7.1	Principe général et discrétisation des volumes . . . . .	119

<b>4.7.2</b>	<b>Corrélation volumique</b>	122
<b>4.7.3</b>	<b>Précision sub-voxel</b>	123
<b>4.7.4</b>	<b>Calcul des champs de déplacements et de déformations</b>	126
<b>4.8</b>	<b>Conclusions</b>	127

Un des principaux objectifs de ce travail étant l'observation expérimentale des effets du cisaillement transverse dans les structures composites, une expérimentation spécifique est proposée dans ce chapitre. L'analyse des différentes problématiques liées aux matériaux ainsi qu'aux techniques de mesure retenues permet la définition du cahier des charges. Un système de chargement in situ ainsi qu'un montage d'essai sont développés pour permettre la réalisation de l'essai de flexion trois points dans la chambre d'un  $\mu$ -tomographe à rayons X. Le protocole de test proposé permet l'acquisition des différents états de déformation nécessaires aux calculs de corrélation volumique qui nous permettent d'accéder aux valeurs de déplacement, et donc au gauchissement dans la structure (Brault *et al.*, 2013).

## 4.1 Problématiques

L'analyse du phénomène de gauchissement des sections dans les matériaux composites est abordée par la voie expérimentale dans le but de faire la mesure de données dans le volume des structures. La tomographie par rayons X ainsi que la corrélation volumique sont alors utilisées pour permettre l'acquisition des déplacements dans l'ensemble de la structure pour étudier le gauchissement. Ce chapitre détaille le développement de la méthode d'essai proposée pour ces analyses.

Le principal objectif de la méthode d'essai proposée est de permettre l'acquisition de données cinématiques (déplacements 3D) pour une éprouvette sollicitée en flexion trois points. La particularité de cet essai est l'environnement du  $\mu$ -tomographe à rayons X dans lequel les tests, et donc les mesures, doivent être effectués.

D'après ce qui a été exposé aux chapitres précédents, différents types de problématiques sont à traiter pour développer la méthode d'essai permettant la visualisation du gauchissement. Celles-ci peuvent être décomposées en deux catégories :

1. Problématiques liées au gauchissement de l'éprouvette :
  - choix du matériau de l'éprouvette
  - géométrie de l'éprouvette

2. Problématiques liées à la méthode de mesure :

- conception du système de chargement
- instrumentation de l'essai
- insertion de marqueurs de contraste pour la corrélation d'images

Les paragraphes suivants détaillent le traitement de ces problématiques dans le but d'obtenir une méthode d'essai fiable.

## 4.2 Protocole

Un protocole de test est proposé pour décomposer les différentes étapes de l'essai, à partir de la mise en place de l'éprouvette et jusqu'à l'obtention des résultats issus de la corrélation volumique. Celui-ci est présenté en figure 4.2.1.

Cinq phases de travail peuvent être identifiées dans la réalisation de ces essais :

- a) La première concerne le montage de l'ensemble des composants nécessaires au chargement et à la mesure. Cet ensemble est installé à l'intérieur du  $\mu$ -tomographe à rayons X.
- b) La seconde phase est l'initialisation de toutes les données enregistrées et analysées. Cela concerne donc les capteurs de charge et de déplacement propre au montage. Le suivi de l'essai se fait de manière relative à cette initialisation jusqu'au démontage de l'éprouvette en fin d'essai.
- c) La troisième phase est la partie la plus importante du test : l'acquisition par tomographie du volume étudié. A un pas de charge donné, une acquisition est lancée via le  $\mu$ -tomographe, de manière à récupérer les informations volumiques propres à l'état de la structure à l'instant  $t$ . Une série de radiographies est enregistrée à différentes positions angulaires de l'ensemble [Montage+Éprouvette] sur  $360^\circ$ . Elle permet d'avoir accès aux informations dans l'intégralité du volume enregistré en limitant la présence de bruit de mesure et en assurant une bonne précision. Comme le montre la figure 4.2.1, une acquisition tomographique est réalisée pour un état de déformation constant de la structure. Si  $X$  représente un

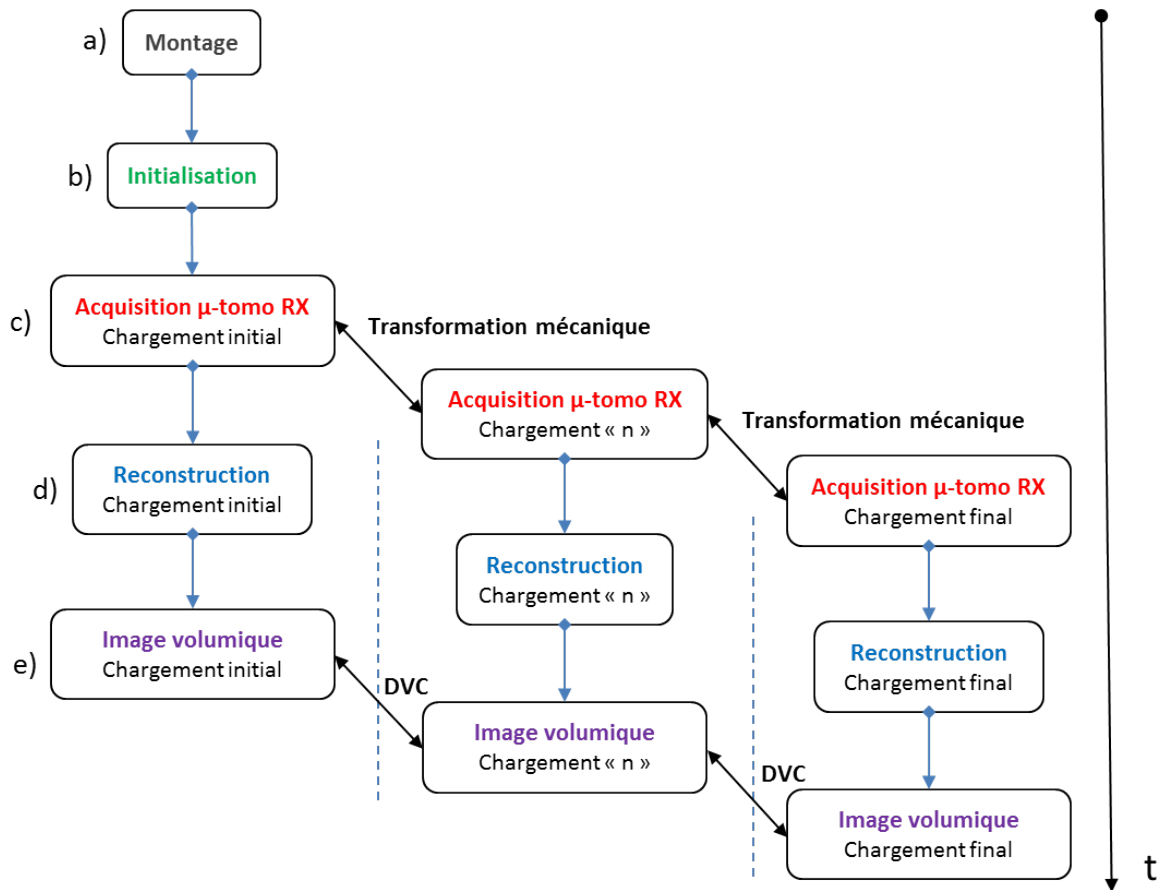


FIGURE 4.2.1: Protocole de l'essai de flexion trois points in situ

- état de charge de la structure, une transformation mécanique  $\mathcal{O}(X)$  est appliquée entre chaque état mesuré.
- d) Suite à l'acquisition des radiographies, une phase de reconstruction est effectuée pour transformer les informations et reconstruire le volume tomographique dans lequel seront extraites les coupes utilisées pour les calculs par corrélation volumique. Des mesures complémentaires de traitement du bruit et de calibrage, nécessaires à la détermination des paramètres géométriques de l'acquisition utilisés pour la reconstruction, sont réalisées durant le test. Cette reconstruction est faite en accord avec les principes mathématiques, implémentés dans le logiciel commercial DigiXCT 3.0.3, dédié à cette activité.
  - e) La cinquième et dernière phase consiste à calculer le champ de déplacement dans le volume par la méthode de corrélation volumique. L'algorithme utilisé dans ces travaux est celui implémenté dans le logiciel *CorrelVol* de l'Institut Pprime<sup>1</sup>. Chaque état de charge est donc traité par corrélation volumique, pour déterminer les valeurs de déplacement par rapport à l'état initial.

## 4.3 Éprouvettes

La définition des éprouvettes est très importante pour la réussite des essais. En effet, en fonction de la géométrie et des propriétés mécaniques de celles-ci, l'amplitude du phénomène de gauchissement est plus ou moins grande. Ainsi, pour observer le phénomène, le choix des dimensions géométriques et du matériau est effectué de manière à obtenir un gauchissement maximum durant l'essai de flexion. Le gauchissement est caractérisé par le terme  $S_{ct}$  détaillé dans l'expression 2.2.1 du paragraphe 2.2. Cette expression associe les propriétés mécaniques et géométriques de la structure étudiée au phénomène de gauchissement. Ainsi plus les rapports  $\frac{E_{11}}{G_{13}}$  et  $\frac{h}{l}$  sont grands, plus les contraintes de cisaillement transverses sont grandes et plus le gauchissement sera important.

---

1. <http://www.pprime.fr/?q=fr/recherche-scientifique/d3/photomecanique>



$L(\text{mm})$	$l(\text{mm})$	$h(\text{mm})$	$\frac{h}{l}$
10	5	5	1
50	25	20	0,8
60	30	20	0,7
100	50	30	0,6
80	40	20	0,5
100	50	20	0,4
40	20	5	0,3

Tableau 4.1: Configurations géométriques des éprouvettes

### 4.3.1 Géométrie

En accord avec la définition du terme  $S_{ct}$ , une étude des différentes possibilités de géométrie de l'éprouvette à utiliser pour l'essai de flexion a été effectuée. En effet, le choix de la longueur de l'éprouvette et de son épaisseur doit être fait pour permettre aux conditions d'essai de maximiser l'amplitude du cisaillement transverse. Néanmoins, ces dimensions doivent également correspondre aux contraintes liées à la capacité limite de chargement disponible, égale à 6kN, d'encombrement de l'environnement du test et également de la valeur de résolution de la mesure qu'il sera possible d'atteindre.

Comme l'indique le tableau 4.1, un choix pertinent pour le design des éprouvettes correspond à une longueur totale de 50mm et une hauteur de 20mm. Le rapport  $\frac{h}{l}$  correspondant est égal à 0,8, ce qui favorise la présence de gauchissement. Des simulations numériques ont permis d'anticiper sur la valeur de chargement nécessaire à l'utilisation de cette géométrie ( $\leq 6\text{kN}$ ), en correspondance avec le vérin retenu. La distance entre appuis qui sera alors utilisée sera de 25mm, ce qui devra permettre une amplitude intéressante du gauchissement des sections par la sollicitation de cisaillement engendrée dans le plan (1, 3). La figure 4.3.1 illustre les dimensions retenues pour la conception des éprouvettes.

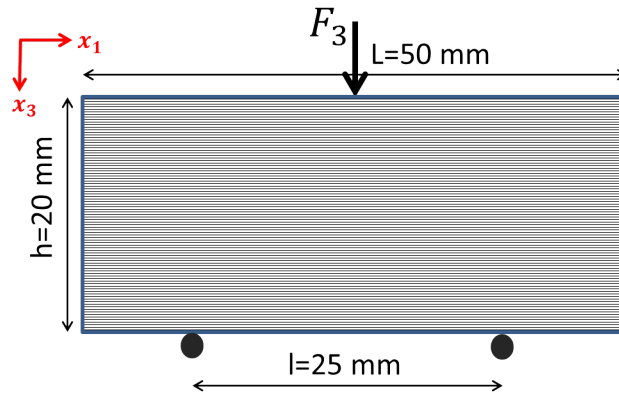


FIGURE 4.3.1: Dimensions des éprouvettes composites

### 4.3.2 Matériaux

Le choix du matériau a également un rôle fort dans la réussite de la visualisation du gauchissement des sections composites. La définition du facteur de cisaillement transverse indique que l'augmentation du rapport  $\frac{E_{11}}{G_{13}}$  implique l'augmentation de manière linéaire de la valeur du facteur  $S_{ct}$  (expression 2.2.1). Ainsi, l'influence du choix de la fibre et de l'armature des renforts utilisés pour la fabrication des éprouvettes est très significative. Le tableau 4.2 présente les propriétés matériaux de plusieurs renforts envisagés pour l'étude.

En observant les valeurs  $\frac{E_{11}}{G_{13}}$ , on s'aperçoit, d'une part, que pour toutes natures de fibres, les armatures unidirectionnelles (UD) ainsi qu'un drapage à  $0^\circ$  doivent être privilégiés pour observer le gauchissement. D'autre part, les fibres de carbone sont naturellement rigides et anisotropes, contrairement aux autres fibres, ce qui peut être identifié dans le tableau 4.2 en observant la position des valeurs issues des orientations  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . Ces fibres sont intéressantes pour favoriser l'amplitude des contraintes de cisaillement transverse. Ce tableau permet également de justifier que les fibres de verre, aramide et les fibres naturelles (lin ou chanvre) présentées ne possèdent pas les propriétés mécaniques suffisantes pour cette étude. Ainsi, la valeur du rapport  $\frac{E_{11}}{G_{13}} \geq 40$  apparaît comme un critère cohérent avec la visualisation du gauchissement des sections.

D'après cette analyse, deux couples de fibres/résines ont été utilisés pour ces tra-

Fibre	Résine	Armature	Orientation	$E_{11}$ (GPa)	$G_{13}$ (GPa)	$\frac{E_{11}}{G_{13}}$
Carbone (M55J)	Epoxy	UD	0°	340	1,2	283,3
Carbone (K637)	Epoxy	UD	0°	302	1,2	251,7
Carbone (T700)	Epoxy	UD	0°	140	3,5	40
Aramide	Epoxy	UD	0°	70	2,1	33,3
Carbone	PEEK	UD	0°	147,5	5,5	26,8
Carbone	Epoxy	Tissu	0°	62	3,5	17,7
Verre S	Epoxy	UD	0°	47,6	4,7	10,1
Verre E	Epoxy	UD	0°	25,4	3,7	6,9
Verre	Epoxy	Tissu	0°	26,4	4,4	6,0
Chanvre	Epoxy	UD	0°	35	8	4,4
Lin	Epoxy	Mat	/	6	1,5	4,0
Chanvre	Epoxy	Mat	/	5,7	1,5	3,8
Verre	PP	UD	90°	9,5	3,5	2,7
Verre	Epoxy	UD	90°	12,7	4,7	2,7
Carbone	Epoxy	UD	90°	8,5	3,8	2,2
Carbone	PEEK	UD	90°	8,8	5,5	1,6

Tableau 4.2: Propriétés mécaniques des renforts composites

vaut :

- Fibre T700 et résine epoxy 4090,  $\frac{E_{11}}{G_{13}} = 40$  (carbone HR)
- Fibre M55J et résine epoxy M18,  $\frac{E_{11}}{G_{13}} = 283,3$  (carbone THM)

### 4.3.3 Marqueurs

La corrélation volumique a besoin d'images contenant une distribution 3D aléatoire de niveaux de gris. Cette distribution est liée au contraste qui, en tomographie par rayons X, sera créé par les variations locales de densité dans l'échantillon observé. L'utilisation des méthodes volumiques de tomographie par rayons X et de corrélation volumique, dans les matériaux présentant une densité homogène aux rayons X, entraîne l'utilisation de marqueurs à intégrer dans la structure de manière à créer des variations volumiques de densité. En effet, ceux-ci sont indispensables pour créer du contraste dans les images issues de la  $\mu$ -tomographie. La visualisation des marqueurs dans la structure permet de construire un motif volumique proche du mouchetis, habituellement utilisé pour l'exploitation des images liées à la corrélation ou à la stéréo-corrélation d'images

numériques (Bornert *et al.*, 2009).

L'intégration de marqueurs de densité a déjà été étudiée dans des études de mécanique expérimentale utilisant les méthodes volumiques (Germaneau, 2007). Ces travaux ont permis de définir le type et la taille des particules métalliques à utiliser pour cette étude. Ainsi, les marqueurs utilisés pour la réalisation des éprouvettes sont des particules de cuivre, dont la taille est calibrée à 150 $\mu\text{m}$ . Celles-ci sont réparties aléatoirement entre les plis de carbone lors de l'élaboration du matériau de manière à construire le mouchetis volumique de la structure étudiée. Néanmoins, leur répartition dans l'épaisseur se fait en cohérence avec la résolution spatiale de mesure, égale à 52 $\mu\text{m}$  dans notre étude du fait de la taille des éprouvettes et avec la taille du domaine de corrélation choisi qui est de 31voxels<sup>3</sup>. Celui-ci correspond à la zone géométrique discrétisée de l'échantillon dans lequel la corrélation de chaque point mesuré est réalisée. Cette taille de domaine est justifiée par des études antérieures, utilisant le même type de marqueurs métalliques (Germaneau *et al.*, 2007). En tenant compte de l'épaisseur des plis (0,1mm), de la méthode de drapage des éprouvettes et de l'insertion des particules entre chaque pli, on est donc sûr d'avoir au moins trois particules dans chaque domaine de corrélation. L'étude des propriétés mécaniques des matériaux avec insertion des marqueurs présentée au paragraphe 3.2, a permis de démontrer le fait que les particules ont une influence négligeable sur le comportement mécanique global du matériau étudié et permet de justifier leur utilisation pour cette méthode de test, pour un faible pourcentage massique de marqueurs, inférieur à 2%.

### 4.3.4 Réalisation

La fabrication des éprouvettes est réalisée en utilisant un procédé de fabrication pré-imprégné bien connu dans l'industrie composite (Gay, 2005). La matière première se présente sous la forme de nappes de fibres pré-imprégnées de résine à l'état péguéux qui lui permet d'adhérer aux renforts tout en conservant des propriétés intéressantes pour la mise en forme et la liaison aux autres plis.

Le procédé de fabrication consiste à superposer les différents plis de la structure

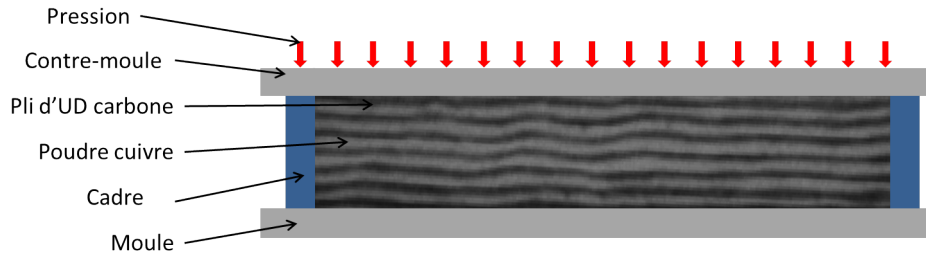


FIGURE 4.3.2: Réalisation des éprouvettes composites par le procédé pré-imprégné

Paramètres	T700/4090	M55J/M18
Température de polymérisation	150°C	180°C
Temps de polymérisation	90min	120min
Vitesse de montée en température	3°C/min	2°C/min
Pression de compactage	7bars	7bars
Niveau de vide	0,9bar	0,9bar
Nombre de plis	10	40
Plis avec insertion de particules	1/1	1/4

Tableau 4.3: Conditions de fabrication des éprouvettes composites

composite afin d'obtenir l'épaisseur souhaitée. Dans le cadre de ces travaux, il est proposé d'insérer entre les plis de la poudre de cuivre, comme explicité dans le paragraphe 4.3.3, pour rendre ces éprouvettes compatibles avec les moyens de mesure.

Le drapage des plis est effectué sur une plaque d'aluminium constituant le moule de fabrication. Un cadre rigide est utilisé autour du stratifié pour calibrer l'épaisseur de la plaque durant la polymérisation de la résine, réalisée à l'aide d'une presse chauffante mise à disposition par l'entreprise Nimitech Études. Les éprouvettes sont détournées par usinage mécanique dans une plaque de composite carbone/epoxy fabriquée par le procédé décrit ci-dessus.

La figure 4.3.2 décrit le procédé de réalisation des plaques composites.

Les conditions de polymérisation des plaques composites réalisées avec les deux matériaux sélectionnés sont détaillées dans le tableau 4.3.

Le choix du procédé pré-imprégné est justifié par sa facilité de mise en œuvre, notamment pour l'insertion des particules de cuivre. L'utilisation de procédés plus manuels comme le moulage au contact est également envisageable pour réaliser ces éprouvettes.



FIGURE 4.3.3: Réalisation d'une plaque de carbone/epoxy avec particules de cuivre par le procédé pré-imprégné

Néanmoins, la qualité des plaques obtenues est habituellement moins bonne en termes de taux de fibre et de taux de porosité. Aussi, la répétabilité liée à ce procédé n'est pas suffisante pour effectuer une analyse approfondie de la structure étudiée.

D'autre part, des procédés plus performants que le pré-imprégné, par la voie liquide tels que le procédé LRI (Liquid Resin Infusion) ou RTM (Resin Transfer Molding) sont également intéressants pour obtenir des composites de grande qualité. En revanche, l'utilisation de particules dans la fabrication est peu compatible avec ces méthodes d'obtention. Cela est lié à l'augmentation significative de la viscosité de la résine à injecter en présence de charges (marqueurs métalliques), ayant pour conséquences un paramétrage plus compliqué à déterminer pour obtenir de bonnes performances ainsi que l'augmentation du coût de fabrication engendré par la complexité des outillages et les produits d'environnement à mettre en œuvre. La figure 4.3.3 illustre la fabrication des plaques dans lesquelles sont prélevées les éprouvettes.

## 4.4 Machine d'essai

Le dispositif de chargement est un point important du développement de la méthode expérimentale. Le choix de la technologie et de sa capacité permettront de définir

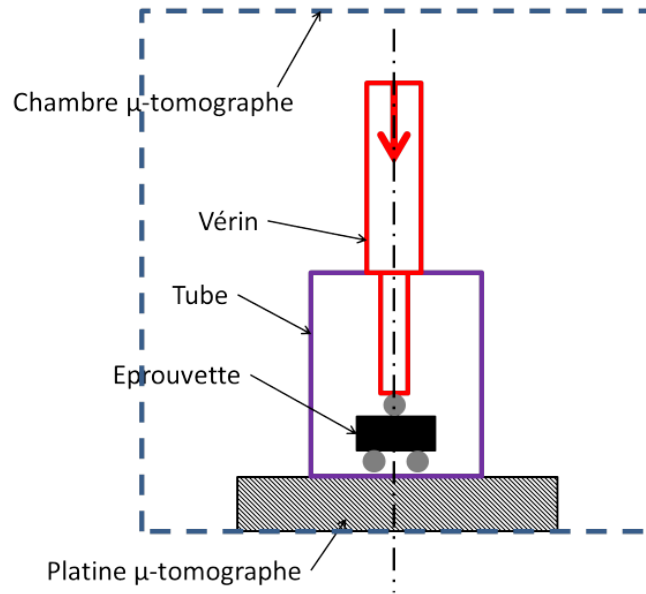


FIGURE 4.4.1: Schéma de principe du système de chargement

les valeurs extrêmes des essais réalisés, en chargement et en déplacement de flexion. La conception du dispositif de chargement doit également tenir compte des contraintes liées à son implantation dans la chambre du  $\mu$ -tomographe dans lequel tous les tests seront effectués. Le volume utilisable dans la chambre du  $\mu$ -tomographe est de  $1000 \times 1000 \times 800 \text{ mm}^3$  avec un poids maximum de 13kg sur sa platine tournante. Une recherche de vérins pouvant être mis en œuvre pour le chargement induit une charge limite de 6kN du fait du poids des équipements.

#### 4.4.1 Solution technique

La figure 4.4.1 présente le principe proposé pour le système de chargement.

Le principe technologique retenu pour la conception de cet équipement est le suivant : l'éprouvette ainsi que les appuis utilisés pour la flexion trois points sont intégrés à l'intérieur d'une structure tubulaire. La forme tubulaire est choisie pour bénéficier d'une atténuation constante du faisceau rayons X, quel que soit l'angle de rotation de la platine du tomographe. Cette structure tubulaire assure trois fonctions essentielles : réaliser l'interface de l'ensemble avec la platine du  $\mu$ -tomographe de manière démontable, sup-

porter le vérin de chargement, et reprendre les efforts de réaction durant le chargement de l'éprouvette. La partie tubulaire de l'assemblage doit permettre une transmission parfaite des rayons X à travers la structure composite ce qui impose le choix d'un matériau radio-transparent pour sa constitution afin ne pas générer du bruit de mesure et une atténuation parasite de l'intensité des rayons X traversant l'éprouvette. Dans ce sens, le tube sera constitué de deux parties en acier aux extrémités pour résister aux différents efforts tandis que la partie centrale, autour de l'éprouvette est réalisée en PMMA, matériau peu rigide mais avec des propriétés intéressantes vis-à-vis de l'utilisation des rayons X.

L'assemblage des parties acier et PMMA est réalisé par collage, en utilisant un adhésif epoxy ayant une forte résistance au cisaillement.

Le chargement est réalisé par l'intermédiaire d'un vérin électrique fixé sur la partie supérieure du tube, dont la tige vient au contact de l'éprouvette.

La distance entre appuis du montage de flexion correspond donc à celle prescrite dans le tableau 4.1. Le diamètre des rouleaux est fixé à 10mm pour les trois appuis de flexion. L'objectif de l'essai est également de pouvoir analyser l'évolution du gauchissement dans l'éprouvette en fonction de la charge de flexion appliquée par le vérin.

Le conception complète du montage d'essai in situ est présentée en figure 4.4.2.

## 4.4.2 Dimensionnement

Le point critique de cette conception est le juste dimensionnement du tube qui constitue le bâti de la machine d'essai. Celui-ci est soumis à plusieurs efforts :

- Le poids du vérin électrique
- Les efforts de fixation au vérin et à la platine du  $\mu$ -tomographe
- Les efforts de réaction engendrés par le chargement de flexion imposé à la structure composite

Dans le cadre de cette étude, il est considéré que les efforts de réaction sont dimensionnants pour la conception du tube. En effet, compte tenu des propriétés mécaniques utilisées pour la réalisation des éprouvettes et de l'amplitude minimum des déplacements



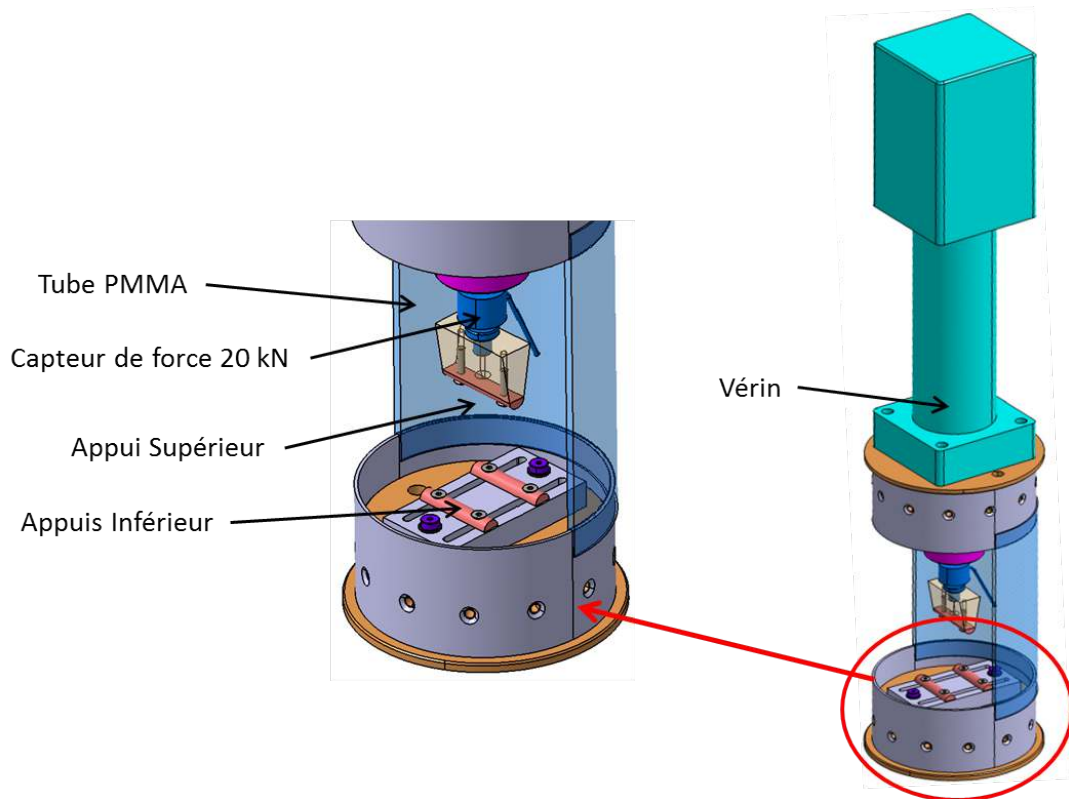


FIGURE 4.4.2: Conception du montage de chargement in situ pour la réalisation d'essai de flexion trois points

longitudinaux  $u_1(x)$  souhaitée, les modèles numériques ont permis de déterminer que les efforts de flexion à imposer sont inférieurs à 5kN. D'autre part, pour la réussite des calculs de corrélation volumique, il est souhaitable que cet assemblage se déforme le moins possible entre les différents paliers de chargement de manière à limiter d'éventuels déplacements qui seront alors engendrés durant la flexion de l'éprouvette. Le critère de contrainte maximale admissible dans la zone radio-transparente pour le dimensionnement du tube est fixé à 12MPa, d'après les propriétés mécaniques admissibles du PMMA.

Une étude par éléments finis a permis de déterminer l'épaisseur des parties en acier pour résister à un chargement de 12kN, celle-ci est égale à 2mm, tandis que celle de la zone en PMMA possède une épaisseur égale à 5mm.

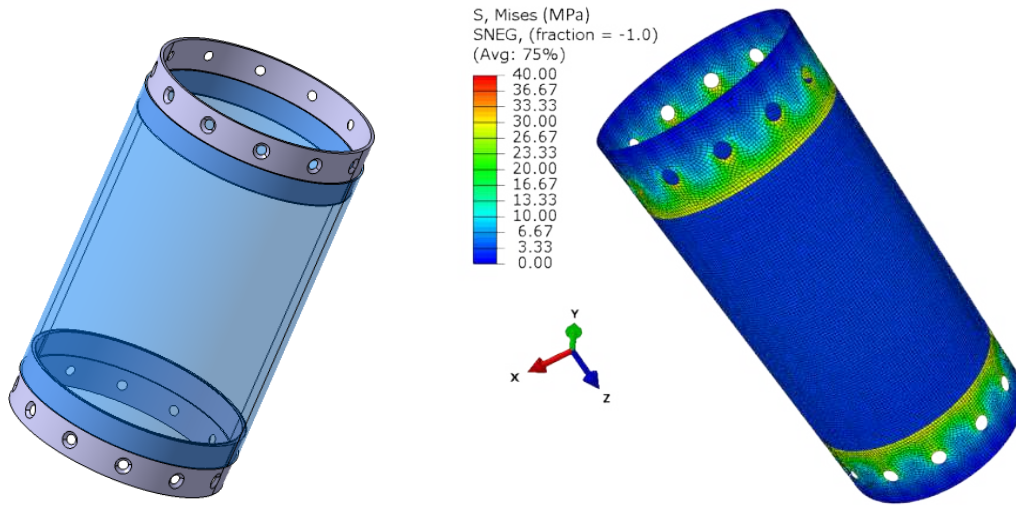


FIGURE 4.4.3: Tube acier-PMMA-acier du dispositif de chargement in situ ainsi que le résultat du dimensionnement pour un chargement de traction de 12kN

Le concept du dispositif est présenté en figure 4.4.3, accompagné du résultat de dimensionnement du tube calculé par éléments finis, pour un chargement de 12kN.

