ÉCOLE D'INGÉNIEURS DE FRIBOURG (E.I.F.)
SECTION DE MÉCANIQUE
G.R. Nicolet, revu en 2006

CONCEPTION ET CALCUL DES

ÉLÉMENTS DE MACHINES

VOLUME 1

Version 1, juin 2006

Frottement de glissement
Frottement de roulement
Contrôle des éléments de machines
Eléments à emboîtement
Eléments à frottement
Assemblages à vis
Ressorts mécaniques
Joints d'étanchéité

Copyright © Gaston Nicolet CH-1700 Fribourg Tout droit réservé

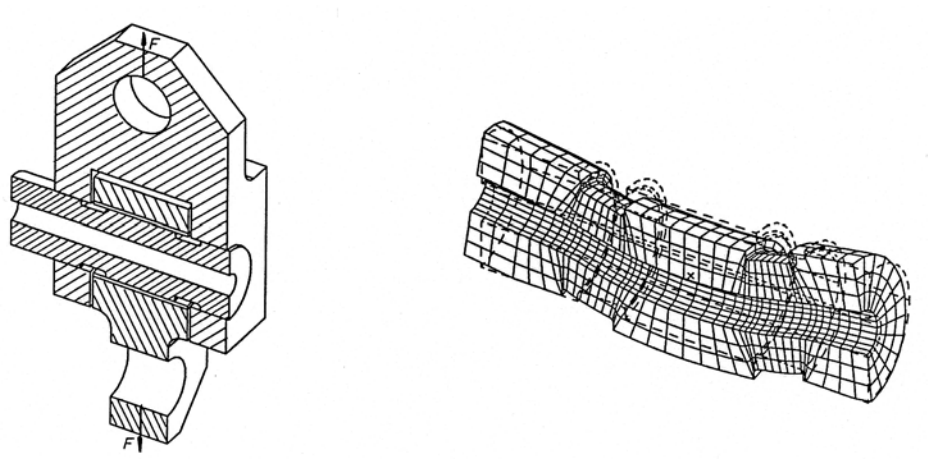


Figure 1.1 Exemple d'un assemblage d'un axe dans un appareil de mesure
Déformation de l'axe dynamométrique sous l'effet de la charge
Calcul au moyen des éléments finis (EIAF)

Les trois premiers chapitres du cours sur les éléments de machines traitent surtout les problèmes tribologiques intervenant pratiquement dans tous les éléments de machines, les théories et les méthodes complémentaires de contrôle. Ces notions complètent celles de toutes les branches citées précédemment en particulier la mécanique des corps solides et la résistance des matériaux classique. La mécanique rationnelle suppose les corps indéformables et parfaitement lisses afin de faciliter les études du comportement statique et dynamique des corps. Ces deux hypothèses ne correspondent en rien aux conditions réelles rencontrées en pratique industrielle et ne peuvent être conservées dans l'étude du comportement des composants d'une machine. La tribologie comprend l'étude du contact de corps solides compte tenu des frottements, des déformations et de l'usure des composants.

Les éléments de machines proprement dits sont classés dans trois catégories :

Volume 1 : Les éléments de machines généraux utilisés dans les divers domaines de la conception mécanique.

Volume 2 : Les éléments de transmission directe, la fréquence de rotation étant la même pour le composant moteur et la partie entraînée.

Volume 3 : Les éléments de transmission indirecte, la fréquence de rotation étant différente pour le composant moteur et la partie entraînée.

PRÉSENTATION

INTRODUCTION

Les éléments de machines constituent des parties de mécanismes et remplissent des fonctions mécaniques simples. Ils sont classés en familles qui possèdent des structures semblables. Les éléments les plus primitifs se composent d'une seule pièce placée entre ou dans d'autres pièces pour former des ensembles plus complexes. Ce sont par exemples les éléments normalisés ou de catalogue comme les goupilles, les clavettes, les ressorts, les vis, les roues dentées, etc. Dans la plupart des cas, deux ou plusieurs pièces jointives forment un élément, comme par exemple les boulons, et génèrent une ou plusieurs fonctions.

Le choix, la mise en œuvre et le contrôle des éléments de machines, introduits dans la réalisation d'un mécanisme, font appel à plusieurs connaissances professionnelles de l'ingénieur, en particulier aux principes de la mécanique des corps solides, aux propriétés technologiques des matières, aux applications des théories de la résistance des matériaux, de l'élasticité, de la mécanique des fluides, de la thermodynamique, de l'électricité sans oublier les problèmes de fabrication des pièces ou les conditions de montage. La synthèse de ces notions permet généralement de trouver des solutions acceptables sous une forme rationnelle et surtout économique. Toute discussion sur les fonctionnalités, les efforts et les contrôles d'un élément de machine introduit immanquablement un certain nombre d'hypothèses simplificatrices pendant l'élaboration du modèle de substitution.

L'évolution actuelle des méthodes d'investigation, tant théorique que pratique, tend à augmenter les connaissances sur les divers facteurs influençant directement les sollicitations, le comportement et la durée de vie des éléments de machines. La précision des résultats s'améliore constamment en introduisant les interactions entre toutes les pièces composantes et les parties annexes. Cette recherche systématique s'opère sur plusieurs fronts : mise en équation du comportement de l'élément et des parties voisines, utilisation de modèles de calcul bi- ou même tridimensionnels simulés dans des logiciels appropriés, essais en laboratoire afin de confirmer les hypothèses introduites et les résultats de l'étude théorique, mesures des caractéristiques sur des parties de machines existantes.

Les éléments de machines courants font l'objet de normalisations nationales ou de plus en plus internationale (ISO). Parfois cette standardisation fixe ou même impose les méthodes de contrôle. Les éléments de machines complexes se décomposent en sous-ensembles simples et s'étudient par des méthodes analogues à celles des éléments fondamentaux. A l'heure actuelle, beaucoup d'éléments courants ne peuvent pas encore se calculer exactement car l'effet des diverses parties voisines en contact modifie de fond en comble les sollicitations et le comportement de l'ensemble. La voie suivie dans ce cours tend vers une formulation très simplifiée des conditions réelles de fonctionnement et le but principal de l'exposé est de montrer les méthodes et principes de contrôle ou de choix.

L'emploi toujours plus fréquent de calculateurs numériques, en particulier des micro-ordinateurs, accélère le processus de décision dans le choix définitif et facilite grandement la recherche de solutions optimales. L'introduction de la conception de machines assistée par ordinateurs (CAO) impose une modification des méthodes de travail et une mise en forme générale du comportement des éléments de machines. Le but de ce cours est d'esquisser les propriétés principales des éléments de machines les plus courants, d'améliorer les méthodes de calcul si c'est possible, de faciliter leur choix, de justifier leur comportement en service et de décrire les utilisations les plus fréquentes.

$$\alpha = \arctan(P/\pi\, d).$$

L'effort normal élémentaire sur chaque élément d'aire dA vaut : $\mathrm{d}F_\mathrm{n} = p\ \mathrm{d}A$ et la force élémentaire de frottement, opposée à la vitesse de glissement, est :

$$\mathrm{d}F_\mathrm{R} = \mu\ \mathrm{d}F_\mathrm{n}\ .$$

Toutes les forces élémentaires de frottement $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{R}$ sont décomposables suivant l'axe Oy de l'arbre et suivant la tangente au cylindre en :

$$\mathrm{d}F_\mathrm{R} = \mathrm{d}F_\mathrm{Ry} + \mathrm{d}F_\mathrm{Rt}.$$

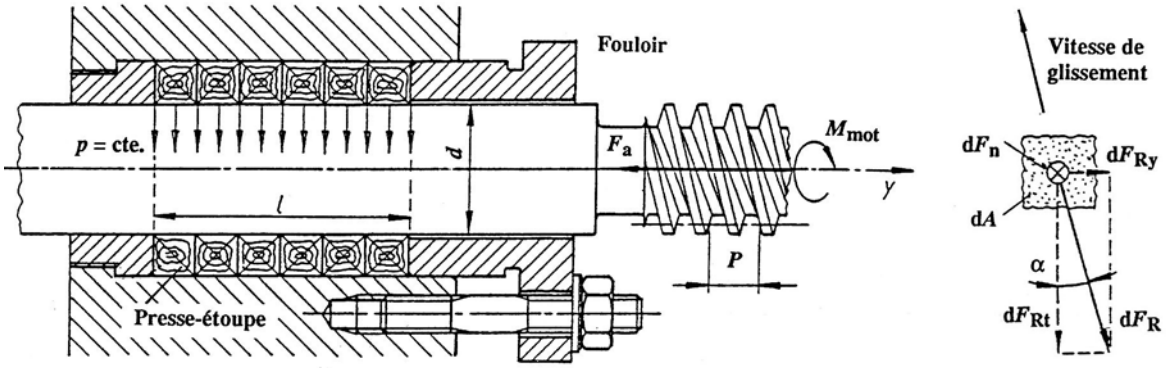


Figure 1.26 Frottement d'un presse-étoupe sur un arbre en mouvement hélicoïdal

L'équilibre de l'arbre, compte tenu du frottement, s'écrit :

$$\Sigma Y = 0 : \qquad \int_A \mathrm{d}F_\mathrm{Ry} - F_\mathrm{a} = 0,$$

$$\Sigma M_\mathrm{Oy} = 0 : \qquad \frac{d}{2} \cdot \int_A \mathrm{d}F_\mathrm{Rt} - M_\mathrm{mot} = 0.$$

Les composantes rectangulaires de la force de frottement valent :

- composante axiale : $\mathrm{d}F_\mathrm{Ry} = \mu\ \mathrm{d}F_\mathrm{n} \sin\alpha$,
- composante tangentielle : $\mathrm{d}F_\mathrm{Rt} = \mu\ \mathrm{d}F_\mathrm{n} \cos\alpha$.

En substituant ces expressions dans les relations d'équilibre, les efforts extérieurs à produire sont :

1. Force axiale : $F_\mathrm{a} = \pi\ \mu\ p\ d\ l \sin\alpha,$ (1.36)
2. Couple moteur : $M_\mathrm{mot} = {}^1\!/_2\ \pi\ p\ d^2\ l \cos\alpha.$ (1.37)

Cet exemple montre que le principe de superposition des efforts ne peut pas s'appliquer au frottement de glissement ou d'adhérence lorsque le mouvement résulte d'une translation et d'une rotation. Si l'angle de l'hélice est très petit, la force axiale $\vec{F}_\mathrm{a}$ devient aussi très petite. Cette particularité est employée dans les instruments de mesure hydrauliques afin d'éliminer le plus possible le frottement axial entre le piston de mesure, ici l'arbre, et le guidage.

$$M_{mot} = 0{,}5\, d\, (F_{n2} - F_{n1}) = 0{,}5\, d\, F_{n1}(e^{\mu\alpha} - 1).$$

La différence des forces normales dans le lien souple est souvent nommée, à tord, force tangentielle sur la poulie.

1.8.3.4 CORDE SANS GLISSEMENT SUR LA POULIE

Dans les transmissions par courroies plates ou trapézoïdales, le glissement ne doit pas exister entre la courroie et la poulie. Les conditions normales de fonctionnement obéissent à la loi du frottement d'adhérence. Pour qu'il n'y ait pas de glissement entre les deux pièces, il faut que :

$$F_{n2} \leq e^{\mu_0 \alpha}\, F_{n1}\ . \qquad (1.33)$$

La limite d'adhérence ne devrait jamais intervenir de telle sorte qu'il faut introduire le coefficient de sécurité au glissement S_{gl} dans cette relation. Ainsi, la tension maximale admissible vaut :

$$F_{n2} \leq e^{\mu_0 \alpha / S_{gl}} \cdot F_{n1}\ . \qquad (1.34)$$

Ces relations montrent que la tension dans le brin dit tendu $\vec{F}_{n2}$ ne peut exister que si la tension dans le brin dit mou $\vec{F}_{n1}$ existe.

1.8.3.5 EFFICACITÉ DU FROTTEMENT

La force "tangentielle" $\vec{F}_t$ peut s'exprimer en fonction de $\vec{F}_{n1}$ ou de $\vec{F}_{n2}$ par la différence des tensions dans les deux brins. En supposant le frottement de glissement entre la corde et la poulie, cette force vaut :

$$F_t = F_{n2} - F_{n1} = F_{n1}\,(e^{\mu\alpha} - 1) = F_{n2}\,(1 - e^{-\mu\alpha}).$$

L'efficacité du frottement se définit comme le rapport de la force tangentielle $\vec{F}_t$ à la plus grande des tensions dans la corde :

$$\text{Efficacité}_{corde} = F_t / F_{n2} = 1 - e^{-\mu\alpha}. \qquad (1.35)$$

Cette grandeur intervient dans la comparaison des possibilités de freinage dans les freins à rubans ou dans les transmissions par courroies plates.

1.8.4 EXEMPLE DE FROTTEMENT EN ROTATION

Cet exemple étudie les conditions de frottement dans le joint d'un obturateur à fluide à commande manuelle ou motorisée. Soit un arbre de diamètre d déplacé par un mécanisme constitué par une vis à filet simple ou multiple de pas P et passant dans un presse-étoupe, longueur l , muni d'une garniture à coefficient de frottement μ (fig. 1.26). Les hypothèses introduites dans la discussion sont :

- la pression exercée par le presse-étoupe est constante sur toute la surface de contact,
- le coefficient de frottement de glissement, entre le joint et l'arbre, est constant.

Proposons nous de trouver la force axiale $\vec{F}_a$ et le couple M_{mot} à produire pour déplacer l'arbre dans le joint. Chaque élément dA de la surface de contact de l'arbre décrit une trajectoire hélicoïdale dans le presse-étoupe, de diamètre d et pas P . L'angle d'hélice est :

Quelle relation existe-t-il entre la tension $\vec{F}_{n1}$ dans le brin de droite et la tension $\vec{F}_{n2}$ dans le brin de gauche au niveau de l'attache (fig. 1.25).

Isolons un élément de la corde de longueur dl, repéré angulairement par l'angle φ . L'élément est soumis à l'action de trois forces : la tension normale $\vec{F}$ dans la coupe inférieure, la tension normale $\vec{F}'$ dans la coupe supérieure et l'action élémentaire d$\vec{F}_B$ de la poulie sur la corde. Cette force se décompose en une composante normale d$\vec{F}_n$ et une force élémentaire de frottement d$\vec{F}_R$. Comme l'angle élémentaire entre les deux rayons est infiniment petit, le plan des forces donne successivement :

$$F' = F + \mathrm{d}F \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}F = \mathrm{d}F_R = \mu\, \mathrm{d}F_n,$$

et :

$$\mathrm{d}F_n = F\, \mathrm{d}\varphi \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{d}F = \mu\, F\, \mathrm{d}\varphi.$$

En divisant chaque membre de cette dernière relation par la tension axiale dans la corde $\vec{F}$, cette relation s'écrit aussi :

$$\mathrm{d}F / F = \mu\, \mathrm{d}\varphi\ .$$

La solution générale de cette équation différentielle du premier ordre est :

$$\ln F = \mu\, \varphi + C.$$

La valeur de la constante d'intégration C se trouve à partir des conditions limites de contact entre la corde et la poulie :

- pour $\varphi = 0$: la force normale dans la corde est $\vec{F}_{n1}$,
- pour $\varphi = \alpha$: la tension inconnue dans la corde est $\vec{F}_{n2}$.

La force normale dans la corde en un point quelconque du contact se trouve par l'expression :

$$F = F_{n1}\, \mathrm{e}^{\mu\, \varphi}.$$

Pour l'extrémité fixe de la corde, la tension normale se trouve en remplaçant l'angle variable φ par l'angle d'enroulement α :

$$F_{n2} = F_{n1}\, \mathrm{e}^{\mu\, \alpha}\ . \qquad (1.32)$$

Dans cette expression, l'angle d'enroulement de la corde doit s'exprimer en radians. La tension axiale $\vec{F}_{n2}$ augmente exponentiellement avec l'angle d'enroulement.

1.8.3.2 VALEURS PARTICULIÈRES

Etudions quelques cas particuliers d'emploi de la formule générale entre les tensions normales dans la corde, le coefficient de frottement et l'angle d'enroulement.

1.8.3.3 ÉQUILIBRE DE LA POULIE

La poulie isolée est soumise extérieurement à l'action de trois forces et d'un couple moteur. Les forces connues sont les deux tensions $\vec{F}_{n1}$ et $\vec{F}_{n2}$. La réaction d'appui $\vec{F}_C$, engendrée par l'arbre sur la poulie, se trouve à partir de l'équilibre de translation, par la somme vectorielle :

$$\vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \vec{F}_C = 0.$$

Le couple moteur, de même sens que la vitesse angulaire de la poulie, se calcule simplement en considérant les forces extérieures $\vec{F}_{n1}$ et $\vec{F}_{n2}$:

En supposant le coefficient de frottement de glissement constant sur toute l'étendue de la surface du demi coussinet, le couple de frottement total sur l'arbre vaut :

$$M_{\text{fr}} = \frac{d}{2} \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \mathrm{d}F_R = \frac{d}{2} \cdot \mu \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \mathrm{d}F_{\text{n}} = \frac{\pi}{4} \cdot \mu \, d\, F_{\text{r}}.$$

Pratiquement, le couple de frottement se trouve en oubliant les hypothèses précédentes et en admettant un contact linéique entre l'arbre et le coussinet sur les génératrices communes. La force de frottement totale est proportionnelle à la réaction d'appui radiale :

$$F_{\text{R}} = \mu \, F_{\text{n}} = \mu \, F_{\text{r}} .$$

Le couple de frottement vaut :

$$M_{\text{fr}} = (d/2) \cdot \mu \, F_{\text{r}}. \qquad (1.31)$$

La première relation fournit un couple de frottement plus grand que la seconde en introduisant le même coefficient de frottement de glissement. Cette seconde relation est pratiquement identique à celle des butées planes, le rayon de calcul étant remplacé par le rayon de l'arbre. Comme le couple de frottement peut se trouver par mesure ou par l'application de théories plus évoluées sur le comportement réel de la butée ou du palier, le coefficient de frottement de glissement correspondant, défini par :

$$\mu_{\text{e}} = 2 \, M_{\text{fr}} / \, d \, F_{\text{r}}$$

est appelé *coefficient de frottement équivalent*.

1.8.3 FROTTEMENT D'UN LIEN SOUPLE SUR UNE POULIE

Le frottement d'un lien souple sur une poulie intervient dans le contrôle des transmissions par courroies plates et trapézoïdales, par chaînes, dans les freins à rubans, etc.

1.8.3.1 RELATION FONDAMENTALE

Soit une poulie cylindrique en rotation uniforme en contact avec une corde dont l'une des extrémités est fixe, l'autre soumise à une tension axiale imposée par la force $\vec{F}_{\text{n1}}$. L'arc d'enroulement de la corde sur la poulie est désigné par α . Les hypothèses introduites sont :

- la corde est parfaitement souple,
- le coefficient de frottement entre la corde et la poulie est constant, donc indépendant de la vitesse de glissement et de la presion.

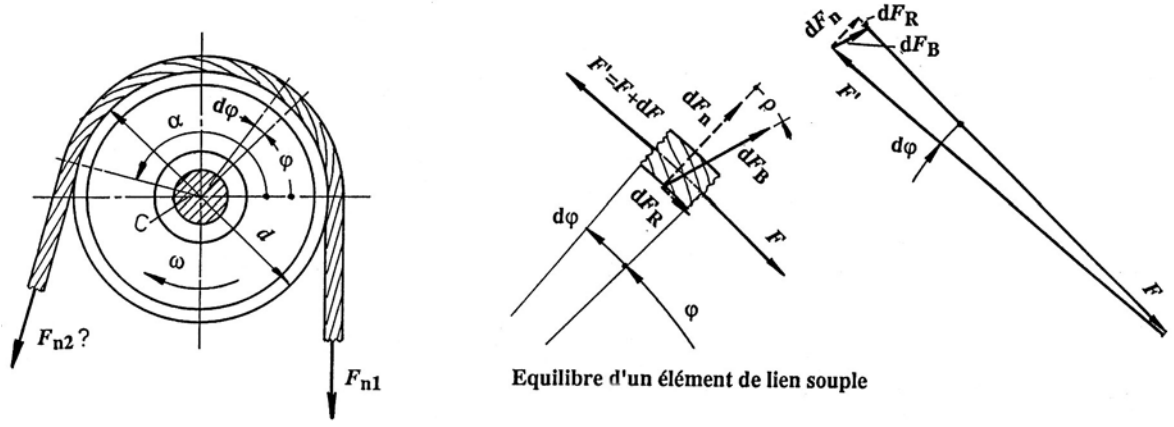


Figure 1.25 Frottement d'une corde sur une poulie

Le palier est repéré par un système de coordonnées trirectangle *Oxyz* et la charge radiale $\vec{F}_r$ est supposée agir vers le bas, son sens étant opposé à celui de l'axe *Oz*. La surface de contact entre les deux pièces est divisée en tranches minces élémentaires, largeur d*l*, longueur *B* égale à celle du coussinet, parallèles à l'axe de l'arbre ou du coussinet (fig. 1.24). L'aire élémentaire d'une tranche est : d$A = B$ dl. La poussée hydrostatique élémentaire sur l'arbre, en supposant un lubrifiant entre les deux corps, vaut :

$$\mathrm{d}F_n = p\ \mathrm{d}A = p\ B\ \mathrm{d}l.$$

Cette poussée se décompose en deux forces élémentaires rectangulaires selon les axes *Ox* et *Oz*, donc parallèle et perpendiculaire à $\vec{F}_r$. Les composantes élémentaires, perpendiculaires à $\vec{F}_r$ et symétriques par rapport au plan *Oyz* s'annulent tandis que les composantes parallèles à $\vec{F}_r$ s'additionnent algébriquement.

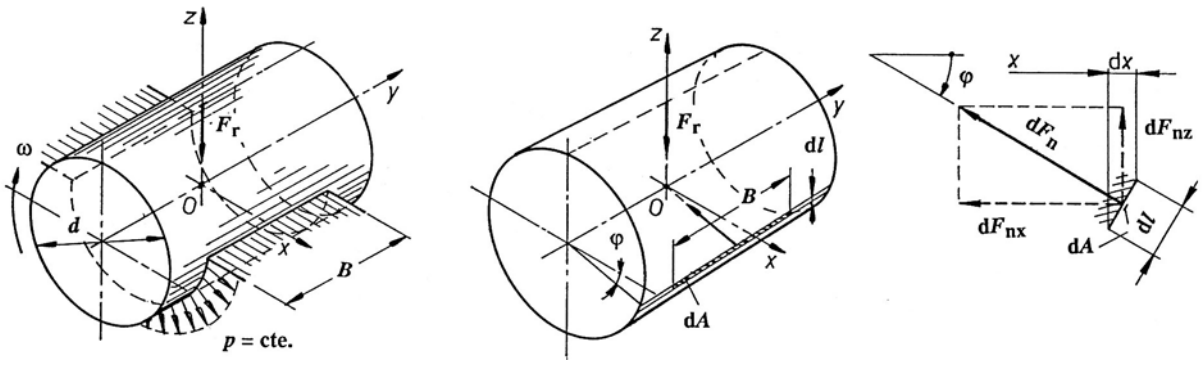


Figure 1.24 Pression moyenne dans le palier cylindrique entre l'arbre et le coussinet

L'équilibre de translation de l'arbre selon *Oz* s'écrit :

$$\Sigma Z = 0 : \qquad \int_{x=-r}^{x=+r} \mathrm{d}F_{nz} - F_r = 0.$$

avec : $\mathrm{d}F_{nz} = \mathrm{d}F_n \sin\varphi = p\ B\ \mathrm{d}l \sin\varphi = p\ B\ \mathrm{d}x$.

La composante radiale est reliée à la pression par l'expression :

$$F_r = \int_{x=-r}^{x=+r} \mathrm{d}F_{nz} = pB\int_{x=-r}^{x=+r} \mathrm{d}x = p\,B\,d.$$

La pression uniforme entre le demi coussinet et l'arbre se calcule en divisant la force radiale $\vec{F}_r$ par la surface projetée du coussinet : $A = B\ D$, le diamètre du coussinet étant 1 à 2 ‰ plus grand que celui de l'arbre :

$$p = \frac{F_r}{B\,D}. \qquad (1.30)$$

La pression moyenne s'exprime habituellement en N/mm2. Cette grandeur intervient dans le calcul détaillé des paliers cylindriques hydrostatiques et hydrodynamiques, voir les chapitres sur les paliers lisses.

1.8.2.3 COUPLE DE FROTTEMENT

Chaque force normale élémentaire d$\vec{F}_n$ sur l'arbre crée une force de frottement :

$$\mathrm{d}F_R = \mu\ \mathrm{d}F_n.$$

- équilibre de rotation : $\Sigma M_{Oy} = 0$: $M_{mot} - r_f F_B = 0$,
- loi de Coulomb : $F_R = \mu F_n$.

Décomposons l'action du coussinet sur l'arbre en deux composantes rectangulaires : une composante normale $\vec{F}_n$ dans la direction radiale et une composante tangentielle de frottement $F_R = \mu F_n$. Le couple moteur sur l'arbre peut se trouver par :

$$M_{mot} = r F_R = {}^1/2\, d\, \mu F_n.$$

Règle générale pour la réaction d'appui totale

Dans le frottement, obéissant à la loi de Coulomb, entre un arbre et un coussinet cylindriques, la réaction d'appui totale du coussinet $\vec{F}_B$ sur l'arbre est toujours tangente à un cercle, appelé *cercle de frottement*, de rayon désigné par r_f.

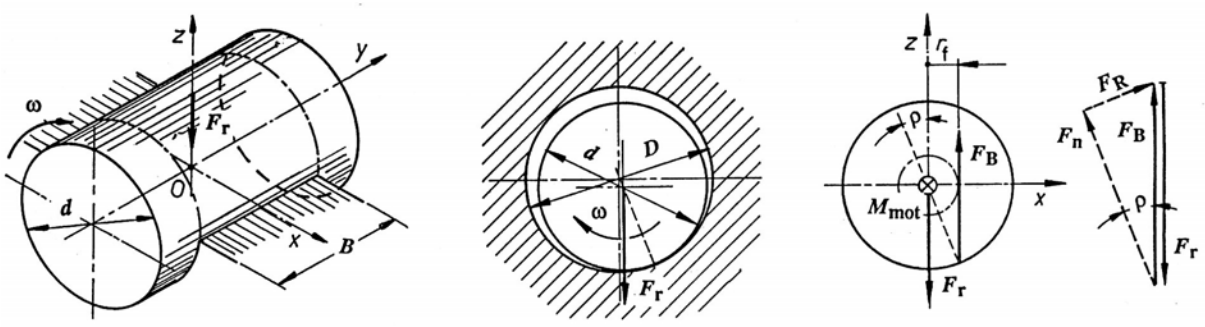


Figure 1.23 Position de l'arbre glissant dans le palier radial à très faible vitesse

Le rayon du cercle de frottement se calcule par :

$$r_f = \mu\, d\, F_n / 2\, F_B = (d/2) \sin\rho. \qquad (1.29)$$

Dans des problèmes un peu plus réels, par exemple dans les chaînons de mécanismes articulés, ces parties de machines possèdent deux coussinets. L'équilibre de ces pièces doit s'étudier avec frottement, le seul point délicat étant de trouver les lignes d'action des réactions d'appui, compte tenu du frottement. Il en va de même de l'équilibre d'un arbre ou d'un axe dans deux paliers lisses, sollicité par des forces extérieures quelconques. La méthode générale de recherche d'équilibre avec paliers lisses et frottement selon la loi de Coulomb consiste à :

1. tracer les cercles de frottement au centre de chaque coussinet cylindrique,
2. mettre en place la ligne d'action de la force totale $\vec{F}_B$ de l'arbre sur la coussinet tangente au cercle de frottement,
3. contrôler la composante normale $\vec{F}_n$, dirigée vers l'intérieur du coussinet, et la force de frottement $\vec{F}_R$, de sens opposé à la vitesse de glissement de la surface du coussinet,
4. appliquer les règles de l'équilibre statique.

1.8.2.2 PRESSION DANS LE DEMI-COUSSINET

Le calcul élémentaire et simplifié de la pression dans le palier radial cylindrique avec un arbre en rotation à vitesse angulaire constante introduit l'hypothèse d'une pression répartie uniformément entre l'arbre et le demi coussinet, l'autre demi coussinet n'intervenant pas dans la discussion. Cette répartition de pression ne correspond pas du tout à la réalité, mais l'hypothèses introduite permet de trouver une relation très simple entre la charge radiale appliquée $\vec{F}_r$ et les dimensions géométriques du coussinet.

1.8.1.4 EXPRESSION GENÉRALE DU COUPLE MOTEUR

Le couple de frottement sur le pivot ajouré en rotation peut se donner par l'expression générale :

$$M_{fr} = M_{mot} = \mu\, r_m\, F_a\,. \qquad (1.28)$$

avec :

$r_m = 2\,(r_e^3 - r_i^3) / 3(r_e^2 - r_i^2)$ valable pour une pression supposée répartie uniformément sur la butée,

$r_m = (r_e + r_i) / 2$ pour une pression supposée répartie hyperboliquement.

Dans la seconde hypothèse, la pression devient infiniment grande lorsque le rayon est nul. Pour une butée pleine, donc à rayon intérieur nul, les deux hypothèses donnent :

$$M_{fr1} = M_{mot1} = 2/3 \cdot r_e\, \mu\, F_a\,,$$
$$M_{fr2} = M_{mot2} = 0{,}5\, r_e\, \mu\, F_a\,.$$

Comme la répartition réelle de la pression n'est ni uniforme, ni hyperbolique, le calcul simplifié et pratique des butées utilise le plus souvent une méthode mixte :

1. Pression moyenne sur la butée : $\bar{p} = F_a/A = F_a / \pi(r_e^2 - r_i^2)$,
2. Couple moteur ou de frottement : $M_{mot} = M_{fr} = r_m\, \mu\, F_a$.

Bien que la plupart des butées travaillent dans des conditions différentes de celles de la loi de Coulomb, ces deux relations générales sont introduites aussi dans la définition du comportement global des butées dites hydrostatiques et hydrodynamiques.

1.8.2 PALIER RADIAL CYLINDRIQUE

Le palier lisse radial cylindrique est un élément de machine, sollicité par une charge radiale, composé d'un coussinet cylindrique et d'un arbre, le jeu diamétral entre les deux pièces permettant à l'arbre de tourner dans le coussinet ou vice versa. Les charges radiales appliquées sur l'arbre sont compensées par les poussées dues au contact entre l'arbre et le coussinet du palier radial ou à l'action d'un lubrifiant intercalé entre les deux pièces.

1.8.2.1 FROTTEMENT À TRÈS FAIBLE VITESSE

Soit un arbre de diamètre d, guidé dans un coussinet fixe de diamètre intérieur D, sollicité par des forces extérieures se concrétisant par une force radiale résultante $\vec{F}_r$ au niveau du palier. Etudions les conditions de démarrage de l'arbre dans le coussinet et admettons les coefficients de frottement d'adhérence et de glissement constants, généralement différents. L'arbre isolé est soumis à l'action de deux forces (fig. 1.23) : la charge radiale extérieure $\vec{F}_r$ et l'action du coussinet lisse sur l'arbre $\vec{F}_B$ ou $\vec{F}_{B0}$ à la limite du glissement, additionné d'un couple moteur M_{mot} appliqué sur l'arbre.

Lorsque l'arbre commence à tourner dans le coussinet, le frottement d'adhérence entre ces deux pièces provoque le déplacement de l'arbre qui a tendance à grimper le long de la surface cylindrique intérieure du coussinet jusqu'à ce que la surface de l'arbre glisse sur la surface creuse du coussinet. Les conditions d'équilibre de l'arbre en glissement s'écrivent (fig. 1.23) :

- équilibre de translation : $\Sigma Z = 0$: $F_B - F_r = 0$,

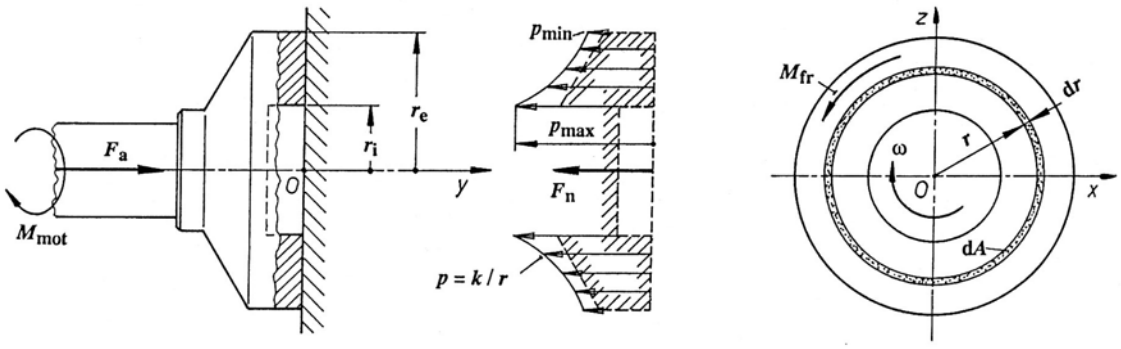


Figure 1.22 Equilibre de la butée soumise à une pression répartie hyperboliquement

Cherchons la répartition de la pression en partant de l'équilibre statique et des hypothèses proposées.