## 4.5 Suivi des essais et pilotage

Plusieurs types de grandeurs physiques sont à mesurer en temps réel pour le suivi et l'exploitation des essais de flexion trois points. Le chargement se caractérise par un incrément constant de déplacement de la tige du vérin ayant pour conséquence d'accroître la flexion imposée à l'éprouvette, et donc d'augmenter les contraintes de cisaillement transverse provoquant le gauchissement. La méthode d'essai prend en compte l'instrumentation du dispositif pour suivre ce chargement.

### 4.5.1 Application de la charge

Deux grandeurs physiques sont mesurées en continu durant les tests :

- la charge en bout de tige de vérin, correspondant à une mesure du chargement de flexion imposé à l'éprouvette,



FIGURE 4.5.1: Capteur d'effort de capacité 20kN

- le déplacement relatif de la tige du vérin, permettant d'appliquer un déplacement de flexion constant et contrôlé à chaque pas de charge

Une instrumentation spécifique à ces deux grandeurs est donc à prévoir dans le développement du montage d'essai.

## 4.5.2 Instrumentation

En ce qui concerne le déplacement de flexion, celui-ci est contrôlé et mesuré par le logiciel de pilotage du vérin électrique avec une précision de 0,01mm. Il est donc utilisé pour initialiser la position de l'appui supérieur au début du test, puis pour imposer un chargement de flexion pas à pas, entre chaque analyse tomographique de la structure composite. Celui-ci est effectué par pas de 0,3mm maximum.

La charge induite par cette flexion est enregistrée par l'intermédiaire d'un capteur d'effort à jauge de déformation fonctionnant en compression. Sa capacité nominale est de 20kN, étalonnée pour une précision de 0,5%. Ce capteur est présenté en figure 4.5.1.

Pour illustrer l'ensemble de cette étude sur le système de chargement, la figure 4.5.2 présente le dispositif complet en conditions d'essais.

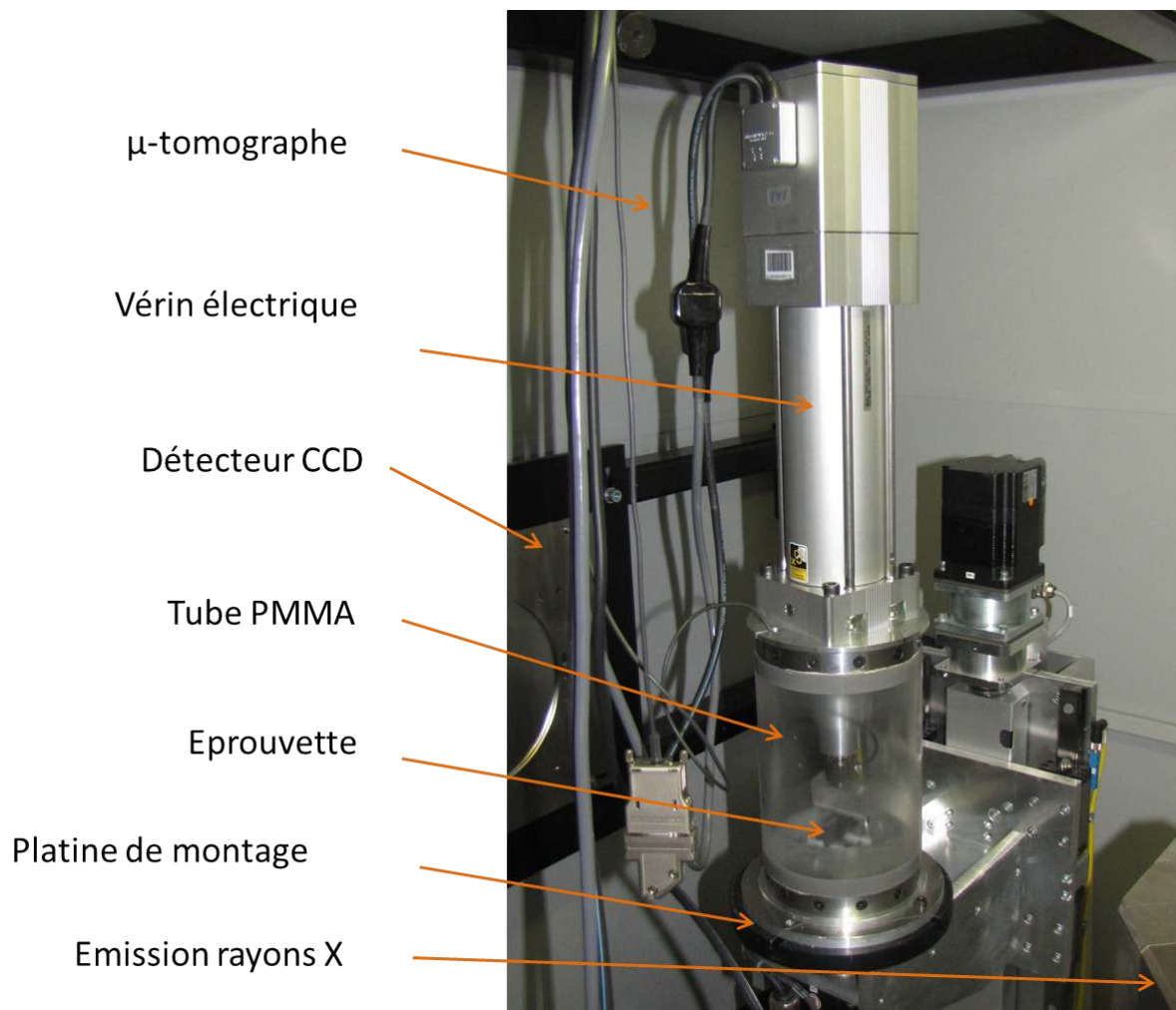


FIGURE 4.5.2: Photographie du système de chargement in situ développé pour les essais de flexion trois points

## 4.6 La tomographie par rayons X

Comme cela a été présenté au paragraphe 1.2.4 du chapitre 1, la tomographie par rayons X apparaît comme la méthode d'acquisition volumique la plus adaptée à l'analyse des déplacements internes aux structures composites. Basée sur l'absorption des rayons X, l'hétérogénéité locale permet une visualisation et une exploitation des variations de valeurs de niveaux de gris propres aux images volumiques. Les paragraphes suivants proposent une description du principe physique de la tomographie ainsi que les différentes étapes faisant suite à l'acquisition pour l'exploitation des images.

### 4.6.1 Principe physique

La tomographie par rayons X est basée sur l'émission et la réception d'un faisceau de photons X à travers un échantillon de matière, homogène ou hétérogène. L'interaction du faisceau émis avec le matériau entraîne la décomposition de l'énergie du faisceau en trois parties :

- Une partie absorbée par le matériau de l'échantillon
- Une partie dispersée autour du l'échantillon
- Une partie transmise au détecteur

C'est cette dernière partie du faisceau qui est exploitée pour réaliser une mesure tomographique. En effet, en fonction des matériaux, l'intensité du faisceau transmis au détecteur est différente, et est directement liée à la densité locale de la matière. La quantité de photons X absorbée par le matériau dépend en fait du coefficient linéique d'atténuation, intrinsèque au matériau, proportionnel à la densité  $d$  de celui-ci. Ainsi plus le matériau est dense, plus le coefficient  $\mu$  est important, plus l'intensité du faisceau transmis est faible. Un rayonnement monochromatique permet d'obtenir une cartographie quantitative du coefficient d'atténuation linéique  $\mu$  pour une énergie donnée. La mesure d'atténuation des rayons consiste à mesurer une variation d'intensité c'est-à-dire le nombre de photons émis par la source et transmis à travers l'échantillon. Dans le cas d'un matériau homogène, étudié avec un faisceau de rayons parallèles monochroma-

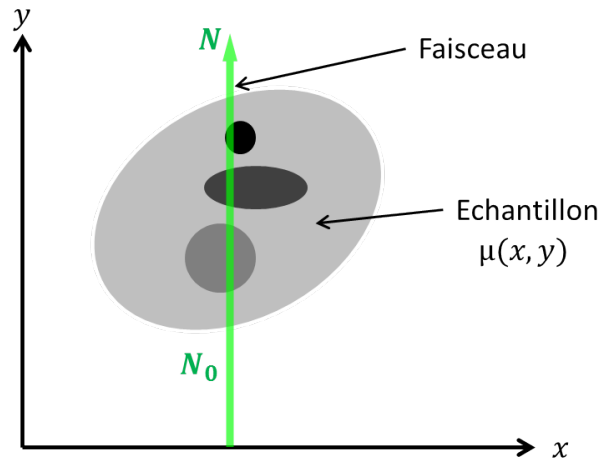


FIGURE 4.6.1: Atténuation du faisceau de rayons d'après la loi de Beer-Lambert

tiques, ce principe d'atténuation est décrit par la loi de Beer-Lambert suivante (Baruchel *et al.*, 2000; Grangeat, 2002) :

$$N = N_0 \cdot \exp \left( \int \mu(x_i, y) dy \right) \quad (4.6.1)$$

où  $N_0$  et  $N$  sont respectivement les intensités de faisceau initial et transmis.  $\mu(x_i, y)$  représente le coefficient d'atténuation local (coordonnées  $(x, y)$ ) du matériau. Dans le cas d'un matériau hétérogène, présentant des différences de densité, l'expression 4.6.1 devient alors :

$$N = N_0 \cdot \exp \left( \int \sum_{k=1}^n \mu(x_i, y) dy \right) \quad (4.6.2)$$

avec  $k$  correspondant aux différents matériaux traversés par le faisceau, traduisant une atténuation différente en fonction des différences de densité.

Ce principe physique est schématisé par la figure 4.6.1.

Dans une configuration géométrique donnée, ce principe permet alors de récupérer une cartographie 2D des densités locales enregistrées, appelée projection. Il est théori-

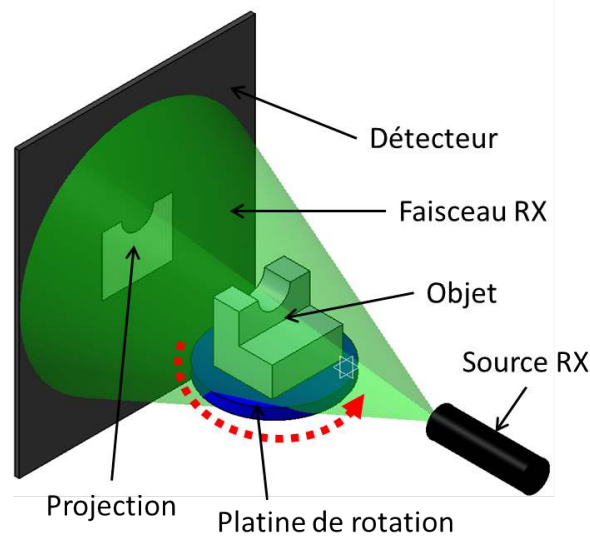


FIGURE 4.6.2: Principe de fonctionnement de la mesure par tomographie par rayons X

quement possible d'obtenir une infinité de projections, en modifiant l'angle de positionnement de l'échantillon par rapport à l'axe de transmission, caractérisé par l'alignement de la source des rayons X et du détecteur. L'ensemble des projections permet alors de reconstituer l'information densimétrique dans le volume de l'échantillon. Le principe de mesure par tomographie est illustré par la figure 4.6.2.

## 4.6.2 Matériel de mesure

Sur la base du principe de mesure détaillé dans le paragraphe précédent, différentes catégories de matériels ont vu le jour pour effectuer des mesures tomographiques. Ces équipements diffèrent de par leur conception en fonction de la nature des objets mesurés et de leur applications. Deux conceptions peuvent principalement être identifiées. La première décrite par la figure 4.6.2, où l'échantillon est positionné sur une platine tournante, toujours dans l'alignement source-détecteur. Les différentes projections nécessaires à la reconstruction sont alors obtenues par rotations successives de l'échantillon. Ce premier type de matériel se retrouve pour les applications tomographiques de laboratoire ainsi que dans l'industrie pour le contrôle non destructif de pièces ou sous-ensembles, jusqu'à

de grandes dimensions. La résolution spatiale de ces équipements peut être très intéressante, jusqu'à quelques  $\mu\text{m}$  de taille de voxel. La deuxième catégorie de tomographe consiste à conserver une position fixe de l'objet mesuré, l'axe source-détecteur est alors mis en rotation à l'intérieur d'un anneau, autour de l'échantillon pour obtenir la série de projections. Les dernières générations de tomographes médicaux utilisent une série périphérique de détecteur, à l'intérieur duquel tourne la source. Les applications liées à cette conception sont majoritairement issues du domaine médical pour les examens radiographiques sur le corps humain où les temps d'acquisition sont très courts (de quelques secondes à quelques minutes). Néanmoins, certains examens non destructifs sur des pièces industrielles sont très adaptés à cette utilisation, dans le cas de pièces élancées ou de grandes dimensions. La taille de voxel généralement constatée sur ce type d'équipement est supérieure à celle des tomographes avec platine tournante, de l'ordre de 0,05mm. Une autre catégorie de tomographe peut être citée, il s'agit de la tomographie par rayonnement synchrotron. La particularité de cette méthode est d'utiliser un faisceau de photons X créé par un rayonnement synchrotron généré à l'intérieur d'un anneau d'accélération d'électrons. Celui-ci est dévié dans une ligne de lumière dédiée à une mesure spécifique pour émettre la source de photons X permettant de réaliser des mesures par micro-tomographie. Aussi, on notera la caractéristique de forme du faisceau émis, qui est parallèle, polychromatique ou monochromatique, alors que le faisceau est conique dans le cas de l'utilisation d'un tomographe classique. Parmi les systèmes de tomographie synchrotron présents en France, on citera notamment la ligne ID19 du synchrotron de l'ESRF de Grenoble, qui a permis la réalisation de nombreuses applications de tomographie en mécanique présentes dans la littérature (Lenoir *et al.*, 2007; Bornert *et al.*, 2004; Latil *et al.*, 2011; Carmona, 2009; Youssef, 2004), ainsi que le synchrotron SOLEIL installé à Saint-Aubin (Essonne, France). L'avantage de cette technologie est la possibilité de réaliser des mesures avec une très grande performance en résolution spatiale, inférieure à 0,5 $\mu\text{m}$ /voxel (Salvo *et al.*, 2010).

Dans le cadre de cette étude, le tomographe utilisé est celui de l'Université de Poitiers. Il s'agit d'un micro-tomographe de laboratoire Viscom X8050, fonctionnant avec le principe de la platine tournante.



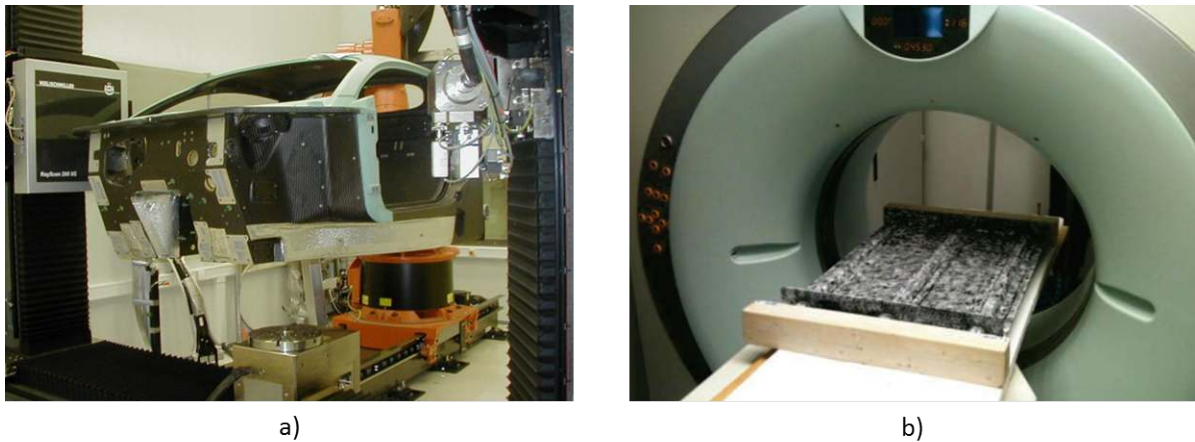


FIGURE 4.6.3: Différents types d'équipements pour la tomographie par rayons X, a) Échantillon mobile ; b) Échantillon fixe

Caractéristiques	Valeur
Tension (kV)	10 à 160
Intensité max (mA)	0 à 3
Puissance max (W)	320
Nature du filament	Tungstène
Taille de spot ( $\mu\text{m}$ )	5
Résolution spatiale max ( $\mu\text{m}$ )	2
Distance source/objet mini (mm)	4,1

Tableau 4.4: Caractéristiques du tomographe Viscom X8050 de l'Université de Poitiers

Le tableau 4.4 résume les principales caractéristiques de cet équipement.

### 4.6.3 Reconstruction des images volumiques

A partir de toutes les projections acquises, représentant une cartographie 2D de la densité dans de multiples positions, il est nécessaire de procéder à un traitement mathématique pour effectuer la reconstruction volumique de l'objet. Chaque projection est en réalité une image en niveaux de gris, dont la valeur de gris de chaque pixel dépend de l'atténuation moyenne rencontrée. Différents types d'algorithmes existent pour effectuer la reconstruction de volume à partir de données tomographiques, ils peuvent être classés en deux grandes catégories :

- la reconstruction par méthodes analytiques
- la reconstruction par méthodes algébriques

Dans le cas des méthodes analytiques, la représentation du problème est continue. Le principe de reconstruction fait appel au lien entre les transformées de Fourier de la projection et de l'image traduite par la formule d'inversion de la transformée de Radon. En considérant un point  $M(x, y)$ , défini sur la figure 4.6.4, appartenant au domaine reconstruit et à un plan de coupe (dont le coefficient d'atténuation s'écrit  $\mu(M(x, y))$ ), ainsi qu'un repère  $(O, u, v)$  définissant une direction de projection (équivalente à une direction de faisceau) par rapport au repère général  $(O, x, y)$  par un angle  $\theta$  entre les directions  $(O, x)$  et  $(O, u)$ , on peut définir  $R[\mu(\theta, u)]$  comme les intégrales issues des valeurs de projection dans la direction  $(O, v)$  le long d'une parallèle à  $(O, u)$  passant par  $M$ , qui est donc fonction de l'angle  $\theta$  de projection. Ce principe est décrit par la transformation de Radon donnée dans l'expression 4.6.3 et schématisée par la figure 4.6.4. Cette méthode permet d'estimer la valeur des atténuations  $\mu(M(x, y))$ , dans les différents plans de projection, à partir des données  $R[\mu(\theta, u)]$ , issues des projections.

$$R[\mu(\theta, u)] = p_\theta(u) = \int_{M \in D(\theta, p)} \mu(M) dM = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(u \cdot \cos\theta - v \cdot \sin\theta, u \cdot \sin\theta + v \cdot \cos\theta) dv \quad (4.6.3)$$

Le problème de reconstruction est de déterminer  $\mu(M(x, y))$  en tout point de l'espace à partir d'un ensemble de mesures de projection. La mesure du volume consiste à déterminer l'image donnée par la transformée de Radon des  $\mu(M(x, y))$ . Celle-ci est inversée par rétroprojection filtrée pour obtenir une image tomographique. Le principe de rétroprojection consiste à attribuer la valeur  $p_\theta(u)$  à tout point placé sur le rayon de projection ayant donné cette valeur, puis à sommer toutes les contributions issues des différentes projections (Laurent, 1996). Cette reconstruction n'étant pas strictement exacte, une amplification des fréquences hautes est faite par filtrage de manière à permettre une meilleure exploitation du signal. Cette méthode est largement employée dans

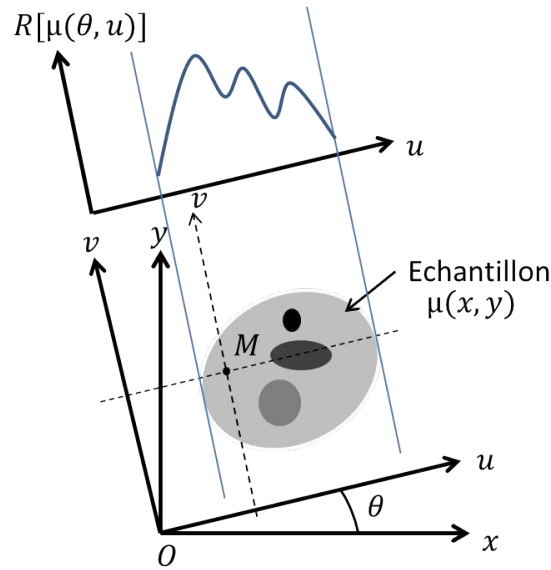


FIGURE 4.6.4: Projection sur le principe de la transformation de Radon

les différents logiciels de reconstruction utilisés dans l'industrie et dans les laboratoires. Le logiciel DigiXCT, utilisé dans le cadre de cette étude, repose sur ce principe de traitement des données issues du  $\mu$ -tomographe.

Les méthodes algébriques ou itératives, proposent une approche différente pour effectuer la reconstruction des volumes. Datant des années 1990, ces techniques proposent une représentation discrète du problème, où la valeur de chaque voxel est une inconnue d'un système mathématique linéaire. La reconstruction itérative consiste à déterminer la valeur de reconstruction  $f$  connaissant la valeur de la projection  $p$  et de l'opérateur de projection  $R$ , dans le système 4.6.4 suivant :

$$p = R \cdot f \quad (4.6.4)$$

Ce système se développe donc en autant d'équations linéaires que de voxels à déterminer pour la reconstruction qu'il est possible d'exprimer sous forme matricielle, tel que décrit par l'expression 4.6.5 :

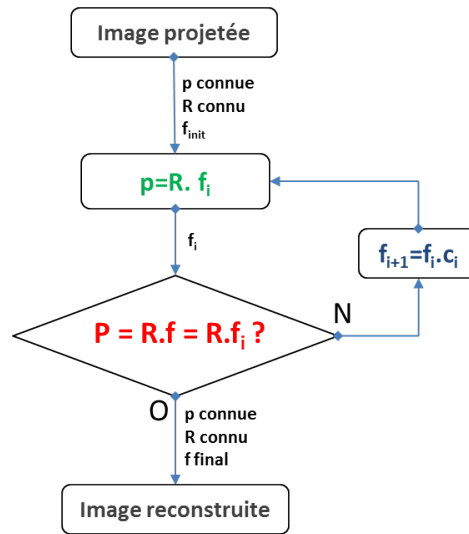


FIGURE 4.6.5: Principe d'un algorithme de reconstruction itératif

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & R_{n1} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ R_{1n} & \cdot & \cdot & \cdot & R_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} \quad (4.6.5)$$

La résolution itérative pour la reconstruction consiste alors à déterminer  $f$  permettant de minimiser la distance  $d = (p, R \cdot f)$  pour chaque voxel du volume. L'aspect itératif étant la correction de  $f_i$  par un coefficient de correction  $c_i$  permettant de se rapprocher de la solution où  $d$  est minimum. La figure 4.6.5 présente la démarche de reconstruction itérative.

Parmi ces algorithmes, on citera les plus couramment rencontrés :

- ART : Algebraic Reconstruction Technique
- MART : Multiplicative Algebraic Reconstruction Technique
- SART : Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique

L'avantage des ces méthodes de reconstruction est qu'elles ne nécessitent pas obligatoirement l'intégralité des projections pour arriver à reconstruire le volume, à l'inverse des méthodes analytiques, ce qui permet de réduire le temps d'acquisition de manière significative. Néanmoins étant basées sur une approche itérative, ces techniques sont relativement lourdes en temps de calculs et nécessitent des ressources matérielles importantes.

#### 4.6.4 Bruits de mesure et artéfacts

Quelle que soit la technique de reconstruction utilisée pour passer de l'acquisition à une image tomographique en niveaux de gris, le résultat obtenu n'est jamais strictement parfait. En effet, divers travaux ont mis en évidence la présence de défauts dans le volume reconstruit qui peuvent être source de difficultés pour l'exploitation des images. Parmi eux, il existe des défauts dus à la mesure par le matériel de tomographie, et des défauts imputables à la phase de reconstruction des volumes, appelés artéfacts de reconstruction. Ce paragraphe propose de citer quelques défauts rencontrés ainsi que les méthodes employées pour limiter leur influence sur l'analyse de ces données.

En premier lieu, comme toute technique de mesure, la tomographie par rayons X est soumise à une erreur systématique engendrée par le matériel de mesure. Dans le cadre de l'utilisation d'un tomographe ou d'un  $\mu$ -tomographe, le bruit de mesure associé au matériel est de deux natures :

- le bruit induit par la source du faisceau de rayons X
- le bruit induit par le détecteur

Celui-ci provoque l'altération des données de manière localisée et systématique. Néanmoins, ces erreurs peuvent être filtrées en réalisant des mesures complémentaires ayant pour but de récupérer et de reconstruire uniquement le signal de bruit de la source d'une part et du détecteur d'autre part. La filtrage du bruit est alors réalisé par soustraction des mesures de ce bruit sur le volume étudié.

Un autre type de défaut est généralement observé dans le traitement des mesures par tomographie, il s'agit des artéfacts de reconstruction. Ils apparaissent comme des

pixels physiquement incohérents dans les images volumiques après reconstruction. L'apparition de ces artefacts est directement liée au principe physique de la tomographie par rayons X.

Un artefact couramment rencontré est celui du durcissement de faisceau, l'énergie absorbée par la matière étant dépendante de sa densité locale, l'atténuation qui définit la quantité de photons transmise au détecteur doit être mesurée avec précision. Le fait qu'une partie de cette énergie soit absorbée entraîne une augmentation de l'énergie moyenne du faisceau et des fluctuations dans l'évaluation du coefficient d'atténuation linéique locale du matériau (Loi de Beer-Lambert). Ce phénomène de durcissement de faisceau (« beam hardening ») est très présent dans les mesures tomographiques. Il se traduit par une amplification périphérique du faisceau sur chaque radiographie enregistrée, et visuellement par des défauts de traînées sur les coupes tomographiques obtenues, généralement sur une zone de pixels où il existe un gradient important de densité (Brabant *et al.*, 2012; Ramakrishna *et al.*, 2006).

On trouve également un défaut appelé « ring artefact ». Il est dû à des pixels défaillants donnant une réponse erronée du signal par rapport aux pixels voisins. Cela entraîne une erreur de signal sur chaque projection engendrant les effets de cercles concentriques après reconstruction, visibles sur les coupes.

Une calibration de la mesure doit être effectuée pour limiter optimiser la position du centre de rotation de l'acquisition, ce qui permet d'éviter certains artefacts et d'éviter les effets de dédoublement du signal (Germaneau, 2007). Aussi, les outils de reconstruction intègrent généralement des filtres permettant de supprimer ces artefacts pendant la reconstruction.

### 4.6.5 Traitement des images

Un traitement des images est nécessaire entre la phase d'acquisition tomographique et la reconstruction volumique de l'échantillon à étudier pour éliminer le bruit intrinsèque à la détection. Ce bruit est retiré par un traitement numérique spécifique des images brutes (radiographies) en réalisant deux acquisitions complémentaires :

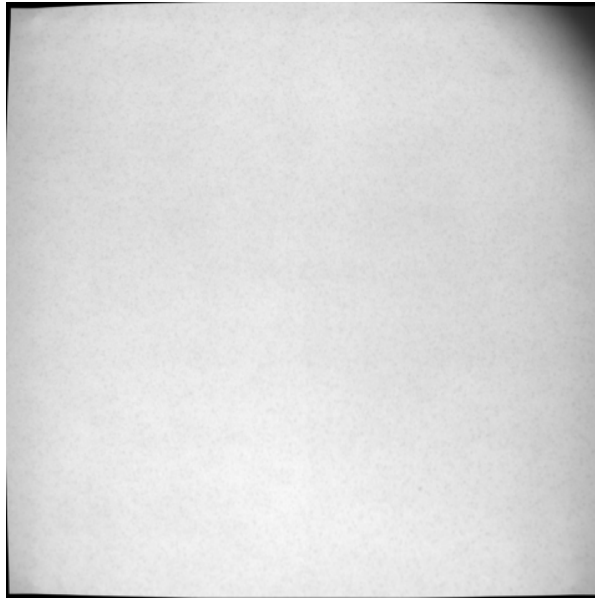


FIGURE 4.6.6: Exemple d'image de « blanc » tomographique

- L'acquisition de « blanc » : elle consiste à réaliser une acquisition sur le  $\mu$ -tomographe « à blanc », c'est à dire qu'aucun milieu matériel (pouvant atténuer la transmissions des photons X) n'est présent entre la source d'émission et leur réception par le détecteur. La perte de signal engendrée par l'absorption des rayons X dans un matériau est donc théoriquement nulle. Cela permet de visualiser des radiographies dans lesquelles est identifiable le bruit de mesure de la source utilisée. La position géométrique du détecteur vis-à-vis de la source à rayons X étant constante, une seule image est théoriquement nécessaire pour récupérer le bruit de mesure du détecteur et donc le supprimer des radiographies de l'échantillon. Ces acquisitions de « blanc » sont réalisées en conservant le tube PMMA entre la source et le détecteur du  $\mu$ -tomographe. La figure 4.6.6 montre un exemple d'image de « blanc » :
- L'acquisition de « noir » : elle consiste à détecter le bruit dû au détecteur du  $\mu$ -tomographe à rayons X lors de l'absence d'émission du faisceau de rayons X. Les différences de niveaux de gris qui subsistent dans les radiographies enregistrées sont considérées comme le bruit de mesure du détecteur. L'acquisition de l'image

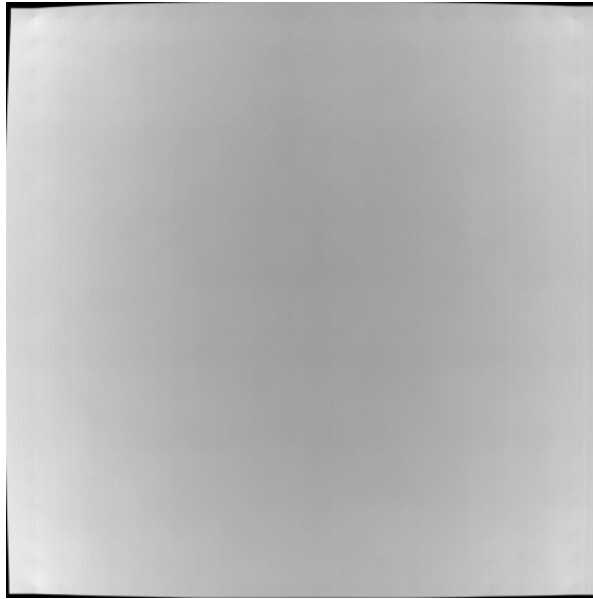


FIGURE 4.6.7: Exemple d'image de « noir » tomographique

de « noir » se fait dans les mêmes conditions que l'image de « blanc ». La figure 4.6.7 présente une image de « noir » enregistrée.

A partir de ces informations sur le bruit, les radiographies sont traitées pour optimiser la qualité des données à reconstruire en minimisant le niveau de bruit des images. Ce travail est réalisé à l'aide de l'outil ImageJ qui permet d'effectuer le traitement détaillé dans l'équation 4.6.6. Celle-ci exprime que la valeur du niveau de gris d'un pixel traité correspond au rapport des niveaux de gris entre d'une part la donnée brute après soustraction du bruit de détection, et d'autre part du bruit de la source après soustraction du bruit de détection (Wils, 2011).

$$Images\ traitées = \frac{(Radiographies - Noir)}{(Blanc - Noir)} \quad (4.6.6)$$

La figure 4.6.8 présente des radiographies illustrant l'intérêt de ce traitement pour la qualité de l'information qui sera utilisée pour déterminer les résultats. L'image a) correspond à une radiographie de l'éprouvette dans la position angulaire 0°, l'image b) représente la même radiographie après le traitement proposé.



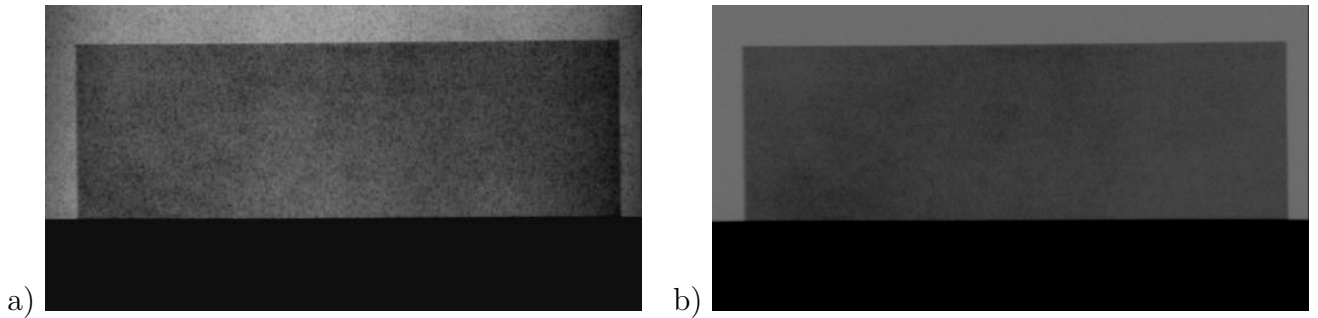


FIGURE 4.6.8: Illustration du traitement d'images appliqué aux radiographies rayons X : à gauche : Radiographie brute et à droite : Radiographie après traitement

A partir de l'ensemble des données brutes sur lesquelles le bruit a été minimisé, la reconstruction du volume de l'éprouvette peut être effectuée. La visualisation des particules de cuivre à l'intérieur de celui-ci constitue le mouchetis volumique utilisé pour déterminer les déplacements entre les différents états de charge par la méthode de corrélation volumique.

## 4.7 La corrélation d'images volumiques

La corrélation volumique, présentée brièvement au paragraphe 1.3.4, est la méthode de mesure volumique des déplacements qui a été retenue dans ce travail. Elle permet la détermination des champs de déplacement et de déformation dans les trois directions, à partir des acquisitions réalisées par tomographie. Les paragraphes suivants présentent une explication détaillée relative à cette technique de mesure.

### 4.7.1 Principe général et discrétisation des volumes

La corrélation volumique est une technique de calcul des déplacements expérimentaux basée sur l'exploitation d'images volumiques, caractérisées par une série de coupes 2D le long de l'épaisseur de l'échantillon étudié. Au sein des images volumiques une grille de points tridimensionnelle virtuelle est définie de manière identique pour tous les états de déformation à calculer. A chaque point de cette grille est associé un domaine

de corrélation 3D noté  $D$ , regroupant un nombre défini de voxels, à partir desquels les déplacements 3D seront recherchés. On considère une transformation matérielle  $\phi$  entre une position d'un point de la grille à l'état initial, noté  $X$  de coordonnées  $(X, Y, Z)$  et une position du même point à état déformé, noté  $x$  de coordonnées  $(x, y, z)$  (Bay *et al.*, 1999; Gates *et al.*, 2010; Germaneau *et al.*, 2008b; Roux *et al.*, 2008; Réthoré *et al.*, 2008; Lenoir *et al.*, 2007). Chaque sous-volume  $D$  est identifié individuellement par sa valeur de niveau de gris résultant de l'acquisition volumique, en considérant une conservation de l'intensité du faisceau permettant la transposition de l'absorption du signal en niveaux de gris. Cette valeur est la moyenne des niveaux de gris des différents voxels présents dans les bornes du domaine  $D$ . En DVC, l'hypothèse est faite que pour tous niveaux de déformation, les variations des valeur des niveaux de gris de chaque sous-volume  $D$  sont constantes, ce qui permet alors d'identifier chaque domaine de corrélation dans les différents volumes représentatifs des états mesurés (Gates *et al.*, 2010; Verhulp *et al.*, 2004; Bay *et al.*, 1999). On notera  $f(X)$  et  $g(x)$ , respectivement les valeurs de niveaux de gris de l'état initial et de l'état déformé. Ainsi, entre deux états, on doit théoriquement retrouver l'égalité  $f(X) = g(x)$ . Le principe général de la DVC permet de résoudre l'expression suivante :

$$x = \phi(X) \tag{4.7.1}$$

donnant la position des points de la grille après une transformation matérielle imposée au volume. Pour cela, l'égalité des valeurs de niveaux de gris est utilisée.

Le domaine de la mécanique expérimentale étant toujours soumis à des sources d'erreurs (acquisition, traitement de données, bruit de mesure, etc...), la technique de DVC recherche en réalité la meilleure solution permettant de corrélérer un domaine après transformation, sur la base de la minimisation des écarts entre les valeurs de niveaux de gris, soit la minimisation de  $(f(X) - g(x))$  pour chaque domaine  $D$  du volume de l'échantillon étudié.

Le principe général de la DVC est représenté par la figure 4.7.1.

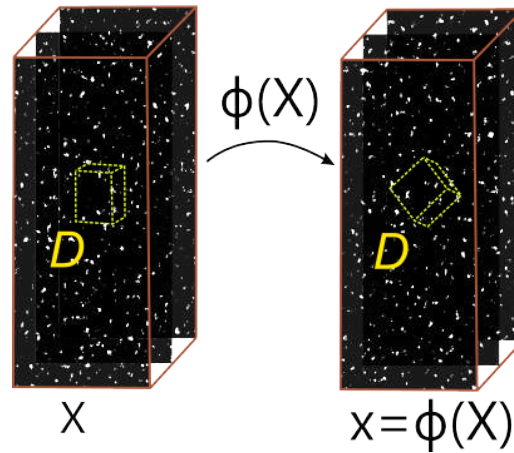


FIGURE 4.7.1: Principe général de la corrélation d'images volumiques

L'expression des valeurs du champ de déplacement 3D  $U(X) = (u, v, w)$  peut alors se traduire par l'expression suivante :

$$U(X) = x - X \quad (4.7.2)$$

ce qui permet également de faire le lien avec la transformation matérielle d'après l'équation 4.7.1, tel que :

$$\phi(X) = X + U(X) \quad (4.7.3)$$

Néanmoins, la transformation matérielle entre deux états de la structure étudiée est inconnue. De la même manière qu'en corrélation d'images numériques 2D, une approximation de cette transformation basée sur l'équation 4.7.3 est utilisée. On exprime alors le développement limité  $\phi_0(X)$  au premier ordre sur un domaine  $D$ , en fonction des variations locales de  $U(X)$ , au point  $X_0$  représentant le centre de  $D$ , tel que :

$$\phi_0(X) = X + U(X_0) + \frac{\partial U(X_0)}{\partial X}(X - X_0) \quad (4.7.4)$$

Cette expression permet alors de prendre en compte une transformation locale homogène de translation ou de rotation de solide rigide plus des variations locales représentant les déformations élastiques du domaine de corrélation  $D$ . Le choix de modélisation de la transformation matérielle doit être fait en adéquation avec le comportement supposé du matériau étudié. Dans le cas de ce travail, les hypothèses de petits déplacements et de variations linéaires élastiques sont admises, ce qui permet de limiter le choix de la transformation à l'ordre 1.

## 4.7.2 Corrélation volumique

Comme dans le cas de la corrélation d'images numériques 2D, le calcul des déplacements par corrélation volumique est basé sur l'analyse des images représentatives des différents états de l'échantillon étudié. Dans le cas volumique, le travail de reconnaissance des différents points de la grille est réalisé par corrélation des voxels dans les différentes séries de coupes utilisées. Le voxel est en fait la correspondance 3D des pixels constituant une image numérique, ayant pour caractéristiques la résolution de la mesure définissant sa taille ainsi qu'une valeur unique de niveau de gris. Par extension dans l'épaisseur (direction de la normale aux coupes), le voxel correspond donc à un cube ayant la valeur de la résolution spatiale comme coté.

Le coefficient de corrélation volumique  $C$  est défini comme l'indicateur de performance pour la reconnaissance des domaines de corrélation (donc des voxels qui les composent), d'un volume de référence à un ou  $N$  volumes déformés. La minimisation de ce coefficient permet la détermination de la position des points de la grille ainsi que les paramètres permettant d'explicitier la transformation matérielle par rapport à l'état de référence, dans les différents états déformés.

On exprime le coefficient de corrélation tel que (Germaneau *et al.*, 2007) :

$$C = 1 - \left[ \frac{\sum_{x \in D} (f(X) - \bar{f}_D)(g(\phi(X)) - \bar{g}_D)}{\sqrt{\sum_{x \in D} (f(X) - \bar{f}_D)^2} \cdot \sqrt{\sum_{x \in D} (g(\phi(X)) - \bar{g}_D)^2}} \right] \quad (4.7.5)$$

où  $\overline{f_D}$  et  $\overline{g_D}$  sont les valeurs moyennes de niveaux de gris d'un domaine de corrélation  $D$  respectivement à l'état initial et l'état déformé.

Cette définition permet de préciser que le coefficient  $C$  minimisé n'est pas sensible aux éventuelles variations d'intensité du signal transposé en niveau de gris. En effet, le calcul de  $C$  est basé sur l'évaluation des variations locales de niveaux de gris par rapport à la moyenne de valeurs dans le domaine  $D$ . Cette information est importante dans le cas des acquisitions par tomographie par rayons X car elles sont généralement assez longues en temps, ce qui peut engendrer des variations d'intensité significatives entre l'acquisition de référence et l'acquisition de l'état final.

### 4.7.3 Précision sub-voxel

A partir des valeurs de niveaux de gris de chacun des voxels de l'image volumique, la détermination des déplacements est réalisée pour chaque point de la grille de corrélation. Cette étape donne une précision correspondant à la taille du voxel, qui est la résolution spatiale de l'acquisition des volumes. Cette précision, dite « grossière », est une approximation de la solution finale du champ de déplacements. Pour atteindre une précision supérieure, il est nécessaire de procéder à une interpolation des niveaux de gris des voxels des domaines de corrélation. Sur cette base, une précision très inférieure à la taille du voxel peut être atteinte pour le calcul des déplacements. L'étape de calcul sub-voxel est bien souvent indispensable pour étudier les phénomènes mécaniques où la résolution des acquisitions est de l'ordre de grandeur des amplitudes de déplacements à déterminer. C'est le cas pour l'étude des déplacements induits par le gauchissement des sections dans les structures composites. Toujours par extension de la méthode de corrélation d'images numériques 2D, où une interpolation bilinéaire est admise pour les calculs sub-pixel, en DVC une interpolation tri-linéaire est utilisée pour déterminer les valeurs de niveaux de gris pour des positions intermédiaires à deux voxels adjacents.

On définit alors une fonction d'interpolation  $g_r$  de paramètres  $i, j, k$  permettant le calcul des niveaux de gris autour d'une position  $X(x, y, z)$  de la grille, en considérant  $i < x < i + 1$ ,  $j < y < j + 1$  et  $k < z < k + 1$  (4.7.2). On exprime alors le niveau de gris

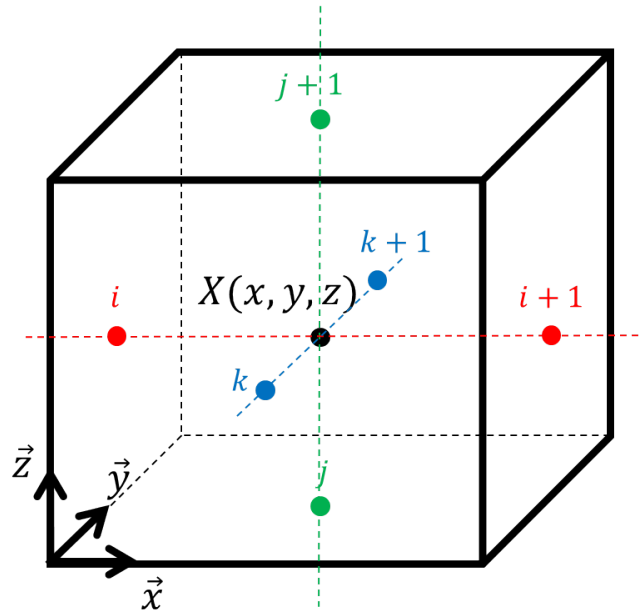


FIGURE 4.7.2: Interpolation tri-linéaire des niveaux de gris pour le calcul sub-voxel

interpolé par tel que :

$$g_{r_{ijk}}(x, y, z) = g_r(i, j, k) + a.(z - k) + b.(x - i) + c.(x - i)(z - k) + d.(y - j) + e.(y - j)(z - k) + f(x - i)(y - j) + g(x - i)(y - j)(z - k) \quad (4.7.6)$$

L'expression 4.7.6 fait alors apparaître 7 coefficients  $(a, b, c, d, e, f, g)$  qui peuvent se résoudre de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 a &= g_r(i, j, k + 1) - g_r(i, j, k) \\
 b &= g_r(i + 1, j, k) - g_r(i, j, k) \\
 c &= g_r(i + 1, j, k + 1) - g_r(i, j, k + 1) - g_r(i + 1, j, k) + g_r(i, j, k) \\
 d &= g_r(i, j + 1, k) - g_r(i, j, k) \\
 e &= g_r(i, j + 1, k + 1) - g_r(i, j, k + 1) - g_r(i, j + 1, k) + g_r(i, j, k) \\
 f &= g_r(i + 1, j + 1, k) - g_r(i, j + 1, k) - g_r(i + 1, j, k) + g_r(i, j, k) \\
 g &= g_r(i + 1, j + 1, k + 1) + (g_r(i + 1, j, k) + g_r(i, j + 1, k) + g_r(i, j, k + 1) \\
 &\quad - g_r(i + 1, j, k + 1) - g_r(i, j + 1, k + 1) - g_r(i + 1, j + 1, k) - g_r(i, j, k)
 \end{aligned} \tag{4.7.7}$$

Les valeurs de ces niveaux de gris interpolés à l'intérieur des voxels sont alors utilisées pour le calcul des déplacements sub-voxel, de manière à augmenter la précision des valeurs déterminées par DVC. Une procédure de minimisation est utilisée dans la phase de calcul sub-voxel pour affiner l'approximation de la transformation  $\phi$  entre l'état de référence et l'état déformé. Comme introduite dans les paragraphes précédents, cette minimisation d'ordre 1 est effectuée de manière à exprimer les coefficients de la transformation matérielle en tenant compte des translations de solide rigides, notés  $(u, v, w)$  ainsi que des variations locales de positions dans le domaine de corrélation  $D$ , notées  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}\right)$ .

On exprime alors le vecteur  $P$  décrivant la transformation matérielle entre deux états du volume résultant du calcul sub-voxel, tel que :

$$P = \left(u, v, w, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{4.7.8}$$

## 4.7.4 Calcul des champs de déplacements et de déformations

D'après l'expression 4.7.8, le calcul au voxel près permet de déterminer le vecteur  $P$ , en limitant la recherche de la solution aux translations de solides rigides. On note alors le vecteur  $P_0$  issu de cette première étape du calcul par DVC :

$$P_0 = (u, v, w, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (4.7.9)$$

Pour finaliser le calcul, la procédure de minimisation est réalisée pour le calcul sub-voxel, en utilisant la solution approchée  $P_0$  comme point de départ. On réalise donc la minimisation de manière à déterminer les variations locales de positions dans le domaine de corrélation. Cette minimisation est basée sur une méthode de descente du premier gradient, celui-ci étant évalué sur les valeurs du coefficient de corrélation  $C$  à chaque itération et intégré à la suite décroissante suivante :

$$P_{n+1} = P_n - a \cdot \frac{\frac{\partial C}{\partial P} \cdot P_n}{\left\| \frac{\partial C}{\partial P} \cdot P_n \right\|} \quad (4.7.10)$$

où  $a$  représente le paramètre d'ajustement entre 0 et 1 avec  $a = \|P_{n+1} - P_n\|$ , représentant la distance entre deux évaluations successives de la transformation matérielle.

On définit la convergence de la procédure de minimisation lorsque la valeur  $\partial C$  atteint une valeur très faible correspondant au critère d'arrêt du calcul. Lorsque le calcul est finalisé, la transformation matérielle déterminée complètement permet de donner la position du centre du domaine de corrélation  $D$  dans le volume déformé par rapport au volume de référence. Une fois cette opération effectuée sur l'ensemble des domaines de corrélation du volume (autour de tous les points de la grille de corrélation), on obtient alors une série discrète des valeurs de déplacements 3D sur l'ensemble de la grille, correspondant à  $U_i(X) = x_i(x, y, z) - X_i(X, Y, Z)$ , avec  $i$  un point de la grille.

La détermination du champ de déformation est alors possible sur la base du champ de déplacement discret obtenu. Dans le logiciel de DVC utilisé, celui-ci est déterminé



par différences finies centrées sur le domaine de corrélation. Une autre solution consiste à exporter les informations du calcul par DVC vers un code de calculs par éléments finis de manière à exploiter les valeurs de déplacement pour calculer les déformations à partir de la résolution proposée par cette méthode. Dans ce cas, la grille est alors directement transposée en tant que maillage orphelin où chaque pas de la grille correspond à la taille des éléments finis utilisés.

## 4.8 Conclusions

Ce chapitre détaille les différentes étapes des développements effectués pour établir la machine d'essai proposée, permettant de réaliser des mesures volumiques durant un essai de flexion trois points. Celui-ci a été développé de manière à pouvoir visualiser les effets du cisaillement transverse dans les structures composites. A partir de la résolution analytique proposée dans le chapitre 2 et de ses hypothèses, un choix de géométrie d'éprouvette et de matériaux est effectué. Sur la base de ces choix et des équipements d'acquisitions utilisés, une machine d'essai de flexion a été conçue et dimensionnée pour maximiser le gauchissement des sections de l'éprouvette pendant l'essai de flexion. Deux principales techniques de mesures et de calcul sont également abordées en détail dans ce chapitre : la tomographie par rayons X et la corrélation d'images volumiques. Ces deux techniques sont utilisées en complémentarité pour réaliser les mesures volumiques de déplacements qui permettront l'analyse expérimentale des phénomènes étudiés dans ce travail. Les résultats fournis par ce protocole expérimental sont exploités dans le chapitre suivant, visant à déterminer expérimentalement le gauchissement des sections pendant l'essai, et à confronter les valeurs de déplacement par rapport au résultats issus de la résolution analytique, à partir de diverses théories de cisaillement transverse, et par rapport aux résultats de la modélisation numérique.



# Chapitre 5

## Analyse des résultats et exploitation

5.1	Objectifs . . . . .	131
5.2	Analyses des résultats . . . . .	132
5.2.1	Caractérisation de la mesure des déplacements . . . . .	132
5.2.2	Traitement des résultats . . . . .	135
5.3	Résultats analytiques et numériques . . . . .	138
5.4	Étude de la fibre T700 . . . . .	142
5.4.1	Champs de déplacement $u_1$ et $u_3$ . . . . .	143
5.4.2	Champ de déformation $E'_{13}$ . . . . .	145
5.4.3	Confrontation des résultats . . . . .	146
5.4.4	Synthèse . . . . .	150
5.5	Étude de la fibre M55J . . . . .	150
5.5.1	Champs de déplacement $u_1$ et $u_3$ . . . . .	151
5.5.2	Champ de déformation $E'_{13}$ . . . . .	153
5.5.3	Confrontation des résultats . . . . .	153
5.5.4	Synthèse . . . . .	154
5.6	Étude du gauchissement . . . . .	158
5.6.1	Critère d'évaluation du gauchissement . . . . .	158
5.6.2	Résultats . . . . .	159
5.7	Analyse des effets volumiques . . . . .	160

5.8 Conclusions . . . . . 162

Les chapitres précédents de ce mémoire ont permis de définir largement les problématiques du sujet et de détailler les différents développements réalisés pour tenter d'y répondre. Différents résultats contribuent donc à l'analyse globale de ce sujet. Le chapitre 5 synthétise les différents essais de flexion réalisés dans le but d'observer expérimentalement le gauchissement des sections des éprouvettes composites considérées. La méthode expérimentale présentée dans le chapitre précédent est appliquée pour des matériaux de propriétés différentes pour analyser les résultats dans diverses configurations. A partir des résultats bruts obtenus par la corrélation d'images volumiques, une méthode de traitement est proposée pour conserver une exploitation cohérente des mesures réalisées. A partir des champs de déplacement, l'analyse de la distribution des contraintes de cisaillement transverse est réalisée en lien avec les résultats présentés dans les chapitres précédents.

## **5.1 Objectifs**

Les objectifs de cette analyse des résultats sont multiples. L'exploitation des mesures nécessite un traitement de manière à éliminer les différences intrinsèques liées aux moyens de mesures. Les champs de déplacements expérimentaux sont ensuite introduits dans l'étude comparative effectuée à partir des résultats analytiques et des résultats numériques. Celle-ci synthétise l'ensemble des travaux relatifs à ce sujet et permettra d'identifier les tendances de résultats vis-à-vis de l'utilisation des différentes fonctions de cisaillement transverse retenues. Cette étude est effectuée d'une part pour les éprouvettes réalisées avec la fibre T700 et d'autre part avec les éprouvettes constituées de la fibre M55J. Ainsi le phénomène sera étudié du point de vue de deux matériaux présentant des caractéristiques mécaniques différentes. Enfin, il est nécessaire d'évaluer la cohérence des données expérimentales obtenues dans un but de validation du protocole proposé. C'est pourquoi une caractérisation métrologique des essais réalisés est effectuée.

## 5.2 Analyses des résultats

La première partie de ce chapitre traite de l'évaluation des résultats obtenus expérimentalement. Dans un premier temps, une étude métrologique des mesures de déplacements est réalisée dans le but de caractériser la résolution des valeurs obtenues. Dans un second temps, une méthode de traitement des résultats est proposée de manière à pouvoir analyser les valeurs analytiques, numériques et expérimentales en cohérence. En effet, l'analyse des conditions aux limites de ces différents résultats conduit à la nécessité d'un traitement spécifique pour finaliser l'étude.

### 5.2.1 Caractérisation de la mesure des déplacements

#### 5.2.1.1 Méthode

Afin de caractériser la mesure par DVC dans les matériaux composites, une méthode de test a été développée et paramétrée dans le but d'accéder aux champs de déplacement dans différents plans à l'intérieur de l'échantillon. L'objectif est d'étudier le gauchissement des sections du matériau composite sollicité en flexion. Néanmoins, l'amplitude des déplacements longitudinaux, responsable du gauchissement est faible au regard des dimensions de l'échantillon. L'ordre de grandeur des valeurs à analyser est de quelques micromètres. Une caractérisation rigoureuse des mesures effectuées est donc intéressante pour vérifier la cohérence des résultats obtenus. Cette partie traite de la méthode utilisée pour déterminer l'erreur globale des mesures et pour valider la résolution des valeurs calculées.

La méthode mise en œuvre pour analyser les performances de la procédure expérimentale proposée est classiquement employée en photomécanique expérimentale, surfacique ou volumique. Il s'agit d'effectuer des mesures complètes où la transformation mécanique entre deux états successifs est parfaitement connue et contrôlée. Un déplacement de corps rigide est la solution la plus simple et la plus efficace pour appliquer une transformation mécanique maîtrisée. Dans le cadre de cette étude, le déplacement

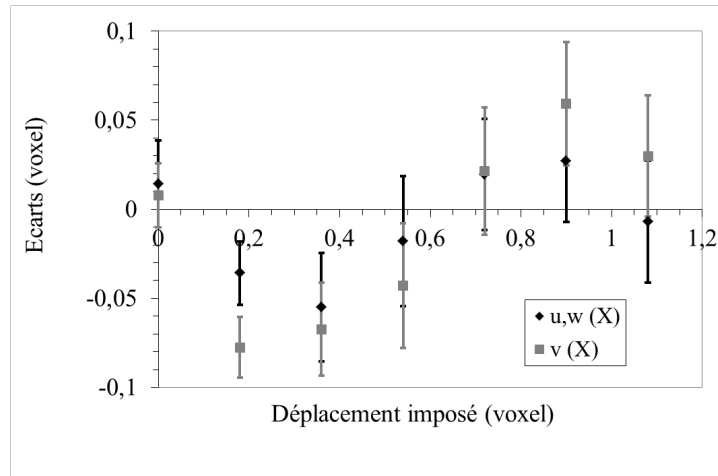


FIGURE 5.2.1: Exemple de « courbe en S » en tomographie RX (Germaneau, 2007)

rigide est réalisé par l'intermédiaire d'une platine micro-métrique fixée sur la table du  $\mu$ -tomographe ayant une précision de  $1\mu\text{m}$ . Il a déjà été montré que l'évolution de l'erreur de mesure est fonction de la résolution de mesure (Bornert *et al.*, 2009). Sur ce principe, il est suffisant d'appliquer des déplacements rigides dont l'amplitude reste inférieure à la taille d'un voxel pour le cas volumique. L'objectif est alors de pouvoir tracer la courbe d'évolution de l'erreur en fonction du déplacement imposé, appelée régulièrement « courbe en S » du fait de sa forme sinusoïdale comme illustré en figure 5.2.1.

### 5.2.1.2 Mesure de l'erreur globale

Une série de mesures est effectuée entre 0 et 1 voxel avec un pas proche de 0,1 voxel. Les échantillons sont strictement identiques à ceux utilisés pour les essais de flexion trois points. Après reconstruction, les dix volumes sont utilisés pour déterminer la valeur du déplacement obtenue par corrélation volumique avec les paramètres suivants :

- Pas de grille : 10 voxels
- Taille de domaine de corrélation :  $31\text{voxels}^3$
- Dimensions de la grille de mesure :  $990 \times 450 \times 195\text{voxels}^3$
- Taille du voxel :  $52\mu\text{m}$

La valeur de l'erreur globale de mesure  $E_g$ , définie par l'équation 5.2.1, est alors calculée par l'écart entre la moyenne des résultats  $U_{imes}$  sur l'ensemble des  $n$  points de la grille (supérieur à 20000) et la valeur de référence du déplacement imposé  $U_{imp}$  à chaque incrément définie dans l'équation 5.2.1

$$E_g = U_{imp} - \frac{1}{n} \left( \sum_1^n [U_{imes}] \right) \quad (5.2.1)$$

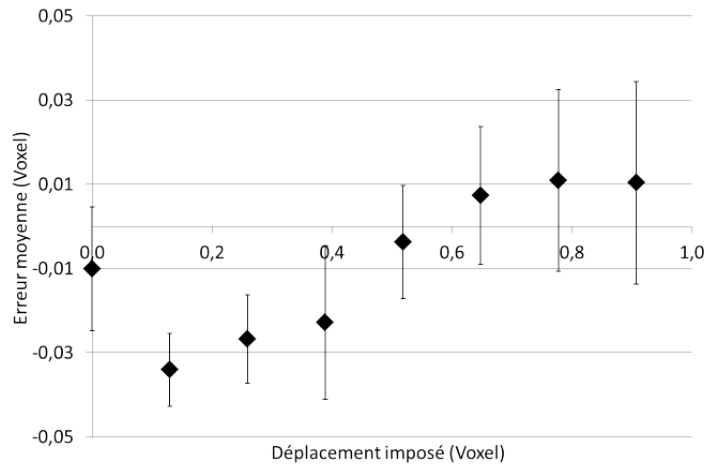


FIGURE 5.2.2: Évolution de l'erreur moyenne et de l'écart type de mesure en fonction du déplacement imposé pour le matériau T700/4090

La figure 5.2.2 présente la courbe d'évolution de l'erreur moyenne en fonction du déplacement imposé pour le cas du matériau T700/4090. La valeur maximale de l'erreur moyenne de détermination des déplacements est évaluée à 0,02voxel, ce qui correspond à 0,52 $\mu$ m. On remarque également qu'il y a une évolution de l'écart type des erreurs mesurées en fonction du déplacement imposé. Plus celui-ci est important, plus on constate un écart-type important. Ceci peut également s'expliquer par les différences des paramètres de reconstruction utilisés pour le traitement des radiographies acquises à chaque pas de déplacement. En effet, un jeu unique de paramètres de reconstruction est conservé pour toutes les reconstructions volumiques d'un même essai. Néanmoins,



ces acquisitions étant longues (de l'ordre de 25 minutes), il peut y avoir des variations locales de l'alignement source-objet-détecteur, entraînant un phénomène de flou dans les images volumiques reconstruites. Ce flou peut être à l'origine de l'augmentation de l'écart-type des mesures de déplacement effectuées. La valeur de l'erreur de mesure est du même ordre de grandeur que celle habituellement observée en corrélation (2D ou 3D). Ainsi, on peut considérer que le protocole expérimental permet d'obtenir une précision suffisante pour traiter le problème.

## 5.2.2 Traitement des résultats

Dans toute mesure en mécanique expérimentale, des perturbations physiques (systématiques ou aléatoires) imposent une procédure de correction des données obtenues pour pouvoir les adapter aux données théoriques du phénomène étudié. C'est le cas pour le protocole d'essai proposé au chapitre 4. La chaîne d'acquisition faisant intervenir un nombre important d'éléments, chacun d'entre eux est susceptible d'apporter sa contribution à l'erreur de mesure. Une correction est donc effectuée et est en partie déterminée sur la base des hypothèses théoriques proposées dans le chapitre 2, et appliquées sur les valeurs des déplacements déterminés par corrélation volumique.