1. Equilibre de translation selon l'axe *Oy*

La poussée élémentaire $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{n}$ supportée par la surface annulaire élémentaire dA, de rayon r, de largeur dr, se trouve par :

$$\mathrm{d}F_\mathrm{n} = p\ \mathrm{d}A = 2\ \pi\ p\ r\ \mathrm{d}r = 2\ \pi\ k\ \mathrm{d}r.$$

La poussée totale $\vec{F}_\mathrm{n}$ est égale à la somme algébrique des forces normales élémentaires :

$$F_\mathrm{n} = 2\pi k \int_{r=r_\mathrm{i}}^{r=r_\mathrm{e}} \mathrm{d}r = 2\pi k (r_\mathrm{e} - r_\mathrm{i}) = 2\pi p r \cdot (r_\mathrm{e} - r_\mathrm{i}).$$

Cette relation permet de trouver l'expression de la pression $p(r)$ au rayon r quelconque compris entre r_i et r_e :

$$p_{(r)} = \frac{1}{r} \cdot \frac{F_\mathrm{n}}{\pi (r_\mathrm{e} - r_\mathrm{i})}. \qquad (1.25)$$

2. Equilibre de rotation autour de l'axe *Oy*

Le couple de frottement élémentaire se détermine comme précédemment par :

$$\mathrm{d}M_\mathrm{fr} = r\ \mathrm{d}F_\mathrm{R} = r\ \mu\ \mathrm{d}F_\mathrm{n} = 2\ \pi\ \mu\ k\ r\ \mathrm{d}r.$$

Le couple de frottement total sur la surface du pivot est égal à la somme de tous les couples élémentaires, soit :

$$M_\mathrm{fr} = 2\pi\mu k \int_{r=r_\mathrm{i}}^{r=r_\mathrm{e}} r\mathrm{d}r = \pi\mu k \cdot (r_\mathrm{e}^2 - r_\mathrm{i}^2). \qquad (1.26)$$

En remplaçant la constante k par sa valeur en fonction de la force normale $\vec{F}_\mathrm{n}$ ou de la force axiale $\vec{F}_\mathrm{a}$ et après simplifications, le couple de frottement sur le pivot se trouve par :

$$M_\mathrm{fr} = 0{,}5\ \mu\ (r_\mathrm{e} + r_\mathrm{i})\ F_\mathrm{n} = \mu\ r_\mathrm{m}\ F_\mathrm{a}, \qquad (1.27)$$

soit la valeur désirée primitivement avec $r_\mathrm{m} = (r_\mathrm{e} + r_\mathrm{i})/2$.

1. le coefficient de frottement est constant, donc indépendant de la vitesse de glissement et de la pression,
2. la pression est répartie *uniformément* sur toute la surface frottante entre la butée et le plan rugueux (fig. 1.21).

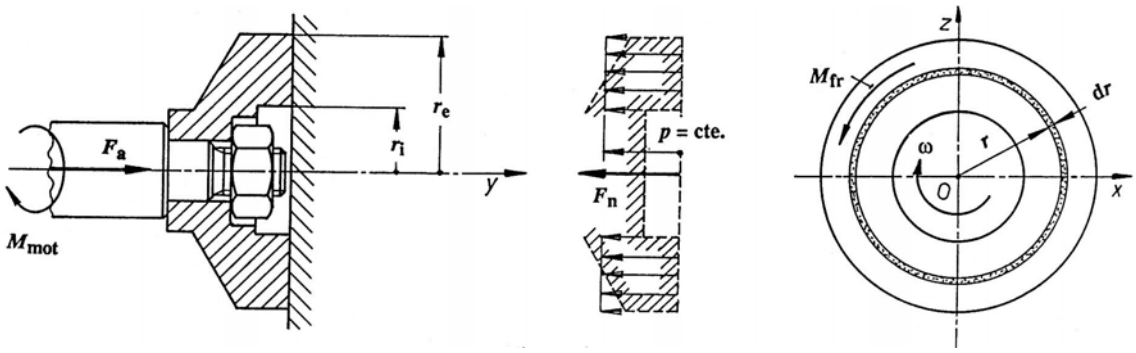


Figure 1.21 Equilibre de la butée soumise à une pression répartie uniformément

La pression uniforme entre la butée et le plan se calcule simplement par :

$$\overline{p} = \frac{F_n}{A_{butée}} = \frac{F_n}{\pi(r_e^2 - r_i^2)}. \qquad (1.22)$$

Découpons sur la surface frottante un anneau élémentaire au rayon r de largeur dr. Le couple élémentaire de frottement sur la surface annulaire élémentaire se trouve par :

$$dM_{fr} = r\, dF_R = r\, \mu\, dF_n = r\, \mu\ p\, dA = 2\, \pi\, \mu\, p\, r^2\, dr.$$

Le couple de frottement total M_{fr}, directement opposé au couple moteur M_{mot}, est égal à la somme de tous les couples élémentaires, soit :

$$M_{fr} = 2\,\pi\mu\, p \int_A r^2 dr = \frac{2}{3}\pi\mu\, p\left(r_e^3 - r_i^3\right). \qquad (1.23)$$

En remplaçant la pression p par son expression en fonction de la force axiale $\vec{F}_a$ et de l'aire de la surface de la butée A, le moment de frottement s'exprime finalement par :

$$M_{fr} = \mu\, r_m\, F_a\,, \qquad (1.24)$$

avec :

$r_m = 2\,(r_e^3 - r_i^3) / 3(r_e^2 - r_i^2)$, rayon moyen de calcul pour le pression uniforme.

1.8.1.3 RÉPARTITION HYPERBOLIQUE DE LA PRESSION

Le calcul des couples de frottement et moteur serait simplifié si ces couples pouvaient se trouver à partir de la force normale $\vec{F}_n$ et du rayon moyen de la butée $r_m = 0{,}5\,(r_i + r_e)$. Pour que cette condition particulière soit applicable, il suffit d'admettre une répartition de la pression inversement proportionnelle au rayon. Les hypothèses initiales deviennent alors :

1. le coefficient de frottement est constant sur toute la butée, donc indépendant de la pression ou de la vitesse de glissement.
2. la pression entre la butée et le plan est répartie hyperboliquement dans la direction radiale. Elle est donnée par l'expression générale (fig. 1.22), k étant une constante à trouver :

$$p\, r = k = \text{constante} \quad \text{ou} \quad p = k/r\,.$$

position à donner à la force $\vec{F}$ pour atteindre une pression uniforme sur les faces. Si la force de traction n'est pas placée exactement en ce point, la pression sur les pans du coulisseau n'est pas répartie uniformément. Habituellement, cette position est imposée par la conception mécanique du système d'entraînement. Dans ce cas, la recherche de l'équilibre s'effectue en supposant tout d'abord les réactions d'appui placées au centre de gravité des pans et de déplacer ces forces jusqu'à ce que les équilibres de translation et de rotation soient satisfaits.

1.8 FROTTEMENT DES CORPS EN ROTATION

L'étude du frottement selon la loi de Coulomb est limitée dans ce chapitre aux corps en rotation autour d'un axe à direction fixe. La vitesse de glissement v_u est proportionnelle au produit de la vitesse angulaire du corps ω par la distance du point considéré à l'axe de rotation soit le rayon r :

$$v_u = \omega\, r\ ,$$

avec la définition de la vitesse angulaire :
$\omega = 2\,\pi\, n$, n étant la fréquence de rotation exprimée en tours par seconde.

1.8.1 PALIER AXIAL OU BUTÉE

Le palier axial, appelé butée ou pivot, est un élément de machine courant qui permet de supporter une charge axiale en rotation. La description détaillée de la conception, des divers types et l'étude des caractéristiques des butées réelles seront traitées dans les chapitres spécifiques. Les notions présentées ici se basent sur l'application simple de la loi du frottement de glissement et de la définition de la pression.

1.8.1.1 ÉQUILIBRE DE LA BUTÉE EN ROTATION

Soit une butée plane constituée par un pivot annulaire, repérée dans un système de coordonnées trirectangle *Oxyz*, rayon intérieur r_i, rayon extérieur r_e, placée sur un appui plan rugueux. Cette pièce est chargée par une force axiale $\vec{F}_a$ et elle est animée d'une vitesse angulaire ω constante relativement faible. La loi de Coulomb est introduite dans l'étude des efforts appliqués sur cet élément. Les conditions d'équilibre statique, autour de l'axe *Oy* de rotation, s'écrivent dans tous les cas traités ici :

1. Equilibre axial : $\Sigma\, Y = 0$: $F_a - F_n = 0$,
2. Equilibre de rotation : $\Sigma\, M_{Oy} = 0$: $M_{mot} - M_{fr} = 0$.

Dans cette dernière expression, M_{mot} est le couple moteur sur l'arbre nécessaire à maintenir la rotation constante, M_{fr} est le couple de frottement entre le plan et la butée. Les deux relations d'équilibre sont indépendantes des hypothèses introduites dans la répartition de la pression sur les surfaces d'appui et des pertes par frottement. Elles sont valables pour tout type de butée. Nous supposons de plus que la surface frottante est soumise à des forces dépendant du rayon ce qui permet d'éviter d'écrire les équilibres de translation selon les axes *Ox* et *Oz*.

1.8.1.2 RÉPARTITION UNIFORME DE LA PRESSION

Pour pouvoir déterminer la valeur du couple moteur M_{mot} sur l'arbre de la butée, introduisons deux hypothèses simplificatrices :

1. le poids du coulisseau $\vec{G}$ est supposé connu et la position de la force motrice $\vec{F}$ reste à trouver,
2. le coefficient de frottement est indépendant de la pression et de la vitesse,
3. la pression sur toutes les faces frottantes est répartie uniformément.

Les trois réactions d'appui peuvent se décomposer en leurs composantes normale et tangentielle, soit :

$$\vec{F}_{B1} = \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{R1} \qquad \vec{F}_{B2} = \vec{F}_{n2} + \vec{F}_{R2} \qquad \vec{F}_{B3} = \vec{F}_{n3} + \vec{F}_{R3} ,$$

avec :

$$F_{R1} = \mu F_{n1} \qquad F_{R2} = \mu F_{n2} \qquad F_{R3} = \mu F_{n3} .$$

L'équilibre est tout d'abord recherché dans la vue de gauche ou dans la coupe transversale. Dans cette vue, le coulisseau est sollicité par l'action de quatre forces : le poids $\vec{G}$, les composantes normales $\vec{F}_{n1}$, $\vec{F}_{n2}$, $\vec{F}_{n3}$ des réactions de la glissière sur le coulisseau (dirigées à l'intérieur de la matière). Le polygone funiculaire permet de trouver le sens et l'intensité de ces trois composantes inconnues. Analytiquement, les sommes des projections et des moments permettent d'obtenir un résultat identique.

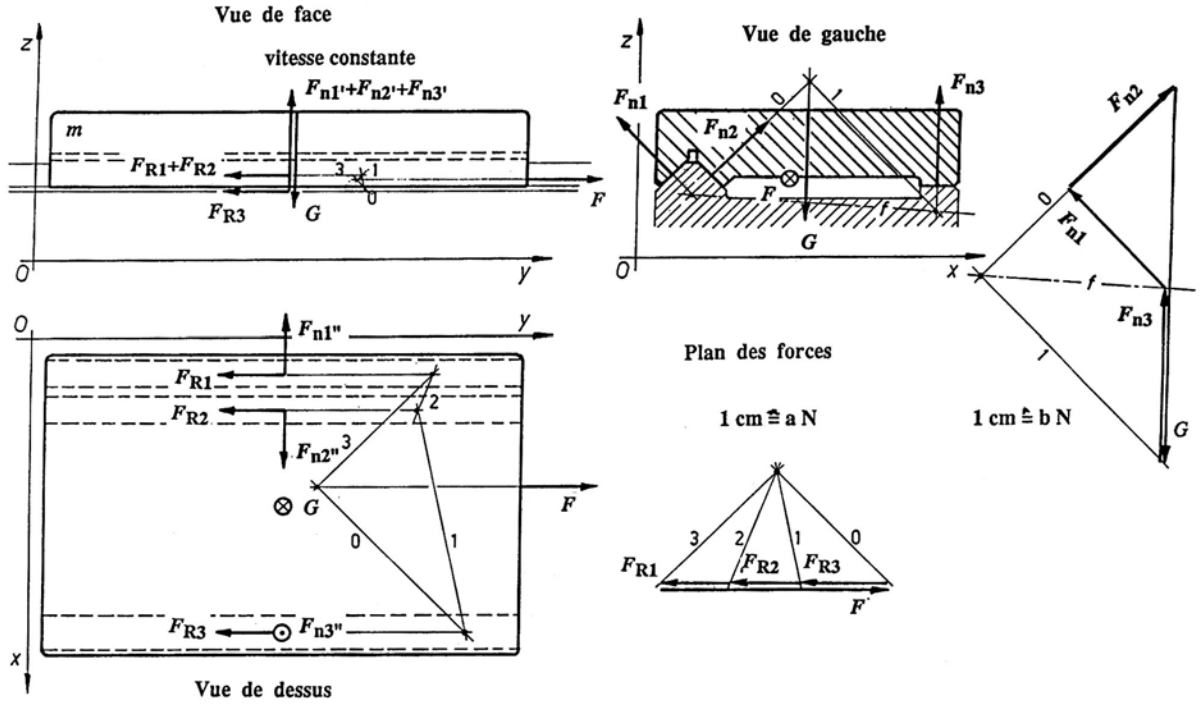


Figure 1.20 Equilibre d'un coulisseau à trois pans sur une glissière.

Les composantes de frottement $\vec{F}_{R1}$, $\vec{F}_{R2}$, $\vec{F}_{R3}$ sont reportées sur les deux autres vues : vue de face et vue de dessus. Les composantes normales sont projetées dans ces deux vues et n'apparaissent pas en vraie grandeur. Enfin, le poids $\vec{G}$ agit seulement dans la vue de face. Dans la vue de dessus, les forces de frottement de glissement doivent être compensées par la force de traction inconnue $\vec{F}$ trouvée à partir d'un nouveau polygone funiculaire ne faisant intervenir que les forces placées dans la direction *Oy* :

$$\Sigma Y = 0 \qquad F = F_{R1} + F_{R2} + F_{R3}.$$

Dans la vue de face, les projections des composantes normales et du poids se font également équilibre. Les forces de frottement $\vec{F}_{R1}$ et $\vec{F}_{R2}$ sont superposées. Le polygone funiculaire, construit avec les mêmes rayons polaires que ceux de la vue de dessus, impose la

ce modèle thermodynamique correspond ainsi à celui d'un élément dit du premier ordre. L'élévation de température, en fonction du temps t, se trouve par une relation de type :

$$\vartheta = \vartheta_0 + \Delta\vartheta_{t=oo} (1 - e^{-t/T}),$$

avec :

ϑ_0	température au temps $t = 0$,
ϑ	température au temps t ,
$\Delta\vartheta_{t=oo}$	élévation de température au temps $t = \infty$,
t	temps,
T	constante de temps du modèle.

Au début du mouvement de glissement, l'allure de la température en fonction du temps est habituellement légèrement différente par suite de certains retards dans la transmission de l'énergie calorifique vers le milieu ambiant. La constante de temps T dépend de la géométrie des corps, des caractéristiques physiques des pièces et du milieu ambiant. Les constantes de temps peuvent se situer entre quelques fractions de seconde et plus d'un jour selon la grandeur et la complexité du mécanisme.

1.6.3 FACTEURS D'ÉCHAUFFEMENT ADMISSIBLES

Le facteur d'échauffement est calculable en multipliant la pression p [N/m^2] par la vitesse de glissement v [m/s], l'unité fondamentale du produit étant N/ms ou W/m^2. Très souvent, le produit s'exprime par la valeur de la pression, exprimée en bar, par la vitesse de glissement, exprimée en m/s ou même en m/min, surtout pour les matières synthétiques. L'introduction d'un contrôle de l'échauffement par le produit $p\ v$ est relativement rare dans les éléments de machines car cette grandeur ne suffit pas à assurer une fiabilité suffisante du résultat. Le produit $p\ v$ est souvent donné dans les tables des propriétés physiques de matières synthétiques (attention aux unités proposées !).

1.7 APPLICATION DES NOTIONS DE FROTTEMENT

Afin de concrétiser toutes les notions entrevues jusqu'ici, étudions le déplacement d'un coulisseau de machine-outil à vitesse constante, sous l'effet d'une force motrice $\vec{F}$, sur une glissière à trois pans (fig. 1.20). La masse du coulisseau est m et son poids vaut $\vec{G} = m\ \vec{g}$. Le profil adopté pour la glissière est un guidage ouvert en vé à 90° et un guidage plan horizontal. Le coefficient de frottement entre le coulisseau et la glissière vaut μ.

Isolons le coulisseau en supprimant l'effet de la glissière. Cette pièce en mouvement est soumise à l'action de cinq forces :

1. le poids du coulisseau : $\vec{G} = m\ \vec{g}$,
2. les actions des pans de la glissière sur les surfaces frottantes du coulisseau :

$$\vec{F}_{B1},\ \vec{F}_{B2}\ \text{et}\ \vec{F}_{B3},$$

3. La force motrice de traction : $\vec{F}$.

L'équilibre général du coulisseau s'exprime par la somme vectorielle des forces:

$$\Sigma F = 0 : \qquad \vec{G} + \vec{F}_{B1} + \vec{F}_{B2} + \vec{F}_{B3} + \vec{F} = 0 .$$

Cet équilibre peut se trouver soit par voie graphique, comme représenté sur la figure, soit par voie analytique ou éventuellement par une méthode mixte. Pour mettre en place et calculer les forces sur la pièce isolée, introduisons trois hypothèses simplificatrices :

$$W_R = F_R \, \Delta l.$$

En admettant ce travail mécanique entièrement transformé en énergie calorifique, la quantité de chaleur produite doit s'évacuer hors des surfaces de frottement. C'est un problème fondamental dans les mécanismes à fort dégagement de chaleur comme par exemple les freins, les embrayages, les transmissions à engrenages et vis sans fin, les paliers lisses. La puissance calorifique dégagée se calcule par :

$$\dot{Q} = F_R \, \Delta l \, / \, \Delta t = F_R \, v.$$

En introduisant :

- la loi de Coulomb : $F_R = \mu \, F_n$,
- la définition de la pression moyenne : $F_n = p \, A$,
- la puissance calorifique produite par unité de surface s'exprime par :

$$\dot{q} = \dot{Q} \, / \, A = \mu \, p \, v \, . \qquad (1.21)$$

La puissance calorifique $\dot{q}$ est proportionnelle au coefficient de frottement et au produit de la pression moyenne par la vitesse de glissement. Pour deux matières connues, celle du corps et celle du plan, l'échauffement dépend finalement du produit $p \, v$. La condition à remplir par un corps en déplacement pour ne pas dépasser un échauffement excessif serait donnée par la condition :

$$p \, v \leq p \, v_{admissible}.$$

Cette méthode de contrôle de l'échauffement est une première approche grossière car le coefficient de frottement, la pression et la vitesse de glissement ne sont qu'une partie des facteurs influençant la température de fonctionnement d'un mécanisme. L'élévation de température est aussi fonction de la géométrie et des propriétés physiques des corps ainsi que des conditions de transmission de chaleur.

1.6.2 ÉLÉVATION DE TEMPÉRATURE

La quantité de chaleur produite par transformation du travail mécanique de frottement se répartit dans les deux corps en contact, dans le lubrifiant intercalé entre ces deux corps ou en circulation et dans le milieu ambiant (fig. 1.19). Pour trouver la valeur de la température en un point quelconque, il faudrait appliquer les diverses lois de la transmission de chaleur et calculer le bilan thermique du système en fonction du temps.

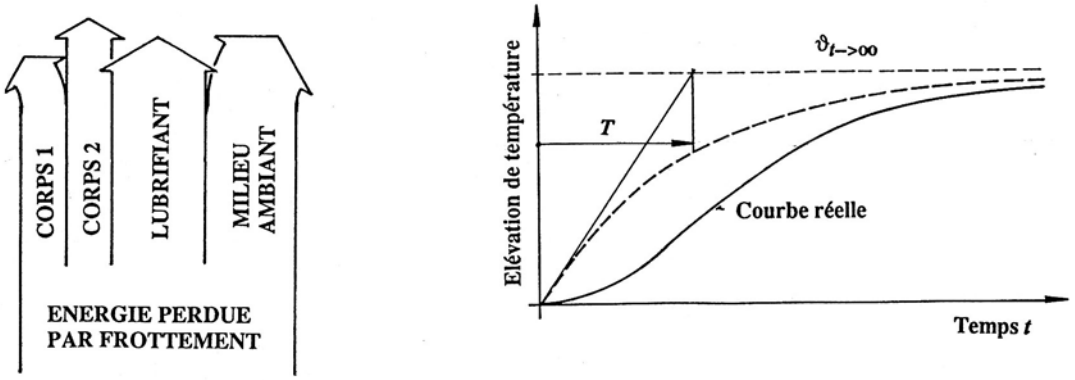


Figure 1.19 Energies échangées, élévation de température

Dans le cas d'un modèle de calcul très élémentaire, la variation de température en fonction du temps peut se définir par une équation différentielle du premier ordre. Le comportement de

de la force motrice. Pratiquement, dès que la composante F_n est proche de cette position limite, le déplacement du corps devient instable avec production de broutage et de vibrations.

1.5.1.5 PRESSIONS ADMISSIBLES

Pour assurer un fonctionnement correct d'un mécanisme, les parties des éléments en contact doivent remplir la condition :

$$p_{max} \leq p_{admissible}.$$

La pression admissible dépend de nombreux facteurs : caractéristiques mécaniques des matériaux, forme des surfaces en contact, charges statiques et/ou dynamiques, type d'éléments de machines. Les pressions admissibles sur des surfaces planes seront données dans la description des divers éléments de machines. Le tableau 1.2 indique les pressions admissibles d'une manière générale.

Tableau 1.2

Pressions moyennes admissibles sur des éléments métalliques

Matière	Matière	Pression admissible en N/mm^2 Au repos		En glissement
1	2	Statique	dynamique	
Ac 50 Ac 50 Ac 50	Ac 50 Fonte grise Bronze	80 à 100 60 à 80 25 à 35	40 à 60 30 à 40 15 à 25	2 à 5 (*) 2 à 8 4 à 8
Ac durci Ac durci Ac durci	Ac 60 Ac 70 Ac durci	100 à 150 100 à 160 120 à 180	50 à 80 50 à 65 60 à 100	4 à 8 (*) 5 à 10 (*) 8 à 16
Garniture FERODO	Fonte grise Acier			2,5 à 5,0
Ac durci Acier durci par trempe à cœur ou superficielle (*) Pas recommandé en frottement de glissement				

1.6 ÉCHAUFFEMENT

Le frottement de glissement intervenant entre deux corps se traduit par une perte d'énergie mécanique transformée presque entièrement en énergie calorifique. Le problème de la transformation de l'énergie de frottement en énergie calorifique est toujours très complexe et impose une étude fouillée de la part de l'ingénieur. Il est recommandé de se méfier de formules simples ou mêmes compliquées permettant de trouver directement la température de fonctionnement d'un élément de machine ou d'un mécanisme.

1.6.1 FACTEUR D'ECHAUFFEMENT

Pour simplifier l'exposé, supposons que la composante de frottement $\vec{F}_R$ reste constante, appliquée au centre de gravité de la surface de frottement, et la vitesse v du corps soit rectiligne et constante. Le travail produit par la force de frottement, pour un déplacement fini de longueur Δl, vaut :

Dans ces diverses expressions, I_x et I_y représentent les moments quadratiques de la surface par rapport au système d'axes *Cxy*.

La pression, donnée par cette relation générale, reste positive sur toute l'étendue de la surface de contact tant que la composante normale $\vec{F}_n$ se situe à l'intérieur, ou à la limite, sur le pourtour du noyau central de la surface. Dans ce cas particulier, un ou plusieurs points de la surface, situés sur le pourtour de la surface, sont à pression nulle. Si la composante normale est située à l'extérieur du noyau central de la section, la surface ne porte que partiellement.

1.5.1.4 PRESSION LINEAIRE SUR UNE SURFACE RECTANGULAIRE

Les surfaces de contact rectangulaires ou assimilables à des surfaces rectangulaires sont très fréquentes dans les éléments de machines. Etudions la répartition de la pression sur une surface de largeur *b*, longueur *h*, sollicitée par une force normale $\vec{F}_n$ placée sur l'axe *Cy* pour simplifier les explications. Tant que la pression agit sur toute la surface, les valeurs extrêmes de la pression se trouvent par :

- pression maximale : $p_{max} = F_n / A \cdot (1 + 6\, n/h)$, (1.20.1)
- pression minimale : $p_{min} = F_n / A \cdot (1 - 6\, n/h)$. (1.20.2)

La pression maximale se trouve évidemment du côté du décalage de la force normale et la répartition est trapézoïdale le long de l'axe *Cy*. La pression minimale devient nulle lorsque le décalage atteint $n = h/6$. La répartition de la pression est alors triangulaire (fig. 1.18); ses valeurs maximale et minimale sont :

$$p_{max} = 2\, F_n / A \qquad \text{et} \qquad p_{min} = 0.$$

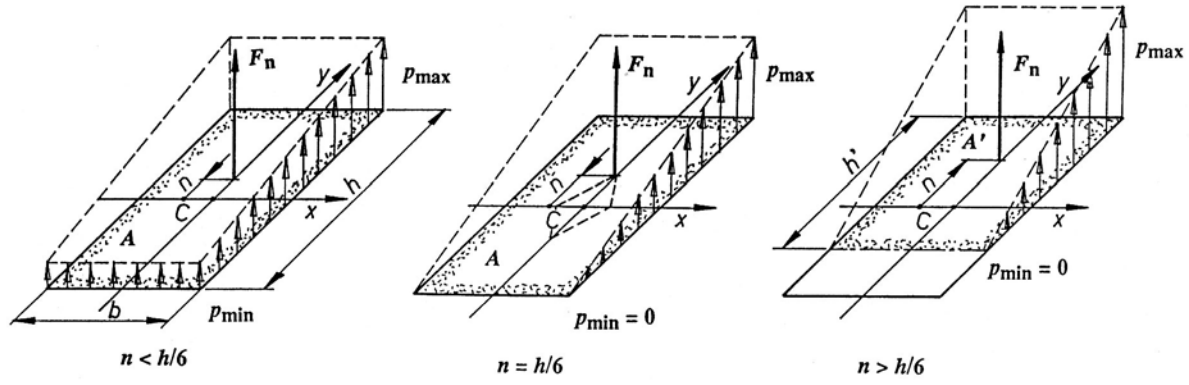


Figure 1.18 Répartition de la pression sur une surface rectangulaire

Si le décalage de la force $\vec{F}_n$ augmente et dépasse la valeur limite $h/6$, la relation générale n'est plus applicable car le point d'application de la force normale se trouve à l'extérieur du noyau central de la surface. Nous devons modifier l'hypothèse de base en supposant que la pression reste encore répartie triangulairement sur une partie seulement de la surface, la longueur portante étant réduite à la dimension *h'*. La réduction de l'étendue de la surface portante $A' = b\, h'$ cause une augmentation de la pression maximale.

Dans cette condition, la valeur des pressions maximale et minimale se trouve par :

$$p_{max} = 2\, F_n / A' = 2\, F_n / b\, h' \quad \text{et} \qquad p_{min} = 0.$$

La composante normale F_n est située au tiers de la longueur portante *h'*. Lorsque le point d'application de la force $\vec{F}_n$ vient se placer très près du côté supérieur de la surface, c'est-à-dire lorsque *n* tend vers *h*/2, la pression devient très grande et le corps tend à basculer sous l'effet

surface, l'hypothèse la plus simple consiste à admettre une pression répartie uniformément sur toute l'étendue de la surface. Cette pression se calcule simplement par le rapport :

$$\overline{p} = \frac{F_n}{A}. \qquad (1.18)$$

Chaque surface élémentaire de même aire dA supporte la même composante normale élémentaire d$\vec{F}_n$. La répartition de la pression entre des corps au repos ou en mouvement peut introduire d'autres hypothèses de répartition comme par exemple une répartition parabolique pour des contacts presque ponctuels ou des répartitions hyperboliques pour des surfaces annulaires.

1.5.1.3 PRESSION LINÉAIRE

Si la composante normale $\vec{F}_n$ ne passe pas par le centre de gravité de la surface de contact, l'hypothèse la plus simple consiste à admettre une répartition linéaire de la pression. Le calcul de la pression en un point quelconque de la surface de contact est semblable à celui de la recherche de la contrainte normale résultante dans une pièce sollicitée par une force compressive excentrée, la matière de la pièce ne supportant aucune contrainte normale positive. En effet, la pression de contact entre deux corps ne peut jamais devenir négative si l'on néglige les forces d'adhésion.

Soit une surface de contact d'aire A entre deux corps et soit un système de coordonnées Cxy , le point C se trouvant au centre de gravité de la surface, les axes Cx et Cy étant une paire d'axes principaux de la surface (fig. 1.17). La composante normale $\vec{F}_n$, résultante des forces élémentaires dF_n, est repérée par les coordonnées m et n dans le plan Cxy.

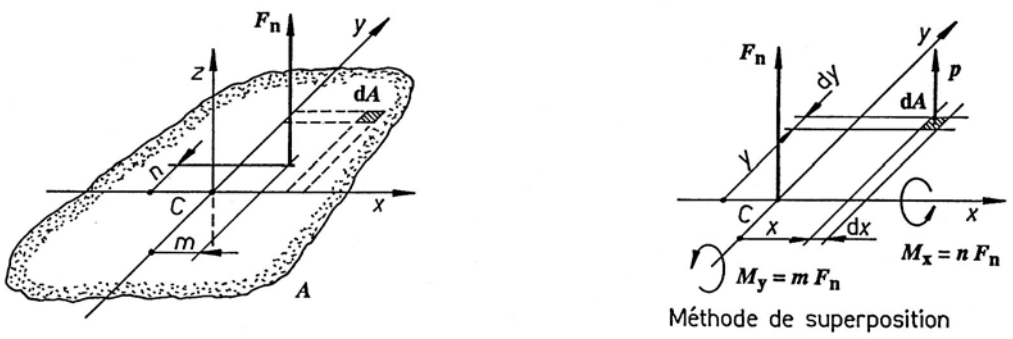


Figure 1.17 Recherche de la répartition de la pression

En appliquant la méthode de réduction des efforts au centre de gravité de la surface, la superposition des efforts et la somme des pressions partielles, l'utilisation des relations générales de la résistance des matériaux permet de trouver facilement les diverses pressions composantes sur l'aire élémentaire dA repérée par les coordonnées x et y :

1. pression due à la force normale F_n : $p_1 = F_n / A$,
2. pression due au décalage n : $p_2 = n\, F_n\, y / I_x$,
3. pression due au décalage m : $p_3 = m\, F_n\, x / I_y$.

La pression résultante, en un point de la surface élémentaire dA, est égale à la somme algébrique des pressions partielles, soit :

$$p_{x,y} = \frac{F_n}{A} + \frac{m F_n}{I_y} x + \frac{n F_n}{I_x} y. \qquad (1.19)$$

et la composante tangentielle de frottement $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{R}$ (fig. 1.16). La pression entre le plan et le corps agissant sur cette surface élémentaire se définit par le rapport :

$$p = \frac{\mathrm{d}F_\mathrm{n}}{\mathrm{d}A}. \qquad (1.17)$$

Cette pression doit rester, pour toute la surface de contact, inférieure à une valeur admissible déterminée expérimentalement. Pour une surface d'appui en glissement, elle est très inférieure à la valeur des contraintes normales supportables par la matière du corps ou du plan. Il est donc prudent de vérifier l'étendue des surfaces de contact entre les corps avant de poursuivre l'étude d'un mécanisme.

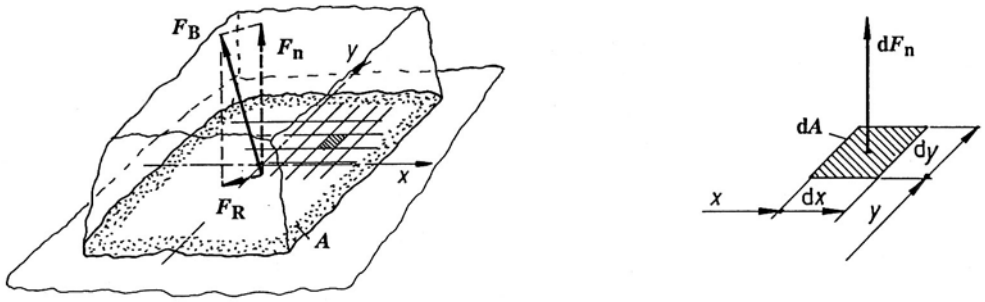


Figure 1.16 Définition de la pression sur la surface de contact

Pour trouver la pression maximale entre deux corps solides réels, il faudrait connaître la répartition exacte de toutes les forces normales élémentaires $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{n}$ et les parties de surface vraiment en contact. Dans la pratique, il est très difficile, voire le plus souvent impossible, de trouver ces deux grandeurs en raison du très grand nombre de facteurs intervenant dans cette répartition. Indiquons en passant que des surfaces planes usinées, se touchant sous des pressions modestes, sont en contact sur quelques pourcents seulement de la surface totale.