### 5.2.2.1 Hypothèses

Les hypothèses de la méthode de résolution analytique sont utilisées comme conditions à respecter pour le recalage des données expérimentales. Celles-ci sont conformes aux conditions aux limites appliquées dans la modélisation éléments finis détaillée au chapitre 3. Les conditions de recalage exploitées sont les suivantes :

- Déplacements et rotations nuls aux appuis, dans le plan  $(x_1, x_3)$ , soit :
  - $u_1(x_1 = \frac{l}{2}; x_3 = +\frac{h}{2}) = 0$
  - $u_3(x_1 = -\frac{l}{2}; x_3 = -\frac{h}{2}) = u_3(x_1 = +\frac{l}{2}; x_3 = -\frac{h}{2}) = 0$
  - $\theta_2(x_1 = -\frac{l}{2}; x_3 = -\frac{h}{2}) = \theta_2(x_1 = +\frac{l}{2}; x_3 = -\frac{h}{2}) = 0$

Une vérification des conditions exposées ci-dessus est effectuée pour s'assurer que l'essai de flexion trois points réalisé dans le  $\mu$ -tomographe est bien cohérent vis-à-vis des

analyses théoriques et numériques du problème.

Les influences dues aux conditions de chargement sont étudiées pour réaliser le recalage des données. Les résultats exposés au paragraphe 3.6 montrent que l'application du chargement a une forte influence sur la répartition du déplacement  $u_1(x_3)$  le long du profil observé.

### 5.2.2.2 Cohérence des conditions aux limites

La problématique est que les résultats expérimentaux, analytiques et numériques ne peuvent pas être superposés directement, du fait de la non cohérence de leur propres conditions aux limites. En effet, les résultats expérimentaux sont issus d'un essai de flexion où les conditions aux limites ne sont pas ponctuelles et où divers phénomènes (artéfacts de reconstruction, jeux mécaniques du montage, matage, etc...) font que les hypothèses de la résolution analytique ne sont pas nécessairement respectées. D'autre part, le modèle numérique retenu pour cette étude est construit sur la base de conditions aux limites théoriques et parfaites :

- application ponctuelle
- orientation parfaite du chargement  $F_3$ , suivant la direction  $\vec{x}_3$
- position parfaite du chargement  $F_3$ , en  $x_1 = 0$

A partir de cette analyse, une correction doit être apportée aux valeurs expérimentales pour permettre la comparaison avec un modèle théorique analytique et/ou éléments finis. Dans ce sens, un protocole de recalage spécifique est proposé.

La méthode de recalage proposée consiste à rendre cohérentes les différentes conditions aux limites utilisées. Celle-ci est synthétisée par la figure 5.2.3 qui permet de visualiser les liens entre les quatre étapes effectuées pour la comparaison des différentes données. Elle permet de comprendre le raisonnement du recalage d'une configuration de test (géométrie et matériaux) pour un chargement donné.

1. La première étape permet de collecter les valeurs issues de la mesure expérimentale et du calcul éléments finis (EF) correspondant. Leur comparaison permet alors d'apprécier la différence des résultats et de juger de la nécessité d'une correction.

2. La deuxième étape de cette méthode permet de mettre en adéquation le modèle numérique avec le résultat expérimental. Pour cela, les conditions aux limites expérimentales sont extraites des champs de déplacement mesurés puis importées dans le modèle numérique. Ainsi, le calcul éléments finis est réalisé avec des positions d'appuis et des conditions de chargement strictement identiques à l'essai effectué. Les propriétés matériaux sont issues de la caractérisation mécanique réalisée sur les éprouvettes. Le comportement mécanique modélisé reste conforme à l'élasticité linéaire cohérente avec les hypothèses analytiques. Une corrélation des résultats est effectuée pour vérifier l'adéquation entre ces deux résultats. Le calcul basé sur les conditions aux limites expérimentales permet également de déterminer l'amplitude réelle du déplacement  $u_3$  imposé à l'échantillon, ainsi que le défaut du chargement. L'ordre de grandeur des défauts observés lors de ces essais est inférieur à  $1^\circ$  d'orientation du chargement et inférieur à 1mm pour sa position. Le déplacement peut alors être utilisé dans le modèle numérique théorique pour déterminer l'effort de flexion  $F_3$  résultant. En effet, la résolution analytique est basée sur un chargement ponctuel imposé et non sur un déplacement ponctuel.
3. L'étape 3 est la comparaison des deux modèles éléments finis : conditions aux limites théoriques d'une part et expérimentales d'autre part. D'une manière systématique, on observe un défaut de la position du point d'application du chargement de flexion entraînant une dissymétrie de celui-ci sur l'ensemble de l'éprouvette. Ce défaut peut être dû à une mauvaise mise en place initiale de l'échantillon dans le montage ou à des défauts d'alignement de la tige du vérin avec l'axe du dispositif. L'étude de la sensibilité de cette position de chargement a été analysée sur l'étude du modèle numérique (cf paragraphe 3.6.1) et permet d'envisager le type de correction à retenir pour replacer les données dans une configuration théorique. On peut alors observer que la pente globale du profil  $u_1(x_3)$  n'est pas conforme. Pour chaque pas de chargement indépendamment, une correction est déterminée pour faire correspondre, sur les modèles éléments finis, les conditions aux limites expérimentales et théoriques.
4. La dernière étape est la comparaison des différents résultats :

- Expérimental corrigé (grâce à la correction définie à l'étape 3)
- Modélisation numérique éléments finis avec les conditions aux limites théoriques
- Résolution analytique avec les conditions aux limites théoriques

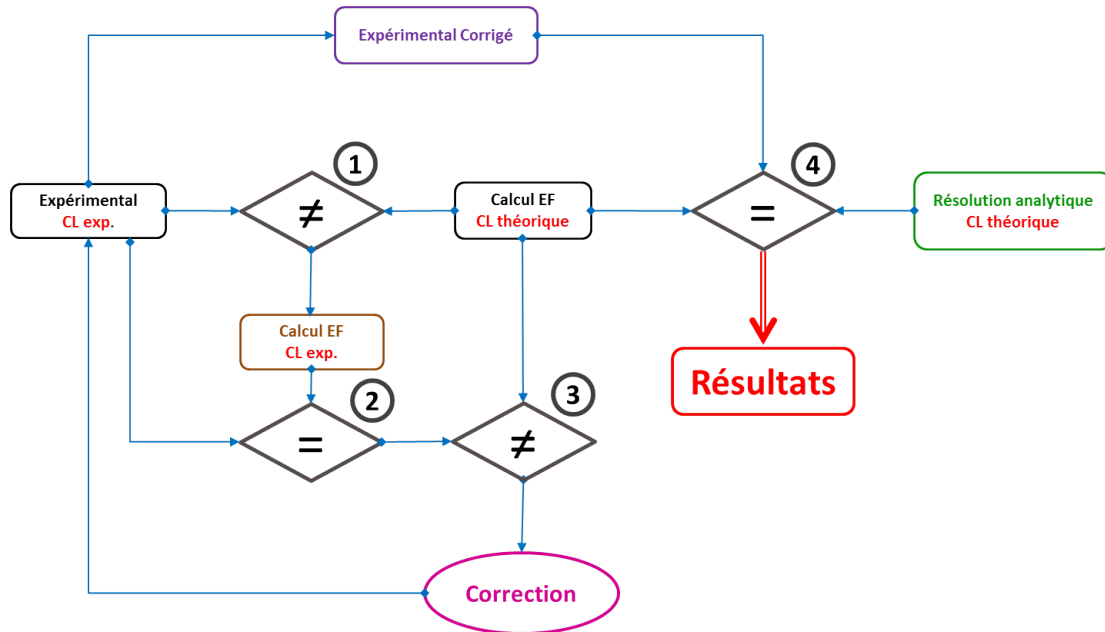


FIGURE 5.2.3: Méthode de recalage des données expérimentales

Cette méthode de recalage est appliquée à tous les états de chargement traités pour chacun des deux matériaux étudiés dont les résultats sont exposés dans les paragraphes suivants.

## 5.3 Résultats analytiques et numériques

Le paragraphe précédent a, entre autres, permis d'établir les différences de conditions aux limites entre les résultats théoriques et expérimentaux. La première partie de cette analyse propose la comparaison des valeurs obtenues analytiquement et par modélisation éléments finis. La superpositions de ces résultats avec les résultats expérimentaux sera réalisée par la suite. Différents résultats analytiques ont été calculés à partir de la résolution analytique proposée au chapitre 2, pour les différents modèles

théoriques étudiés. D'autre part la modélisation numérique correspondante, exposée au chapitre 3 permet également la détermination des résultats pour des configurations similaires. Ce paragraphe permet de comparer ces deux types de résultats et d'analyser leurs différences dans les trois configurations de poutre décrites au paragraphe 2.2.1. Les trois figures 5.3.1, 5.3.2 et 5.3.3, présentent respectivement les résultats de la modélisation numérique, de la théorie naturelle ainsi que du modèle de Reddy, pour les trois configurations géométriques suivantes :

- $l = 25\text{mm}$ ,  $h = 2\text{mm}$  ( $\frac{l}{h} = 12,5$ )
- $l = 25\text{mm}$ ,  $h = 5\text{mm}$  ( $\frac{l}{h} = 5$ )
- $l = 25\text{mm}$ ,  $h = 20\text{mm}$  ( $\frac{l}{h} = 1,25$ )

Pour les trois cas, on considère un module d'élasticité  $E_{11} = 140000\text{MPa}$  et un module de cisaillement  $G_{13} = 3500\text{MPa}$ , ainsi qu'un chargement ponctuel de flexion de valeur  $F_3 = -6000\text{N}$ . Ces propriétés sont identiques à celles utilisées pour les résultats présentés au paragraphe 2.2.1 et 2.3.1.

Les calculs sont réalisés à partir de la modélisation initiale décrite au paragraphe 3.3, du fait de la cohérence des conditions aux limites avec la méthode de résolution analytique.

Ces courbes permettent d'identifier nettement une divergence des résultats en fonction du rapport  $\frac{l}{h}$  considéré. Pour des poutres avec un élancement important, on s'aperçoit qu'il y a une très bonne correspondance des résultats numériques et analytiques (figure 5.3.1). Plus le rapport  $\frac{l}{h}$  tend à diminuer, induisant une plus forte sensibilité au gauchissement, plus des écarts d'évaluation des déplacements  $u_1(x_3)$  apparaissent entre les deux méthodes. Pour le cas étudié expérimentalement (figure 5.3.3), la différence de résultats est assez importante.

Une analyse des écarts relatifs entre les différents résultats est ici proposée pour apporter des éléments quantitatifs dans cette analyse. Celle-ci n'est pas effectuée pour les valeurs issues de la résolution avec la théorie classique car il n'y a pas de prise en compte du cisaillement transverse.

Le tableau 5.1 rassemble les différentes valeurs d'écarts des résultats analytiques ( $u_{1_{analytique}}(x_3)$ ) par rapport aux résultats issus de la modélisation numérique ( $u_{1_{EF}}(x_3)$ ),

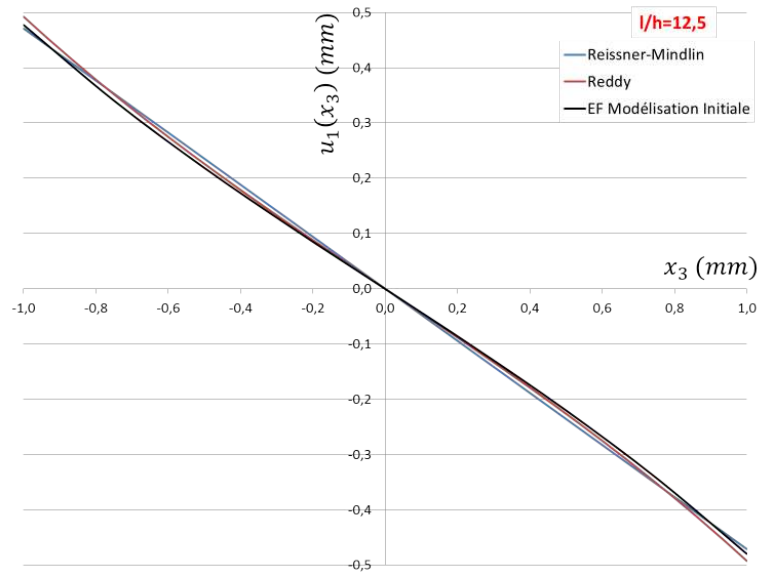


FIGURE 5.3.1: Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = +\frac{l}{4}$  avec  $\frac{l}{h} = 12,5$ , calculés analytiquement et numériquement

correspondant à l'écart relatif des différents profils par rapport à la modélisation numérique, tel que :

$$E_c = \left| \frac{(u_{1_{analytique}}(x_3) - u_{1_{EF}}(x_3))}{u_{1_{EF}}(x_3)} \right| \quad (5.3.1)$$

$f(x_3)$	$\frac{l}{h} = 12,5$	$\frac{l}{h} = 5$	$\frac{l}{h} = 1,25$
Reissner-Mindlin	4,8%	9,3%	38,9%
Reddy	3,0%	2,5%	18,9%
Touratier	2,7%	6,7%	15,4%
Karama	2,4%	9,7%	12,0%
Mantari	3,3%	10,1%	16,9%

Tableau 5.1: Moyenne des écarts  $E_c$  en % pour  $u_1(+\frac{l}{4}, x_3)$  en fonction de  $f(x_3)$ , pour les différentes valeurs de  $\frac{l}{h}$  étudiées

On remarque dans ces données que les modèles de fonctions de cisaillement proposés permettent une bonne approximation du champ de déplacement dans le cas des

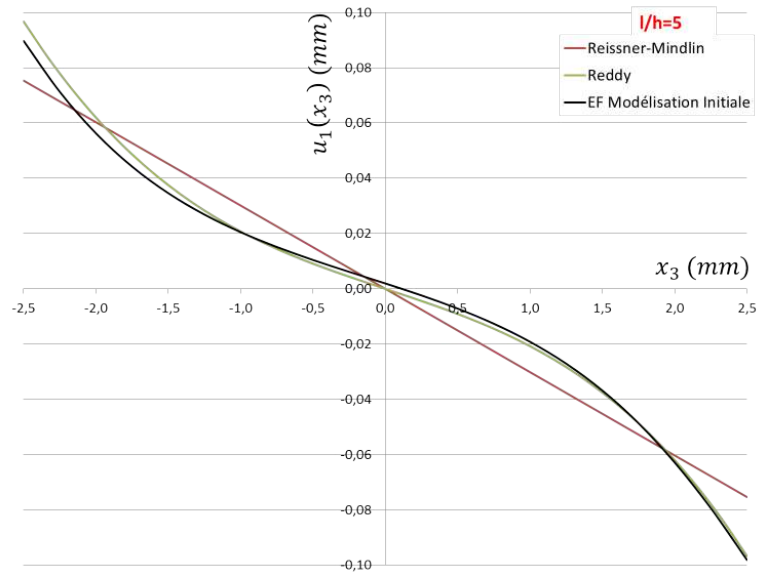


FIGURE 5.3.2: Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = +\frac{l}{4}$  avec  $\frac{l}{h} = 5$ , calculés analytiquement et numériquement

poutres de faible épaisseur. Les écarts étudiés pour les cinq modèles sont proches de 3% par rapport au modèle numérique. Dans le cas des poutres de moyenne épaisseur, la précision des résultats donnés par les modèles de Reddy, Touratier semble supérieure aux autres modèles. Aussi, on identifie également les possibilités de la théorie naturelle avec une approximation proche de 10% par rapport au modèle numérique. Néanmoins, cette dernière ne permet pas de prendre en compte le gauchissement, clairement observé sur les résultats. Dans le cas de poutres à forte épaisseur, les valeurs des écarts, toutes supérieures à 10% démontrent les différences de résultat pour de fort gauchissement. Des écarts plus importants sont issus de la résolution à l'aide de la théorie naturelle où  $f(x_3) = x_3$ . Ce résultat déjà connu de la communauté a déjà fait l'objet d'évolutions à travers l'introduction d'un facteur de correction du cisaillement transverse, proposé par Vlachoutsis (Vlachoutsis, 1992). Il introduit un facteur de correction dans la loi de comportement pour augmenter la prise en compte du phénomène dans la résolution du champ de déplacement.

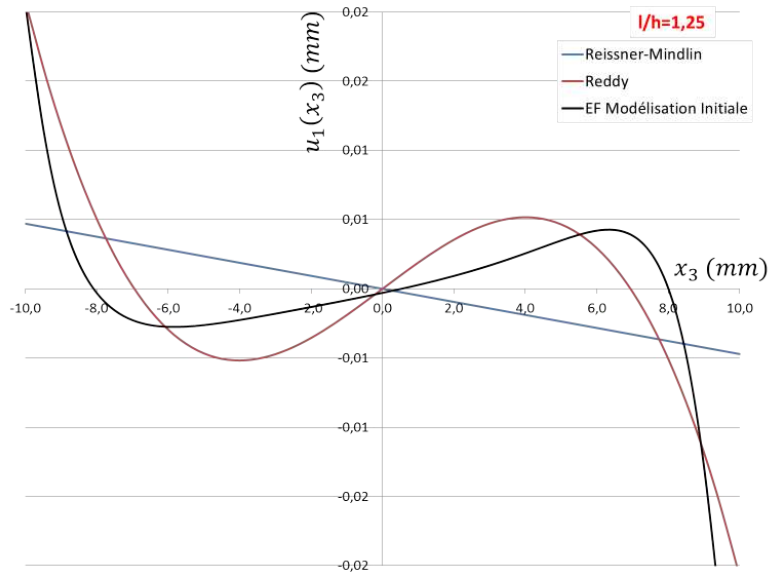


FIGURE 5.3.3: Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = +\frac{l}{4}$  avec  $\frac{l}{h} = 1,25$ , calculés analytiquement et numériquement

## 5.4 Étude de la fibre T700

Le premier des deux matériaux étudiés est un composite T700/4090. Il est constitué de fibres de carbone T700 et d'une résine epoxy 4090 standard. Les propriétés matériaux caractérisées dans les paragraphes 3.2.3 et 3.2.5 montrent que le rapport  $\frac{E_{11}}{G_{13}}$  est égal à 35,94 d'après la caractérisation des propriétés mécaniques décrites dans le chapitre 3, ce qui traduit une sensibilité au gauchissement intéressante pour cette étude. Les paragraphes ci-dessous exposent les différents résultats issus des essais de flexion trois points réalisés dans le  $\mu$ -tomographe, après le recalage des données obtenues conformément aux conditions décrites dans le paragraphe 5.2.2.1 précédent. La figure 5.4.1 présente l'évolution du chargement de l'éprouvette en fonction du déplacement de flexion imposé par le vérin électrique du montage. Ce chargement est bien linéaire et est en accord avec le comportement élastique supposé du matériau dans cette configuration. Le chargement maximum tracé ici correspond à la charge maximum considérée pour l'analyse des résultats. Au delà de cette force, la propagation de la zone de matage autour des appuis devient trop importante pour pouvoir exploiter les profils de déplacements  $u_1$



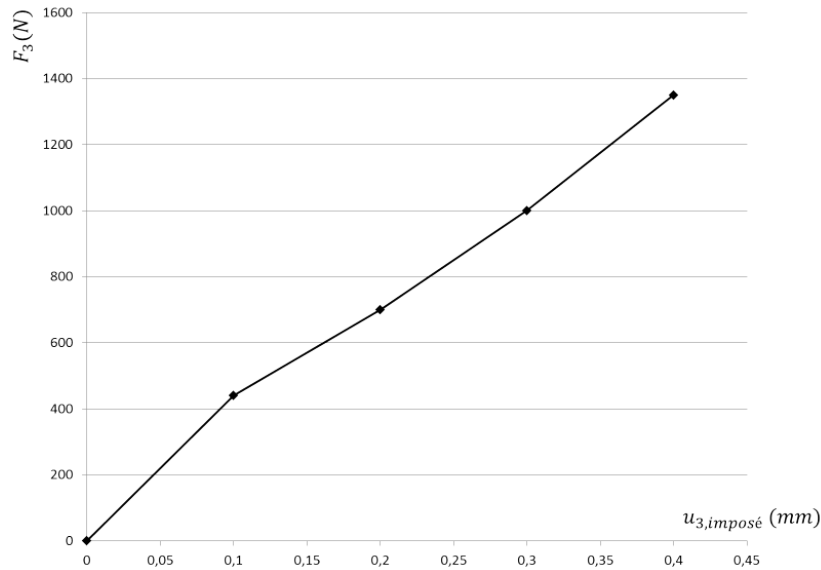


FIGURE 5.4.1: Courbe du chargement de flexion des éprouvettes T700/4090

aux coordonnées  $x_1 = -\frac{l}{4}$  et  $x_1 = +\frac{l}{4}$ .

### 5.4.1 Champs de déplacement $u_1$ et $u_3$

Les résultats calculés par corrélation volumique sont les déplacements à chaque point de la grille volumique qui discrétise l'échantillon dans les trois directions de l'espace. Il est alors possible de représenter le champ de déplacement dans de multiples plans de l'épaisseur des échantillons, pour tous les états de chargement de l'essai réalisé.

Dans le cadre de l'étude du gauchissement des matériaux composites, on s'intéresse en particulier au champ de déplacement longitudinal  $u_1$ . Néanmoins, pour analyser la cohérence de l'essai effectué, il est également intéressant de visualiser le champ de déplacement  $u_3$ , représentant le déplacement directement induit par le chargement de flexion. Les figures 5.4.2 et 5.4.3 illustrent respectivement les déplacements de flexion expérimentaux et numériques pour un chargement donné. La comparaison qualitative de ces résultats permet de justifier la représentativité de l'essai réalisé dans le  $\mu$ -tomographe, ayant pour objectif l'obtention d'une sollicitation de cisaillement via une configuration de flexion rapprochée. On identifie clairement la bonne distribution du déplacement dans

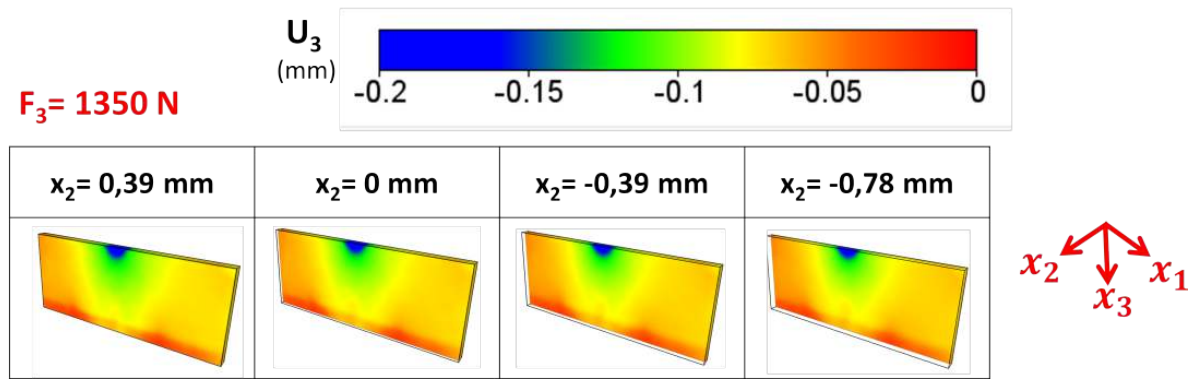


FIGURE 5.4.2: Champ de déplacement  $u_3$  mesuré pour le matériau T700/4090 pour un chargement de 1350N

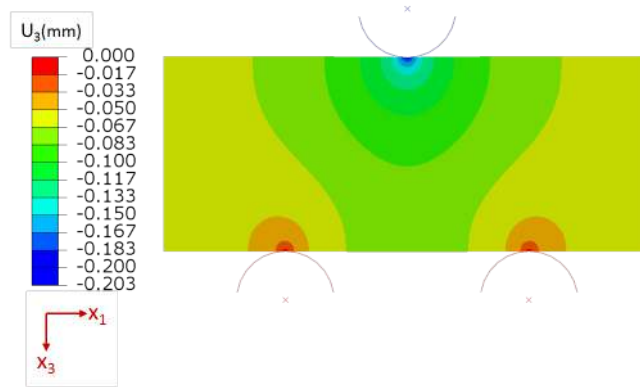


FIGURE 5.4.3: Champ de déplacement  $u_3$  calculé numériquement pour le matériau T700/4090 pour un chargement de 1350N

les cartographies expérimentales. L'amplitude du déplacement étant grande vis-à-vis de la résolution de mesure, le niveau de bruit des mesures est faible. Les cartographies dans les différents plans de l'épaisseur de l'échantillon analysé permet de mettre en évidence la bonne application du chargement de flexion. En effet, la répartition du déplacement est identique dans les différents plans analysés, ce qui valide la direction d'application du chargement imposé à l'éprouvette.

Le champ de déplacement  $u_1$  est le résultat qui permet d'analyser plus directement les effets du cisaillement transverse étudiés. La figure 5.4.4 présente les cartographies obtenus par DVC pour le matériau T700/4090 pour différents chargement et à différentes positions dans l'épaisseur de l'éprouvette. En premier lieu, on notera que l'amplitude des

valeurs mesurées (quelques  $\mu\text{m}$ ) est relativement proche de la résolution des mesures, ce qui explique la présence de bruit dans le signal. D'autre part, ce bruit est principalement accentué au centre de l'éprouvette ( $x_1 = 0$ ), ce qui correspond à une position proche de l'axe de rotation de l'échantillon pendant l'acquisition des projections, où généralement se concentrent les artéfacts de reconstruction. Malgré une augmentation du bruit de mesure dans cette zone, l'exploitation des résultats est tout de même bonne du fait de l'étude des profils aux positions médianes des appuis de flexion. Ces résultats permettent également d'observer l'amplification du phénomène de gauchissement en fonction du chargement appliqué. Du point de vue de l'épaisseur de l'éprouvette, l'analyse qualitative de ces cartographies ne permet pas de détecter une évolution significative du gauchissement dans la direction  $x_2$ .

### 5.4.2 Champ de déformation $E'_{13}$

Tout comme l'observation du champ de déplacement  $u_3$ , il est intéressant de visualiser la répartition des déformations calculées à partir des mesures de déplacements de la corrélation volumique et de les comparer aux résultats obtenus par le modèle éléments finis.

Les figures 5.4.5 et 5.4.6 représentent respectivement la répartition de la déformation de Green-Lagrange  $E'_{13}$  mesurée par DVC et calculée par éléments finis. La correspondance de ces résultats traduit de manière semblable la localisation des extrema de déformations élastiques de cisaillement dans les zones très proches des appuis. On notera néanmoins que la déformation est moins bien calculée aux appuis inférieurs de flexion. Cette différence peut être due à la position fixe des points de la grille de corrélation à l'état initial qui peut entraîner des points non calculés à l'état final. On observe cela plus particulièrement aux positions frontières, du fait des déplacements d'ensemble induisant des valeurs mesurées non réalistes, dues aux zones d'ombre engendrées par les fortes déformations localisées autour des appuis. De la même manière que pour le champ de déplacement  $u_1$ , l'évolution du résultat dans la direction  $x_2$  de l'éprouvette n'est pas significative et permet également de justifier l'hypothèse de contraintes planes

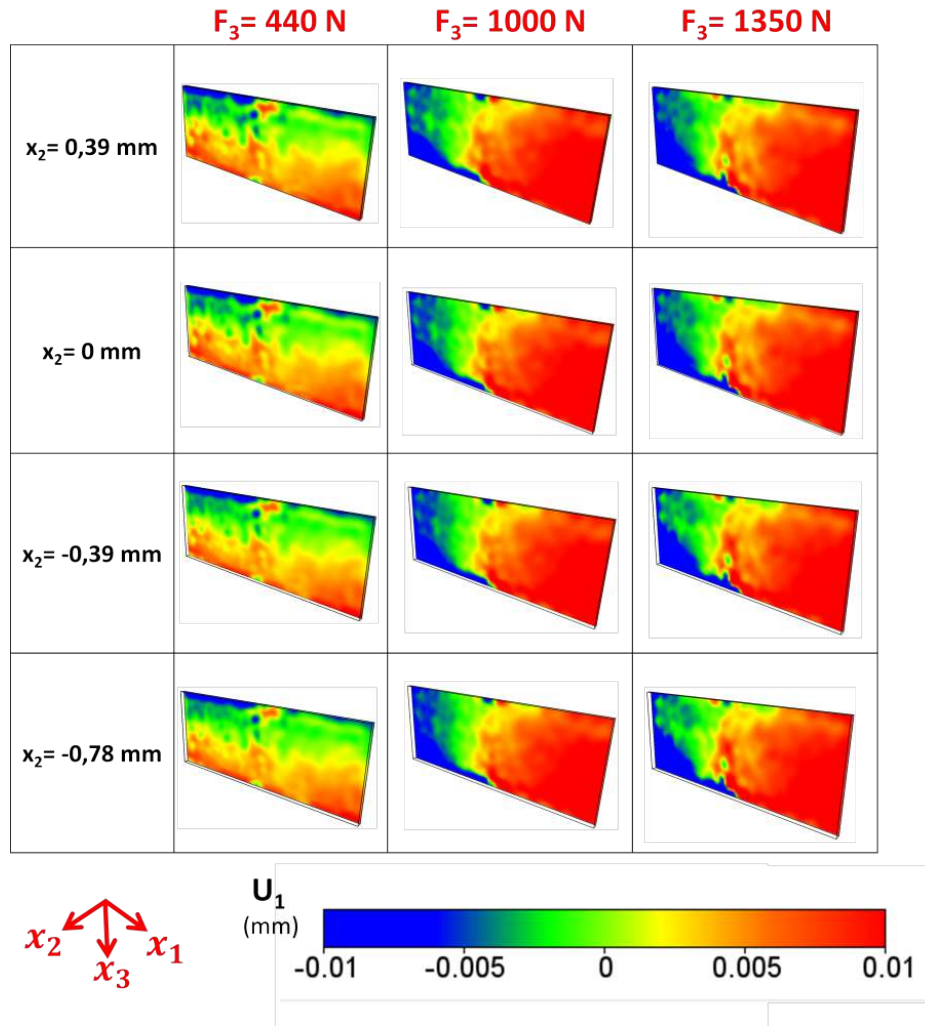


FIGURE 5.4.4: Champ de déplacement  $u_1$  mesuré pour le matériau T700/4090, pour différents chargements

du modèle éléments finis utilisé.