Dans tous les cas, la pression maximale calculable doit rester inférieure ou à la limite égale à la pression admissible :

$$p_\mathrm{max} \leq p_\mathrm{admissible}.$$

Pour atteindre ce but, il faudra que la pression soit aussi uniforme que possible entre les pièces. La capacité de charge de l'élément ou le mécanisme sera fortement augmentée. F.P. Bowden et D. Tabor [1.2] ont effectué des mesures de la résistance de contact entre deux plaques en acier afin de déterminer la surface portante réelle en fonction de la charge normale. Sur une plaque de 21 cm^2 avec une charge de 5000 N, la surface portante représentait seulement 0,25 % de la surface totale alors qu'avec une charge de 50 N, elle n'était que 0,0025 % !

1.5.1.2 PRESSION UNIFORME

Deux cas seront considérés dans ce sous-chapitre :

1. la composante normale $\vec{F}_\mathrm{n}$ de la réaction d'appui $\vec{F}_\mathrm{B}$ ou $\vec{F}_\mathrm{B0}$ passe par le centre de gravité de la surface de contact. Cette condition particulière est exceptionnelle dans la plupart des cas étudiés.
2. la composante normale $\vec{F}_\mathrm{n}$ de la réaction d'appui $\vec{F}_\mathrm{B}$ ou $\vec{F}_\mathrm{B0}$ ne passe pas par le centre de gravité de la surface de contact.

L'hypothèse introduite dans le calcul de la pression ne doit en aucun cas mettre en défaut les conditions d'équilibre des corps. Si la composante $\vec{F}_\mathrm{n}$ passe par le centre de gravité de la

1.4.5.2 FORCE DE TRACTION HORIZONTALE

Dans le mouvement de montée du corps, le rendement mécanique s'exprime par :

$$\eta_{méc} = \frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha + \rho)}. \qquad (1.15)$$

Lorsque la tangente de la somme des deux angles tend vers l'infini, le rendement mécanique tend vers zéro. La force de traction devient incapable de déplacer le corps sur un plan proche de la verticale. Dans le mouvement de descente, le rendement vaut :

$$\eta_{méc} = \frac{\tan(\alpha - \rho)}{\tan\alpha}. \qquad (1.16)$$

Le rendement mécanique devient nul à la descente lorsque l'angle du plan est égal à l'angle de frottement. Lorsque l'angle de frottement est égal à l'angle du plan, le rendement du plan incliné est inférieur à 50 % dans le mouvement de montée.

1.4.5.3 FORCE DE TRACTION À DIRECTION QUELCONQUE

Dans le mouvement de montée du corps, le rendement du plan incliné se détermine en appliquant la règle générale :

$$\eta_{méc} = \sin\alpha\,(\cos\beta + \mu\sin\beta) / (\cos\beta\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha))$$

$$\eta_{méc} = (1 + \mu\tan\beta) / (1 + \mu / \tan\alpha).$$

Le rendement mécanique dépend de l'angle du plan, de l'inclinaison de la force de traction par rapport à la direction du plan et du coefficient de frottement. Dans le mouvement de descente, le rendement s'exprime par :

$$\eta_{méc} = \cos\beta\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) / (\sin\alpha\,(\cos\beta - \mu\sin\beta))$$

$$\eta_{méc} = (1 - \mu/\tan\alpha) / (1 - \mu\tan\beta)\ .$$

Le rendement mécanique du plan est également nul à la descente lorsque l'angle du plan est égal à l'angle de frottement.

1.5 PRESSION ET ÉCHAUFFEMENT

L'étude d'une pièce de machine au repos ou en mouvement avec ou même sans frottement comporte non seulement la recherche de l'équilibre statique ou dynamique, mais également l'étude de la répartition des forces de contact entre le corps et les pièces voisines, ainsi que l'échauffement s'il y a déplacement. Toutes les forces citées précédemment sont réparties dans des volumes ou sur des surfaces.

1.5.1 CONTRÔLE DE LA PRESSION

1.5.1.1 DÉFINITION DE LA PRESSION

L'action totale du plan rugueux $\vec{F}_B$ en glissement ou de $\vec{F}_{B0}$ à la limite du repos, représentée symboliquement par une force concentrée, est en réalité la résultante de toutes les forces élémentaires $d\vec{F}_B$ ou $d\vec{F}_{B0}$ engendrées par le contact entre le corps et la surface d'appui. Choisissons un système de coordonnées *Oxy* sur la surface de contact en glissement et découpons en pensée une surface élémentaire, d'aire d*A*, sur laquelle agit une réaction élémentaire $d\vec{F}_B$. Les composantes de cette force élémentaire sont la composante normale $d\vec{F}_n$

2. nulle : si $\alpha = \rho$,
3. négative : si $\alpha < \rho$.

1.4.4 COMPARAISON DES EXPRESSIONS DES FORCES DE TRACTION

La force de traction, parallèle au plan, horizontale ou quelconque, peut se trouver par les trois relations :

1. Force parallèle au plan : $F = G\,(\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha)$,
2. Force horizontale : $F_h = G\tan(\alpha \pm \rho)$,
3. Force quelconque : $F = G\,(\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha)/(\cos\beta \pm \mu\sin\beta)$,

avec : signe + valable dans le mouvement de montée.
signe - valable dans le mouvement de descente.

La condition d'irréversibilité du corps sur le plan incliné rugueux est donnée dans les trois cas par la condition : $\alpha \le \rho$.

1.4.5 RENDEMENT MÉCANIQUE DU PLAN INCLINÉ

Le rendement mécanique d'un mécanisme quelconque se définit par le rapport de l'énergie utile à l'énergie absorbée :

$$\eta_{méc} = \frac{\text{énergie utile}}{\text{énergie absorbée}} = \frac{\text{énergie absorbée - pertes}}{\text{énergie absorbée}}. \qquad (1.12)$$

Pour déterminer la valeur du rendement mécanique du plan incliné, il est possible d'utiliser :

1. *à la montée* : le rapport de la force de traction sans frottement à la force de traction avec frottement.
2. *à la descente* : le rapport de la force de traction avec frottement, seulement si cette force reste positive dans son expression, à la force de traction sans frottement. Dans ce mouvement, le rendement mécanique ne peut exister que si le corps descend de lui-même.

1.4.5.1 FORCE DE TRACTION PARALLÈLE AU PLAN

A la montée du corps, le rendement mécanique du plan incliné vaut :

$$\eta_{méc} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = \frac{1}{1 + \mu / \tan\alpha}. \qquad (1.13)$$

Le rendement du plan incliné augmente avec l'inclinaison du plan. Il est nul pour un plan horizontal et il est égal à 1,0 pour le plan vertical. A la descente du corps, le rendement mécanique se trouve par :

$$\eta_{méc} = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1 - \mu}{\tan\alpha}. \qquad (1.14)$$

Pour obtenir un rendement mécanique réel, c'est-à-dire plus grand que zéro, il faut que l'angle de frottement de glissement soit plus petit que l'angle du plan incliné. Pour la condition limite : $\alpha = \rho$, le rendement à la montée vaut 50 % et il est nul à la descente.

- force de frottement : $F_R = \mu F_n = \mu G \cos\rho/\cos(\alpha + \rho)$.

Décrivons encore les deux cas particuliers :

1. L'angle du plan est nul : les conditions de frottement correspondent au cas fondamental. La force de traction se trouve par : $F_h = G \tan(0 + \rho) = \mu G$.
2. L'angle du plan est voisin de la verticale :
   Si l'angle du plan vaut : $\pi/2 - \rho$, la somme $\alpha + \rho$ est égale à $\pi/2$.
   La force de traction se trouve par la relation générale : $F_h = G \tan(90°)$ donc cette force est infiniment grande. Il n'est plus possible de déplacer le corps vers le haut du plan incliné, quelle que soit l'intensité de la force de traction. Remarquons que cette condition limite de force de traction limite très grande intervient rapidement lorsque l'angle du plan incliné dépasse déjà 45°

1.4.3.2 MOUVEMENT DE DESCENTE

L'équilibre "statique" du corps à la descente fait intervenir une réaction d'appui $\vec{F}_B$ décomposable en une force normale $\vec{F}_n$ et une force de frottement $\vec{F}_R$ dirigée vers le haut du plan. Le triangle fermé des trois forces permet d'écrire :

$$\vec{G} + \vec{F}_B + \vec{F}_h = 0 \ .$$

La force de traction $\vec{F}_h$ étant perpendiculaire au poids $\vec{G}$ et la réaction $\vec{F}_B$ étant inclinée de l'angle $\alpha - \rho$ par rapport à la verticale, cette force se trouve immédiatement par :

$$F_h = G \tan(\alpha - \rho) \ . \qquad (1.11)$$

La réaction d'appui $\vec{F}_B$ et ses composantes rectangulaires se trouvent à partir du plan des forces de la figure 1.15 par :

- réaction du plan : $F_B = G/\cos(\alpha - \rho)$,
- composante normale : $F_n = F_B \cos\rho = G \cos\rho/\cos(\alpha - \rho)$,
- force de frottement : $F_R = \mu F_n = \mu G \cos\rho/\cos(\alpha - \rho)$.

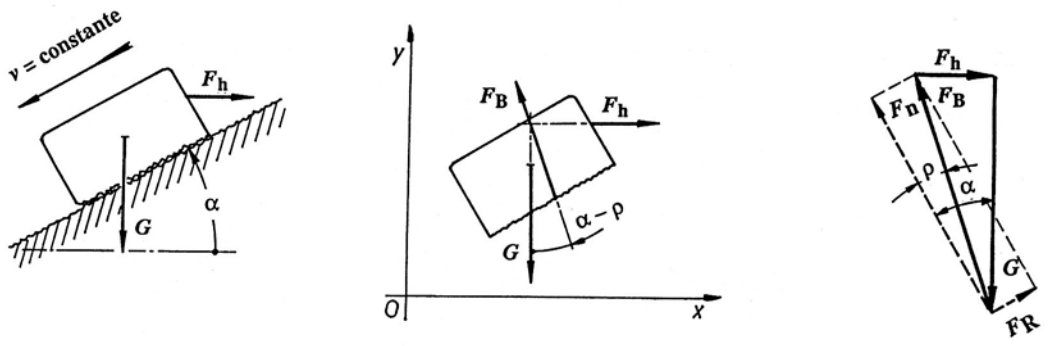


Figure 1.15 Mouvement de descente du corps sollicité par une force horizontale

La force de traction horizontale peut devenir nulle ou même négative. Elle est nulle lorsque la différence entre l'angle du plan et l'angle de frottement est nul, négative si cette différence est plus petite que zéro. Dans ce cas, il faut pousser le corps vers le bas du plan pour le déplacer et lui imprimer une vitesse constante. La composante normale $\vec{F}_n$ est différente de celle trouvée dans le mouvement de montée. La condition d'irréversibilité est la même que pour la force parallèle au plan, soit :

1. positive : si $\alpha > \rho$,

soit le même résultat que l'étude du cas le plus simple.

2. L'angle du plan est 90° : le corps se déplace le long d'une paroi verticale. La force de traction est égale à :

$$F = G\,(\sin(90°) + \mu\cos(90°)) = G\,.$$

Il n'y a plus de frottement entre le corps et la paroi.

1.4.3 FORCE DE TRACTION HORIZONTALE

Un second cas particulier de frottement sur le plan incliné est représenté par le corps sollicité par une force de traction horizontale. Le corps en déplacement à vitesse constante est sollicité par trois forces :

- le poids du corps : $\vec{G} = m\,\vec{g}$,
- l'action $\vec{F}_B$ du plan incliné sur le corps ,
- la force de traction horizontale $\vec{F}_h$.

Le système de coordonnées rectangulaire correspond au système usuel : l'axe *Ox* horizontal, l'axe *Oy* vertical.

1.4.3.1 MOUVEMENT DE MONTÉE

L'équilibre "statique" du corps est trouvé en considérant la réaction d'appui totale $\vec{F}_B$, résultante de la composante normale $\vec{F}_n$ et de la force de frottement $\vec{F}_R$ dirigée vers le bas du plan. L'équilibre du corps s'écrit, compte tenu de l'inclinaison de la réaction d'appui totale de l'angle $\alpha + \rho$ par rapport à l'axe vertical, sous la forme la somme vectorielle :

$$\vec{G} + \vec{F}_B + \vec{F}_h = 0\,.$$

Comme la force de traction $\vec{F}_h$ est perpendiculaire au poids $\vec{G}$, l'intensité de la force de traction se trouve immédiatement par l'expression :

$$F_h = G\tan(\alpha + \rho)\,. \qquad (1.10)$$

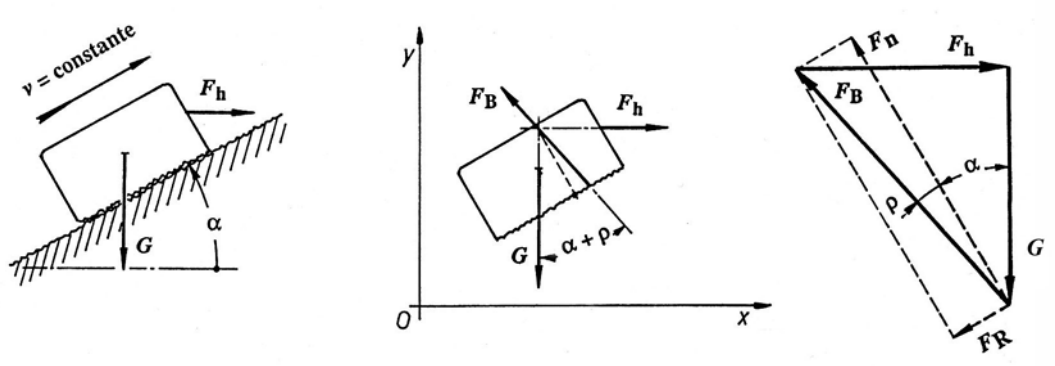


Figure 1.14 Mouvement de montée du corps sollicité par une force horizontale

La réaction d'appui $\vec{F}_B$ et ses composantes rectangulaires peuvent se trouver à partir du plan des forces de la figure 1.14 par :

- réaction du plan : $F_B = G/\cos(\alpha + \rho)$,
- composante normale : $F_n = F_B\cos\rho = G\cos\rho/\cos(\alpha + \rho)$,

La force de traction vaut : $F = G\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$. (1.8)

1.4.2.2 MOUVEMENT DE DESCENTE

Si le corps descend, retenu par la force $\vec{F}$ parallèle au plan, la force de frottement $\vec{F}_R$ est dirigée vers le haut du plan. L'action totale du plan $\vec{F}_B$ sur le corps est inclinée de l'angle total $\alpha - \rho$ par rapport à la verticale. Le polygone des forces s'écrit sous forme vectorielle :

$$\vec{G} + \vec{F}_B + \vec{F} = 0 .$$

Les composantes de la réaction d'appui et la force active valent (fig.1.13):

$\Sigma X = 0$: $F = G \sin\alpha - F_R$,

$\Sigma Y = 0$: $F_n = G\cos\alpha$,

Loi de Coulomb : $F_R = \mu F_n = m\,G\sin\alpha$.

La force de traction vaut : $F = G\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. (1.9)

Les valeurs des composantes normale et tangentielle ne sont pas modifiées par le mouvement de descente, seule la force de frottement inverse son sens.

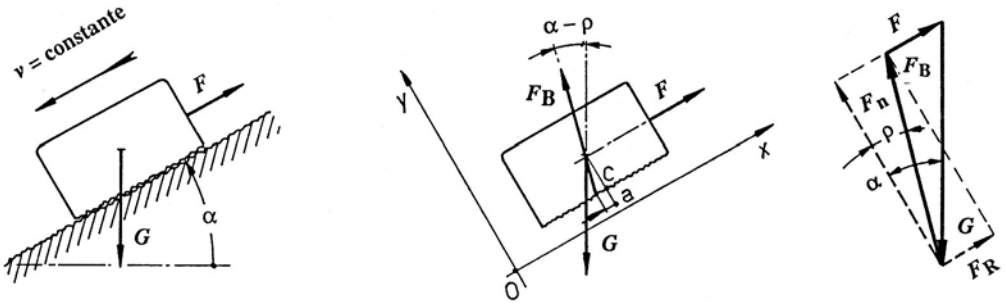


Figure 1.13 Mouvement du corps à la descente sous l'action d'une force parallèle au plan

La force de traction $\vec{F}$ devient nulle lorsque l'angle du plan incliné est égale à l'angle de frottement de glissement. Les deux forces $\vec{G}$ et $\vec{F}_B$ sont sur la même ligne d'action et se font équilibre. Si l'angle du plan est plus petit que l'angle de frottement, la force active $\vec{F}$ change de sens; il faut pousser le corps vers le bas du plan pour le déplacer.

En supposant le corps tiré vers le haut du plan incliné par un lien parfaitement souple, soumis à l'action de la force $\vec{F}$, le corps ralentit et finalement reste immobile dès que la tension dans le lien est supprimée si l'angle du plan est plus petit que l'angle de frottement de glissement quelle que soit l'intensité du poids $\vec{G}$ du corps. Le système mécanique est dit irréversible et la condition d'irréversibilité est donnée par :

$$\alpha \le \rho .$$

Comme le coefficient de frottement d'adhérence est habituellement plus élevé que le coefficient de frottement de glissement, la condition d'irréversibilité est atteinte le plus souvent pour une inclinaison du plan plus grande.

Deux cas particuliers sont à discuter :

1. L'angle du plan est nul : le corps se déplace en glissement sur le plan horizontal et la force de traction, parallèle au plan, est égale à :

$$F = G\,(\sin(0°) + \mu\cos(0°)) = \mu\,G,$$

Les composantes normale et tangentielle de la réaction d'appui $\vec{F}_B$ sur le corps peuvent se trouver par :

1. composante normale : $F_n = G \cos(\alpha + \beta) / (\cos \beta - \mu \sin \beta)$,
2. composante tangentielle : $F_R = \mu\, G \cos(\alpha + \beta) / (\cos \beta - \mu \sin \beta)$.

Dans le mouvement de descente du corps, la force de traction $\vec{F}$ peut devenir nulle ou même négative. Le sens étant défini par le système de coordonnées, la force $\vec{F}$ est :

1. positive : si $\alpha > \rho$,
2. nulle : si $\alpha = \rho$,
3. négative : si $\alpha < \rho$.

1.4.2 FORCE DE TRACTION PARALLÈLE AU PLAN

Etudions maintenant un cas particulier intervenant directement ou indirectement dans les équilibres de plusieurs éléments de machines. Le corps de poids $\vec{G} = m\,\vec{g}$ est déplacé à vitesse constante par une force de traction $\vec{F}$ à direction parallèle au plan incliné. Le corps isolé est soumis à l'action de trois forces :

- le poids du corps : $\vec{G} = m\,\vec{g}$,
- la réaction d'appui : $\vec{F}_B$ constituée par l'action totale du plan sur le corps rugueux,
- la force de traction $\vec{F}$ supposée positive vers le haut du plan.

Le système de coordonnées est choisi avec l'axe *Ox* parallèle au plan, dirigé vers le haut du plan, l'axe *Oy* étant perpendiculaire au plan incliné.

1.4.2.1 MOUVEMENT DE MONTÉE

La force de frottement $\vec{F}_R$ est placée dans le plan de frottement, dirigée vers le bas du plan incliné. La réaction d'appui $\vec{F}_B$ du plan sur le corps est inclinée de l'angle $\alpha + \rho$ par rapport à la direction verticale. Comme le corps doit être en équilibre "statique", le polygone des trois forces fournit immédiatement la relation vectorielle entre ces forces (fig. 1.12) :

$$\vec{G} + \vec{F}_B + \vec{F} = 0 \ .$$

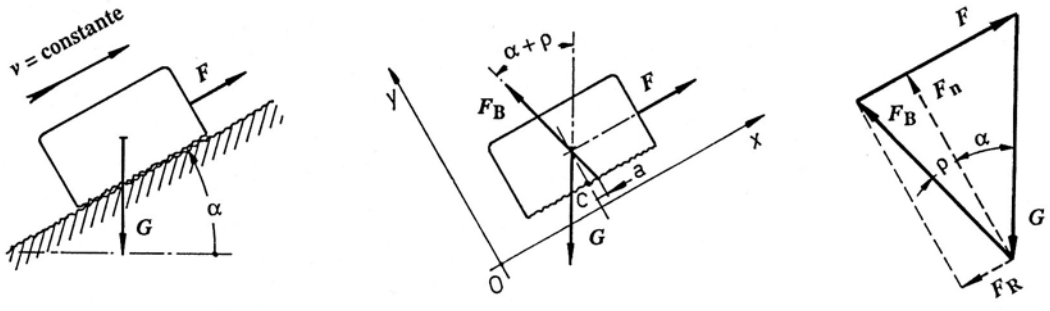


Figure 1.12 Mouvement du corps à la montée sous l'action d'une force parallèle au plan

Les composantes de la réaction d'appui et la force active sont données par :

$\Sigma X = 0$: $F = G \sin \alpha + F_R$,

$\Sigma Y = 0$: $F_n = G \cos \alpha$,

Loi de Coulomb : $F_R = \mu\, F_n = \mu\, G \cos \alpha$.

$\Sigma M_{(C)} = 0$: $a F_n + b F \sin\beta - c F \cos\beta + e G \sin\alpha = 0$,

Loi de Coulomb : $F_R = \mu F_n$.

En éliminant les composantes F_R et F_n de ces diverses relations, la force de traction se trouve par l'expression :

$$F = G\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta}. \qquad (1.6)$$

Les composantes normale $\vec{F}_n$ et tangentielle de frottement $\vec{F}_R$ de la réaction d'appui $\vec{F}_B$ peuvent se trouver par :

1. composante normale : $F_n = G\cos(\alpha + \beta)/(\cos\beta + \mu\sin\beta)$,
2. composante tangentielle : $F_R = \mu G\cos(\alpha + \beta)/(\cos\beta + \mu\sin\beta)$.

1.4.1.2 MOUVEMENT DE DESCENTE

Le corps est soumis aussi à l'action de trois forces :
- le poids du corps : $\vec{G} = m\vec{g}$,
- la force de traction $\vec{F}$ supposée encore positive vers le haut du plan,
- la réaction totale du plan incliné $\vec{F}_B$ sur le corps (fig. 1.11).

La réaction du plan $\vec{F}_B$ se décompose en deux composantes : la force de frottement de glissement $\vec{F}_R$ dirigée vers le haut du plan et la composante normale $\vec{F}_n$ placée vers l'intérieur du corps. Le déplacement du point d'application de la force $\vec{F}_B$ est désigné par a . L'équilibre du corps est recherché analytiquement en adoptant le même système de coordonnées que précédemment, l'axe Ox positif étant encore dirigé vers le haut du plan. L'équilibre s'exprime par les relations :

$\Sigma X = 0$: $F\cos\beta + F_R - G\sin\alpha = 0$,

$\Sigma Y = 0$: $F\sin\beta + F_n - G\cos\alpha = 0$,

$\Sigma M_{(C)} = 0$: $-a F_n + b F\sin\beta - c F\cos\beta + e G\sin\alpha = 0$,

Loi de Coulomb : $F_R = \mu F_n$.

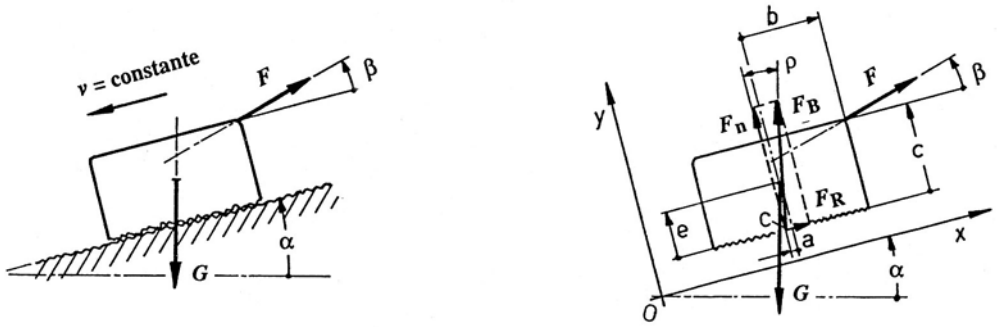


Figure 1.11 Descente du corps sous l'action d'une force quelconque

En éliminant les composantes rectangulaires F_R et F_n de ces diverses relations, la force de traction se trouve par l'expression :

$$F = G\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\beta - \mu\sin\beta}. \qquad (1.7)$$

cette réaction d'appui se place sur la surface du cône, le corps se trouve dans les conditions limites d'adhérence. Ce cône est appelé cône de frottement d'adhérence (fig. 1.9).

Lorsque le corps glisse sur le plan rugueux, la réaction d'appui $\vec{F}_B$ se situe toujours sur la surface du cône de frottement de glissement d'angle total au sommet 2ρ, quelle que soit la direction du déplacement.

1.4 FROTTEMENT SUR LE PLAN INCLINÉ

Proposons-nous d'étudier les conditions de frottement d'un corps de poids $\vec{G} = m\,\vec{g}$, placé sur un plan incliné rugueux d'angle α constant par rapport à l'horizontale. Le déplacement du corps s'effectue suivant la ligne de plus grande pente.

1.4.1 FORCE DE TRACTION QUELCONQUE

Les corps de poids $\vec{G}$ est sollicité par l'action d'une force de traction $\vec{F}$ inclinée d'un angle β par rapport à la direction du plan. Sous l'effet de cette force, le corps se déplace soit vers le haut du plan, soit vers le bas du plan. La loi de Coulomb du frottement de glissement est introduite dans cette étude avec force motrice à direction quelconque.

1.4.1.1 MOUVEMENT DE MONTÉE

Le corps est soumis à l'action de trois forces :

- le poids du corps $\vec{G} = m\,\vec{g}$,
- la force de traction $\vec{F}$, supposée positive vers le haut du plan,
- la réaction du plan incliné $\vec{F}_B$ sur le corps (fig. 1.10).

Dans le mouvement de montée du corps, la force de frottement de glissement $\vec{F}_R$ est dirigée vers le bas du plan, la composante normale $\vec{F}_n$ étant dirigée vers l'intérieur du corps. Le déplacement du point d'application de la réaction d'appui $\vec{F}_B$ est désigné par a par rapport au point C choisi au centre de la surface. L'équilibre du corps est recherché analytiquement en adoptant un système de coordonnées rectangulaires, l'axe Ox étant parallèle au plan incliné, dirigé vers le haut du plan. L'équilibre, en fonction du poids $\vec{G}$, des composantes rectangulaires $\vec{F}_n$ et $\vec{F}_R$, s'exprime par :

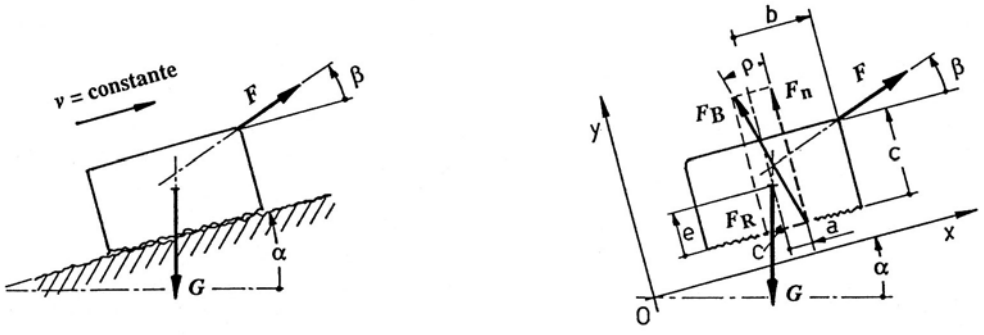


Figure 1.10 Mouvement de montée du corps sous l'action d'une force quelconque

$$\Sigma X = 0 : \qquad F\cos\beta - F_R - G\sin\alpha = 0\,,$$

$$\Sigma Y = 0 : \qquad F\sin\beta + F_n - G\cos\alpha = 0\,,$$

1.3.3 CÔNES DE FROTTEMENT

Considérons un corps au repos, de masse négligeable, placé sur un plan horizontal rugueux et appliquons sur ce corps une force $\vec{F}$ légèrement oblique par rapport à la normale au plan.. En négligeant le poids du corps, ce dernier est soumis pratiquement à l'action de deux forces directement opposées : la force active $\vec{F}$ et la réaction du plan $\vec{F}_B$ sur le corps (fig. 1.8). L'équilibre statique s'écrit :

$$\vec{F} + \vec{F}_B = 0 \ .$$

Modifions progressivement la direction de la force active $\vec{F}$ en augmentant de plus en plus l'inclinaison α . Le corps reste au repos sur le plan rugueux tant que la réaction d'appui $\vec{F}_B$ s'incline d'un angle α inférieure à ρ_0 . Dès que cette force est inclinée de l'angle ρ_0, les conditions limites d'équilibre sont atteintes. Ainsi, la réaction d'appui $\vec{F}_B$ peut prendre n'importe quelle direction comprise entre la normale au plan et la direction limite imposée par $\vec{F}_{B0}$, conformément à la loi du frottement d'adhérence limite.

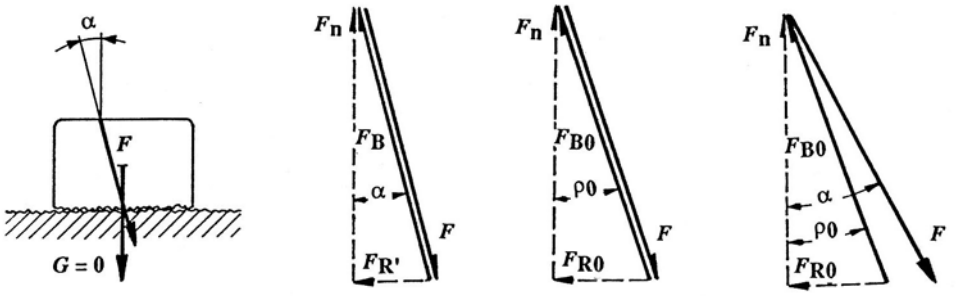


Figure 1.8 Conditions de repos ou de mouvement sur le plan horizontal

Dès que la force active $\vec{F}$ est inclinée d'un angle supérieur à ρ_0, le corps va commencer à se déplacer. Il n'est plus possible de trouver l'équilibre statique du corps car le coefficient de frottement passe de μ_0 à μ . La force de frottement varie de $\vec{F}_{R0}$ à $\vec{F}_R$ et l'équilibre statique est mis en défaut. Le corps accélère dans la direction et le sens de la composante horizontale de la force active. Sur la fig. 1.8, les deux forces $\vec{F}$ et $\vec{F}_{B0}$ ne sont plus superposées. Pour trouver l'équilibre, il faut ajouter à ces deux forces une force complémentaire provenant de l'inertie de la masse en mouvement.

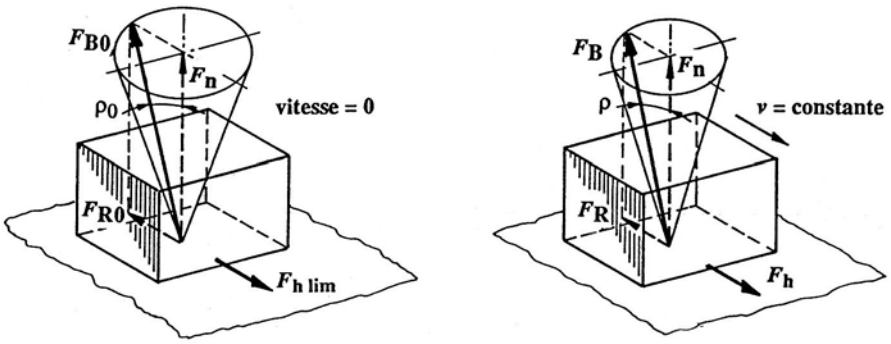


Figure 1.9 Cônes de frottement : d'adhérence et de glissement

En définitive, tant que la réaction d'appui d'un corps au repos est située à l'intérieur d'un cône, d'axe normal au plan, d'angle total au sommet de 2 ρ_0, le corps reste au repos. Dès que

Sur cette figure, la force croît ou décroît proportionnellement au déplacement du point d'application jusqu'à ce que cette force ait atteint la valeur limite $F_{h\ lim}$. Dans le plan de frottement, la force $F_{R'}$ varie de zéro à la valeur limite F_{R0}. Dès que la force limite est atteinte, le corps commence à se déplacer et le coefficient de frottement passe de μ_0 à μ . La force de traction varie brusquement tout comme la force de frottement passant de :

$$F_{R0} = \mu_0 F_n \text{ à } F_R = \mu F_n .$$

1.3.2 DÉPLACEMENT DU CORPS

La particularité du frottement qui ne s'annule pas avec la vitesse mais qui devient habituellement plus grand au repos est à l'origine de phénomènes très gênants surtout dans les déplacements à très faible vitesse. Ces phénomènes, appelés en français broutage et en anglais stick-slip, apparaît dans de nombreuses applications industrielles. Il provient de la modification des coefficients de frottement alliée à l'élasticité du mécanisme de commande et aux masses en présence.

Pour simuler cet effet, imaginons un modèle composé d'une masse *m* placée sur un plan horizontal rugueux reliée au point moteur par un mécanisme d'entraînement simulé par un ressort de raideur *k*. Déplaçons très lentement l'extrémité libre du ressort en appliquant une force de traction $\vec{F}$ qui tend progressivement le ressort (fig. 1.7). Si le corps est initialement au repos, il va rester immobile tant que la tension dans le ressort n'atteint pas la force limite de traction $\vec{F}_{h\ lim}$. Dès que cette force est atteinte, le corps va commencer à se déplacer. Le coefficient de frottement passe de la valeur d'adhérence μ_0 à la valeur de glissement μ. Sous l'effet d'une force de traction devenue trop grande, le corps accélère et va atteindre, sous certaines conditions, une vitesse plus grande que celle du point moteur A. La tension dans le ressort diminue et le corps ralentit ou même s'arrête. Le coefficient de frottement passe alors de la valeur de glissement μ à celle d'adhérence μ_0. Le cycle décrit peut alors se répéter.

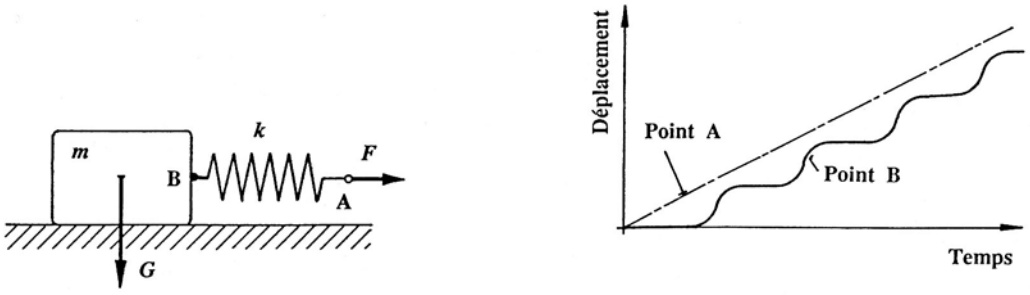


Figure 1.7 Modèle de simulation du broutage à faible vitesse

Pour éviter le phénomène du broutage, il faut diminuer l'élasticité des pièces intermédiaires entre le point d'attaque de la force motrice et la masse à déplacer ou conserver un coefficient de frottement invariable tant au repos qu'en mouvement. Cette condition peut être atteinte partiellement en introduisant entre les surfaces un lubrifiant comme une huile ou une graisse avec additifs anti-broutage. Si un lubrifiant sépare partiellement ou entièrement le plan et le corps, le frottement d'adhérence n'est pas atteint immédiatement car cet élément doit être tout d'abord expulsé de la zone de contact. Dans les mouvements de va et vient continus comme par exemple les coulisseaux de machines-outils, les mesures du frottement ont démontré que le frottement d'adhérence n'intervenait pratiquement pas.

1.3 REMARQUES GÉNÉRALES SUR LE FROTTEMENT

L'introduction du frottement d'adhérence et du frottement de glissement dans les éléments de machines nécessite une discussion complémentaire sur ces deux genres de forces de frottement et sur le cas général du frottement de repos.

1.3.1 CAS GÉNÉRAL DU FROTTEMENT D'ADHÉRENCE

Dans le cas général du frottement d'adhérence, la composante tangentielle $F_{R'}$ de la réaction totale F_B peut prendre n'importe quelle valeur comprise entre - F_{R0} et + F_{R0}. La loi générale du frottement d'adhérence s'exprime par :

$$- F_{R0} \leq F_{R'} \leq F_{R0} = \mu_0 F_n \, . \qquad (1.5)$$

Cette inéquation introduit des difficultés complémentaires dans la recherche des équilibres statiques des corps au repos, en particulier si plusieurs surfaces présentent du frottement d'adhérence. De plus, les corps sollicités par des forces ne sont pas indéformables ce qui modifie également les conditions de déplacement d'un corps, même au repos. Proposons-nous d'étudier le déplacement d'un corps "au repos" sur plan rugueux. Dans ce but, introduisons les hypothèses suivantes :

1. Le coefficient de frottement d'adhérence limite μ_0 est plus élevé que les coefficient de glissement μ.
2. La déformation du corps, en particulier la déformation des surfaces rugueuses en contact, sont proportionnelles aux forces de frottement.
3. Il ne peut exister que deux coefficients de frottement :
   - d'adhérence μ_0 qui reste constant au repos,
   - de glissement μ qui ne dépend pas de la vitesse de glissement.
4. L'effet de l'inertie du corps est négligé.

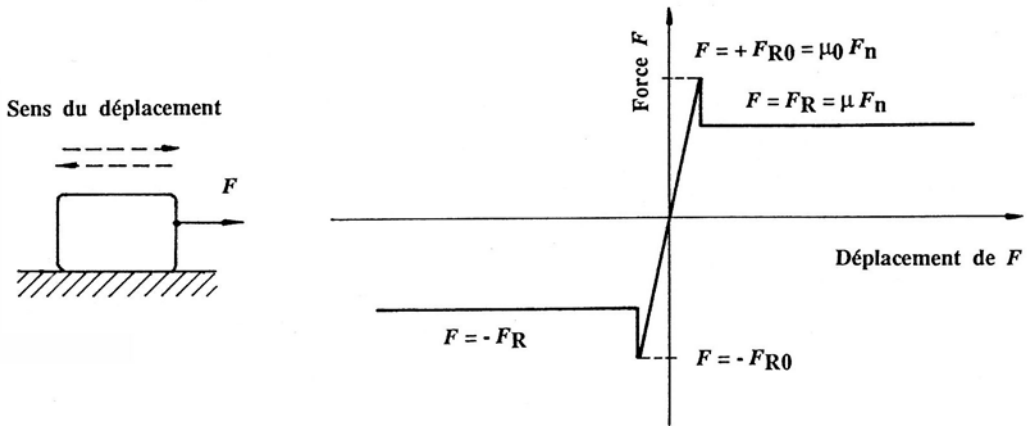


Figure 1.6 Valeur de la force de traction en fonction de son déplacement

En admettant le modèle fondamental de discussion, composé d'un corps de poids $\vec{G}$, tiré par une force horizontale $\vec{F}_h$ progressivement croissante, la représentation de la valeur de la force en fonction du déplacement de son point d'application prend l'allure donnée sur la figure 1.6 .

Tableau 1.1

Valeurs moyennes des coefficients de frottement

Matières en contact	Frottement d'adhérence Coefficient de frottement mu zéro Lubrification		Frottement de glissement Coefficient de frottement mu Lubrification	
	sec	Graissé	sec	graissé
Acier sur				
Acier	0,40 à 0,70	0,10	0,30 à 0,60	0,04 à 0,10
Ac37 / Ac 37 poli			0,15	
Fonte grise	0,16 à 0,25	0,10	0,14 à 0,26	0,03 à 0,16
Bronze	0,20	0,10	0,16 à 0,28	0,04 à 0,12
Alliage d'aluminium	0,20	0,10	0,20	0,04 à 0,16
Acier sur				
Métal blanc			0,22	
Alliage de plomb			0,30 à 0,50	
Joint en cuir	0,50	0,20	0,20 à 0,26	0,12
Garniture de frein			0,40 à 0,60	0,20 à 0,45
PTFE (Téflon)			0,04 à 0,22	
Polyamides			0,28 à 0,40	0,10
Glace	0,027		0,014	
Fonte grise sur				
Fonte grise	0,20	0,16		0,05 à 0,15
Bronze	0,20	0,10	0,20	0,10
Autres matières				
Bronze sur bronze	0,20	0,10	0,20	0,04 à 0,08
Métaux sur bois	0,50 à 0,65	0,10	0,20 à 0,50	0,04 à 0,10
Bois sur bois	0,40 à 0,65	0,15 à 0,20	0,20 à 0,40	0,04 à 0,18
Métaux sur cuir	0,50	0,25	0,20 à 0,30	0,12

Remarques importantes sur les coefficients de frottement

Le coefficient de frottement d'adhérence est habituellement plus élevé que celui de glissement. Lorsque les surfaces glissent l'une sur l'autre, la lubrification joue un rôle très important dans la création des forces de frottement. Les valeurs données dans le tableau sont applicables à faible vitesse de glissement et à lubrification parcimonieuse.

Si les surfaces sont nettoyées de toutes traces de lubrifiant, les coefficients de frottement d'adhérence peuvent atteindre ou même dépasser la valeur 1,0 !

1.2.3 MÉTHODE DE RÉSOLUTION AVEC FROTTEMENT

Dans la plupart des problèmes rencontrés en construction et en éléments de machines, il est pratiquement impossible de trouver les équilibres des corps avec frottement sans introduire des hypothèses complémentaires et simplificatrices. Dans une première approche du problème, il est possible de fixer approximativement la position des forces de contact en négligeant le frottement. Dans une étude plus complète, les conditions d'équilibre sont trouvées en tenant compte de la loi de Coulomb et des règles d'équilibre des corps étudiées en statique. Dans ces deux cas, il vaut la peine de suivre la méthode :

1. Isoler le corps en frottement et remplacer chaque contact du corps avec l'extérieur par une seule force.
2. Compter le nombre de forces appliquées sur le corps et introduire la règle correspondante d'équilibre statique.
3. Etudier toutes les conditions d'équilibre du corps :
   - équilibre de translation,
   - équilibre de rotation.
4. Résoudre graphiquement ou analytiquement le problème :
   - solution graphique : en partant de la composante normale F_n, point d'application sur la surface, sens à l'intérieur du corps, et en inclinant les réactions extérieures totales de l'angle ρ s'il y a glissement, de l'angle ρ_0 si l'adhérence limite est atteinte;
   - solution analytique : en posant pour chaque point de contact i du corps avec les pièces extérieures :
   - frottement de glissement : $F_{Ri} = \mu_i F_{ni}$,
   - frottement d'adhérence : $F_{R0i} = \mu_{0i} F_{ni}$.
   - la valeur du déplacement a_i du point d'application des composantes normales F_{ni}.

Le déplacement du point d'application des forces extérieures sur les surfaces de contact est difficilement prévisible dans la méthode analytique, en particulier si le problème à résoudre est un problème spatial donc non plan. Cette particularité du frottement de repos ou de glissement montre une propriété fondamentale de l'étude des équilibres avec frottement : le principe de superposition des forces, d'usage très courant en mécanique appliquée, n'est pas applicable dès qu'il y a des forces de frottement. Pour obtenir rapidement une solution acceptable, il faut imaginer initialement ces forces de contact placées au centre de gravité des surfaces de contact et ensuite les déplacer jusqu'à ce que les équilibres de translation et de rotation soient conformes aux règles générales de l'équilibre statique.

1.2.4 COEFFICIENTS DE FROTTEMENT

La loi de Coulomb $F_R = \mu F_n$ est très peu précise, mais très pratique dans les applications simples. Elle est à peu près valable lorsque les surfaces en contact sont sèches ou très peu lubrifiées. Le tableau 1.1 donne les coefficients de frottement d'adhérence et de glissement en fonction des matériaux en contact et de l'effet de la lubrification. Les coefficients de frottement introduits dans le contrôle des éléments de machines seront cités si possible dans chacun des cas particuliers.

1. Le coefficient de frottement de glissement μ est constant pour tous les points de la surface frottante.
2. La force de frottement $\vec{F}_R$ est indépendante de l'étendue de la surface glissante.
3. Le coefficient de frottement de glissement est indépendant de la vitesse de glissement entre les surfaces frottantes.

Ces trois hypothèses énoncées par Coulomb ne sont pas vérifiées dans la pratique actuelle. Les mesures effectuées sur des corps avec frottement montrent que le coefficient de frottement dépend : de la force normale F_n, de l'étendue de l'aire des surfaces portantes donc de la pression, de la vitesse relative des surfaces frottantes, de la température, du milieu ambiant et de la durée de la sollicitation. Il n'a pas été possible d'exprimer une loi simple entre le coefficient de frottement et ces différents paramètres.

1.2.2 CORPS AVEC VITESSE DE GLISSEMENT CONSTANTE

La définition des conditions de frottement d'un corps sur plan horizontal s'est effectuée en supposant une force de traction placée dans le plan de contact. Ce cas particulier de sollicitation masque une propriété fondamentale du frottement de repos ou de glissement. Si le corps solide est déplacé sur la plan horizontal rugueux en translation rectiligne et à vitesse constante par une force de traction quelconque $\vec{F}$, le corps isolé est encore soumis à l'action de trois forces concourantes et les conditions d'équilibre statique s'écrivent (fig. 1.5) :

$$\vec{G} + \vec{F} + \vec{F}_B = 0.$$

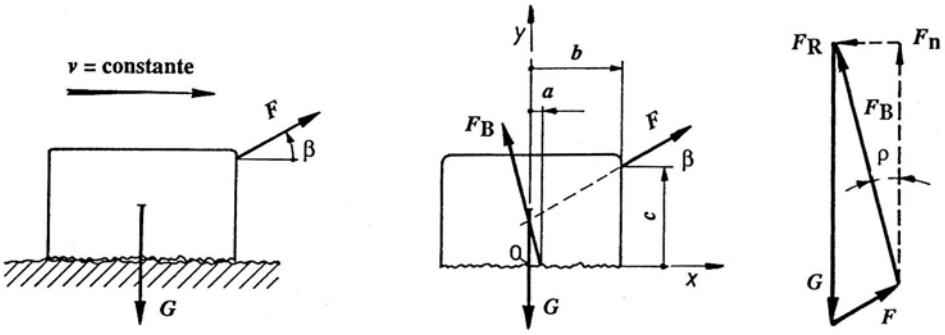


Figure 1.5 Frottement de glissement d'un corps sous l'action d'une force quelconque

La méthode de résolution analytique nécessite les équations d'équilibre suivantes :

$\Sigma X = 0$: $F \cos\beta - F_R = 0,$

$\Sigma Y = 0$: $F \sin\beta + F_n - G = 0,$

$\Sigma M_{(O)} = 0$: $a F_n + b F \sin\beta - c F \cos\beta = 0,$

loi de Coulomb : $F_R = \mu F_n$.

L'intensité de la composante normale $\vec{F}_n$ est maintenant différente de celle du poids du corps $\vec{G}$. La force de traction $\vec{F}$ produit un moment de force par rapport au point de référence O. La réaction d'appui $\vec{F}_B$ ne peut plus se placer au point d'intersection de la ligne d'action de $\vec{G}$ avec le plan rugueux. Cette force $\vec{F}_B$ est décalée de la distance a sur la figure, grandeur inconnue initialement. L'effet du frottement entre deux corps provoque non seulement une inclinaison des forces de contact par rapport à la normale, mais aussi un déplacement du point d'application de ces forces par rapport à la position sans frottement.

2,0 suivant les exigences imposées, les pièces en présence et toutes les hypothèses introduites dans le calcul.

1.2 FROTTEMENT DE GLISSEMENT

Augmentons l'intensité de la force de traction sur le corps au repos placé sur le plan rugueux et dépassons la valeur limite $\vec{F}_{h\,lim}$. L'expérience montre que le corps commence à se déplacer dans le sens de la force de traction.

1.2.1 LOI DE COULOMB

A vitesse constante de glissement, la force de traction reste approximativement constante. La force de frottement, désignée par $\vec{F}_R$, est toujours opposée à la vitesse de glissement du corps. L'action totale $\vec{F}_B$ du plan rugueux sur le corps est inclinée de l'angle ρ par rapport à la normale au plan, cet angle étant appelé angle de frottement de glissement. La force de frottement est proportionnelle à la composante normale $\vec{F}_n$ de la réaction d'appui. La relation fondamentale du frottement de glissement, dénommée loi de Coulomb, s'écrit :

$$F_R = \mu\, F_n\,. \qquad (1.4)$$

Dans cette relation très simple, μ est le coefficient de frottement de glissement. L'action totale du plan rugueux sur le corps $\vec{F}_B$ est la résultante des deux composantes normales et tangentielles :

$$\vec{F}_B = \vec{F}_n + \vec{F}_R.$$

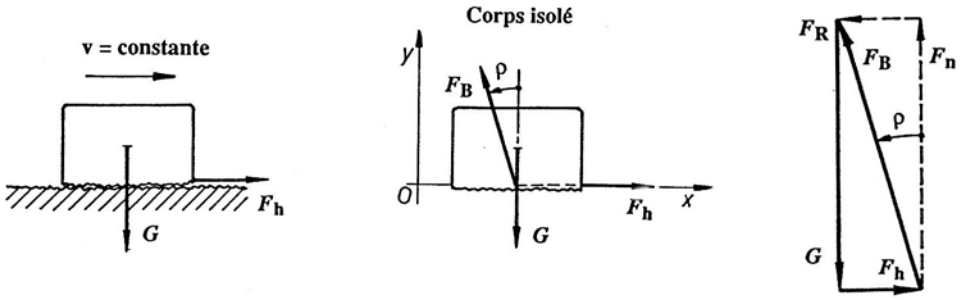


Figure 1.4 Frottement de glissement sur le plan horizontal

Dans la solution graphique d'un problème de frottement de glissement, il est vivement recommandé d'introduire l'angle de frottement ρ relié au coefficient de frottement par l'expression générale :

$$\mu = \tan \rho.$$

Le coefficient de frottement de glissement μ est introduit dans la solution analytique des conditions d'équilibre. Les tables donnent habituellement le coefficient de frottement entre les corps solides en fonction des conditions de lubrification, de la nature des surfaces en contact, de la présence ou de l'absence de glissement. Dans les solutions graphiques, l'inclinaison de la force totale $\vec{F}_B$ sera construite à partir de la valeur du coefficient de frottement.

La loi de Coulomb pour le frottement de glissement introduit un certain nombre d'hypothèses simplificatrices :

1.1.2 ADHÉRENCE LIMITE

Le corps solide reste au repos sur le plan horizontal rugueux tant que la force de traction $\vec{F}_h$ ne dépasse pas une valeur limite $\vec{F}_{h\,lim}$. La force de frottement $\vec{F}_{R'}$ atteint alors sa valeur maximale désignée par $\vec{F}_{R0}$, dite force de frottement d'adhérence limite. Le corps isolé est un corps soumis à l'action de trois forces. L'équilibre du corps s'exprime graphiquement par la somme vectorielle des forces totales ou des composantes (fig. 1.3) :

$$\vec{G} + \vec{F}_{h\,lim} + \vec{F}_{B0} = \vec{G} + \vec{F}_{h\,lim} + \vec{F}_n + \vec{F}_{R0} = 0.$$

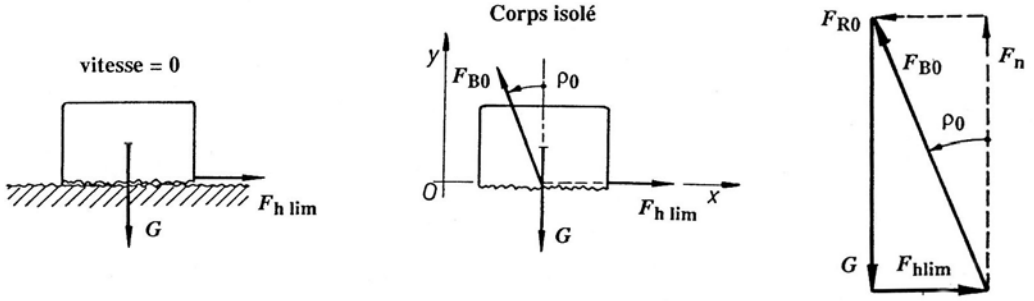


Figure 1.3 Frottement d'adhérence limite d'un corps sur plan horizontal

Les composantes $\vec{F}_n$ et $\vec{F}_{R0}$ sont encore les composantes rectangulaires de l'action totale du plan rugueux sur le corps $\vec{F}_{B0}$. L'indice 0 indique que les conditions d'équilibre sont définies à vitesse de glissement nulle, mais à la limite du repos. L'angle compris entre la composante normale $\vec{F}_n$ et la réaction d'appui totale $\vec{F}_{B0}$ est l'angle de frottement d'adhérence limite désigné par ρ_0.

L'angle de frottement d'adhérence limite est relié aux composantes rectangulaires par l'expression :

$$\tan \rho_0 = F_{R0} / F_n. \qquad (1.1)$$

Dans l'écriture des conditions d'équilibre, on préfère introduire les coefficient de frottement d'adhérence limite, désigné par μ_0, lié à l'angle de frottement d'adhérence par :

$$\mu_0 = \tan \rho_0 . \qquad (1.2)$$

1.1.3 COEFFICIENT DE SÉCURITÉ AU GLISSEMENT

Pour assurer l'immobilité du corps sur le plan rugueux, la force de frottement $\vec{F}_{R'}$ ne doit en aucun cas atteindre la valeur limite $\vec{F}_{R0}$. Cette condition s'exprime par l'inégalité algébrique :

$$- F_{R0} < F_{R'} < + F_{R0} .$$

Le coefficient de sécurité au glissement S_{gl} se définit par le rapport entre la force d'adhérence limite F_{R0} à la force de frottement réelle $F_{R'}$:

$$S_{gl} = F_{R0} / F_{R'}. \qquad (1.3)$$

Dans la plupart des mécanismes et des éléments de machines utilisant le frottement d'adhérence, le coefficient de sécurité au glissement est habituellement compris entre 1,4 et

- le poids du corps $\vec{G}$,
- la force de traction horizontale $\vec{F}_h$,
- la réaction du plan horizontal sur le corps.

Les conditions d'équilibre statique du corps correspondent à celles d'un point matériel sollicité par trois forces et les projections des forces sur un système d'axes rectangulaire s'écrivent (fig. 1.2) :

$$\Sigma X = 0 : \qquad F_h - F_{R'} = 0,$$
$$\Sigma Y = 0 : \qquad F_n - G = 0 .$$

L'action totale du plan rugueux sur le corps ne coïncide plus en direction avec la normale au plan horizontal. Cette force, désignée par $\vec{F}_B$, se décompose en deux composantes :
- une composante normale à la surface du plan $\vec{F}_n$,
- une composante placée dans le plan de contact $\vec{F}_{R'}$.

Cette force $\vec{F}_{R'}$ est la force de frottement d'adhérence du corps rugueux sur le plan horizontal rugueux.

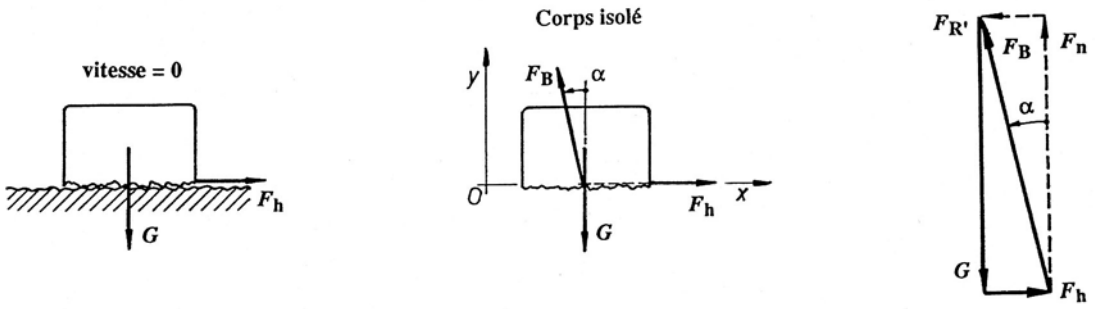


Figure 1.2 Frottement d'un corps simple sur le plan horizontal

L'équilibre du corps peut également s'exprimer par une somme vectorielle de toutes les forces ou composantes appliquées sur lui :

$$\vec{G} + \vec{F}_h + \vec{F}_B = \vec{G} + \vec{F}_h + \vec{F}_n + \vec{F}_{R'} = 0.$$

La composante normale $\vec{F}_n$ de l'action totale du plan sur le corps est toujours dirigée vers l'intérieur du corps. La composante tangentielle $\vec{F}_{R'}$ est perpendiculaire à $\vec{F}_n$. Elle est toujours opposée au déplacement probable du corps sous l'effet de la force de traction $\vec{F}_h$. La résultante de ces deux composantes doit passer obligatoirement par le point d'intersection des lignes d'action du poids $\vec{G}$ et de la force de traction $\vec{F}_h$. La force résultante $\vec{F}_B$ est inclinée d'un angle α par rapport à la normale au plan. Cette force vaut la somme vectorielle :

$$\vec{F}_B = \vec{F}_n + \vec{F}_{R'} .$$

Sans hypothèses complémentaires, remarquons qu'il nous est impossible de connaître la répartition exacte de la force résultante $\vec{F}_B$ et de ses composantes entre le corps et le plan. Il est certain que les diverses composantes élémentaires de $\vec{F}_B$, provenant des contact partiels des deux surfaces rugueuses, ne sont pas équipollentes, même pas parallèles à leur résultante $\vec{F}_B$. La seule affirmation possible est que le corps doit se trouver obligatoirement en équilibre statique sous l'action des forces appliquées.

CHAPITRE 1

FROTTEMENTS DE GLISSEMENT

Dans le contact de corps solides réels, sollicités par des efforts engendrés par le poids ou des forces extérieures, les actions réciproques des surfaces déformées engendrent des pressions normales et des cisaillements difficilement définissables. Ces actions peuvent se décomposer en poussées, résultantes de l'effet des pressions et de forces tangentielles, provenant des cisaillements, appelées forces de frottement. Cet exposé des conditions de frottement, limité habituellement à deux corps, distingue les cas de contact suivants :

1. Les deux corps en contact sont immobiles l'un par rapport à l'autre. Les surfaces déformées des parties en contact transmettent des efforts imposés par les conditions d'équilibre au repos et les lois du frottement dit d'adhérence.
2. Les deux corps glissent l'un par rapport à l'autre. Les surfaces déformées des parties momentanément en contact transmettent des efforts imposés par les conditions d'équilibre en mouvement et la loi du frottement de glissement.
3. Les deux corps roulent l'un sur l'autre sans que les surfaces en contact glissent l'une par rapport à l'autre. Les efforts produits entre les deux corps sont trouvés par la loi du frottement de roulement.
4. Les deux corps en contact roulent et glissent simultanément l'un sur l'autre. Les conditions de déplacement des surfaces déformées et les efforts qui en résultent dépendent des lois composantes du frottement de glissement et du frottement de roulement.

Le phénomène des frottements de glissement et de roulement est excessivement complexe et il n'a pas été possible jusqu'ici, malgré toutes les hypothèses, théories et essais, de donner des lois applicables à tous les cas rencontrés en construction de machines, le nombre de paramètres influençant de loin ou de près le comportement des corps étant trop grand. Les lois citées dans ce premier chapitre sont très primitives et peu précises. Elles permettent malgré tout de mettre en évidence les particularités réelles de corps en contact, d'estimer avec une précision plus ou moins limitée les efforts transmis à travers les surfaces déformées, à énoncer des recommandations valables dans le choix et l'implémentation des éléments ou des parties de machines.

1.1 FROTTEMENT D'ADHÉRENCE

Le frottement d'adhérence intervient pratiquement dans tout contact entre corps solides lorsque les surfaces déformées, déformations engendrées par les efforts permettant de maintenir l'équilibre relatif des composants, ne glissent pas l'une par rapport à l'autre.

1.1.1 ÉQUILIBRE D'UN CORPS SIMPLE SUR LE PLAN HORIZONTAL

Soit un corps de poids $\vec{G} = m\,\vec{g}$, m étant la masse, $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur terrestre, placé sur un plan horizontal rugueux. L'expérience montre qu'en appliquant sur le corps une force de traction horizontale $\vec{F}_h$, progressivement croissante à partir de la valeur nulle, placée dans le plan commun de contact, le corps reste au repos, donc en équilibre statique, pour autant que cette force reste très inférieure au poids du corps. Le corps isolé est soumis à l'action de trois forces :

- fréquence de rotation : $n = 6{,}25$ t/s,
- huile ISO-VG 46 : pente $m = -3{,}686$
  ordonnée à l'origine à 1K : $n = 9{,}4214$,
- masse volumique à 15°C : $\rho_{15} = 0{,}876$ kg/dm^3,
- température d'équilibre : $\vartheta = 55$ °C .

A la température d'équilibre, le lubrifiant présente les caractéristiques suivantes ;

- viscosité cinématique : $\nu_v = 25{,}4$ mm^2/s,
- viscosité dynamique : $\eta_v = 0{,}0217$ Ns/m^2,
- masse volumique : $\rho_{55} = 0{,}853$ kg/dm^3.

Calcul de la puissance perdue ;

- vitesse angulaire : $\omega = 2\,\pi \cdot 6{,}25\ s^{-1} = 12{,}5\,\pi\ s^{-1}$,
- vitesse linéaire : $v_u = 0{,}5\ \omega\ d = 7{,}854$ m/s,
- force tangentielle : $F_t = 0{,}5\ \pi\ 0{,}0217$ Ns/m^2 $12{,}5\ \pi\ s^{-1}$ 0,35 m 0,4^{2}m^2/0,00025 m
  $F_t = 299{,}8$ N.
- couple à produite : $M_{mot} = 0{,}2$ m 299,8 N = 59,96 m·N,
- puissance perdue : $P = 59{,}96$ m·N $12{,}5\ \pi\ s^{-1} = 2355$ W ,
- pression pour So = 1 : $p = 0{,}0217$ Ns/m$^2 \cdot 12{,}5\ \pi\ s^{-1} / (1{,}25 \cdot 10^{-3})^2 = 545\,380$ N/m^2,
- force radiale maximale : $F_r = 0{,}545$ N/mm^2 . 350 mm . 400 mm = 76 350 N ,
- coefficient de frottement : $\mu_e = 299{,}8$ N / 76 350 N = 0,39 % .

Ces résultats confirment les remarques faites sur les pertes par frottement lorsqu'un film porteur est intercalé entre des pièces en déplacement. Le coefficient de frottement équivalent est le dixième du coefficient de frottement selon la loi de Coulomb.

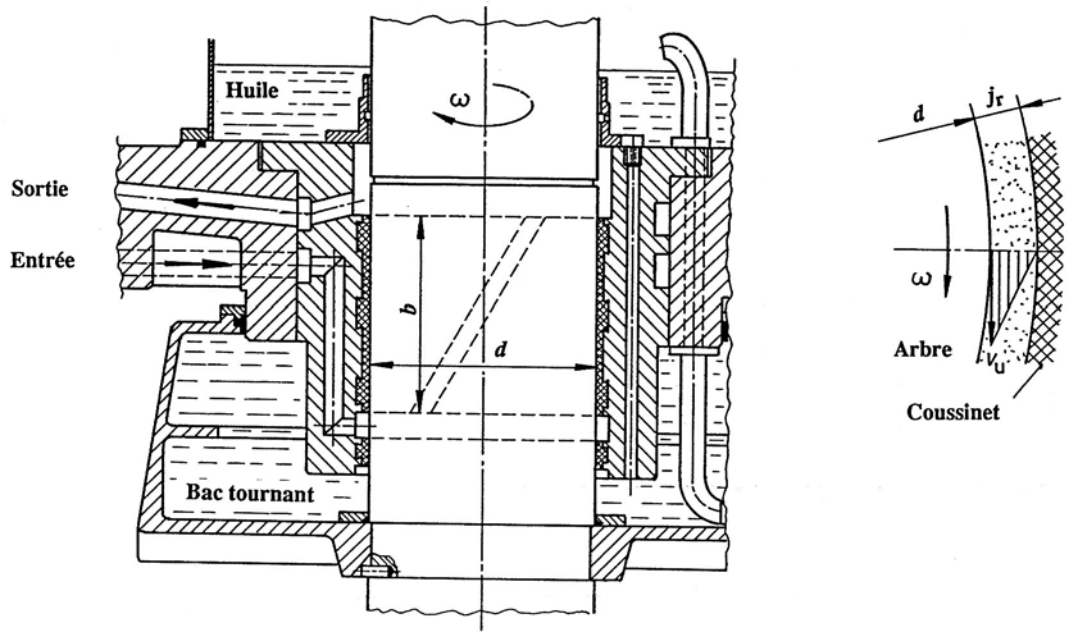


Figure 2.22 Palier radial cylindrique de guidage pour turbine hydraulique (d'après ACMV)
Condition d'écoulement dans la fente entre coussinet et arbre

Le rapport des grandeurs placées entre parenthèses est une grandeur adimensionnelle. Son inverse est désigné par nombre de Sommerfeld :

$$\mathrm{So} = \frac{p\ \psi^2}{\eta_v\ \omega}. \tag{2.33}$$

Le rapport entre le coefficient de frottement équivalent et le jeu relatif peut se donner par la relation de Petrov sous la forme simplifiée suivante :

$$\frac{\mu_e}{\psi} = \frac{\pi}{\mathrm{So}}. \tag{2.34}$$

L'expérience montre que cette relation est à peu près valable pour un palier radial de guidage et aussi dans le cas d'un palier sollicité par une force radiale tant que le nombre de Sommerfeld reste inférieur à 1. La puissance perdue vaut :

$$P = F_t\, v_u = M_{mot}\, \omega = \frac{2\,\pi\,\eta_v\, v_u\, B}{\psi}. \tag{2.35}$$

La puissance est indépendante de la charge radiale dans ces conditions de charge. Il est donc possible de trouver la charge radiale limite de telle sorte que le nombre de Sommerfeld soit égal à un. La théorie complète du palier radial cylindrique montre que le coefficient de frottement relatif est environ proportionnel à la racine carrée du nombre de Sommerfeld si So > 1, voir le chapitre sur les paliers lisses.