### 5.4.3 Confrontation des résultats

Pour les différents états de chargement mesurés, plusieurs types de résultats sont disponibles :

- Résolution analytique
- Modélisation éléments finis

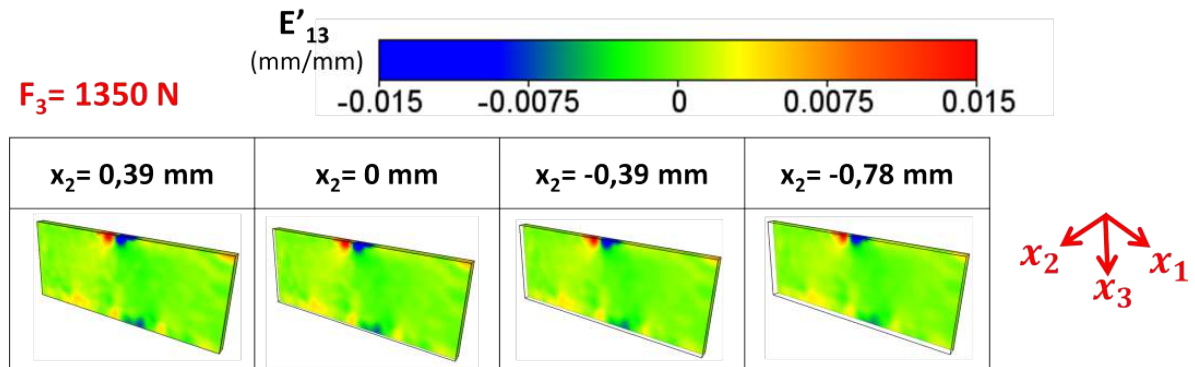


FIGURE 5.4.5: Champ de déformation  $E'_{13}$  mesuré pour le matériau T700/4090 pour un chargement de 1350N

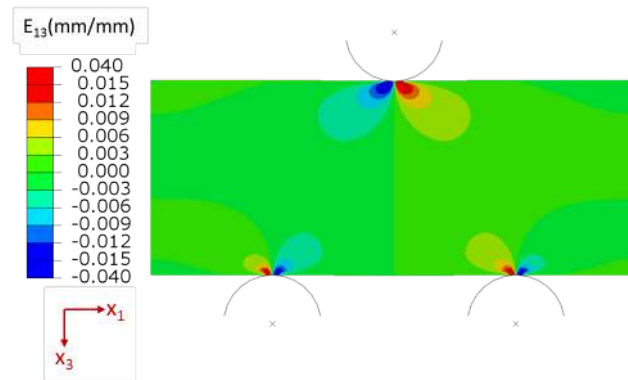


FIGURE 5.4.6: Champ de déformation  $E'_{13}$  calculé numériquement pour le matériau T700/4090 pour un chargement de 1350N

– Mesure expérimentale volumique

Ce paragraphe propose la comparaison des différents résultats obtenus dans les chapitres précédents avec les mesures effectuées sur la fibre T700. Les figures 5.4.7 à 5.4.10 présentent la superposition des données expérimentales avec les résultats analytiques et numériques correspondant aux mêmes conditions de chargement. Ces tracés sont issus des résultats du plan médian à travers l'épaisseur de l'éprouvette.

L'analyse de ces tracés confirme la présence du bruit de mesure identifié sur les cartographies précédentes, en particulier pour les faibles chargements. Néanmoins, l'évolution de l'amplitude du phénomène étudié en fonction de la valeur de l'effort de flexion

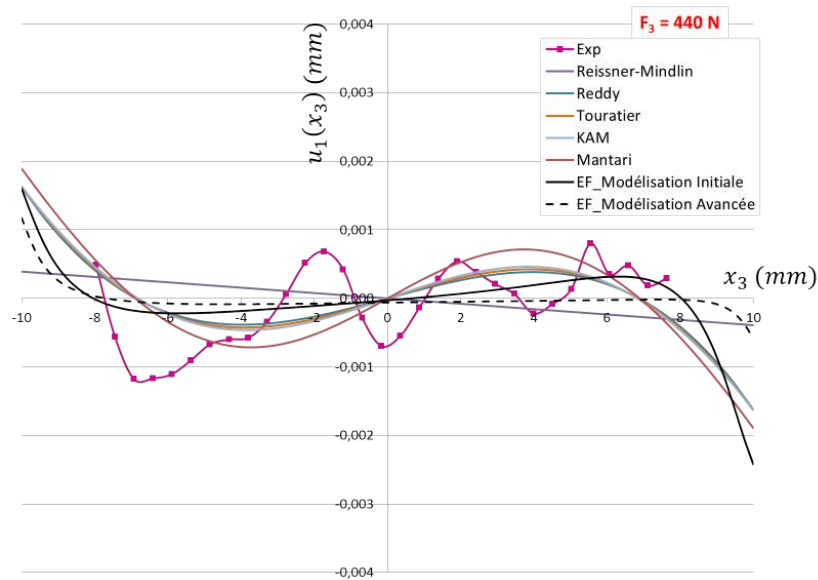


FIGURE 5.4.7: Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = +\frac{l}{4}$  du matériau T700/4090, pour un chargement de 400N

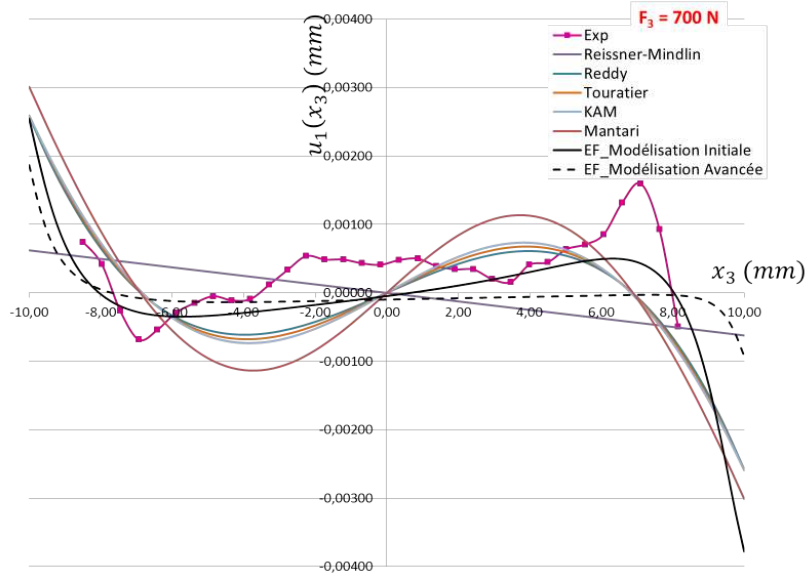


FIGURE 5.4.8: Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = +\frac{l}{4}$  du matériau T700/4090, pour un chargement de 700N

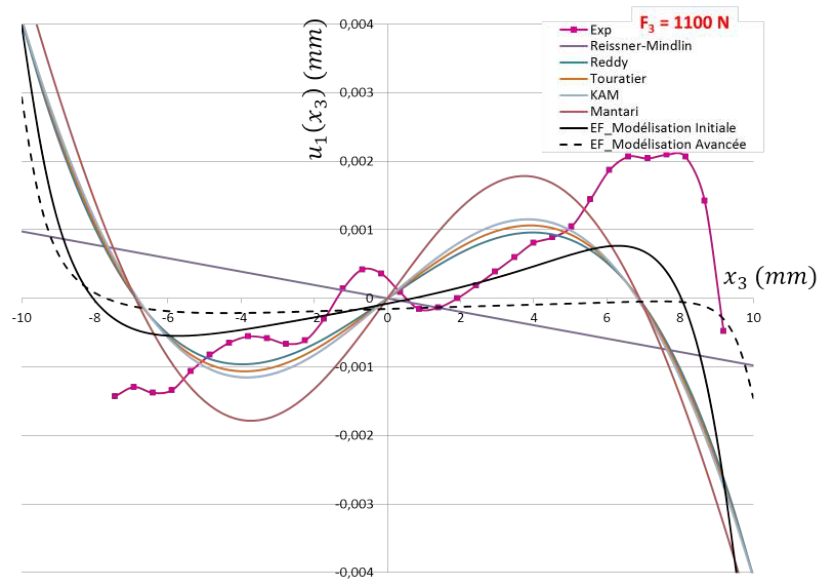


FIGURE 5.4.9: Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = +\frac{l}{4}$  du matériau T700/4090, pour un chargement de 1100N

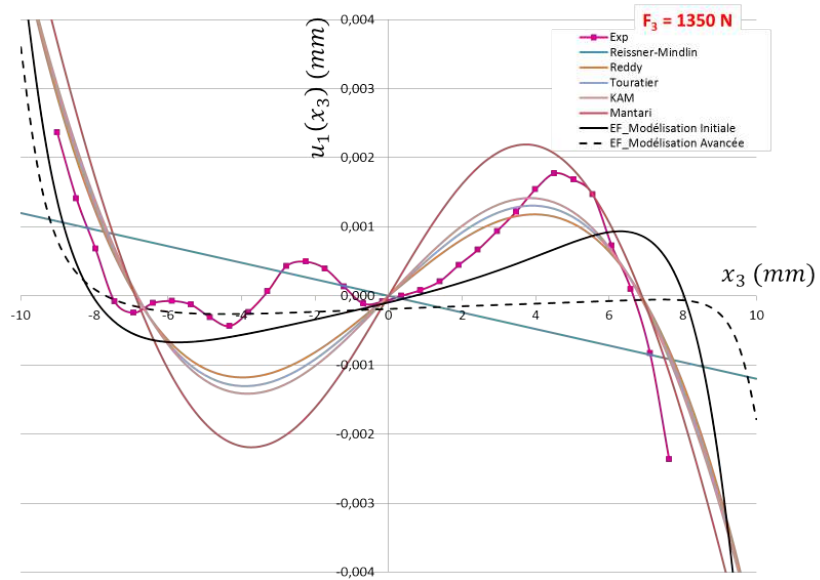


FIGURE 5.4.10: Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = +\frac{l}{4}$  du matériau T700/4090, pour un chargement de 1350N

est visible sur les différents tracés présentés. Du point de vue du gauchissement, les tendances permettent d'observer une bonne correspondance des valeurs mesurées avec les modèles analytiques raffinés. Cette remarque rejoint les conclusions faites vis-à-vis de la qualité des résultats numériques dans le cas de fortes épaisseurs de poutres, où le gauchissement n'est pas idéalement calculé.

#### 5.4.4 Synthèse

Les essais effectués sur ce matériau sont les premiers ayant permis de visualiser les résultats par la méthode expérimentale proposée. Huit éprouvettes de flexion ont été testées puis analysées pour ce matériau. Les résultats permettent de valider le principe de l'utilisation des méthodes volumiques pour l'évaluation des déplacements dans une structure composite. Les profils observés en fonction du chargement font bien apparaître les effets du cisaillement transverse sur les déplacements de la structure. D'autre part, ces résultats mettent également en évidence les limites actuelles de la méthode concernant le bruit de mesure. L'expérience de ces essais permet néanmoins de privilégier la qualité de la reconstruction des différentes images volumiques utilisées où la présence d'artéfacts est systématique. D'autre part, la qualité du mouchetis volumique réalisé pour la fabrication de ces éprouvettes peut également générer une part de bruit dans la mesure où la répartition des particules de cuivre n'est pas idéale, ce qui semble être une piste d'amélioration pour la réalisation des éprouvettes.

### 5.5 Étude de la fibre M55J

Des essais ont également été réalisés sur des éprouvettes constituées du couple fibres/résine M55J/M18. La fibre M55J est une fibre possédant une raideur très importante. Cette fibre est couramment utilisée dans les programmes de l'industrie aérospatiale car elle permet une grande stabilité des structures tout en conservant une masse raisonnable. La grande raideur de ce matériau induit théoriquement une très forte sensibilité au gauchissement dans le cas de contraintes de cisaillement transverses majoritaires. Le



rapport des propriétés mécaniques  $\frac{E_{11}}{G_{13}}$  vaut 283,3. Les paragraphes suivants présentent les résultats issus des essais de flexion trois points réalisés sur ce matériau, pour lequel cinq éprouvettes ont été testées. La figure 5.5.1 présente l'évolution du chargement de flexion mesurée en fonction du déplacement appliqué par le vérin du dispositif in situ. Elle permet de valider le comportement linéaire de cet essai.

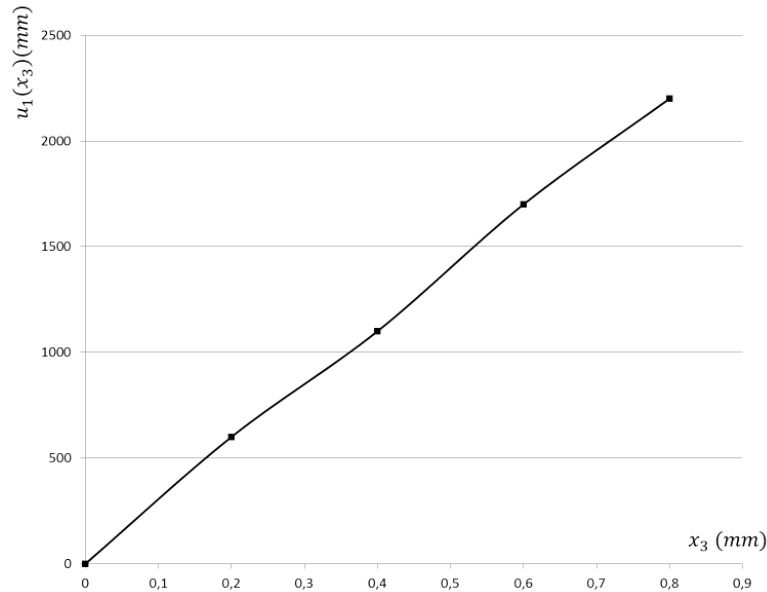


FIGURE 5.5.1: Courbe du chargement de flexion des éprouvettes M55J/M18

### 5.5.1 Champs de déplacement $u_1$ et $u_3$

Tout comme cela a été effectué pour la fibre T700 dans les paragraphes précédents, les figures suivantes présentent les résultats issus des calculs de corrélation volumique entre différents états de chargement, pour les champs de déplacement  $u_1$  et  $u_3$ . Les champs de déplacements sont proposés sur différents plans de calcul des éprouvettes de manière à analyser la cohérence des essais réalisés et les éventuels effets volumiques recherchés.

Les figures 5.5.2 et 5.5.3 illustrent respectivement les champs de déplacement  $u_3$  mesurés par DVC sur différents plans ainsi que les champs  $u_3$  calculés par éléments finis,

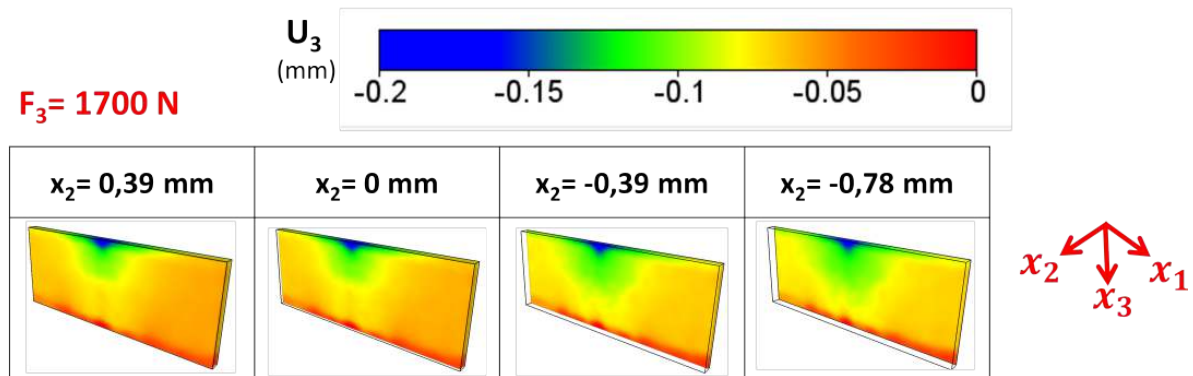


FIGURE 5.5.2: Champ de déplacement  $u_3$  mesuré pour une éprouvette M55J/M18, pour un chargement de 1700N

pour un chargement identique de 1700N. La répartition des valeurs de déplacement correspond bien aux résultats issus du calcul numérique et valide également la configuration de flexion trois points recherchée. Pour un chargement identique, on s'aperçoit également que le déplacement mesuré aux contacts des appuis de l'éprouvette est similaire à celui visualisé sur les cartographies éléments finis. Néanmoins l'analyse des différents plans met également en évidence des défauts de répartition de la charge dans l'épaisseur de l'éprouvette car celle-ci n'est pas complètement identique sur les différents plans. Même si ce défaut est relativement faible, l'analyse des déplacements  $u_1$  peut être parasitée et faire apparaître une dissymétrie du comportement dans l'épaisseur, et donc des différences dans les valeurs de gauchissement déterminées pour différentes positions suivant  $x_2$ .

La figure 5.5.4 présente en détail les champs de déplacement  $u_1$  pour les essais réalisés sur les échantillons M55J/M18. Trois états de chargement sont illustrés, toujours pour différentes valeurs dans la direction de l'épaisseur des échantillons. Comme pour le premier matériau étudié, l'amplitude des valeurs reste proche de la résolution de mesure minimum, ce qui induit également la présence de bruit dans les données. Certaines zones font également apparaître quelques valeurs non réalistes, aux frontières de la grille de corrélation où de fortes discontinuités sont présentes, particulièrement en  $x_1 = +\frac{L}{2}$ . Néanmoins, en comparaison des résultats présentés dans le troisième chapitre de ce manuscrit, on peut observer globalement une cohérence satisfaisante des valeurs mesurées.

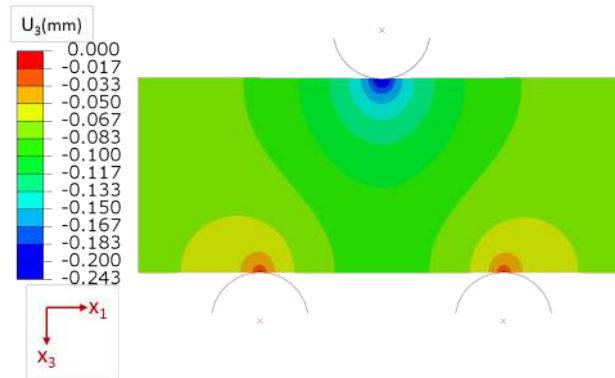


FIGURE 5.5.3: Champ de déplacement  $u_3$  calculé numériquement pour une éprouvette M55J/M18, pour un chargement de 1700N

### 5.5.2 Champ de déformation $E'_{13}$

Les figures 5.5.5 et 5.5.6 présentent les résultats obtenus pour le calcul des déformations de Green-Lagrange de cisaillement  $E'_{13}$  dans le plan  $(1, 3)$ , respectivement par corrélation volumique et par modélisation numérique. Ces résultats montrent également la cohérence des essais réalisés par la bonne concordance des valeurs, comme c'est le cas pour les résultats du premier matériau T700/4090. On notera que les déformations étant calculées à partir des composantes du champ de déplacement, le bruit de mesure est également accentué du fait de la longueur de jauge de 20 voxels utilisée pour le calcul par différences finies.

### 5.5.3 Confrontation des résultats

Comme pour les échantillons du matériau T700/4090, plusieurs états de chargement sont exploités à partir des données de DVC pour analyser le gauchissement des éprouvettes M55J/M18 en détail. Les figures 5.5.7 à 5.5.10 présentent les profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour les différents chargements appliqués au matériau M55J/M18.

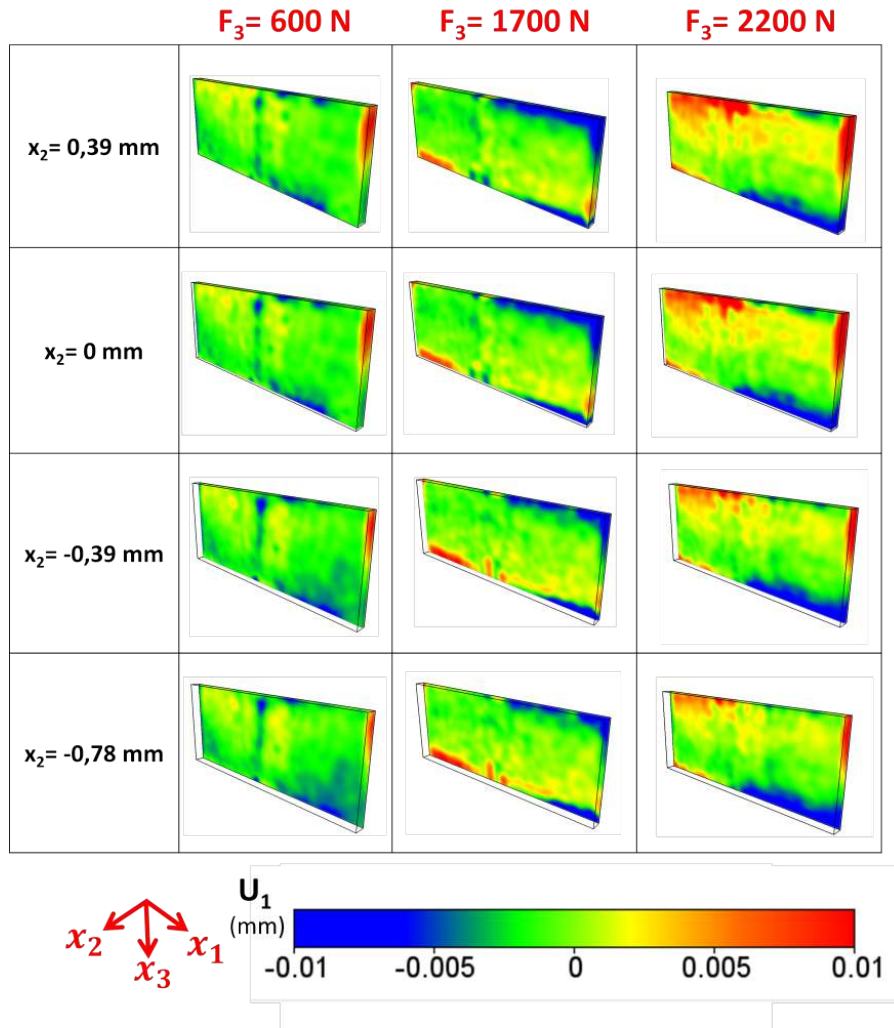


FIGURE 5.5.4: Champ de déplacement  $u_1$  mesuré pour une éprouvette M55J/M18 pour différents chargements

### 5.5.4 Synthèse

De même que pour le premier matériau présenté, la distribution des déplacements le long de la hauteur de l'éprouvette est parfaitement visible sur les résultats expérimentaux présentés, tout comme le gauchissement. Concernant la fabrication de ces éprouvettes, une attention particulière a été portée à la réalisation du mouchetis volumique. Une distribution plus uniforme des marqueurs métalliques permet une réduction intéressante du bruit de mesure, constatée sur les graphiques précédents. Les conclusions

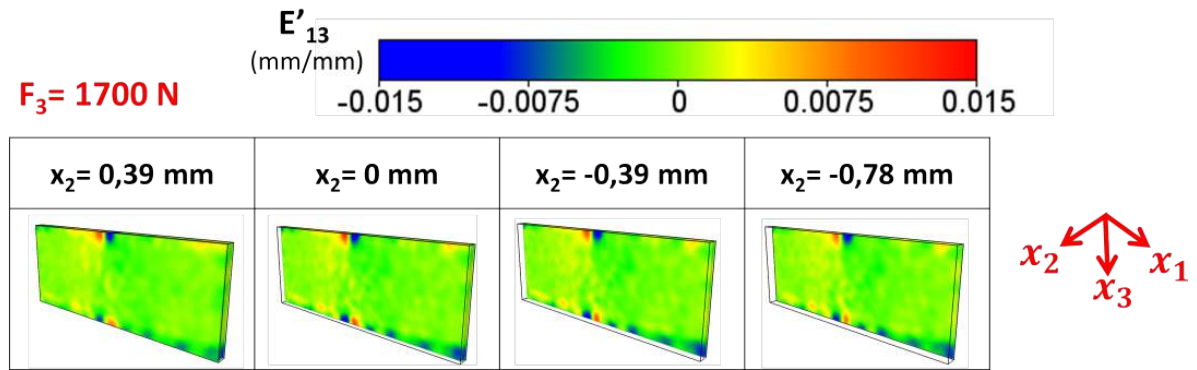


FIGURE 5.5.5: Champ de déformation  $E'_{13}$  mesuré pour une éprouvette M55J/M18, pour un chargement de 1700N

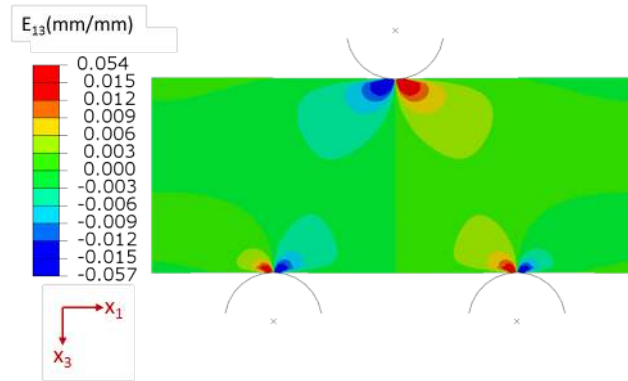


FIGURE 5.5.6: Champ de déformation  $E'_{13}$  calculé numériquement pour le matériau M55J/M18, pour un chargement de 1700N

faites concernant les résultats de la fibre T700 peuvent être transposées aux éprouvettes M55J/M18. En effet, les tendances visualisées indiquent une bonne correspondance des profils expérimentaux avec les valeurs issues de la résolution analytique. L'utilisation des modèles raffinés pour l'évaluation du gauchissement peut donc se justifier pour approfondir le dimensionnement des structures composites.

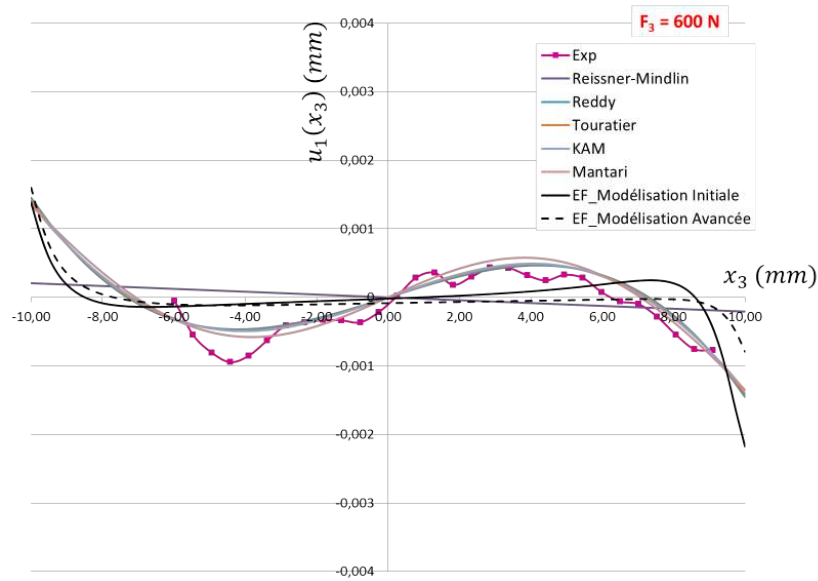


FIGURE 5.5.7: Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = +\frac{l}{4}$  du matériau M55J/M18, pour un chargement de 600N

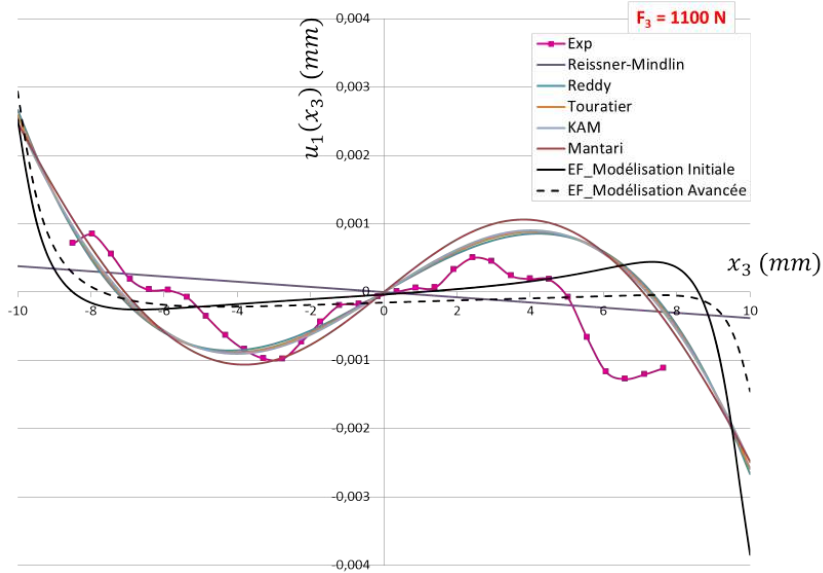


FIGURE 5.5.8: Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = +\frac{l}{4}$  du matériau M55J/M18, pour un chargement de 1100N

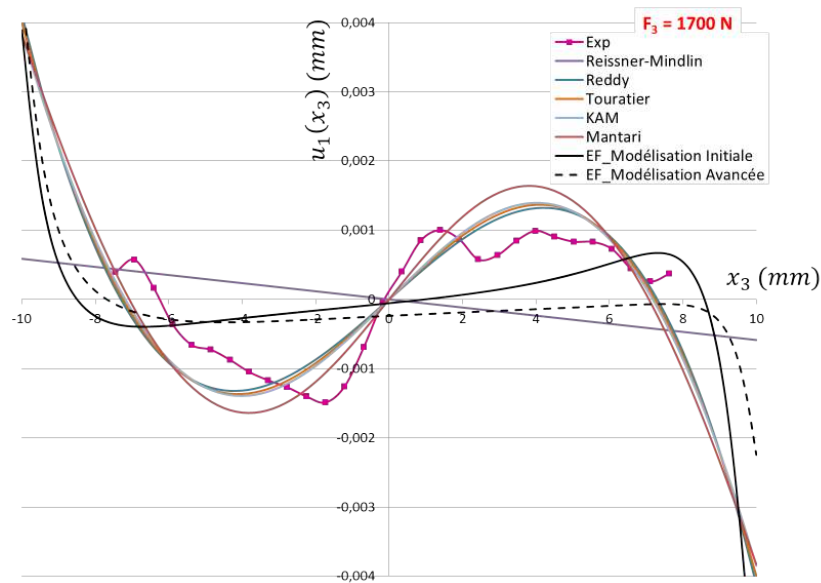


FIGURE 5.5.9: Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = +\frac{l}{4}$  du matériau M55J/M18, pour un chargement de 1700N

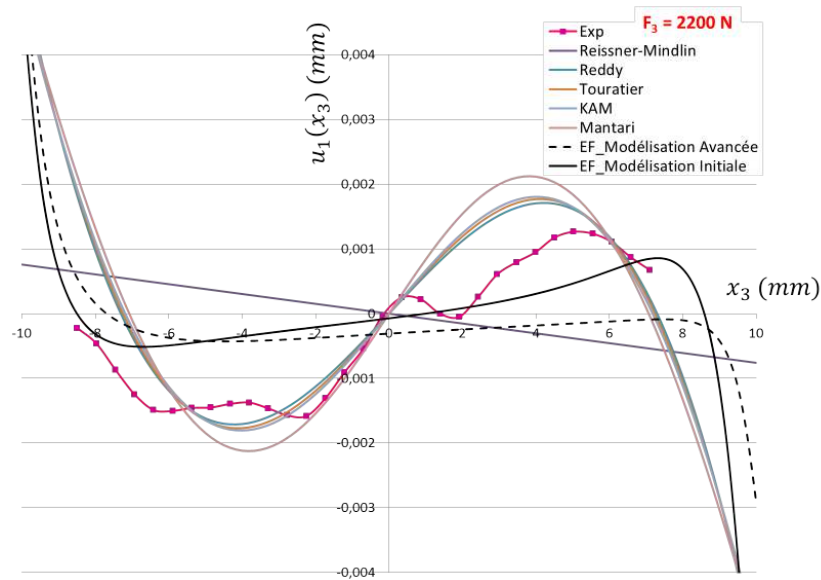


FIGURE 5.5.10: Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = +\frac{l}{4}$  du matériau M55J/M18, pour un chargement de 2200N

## 5.6 Étude du gauchissement

### 5.6.1 Critère d'évaluation du gauchissement

Les données mesurées par DVC permettent, après recalage, d'avoir accès aux profils de déplacement longitudinal  $u_1(x_3)$ , sur lesquelles le gauchissement des sections est quantifiable. Ces profils sont donc comparables à ceux obtenus par la méthode de résolution analytique et par le modèle éléments finis. La force minimum correspond au premier état de chargement et la force maximum correspond au dernier état exploitable de l'essai, conformément à la courbe de chargement présentée en figure 5.5.1. La tendance de chacune des courbes présentées permet de conclure sur la réalité physique du gauchissement des matériaux étudiés, et d'identifier son évolution en fonction du chargement de flexion  $F_3$  supporté par l'échantillon.