2.8.2 EXEMPLE NUMÉRIQUE

Soit à déterminer la puissance perdue et la charge radiale limite dans un palier dont les caractéristiques sont :

- diamètre de l'arbre : d = 400 mm,
- longueur du coussinet : B = 350 mm,
- jeu relatif : ψ = 0,125 %,
- jeu radial : j_r = 0,25 mm,

2.8 APPLICATION DE LA RELATION DE NEWTON

L'exemple proposé utilise la relation des fluides newtoniens dans le calcul des pertes et de la portance d'un palier de machine à axe vertical.

2.8.1 EXPOSÉ DU PROBLÈME

Soit à calculer la puissance perdue, le coefficient de frottement équivalent et la portance dans un palier radial de guidage pour machine à axe vertical. Le palier radial de guidage sert à centrer l'arbre d'une machine, à axe vertical, comme par exemple l'arbre des turbines ou des pompes hydrauliques. Le coussinet cylindrique est alimenté en huile de lubrification qui sert aussi de fluide caloporteur. Si la charge radiale est nulle, ce qui est habituellement plutôt l'exception, l'arbre reste centré dans son guidage. Proposons-nous de déterminer le couple à produire sur l'arbre pour cisailler la couche liquide visqueuse entre l'arbre et le coussinet (figure 2.22) et les limites d'application de cette étude.

Désignons par :

d le diamètre de l'arbre,
D le diamètre intérieur du coussinet,
B la longueur portante du coussinet,
j_r le jeu radial entre l'arbre et le coussinet parfaitement centrés,
η_v la viscosité dynamique du lubrifiant, supposée constante,
ω la vitesse angulaire de l'arbre.

L'application directe de la relation de Newton pour un fluide visqueux permet d'écrire successivement :

- vitesse circonférentielle de l'arbre : $v_u = {}^1/2\ \omega\ d$,
- gradient de vitesse :
  à épaisseur constante de la couche liquide, cette grandeur est constante et se calcule par :
  $$\mathrm{d}v/\mathrm{d}z = v_u / j_r = 0{,}5\ \omega\ d / j_r,$$
- contrainte de cisaillement : $\tau = \eta_v\ \mathrm{d}v / \mathrm{d}z = 0{,}5\ \eta_v\ \omega\ d / j_r$,
- force tangentielle totale pour cisailler la couche liquide :
  $$F_t = \tau\ A = 0{,}5\ \pi\ \eta_v\ \omega\ B\ d^2 / j_r,$$
- couple moteur sur l'arbre : $M_{mot} = 0{,}5\ d\ F_t = 0{,}25\ \pi\ \eta_v\ \omega\ B\ d^3 / j_r$.

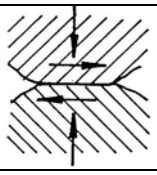
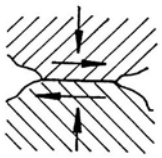
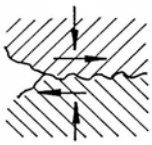
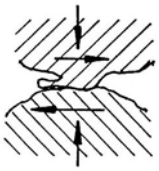
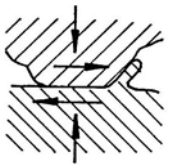
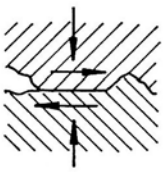
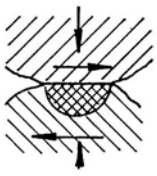
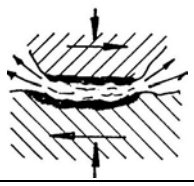
Introduisons la notion de pression moyenne p , bien que la force radiale F_r sur l'arbre soit égale à zéro.

- pression moyenne : $p = F_r / B\ D$,
- jeu relatif du palier : $\psi = 2\ j_r / d = 2\ j_r / D$,
- coefficient de frottement équivalent : $\mu_e = F_t / F_r$.

En substituant ces diverses grandeurs dans l'expression de la force tangentielle totale sur l'arbre trouvée précédemment, les relations deviennent :

- force tangentielle : $F_t = \pi\ \eta_v\ \omega\ F_r / p\ \psi$,
- coefficient de frottement équivalent : $\mu_e = \pi\ \eta_v\ \omega / p\ \psi$,
- rapport entre le coefficient de frottement équivalent et le jeu relatif du palier :
  $$\mu_e / \psi = \pi\ (\eta_v\ \omega / p\ \psi^2).$$

Tableau 2.8
Principaux mécanismes d'usure des corps solides
(selon H. Krause et J. Scholten [1.9])

Représentation schématique	Mode d'usure Description du mécanisme
	**1. Adhésion** Par suite du phénomène d'adhésion, les deux corps en contact subissent des micro-soudures par l'action de pressions élevées, liaisons qui sont cisaillées par le mouvement relatif des pièces.
	**2. Diffusion** Dès que les deux corps sont à l'état micro-soudés, le phénomène de diffusions entre en action, d'autant plus important que la température est élevée. Le mouvement relatif des pièces arrache de grandes particules de matière.
	**3 Engrènement** La déformation plastique des surfaces en contact provoque des glissements intercristallins et engendre une formation de stries qui engrènent les unes dans les autres.
	**4. Formation de coin** Lors du glissement d'une surface relativement dure sur une surface plus tendre, la première produit une déformation plastique de la seconde et une accumulation de matière. Cette accumulation forme un coin qui va cisailler et déporter des particules de matière.
	**5. Coupe microscopique** Lors de sollicitations extérieures, les aspérités de la pièce la plus dure vont pénétrer dans le corps le plus tendre et déchirer les aspérités de la pièce la plus tendre sous forme de copeaux microscopiques.
	**6. Déformation** Par suite de déformations élastiques répétées, la sollicitation provoque la fatigue de la matière et l'usure. Les déformations plastiques répétées engendrent des glissements intercristallins et finalement le déport de matière sous forme de couches successives.
	**7. Energie superficielle** Lorsque l'énergie élastique accumulée dans la zone sollicitée est supérieure à l'énergie d'adhésion, il se forme des particules libres d'usure. Par contre, il y a transfert de particules si l'énergie élastique est égale à l'énergie d'adhésion.
	**8 Plasma submicroscopique** La production et l'accumulation thermique localisée dans les couches limites du partenaire peut engendrer des réactions tribocatalytiques. Il s'ensuit une dislocation de la structure cristalline de la matière accompagnée d'une diminution de la résistance à l'usure.

3. *Usure progressive en surface*

L'usure en couches successives est l'usure par excellence dans les machines et mécanismes car elle a lieu progressivement entre les corps. Elle provoque habituellement une baisse du rendement global des machines. L'usure a lieu dans la couche extérieure étrangère des corps métalliques. Les facteurs permettant de maintenir ces couches actives pendant le frottement sont principalement :

- possibilité de formation des couches en facilitant l'activité chimique dans le système tribologique par apport d'oxygène.
- sollicitation et température doivent rester dans des limites acceptables afin de ne pas rompre ces couches limites.

4. *Usure par corrosion*

L'usure par corrosion provient d'une combinaison de sollicitations mécaniques et chimiques. Le corps tribologique intermédiaire et le milieu ambiant interviennent dans ce processus. Il existe deux familles de corrosion :

- l'activité chimique entre le corps intermédiaire et les surfaces frottantes est déclenchée principalement par une action mécanique. Un exemple simple est donné par la formation de rouille d'appui due à la corrosion de surfaces sèches, glissant sous une forte pression, en présence de l'oxygène de l'air.
- l'action du corps intermédiaire sur les surfaces indépendamment des actions mécaniques. La conjugaison des composantes mécaniques et chimiques accélère la destruction des surfaces par la corrosion.

5. *Usure par déport de matière*

L'usure lente mais inexorable par déport de matière provient du glissement des surfaces rugueuses l'une sur l'autre. Elle dépend de la formation possible d'une couche protectrice et de l'activité chimique du processus de frottement. Pour ralentir le déport de particules, la pression et la température doivent rester dans des limites admissibles trouvées dans la pratique industrielle.

6. *Usure par fatigue*

L'usure par fatigue est engendrée par la variation des sollicitations mécaniques et thermiques au niveau des surfaces en contact. Elle provoque le glissement des cristaux constituant la matière métallique et la formation progressives de déchirures internes qui se propagent vers l'extérieur des corps.

En définitive, l'usure est caractérisée :

1. par l'apparition de particules dont la forme, la grandeur, la composition chimique dépendent du mécanisme d'usure.
2. par une modification de la micro-géométrie des surfaces en particulier de la rugosité des pièces par l'apparition de rayures, trous, pellicules, fissures.
3. par une modification des propriétés des matériaux dans les couches extérieures : durcissement, augmentation de la fragilité, autocontraintes, composition chimique locale.
4. par transport de particules d'un corps sur l'autre.

Pour assurer la fonction de l'élément ou du mécanisme, l'usure doit rester dans des limites acceptables, malgré la formation de rayures, ondulations, fissures, trous micro- ou macroscopiques, etc.

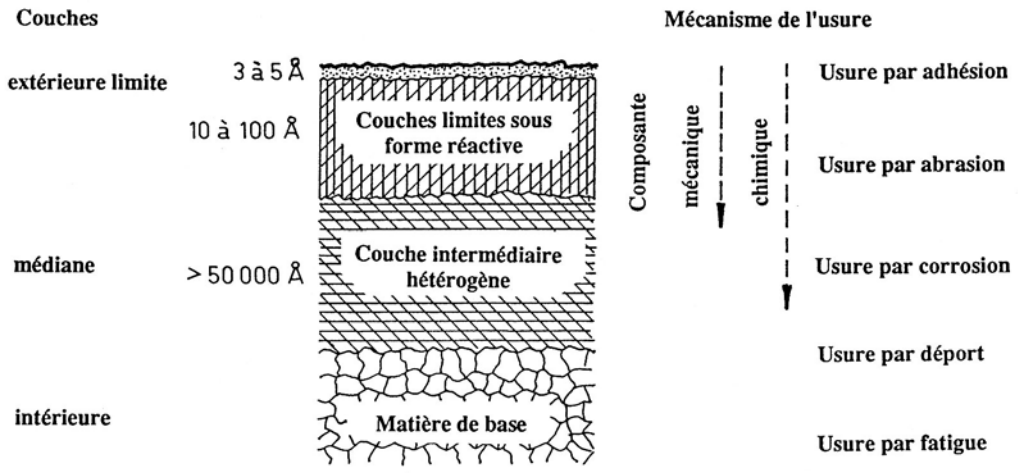


Figure 2.21 Composition des couches extérieures des corps solides soumises à l'usure

2.7.2 MÉCANISME DE L'USURE

L'usure intervient non seulement par le glissement de deux pièces rugueuses l'une sur l'autre, mais également par l'action de corps liquides ou gazeux sur les corps solides comme par exemple la cavitation et l'érosion. Les mécanismes de l'usure sont habituellement une combinaison pondérée des mécanismes fondamentaux, ces derniers étant cités dans le tableau 1.10. Il est possible de distinguer les cas fondamentaux suivants.

1. *Usure par adhésion*

L'usure par adhésion est engendrée par des pressions locales très élevées rompant la couche protectrice d'oxydes et provoquant des micro-soudures entre aspérités des surfaces. Ces soudures à froid peuvent posséder une résistance mécanique supérieure à celle du métal de base et entraîner, lors du déplacement des surfaces, des arrachages de particules des deux corps. Ce processus dépend :

- des possibilités de déformations élasto-plastiques des aspérités des corps dépendant de la structure cristallographique du métal, les cristaux à faces centrés étant plus exposés aux micro-soudures.
- des essais sous vide poussé ont démontré que l'adhésion entre les métaux est toujours présente dans ces conditions. Des micro-soudures peuvent intervenir dès que la couche d'oxydes est rompue ou éliminée.

2. *Usure par abrasion*

L'usure par abrasion se caractérise par la pénétration du corps le plus dur dans la couche superficielle du corps le plus tendre en produisant des particules libres par glissement des surfaces. L'exemple classique d'usure par abrasion est l'usinage ou le rectifiage des pièces métalliques par meules où l'usure par abrasion se fait sur la surface à usiner. Le volume de matière déportée U est inversement proportionnel à la dureté des corps H et à une constante C : $U = 1/(C\,H)$. La résistance à l'usure par abrasion peut s'améliorer :

- par le choix de meilleures propriétés des matériaux : traitement d'amélioration ou de durcissement,
- par une modification dirigée des propriétés des matériaux dans la zone des couches limites : diffusion thermique, durcissement superficiel.
- par application de couches protectrices : métal d'apport appliqué par soudage, recouvrement galvanique ou chimique, frittage ou coulée.

- dans un milieu à basse température, difficulté de maintenir le lubrifiant à une viscosité faible afin de diminuer les pertes, d'assurer la circulation correcte du fluide dans le mécanisme dès la mise en marche,
- détérioration avec le temps des qualités physiques et chimiques du lubrifiant, d'autant plus rapide que les températures ou les pressions sont élevées, formation éventuelle de boues ou de résidus gommeux.

Il est nécessaire de se placer dans les cas les plus défavorables lors d'une étude si les conditions exactes de fonctionnement sont mal connues, d'estimer à leur plus juste valeur tous les facteurs qui concourent à la durée de vie des organes, de ne pas sous-estimer les problèmes liés au démarrage ou à l'arrêt des machines, de surestimer les soins apportés à la maintenance malgré les prescriptions strictes d'entretien.

2.7 USURE

L'usure inévitable des surfaces en contact dépend de nombreux facteurs comme la nature des matières qui constitue les corps, la répartition de la pression, la vitesse de glissement, les états de surface, la présence ou l'absence de lubrifiant, etc. L'usure se traduit par une modification de la forme primitive et de la structure dans les couches extérieures des corps solides ainsi que par l'apparition de particules libres. En construction de machines, l'usure est un phénomène à éviter ou tout au moins à atténuer à part dans les opérations de rodage ou de superfinition. Elle est le résultat d'une sollicitation tribologique et provoque une diminution sensible de la durée de vie des éléments de machines. L'usure peut être considérée comme un point positif dans le renouvellement du parc des machines ou des appareils, ou comme un point négatif dans les pertes économiques en matériel et en fiabilité.

2.7.1 COMPOSITION DES COUCHES DES CORPS SOLIDES

La forme extérieure d'une pièce mécanique ne correspond jamais exactement à la forme idéale donnée sur le dessin d'atelier. Les erreurs de forme et la rugosité des surfaces expriment sommairement la géométrie réelle des surfaces extérieures. L'usure de la pièce est influencée d'une part par la forme géométrique des surfaces sollicitées et d'autre part par la composition des couches extérieures du corps. On distingue généralement trois domaines (fig. 2.21).

1. la couche étrangère extérieure se forme pendant le processus de fabrication et d'utilisation du corps. Elle se compose d'une couche d'absorption suivie d'une couche d'oxydation et de réaction.
2. la couche intermédiaire peut se caractériser par une zone perturbée par des déformations mécaniques engendrées soit lors de la fabrication de la pièce, soit par des sollicitations tribologiques. Il en résulte des hétérogénéités mécaniques, comme la résistance, des autocontraintes, une structure cristallographique et une composition chimique modifiées.
3. la couche de base conserve les propriétés mécaniques et la composition chimique inchangées du matériau.

Les caractéristiques propres des couches limites extérieures fixent directement le comportement au frottement et la résistance à l'usure de la surface. Les conditions réelles de contact entre deux corps solides ont été discutées lors de la définition de la pression. Les quelques points de touche entre les surfaces localisent les efforts et les pressions. Si les pressions dépassent la résistance à la compression de la matière, le mouvement de la surface glissante provoque le cisaillement des aspérités et un déport de particules solides [1.9 et 1.0].

- à vitesse lente ou moyenne, l'absence de lubrifiant peut être mieux supportée que celle de l'huile.

Dans beaucoup de mécanismes simples à durée de service limitée, la lubrification à vie des organes est possible. Pour des conditions de service plus sévères, il faut prévoir un plan de graissage et donner des instructions précises sur l'entretien à prévoir. Le choix de la graisse dans quelques applications se fera par :

- peu de frottement, même au démarrage : consistance NLGI 1..2 avec huile synthétique à faible viscosité,
- frottement faible et constant en service : consistance NLGI 2..4
- bruit à faible niveau : graisse filtrée de consistance NLGI 2, éventuellement de la consistance 1..2 avec huile à viscosité élevée,
- sollicitations dynamiques dans le mécanisme : graisse EP au lithium de la consistance NLGI 2 avec renouvellement assez fréquent. Pour des charges dynamiques importantes, prévoir une graisse au barium de consistance NLGI 2 ou au lithium de consistance NLGI 3.

2.6.4.3 LUBRIFICATION À L'HUILE

La lubrification à l'huile est introduite lorsque plusieurs organes de machines sont à graisser par un liquide ou solide commun, lorsque le lubrifiant doit jouer un rôle caloporteur ou si des vitesses ou des charges élevées sont présentes. La lubrification à l'huile à faible débit comme :

- huileur ou compte-gouttes pour huile perdue (en évitant toute pollution),
- mèches aspirantes fonctionnant par capillarité,
- lubrification périodique ou à débit intermittent pour des déplacements à faibles vitesse,
- brouillard d'huile ou mélanges air - huile,
- ces divers modes permettant de doser la quantité de lubrifiant introduite entre les pièces en mouvement relatif.

La lubrification par circulation d'huile au moyen de pompes externes, bac de récupération, filtres pour éliminer les impuretés et les particules en suspension, échangeurs de chaleur si nécessaire afin de maintenir la viscosité dans les conditions de calcul, réservoir et appareils de contrôle des débits et des pressions permet d'assurer une alimentation correcte de toutes les parties importantes de la machine et de maintenir la température dans des limites acceptables. La température ne devrait pas dépasser environ 70°C, à la limite 100°C, dans les machines usuelles et la viscosité à la température de fonctionnement devrait assurer une portance suffisante du lubrifiant. Le prix du lubrifiant joue un rôle non négligeable, les huiles synthétiques pouvant être de 6 à 100 fois plus coûteuses que les huiles minérales.

L'étanchéité des pièces lubrifiées doit non seulement éviter les pertes en lubrifiant, mais aussi protéger le lubrifiant et les mécanismes contre les poussières extérieures, la présence de l'eau de condensation, les attaques du milieu ambiant. Cette fonction importante est réalisée par des carters étanches, des joints ou des garnitures spéciales, des racleurs, des chicanes, des labyrinthes ou une combinaison de ces possibilités.

2.6.4.4 AUTRES FACTEURS

A part la vitesse de glissement et la pression de contact, d'autres facteurs jouent un rôle non négligeable dans le choix du lubrifiant et les conditions de frottement :

- dans un milieu à température élevée, difficulté d'évacuer l'énergie calorifique produite vers l'extérieur, d'où diminution de la viscosité de fonctionnement,

5. *Graisses au savon sodique*

Ces graisses sont sensibles à l'eau, mais ont une grande durabilité, une bonne stabilité, facilement transférables et assurent une bonne protection contre la corrosion.

6. *Graisses synthétiques*

Ces sont des graisses à base d'huiles synthétiques, utilisées principalement dans les cas de températures extrêmes. Le prix élevé de ces produits limite fortement le domaine d'application.

Les graisses industrielles peuvent contenir des additifs, en particulier :

- du graphite ou graisses graphitées,
- du bisulfure de molybdène,
- des colorants ou des substances odorantes qui n'ajoutent rien au propriétés physiques des lubrifiants, mais qui permettent la distinction du type de graisse.

2.6.4 RECOMMANDATIONS GÉNÉRALES

L'utilisation d'un lubrifiant est pratiquement toujours nécessaire dès que l'élément de machine, le mécanisme ou la machine complète doivent remplir entièrement leur fonction pendant toute la durée de vie prévue initialement. Il est possible d'énoncer quelques règles générales sur la lubrification des organes en mouvement.

2.6.4.1 GÉNÉRALITÉS

Tous les mécanismes et toutes les pièces en mouvement doivent être lubrifiés : par un corps intermédiaire liquide, graisse ou huile, ou gazeux, éventuellement par une traitement de surface. Les matières solides, dites autolubrifiantes, seront réservées aux mécanismes à durée de vie limitée ou dans des conditions exceptionnelles de fonctionnement.

L'étude de la lubrification d'un organe ou d'une machines doit porter sur la circulation complète du lubrifiant : réservoir, amenée aux points à lubrifier, circulation entre les surfaces et évacuation de chacun des points vers l'extérieur, pollution provoquée par le lubrifiant dans le milieu de travail. L'entretien d'une machine impose l'établissement d'un plan détaillé de graissage, de prescriptions de service, en particulier les conditions à remplir lors du renouvellement du lubrifiant. Il faut : limiter le nombre de lubrifiants au strict minimum, proposer des produits à caractéristiques fondamentales, avec le minimum d'additifs, faciliter l'entretien.

Il faut étudier correctement les mouvements relatifs entre les pièces glissantes en repérant les portions de surface en contact, provoquer la formation de films porteurs en arrondissant les arêtes d'entrée du lubrifiant, en évitant les discontinuités sur les surfaces porteuses, toujours penser aux dilatations thermiques provoquées par les pertes par frottement. Il peut en résulter des pressions et poussées anormales dans les appuis des pièces mobiles, des coincements, des usures exagérées sur les surfaces portantes, d'où échauffements excessifs et diminution de la durée de vie des organes et du lubrifiant.

2.6.4.2 LUBRIFICATION À LA GRAISSE

La lubrification de surfaces frottantes par de la graisse est la plus simple et présente de nombreux avantages parmi lesquels il est possible de citer :

- conception simple de la lubrification,
- amélioration de l'étanchéité par la présence de la graisse,
- durée de vie élevée avec lubrification à entretien réduit,

2. *Consistance*

La consistance est la résistance opposée à la déformation de la graisse. Elle se mesure au moyen d'un pénétromètre normalisé, par exemple l'essai préconisé par ASTM (American Society of Testing Material). Les graisses peuvent alors se classer selon NLGI (National Lubrificating Grease Institute), voir tableau 2.6, ci-après.

3. *Point de goutte*

Le point de goutte est la température à laquelle la première goutte liquide se forme et tombe dans le tube d'essai. Cette température dépend du type de savon.

Tableau 2.7
Consistance des graisses industrielles

Pénétration ASTM	Numéro NLGI	Consistance
355 / 385	0	Semi fluide
310 / 340	1	Très molle
265 / 295	2	Molle
220 / 250	3	Moyenne
175 / 205	4	Semi-dure
130 / 160	5	Dure
85 / 115	6	Très dure
< 70	7	Genre briquette

4. *Stabilité et homogénéité*

La stabilité de la graisse sera améliorée en évitant des températures exagérément élevées et un entreposage trop prolongé. L'homogénéité dépend du choix des matières de base, du procédé de fabrication et des soins apportés pendant l'élaboration de la graisse.

2.6.3.2 TYPES DE GRAISSES

Les graisses industrielles se distinguent par la nature du ou des savons qui y sont incorporés.

1. *Graisses au savon d'aluminium*

Elles sont à fibres longues et résistent bien à la poussée et aux chocs, la température limite étant 80°C. Sous l'effet du travail mécanique, elles ont tendance à se fluidifier et de ce fait sont peu utilisées dans l'industrie.

2. *Graisses au savon calcique*

La résistance à l'eau est très bonne et leur point de goutte se situe vers 100°C. Utilisables jusqu'à 60°C, elles assurent une bonne protection contre la corrosion et sont stables.

3. *Graisses au savon de lithium*

Elles résistent bien à l'eau jusqu'à 50°C, aux températures plus élevées que les autres graisses (jusqu'à 120°C), au froid (jusqu'à -30°C) et au vieillissement. Elles sont employées dans les paliers fermés à roulements. Elles sont dites graisses universelles ou à buts multiples (multipurpose).

4. *Graisses à savons mixtes*

Les graisses mixtes sont des graisses composées des deux savons comme par exemple savons de lithium et calcium, calcium et sodium, etc.

la viscosité en fonction de la température. Les caractéristiques de ces huiles ne sont pas toujours supérieures à celles des huiles minérales. Elles dépendent des propriétés physiques et chimiques des composants ainsi que de l'efficacité des additifs. Les propriétés principales des huiles synthétiques sont :

1. *Comportement au frottement*

La variation plus faible de la viscosité en fonction de la température étend le domaine d'application du régime hydrodynamique et évite le frottement mixte. Dans ce domaine, les additifs diminuent en général le coefficient de frottement et augmentent la résistance du film liquide à l'écrasement.

2. *Résistance à l'oxydation*

Les huiles synthétiques, à base de diester, ne contiennent pas de combinaisons avec le soufre ou le chlore. Elles ne peuvent pas former de produits acides. Leur résistance à l'oxydation est quatre à cinq fois supérieure à celle des huiles minérales usuelles.

3. *Protection contre la corrosion*

Cette propriété n'est pas présente dans les huiles synthétiques. Elle est obtenue par l'adjonction d'additifs.

4. *Résistance à l'usure*

Elle est atteinte par adjonction d'additifs, en particulier par adjonction de bisulfure de molybdène.

5. *Comportement de la viscosité en fonction de la température*

La plupart des huiles synthétiques possèdent un index de viscosité très élevé. Il en résulte un élargissement du domaine d'utilisation du lubrifiant vers les basses températures, facilitant les conditions de démarrage des machines, et vers les hautes températures, maintenant un film liquide suffisamment visqueux. Le domaine des températures d'utilisation des huiles synthétiques s'étend de -75°C à +350°C et les graisses à base d'huiles synthétiques de -75°C à 800°C.

L'introduction des huiles synthétiques dans la lubrification des appareils et des machines est surtout limitée par le prix de revient de ces produits et les possibilités d'approvisonnement. Elle est réservée aux conditions extrêmes de travail, là où les huiles minérales ne donnent plus satisfaction.

2.6.3 GRAISSES INDUSTRIELLES

Les graisses industrielles sont des lubrifiants viscoplastiques obtenus en gélifiant un liquide, de l'huile minérale ou synthétique, au moyen d'agents épaississants en dispersion colloïdale. La fabrication d'une graisse lubrifiante consiste à porter un savon métallique à base de calcium, sodium, lithium, au point de fusion et à l'incorporer à l'huile. Le refroidissement se fait sous contrôle pour obtenir la cristallisation du savon. L'agent épaississant forme un réseau de fibres microscopiques qui enserre l'huile. Ce mélange est retravaillé, homogénéisé et débarassé de l'air.

2.6.3.1 PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES GRAISSES

Les propriétés principales des graisses industrielles sont citées ci-après.

1. *Masse volumique*

Elle est voisine de celle de l'huile composante, donc généralement inférieure à 1 kg/dm^3.

Des valeurs plus précises peuvent être tirées des renseignements donnés par les fabricants, voir les figures :

- fig. 2.19 : Module de compressibilité en fonction de la pression et de la température;
- fig. 2.20 : Module de compressibilité en fonction de la température.

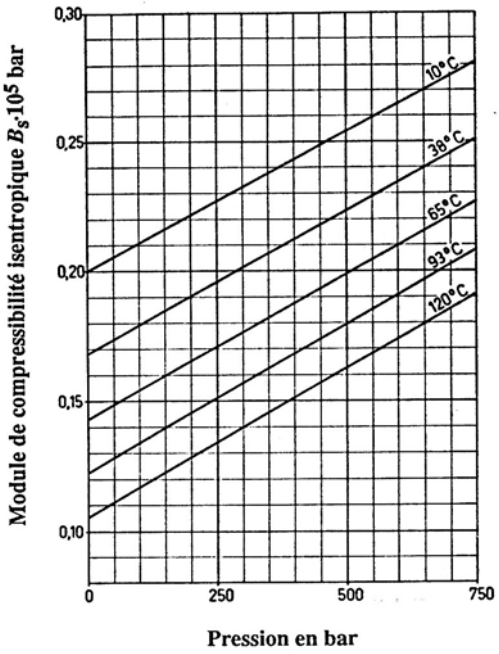


Figure 2.19 Module de compressibilité isentropique d'une huile classée ISO VG 32

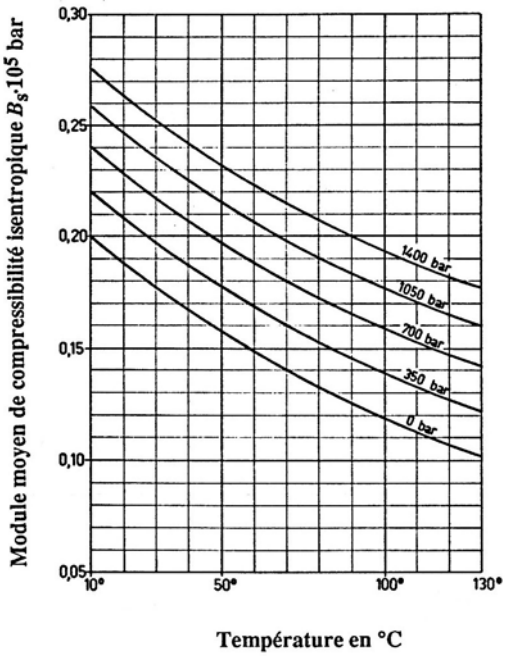


Figure 2.20 Variation de la viscosité d'une huile en fonction de la pression et de la température

2.6.2 HUILES SYNTHÉTIQUES

Les huiles synthétiques sont utilisées dans les domaines à sollicitations extrêmes comme les hautes et les basses températures, les très hautes pressions, grâce à leur excellente tenue de

Plusieurs formules ont été proposées, en particulier des relations exponentielles. La formule de Mac Coull et Walther permet d'exprimer et de représenter simplement cette fonction.

$$\lg[\lg(\nu_V+0{,}8)] = m \lg(T) + n \,, \qquad (2.29.2)$$

avec :

m pente de la droite caractéristiques,

n ordonnée à l'origine, à $T = 1$ K,

ν_V viscosité cinématique exprimée en mm2/s.

Cette relation permet de construire un graphique de la viscosité cinématique en fonction de la température où la variation de viscosité se dessine par un segment de droite. La construction des graduations est :

- en abscisses : le logarithme décimal de la température absolue,
- en ordonnée : le logarithme du logarithme décimal de la viscosité cinématique, exprimée en mm^2/s, augmentée de la constante 0,8 .

Les deux valeurs m et n définissent d'une façon univoque la caractéristique de l'huile. Connaissant deux viscosités de l'huile, à 40°C et 100°C, la variation de viscosité d'une huile se représente par un segment rectiligne passant par ces deux points représentatifs.

La viscosité cinématique, exprimée en mm2/s, se calcule par :

$$\nu_{V(\vartheta)} = 10^{10\text{exposant}}. \qquad (2.30)$$

avec : exposant = $n + m$ (lg(ϑ+273)), l'exposant du second 10.

Dans les éléments de machines lubrifiés à l'huile, la viscosité cinématique de l'huile est comprise le plus souvent entre 5 et 80 mm2/s à la température d'équilibre thermique, l'index de viscosité étant plus grand que 60. Il s'agit très souvent d'un compromis entre une viscosité suffisamment importante pour limiter les fuites et une viscosité faible pour éviter les pertes par cisaillement dans le fluide lubrifiant.

2.6.1.14 EFFET DE LA PRESSION

Les huiles de lubrification sont des fluides réels donc compressibles. La compressibilité de l'huile dépend de la nature de l'huile et de la présence d'air dissous dans le liquide. Une augmentation élémentaire de pression dp sur un volume de fluide V entraîne une diminution de volume dV. Le module de compressibilité B et son inverse le coefficient de compressibilité expriment la résistance du fluide à la variation de volume. La relation générale est :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T \text{ ou } S} = -\frac{B}{V}. \qquad (2.31)$$

Il faut distinguer le module de compressibilité, exprimée en unité de pression, à température ou à isentrope constante. Ce module de compressibilité varie avec la température, la pression, la qualité de l'huile et l'air contenu dans le liquide. Il vaut en moyenne 1500 à 2000 N/mm^2 pour une huile pure à la température ambiante et pression atmosphérique. Cette grandeur intervient dans le comportement des éléments de machines flottant sur une couche d'huile, surtout lors de charges variables.

La viscosité de l'huile minérale augmente avec l'action de la pression à température constante. La viscosité cinématique à la pression p peut se trouve par :

$$\nu_V = \nu_{V0}\, e^{b\,p} \,, \qquad (2.32)$$

avec :

b = 0,002 bar^{-1} en moyenne.

1. *Index de viscosité*

L'index de viscosité (IV) est une valeur empirique qui exprime le degré de variation de l'huile en fonction de la température. Cette notion a été proposée par Dean et Davis avant 1939. Elle consiste, en théorie, à comparer la viscosité de l'huile à définir à la viscosité de deux huiles de référence dont l'indice est 100 pour la meilleure, 0 pour la plus mauvaise. La mesure comprend :

- mesure de la viscosité de l'huile étudiée à 37,8°C (100°F) et 98.9°C (210°F),
- choix de deux huiles étalons ayant même viscosité à 98.9°C,
- recherche de leurs viscosités à 37,8°C à l'aide de table et partition en 100 parties égales entre ces deux viscosités. Le point de concours de l'huile étudiée sur cette échelle est l'index de viscosité (Viscosity Index).

Les huiles actuelles dites multigrades ont des indices de viscosité supérieurs à 100. Pratiquement, cet index de viscosité est trouvé par des formules ou des tables de conversion.

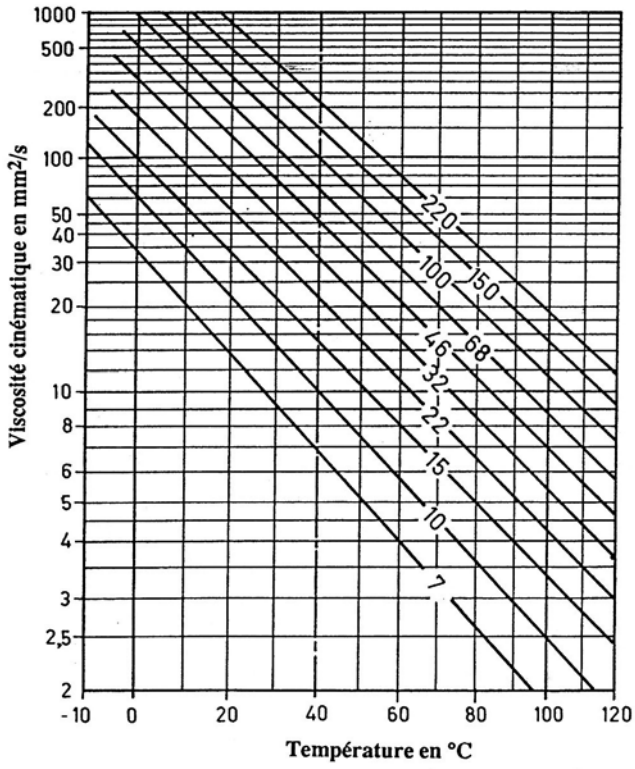


Figure 2.18 Viscosité cinématique des huiles normées en fonction de la température (selon Shell)

2. *Relation de Vogel*

La variation de la viscosité en fonction de la température peut s'exprimer par une loi exponentielle de la forme :

$$\nu_{v(\vartheta)} = \nu_{v0}\, e^{b/(\vartheta+c)} \qquad (2.29.1)$$

dans laquelle *b* et *c* sont des constantes dépendant de la variation de la viscosité de l'huile.

3. *Formule de Mac Coull et Walther*

L'index de visccosité ne peut pas s'introduire directement dans le calcul analytique de la viscosité d'une huile à une température différente de celle de définition. La courbe de la variation de la viscosité en fonction de la température a l'allure d'une branche d'hyperbole.

et en Grande-Bretagne dans l'appareil Redwood. Les résultats des mesures sont exprimés par le temps d'écoulement en secondes. Des tables de correspondance ou des formules permettent de passer d'une échelle à l'autre ou de transformer ces viscosités conventionnelles en viscosités cinématiques ou dynamiques.

2.6.1.12 CLASSIFICATION ISO DES HUILES

La classification ISO établit une désignation normalisée pour les lubrifiants industriels en fonction de leur viscosité cinématique. Cette norme définit 18 classes de viscosité dans un domaine allant de 2,2 à 1500 mm^2/s. La température de référence est 40°C, compromis entre les anciennes définitions européennes et américaines. La division de chaque décade de viscosité en six niveaux logarithmiques égaux fournit une suite de viscosité médiane en progression géométrique. Les valeurs numériques exactes ont été arrondies pour obtenir des valeurs simples.

Les limites permises pour chaque classe correspond à la valeur médiane avec écart de $\pm$ 10 %. La classification ISO est indépendante de la qualité du produit. Les grands fabricants de lubrifiants offrent actuellement des gammes d'huile selon cette norme.

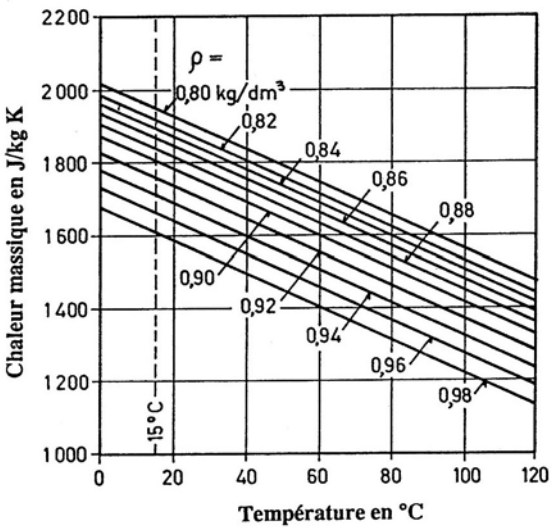


Figure 2.17 Chaleur massique des huiles en fonction de la température

La figure 2.18 représente une gamme d'huiles de lubrification pour des viscosités comprises entre 7 mm^2/s et 220 mm^2/s, soit dans le domaine usuel de la construction de machines. L'inclinaison des viscosités sont construites à partir des données fournies par le fabricant (huiles Shell Vitrea dans le cas particulier).

2.6.1.13 VARIATION DE LA VISCOSITÉ AVEC LA TEMPÉRATURE

Dans le domaine usuel des applications industrielles, la viscosité d'une huile de lubrification varie fortement avec la température. L'indication de la viscosité d'une huile doit toujours s'accompagner de la température de mesure à moins que cette huile corresponde à la définition de la norme ISO. La variation de la viscosité dépend de la composition de l'huile.

2.6.1.10 VISCOSITÉ CINÉMATIQUE

Dans de nombreuses relations et dans les tables des fabricants, la viscosité d'une huile s'indique par la viscosité cinématique. Cette viscosité dépend de la viscosité dynamique du fluide et de sa masse volumique ρ :

$$\nu_V = \eta_v/\rho. \qquad (2.27)$$

Dans le système international d'unités, la viscosité cinématique doit s'exprimer en m^2/s. Cette unité est beaucoup trop grande pour les lubrifiants. Les tables donnent la viscosité en mm^2/s, unité correspondant exactement au centistoke (cSt) du système CGS, unité utilisée universellement avant l'introduction du système MKS. Le sous multiple mm^2/s a beaucoup de peine à s'implanter dans le langage courant des utilisateurs. La correspondance des unités devient :

$$1\ mm^2/s = 1\ cSt = 10^{-6}\ m^2/s.$$

Tableau 2.6
Classification des viscosités selon norme ISO 3448

Classe de Viscosité	Viscosité Moyenne à	Limites des viscosités Cinématiques à 40°C	
ISO	40°C [mm^2/s]	Minimum	maximum
ISO-VG 2	2,2	1,98	2,42
ISO-VG 3	3,2	2,88	3,52
ISO-VG 5	4,6	4.14	5,06
ISO-VG 7	6,8	6,12	7,48
ISO-VG 10	10	9,00	11,00
ISO-VG 15	15	13,5	16,5
ISO-VG 22	22	19,8	24,2
ISO-VG 32	32	28,8	35,2
ISO-VG 46	46	41,4	50,6
ISO-VG 68	68	61,2	74,8
ISO-VG 100	100	90,0	110
ISO-VG 150	150	135	165
ISO-VG 220	220	198	242
ISO-VG 320	320	288	352
ISO-VG 460	460	414	506
ISO-VG 680	680	612	748
ISO-VG 1000	1000	900	1100
ISO-VG 1500	1500	1350	1650

2.6.1.11 VISCOSITÉ CONVENTIONNELLE

En Europe continentale, la viscosité des huiles est mesurée dans des viscosimètres de formes normées, les viscosimètres les plus courants étant les viscosimètres Engler et Höppler. Dans le viscosimètre Engler, la viscosité conventionnelle est définie par le rapport du temps d'écoulement de 200 cm^3 d'huile, maintenue avec précision à la température de mesure, au temps d'écoulement de la même quantité d'eau pure à 20°C. La viscosité dynamique se mesure couramment avec le viscosimètre Höppler, appareil équipé d'un tube contenant le liquide à mesurer, placé dans un bain-marie, et d'une bille dont on détermine le temps de chute dans le tube. Aux U.S.A., la viscosité conventionnelle se mesure dans l'appareil Saybolt

des onctuosités inférieures aux huiles végétales ou animales. Des additifs augmentent cette caractéristique fondamentale.

2.6.1.8 VISCOSITÉ

La viscosité d'un fluide est la caractéristique de résistance qu'oppose ce fluide réel à tout glissement de ses molécules les unes sur les autres. Cette grandeur peut se mesurer facilement et joue un rôle important dans le choix de l'huile. Elle intervient dans le calcul de nombreux éléments de machines en présence du frottement hydrodynamique ou élastohydrodynamique.

2.6.1.9 VISCOSITÉ DYNAMIQUE

La viscosité dynamique d'un fluide est définie par une relation proposée par Newton pour les fluides dits visqueux. Dans un *fluide newtonien*, la contrainte de cisaillement est égale au produit du gradient de vitesse $\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$ par une caractéristique du fluide, la viscosité dynamique, désignée par η_v :

$$\tau = \frac{\mathrm{d}F_t}{\mathrm{d}A} = \eta_v \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}. \qquad (2.27)$$

Comme la contrainte de cisaillement s'exprime par des N/m^2 en unités internationales, le gradient de vitesse en s^{-1}, la viscosité dynamique se donne en Ns/m^2 ou Pa·s. Pour mettre en évidence cette propriété des fluides réels, nous pouvons imaginer une couche liquide de hauteur constante h , contenue dans un bac suffisamment grand, sur laquelle se déplace une surface d'aire A à la vitesse constante v_A, (fig. 2.16), grâce à l'action d'une force de traction. La vitesse du liquide en contact avec le récipient est nulle et la vitesse du fluide en contact avec la surface est égale à la vitesse de ce plan mobile. Deux couches parallèles, distantes de $\mathrm{d}z$, sont animées des vitesses :

- à la hauteur z : v,
- à la hauteur $z + \mathrm{d}z$: $v + \mathrm{d}v$.

La variation de vitesse est donc $\mathrm{d}v$ et le gradient de vitesse est défini par le quotient différentiel $\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$.

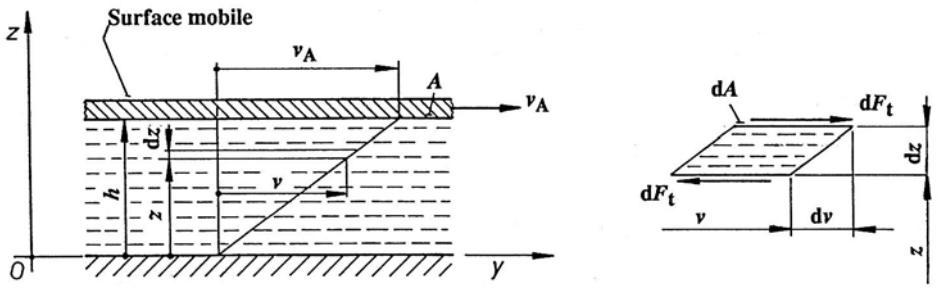


Figure 2.16 Définition de la viscosité dynamique à partir de la relation de Newton

La viscosité dynamique d'une huile s'exprime non seulement dans le système international en Ns/m^2 ou Pa·s, mais aussi dans le système d'unités CGS des physiciens par le poise (Po) dont on utilise plus couramment le sous-multiple, le centipoise (cPo), l'eau ayant approximativement une viscosité de 1 cPo à 20°C. Ces diverses unités sont reliées entre elles par les correspondances :

$$1\ N{\cdot}s/m^2 = 1\ Pa{\cdot}s = 10\ Po = 1000\ cPo.$$

$$b = 4{,}6 \qquad [J/kgK^2],$$

avec : ϑ = température de l'huile en °C,

ρ_{15} = masse volumique de l'huile à 15°C en kg/dm^3.

La connaissance de la valeur de la chaleur massique des huiles est très importante lors de l'évacuation de l'énergie calorifique produite par le frottement. Pour faciliter le calcul, la figure 2.17 donne la chaleur massique des huiles pour des températures comprises entre 0°C et 120°C.

2.6.1.3 PURETÉ

Le degré de pureté est mesuré par la teneur en cendres d'une huile fraîche, sans additifs. Pour les huiles usagées, la teneur en cendres peut être augmentée par la présence de résidus provoqués par des corps étrangers ou l'action chimique de l'oxygène sur certains métaux. D'autres essais permettent de mesurer par différentes méthodes la teneur en eau, l'acidité ou l'alcalinité, le comportement au vieillissement ou à la formation de dépôts.

2.6.1.4 DÉMULSIBILITE ET FORMATION DE MOUSSE

La démulsibilité d'une huile est son aptitude à se séparer rapidement et efficacement de l'eau de condensation, présente pratiquement dans tout circuit de graissage. La formation de mousse est un autre phénomène indésirable dans de nombreux usages. Un test permet de chiffrer ce comportement.

2.6.1.5 TEMPÉRATURE DE FIGEAGE

Cette température, définie arbitrairement, est surtout importante dans les mécanismes exposés au froid ou dans les machines frigorifiques. Le point de trouble (Cloud Point) est la température à laquelle apparaît un début de cristallisation se traduisant par une altération de limpidité. Le point d'écoulement (Pour Point) définit la température à laquelle l'huile réchauffée, puis refroidie dans des conditions normalisées, cesse de couler.

2.6.1.6 PROPRIÉTÉS À TEMPÉRATURES ÉLEVÉES

Plusieurs définitions et essais sont courants :

1. *Point d'éclair* : c'est la température à partir de laquelle les vapeurs dégagées par l'huile chauffée prennent feu en contact avec une flamme et s'éteignent immédiatement. Le point d'éclair varie entre 90°C et 300°C.
2. *Point de feu* : c'est la température à partir de laquelle les vapeurs dégagées par l'huile chauffée prennent feu pendant au moins 5 secondes.
3. *Pertes par évaporation* : l'élévation des températures d'utilisation, en particulier dans la lubrification des moteurs à combustion et des cylindres, peut provoquer une évaporation de l'huile se traduisant par une transformation des qualités de l'huile.

2.6.1.7 ONCTUOSITÉ

C'est la propriété grasse et de contact de l'huile avec son support. L'état et la nature de la surface lubrifiée joue un rôle important dans la constitution de couches orientées de molécules et la solidité de la pellicule d'huile. En dessous d'une épaisseur de 0,1 μm, l'efficacité de la lubrification dépend essentiellement de cette propriété de contact. Cette caractéristique ne peut pas se définir par une mesure limitée à l'huile en étude. Les huiles minérales possèdent

machines et les procédés industriels, parfois contradictoires, imposent une gamme de lubrifiants à propriétés différentes suivant le but poursuivi.

2.6.1 PROPRIÉTÉS PHYSICO-CHIMIQUES DES HUILES MINÉRALES

Les huiles minérales sont des produits liquides qui se trouvent principalement dans le pétrole brut. Elles sont obtenues par distillation et doivent être purifiées et améliorées par affinage. Elles sont d'un emploi très courant comme lubrifiant dans les mécanismes et machines. Certaines propriétés physico-chimiques peuvent se définir scientifiquement alors que d'autres échappent pour l'instant à toute mesure. Les caractéristiques principales des huiles minérales sont décrites dans ces sous-chapitre.

2.6.1.1 MASSE VOLUMIQUE

La masse volumique d'un liquide est la masse par unité de volume, symbole ρ. En unités internationales, cette grandeur s'exprime en kg/m³. Pratiquement, elle se donne en kg/dm³ ou en g/cm³. Pour les huiles, elle dépend de la structure moléculaire des hydrocarbures qui composent le lubrifiant. Elle varie avec la température selon figure 2.15 à gauche. À 15°C, température usuelle de référence, la masse volumique des huiles est comprise entre 0,85 et 0,96 kg/dm³, la présence d'additifs pouvant modifier légèrement ces valeurs. L'effet de la pression sur la masse volumique est moins marqué aux pressions usuelles en construction de machines.

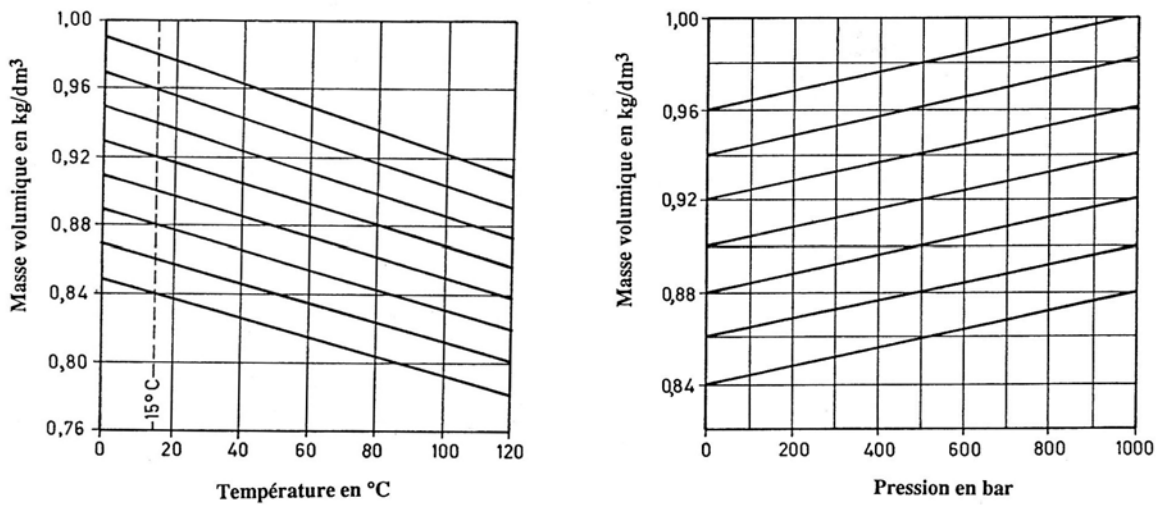


Figure 2.15 Variation de la masse volumique en fonction de la température ou de la pression

2.6.1.2 CHALEUR MASSIQUE

Pour les huiles de lubrification, la chaleur massique est pratiquement indépendante de la composition de l'huile minérale. Elle peut se calculer par la formule pratique suivante :

$$c = a - b\,(\vartheta - 15°C), \qquad (2.26)$$

avec :

pour $\rho > 0{,}9$ kg/dm³ : $a = 3910 - 2340\ \rho_{15}$ [J/kgK),

pour $\rho \leq 0{,}9$ kg/dm³ : $a = 2980 - 1290\ \rho_{15}$ [J/kgK],

2. Le préserrage des surfaces influence l'amortissement : plus les pièces sont serrées, plus l'amortissement est faible car les aspérités des surfaces comprimées subissent une déformation plastique.
3. Le préserrage des surfaces influence aussi le comportement dynamique : plus les pièces sont serrées, plus la rigidité du joint est grande. Cette augmentation de rigidité déplace par exemple la fréquence propre du joint.
4. Les conditions optimales seraient atteintes lorsque les surfaces seraient rectifiées et juste serrées de telle sorte que l'assemblage transmette encore correctement les efforts appliqués.
5. Le déplacement de surfaces serrées rugueuses, provoqué par des charges variables sur le joint, donne naissance souvent à un phénomène de rouille, appelée corrosion de faces en contact ou rouille d'appui.

2.6 LES LUBRIFIANTS

La lubrification a pour but d'éviter le contact direct entre les pièces glissantes, d'abaisser les forces de frottement entre les corps par introduction d'une substance lubrifiante et d'évacuer une partie de l'énergie perdue engendrée par le frottement. Le lubrifiant est constitué par :

1. *Un solide*

En poudre comme le graphite colloïdal, le bisulfure de molybdène, mélangé le plus souvent à une graisse ou à une huile minérale, le suif, le talc. Le lubrifiant peut aussi se trouver sous forme de composé chimique dans la couche extérieure des pièces en mouvement comme par exemple les composés soufrés. Certaines matières synthétiques, comme les polyamides et le PTFE, possèdent des propriétés autolubrifiantes (seulement en présence d'une graisse ou d'une huile).

2. *Un liquide*

L'eau peut servir de lubrifiant dans des cas spéciaux comme par exemple dans les paliers en caoutchouc ou entre les essuie-glaces et les vitres d'une voiture. Les huiles végétales et animales possèdent d'excellentes propriétés telle l'onctuosité, mais malheureusement sont instables en milieu industriel. Les huiles minérales sont d'un emploi généralisé grâce à leurs propriétés spécifiques, à la possibilité d'améliorer leurs caractéristiques physiques et leur prix de revient raisonnable. Les huiles synthétiques possèdent des caractéristiques intéressantes dans des conditions d'utilisation particulièrement délicates.

3. *Un gaz*

L'air ou ses composants s'utilise dans les paliers aérostatiques ou aérodynamiques pour des machines ne devant pas présenter de traces d'autres lubrifiants. Les mélanges air et huile forment les brouillards d'huile introduits dans la lubrification des éléments de la technique pneumatique ou dans les mécanismes à très grande vitesse relative.

Les lubrifiants les plus utilisés en construction de machines restent les graisses et les huiles minérales. Les lubrifiants peuvent être considérés comme un élément de machines essentiel aux fonctionnement de la plupart des mécanismes. La première propriété recherchée pour un lubrifiant est l'onctuosité suivie par l'adhérence du film sur les surfaces mouillées, la résistance du film à la pression et des propriétés complémentaires anti-usure. L'utilisation universelle des aciers, soumis toujours à l'attaque de la corrosion, exige une propriété supplémentaire qui est la protection antirouille du lubrifiant. Les exigences accrues dans les

L'état de surface influence directement la durée de vie des pièces. L'ébauchage ou le dégrossisage laisse des traces d'outils nettement visibles à l'œil nu. La profondeur des sillons est encore trop importante pour les déplacements usuels de pièces mécaniques. Pour les pièces mobiles, il faut prévoir au moins un fini normal ou plus fréquemment un fini soigné. Les degrés de rugosité varient suivant les moyens de fabrication utilisés, les normes en vigueur donnant les états de surface réalisables. Les tolérances de forme pour les surfaces planes, cylindriques ou sphériques seront d'autant plus serrées que les exigences seront élevées, sans compromettre toutefois le prix de revient des éléments.

2.5.1.3.3 AVANTAGES DE LA RUGOSITÉ DES SURFACES

La rugosité des surfaces en contact augmente les risques d'usure lorsque les corps se déplacent. Cette caractéristique influence aussi le comportement des assemblages dits fixes. Considérons deux corps rugueux en contact, serrés l'un contre l'autre par un dispositif approprié comme par exemple un ensemble de vis de fixation. Etudions l'effet soit d'une force normale supplémentaire $\vec{F}_n$ ou d'une force tangentielle $\vec{F}_h$ au niveau des aspérités. Trois conditions particulières de contact sont représentées sur la fig. 2.14 : tangence horizontale, tangence positive et tangence négative, soit la direction du plan incliné élémentaire. Sous l'effet de la charge, les deux pièces se déforment et les surfaces glissent l'une par rapport à l'autre si l'angle du plan est plus grand que l'angle de frottement d'adhérence ou éventuellement l'angle de frottement de glissement si la charge appliquée est constamment variable. Ces micro - déplacements anéantissent une partie de l'énergie introduite extérieurement et engendrent un amortissement dans la comportement du joint.

Ainsi, les frottements internes entre des surfaces rugueuses possèdent, non seulement des inconvénients, mais aussi des propriétés positives. Il s'agit d'utiliser ces particularités dans de nombreuses conceptions utilisant les éléments de machines.

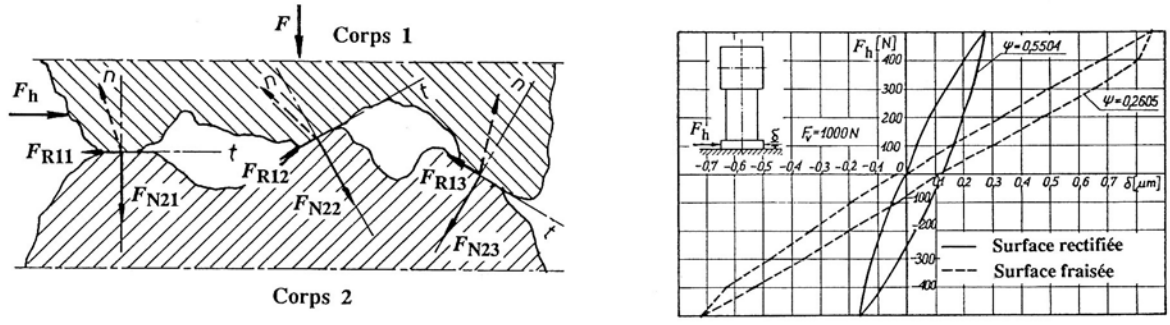


Figure 2.14 Micro-glissements des surfaces en contact

Le comportement aux micro-glissements des joints précontraints dépend de plusieurs facteurs dont les principaux sont nommés ici :

1. les angles des aspérités de surfaces usinées peuvent atteindre :
   - rabotage : 35° perpendiculairement aux sillons d'usinage,
     9° tangentiellement aux sillons,
   - fraisage : 35° perpendiculairement aux sillons d'usinage,
     18° tangentiellement aux sillons,
   - rectifiage : 27° perpendiculairement aux sillons d'usinage,
     3° tangentiellement aux sillons.

$$R_a = \frac{1}{l}\int_0^l |y|\,dx.$$

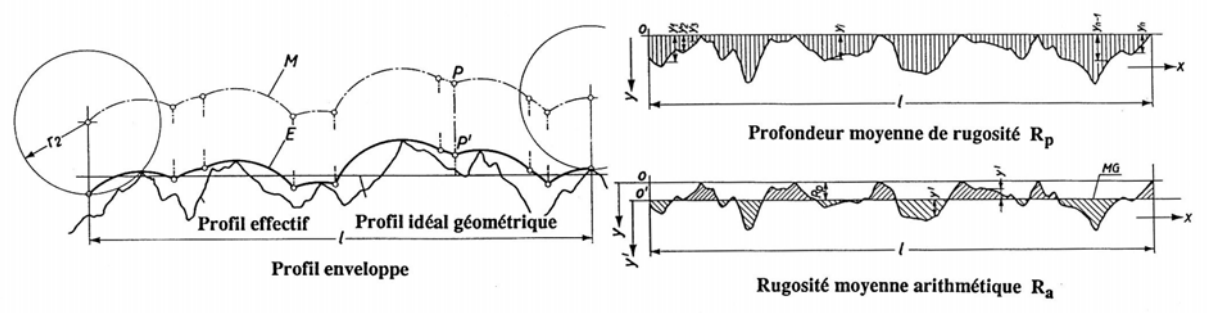


Figure 2.13 Rugosités définies dans la normalisation (VSM 58300)

Toutes ces définitions ne permettent pas de caractériser convenablement le comportement d'une surface rugueuse dans le frottement.

2.5.1.3.2 CONSIDÉRATIONS SUR LES ÉTATS DE SURFACE

Dès qu'il y a déplacement ou si les pressions superficielles sont importantes, un usinage des surfaces devient nécessaire, les pièces ne pouvant pas rester à l'état brut. Dans les éléments de machines, les surfaces des composants doivent remplir principalement deux fonctions : résister à l'usure et à l'effet de la corrosion. L'état de surface influence également la résistance mécanique de la pièce aux sollicitations. car les débuts de ruptures ou de fissures commencent le plus souvent au niveau de la surface. D'une étude citée par H.Czichos [1.3], 95% des ruptures se situaient dans le domaine élastique des contraintes et déformations, mais provenaient de charges variables. Le résultat de l'analyse de 465 avaries est condensé dans le tableau 2.5.

Tableau 2.5
Causes d'avaries en construction et conception de machines

Domaine Technologique	Cause de la rupture Pièces mécaniques et de construction	Pourcentage (%)
Matériau	Fabrication Déformations à froid et à chaud Traitement thermique	4 8
Fabrication	Usinage, montage	22,5
Conception et Utilisation	Erreurs de surface : Grippage, rouille d'appui, corrosion Effets d'entaille : Raccordements, filetages, rainures, forage Surcharges Conception défectueuse Mauvais choix du matériau	 19 33 7 5,5 1

N/mm2 dans les éléments roulants, il n'est plus possible d'oublier la déformation subie. Les essais sur les roulements à billes et à rouleaux lubrifiés ont démontré que ces pièces, bien que fortement sollicitées, pouvaient être séparées des bagues intérieure ou extérieure par un film porteur. Le frottement élastohydrodynamique tient compte de la déformation élastique des pièces alliée à la portance hydrodynamique du lubrifiant. Donnons à titre indicatif la formule selon Dowson et Higginson permettant de trouver la hauteur minimale du film entre deux cylindres [1.4] :

$$h_0 = 1{,}6\ \alpha^{0,6}\ (\eta\ v/2)^{0,7}\ \rho_r^{0,43}\ (l / F_n)^{0,13}\ (E / (1-\nu^2))^{0,03}\ ,$$

avec :

h_0 la fente minimale entre les deux cylindres,
α exposant de la caractéristique viscosité en fonction de la pression,
η viscosité dynamique d'entrée du lubrifiant,
v somme des vitesses circonférentielle : $v_1 + v_2$,
ρ_r rayon réduit,
l / F_n inverse de la charge linéique,
E module d'élasticité,
ν coefficient de Poisson.

2.5.1.3 ÉTAT DE SURFACE

Les états de surface intervenant dans les éléments machines appartiennent au groupe des surfaces à contact mécanique avec objets en déplacement. A part les conditions de frottement, la pression superficielle et l'usure jouent un rôle de premier plan. L'état de surface d'un corps technique peut se définir par sa rugosité, les notions faisant l'objet d'une normalisation nationale ou internationale.

2.5.1.3.1 DÉFINITION DES RUGOSITÉS SELON NORME

L'évaluation quantitative s'effectue en coupant la surface par des plans perpendiculaires. Sans entrer dans les détails de toutes les définitions, rappelons ce que sont les profils et les rugosités dans le système de référence E (enveloppe) :

1. Profil enveloppe E est déterminé au moyen de la trajectoire M décrite par le centre d'un cercle de rayon r_2 roulant le long du profil effectif,
2. Le diagramme de rugosité est la représentation, dans un système de coordonnées rectangulaires, des écarts du profil effectif par rapport au profil enveloppe E.
3. La profondeur maximale de la rugosité R_{max} est la profondeurs maximale relevée sur le diagramme de rugosité.
4. La profondeurs moyenne de rugosité R_p est la moyenne de toutes les profondeurs y mesurées le long du diagramme :mesurées le long du diagramme :

$$R_p = \frac{1}{l}\int_0^l y\,dx.$$

Cette grandeur permet de tracer une ligne moyenne MG parallèle à l'axe des x et elle coupe le diagramme de telle façon que la somme des surfaces soit la même de part et d'autre de cet axe.

1. La rugosité moyenne arithmétique est la moyenne des écarts du diagramme de rugosité à partir de la ligne moyenne MG , sans tenir compte du signe :

4. *Frottement hydrodynamique*

En présence d'une couche de lubrifiant suffisante, l'épaisseur du corps intermédiaire est toujours supérieure à la somme des aspérités des surfaces. Un film liquide ou pâteux sépare complètement les surfaces primitivement en contact. C'est le régime de frottement hydrodynamique lorsque la couche liquide est créée par la géométrie des pièces, représentée par un coin liquide, et par la vitesse de glissement des pièces. Une autre possibilité de séparer les surfaces des corps est d'engendrer une pression artificielle entre les surfaces au moyen d'un dispositif extérieur. Le régime est appelé hydrostatique bien que le déplacement des corps soit possible. Les seules forces à mettre en jeu pour déplacer les pièces sont dues aux caractéristiques du lubrifiant. Le coefficient de frottement de glissement selon la loi de Coulomb n'existe pas directement mais il est très utile de pouvoir exprimer les forces parasites en fonction de la charge normale par un coefficient que nous voulons désigner par *coefficient de frottement équivalent* μ_e :

$$\mu_e = F_R / F_n \, .$$

Dans le frottement hydrodynamique ou le régime hydrostatique, l'usure des pièces est pratiquement nulle. La construction des grandes machines tournantes et l'amélioration de leur rendement mécanique seraient impensables sans la possibilité de créer le frottement hydrodynamique. Les coefficients de frottement équivalents se situent entre 0,05 à 0,3 %, soit environ vingt fois moins qu'en frottement de glissement onctueux.

5. *Frottement mixte*

Entre le régime onctueux, avec lubrifiant protecteur de surfaces, et le régime hydrodynamique avec lubrifiant porteur, se situe un frottement intermédiaire appelé frottement mixte ou imparfait. La portance du lubrifiant ne suffit pas à séparer entièrement les corps en mouvement, les surfaces restant partiellement en contact.