De la même manière que cela est réalisé entre les différents modèles raffinés au chapitre 2, le gauchissement des profils des déplacements expérimentaux est étudié et comparé à celui des résultats analytiques. Le critère  $\Delta$  défini au paragraphe 2.2.3 permet d'identifier le taux de gauchissement observé pour chacun des modèles. Néanmoins, il ne permet pas de prendre en compte son évolution en fonction du chargement. Dans la suite de cette analyse, on définit la notion d'amplitude du gauchissement  $\Omega$  comme étant la valeur de la moyenne quadratique des écarts entre les valeurs du profil expérimental  $u_{1_{Exp}}(x_3)$  et celles du profil calculé analytiquement avec la théorie naturelle  $u_{1_{RM}}(x_3)$ , tel que :

$$\Omega_{Exp} = \sqrt{\left[ \frac{1}{n} \left( \sum_1^n (u_{1_{Exp}}(x_3) - u_{1_{RM}})^2 \right) \right]} \quad (5.6.1)$$

Le terme  $\Omega$  peut également être calculé indépendamment pour les profils obtenus numériquement ou analytiquement (avec les modèles raffinés). Il traduit le gauchissement des sections introduit par les contraintes de cisaillement transverse. Le paragraphe suivant présente l'analyse des deux matériaux utilisées (T700 et M55J) en terme de gauchissement.



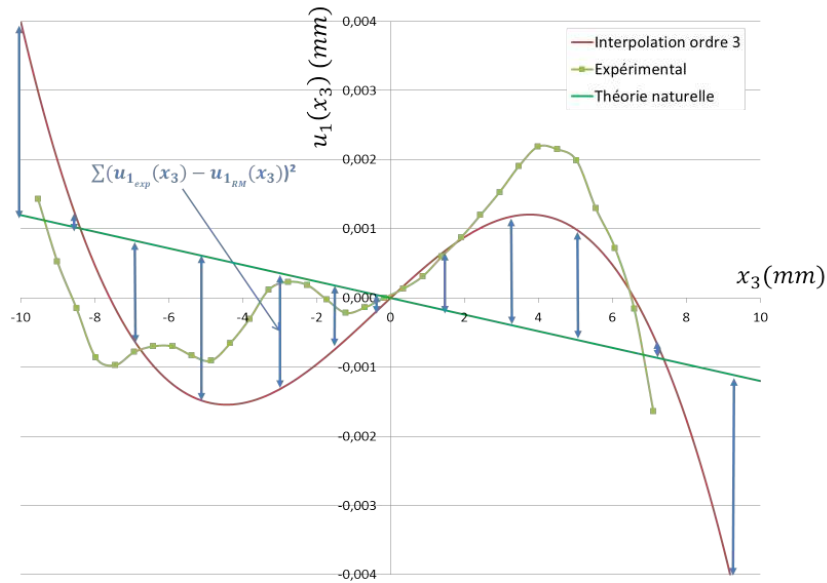


FIGURE 5.6.1: Méthode de traitement des valeurs expérimentales pour l'analyse du gauchissement

## 5.6.2 Résultats

D'après les résultats présentés au début de ce chapitre et leurs commentaires, le bruit présent dans les signaux issus des mesures du déplacement  $u_1(x_3)$  peut être problématique pour l'évaluation de l'amplitude du gauchissement. D'autre part, les limites des calculs par DVC réalisées entraînent des erreurs de mesure aux frontières de la grille volumique dans les trois directions. Les valeurs correspondantes à ces positions ne peuvent donc pas être utilisées. Pour permettre la réalisation du calcul des grandeurs définies par l'expression 5.6.1, une interpolation polynomiale d'ordre 3 des valeurs expérimentales est effectuée pour évaluer les valeurs de  $u_1(x_3)$  aux positions frontières et limiter l'influence du bruit dans la détermination de ce résultat. Cette méthode est illustrée par la figure 5.6.1.

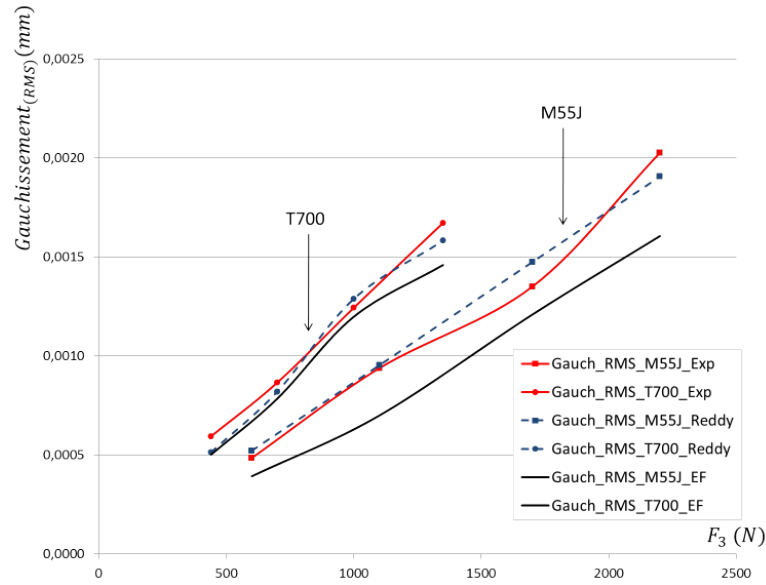


FIGURE 5.6.2: Critères de gauchissement pour les deux matériaux étudiés en fonction du chargement

La figure 5.6.2 présente l'évolution des valeurs d'amplitude de gauchissement en fonction du chargement, d'une part pour les résultats expérimentaux, et d'autre part pour les résultats analytiques et numériques. Pour simplifier la visualisation, la figure présente uniquement la courbe de  $\Omega_{Reddy}(F_3)$  de manière à observer la tendance pour les fonctions raffinées. La concordance des valeurs expérimentales et analytiques est intéressante. Elle permet de crédibiliser les modèles raffinés utilisés. La tendance observée pour les résultats numériques est différente, on constate des écarts plus importants qui confirment la meilleure représentativité des résultats analytiques.

## 5.7 Analyse des effets volumiques

Un des intérêts de l'utilisation de la corrélation volumique pour les mesures mécaniques est de pouvoir analyser le comportement selon les trois directions de l'espace. Les hypothèses d'étude du cisaillement transverse, analytiques et numériques ne considèrent pas d'influence de la direction hors plan (1,3) dans la répartition des contraintes de cisaillement et donc du gauchissement des sections. Néanmoins, la question des effets

de bord sur les valeurs de déplacement dans ce cas de figure peut se poser. Pour traiter cela, une analyse des profils selon plusieurs position  $x_2$  est effectuée, pour une position fixe  $x_1 = -\frac{l}{4}$ . La figure 5.7.1 présente un exemple de résultats avec les profils issus des essais réalisés avec le matériau M55J/M18. Dans un souci de lisibilité, les profils expérimentaux ne sont pas directement superposés de manière à filtrer le bruit de mesure. Une interpolation d'ordre 3 est effectuée pour déterminer la tendance propre à chaque profil. Néanmoins le résultat moyenné suivant la direction  $x_2$  est également présenté. Il permet d'observer que les différences entre les profils de chaque position sont du même ordre de grandeur que l'amplitude du bruit de mesure observée. En complément, la courbe issue de la résolution analytique effectuée avec le modèle raffiné de Reddy permet d'identifier la cohérence de ce résultat. Les mesures réalisées par DVC permettent de constater qu'il n'y a effectivement pas de différences significatives dues aux effets de bords de l'éprouvette. La tendance observée sur les surfaces extérieures est similaire à celle observée sur le plan (1, 3) médian de la structure. On peut donc conclure que cette hypothèse est cohérente.

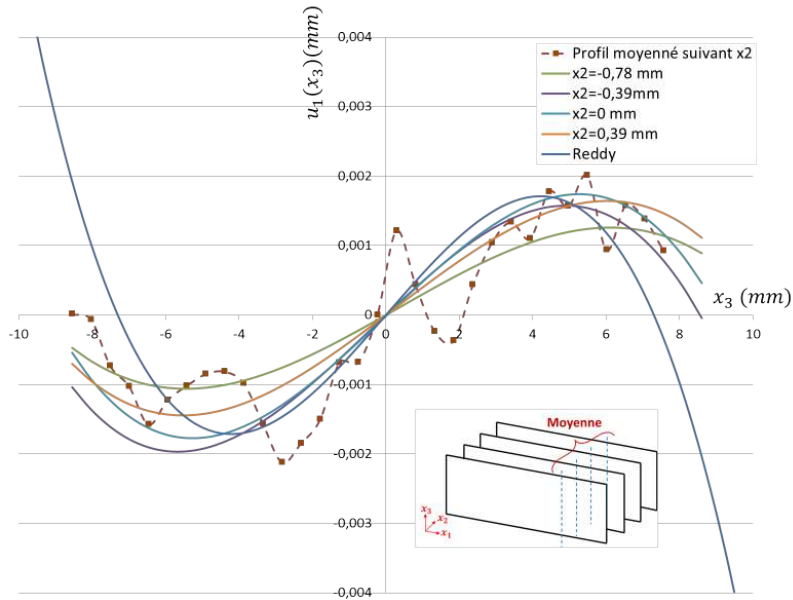


FIGURE 5.7.1: Comparaison des profils de gauchissement à travers l'épaisseur du matériau M55J/M18 en  $x_1 = +\frac{l}{4}$ , pour un chargement de 2200N

## 5.8 Conclusions

Ce cinquième chapitre constitue la synthèse de différents résultats déterminés et analysés sur ce sujet. Une analyse métrologique des données mesurées permet de quantifier la précision des mesures réalisées par DVC par l'intermédiaire de l'évaluation des écarts entre un déplacement imposé et un déplacement mesuré. Une partie de ce chapitre traite de la démarche appliquée pour l'exploitation des résultats issus de différentes sources. Une méthode est alors proposée dans le but de traiter les résultats expérimentaux de manière à pouvoir les étudier en cohérence avec les résultats théoriques. Dans un premier temps, une comparaison des résultats analytiques et numériques a permis d'identifier certaines différences pour la représentation du gauchissement. Ces données ont fait apparaître des différences importantes qui justifient le fait que la modélisation numérique, conforme à la résolution analytique utilisée, ne peut pas être considérée comme référence. Malgré une utilisation régulière des calculs éléments finis pour la comparaison de résultats analytiques pour des problématiques similaires, l'analyse du gauchissement dans les configurations de poutres à fortes épaisseurs, très sensibles au gauchissement, n'est pas idéalement prise en compte par la modélisation utilisée. L'ensemble des résultats expérimentaux issus des essais de flexion trois points sont exposés et commentés. Ceux-ci permettent de valider la méthode expérimentale et d'identifier des pistes d'amélioration pour certaines étapes du protocole proposé, notamment pour la réduction du bruit de mesure. Néanmoins, l'évaluation expérimentale des déplacements volumiques pour une structure composite est démontrée par l'intermédiaire des éléments présentés. D'un point de vue volumique, les mesures ont permis de confirmer l'absence d'un effet significatif à travers l'épaisseur des échantillons. D'autre part, une analyse de l'amplitude du gauchissement est abordée par l'intermédiaire de l'utilisation d'un critère quantitatif, ainsi que son évolution à travers la direction hors du plan de chargement. Les résultats confirment la pertinence des mesures effectuées pour chacun des matériaux étudiés. Les résultats présentés indiquent une meilleure représentativité du cas traité par la méthode de résolution analytique par rapport aux modélisations éléments finis réalisées. Néanmoins, des travaux peuvent être conduits pour approfondir cette approche. Dans

ce sens, le chapitre suivant propose un complément à la problématique traitée. Une méthode d'identification d'un modèle de fonction  $f(x_3)$  basée sur l'obtention des résultats expérimentaux y est présentée.



# Chapitre 6

## Identification d'une fonction de cisaillement transverse

6.1	Objectifs . . . . .	167
6.2	Méthode d'identification . . . . .	168
6.2.1	Algorithme de minimisation . . . . .	169
6.2.2	Gestion des minimums locaux . . . . .	170
6.3	Identification de la fonction de cisaillement transverse $f_{id}(x_3)$ . . . . .	172
6.3.1	Identification à partir des résultats expérimentaux . . . . .	173
6.3.2	Comparaison des résultats avec les théories existantes . . . . .	174
6.4	Exploitation du modèle $f_{id,1}(x_3)$ . . . . .	175
6.4.1	Calcul des déplacements $u_1(x_3)$ pour une poutre de forte épaisseur . . . . .	176
6.4.2	Calcul des déplacements $u_1(x_3)$ pour une poutre d'épaisseur moyenne . . . . .	177
6.4.3	Calcul des déplacements $u_1(x_3)$ pour une poutre de faible épaisseur . . . . .	178
6.4.4	Interprétations . . . . .	179
6.5	Étude des polynômes pour la fonction $f(x_3)$ . . . . .	180
6.5.1	Identification polynômiale . . . . .	180
6.5.2	Comparaison avec les modèles existants . . . . .	181
6.5.3	Extension de la théorie naturelle . . . . .	182
6.5.4	Proposition d'un nouveau modèle $f(x_3)$ . . . . .	184

**6.6 Conclusions** . . . . . 188



Les précédents chapitres de ce manuscrit ont décrit l'ensemble des travaux effectués pour l'analyse du cisaillement transverse dans les matériaux composites par des mesures expérimentales. Le chapitre 1 a permis d'établir la compréhension du phénomène étudié ainsi que l'identification des méthodes expérimentales pouvant répondre à la problématique du sujet. Le chapitre 2 détaille les éléments existants dans la bibliographie permettant l'analyse théorique du problème. Différentes théories de cisaillement sont retenues et intégrées à une méthode de résolution analytique. Celle-ci permet de tracer les profils de déplacement dans un cas de flexion trois points. Une étude numérique est proposée dans le chapitre 3, pour déterminer les valeurs de référence des différents cas étudiés. La méthode expérimentale décrite dans le chapitre 4 permet une observation physique du phénomène, par l'intermédiaire d'une mesure de déplacement volumique dans l'échantillon. Ces résultats expérimentaux sont exploités dans le chapitre 5 pour conclure sur la validité des théories analytiques étudiées et sur la pertinence des valeurs obtenues.

Des écarts ayant été observés entre les théories analytiques retenues, les résultats numériques et les résultats expérimentaux, il est proposé dans ce chapitre de définir une méthode d'identification d'un modèle de fonction  $f(x_3)$  déterminé sur la base des résultats expérimentaux mesurés, notée  $f_{id}(x_3)$ . Les paragraphes suivants présentent la méthodologie employée pour réaliser l'identification de cette fonction ainsi que les résultats basés sur son intégration à la résolution analytique du champ de déplacement en flexion trois points, présentée dans le chapitre 2. Ce travail est effectué sur la base des mesures volumiques réalisées. Néanmoins il est à noter que la méthode proposée peut être utilisée à partir de mesures 2D du même phénomène.

## 6.1 Objectifs

L'utilisation d'une nouvelle fonction  $f_{id}(x_3)$  peut permettre de considérer une solution analytique plus proche des profils de déplacements longitudinaux observés expérimentalement. L'objectif est l'étude d'un modèle de fonction de cisaillement déterminé à partir de résultats expérimentaux. Après identification, cette nouvelle théorie pourra

être utilisée analytiquement pour différentes configurations de matériaux, d'éprouvettes ou de chargement pour déterminer les valeurs de déplacements longitudinaux, et donc de gauchissement d'un cas donné. Les éléments issus de la bibliographie concernant la construction des fonctions de cisaillement transverse, exposés au paragraphe 1.1.3, associés aux données calculées par la méthode des éléments finis ou mesurées expérimentalement donnent la possibilité d'enrichir une fonction polynomiale de prise en compte du phénomène. Le degré polynomial maximum observé pour les fonctions retenues est l'ordre 9, ainsi la nouvelle fonction ne dépassera pas ce degré 9 dans un souci de cohérence vis-à-vis de la littérature. Seuls les paramètres  $a_i$  de l'équation 6.2.1 seront modifiés pour construire la nouvelle fonction.

## 6.2 Méthode d'identification

La construction de cette nouvelle fonction  $f_{id}(x_3)$  est basée sur le modèle du développement polynomial de la fonction de cisaillement  $f(x_3)$  rappelée dans l'équation 6.2.1, donnant l'évolution de la fonction selon un polynôme fonction de  $x_3$  en ordres impairs. Pour un polynôme d'ordre 9, cinq paramètres  $a_i$  sont donc à déterminer (avec  $i$  correspondant à l'ordre du polynôme) :  $a_1, a_3, a_5, a_7, a_9$ . Ces paramètres seront identifiés par un algorithme itératif de minimisation, basé sur la méthode de Newton, avec comme fonction objectif les écarts entre la série de données expérimentales de référence et la résolution analytique exploitant la fonction proposée à chaque itération.

$$a_1.x_3 - a_3 \cdot \left( \frac{\pi^2}{3!} \cdot \frac{x_3^3}{h^2} \right) + a_5 \cdot \left( \frac{\pi^4}{5!} \cdot \frac{x_3^5}{h^4} \right) + \dots + (-1)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot a_n \cdot \left( \frac{\pi^{(n-1)}}{n!} \cdot \frac{x_3^n}{h^{(n-1)}} \right) \quad (6.2.1)$$

La méthode utilisée pour la détermination de cette fonction est présentée par le synoptique 6.2.1. Les données d'entrée sont les valeurs expérimentales de déplacement  $u_1(x_3)$  et la méthode de résolution analytique. L'optimisation est effectuée sur les valeurs des paramètres  $a_i$  de manière itérative. A chaque itération du programme, l'écart est calculé par rapport aux données expérimentales, une fois l'écart minimum atteint, les

valeurs finales des paramètres sont retenues pour construire la fonction  $f_{id}(x_3)$ , utilisé pour la résolution analytique.

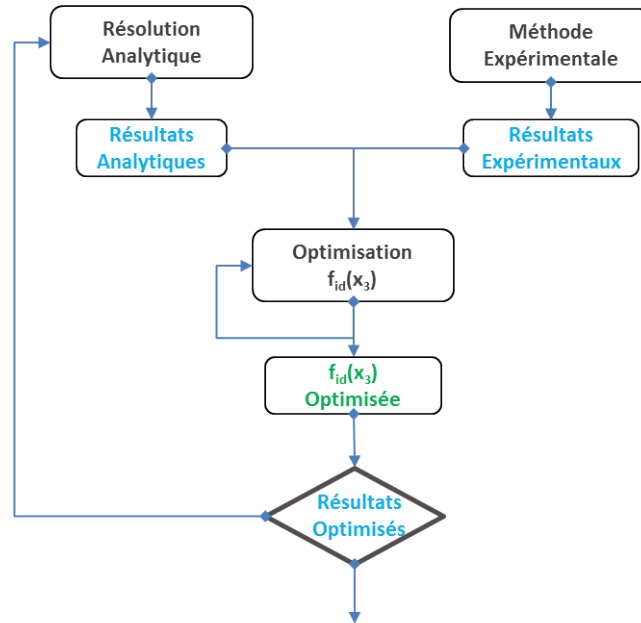


FIGURE 6.2.1: Synoptique d'optimisation de la fonction  $f_{id}(x_3)$

Les objectifs de cette comparaison sont multiples :

- Valider la fonction identifiée par rapport aux résultats expérimentaux
- Déterminer le domaine de validité des fonctions usuelles en fonction des cas de gauchissement
- Définir les limites de la modélisation numérique
- Valider l'utilisation de la fonction identifiée dans différents cas de gauchissement

### 6.2.1 Algorithme de minimisation

La fonction coût à minimiser est l'écart  $Q$  donnant la somme des carrés des écarts en chaque point entre la solution analytique calculée avec la fonction  $f_{Id}(x_3)$ ,  $u_{1_{id}}(x_3)$  et la solution expérimentale  $u_{1_{Exp}}(x_3)$ , tel que :

$$Q(a_i) = \sum [u_{1_{Exp}} - u_{1_{id}}(a_i)]^2 \text{ avec } i = 1, 3, 5, 7, 9 \quad (6.2.2)$$

La résolution de ce problème d'identification a été obtenue par une méthode itérative via un programme en langage Python, utilisant la fonction `fmin_BFGS` de la bibliothèque « Scipy.Optimize ». Cette fonction permet l'utilisation de la méthode de quasi-Newton, développée par Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno en 1970 (Broyden, 1970).

Le programme de minimisation des paramètres de la fonction de cisaillement  $f_{Id}(x_3)$  est construit sur la base de la méthode de résolution analytique présentée dans le chapitre 2. Cette résolution itérative est construite pour les valeurs des coefficients  $a_i$  propres à la construction de la fonction  $f(x_3)$ . A chaque itération, les valeurs  $u_{1_{id}}(x_3)$  sont calculées avec un jeu de coefficients de l'itération. Les résultats en chaque point de coordonnées  $x_3$  sont utilisés pour calculer l'écart  $Q$  à minimiser entre la résolution analytique issue de l'identification et les valeurs expérimentales. Dès lors que  $Q$  atteint sa valeur minimum, les coefficients  $a_i$  sont conservés pour construire la fonction  $f_{Id}(x_3)$  finale.

## 6.2.2 Gestion des minimums locaux

La méthode d'identification paramétrique proposée permet d'évaluer la fonction donnant l'écart minimum entre un profil de référence et les valeurs de déplacements déterminées à chaque itération. Néanmoins, le résultat de l'identification peut toutefois ne pas correspondre à la meilleure solution du problème. En effet, l'algorithme de Newton peut conduire à la convergence vers un minimum local qui peut être différent du minimum global. L'initialisation des valeurs initiales de  $a_i$  est déterminante pour gérer ce problème et s'assurer de la convergence vers la meilleure solution, correspondant au minimum global du problème d'identification. L'initialisation doit être relativement proche de la solution optimale pour considérer le résultat de l'identification comme la meilleure solution.

Pour cela, une étape préliminaire à l'identification finale est effectuée pour réaliser la meilleure initialisation possible. Les paramètres  $a_i$  de départ sont définis à partir d'une valeur moyenne  $m_i$ , d'un écart type  $\sigma_i$ , et d'un nombre de valeurs maximum  $n$ . Cette

définition permet d'utiliser une loi normale pour définir statistiquement l'ensemble des possibilités d'un tirage aléatoire, comme illustré par la figure 6.2.2.

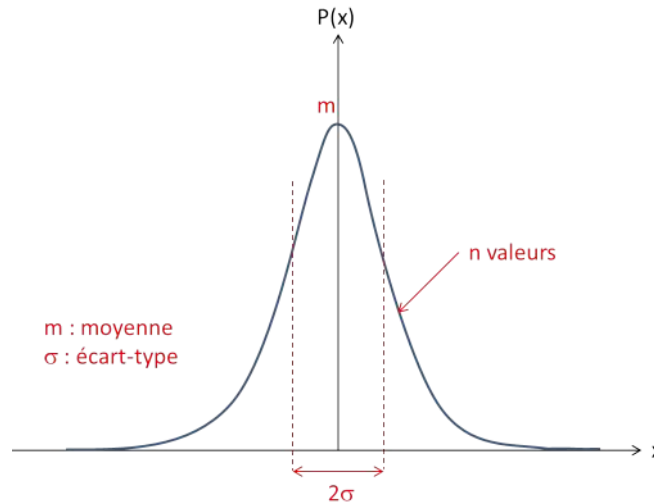


FIGURE 6.2.2: Définition statistique des paramètres  $a_i$  pour l'initialisation de l'algorithme d'optimisation

Une série de  $n$  résolutions analytiques est effectuée à partir d'un tirage aléatoire sur les valeurs des distributions statistiques normales de chaque paramètre  $a_i$  pour évaluer dans un premier temps le jeu de paramètres initial donnant l'écart minimum, pour lequel l'optimisation sera effectuée. L'utilisation d'un tirage aléatoire des valeurs de chaque série de paramètres permet de balayer une plage de valeurs plus ou moins importante (en fonction des valeurs de  $\sigma$  et de  $n$ ) avec l'objectif d'évaluer le résultat le plus proche possible du paramètre initial idéal. Cette méthode d'initialisation est illustrée en figure 6.2.3.

Dans le cas de cette procédure d'identification, le paramètre  $a_1$  est volontairement fixé à 1 de manière à faire apparaître l'extension de la théorie naturelle dans le développement de cette nouvelle fonction de cisaillement transverse, comme cela est fait pour les différentes théories et modèles retenus dans la bibliographie de ce travail. Ainsi, pour satisfaire cette condition, on définit le paramètre  $a_1$  avec une moyenne  $m_1 = 1$  et  $\sigma_1 = 1 \cdot 10^{-5}$ , de manière à imposer une valeur très proche de 1 pour les tirages aléatoires. Pour les autres paramètres, les valeurs moyennes  $m_i$  sont égales à 1 et les écarts-types

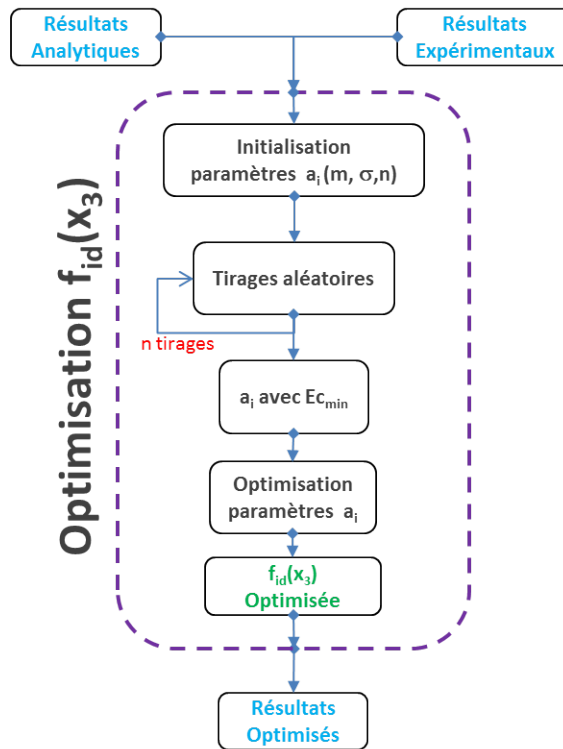


FIGURE 6.2.3: Méthode d'initialisation des paramètres à partir de tirages aléatoires

$\sigma_i$  valent 2, pour  $i = [3; 5; 7; 9]$ . Chaque itération étant rapidement calculé par le programme, le nombre de tirage aléatoire peut être important. Pour le cas présenté, le nombre  $n$  de tirages effectués est de 1000.

Le développement de ce programme a été réalisé en collaboration avec M. Benjamin Boniface, ingénieur de la société Nimitech Études.

## 6.3 Identification de la fonction de cisaillement transverse $f_{id}(x_3)$

Pour illustrer l'application de cette méthode d'identification basée sur les résultats expérimentaux, les résultats présentés dans les paragraphes suivants sont déterminés à partir d'un cas de chargement observé expérimentalement. Les conditions retenues pour

cette application sont celles de l'essai de flexion réalisé sur le matériau M55J/M18 pour le chargement de 2200N, présenté au paragraphe 5.5.3.

### 6.3.1 Identification à partir des résultats expérimentaux

Une identification de la fonction de cisaillement transverse est effectuée à partir des résultats expérimentaux déterminés par DVC.

La méthode expérimentale permet d'obtenir autant de profils de gauchissement que de plans calculés par corrélation volumique. De plus, le chapitre précédent a permis de conclure sur l'absence d'un phénomène 3D significatif à travers l'épaisseur de l'échantillon. Le gauchissement des sections de l'éprouvette est constant dans l'épaisseur du matériau. La méthode proposée dans ce chapitre pourrait donc être utilisée à partir de mesures de champs surfaciques, par corrélation d'images (2D) ou stéréo-corrélation d'images (2,5D). Ainsi, pour prendre en considération l'ensemble des résultats, le choix effectué est celui de moyenniser les données transmises à l'algorithme de minimisation. En effet, à partir des différents profils de gauchissement correspondant aux différents plans DVC, une moyenne des valeurs de  $u_{1_{Exp}}(x_3)$  est calculée pour chaque valeur de  $x_3$ , ce qui permet de tenir compte des valeurs dans chaque plan et de les synthétiser dans une série unique de données, qui constitue les données d'entrée du programme.

La fonction identifiée dans le cas du matériau M55J/M18 est la suivante, notée  $f_{id,1}(x_3)$  :

$$f_{id,1}(x_3) = x_3 - 0,808 \cdot \frac{x_3^3}{h^2} + 0,250 \cdot \frac{x_3^5}{h^4} - 0,303 \cdot \frac{x_3^7}{h^6} + 0,021 \cdot \frac{x_3^9}{h^8} \quad (6.3.1)$$

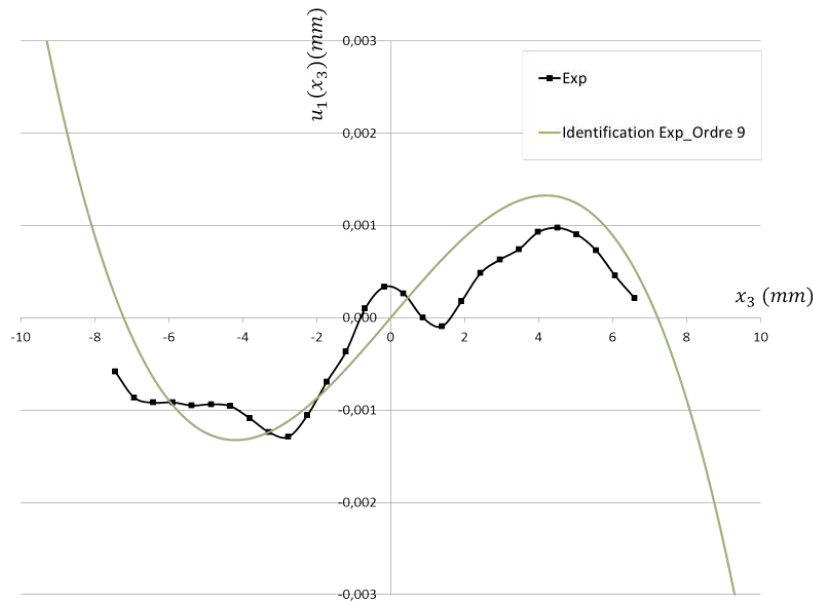


FIGURE 6.3.1: Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = \frac{l}{4}$  identifié à partir des résultats expérimentaux

Sur la figure 6.3.1, on constate que le résultat calculé à partir de la fonction identifiée a une bonne correspondance avec le profil expérimental, malgré la présence du bruit dans le signal utilisé. Celui-ci semble ne pas être trop perturbant pour le calcul analytique à l'ordre 9. En effet, le coefficient  $a_9$  est très inférieur à celui de l'ordre 3 ce qui induit de faibles variations des valeurs. La valeur de la moyenne quadratique des écarts calculés entre le profil identifié et le profil expérimental est de 12,5%.