Exemple : Glissières et coulisseaux de machines-outils de précision. Sur des surfaces grattées, la pente des surfaces de grattage engendre le frottement hydrodynamique à vitesse suffisante. Dès que le coulisseau est immobile, le lubrifiant liquide est expulsé des alvéoles et les parois se rapprochent jusqu'à se toucher. De mesures effectuées, le temps nécessaire pour atteindre le contact entre surfaces varie de 1 à 2 minutes. Le film protecteur dépend non seulement de la viscosité du lubrifiant, mais aussi de sa tension superficielle.

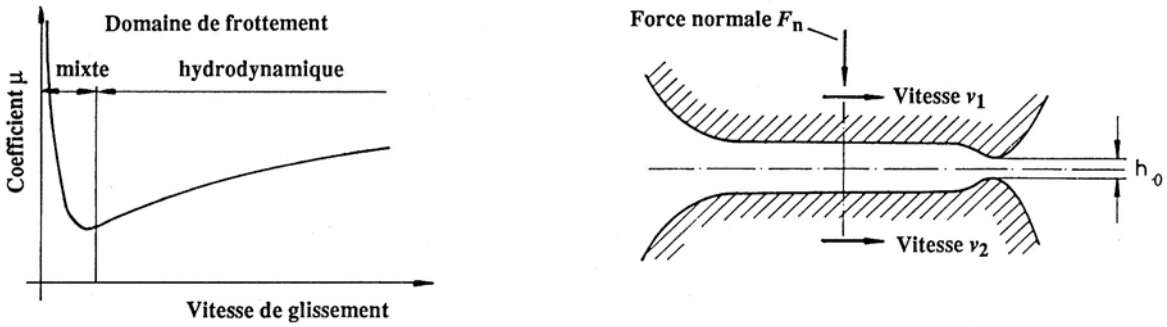


Figure 2.12 Coefficient de frottement dans un palier radial lisse selon Stribeck en fonction de la vitesse Principe du contact élastohydrodynamique entre deux cylindres

6. *Frottement élastohydrodynamique*

L'étude des divers types de frottement suppose que les corps en contact ou en glissement sont indéformables. Si les pressions sont relativement faibles, cette hypothèse correspond assez bien à la réalité tandis que si les pressions deviennent très élevées, dépassant 1000

l'étude des conditions d'utilisation de tout mécanisme, car de lui va dépendre les pertes, la durée de vie et finalement le rendement.

2.5.1.2 TYPES DE FROTTEMENT DE GLISSEMENT

Le choix correct du troisième composant, le lubrifiant, nécessite la connaissance de toutes les caractéristiques imposées au mécanisme à étudier et des propriétés particulières des lubrifiants. Les facteurs issus directement du mécanisme sont : la pression superficielle maximale et sa répartition, la vitesse relative des pièces en glissement et/ou roulement, les températures d'utilisation et limites acceptables, la circulation du lubrifiant à l'intérieur du mécanisme et son renouvellement, la possibilité d'évacuer l'énergie calorifique produite par les pertes mécaniques, etc. Les propriétés physico-chimiques du lubrifiant influencent directement les conditions de frottement de glissement entre les corps.

La théorie de la lubrification et la pratique du frottement permettent de distinguer six régimes de frottement.

1. *Frottement d'adhérence*

Le comportement des surfaces rugueuses en contact dépend de la géométrie des surfaces et de la rugosité. La loi du frottement d'adhérence, énoncée précédemment, indique la condition à remplir par la composante tangentielle pour que les corps ne se déplacent pas l'un par rapport à l'autre :

$$-F_{R0} \leq F_{R'} \leq F_{R0} = \mu_0 F_n.$$

Cette loi est supposée indépendante de la présence ou de l'absence de lubrifiant sur les surfaces en contact.

2. *Frottement sec*

Les deux surfaces, toujours rugueuses, en glissement l'une par rapport à l'autre, ne sont pas séparées ou enduites d'un lubrifiant. Le déplacement relatif des corps engendre un échauffement très localisé aux aspérités qui se traduit par des microsoudures aussitôt cisaillées par le mouvement. Le coefficient de frottement est très élevé et l'usure des pièces reste trop importante.

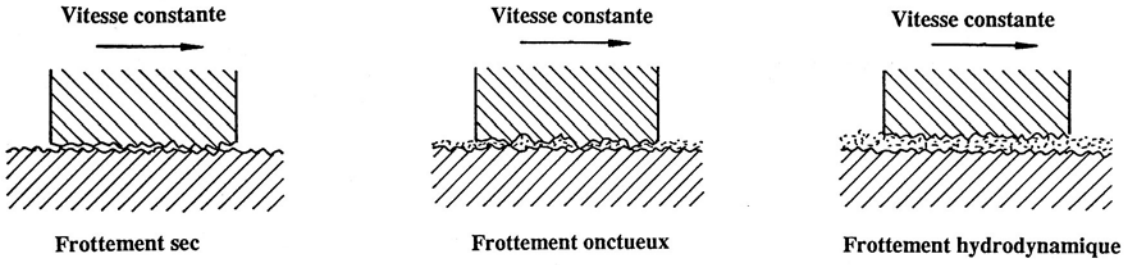


Figure 2.11 Régimes de frottement de glissement

3. *Frottement onctueux*

Les corps sont enduits d'une substance étrangère, le lubrifiant, qui a pour tâche essentielle d'empêcher le grippage des pièces et d'abaisser les forces élémentaires de frottement. A faible vitesse relative, l'épaisseur de la couche lubrifiante en inférieure aux aspérités des pièces en contact. L'usure devient plus faible et les microsoudures sont moins fréquentes. Le coefficient de frottement est fortement réduit. L'état de surface des pièces et les propriétés du lubrifiant, en particulier son aptitude à adhérer sur les surfaces et à résister aux pressions, jouent un rôle important dans ce régime de frottement.

entre les deux pièces, combinées aux contrainte normales négatives dues à la pression superficielle. Dans le glissement négatif, le corps à vitesse plus grande a tendance à arracher la zone de contact du corps à vitesse plus faible.

2.5 NOTIONS DE TRIBOLOGIE

La tribologie se propose d'étudier non seulement les conditions de frottement entre les corps, mais également les divers phénomènes et aspects physiques et techniques dans le déplacement relatif des surfaces extérieures des corps. Elle étudie donc les divers types de frottement, les mécanismes d'usure et les moyens pour les éviter. Dans ce chapitre, nous voulons traiter quelques aspects simples et très élémentaires de cette branche en plein développement.

2.5.1 FROTTEMENT

Les valeurs numériques des coefficients de frottement d'adhérence μ_0 et de glissement μ, des paramètres de résistance de roulement e_r, des pressions locales admissibles et des conditions d'échauffement sont déterminées par des séries d'essai en laboratoire, sur des éléments de machines ou des mécanismes, en faisant varier les paramètres comme la pression, la vitesse, la lubrification, les matières en contact.

2.5.1.1 SYSTÉME TRIBOLOGIQUE

L'analyse tribologique d'un système introduit quatre éléments composants fondamentaux (figure 2.10) :

1. le corps en étude qui fait l'objet de l'analyse; il s'agit le plus souvent d'un corps solide.
2. le corps de base sur lequel agit directement le corps étudié. Il peut se présenter sous l'une des trois formes : solide, liquide ou gazeuse.
3. le corps intermédiaire placé entre les deux corps précédents. Il peut être aussi solide, liquide ou gazeux, soit souhaité comme dans le cas d'un lubrifiant, soit indésirable comme les particules solides provenant de l'usure des corps.
4. le milieu ambiant, généralement gazeux, mais aussi liquide dans certaines applications. Le milieu ambiant agit sur les autres composants habituellement sous forme de réactions physico-chimiques.

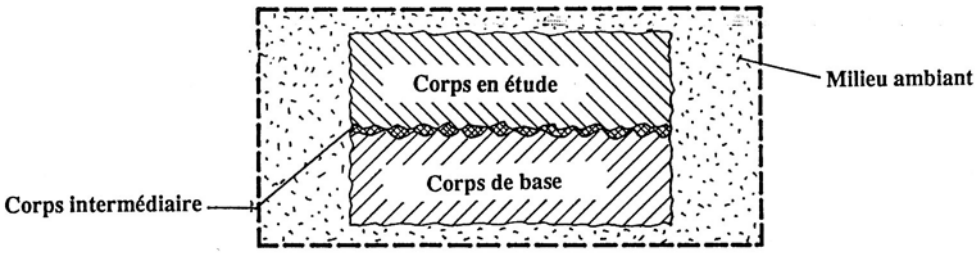


Figure 2.10 Structure générale d'un système tribologique

Exceptionnellement, le système tribologique peut se composer de trois éléments seulement comme dans le frottement sec sans usure. Les quatre constituants influencent directement les conditions de frottement, la résistance à l'usure des pièces en déplacement et le comportement en service de l'ensemble. La fonction du troisième composant est donc primordiale dans

2.4 ROULEMENT AVEC GLISSEMENT

Certains éléments de machines présentent des surfaces en contact qui roulent et glissent simultanément l'une sur l'autre. Les pressions admissibles sont trouvées dans des machines d'essai équipées de deux rouleaux pressés l'un contre l'autre avec vitesses circonférentielles différentes. Soit deux cylindres à axes parallèles, de diamètres d_1 et d_2, en contact au point B sur la ligne des centres O_1O_2. Les vitesses circonférentielles sur ces deux roues valent respectivement :

1. Rouleau de diamètre d_1 : $v_{u1} = \omega_1 \, d_1/2$,
2. Rouleau de diamètre d_2 : $v_{u2} = \omega_2 \, d_2/2$,

avec : ω_1 et ω_2 les vitesses angulaires des deux pièces cylindriques.

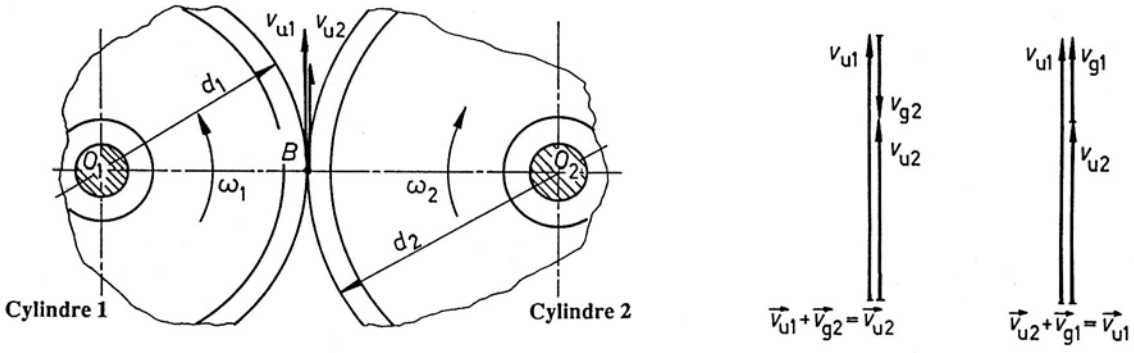


Figure 2.9 Roulement avec glissement entre deux cylindres

Supposons la vitesse circonférentielle v_{u1} du rouleau 1 plus grande que celle du rouleau 2 : $v_{u1} > v_{u2}$. Sur la ligne de contact au point B , les deux cylindres roulent l'un sur l'autre avec glissement. Définissons par convention le glissement entre les deux pièces :

1. le glissement est dit positif pour le corps j lorsque la différence algébriques des vitesses est positive, la première vitesse intervenant dans cette définition étant celle du corps j . Dans le cas de la figure 2.9, le cylindre 1 est à glissement positif car :
$$|\vec{v}_{u1}| - |\vec{v}_{u2}| > 0.$$
2. le glissement est dit négatif pour le corps j lorsque la différence algébrique des vitesses est négative, la première vitesse intervenant dans cette définition étant celle du corps j . Dans l'exemple proposé, le cylindre 2 est à glissement négatif car :
$$|\vec{v}_{u2}| - |\vec{v}_{u1}| < 0.$$
3. Les vitesses circonférentielles étant différentes pour les deux cylindres, la vitesse de glissement peut apparaître dans des expressions vectorielles :
$$\vec{v}_{u1} + \vec{v}_{gl} = \vec{v}_{u2} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_{u2} + \vec{v}_{gl} = \vec{v}_{u1} \, .$$

La vitesse de glissement a même module sur les deux corps, mais son sens est opposé. Le module de cette vitesse s'exprime par :

$$|\vec{v}_{gl}| = |\vec{v}_{u1}| - |\vec{v}_{u2}| \, . \qquad (2.25)$$

L'expérience a démontré que l'usure et la formation de piqûres destructrices sur les surfaces en roulement sont plus fréquentes sur les cylindres soumis au glissement négatif, à diamètres égaux et caractéristiques mécaniques identiques. Cette destruction plus rapide provient des contraintes tangentielles, engendrées par la différence de vitesse et le frottement

L'aire de la surface de l'ellipse est : $A = \pi\ a\ b$. La pression moyenne est le quotient de la force normale par cette aire : $p_{moy} = F_n / A$ et la pression maximale au point C vaut 1,5 fois la valeur moyenne, soit :

$$p_{max} = \frac{3F_n}{2A} = \frac{3F_n}{2\pi\xi\eta w^2}. \qquad (2.22)$$

La pression calculée au moyen de cette expression ne devra pas dépasser la valeur admissible donnée dans le tableau 2.1 en charge statique. En charges dynamiques, la valeur de la pression maximale permet d'estimer la durée de vie des corps jusqu'à l'apparition d'avaries inadmissibles.

2.3.9 COMPRESSION DES CORPS

Les deux corps en contact se déforment non seulement en augmentant la surface de contact elliptique sous l'effet de la force normale F_n, mais les deux corps subissent aussi un compression désigné ici par Δz. Cette dimension peut se trouver par l'expression :

$$\Delta z = \frac{3}{2\pi a} \cdot \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right) F_n\, K(\varepsilon). \qquad (2.23)$$

L'évaluation de l'intégrale elliptique totale de première espèce $K(\varepsilon)$ pourra se faire au moyen d'une méthode numérique comme par exemple le sous-programme FORTRAN CEL1 de la collection SSP.

2.3.10 CONTACT DANS UN CORPS À SURFACE CONCAVE

Ce genre de contact se rencontre aussi dans divers éléments de machines. Le corps concave est indicé 1, le corps convexe est indicé 2. Les rayons de courbure dans les plans principaux doivent obéir aux conditions :

- corps 1 : $0 \geq r_{11} \geq r_{12}$,
- corps 2 : $r_{21} \geq r_{22} \geq 0$.

Pour que les corps puissent se toucher initialement en un point, il faut que le module du rayon de courbure du corps 1 soit plus grand que le rayon de courbure du corps 2 dans toute coupe plane passant par le point de contact. Cette condition peut s'exprimer par la règle générale donnée par [1.7] :

$$0 \leq \cos\delta < 1{,}0 \qquad |r_{12}| > r_{21} \qquad \text{et} \qquad |r_{11}| > r_{22}\ .$$

La position de l'ellipse de contact est donnée par l'expression :

$$\cos 2\psi = \frac{\lambda + \cos 2\varphi}{\sqrt{1 + \lambda^2 + 2\lambda\cos 2\varphi}}. \qquad (2.24)$$

avec :

$\lambda = (1/r_{12} - 1/r_{11}) / (1/r_{22} - 1/r_{21}) = R_{1211}/R_{2221}$.

soit la même relation que pour le contact convexe sur convexe. Des essais, effectués par les deux auteurs déjà cités, sur des cylindres ont montré l'exactitude des relations de Hertz et de la position de l'ellipse de contact.

La recherche de la dimension des deux demi axes de l'ellipse nécessite la résolution par voie itérative de l'expression entre les deux angles auxiliaires ε et δ . Pour chaque pas de calcul, il faut trouver les intégrales elliptiques totales $K(\varepsilon)$ et $E(\varepsilon)$. Habituellement, on évite ce genre d'opérations compliquées nécessitant l'utilisation de tables numériques.

2.3.7 DÉTERMINATION DES FACTEURS ξ ET η

Si les deux facteurs ξ et η sont donnés dans une table en fonction du cosinus de l'angle δ , il est possible de trouver les dimensions de l'ellipse de contact à partir de la grandeur *w*.

Tableau 2.4
Grandeurs auxiliaires ξ et η

cosδ	ξ	η	cosδ	ξ	η	cosδ	ξ	η
0,0	1,00	1,000	0,75	2,07	0,578	0,975	5,44	0.344
0,2	1,15	0,878	0,80	2,29	0,545	0,980	5,94	0.329
0,4	1,35	0,768	0,85	2,59	0,508	0,990	7,79	0.288
0,5	1,49	0,716	0,90	3,08	0,462	0,995	10,1	0.252
0,6	1,67	0,663	0,925	3,48	0,432	0,999	18,5	0.186
0,7	1,91	0,608	0,950	4,09	0,394	0,9995	23,9	0.163

Pour contrôler la pression superficielle selon Hertz, les rayons de courbure, la position des plans de courbure principale et les caractéristiques mécaniques doivent être connus. L'angle entre ces plans étant φ , il est possible de trouver cosδ . Si le calcul s'effectue au moyen d'un programme, il est possible soit de mettre en équation les deux fonctions :

$$\xi = f_1(\cos\delta) \qquad \text{et} \qquad \eta = f_2(\cos\delta),$$

soit d'appliquer les relations proposées par R. Grekoussis et Th. Michailidis [1.5 et 1.6]. Ces expressions, données en fonction de $f_\delta = \ln(1 - \cos\delta)$, sont :

1. pour $0 \le \cos\delta < 0{,}949$:

   $\ln\xi = f_\delta / (-1{,}53 + 0{,}333\, f_\delta + 0{,}0467\, f_\delta^2)$,

   $\ln\eta = f_\delta / (1{,}525 - 0{,}86\, f_\delta - 0{,}0993\, f_\delta^2)$.

2. pour $0{,}949 \le \cos\delta < 1{,}00$:

   $\ln\xi = (-0{,}4567 - 0{,}4446\, f_\delta + 0{,}1238\, f_\delta^2)^{0{,}5}$,

   $\ln\eta = -0{,}333 + 0{,}2037\, f_\delta + 0{,}0012\, f_\delta^2$.

Les erreurs commises par rapport au valeurs exactes sont plus petites que 0,7 % .

2.3.8 VALEUR DE LA PRESSION MAXIMALE

A partir des quatre rayons de courbure principaux des deux pièces, le contrôle de la pression superficielle s'effectue par :
- la détermination de cos δ ,
- la recherche des coefficients ξ et η dans le tableau ou par les relations proposées,
- la recherche de la grandeur *w* à partir de la force normale F_n ,
- le calcul de la dimensions de l'ellipse de contact par :

$$a = \xi\, w \qquad \text{et} \qquad b = \eta\, w.$$

2. l'effort normal $\vec{F}_n$ est connu et la dimension maximale de la déformation est limitée par la configuration du mécanisme. Il faut trouver la forme géométrique à imposer aux deux corps pour rester dans le domaine des valeurs admissibles.

2.3.6 RELATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SURFACE DE CONTACT

Sous l'effet de la force normale $\vec{F}_n$ entre les deux corps, la surface de contact, généralement gauche, est une ellipse de demi axes *a* et *b*. Ces deux dimensions sont proportionnelles à la grandeur *w* calculable par :

$$w = \sqrt[3]{\frac{3\left[\left(1-\nu_1^2\right)/E_1 + \left(1-\nu_2^2\right)/E_2\right] F_n}{2\left(1/r_{11} + 1/r_{12} + 1/r_{21} + 1/r_{22}\right)}}. \qquad (2.15)$$

Les demi axes de l'ellipse de contact valent alors :

$$a = \xi\, w \qquad \text{et} \qquad b = \eta\, w\,.$$

Les deux facteurs ξ et η sont adimensionnels et dépendent directement des rayons de courbure et de la position des axes *Cu* et *Cv*. Ils sont calculables par :

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{K(\varepsilon) - E(\varepsilon)}{(\pi/4)\,\sin^2\varepsilon \cdot (1-\cos\delta)}}, \qquad (2.16)$$

$$\eta = \sqrt[3]{\frac{E(\varepsilon)\cos\varepsilon - K(\varepsilon)\cos^3\varepsilon}{(\pi/4)\,\sin^2\varepsilon \cdot (1+\cos\delta)}}. \qquad (2.17)$$

Dans ces deux expressions, $K(\varepsilon)$ et $E(\varepsilon)$ sont des intégrales elliptiques totales de première et seconde espèce, ε étant l'argument. Cet argument est un angle auxiliaire dont le cosinus est égal au rapport du petit axe au grand axe de l'ellipse de contact :

$$\cos\varepsilon = \frac{\text{grand axe de l'ellipse}}{\text{petit axe de l'ellipse}} = \frac{b}{a} = \frac{\eta}{\xi}. \qquad (2.18)$$

Le second argument δ est aussi un angle auxiliaire pouvant se trouver à partir des rayons de courbure des deux ellipsoïdes. Introduisons, pour simplifier l'écriture de ces diverses relations, les expressions suivantes :

$$R_{1211} = (1/r_{12} - 1/r_{11}) \qquad \text{et} \qquad R_{2221} = (1/r_{22} - 1/r_{21}),$$

$$\cos\delta = \frac{\sqrt{R_{1211}^2 + R_{2221}^2 + 2\,R_{1211}R_{2221}\cos 2\varphi}}{1/r_{11} + 1/r_{12} + 1/r_{21} + 1/r_{22}}. \qquad (2.19)$$

Cette même fonction peut aussi se définir par l'expression :

$$\cos\delta = \frac{E(\varepsilon)\cdot(1+\cos^2\varepsilon) - 2K(\varepsilon)\cdot\cos^2\varepsilon}{E(\varepsilon)\sin^2\varepsilon}. \qquad (2.20)$$

La position de l'ellipse de contact peut se trouver en calculant l'angle ψ entre le plan de courbure *Cuz* du corps 1 et le grand axe de l'ellipse. Cet angle se trouve par l'expression suivante :

$$\cos 2\psi = \frac{R_{1211} + R_{2221}\cdot\cos 2\varphi}{\sqrt{R_{1211}^2 + R_{2221}^2 + 2\,R_{1211}R_{2221}\cdot\cos 2\varphi}}. \qquad (2.21)$$

contact. A part la publication originale de H. Hertz, la théorie générale du contact de deux corps quelconques et des deux cas particuliers est développée d'une manière détaillée dans le livre Berechnung der Maschinenelemente (Calcul des éléments de machines) de M. ten Bosch [1.13] pages 119 à 129, édition 1951.

2.3.5 GRANDEURS GÉOMÉTRIQUES ET MÉCANIQUES

La détermination de la pression hertzienne et des déformations part de l'effort normal $\vec{F}_n$ entre les deux corps, de la géométrie des corps au voisinage du point de contact, point désigné par *C* sur la figure 2.7. Dans la zone de contact, il existe un plan bien défini, tangent aux deux corps, et les corps réels peuvent se remplacer par deux ellipsoïdes de rayons de courbure géométriquement connus.

La géométrie des deux corps est ainsi définie par les rayons de courbures principaux dans deux plans rectangulaires. Les indices utilisés pour leur désignation sont :

- *premier indice* :
  corps 1, premier indice 1 : le corps supérieur sur la figure 2.7,
  corps 2, premier indice 2 : le corps inférieur sur la figure 2.7;
- *second indice* :
  rayon de courbure maximal pour le corps : indice 1,
  rayon de courbure minimal pour le corps : indice 2.

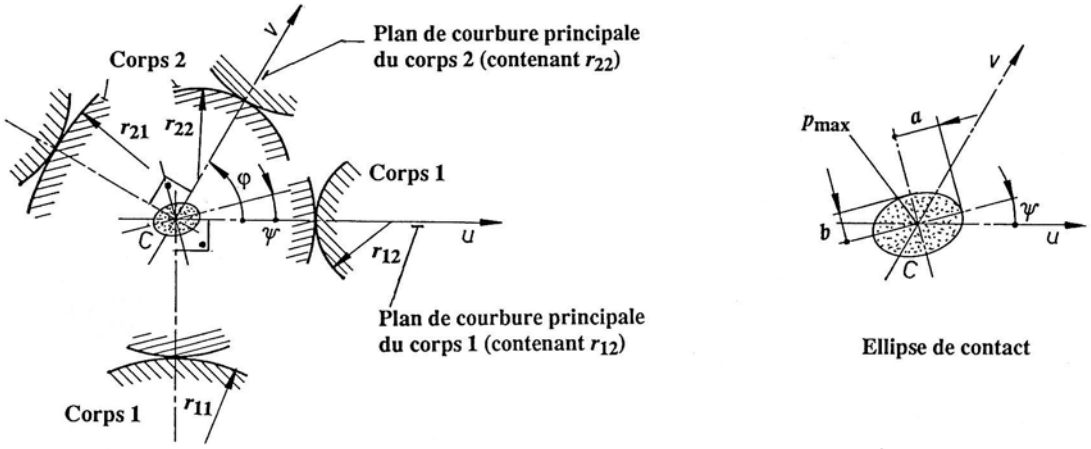


Figure 2.8 Contact ponctuel entre deux corps quelconques

Avec ces définition et pour un contact entre deux corps convexes, les rayons présentent la propriété : $r_{11} > r_{12}$ et $r_{21} > r_{22}$. Le rayon de courbure r_{12} du corps 1 définit un plan *Cuz*, appelé plan de courbure principale du corps 1, et le rayon de courbure r_{22} du corps 2 le plan *Cyz,* appelé plan de courbure principale du corps 2. La position relative de ces deux plans est définie par l'angle aigu φ.

Les caractéristiques mécaniques des deux corps sont :

- modules d'élasticité : E_1 et E_2,
- coefficients de contraction : ν_1 et ν_2.

Les hypothèses introduites correspondent à celles des cas particuliers traités précédemment. Deux problèmes distincts peuvent se présenter dans la pratique courante :

1. les dimensions géométriques, les caractéristiques mécaniques et l'effort normal $\vec{F}_n$ sont connus. Il s'agit de trouver la pression maximale de contact, l'étendue de la déformation et l'aplatissement des corps.

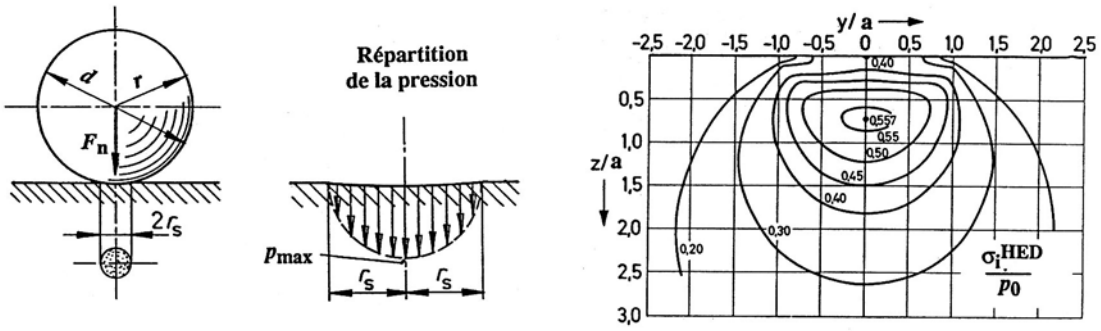


Figure 2.7 Pression superficielle et déformation entre une sphère et un plan

1. *Valeur de la pression superficielle maximale* :

$$p_{max} = \frac{3F_n}{2\pi r_s^3},$$

$$p_{max} = \frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\frac{3F_n}{r_r^2\left\{\left[\left(1-\nu_1^2\right)/E_1\right]^2+\left[\left(1-\nu_2^2\right)/E_2\right]^2\right\}}}. \qquad (2.11)$$

2. *Rayon du cercle de contact* :

$$r_s = \sqrt[3]{\frac{3\left[\left(1-\nu_1^2\right)/E_1+\left(1-\nu_2^2\right)/E_2\right]F_n r_r}{4}}. \qquad (2.12)$$

3. *Cas particulier fréquent* : pour $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$.

Le module d'élasticité résultant se définit encore par : $E_r = 2\,E_1\,E_2 / (E_1 + E_2)$ et les relations se simplifient en :

$$p_{max} = 0{,}388\sqrt[3]{\frac{F_n E_r^2}{r_r^2}}, \qquad (2.13)$$

$$r_s = 1{,}109\sqrt[3]{\frac{F_n r_r}{E_r}}. \qquad (2.14)$$

La pression maximale est située sur la ligne d'action de la force normale $\vec{F}_n$. Au niveau de la surface déformée, la contrainte normale est égale à la pression superficielle. La répartition des contraintes normales σ_x et σ_y, de la contrainte tangentielle τ est analogue à celle du cylindre sur le plan. La contrainte maximale de cisaillement vaut 0,31 p_{max} à la distance z = 0,47 r_s. La figure 2.7 montre à droite les niveaux d'isocontrainte idéale, contrainte idéale calculée au moyen de l'hypothèse de l'énergie de distorsion (HED), dans le plan pour un contact entre cylindre et plan (cliché FAG [1.14]).

2.3.4 CONTACT PONCTUEL QUELCONQUE

Le contact ponctuel quelconque existe dans plusieurs éléments de machines comme par exemple les roulements à billes ou à rotules sur rouleaux, les engrenages à axes gauches, les variateurs mécaniques de vitesse à friction, etc. Le calcul détaillé de l'étendue de la surface de contact, de la pression superficielle et des déformations permet d'éviter les avaries par piqûres, d'augmenter la fiabilité des pièces et d'estimer la durée de vie probable de ces mécanismes. Le contact est dit ponctuel car il a lieu en un point commun aux deux corps en

3. *Cas particulier* :

Les deux corps possèdent le même coefficient de Poisson valant 0,3 : $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, par exemple pour deux corps en acier. En introduisant le module d'élasticité dit résultant :

$$E_r = 2\, E_1\, E_2 / (E_1 + E_2),$$

il est possible d'écrire les relations de Hertz simplifiées comme suit :

- Pression maximale : $$p_{max} = 0{,}418 \sqrt{\frac{F_n\, E_r}{r_r\, l}}. \qquad (2.9)$$

- Demi largeur de contact : $$a = 1{,}522 \sqrt{\frac{F_n\, r_r}{E_r\, l}}. \qquad (2.10)$$

La variation des contraintes normales σ_x et σ_y , de la contrainte tangentielle τ , peut se calculer. La contrainte tangentielle maximale se trouve à la profondeur $z = 0{,}78\ a$ et la contrainte maximale en ce point vaut $0{,}304\ p_{max}$ (figure 2.6 à droite). Le problème du contact entre deux cylindres est un problème plan. La répartition de la pression sur la surface déformée suit une loi du second degré.

Remarque très importante :

La solution de Hertz admet une répartition de pression constante dans le sens axial pour des coordonnées x et z identiques. Pour que cette condition idéale soit remplie, il faut que le contact s'effectue entre deux cylindres de même longueur. Même dans ce cas particulier, la pression varie le plus souvent dans le sens axial. Si le cylindre est placé sur un plan ou un cylindre de longueur différente, la répartition de la pression n'est plus égale, mais dépend de la coordonnée y. La pression aux extrémités du cylindre est très souvent plus grande que la valeur calculée.

2.3.3 PRESSION SUPERFICIELLE SUR LA SPHÈRE

H. Hertz a également développé les relations de la pression superficielle et des déformations pour le contact d'une sphère sur un semi-infini ou entre deux sphères [1.7]. La force normale est désignée par $\vec{F}_n$. Entre les deux corps, la répartition de la pression obéit à la loi :

$$p = p_{max}\, [1-(r/r_s)^2]^{0.5}.$$

La pression maximale vaut 1,5 fois la pression moyenne comme c'est le cas pour la hauteur d'un paraboloïde par rapport à sa hauteur moyenne. Les dimensions géométriques sont :

- rayon des sphères :
  corps 1 : r_1,
  corps 2 : r_2,
  rayon réduit : $r_r = (r_1\, r_2/(r_1 + r_2)$.

2. Coefficient de Poisson (appelé également coefficient de contraction) :

Corps 1 : ν_1,

Corps 2 : ν_2.

Les relations proposées dans ce sous-chapitre concernent tout d'abord deux cas particuliers : le contact entre un cylindre et un plan ou un autre cylindre, le contact entre une sphère et plan ou sur une autre sphère. Le contact entre deux corps de forme quelconque sera développé en fin de ce sous-chapitre.

2.3.2 PRESSION SUPERFICIELLE SUR UN CYLINDRE

H. Hertz considéra le contact de deux cylindres parallèles comme un cas particulier du contact général entre deux corps en supposant que le rayon de courbure dans le plan *Oyz* était infiniment grand. Le contact entre un cylindre et un plan introduit une hypothèse complémentaire difficilement réalisable en pratique : la répartition axiale de la pression et de la déformation ne dépend pas, le long des génératrices déformées du cylindre, de la coordonnée axiale *y*. La recherche des pressions et déformations peut se faire dans le plan *Oxz* (figure 2.6). Les dimensions géométriques intervenant dans les relations sont :

- rayon du cylindre :
  contact cylindre sur plan : $r_r = r$,
  contact cylindre sur cylindre : $r_r = (r_1\, r_2)/(r_1 + r_2)$.
- longueur du cylindre ou des deux cylindres à axes parallèles : /,
- demi largeur de la déformation : a .