### 6.3.2 Comparaison des résultats avec les théories existantes

Il est intéressant de vérifier la cohérence du résultat de cette optimisation avec ceux des modèles raffinés, avec la même méthode de résolution. La figure 6.3.2 présente le résultat issu de l'optimisation ainsi que les courbes relatives aux différents modèles raffinés. On constate que l'amplitude du gauchissement est moins importante que celle déterminée par les modèles raffinés pour ce cas de chargement. La méthode d'optimi-



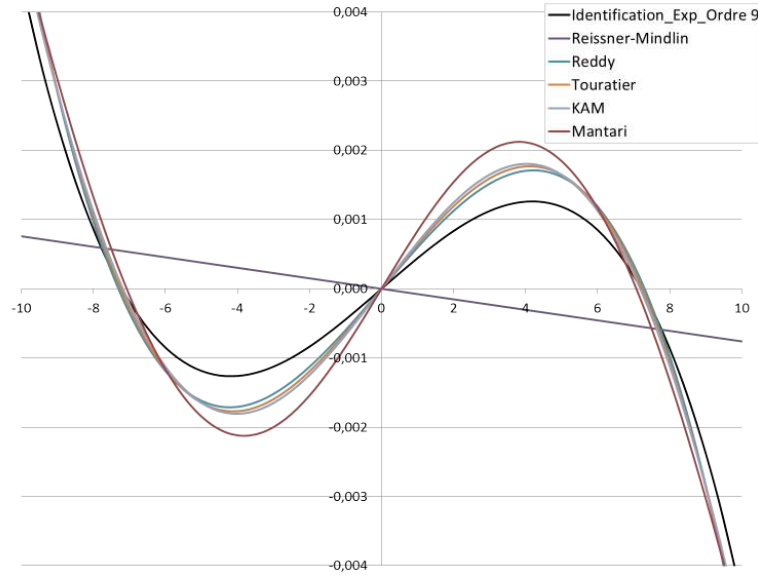


FIGURE 6.3.2: Comparaison des profils  $u_1(x_3)$  calculés avec  $f_{id}(x_3)$  et avec les modèles raffinés

sation des paramètres  $a_i$  semble donc être intéressante pour étudier analytiquement le comportement de l'éprouvette à l'aide d'une fonction  $f(x_3)$  basée sur les données issues de la mesure de champ.

## 6.4 Exploitation du modèle $f_{id,1}(x_3)$

La précision de l'utilisation de ce modèle optimisé a été vérifiée pour les trois configurations de l'essai de flexion. Les figures 6.3.2, 6.4.2 et 6.4.3 illustrent les profils de déplacements obtenus pour un rapport  $\frac{l}{h}$  respectivement égal à 1, 25 puis 5 et 12, 5 dans le cadre d'un cas d'étude similaire à celui défini au paragraphe 2.2.1 :

- $E_{11} = 140000 \text{ GPa}$ ,
- $G_{13} = 3500 \text{ GPa}$ ,
- $F_3 = -6000 \text{ N}$ .

On notera que les propriétés utilisées pour l'exploitation de ce modèle sont proches de celles caractérisées pour la fibre T700, au chapitre 3. Le cas est donc très différent du cas expérimental sur lequel est basé l'identification, issu des essais sur la fibre M55J.

### 6.4.1 Calcul des déplacements $u_1(x_3)$ pour une poutre de forte épaisseur

Une première exploitation du modèle identifié est effectuée dans la configuration où l'épaisseur de la poutre est égale à 20mm, ce qui correspond au cas où les modèles raffinés présentent le plus de différences par rapport à la théorie naturelle. La figure 6.4.1 fait apparaître les résultats du modèle identifié ainsi que ceux des modèles raffinés issus de la littérature. Le tableau 6.1 donne les écarts des différents modèles par rapport aux valeurs de la théorie naturelle. Les conclusions sont similaires à celles présentées en figure 6.3.2. En effet, le modèle identifié permet de visualiser de manière cohérente le gauchissement de la section. Aussi, on constate que le résultat se trouve entre les valeurs de la théorie naturelle et le modèle raffiné de Reddy. L'écart relatif déterminé pour le modèle identifié est également moins important que ceux des autres modèles raffinés.

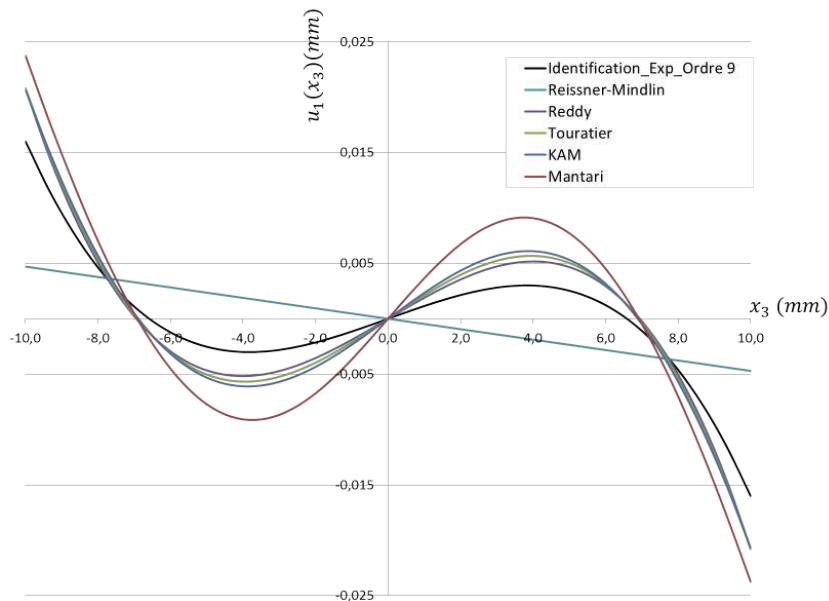


FIGURE 6.4.1: Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = \frac{l}{4}$  avec  $\frac{l}{h} = 1,25$  pour les modèles raffinés et  $f(x_3) = f_{id}(x_3)$

Modèle	Reddy	Touratier	KAM	Mantari	Identif. Ordre 9
Écart relatif (%)	286,4%	305,7%	321,9%	442,1%	198,3%

Tableau 6.1: Écarts relatifs en % des modèles raffinés de  $f(x_3)$  par rapport à la théorie naturelle, pour un rapport  $\frac{l}{h} = 1,25$

### 6.4.2 Calcul des déplacements $u_1(x_3)$ pour une poutre d'épaisseur moyenne

De la même manière que pour une poutre de forte épaisseur, similaire à celle étudiée dans l'analyse du cisaillement transverse, le profil de déplacement, calculé avec la fonction identifiée donne des valeurs cohérentes pour une poutre d'épaisseur moyenne. On retrouve également une amplitude de gauchissement moins importante que celle indiquée par les modèles raffinés. Le tableau 6.2 présente les écarts relatifs calculés entre les différentes fonctions  $f(x_3)$  présentant un gauchissement non linéaire par rapport à la théorie naturelle de Reissner-Mindlin. On constate que l'écart est logiquement plus faible pour le modèle de fonction identifiée du fait que celle-ci présente moins d'amplitude de gauchissement et est donc plus proche de la théorie naturelle. D'autre part, on peut constater que les écarts donnés pour les autres modèles raffinés sont bien supérieurs à celui du modèle identifié.

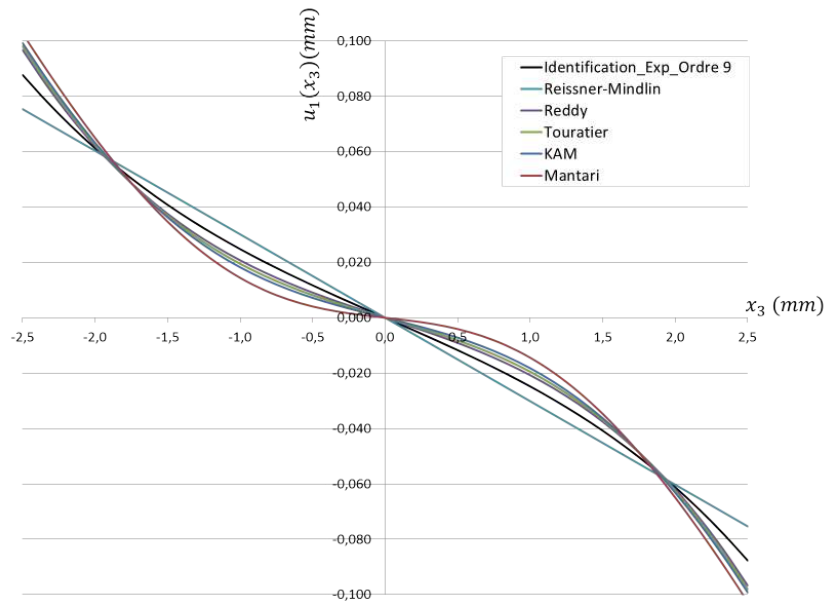


FIGURE 6.4.2: Comparaison des profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = \frac{l}{4}$ , avec  $\frac{l}{h} = 5$  pour les modèles raffinés et  $f(x_3) = f_{id}(x_3)$

Modèle	Reddy	Touratier	KAM	Mantari	Identif. Ordre 9
Écart relatif (%)	23,8%	26,9%	30,0%	39,6%	13,5%

Tableau 6.2: Écarts relatifs en % des modèles raffinés de  $f(x_3)$  par rapport à la théorie naturelle, pour un rapport  $\frac{l}{h} = 5$

### 6.4.3 Calcul des déplacements $u_1(x_3)$ pour une poutre de faible épaisseur

Les résultats présentés au chapitre 2 ont permis de mettre en évidence la très bonne correspondance des modèles raffinés dans le cadre d'une poutre de faible épaisseur. Les résultats (figure 6.4.3 et tableau 6.3) présentés dans ce paragraphe permettent d'établir le même constat vis-à-vis du modèle identifié à partir des données obtenues expérimentalement. On constate des écarts faibles et une très bonne correspondance des valeurs obtenues. Celles-ci sont toutes proches de la théorie naturelle du fait de la faible sensibilité au gauchissement propre à cette configuration de poutre.

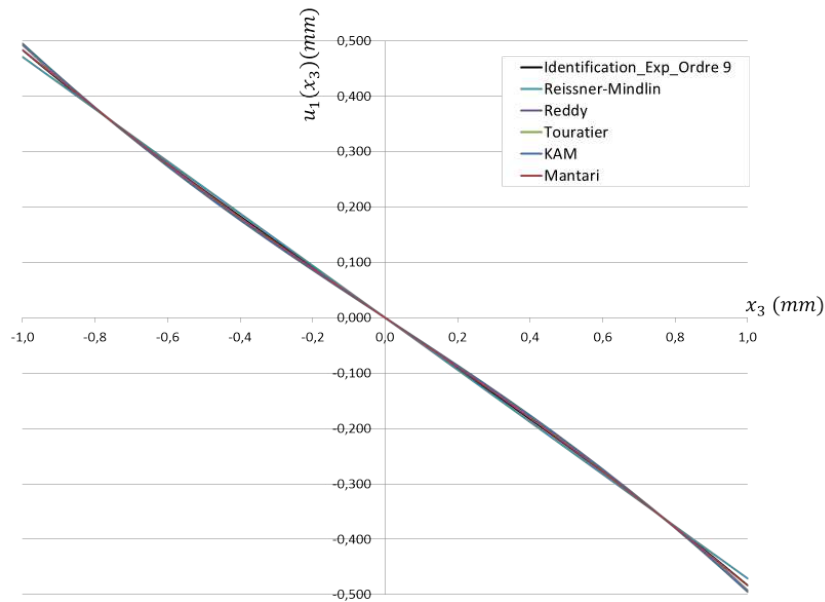


FIGURE 6.4.3: Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = \frac{l}{4}$  avec  $\frac{l}{h} = 12,5$  pour les modèles raffinés et  $f(x_3) = f_{id}(x_3)$

Modèle	Reddy	Touratier	KAM	Mantari	Identif. Ordre 9
Écart relatif (%)	3,8%	4,3%	4,9%	2,9%	2,2%

Tableau 6.3: Écarts relatifs en % des modèles raffinés de  $f(x_3)$  par rapport à la théorie naturelle, pour un rapport  $\frac{l}{h} = 12,5$

### 6.4.4 Interprétations

Pour les différents cas de poutres étudiés, on retrouve une bonne corrélation des valeurs de déplacement avec les valeurs analytiques. Cela implique donc que le modèle proposé peut être utilisé pour l'évaluation des déplacements dans différents cas de poutres avec une bonne fiabilité dans la prise en compte du cisaillement transverse. L'écart entre les différentes théories et la fonction  $f_{id,1}(x_3)$  est moins important que pour le cas de poutre de hauteur 20mm. Cette remarque rejoint celle qui est faite pour la comparaison entre les modèles raffinés et la modélisation numérique. En effet, des écarts plus importants apparaissent entre les différents modèles avec l'augmentation de l'épaisseur de la structure.

## 6.5 Étude des polynômes pour la fonction

$$f(x_3)$$

Les développements effectués pour la recherche de fonction de cisaillement transverse avec prise en compte du gauchissement aboutissent à des fonctions parfois complexes qui correspondent à des fonctions polynômiales d'ordre élevé. Ce paragraphe propose d'analyser la sensibilité des résultats en fonction de l'ordre du polynôme utilisé ainsi que pour l'hypothèse de construction des modèles basée sur la théorie naturelle, dans le but d'une proposition d'une nouvelle fonction  $f(x_3)$ .

### 6.5.1 Identification polynômiale

Différents polynômes ont été identifiés à partir de la méthode proposée au paragraphe 6.2. Ceux-ci diffèrent par l'ordre maximum pour lequel les fonctions sont identifiées. Ainsi sur la base du résultat expérimental retenu pour illustrer la méthodologie proposée, quatre fonctions  $f(x_3)$  sont identifiées, pour les ordres 3, 5, 7 et 9. La figure 6.5.1 présente les profils  $u_1(x_3)$  pour les différents polynômes résultant des différentes identifications réalisées et le tableau 6.4 présente les différents coefficients  $a_i$  propres à chacun des polynômes. Qualitativement, on observe peu de différences sur les résultats obtenus pour les fonctions limitées de l'ordre 3 jusqu'à l'ordre 9.

Paramètres $a_i$	Ordre 9	Ordre 7	Ordre 5	Ordre 3
$a_1$	1,0	1,0	1,0	1,0
$a_3$	0,491	0,473	0,484	0,465
$a_5$	0,307	0,039	0,176	x
$a_7$	1,588	2,549	x	x
$a_9$	0,810	x	x	x

Tableau 6.4: Tableau des valeurs des paramètres  $a_i$  pour les différents degrés de polynômes utilisés

L'utilisation de fonctions de gauchissement complexes peut être envisagée dans le cadre du développement de nouveaux types d'éléments finis où les lois de comportement

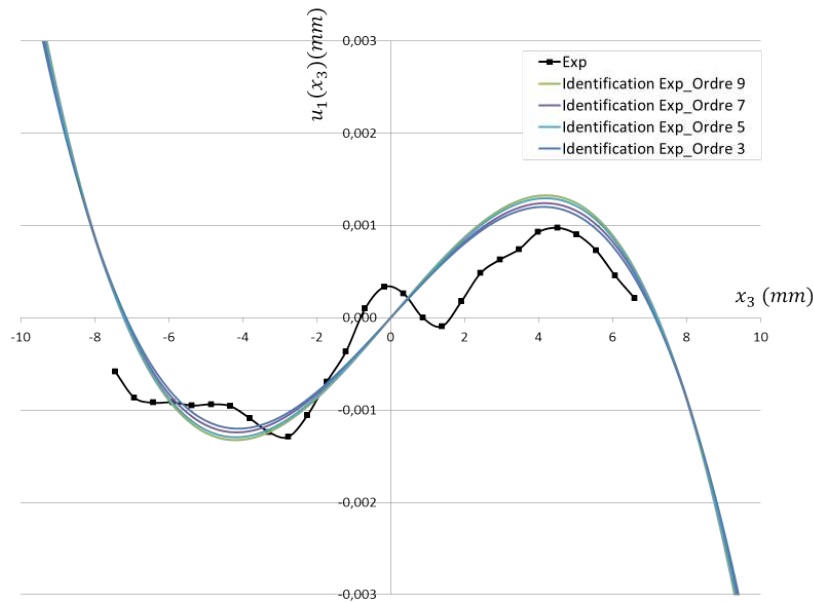


FIGURE 6.5.1: Profils de déplacement  $u_1(x_3)$  pour  $x_1 = \frac{l}{4}$  identifié à partir des résultats expérimentaux, pour différents types de polynômes

peuvent être enrichies à l'aide des fonctions  $f(x_3)$  permettant de prendre en compte le gauchissement des sections pour une résolution de type « coques multicouches ». Néanmoins, cette utilisation imposerait une mobilisation plus importante des moyens de calculs. La complexité des modèles raffinés peut entraîner une augmentation significative des temps de résolution, proportionnellement à l'ordre polynomial retenu. Dans ce sens, il est intéressant d'analyser le gain effectif des polynômes de degrés élevés de manière à justifier ou non l'intérêt éventuel de leur intégration dans les moyens de calculs à l'échelle industrielle.

## 6.5.2 Comparaison avec les modèles existants

Il est intéressant d'établir la comparaison entre les paramètres de construction des polynômes obtenus par identification avec les paramètres identifiés pour les modèles raffinés retenus de la littérature. Le tableau 6.5 présente les valeurs des paramètres concernant la théorie naturelle ainsi que certains modèles raffinés.

Modèle	Reissner-Mindlin	Reddy	Touratier	KAM	Identif. Ordre 9
$a_1$	1	1	1	1	1
$a_3$	x	0,809	1,000	1,216	0,491
$a_5$	x	x	1,000	2,464	0,307
$a_7$	x	x	1,001	6,972	1,588
$a_9$	x	x	0,998	25,471	0,810

Tableau 6.5: Valeurs des paramètres  $a_i$  propres aux modèles existants (Karama *et al.*, 2009)

Les valeurs des paramètres présentés confirment que le modèle identifié sur la base des résultats expérimentaux est proche d'un modèle d'ordre 3. Les valeurs des coefficients  $a_i$  pour les ordres supérieurs sont très inférieures à celles observées pour les autres modèles raffinés, ce qui indique qu'ils sont moins significatifs que pour ceux des modèles existants. Les différents résultats obtenus montrent que les modèles d'ordres supérieurs à 3 ne semblent pas significatifs pour le calcul des déplacements  $u_1(x_3)$ .

### 6.5.3 Extension de la théorie naturelle

Dans une première approche, les identifications sont réalisées par extension de la théorie naturelle de Reissner-Mindlin. Néanmoins, il est également intéressant de réaliser ce travail dans le cas où la construction du modèle identifié ne respecte pas la théorie naturelle, donc avec  $a_1 \neq 1$ . Le tableau 6.6 donne les coefficients issus de cette approche de construction. On peut identifier que le terme  $a_1$  devient égal à 1,410, ce qui diffère nettement de la théorie naturelle traduit par un changement fort de la pente à l'origine du profil. Les autres paramètres ont un ordre de grandeur comparable au modèle d'ordre 9 initial (qui inclue la théorie naturelle).



Paramètres $a_i$	Ordre 9 avec $a_1 \neq 1$
$a_1$	1,410
$a_3$	0,482
$a_5$	0,132
$a_7$	0,526
$a_9$	0,125

Tableau 6.6: Tableau des valeurs des paramètres  $a_i$  pour une fonction d'ordre 9 sans extension de la théorie naturelle

On obtient donc la fonction identifiée  $f_{id,2}(x_3)$  suivante :

$$f_{id,2}(x_3) = 1,410 \cdot x_3 - 0,793 \cdot \frac{x_3^3}{h^2} + 0,107 \cdot \frac{x_3^5}{h^4} - 0,100 \cdot \frac{x_3^7}{h^6} + 0,003 \cdot \frac{x_3^9}{h^8} \quad (6.5.1)$$

Dans le but de pouvoir comparer les différentes théories et modèles, il est proposé de comparer les valeurs des coefficients  $c_1, c_2, c_3$  et  $c_4$  qui sont utilisés pour la résolution analytique et présentés au paragraphe 2.1.2. Ces coefficients sont directement dépendants de la fonction  $f(x_3)$  et peuvent alors traduire les différences de prise en compte du phénomène. Le tableau 6.7 présente les valeurs pour toutes les fonctions étudiées et pour deux fonctions identifiées à l'ordre 9. On s'aperçoit que la théorie identifiée avec le paramètre  $a_1 \neq 1$  a une prise en compte plus proche du modèle raffiné proposé par Mantari, qui elle-même n'est pas construite sur la base des travaux de Reissner-Mindlin. Dans ce sens, on peut également s'interroger sur la représentativité de l'extension de la théorie naturelle pour le développement de nouveaux modèles. Cela est observé sur les travaux les plus récents conduits sur le sujet (Mantari *et al.*, 2012a).

$f(x_3)$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$S_f$
Kirchhoff-Love	$8,486 \cdot 10^8$	0	0	0	/
Reissner-Mindlin	$8,486 \cdot 10^8$	$8,486 \cdot 10^8$	$8,486 \cdot 10^8$	$2,664 \cdot 10^5$	61,161
Reddy	$8,486 \cdot 10^8$	$6,789 \cdot 10^8$	$5,496 \cdot 10^8$	$1,421 \cdot 10^5$	73,394
Touratier	$8,486 \cdot 10^8$	$6,569 \cdot 10^8$	$5,159 \cdot 10^8$	$1,332 \cdot 10^5$	73,288
Karama	$8,486 \cdot 10^8$	$6,342 \cdot 10^8$	$4,284 \cdot 10^8$	$1,247 \cdot 10^5$	72,956
Mantari	$8,486 \cdot 10^8$	$1,231 \cdot 10^9$	$1,835 \cdot 10^9$	$3,059 \cdot 10^5$	111,990
Identif. Ordre 9	$8,486 \cdot 10^8$	$7,501 \cdot 10^8$	$6,651 \cdot 10^8$	$1,818 \cdot 10^5$	70,020
Identif. Ordre 9 avec $a_1 \neq 1$	$8,486 \cdot 10^8$	$1,097 \cdot 10^9$	$1,421 \cdot 10^9$	$4,022 \cdot 10^5$	67,755

Tableau 6.7: Valeurs des coefficients  $c_1$  à  $c_4$  pour différentes fonctions  $f(x_3)$  avec  $\frac{l}{h} = 1,25$ ,  $E_{11} = 318230\text{MPa}$  et  $G_{13} = 3330\text{MPa}$

La figure 6.5.2 illustre les tracés des différentes théories étudiées et identifiées. Ces courbes confirment qu'avec  $a_1 \neq 1$ , il apparaît que la fonction issue du profil expérimental est proche du modèle raffiné de Mantari. Néanmoins, on remarquera également des différences notamment près des valeurs extrêmes de  $x_3$ . Cela est dû au fait que l'identification à partir du profil expérimental ne peut être faite correctement sur les bords de l'éprouvette car les résultats expérimentaux ne sont pas obtenus pour ces positions. Cela se traduit par une mauvaise approximation de la condition de bords libres, où les tangentes devraient être verticales pour valider l'absence des contraintes de cisaillement.

### 6.5.4 Proposition d'un nouveau modèle $f(x_3)$

A partir des études de sensibilité effectuées dans les paragraphes précédents, ainsi que de leurs conclusions, un nouveau modèle de fonction  $f(x_3)$  est proposé. La première conclusion portant sur l'ordre du polynôme a permis de mettre en évidence qu'un polynôme d'ordre 3 permet une considération suffisante des effets du cisaillement transverse. D'autre part, la représentativité des fonctions construites par extension de la théorie naturelle a été remise en question et a permis de constater qu'une fonction où le paramètre  $a_1$  est différent de 1 peut également être intéressante. La fonction  $f_{id,2}(x_3)$ , basée sur ce principe, est définie par l'expression 6.5.1. Les limitations sont observées aux bords libres de la structure dues à l'absence de données expérimentales. La condition de bords libres ( $\tau_{13} = 0$ ) n'est pas donc pas respectée pour les fonctions  $f_{id,1}(x_3)$  et  $f_{id,2}(x_3)$ . A

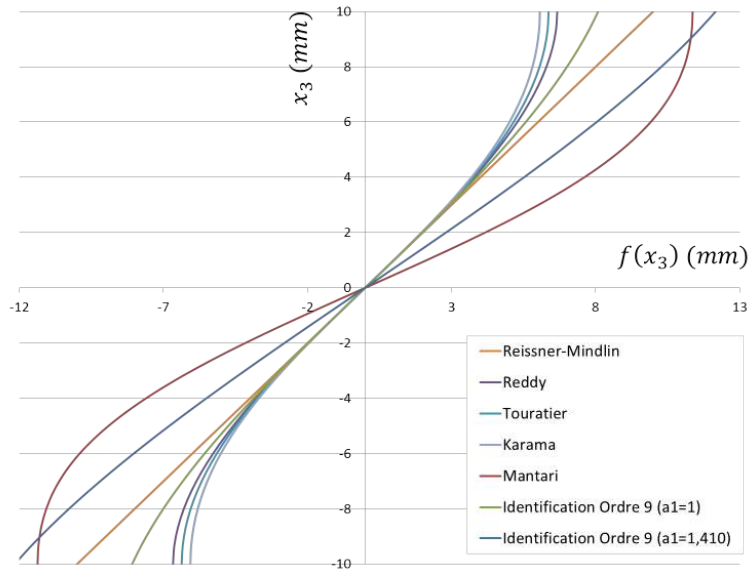


FIGURE 6.5.2: Tracés des fonctions de cisaillement transverse étudiées et identifiées

partir du développement polynômial limité à l'ordre 3, il est possible d'améliorer les résultats précédents en prenant en compte cette condition. La fonction prend alors la forme suivante :

$$f(x_3) = a_1 \cdot x_3 - a_3 \cdot \left( \frac{\pi^2}{3!} \cdot \frac{x_3^3}{h^2} \right) \quad (6.5.2)$$

La dérivée  $f'(x_3)$  de la fonction est définie par l'expression 6.5.3.

$$f'(x_3) = a_1 - a_3 \cdot \left( \frac{\pi^2}{3!} \cdot \frac{3x_3^2}{h^2} \right) \quad (6.5.3)$$

La condition de bord libre est respectée si la dérivée  $f'(x_3)$  est nulle aux positions  $x_3 = +\frac{h}{2}$  et  $x_3 = -\frac{h}{2}$ . On peut donc exprimer le coefficient  $a_3$  en fonction de  $a_1$  tel que :

$$a_3 = a_1 \cdot \left( \frac{4}{3} \cdot \frac{3!}{\pi^2} \right) \quad (6.5.4)$$

Il est alors possible de déterminer une fonction  $f_{id,3}(x_3)$  correspondant à un modèle raffiné d'ordre 3 avec prise en compte de la condition de bords libres.

L'algorithme d'identification de la fonction est utilisé à partir des conditions expérimentales définies au paragraphe 6.3. La condition définie par l'expression 6.5.4 est imposée à chaque itération du programme pour déterminer la fonction  $f_{id,3}(x_3)$  suivante :

$$f_{id,3}(x_3) = 1,470 \cdot x_3 - 1,880 \cdot \frac{x_3^3}{h^2} \quad (6.5.5)$$

La figure 6.5.3 permet d'observer ce modèle superposé à ceux utilisés dans ce travail. On observe que ce dernier résultat permet bien de prendre en compte la condition de bords libres, les tangentes aux valeurs extrêmes de  $x_3$  sont bien verticales, traduisant la valeur 0 pour la dérivée de  $f'_{id,3}$ . On observe également qu'aux valeurs  $x_3 = +\frac{h}{2}$  et  $x_3 = -\frac{h}{2}$ , les valeurs sont très proches de celles obtenues à partir de la théorie naturelle. D'autre part, l'hypothèse de ne pas contraindre le paramètre  $a_1$  permet d'obtenir un résultat se situant entre le modèle de Reissner-Mindlin et celui de Mantari. Pour compléter ces conclusions, la figure 6.5.4 illustre les dérivées des différents modèles raffinés. On peut confirmer la progression des modèles identifiés avec la prise en compte de la condition de bords libres ainsi que la différence entre les modèles basés sur la théorie naturelle, où les valeurs de dérivée sont égales à 1 en  $x_3 = 0$ , et ceux de Mantari ou le modèle  $f_{id,3}(x_3)$ , où cette valeur est supérieure à 1. On note également une différence importante entre ces deux derniers modèles où il apparaît que le gauchissement décrit par le modèle de Mantari semble trop important en comparaison des observations expérimentales. La valeur de  $S_f$  pour les propriétés du matériau est de M55J/M18 est de 74,02. En comparaison des valeurs données dans le tableau 6.7, on observe alors une prise en compte du cisaillement transverse très proche des modèles de Reddy et Touratier.

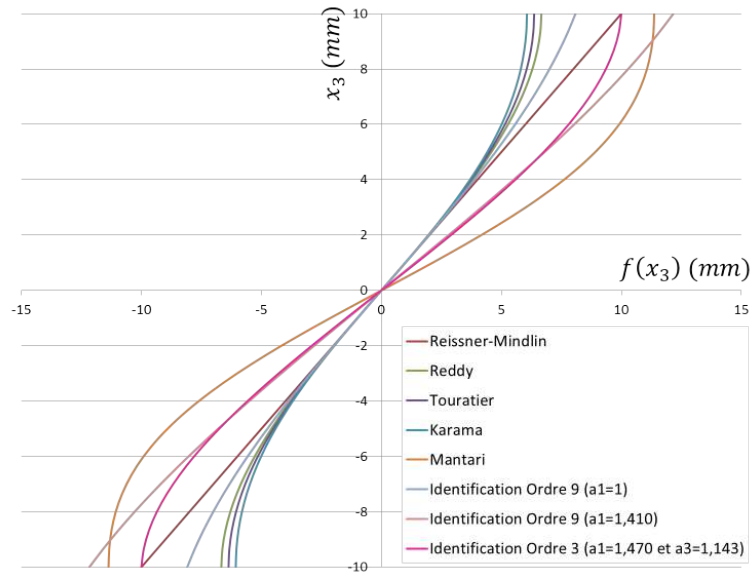


FIGURE 6.5.3: Visualisation du modèle  $f_{id,3}(x_3)$

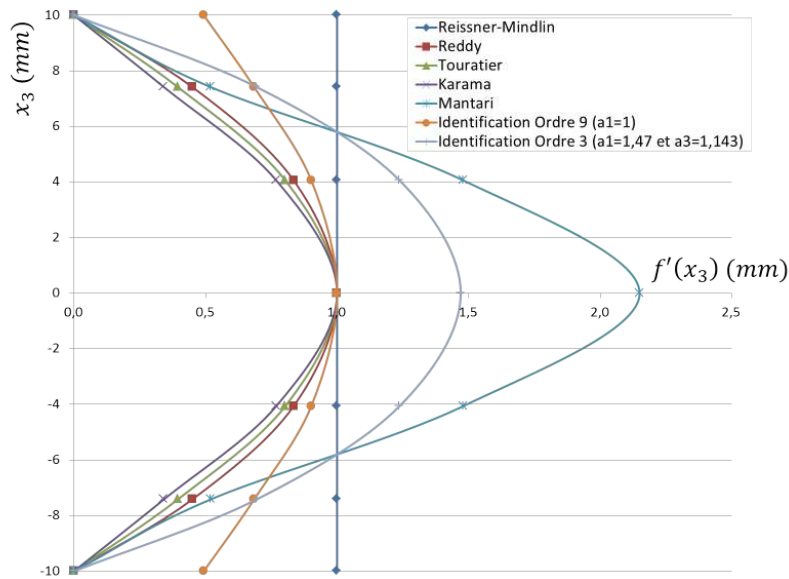


FIGURE 6.5.4: Courbes de dérivée des modèles raffinés

La fonction  $f_{id,3}(x_3)$  est utilisée dans le cas d'étude similaire à celui défini au paragraphe 6.4, avec le rapport géométrique  $\frac{l}{h} = 1,25$ . La figure 6.5.5 présente les courbes des déplacements  $u_1(x_3)$  pour les différents modèles raffinés. On peut identifier sur ces résultats que les déplacements issus de la résolution analytique utilisant le modèle

$f(x_3)$  donne un résultat très satisfaisant. Celui-ci est proche de celui donné par le modèle de Reddy, malgré une différence importante du paramètre  $a_1$  entre les deux fonctions.

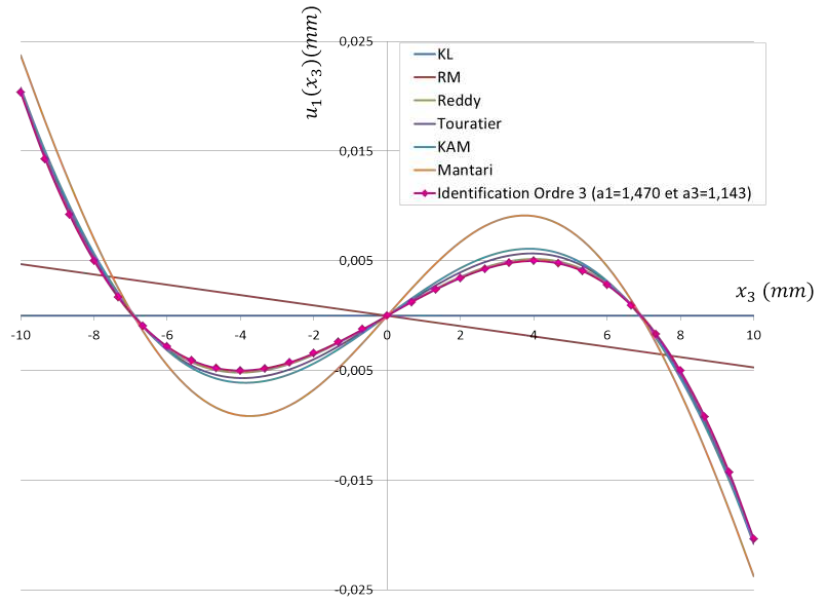


FIGURE 6.5.5: Utilisation du modèle  $f_{id,3}(x_3)$  pour la détermination des déplacements  $u_1(x_3)$  pour un chargement de  $F_3 = 6000\text{N}$ , avec  $E_{11} = 140000\text{MPa}$ ,  $G_{13} = 3500\text{MPa}$  et  $\frac{l}{h} = 1,25$

## 6.6 Conclusions

Ce chapitre traite de l'exploitation des mesures de champs, pour contribuer aux développements des fonctions de cisaillement transverse. Une méthode numérique itérative est proposée pour l'optimisation des paramètres de construction d'une fonction polynômiale à partir de données mesurées. Celle-ci permet la description du gauchissement le long des profils de déplacement  $u_1(x_3)$  à partir de la résolution analytique détaillée au chapitre 2. Ce travail est effectué en deux étapes. La première permet d'optimiser le choix initial des données à partir d'une série de tirages aléatoires où l'écart par rapport aux données expérimentales est évalué. La seconde étape est l'optimisation des paramètres par la minimisation des écarts entre les résultats calculés analytiquement et les résultats expérimentaux. L'application de cette méthode est présentée pour l'identification basée

sur des données expérimentales. Cette dernière permet d'obtenir un résultat intéressant dans différentes configurations géométriques de poutre, en comparaison des modèles raffinés utilisés. Enfin, avec la perspective de l'utilisation des fonctions raffinées dans le cadre industriel par intégration dans le développement d'un élément fini spécifique, une étude de sensibilité permet d'évaluer l'intérêt de l'utilisation de modèles complexes pour la résolution du champ de déplacement. D'autre part, une étude critique sur le développement des modèles raffinés est réalisée pour juger de la pertinence de certaines hypothèses. A partir des différents résultats déterminés, un nouveau modèle de fonction est proposé. Celui-ci est issu d'une identification basée sur les résultats expérimentaux, limitée à l'ordre 3 et respectant la condition de bords libres.





## Conclusion et perspectives

Ce mémoire présente les activités de recherche liées à l'analyse expérimentale des effets du cisaillement transverse dans les structures composites. La principale problématique qui est traitée correspond à l'étude d'un protocole de test permettant la mesure des déplacements dans les structures composites et plus particulièrement le gauchissement des sections sous l'effet des fortes contraintes de cisaillement transverse.

Le premier chapitre de ce mémoire a permis d'identifier deux techniques d'acquisition de données et de mesures volumiques permettant de répondre au besoin exprimé par ce sujet. Ainsi, la  $\mu$ -tomographie à rayons X ainsi que la corrélation d'images volumiques sont retenues pour réaliser cette analyse expérimentale. D'autre part, sur la base d'éléments issus de la littérature, des modèles analytiques, de complexités diverses, sont identifiés pour permettre la comparaison des résultats obtenus.

Le chapitre 2 a permis de détailler une méthode de résolution analytique développée dans le cadre d'une configuration de flexion trois points. Celle-ci est issue de la bibliographie et permet d'étudier les modèles retenus selon plusieurs configurations. Différentes tendances de résultats sont identifiées pour différentes épaisseurs de poutre, traduisant une sensibilité au cisaillement transverse plus ou moins importante.

Le chapitre 3 a permis de détailler les travaux effectués concernant l'utilisation de la modélisation numérique pour l'analyse du phénomène de gauchissement. En effet, même si plusieurs modèles théoriques existent et semblent correspondre, aucun d'entre

eux ne peut être considéré comme exact. Dans ce sens, une étude sur la modélisation numérique du cas étudié est réalisée. Différentes études de sensibilité ont permis de mettre en évidence les différences majeures par rapport à la résolution analytique concernant la prise en compte de certaines conditions aux limites, comme les conditions de frottement ou la participation des zones hors appuis sur le déplacement longitudinal. D'autre part, l'analyse du modèle numérique a permis également d'anticiper l'interprétation des résultats expérimentaux à travers une étude sur les éventuels défauts qui peuvent apparaître au cours de l'essai, et plus particulièrement vis-à-vis du chargement.

La méthode expérimentale développée est exposée au chapitre 4. La première partie concerne la démarche de conception qui a permis d'aboutir au dispositif de test, ainsi que son instrumentation. L'ensemble des étapes du protocole sont décrites ainsi que les principes liés à l'utilisation de la tomographie à rayons X et de la corrélation d'images volumiques. D'autre part, l'analyse des défauts liés aux techniques de mesures est effectuée ainsi que les méthodes de réduction du bruit intrinsèque aux moyens utilisés.

Les résultats des différents travaux effectués sont synthétisés au chapitre 5 du mémoire. Dans un premier temps, les conclusions liées à la comparaison des résultats numériques et analytiques sont exposées. On constate, pour un cas de forte sensibilité au gauchissement, une meilleure représentativité des modèles analytiques par rapport aux résultats de la modélisation numérique. Une divergence de ces résultats est constatée en fonction de la diminution du rapport d'élanement de la poutre étudiée. La méthode de recalage des résultats expérimentaux est présentée pour permettre leur comparaison avec les résultats analytiques ou numériques. Les essais sont effectués sur deux matériaux composites différents, présentant une sensibilité au gauchissement différente due à leurs différences de propriétés mécaniques. Une analyse des résultats est effectuée pour chacun d'entre eux afin d'identifier la corrélation entre les résultats obtenus expérimentalement et les résultats théoriques. La faisabilité des mesures cinématiques volumiques pour les matériaux composites est démontrée à travers la visualisation des effets du cisaillement transverse sur les valeurs de déplacements sous une sollicitation de flexion.

Enfin, le chapitre 6 est une exploitation des résultats expérimentaux. Une proposition d'un nouveau modèle de prise en compte du cisaillement transverse est faite à

---

partir d'une méthode d'identification basée sur les résultats expérimentaux. L'utilisation de la résolution analytique permet de déterminer les résultats pour chaque modèles théoriques identifiés, basés sur différentes formes de polynômes. Une nouvelle fonction d'ordre 3 optimisée est proposée pour prendre en compte l'absence de contraintes de cisaillement aux bords de l'éprouvette. Celle-ci est jugée satisfaisante pour traiter le cas étudié de manière cohérente.

De nombreuses perspectives peuvent être identifiées d'après les développements présentés dans ce mémoire. D'un point de vue analytique, même si les modèles raffinés ont été justifiés pour l'évaluation du gauchissement des structures composites, des évolutions semblent possibles pour atteindre une meilleure représentation de la distribution des contraintes de cisaillement transverse. En complément des éléments présentés, une étude plus approfondie du comportement des structures étudiées permettrait d'analyser les divergences identifiées entre la résolution analytique et la modélisation numérique.

D'un point de vue expérimental, de nombreuses perspectives du sujet sont également envisageables. En effet, l'utilisation de moyens d'acquisition plus récents et présentant de meilleures performances en termes de résolution spatiale et de temps d'acquisition serait intéressante pour limiter la présence du bruit de mesure et ainsi affiner l'analyse des résultats présentés concernant les essais de flexion trois points. D'autre part, dans le cadre de l'application des mesures de champs volumiques à l'analyse du gauchissement, des mesures sur des éprouvettes présentant différentes propriétés d'élancement serait également intéressante dans le but de compléter les éléments présentés et de corréler avec les autres configurations géométriques étudiées uniquement par les méthodes analytiques et numériques.

Les derniers résultats de ce travail ont mis en évidence que l'utilisation des modèles d'ordre 3 semblait pertinente pour une prise en compte suffisante du phénomène analysé. Des perspectives peuvent donc être dégagées de cette constatation. Les développements récents ont tendance à intégrer des modèles d'ordres supérieurs, rendant encore plus complexe la résolution. Il serait alors intéressant de confirmer si les modèles d'ordre 3 peuvent être suffisamment représentatifs du comportement réel. D'autre part, des ré-

serveurs peuvent également être émises vis-à-vis des observations expérimentales réalisées. Certaines limitations des mesures ont été mises en évidence et il serait intéressant de pouvoir les contourner pour permettre une analyse plus approfondie des modèles proposés. Dans cet objectif, la possibilité de réaliser des mesures fiables aux bords libres des éprouvettes serait enrichissante pour confirmer le modèle présenté à la fin de cette étude.

Dans un cadre plus général, l'utilisation des mesures de champs est susceptible d'apporter des réponses intéressantes pour de nombreuses problématiques propres aux matériaux composites. L'utilisation du protocole présenté dans le cadre d'une application industrielle serait intéressante pour évaluer sa pertinence vis-à-vis des besoins issus de divers secteurs d'activité mettant en œuvre ce type de matériaux. Outre l'analyse du comportement dans le cas de sollicitations élastiques, les mesures de champs volumiques peuvent tout à fait être mises en œuvre pour des sollicitations bien plus complexes concernant les matériaux composites, où les effets volumiques doivent être pris en compte.

# Bibliographie

- ASTM-D5379-05 (2005). Standard test method for shear properties of composite materials by the v-notched beam method.
- BABIN, P., DELLA VALLE, G., DENDIEVEL, R., LOURDIN, D. et SALVO, L. (2007). X-ray tomography study of the cellular structure of extruded starches and its relations with expansion phenomenon and foam mechanical properties. *Carbohydrate Polymers*, 68(2):329–340.
- BABOUT, L., MAIRE, E., BUFFIÈRE, J. et FOUGÈRES, R. (2001). Characterization by x-ray computed tomography of decohesion, porosity growth and coalescence in model metal matrix composites. *Acta Materialia*, 49(11):2055–2063.
- BARUCHEL, J., BUFFIÈRE, J., MAIRE, E., MERLE, P. et PEIX, G. (2000). *X-Ray Tomography in Material Science*. Hermès Science Publications.
- BASSET, A.-B. (1890). On the extension and flexure of cylindrical and spherical thin elastic shells. *Philosophical transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical and physical sciences*, 181:433–480.
- BAY, B., SMITH, T., FYHRIE, D. et SAAD, M. (1999). Digital volume correlation : Three-dimensional strain mapping using x-ray tomography. *Experimental Mechanics*, 39(3):217–226.

- BAYRAKTAR, E., ANTOLONOVICH, S. et BATHIAS, C. (2006). Multiscale study of fatigue behaviour of composite materials by x-rays computed tomography. *International Journal of Fatigue*, 28(10):1322–1333.
- BERTHELOT, J. (2005). *Matériaux composites - comportement mécanique et analyse des structures, 4ème Edition*. Editions TEC et DOC.
- BORNERT, M., BRÉMAND, F., DOUMALIN, P., DUPRÉ, J., FAZZINI, M., GRÉDIAC, M., HILD, F., MISTOU, S., MOLIMARD, J., ORTEU, J.-J., ROBERT, L., SURREL, Y., VACHER, P. et WATTRISSE, B. (2009). Assessment of digital image correlation measurement errors : methodology and results. *Experimental Mechanics*, 49:353–370.
- BORNERT, M., DOUMALIN, P., MAIRE, E. et MOULINEC, H. (2004). Full 3d investigation of the local strain field in particulate metal matrix composites.
- BOSIA, F., BOTSIS, J., FACCHINI, M. et GIACCARI, P. (2002). Deformation characteristics of composite laminates—part i : speckle interferometry and embedded bragg grating sensor measurements. *Composites Science and Technology*, 62(1):41–54.
- BRABANT, L., PAUWELS, E., DIERICK, M., VAN LOO, D., BOONE, M. et VAN HOOBEKE, L. (2012). A novel beam hardening correction method requiring no prior knowledge, incorporated in an iterative reconstruction algorithm. *NDT and E International*, 51(0):68–73.
- BRAHM, A., KUNZ, M., RIEHEMANN, S., NOTNI, G. et TÜNNERMANN, A. (2010). Volumetric spectral analysis of materials using terahertz-tomography techniques. 100(1):151–158.
- BRAULT, R., GERMANEAU, A., DUPRÉ, J., DOUMALIN, P., MISTOU, S. et FAZZINI, M. (2013). In-situ analysis of laminated composite materials by x-ray micro-computed tomography and digital volume correlation. *Experimental Mechanics*, pages 1–9.
- BROYDEN, C. (1970). The convergence of a class of double-rank minimization algorithms i general considerations. 6(1):76–90.

- BUFFIÈRE, J.-Y., PROUDHON, H., FERRIE, E., LUDWIG, W., MAIRE, E. et CLOETENS, P. (2005). Three dimensional imaging of damage in structural materials using high resolution micro-tomography. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B : Beam Interactions with Materials and Atoms*, 238(1-4):75–82.
- CARMONA, V. (2009). *Etude de l'endommagement de matériaux composites par tomographie X et émission acoustique*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- CHATEAU, C., GÉLÉBART, L., BORNERT, M., CRÉPIN, J., BOLLER, E., SAUDER, C. et LUDWIG, W. (2011). In-situ x-ray microtomography characterization of damage in sicf/sic minicomposites. *Composites Science and Technology*, 71(6):916–924.
- CHAUDHURI, R. A. (2008). A nonlinear zigzag theory for finite element analysis of highly shear-deformable laminated anisotropic shells. *Composite Structures*, 85(4):350–359.
- CLOETENS, P., PATEYRON-SALOME, M., BUFFIERE, J. Y., PEIX, G., BARUCHEL, J., PEYRIN, F. et SCHLENKER, M. (1997). Observation of microstructure and damage in materials by phase sensitive radiography and tomography. *Journal of Applied Physics*, 81(9):5878–5886.
- DUFORT, L. (2000). *Etude du cisaillement transverse dans des poutres stratifiées et sandwich : aspects théoriques et expérimentaux*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal - Clermont II.
- DUFORT, L., DRAPIER, S. et GRÉDIAC, M. (2001). Closed-form solution for the cross-section warping in short beams under three-point bending. *Composite Structures*, 52(2):233–246.
- DUNKERS, J. P., PARNAS, R. S., G ZIMBA, C., PETERSON, R. C., FLYNN, K. M., FUJIMOTO, J. G. et BOUMA, B. E. (1999). Optical coherence tomography of glass reinforced polymer composites. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 30(2):139–145.

- DUNKERS, J. P., PHELAN, F. R., SANDERS, D. P., EVERETT, M. J., GREEN, W. H., HUNSTON, D. L. et PARNAS, R. S. (2001). The application of optical coherence tomography to problems in polymer matrix composites. *Optics and Lasers in Engineering*, 35(3):135–147.
- ENDRUWEIT, A., GLOVER, P., HEAD, K. et LONG, A. C. (2011). Mapping of the fluid distribution in impregnated reinforcement textiles using magnetic resonance imaging : Methods and issues. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 42(3): 265–273.
- FERRIÉ, E., BUFFIÈRE, J.-Y., LUDWIG, W., GRAVOUIL, A. et EDWARDS, L. (2006). Fatigue crack propagation : In situ visualization using x-ray microtomography and 3d simulation using the extended finite element method. *Acta Materialia*, 54(4):1111–1122.
- FOLLET, H. (2002). *Caractérisation biomécanique et modélisation 3D par Imagerie X et IRM haute résolution de l'os spongieux humain : Evaluation du risque fracturaire*. Thèse de doctorat, Institut national des sciences appliquées de Lyon.
- GATES, M., LAMBROS, J. et HEATH, M. (2010). Towards high performance digital volume correlation. *Experimental Mechanics*, 51:491–507.
- GAY, D. (2005). *Matériaux composites 5ème Edition*. Hermes Science.
- GERMANEAU, A. (2007). *Développement de techniques de mesure dans le volume : Photoélasticimétrie 3D par découpage optique et corrélation volumique par tomographie optique et rayons X. Application à l'étude des effets mécaniques 3D dans les structures et les biomatériaux*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers.
- GERMANEAU, A., DOUMALIN, P. et DUPRÉ, J. (2008a). Comparison between x-ray micro-computed tomography and optical scanning tomography for full 3d strain measurement by digital volume correlation. *NDT and E International*, 41:407–415.



- GERMANEAU, A., DOUMALIN, P. et DUPRÉ, J. (2008b). Mesure de grandeurs cinématiques par corrélation volumique et tomographie par découpage optique : principe et choix des marqueurs.
- GERMANEAU, A., DOUMALIN, P. et DUPRE, J. (2007). 3d strain field measurement by correlation of volume images using scattered light : recording of images and choice of marks. *Strain*, 43:207–218.
- GRANGEAT, P. (2002). *La tomographie : fondements mathématiques, imagerie microscopique et imagerie industrielle*. Hermès Science Publication.
- GROVES, R., PRADARUTTI, B., KOULOUMPI, E., OSTEN, W. et NOTNI, G. (2009). 2d and 3d non-destructive evaluation of a wooden panel painting using shearography and terahertz imaging. *NDT and E International*, 42(6):543–549.
- GUILPIN, C. (1999). *Manuel de calcul numérique appliqué*. EDP Science.
- HALDRUP, K., NIELSEN, S. et WERT, J. (2008). A general methodology for full-field plastic strain measurements using x-ray absorption tomography and internal markers. *Experimental Mechanics*, 48(2):199–211.
- HUANG, D., SWANSON, E., LIN, C., SCHUMAN, J., STINSON, W. et CHANG, W. (1991). Optical coherence tomography. *Science*, 254(5035):1178–1181.
- KACZKOWSKI, Z. (1968). Plates-statistical calculations. *Arkady : Warsaw*.
- KADDHOUR, G., ANDO, E., SALAGER, S., BÉSUELLE, P., VIGGIANI, C., HALL, S. et DESRUES, J. (2013). Application of x-ray tomography to the characterisation of grain-scale mechanisms in sand. *Multiphysical Testing of Soils and Shales*, pages 195–200.
- KARAMA, M., ABOU HARB, B., MISTOU, S. et CAPERAA, S. (1998). Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. *Composites Part B : Engineering*, 29(3):223–234.
- KARAMA, M., AFAQ, K. et MISTOU, S. (2009). A new theory for laminated composite plates. *Journal of Materials : Design and Applications*, 223:53–62.

- KARAMA, M., AFAQ, K. S. et MISTOU, S. (2003). Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *International Journal of Solids and Structures*, 40(6):1525–1546.
- KARAMA, M., TOURATIER, M. et IDLBI, A. (1993). An evaluation of the edge solution for a higher-order laminated plate theory. *Composite Structures*, 25:495–502.
- KAWASE, K., SHIBUYA, T., HAYASHI, S. et SUIZU, K. (2010). Thz imaging techniques for nondestructive inspections. *Comptes Rendus Physique*, 11(7–8):510–518.
- KIRCHHOFF, G. (1850). Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen schreitbe. *Reine Angew Math*, 40:51–58.
- KOMOROSKI, R. A. (2012). Imagerie rmn applications non médicales. *Techniques de l'ingénieur*.
- LAPLANTE, G., MARBLE, A. E., MACMILLAN, B., LEE-SULLIVAN, P., COLPITTS, B. G. et BALCOM, B. J. (2005). Detection of water ingress in composite sandwich structures : a magnetic resonance approach. *NDT and E International*, 38:501–507.
- LATIL, P., ORGÉAS, L., GEINDREAU, C., DUMONT, P. et Rolland du ROSCOAT, S. (2011). Towards the 3d in situ characterisation of deformation micro-mechanisms within a compressed bundle of fibres. *Composites Science and Technology*, 71:480–488.
- LAURENT, C. (1996). *Adéquation algorithmes et architectures parallèles pour la reconstruction 3D en tomographie X*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon I.
- LECLERC, H., PÉRIÉ, J.-N., FANGET, A., MAIRE, E., HILD, F. et ROUX, S. (2010). Microstructure-aided digital volume correlation. *Proceedings of 14th International Conference on Experimental Mechanics*.

- LENOIR, N., BORNERT, M., DESRUES, J., BÉSUELLE, P. et VIGGIANI, G. (2007). Volumetric digital image correlation applied to x-ray microtomography images from triaxial compression tests on argillaceous rock. *Strain*, 43(3):193–205.
- LIMODIN, N., RETHORE, J., BUFFIÈRE, J.-Y., GRAVOUIL, A., HILD, F. et ROUX, S. (2009). Crack closure and stress intensity factor measurements in nodular graphite cast iron using three-dimensional correlation of laboratory x-ray microtomography images. *Acta materialia*, 57(14):4090–4101.
- MAIRE, E., FAZEKAS, A., SALVO, L., DENDIEVEL, R., YOUSSEF, S., CLOETENS, P. et LETANG, J. M. (2003). X-ray tomography applied to the characterization of cellular materials. related finite element modeling problems. *Composites Science and Technology*, 63(16):2431–2443.
- MANTARI, J.-L., OKTEM, A.-S. et GUEDES SOARES, C. (2012a). Bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a new accurate higher-order shear deformation theory. *Composites Part B : Engineering*, 43(8):3348–3360.
- MANTARI, J.-L., OKTEM, A.-S. et GUEDES SOARES, C. (2012b). A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Composites Part B : Engineering*, 43(3):1489–1499.
- MARBLE, A. E., MASTIKHIN, I. V., MACGREGOR, R. P., AKL, M., LAPLANTE, G., COLPITTS, B. G., LEE-SULLIVAN, P. et BALCOM, B. J. (2004). Distortion-free single point imaging of multi-layered composite sandwich panel structures. *Journal of Magnetic Resonance*, 168(1):164–174.
- MISTOU, S. (2000). *Développement d'un élément fini de coque composite à double courbure pour l'implémentation d'une application orientée objet*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I.
- MISTOU, S., FAZZINI, M. et KARAMA, M. (2010). Shear test on cfrp : full-field measurement and finite element analysis. *Advanced Materials Research*, 112:49–62.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- MITTLEMAN, D., HUNSCHE, S., BOIVIN, L. et NUSS, M. (1997). T-ray tomography. *Optical Letters*, 22:904–906.
- MURTHY, M.-V.-V. (1981). An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates. *NASA Technical Paper*, 1903:1–37.
- MUTHUPILLAI, R., LOMAS, D., ROSSMAN, P., GREENLEAF, J. et EHMAN, R. (1995). Magnetic resonance elastography by direct visualization of propagating acoustic strain waves. *Science*, 269(5232):1854–1857.
- NF-EN-2561 (1998). Serie aérospatiale - plastiques renforcés de fibres de carbone - stratifiés unidirectionnels - essai de traction parallèlement à la direction des fibres.
- NIELSEN, S., POULSEN, H., BECKMANN, F., THORNING, C. et WERT, J. (2003). Measurements of plastic displacement gradient components in three dimensions using marker particles and synchrotron x-ray absorption microtomography. *Acta Materialia*, 51(8):2407–2415.
- PANC, V. (1975). *Theories of elastic plates*. Kluwer Academic Publishers.
- PERRET, A., MISTOU, S., FAZZINI, M. et BRAULT, R. (2012). Global behaviour of a composite stiffened panel in buckling. part 2 : Experimental investigation. *Composite Structures*, 94(2):376–385.
- PEYRUSEIGT, F. (2008). *Optimisation mécanique d'un contact conforme : application aux rotules aéronautiques*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse.
- PIERRON, F. (1994). *L'essai de cisaillement plan d'Iosipescu : modélisation et méthodologie expérimentale pour les composites*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard - Lyon I.
- RAMAKRISHNA, K., MURALIDHAR, K. et MUNSHI, P. (2006). Beam-hardening in simulated x-ray tomography. *NDT and E International*, 39(6):449–457.

- 
- RECUR, B., YOUNUS, A., SALORT, S., MOUNAIX, P., CHASSAGNE, B., DESBARATS, P., CAUMES, J. et ABRAHAM, E. (2011). 3d terahertz tomography. *Journées Problèmes Inverses*.
- REDDY, J. (1984). A simple high-order theory of laminated composite plate. *Journal of Applied Mechanics*, 51:745–752.
- REDDY, J.-N. et LIU, C.-F. (1985). A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. *International Journal of Engineering Science*, 23(3):319–330.
- REISSNER, E. (1945). Reflection on the theory of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 38:1453–1464.
- REISSNER, E. (1975). On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 11(5):569–573.
- ROUX, S., HILD, F., VIOT, P. et BERNARD, D. (2008). Three-dimensional image correlation from x-ray computed tomography of solid foam. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 39(8):1253–1265.
- RÉTHORÉ, J., TINNES, J.-P., ROUX, S., BUFFIÈRE, J.-Y. et HILD, F. (2008). Extended three-dimensional digital image correlation (x3d-dic). *Comptes Rendus Mécanique*, 336(8):643–649.
- SAID, G. (2006). *Elastographie ultrasonore tridimensionnelle : de l'estimation des déformations au module d'Young des tissus biologiques*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- SALVO, L., SUÉRY, M., MARMOTTANT, A., LIMODIN, N. et BERNARD, D. (2010). 3d imaging in material science : Application of x-ray tomography. *Comptes Rendus Physique*, 11(9-10):641–649.
- SCHON, J. (2004). Coefficient of friction for aluminum in contact with a carbon fiber epoxy composite. *Tribology International*, 37(5):395–404.

- SOLDATOS, K. (1992). A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mechanica*, 94:195–220.
- STOIK, C., BOHN, M. et BLACKSHIRE, J. (2010). Nondestructive evaluation of aircraft composites using reflective terahertz time domain spectroscopy. *NDT and E International*, 43(2):106–115.
- TOURATIER, M. (1991). An efficient standard plate theory. *International Journal of Engineering and Science*, 29:901–916.
- TRAN, H., DOUMALIN, P., DELISEE, C., DUPRE, J., MALVESTIO, J. et GERMANEAU, A. (2013). 3d mechanical analysis of low-density wood-based fiberboards by x-ray micro-computed tomography and digital volume correlation. *Journal of Materials Science*, 48(8):3198–3212.
- VERHULP, E., van RIETBERGEN, B. et HUISKES, R. (2004). A three-dimensional digital image correlation technique for strain measurements in microstructures. *Journal of Biomechanics*, 37(9):1313–1320.
- VIDAL, P. et POLIT, O. (2009). Assessment of the refined sinus model for the non-linear analysis of composite beams. *Composite Structures*, 87(4):370–381.
- VLACHOUTSIS, S. (1992). Shear correction factors for plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1537–1552.
- WANG, S. et ZHANG, X. (2004). Pulsed terahertz tomography. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 37:1–36.
- WIESAUER, K., PIRCHER, M., GÖTZINGER, E., HITZENBERGER, C. K., OSTER, R. et STIFTER, D. (2007). Investigation of glass–fibre reinforced polymers by polarisation-sensitive, ultra-high resolution optical coherence tomography : Internal structures, defects and stress. *Composites Science and Technology*, 67(15–16):3051–3058.
- WILS, P. (2011). *Tomographie par rayons X : Correction des artefacts liés à la chaîne d'acquisition*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.

- YOUSSEF, S. (2004). *Etude par tomographie X et modélisation par éléments finis du comportement mécanique des mousses solides*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- ZAUDEL, R., YENI, Y., BAY, B., DONG, X. et FYHRIE, D. (2006). Comparison of the linear finite element prediction of deformation and strain of human cancellous bone to 3d digital volume correlation measurements. *Journal of Biomechanical Engineering*, 128(1):1–6.