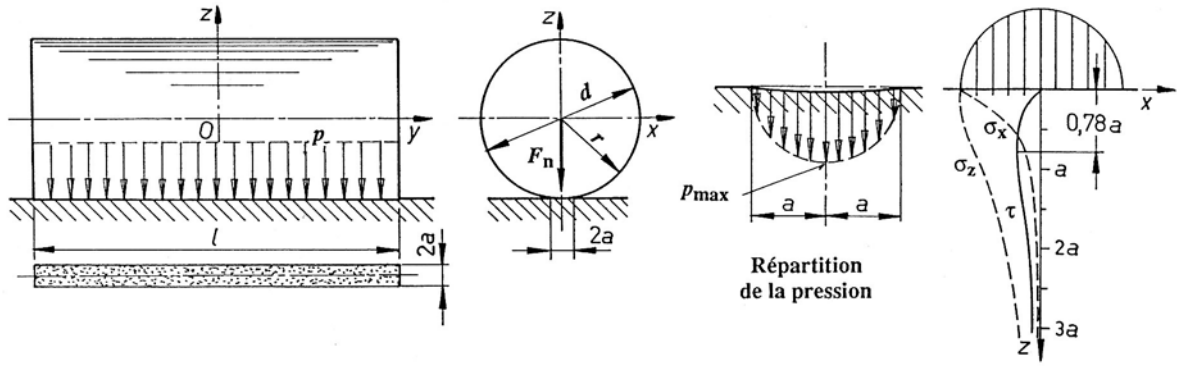


Figure 2.6 Pression superficielle et déformation entre un cylindre et un plan

1. *Valeurs des pressions superficielles moyenne et maximale* :

$$p_{moy} = F_n/(2\, a\, l).$$

$$p_{max} = 2\, F_n/(\pi\, a\, l).$$

Pression maximale : $$p_{max} = \sqrt{\frac{F_n}{\pi r_r l\left[(1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2\right]}}. \qquad (2.7)$$

2. Demi largeur de contact entre les deux corps :

Demi largeur : $$a = \sqrt{\frac{4\left[(1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2\right] F_n r_r}{\pi l}}. \qquad (2.8)$$

aux mécanismes sollicitées par des charges analogues dans des conditions de fonctionnement identiques.

2.3 PRESSION HERTZIENNE ENTRE DEUX CORPS

Hertz a développé des relations analytiques permettant de trouver la pression superficielle maximale dans le contact de cylindres ou de sphères entre eux et aussi sur le plan appartenant au semi-infini. Ces développements sont basés sur les résultats trouvés par Boussinesq qui étudia la déformation d'un semi-infini sous l'effet de l'application d'une force concentrée au niveau du plan (figure 2.5). Les expression de Hertz permettent de trouver la pression maximale, les déformations des pièces et la répartition des contraintes à l'intérieur des pièces. Les hypothèses simplificatrices introduites sont [1.8]:

1. les cylindres ou les sphères et le semi-infini sont constitués par des matières homogènes, isotropes et parfaitement élastiques,
2. la loi de Hooke entre les déformations et les contraintes est applicable,
3. les déformations restent très petites vis à vis des dimensions géométriques des corps,
4. sur les surfaces en contact, seules des contraintes de compression interviennent dans la formation de la pression. Il n'y a pas de contraintes tangentielle à ce niveau engendrées par exemple par des forces de frottement.

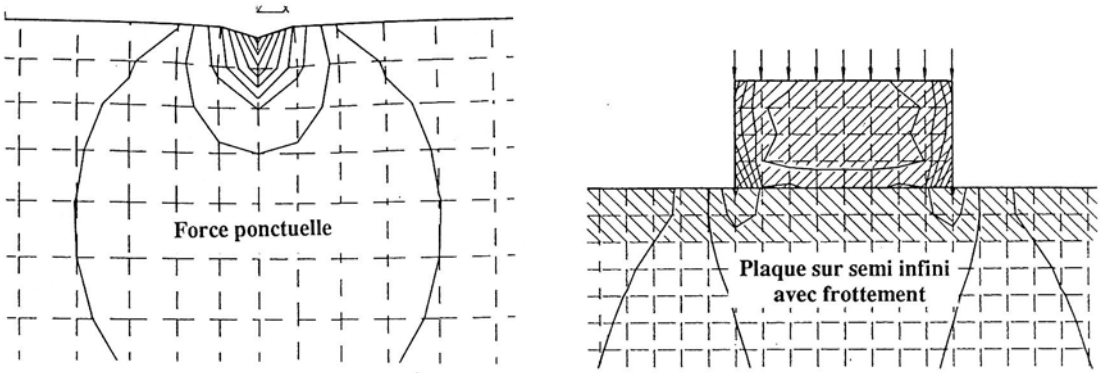


Figure 2.5 Force ponctuelle et plaque chargée sur le semi-infini, solution par éléments finis (EIAF)

La figure 2.5 montre à gauche la répartition de la contrainte idéale, calculée par la méthode des éléments finis au moyen de l'énergie de distorsion, dans le semi-infini sollicité soit par une force concentrée $\vec{F}$, soit à droite par une plaque chargée par des forces égales aux divers nœuds. Les niveaux de contrainte ne sont pas directement comparables sur les deux figures. Les conditions de sollicitation sur la plaque sont : rapport des modules d'élasticité 1 à 10 entre le semi-infini et la plaque, coefficient de frottement entre la plaque et le semi-infini 0,20 . La figure démontre clairement la concentration des contraintes sur les extrémités de la plaque de forme rectangulaire (voir également la figure sur le répartition des contraintes dans le semi-infini selon une publication FAG).

2.3.1 CARACTÉRISTIQUES MÉCANIQUES

A part les caractéristiques géométriques des corps, les caractéristiques mécaniques intervenant dans les relations de Hertz sont :

1. Module d'élasticité :
   Corps 1 : E_1,
   Corps 2 : E_2.

Tableau 2.2
Sollicitations statiques
Pressions linéaire et superficielle admissibles

Eléments en contact	Valeurs admissibles
Rouleaux en acier sur fonte grise acier moulé acier amélioré	 k = 6 à 9 N/mm^2 k = 9 à 12 N/mm^2 k = 12 à 20 N/mm^2
Cylindre sur plan Sphère sur plan	p_H = 0,25 à 0,30 HB p_H = 0,25 à 0,40 HB
Attention aux unités HB est en daN/mm^2 $\rightarrow$ multiplication par 10 N/daN HB dureté Brinell de la matière.	

2.2.3.2 SOLLICITATIONS DYNAMIQUES

Sous l'effet de charges dynamiques, cas le plus fréquent en construction de machines, et d'une pression superficielle élevée, la matière peut commencer à s'écailler. Si les contraintes tangentielles dépassent la limite d'élasticité du matériau, des fissures se produisent à l'intérieur des corps et se propagent progressivement vers la surface. La pression limite admissible est donnée par l'apparition de ces piqûres destructrices. Les corps cylindriques ou sphériques peuvent supporter un nombre indéfini de charges si la pression hertzienne ne dépasse pas la valeur limite déterminée expérimentalement.

Les valeurs admissibles dépendent non seulement des caractéristiques mécaniques des pièces, mais également de la vitesse de roulement, de la fréquence et de l'allure des charges en fonction du temps, de la présence ou de l'absence d'un lubrifiant entre les surfaces, de la présence de frottement de glissement. Les roulements à billes et à rouleaux, les engrenages à roues dentées et vis sans fin, les variateurs de vitesse mécanique à friction sont des éléments de machines typiques sollicités dynamiquement par des charges importantes et des pressions élevées.

Tableau 2.3
Sollicitations dynamiques
Pressions linéaire et superficielle admissibles

Matières en contact	Valeurs admissibles
Fonte sur acier Acier moulé sur acier	k = 2 à 3 N/mm^2 k = 4 à 6 N/mm^2
Rouleau cylindrique en acier traité sur acier au carbone fonte grise acier amélioré	 P_H = 400 N/mm^2 P_H = 300 N/mm^2 p_H = 600 N/mm^2

Les pressions superficielles admissibles sur les flancs des roues dentées seront données dans le chapitre sur les engrenages et les roues dentées. Ces pressions sont aussi applicables

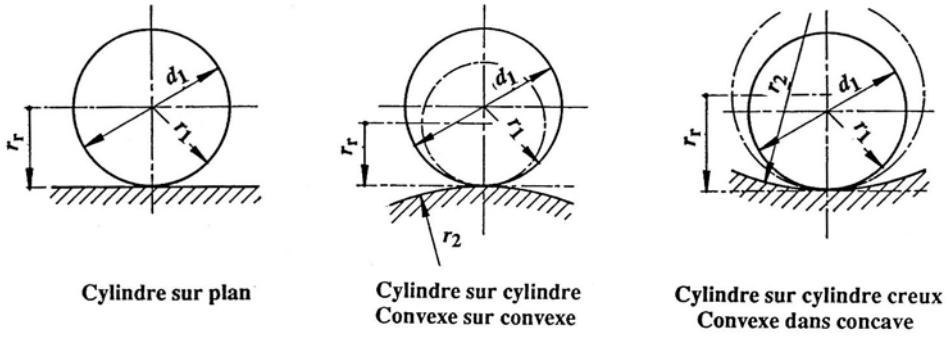


Figure 2.4 Rayons réduits : Contact entre un cylindre et un plan, ou un autre cylindre

Le rayon réduit r_r est plus petit que le plus petit des rayons dans le cas de contact d'un corps convexe sur un corps convexe; il est plus grand que le plus petit des rayons dans le cas de contact d'un corps convexe dans un corps concave.

2.2.3 PRESSIONS ADMISSIBLES

La pression linéaire définie conventionnellement par la relation de Stribeck ne correspond pas à la pression réelle. La pression réelle entre cylindres et plan a été étudiée par H. Hertz et porte le nom de pression hertzienne, désignée ici par p_H. Dans le contact d'un cylindre sur un plan ou sur un autre cylindre, il est possible de donner une relation entre ces deux méthodes de définition, $\vec{F}_n$ étant la force normale :

$$k = \frac{F_n}{2 r_r l}, \tag{2.4}$$

et :

$$p_H = \sqrt{\frac{F_n E_r}{2 \pi r_r l}} = \sqrt{\frac{k E_r}{\pi}}, \tag{2.5}$$

avec :

$$E_r = \frac{2}{(1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2}. \tag{2.6}$$

E_1, E_2 module d'élasticité de la matière des corps 1 et 2,
E_r module d'élasticité dit résultant pour les matières 1 et 2,
ν_1, ν_2 coefficient de Poisson de la matière des corps 1 et 2.

2.2.3.1 SOLLICITATIONS STATIQUES

Sous l'effet de charges statiques, donc constantes, la pression linéaire k ou la pression superficielle p_H calculées ne doivent pas dépasser les valeurs admissibles relevées lors d'essais. La pression linéaire dépend du genre de mécanisme et des matières en contact. Le contact peut être linéique comme celui de deux cylindres à axes parallèles, ou ponctuel comme celui d'une sphère sur un autre corps. Sous l'effet de la charge appliquée entre les deux corps, la déformation des corps crée toujours une certaine surface de contact.

déformée tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, engendrés par la différence des vitesses. Ces forces de frottement de glissement, localisées sur la surface de contact déformée, modifient les conditions d'équilibre, les déformations par rapport au repos et la répartition de la pression entre les deux cylindres. Sur la surface de contact, il existe une ou plusieurs lignes lieux géométriques des points sans vitesse de glissement. En ces points, les surfaces roulent l'une sur l'autre sans glisser. Pour tous les autres points de la surface, il y a une combinaison de glissement et de roulement. De plus, les matières métalliques possèdent une certaine hystérésis élastique de sens différents lors de l'augmentation de la charge et au cours de la décharge. Ces divers phénomènes se combinent pour former ce que l'on nomme le frottement de roulement. Il est donc faux de parler de roulement pur entre deux corps réels.

2.2 PRESSION ENTRE LES CORPS

La pression entre les deux corps de révolution dépend de la géométrie des pièces, des caractéristiques mécaniques des matières et des efforts appliqués. Il existe plusieurs méthodes de contrôle de la pression sur un cylindre sollicité par la force normale $\vec{F}_n$ sur la génératrice de contact : méthodes conventionnelles et application de la théorie de l'élasticité.

2.2.1 PRESSION LINÉAIRE SUR LE CYLINDRE

Une méthode simple consiste à définir une pression linéaire faisant intervenir seulement la charge normale $\vec{F}_n$, la longueur d'appui l et le diamètre réduit des cylindres en contact d_r afin de tenir compte des divers cas de contact : cylindre sur plan, cylindre sur cylindre ou cylindre dans cylindre concave. La pression linéaire, proposée par Stribeck, est donnée par le rapport :

$$k = \frac{F_r}{l\, d_r}. \qquad (2.2)$$

Cette relation a l'avantage d'être très simple : la pression linéaire est proportionnelle à la force appliquée sur la cylindre et inversement proportionnelle à la surface projetée du cylindre sur le plan : $A_{pr} = l\, d_r$. Le symbole de cette pression conventionnelle est la lettre k afin de ne pas confondre cette grandeur avec la pression réelle p_H calculable par les relations développées par H. Hertz.

2.2.2 DIAMÈTRE ET RAYON RÉDUITS

Le cas fondamental est représenté par le contact entre un cylindre et un plan. Tous les autres cas de contact sont ramenés au cas fondamental en introduisant le diamètre ou le rayon réduit des cylindres. Les cylindres sont supposés avoir des axes parfaitement parallèles. Le rayon réduit se trouve par :

$$\frac{1}{r_r} = \frac{2}{d_r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \qquad (2.3)$$

avec :
r_r rayon réduit,
d_r diamètre réduit = 2 r_r,
r_1 rayon de courbure du premier cylindre convexe,
r_2 rayon de courbure du second cylindre :
rayon positif si le cylindre est convexe,
rayon négatif si le cylindre est concave (fig. 2.4)

2.1.3 PARAMÈTRE DE RÉSISTANCE DE ROULEMENT

Les valeurs du paramètre de résistance de roulement données dans le tableau s'appliquent à des cylindres de dimensions usuelles en construction de machines soit des diamètres compris entre 20 mm et 500 mm.

Tableau 2.1
Paramètres de résistance de roulement

Matières en contact	Paramètre e_r en mm
Acier trempé sur acier trempé Fonte grise sur acier trempé Acier doux sur acier doux	0,005 à 0,01 0,5 0,5
Fonte sur sol en bon état Pneus sur route en bon état	8 à 15 5 à 20

2.1.4 GLISSEMENT MACROSCOPIQUE DES SURFACES

L'étude des pertes par roulement dans les deux cas fondamentaux fait apparaître une réaction d'appui $\vec{F}_B$ du plan sur le cylindre décomposable selon deux points de vue diamétralement opposés : la première fois selon la normale au plan, la seconde fois selon la normale au cylindre non déformé. Essayons de donner une justification plus détaillée sur la résistance de roulement lors du déplacement d'un cylindre ou d'une sphère sur un autre corps. Adoptons un modèle composé de deux corps cylindriques en contact sur leur génératrice commune sollicités chacun par une force $\vec{F}_1$ ou $\vec{F}_2$ placée au centre et dirigée suivant la ligne des centres O_1O_2. Chaque corps isolé est soumis à l'action de deux forces directement opposées, placées sur la ligne des centres. Les réactions d'appui normales $\vec{F}_{n1}$ et $\vec{F}_{n2}$ engendrent des déformations et augmentent la surface de contact. Au repos, la déformation des deux pièces est symétrique par rapport à la ligne des centres (fig. 2.3).

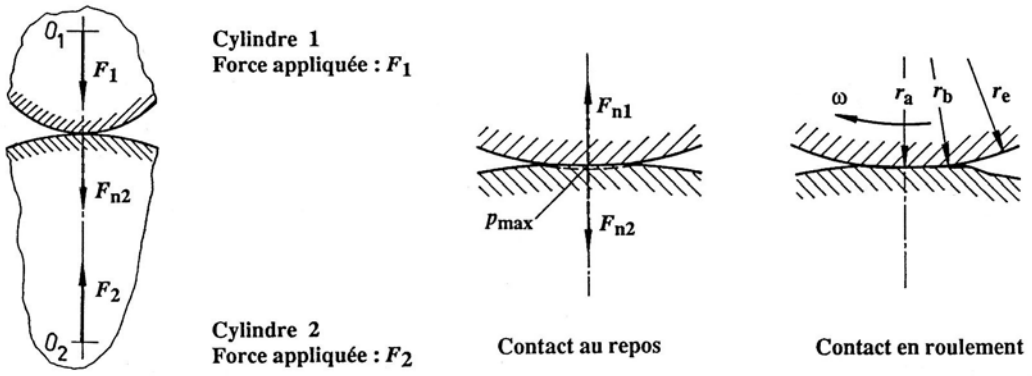


Figure 2.3 Glissement macroscopique des surfaces en roulement

Si le cylindre supérieur est déplacé sur le cylindre inférieur fixe tout en maintenant la valeur des forces normales de contact, la déformation des deux pièces devient dissymétrique. La déformation locale des cylindres modifie la distance des divers points de contact aux centres des cylindres. Comme la vitesse angulaire est une grandeur cinématique indépendante de la position du point sur le cylindre, les vitesses circonférentielles aux rayons $r_e > r_b > r_a$ sont différentes (fig. 2.3 à droite). Il se crée ainsi obligatoirement des glissements sur la surface

L'action du plan horizontal $\vec{F}_B$ peut se décomposer en deux composantes rectangulaires : une force normale $\vec{F}_n$ perpendiculaire au plan horizontal non déformé, une force de frottement d'adhérence $\vec{F}_{R'}$. La composante $\vec{F}_{R'}$ est dirigée en arrière du mouvement et la force normale $\vec{F}_n$ est décalée vers l'avant de la distance e_r par rapport à la ligne d'action de $\vec{G}$. Le moment produit par la force motrice $\vec{F}$ par rapport au plan est approximativement $r\ F$ puisque les déformations restent très faibles. Ce moment moteur équilibre le moment de roulement provoqué par le décalage de la composante normale $\vec{F}_n$:

$$M_r = e_r\, F_n. \qquad (2.1)$$

La distance e_r est nommée *paramètre de résistance de roulement*. C'est une grandeur affectée d'une unité, généralement le cm ou le mm. Remarquons l'analogie entre les relations du frottement de glissement et le frottement de roulement. La force de frottement d'adhérence $\vec{F}_{R'}$ oblige le cylindre à tourner sur lui-même. L'intensité de cette composante ne peut évidemment pas dépasser la force de frottement limite $F_{R'} \le F_{R0} = \mu_0\, F_n$, car il y aurait glissement du cylindre sur le plan. Dans le cas d'une roue libre, comme représenté sur la figure 2.1 à droite, l'équilibre de la pièce va dépendre non seulement de la réaction d'appui au point B, mais aussi de la position de la force de traction $\vec{F}$ et de la réaction de l'axe sur la roue $\vec{F}_{Bm}$. Cette force doit être placée à la distance r_f du centre de rotation pour tenir compte du frottement entre l'axe et l'alésage.

2.1.2 CYLINDRE SOLLICITÉ PAR UN COUPLE MOTEUR

Si le cylindre est soumis à l'action d'une force extérieure verticale $\vec{G}$ et d'un couple moteur M_{mot}, l'équilibre du rouleau se réduit à celui d'un corps soumis à l'action de deux forces et un couple. Les équations d'équilibre sont (fig. 2.2) :

$\Sigma Z = 0$: $\qquad F_B - G = 0;$

$\Sigma M_{Oy} = 0$: $\qquad M_{mot} - e_r\, F_B = 0.$

L'action du plan horizontal $\vec{F}_B$ sur le cylindre peut se décomposer en deux composantes rectangulaires : une force normale $\vec{F}_n$ suivant le rayon non déformé du cylindre, une composante tangentielle $\vec{F}_{R'}$. Cette force de frottement d'adhérence ne peut pas dépasser la force limite d'adhérence $F_{R'} \le F_{R0} = \mu_0\, F_n$, car le cylindre patinerait sur le plan sous l'effet du couple moteur. Dans le cas d'une roue réelle avec un couple moteur M_{mot}, la pièce est encore soumise à l'action de deux forces parallèles, le couple moteur se trouvant par :

$$M_{mot} = (r_f + e_r)\, F_B = (r_f + e_r)\, G.$$

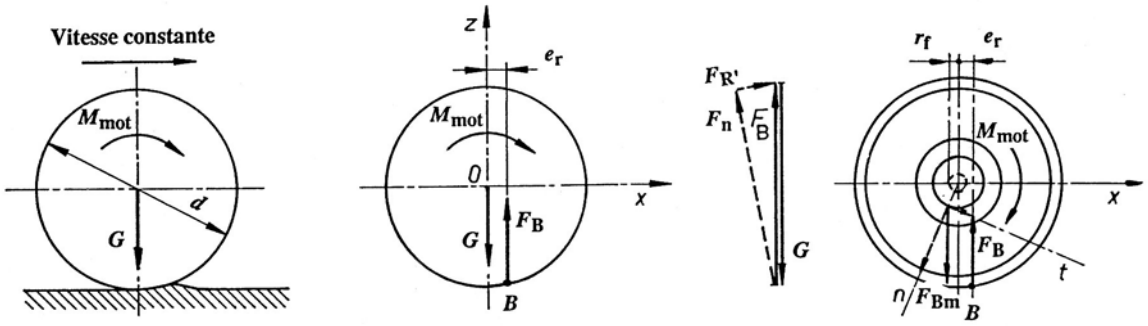


Figure 2.2 Cylindre sur plan horizontal soumis à l'action d'un couple moteur

CHAPITRE 2

FROTTEMENT DE ROULEMENT

Une seconde forme de résistance parasite est celle qui intervient dans le roulement de corps cylindriques ou sphériques sur un plan ou sur un autre corps. Un cylindre ou une sphère est en roulement sur un plan lorsque la vitesse instantanée du corps est nulle au point de contact sur l'autre corps immobile. Pour obtenir la rotation d'un cylindre sur un plan horizontal réel à vitesse du centre constante, l'expérience montre qu'il faut appliquer soit une force de traction, soit un couple moteur sur ce corps cylindrique.

Si les corps solides étaient parfaitement lisses et indéformables, la résistance au déplacement du cylindre serait nulle et le corps glisserait sur le plan horizontal. En réalité, un rouleau cylindrique lancé avec une certaine vitesse initiale sur un plan horizontal rugueux ralentit et s'arrête après un certain parcours. Ce ralentissement provient de la rugosité des surfaces, des déformations élastiques et éventuellement plastiques des corps en contact, du lubrifiant intercalé éventuellement entre le corps et le plan.

2.1 CONDITIONS D'ÉQUILIBRE AVEC ROULEMENT

Etudions deux cas particuliers fondamentaux des pertes par roulement soit un cylindre se déplaçant à vitesse constante grâce à l'action d'une force ou d'un couple moteur.

2.1.1 CYLINDRE SOLLICITÉ PAR UNE FORCE MOTRICE

Soit un cylindre homogène, chargé verticalement par une force résultante $\vec{G}$ supposée agir au centre du cylindre, placé sur un plan horizontal réel (fig. 2.1). Les déformations entre le corps et le plan ne sont plus symétriques, mais déplacées vers l'avant comme dans le cas du laminage d'une pièce épaisse ou encore comme le déplacement du rouleau à pâte de la ménagère sur la pâte à gâteau.

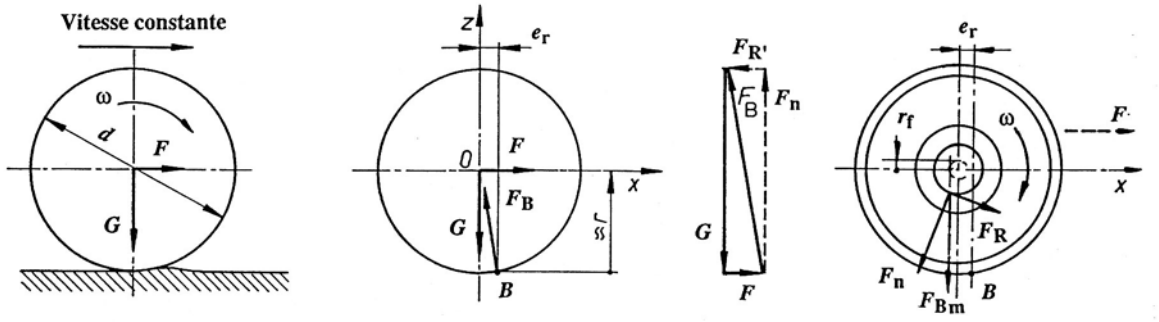


Figure 2.1 Cylindre sur un plan horizontal soumis à l'action d'une force motrice

Supposons, pour simplifier la discussion, la force de traction $\vec{F}$ passant par le centre du cylindre. Le corps en équilibre, à vitesse constante, est soumis à l'action de trois forces : la charge appliquée sur le rouleau $\vec{G}$, la force motrice horizontale $\vec{F}$ et l'action du plan horizontal $\vec{F}_B$ sur le cylindre :

$$\vec{G} + \vec{F} + \vec{F}_B = 0.$$

- Contrainte de torsion : τ_{tmax} = (11,8 + 11,8) N/mm^2 * 1,63 = 38,5 N/mm^2.

En combinant ces trois contraintes maximales et en admettant que cette combinaison corresponde à la réalité, la section entaillée n'est pas soumise à une déformation plastique, même partielle.

3.4.4.4 CONTRAINTES LIMITES ET IDÉALES

Pour Ac 50-2 : $R_{p0,2}$ = 310 N/mm^2 , R_{pt} = 190 N/mm^2 , α_{0s} = 310 / (1.73 * 190) = 0,94.
Contrainte idéale moyenne : $\sigma_{im} = [\ 7,1^2 + 3\ (0,94 * 11,8)^2]^{0,5}$ N/mm^2 = 20,5 N/mm^2.
Pour Ac 50-2 : R_{fa} = 240 N/mm^2 , R_{ta} = 140 N/mm2 , α_{0a} = 240 / (1.73 * 140) = 0,99.
Contrainte idéale en amplitude : $\sigma_{ia} = [\ (47,2+7,1)^2 + 3\ (0,99\ \ 7,1)^2\ )^{0,5}$ N/mm^2 = 55.6 N/mm^2.

Corrections du diagramme de Smith pour la flexion : R_{pf} = 370 N/mm^2,

Coefficients de correction :
- statique : d'échelle en charge statique pour D = 180 mm : c_{gs} = 0,82.
- dynamique : de surface : c_s = 0,92 , - d'échelle : c_{gd} = 0,8 - anisotropie : c_a = 1,0
- de forme de section : c_f = 1,0 .
- $R_{pf\ limite}$ = 370 N/mm^2 * 0,82 = 303 N/mm^2.
- Coefficient total : c_{tot} = 0,92 * 0,8 * 1,0 * 1,0 / 1.89 = 0,39.
- $R_{fa\ limite}$ = 240 N/mm^2 * 0,39 = 94 N/mm^2.
- Rapport de contraintes : R_c = 20,5 / (55.6 + 20.5) = 0,27.
- Contrainte supérieure : σ_{io} = 20,5 N/mm^2 + 55,6 N/mm^2 = 76,1 N/mm^2,
- Contrainte inférieure : σ_{iu} = 20,5 N/mm^2 – 55,6 N/mm^2 = - 35.1 N/mm^2,
- Contrainte limite supérieure : $\sigma_{o\ lim}$ = 130 N/mm^2 (trouvée sur le graphique à R_c = 0.27) ,
- Coefficient de sécurité : S_D = 130 N/mm^2 / 76,1 N/mm^2 = 1,70.

Le coefficient de sécurité est seulement suffisant si le taux de charge est inférieur à 0,50 !

Remarque sur les résultats du contrôle :

Sans modifier le choix de la nuance d'acier, il serait recommandé d'améliorer le raccordement entre les deux parties cylindriques aux diamètres 120 mm et 180 mm afin de diminuer l'effet d'entaille et d'obtenir un coefficient de sécurité satisfaisant pour un taux de charge supérieur à 0,50..

3.4.4.1 CONTRAINTES NOMINALES

Caractéristiques de la section :

$A = \pi\ 120^2\ mm^2/4 = 11\ 310\ mm^2$,

$Wz = \pi\ 120^3\ mm^3/32 = 169\ 646\ mm^3$,

$Wp = 2\ Wz = 339\ 292\ mm^3$.

Contraintes simples :

- compression : $\sigma_{nm} = -\ 80\ 000\ N/\ 11\ 310\ mm^2 = -\ 7{,}1\ N/mm^2$,
- $\sigma_{na} = \pm\ 80\ 000\ N/\ 11\ 310\ mm^2 = \pm\ 7{,}1\ N/mm^2$,
- flexion : $\sigma_f = \pm\ 8\ 000\ 000\ mm.N/\ 169\ 646\ mm^3 = \pm\ 47{,}2\ N/mm^2$,
- torsion : $\tau_{tm} = 4\ 000\ 000\ mm.N/\ 339\ 292\ mm^3 = 11{,}8\ N/mm^2$,

$\tau_{ta} = \pm\ 4\ 000\ 000\ mm.N/\ 339\ 292\ mm^3 = \pm\ 11{,}8\ N/mm^2$.

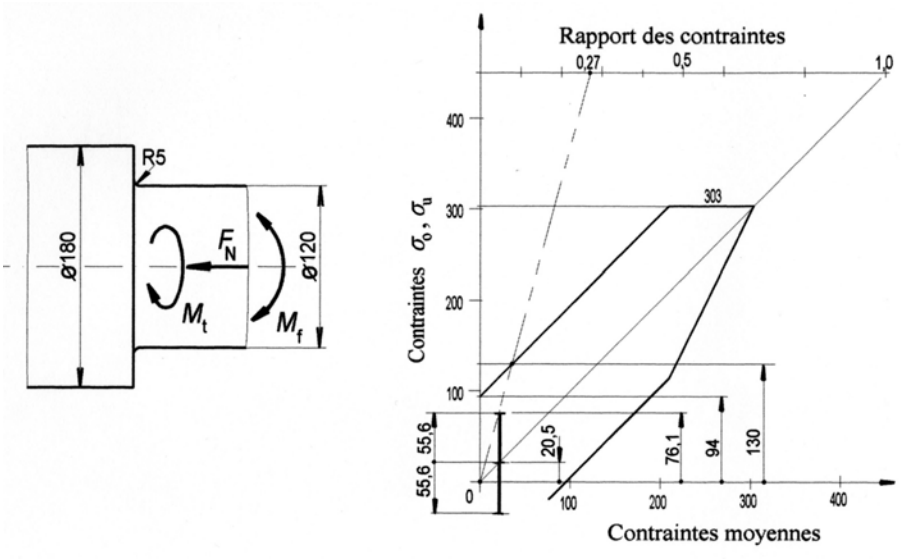


Figure 3.15 Forme de la pièce et charge sur la section
Diagramme de Smith et recherche du coefficient de sécurité

3.4.4.2 EFFET DE LA FORME

Longueur complémentaire : $\rho^* = 0{,}1$ mm,

Facteur s : torsion : $s = 1$, flexion : $s = 2{,}9$ pour $\nu = 0{,}3$.

Correction de la contrainte : $f_v = 0{,}89$ (hypothèse de von Mises).

Rayon de courbure fictif : en flexion : $\rho_F = 5\ mm + 2{,}9 * 0{,}1\ mm = 5{,}3$ mm;

en torsion : $\rho_F = 5\ mm + 1 * 0{,}1\ mm = 5{,}1$ mm.

Effet de la forme : Rapport : $d/D = 120\ mm/180\ mm = 0{,}67$;

- en flexion : $\rho_F/t = 5{,}3\ mm/30\ mm = 0{,}18$; - en torsion : $\rho_F/t = 5{,}1\ mm/30\ mm = 0{,}17$.

Coefficients de forme :

- en traction - compression : $\alpha_k = \alpha_{kn} = 2{,}48$,
- en flexion : $\alpha_{kf} = 2{,}12$, - en torsion : $\alpha_{kt} = 1{,}63$.

Coefficients d'effet d'entaille :

- en compression : $\beta_{kn} = 0{,}89 * 2{,}48 = 2{,}21$.
- en flexion : $\beta_{kf} = 0{,}89 * 2{,}12 = 1.89$; - en torsion : $\beta_{kt} = 0{,}89 * 1{,}63 = 1{,}45$.

3.4.4.3 CONTRAINTES MOYENNES MAXIMALES

Les contraintes nominales étant connues et les coefficients de forme trouvés, calculons les contraintes maximales normales et tangentielles :

- Contrainte de traction : $\sigma_{n\ max} = -\ (7{,}1 + 7{,}1)\ N/mm^2 * 2{,}48 = -35{,}2\ N/mm^2$.
- Contrainte de flexion : $\sigma_{f\ max} = \pm\ 47{,}2\ N/mm2 * 2{,}12 = \pm\ 100{,}2\ N/mm^2$.

effectuées actuellement sur la comportement d'éprouvettes sollicitées par des contraintes composées et déphasées. Nous voulons donner ici une méthode simple de contrôle valable pour un état de contrainte se composant des contraintes σ et τ.

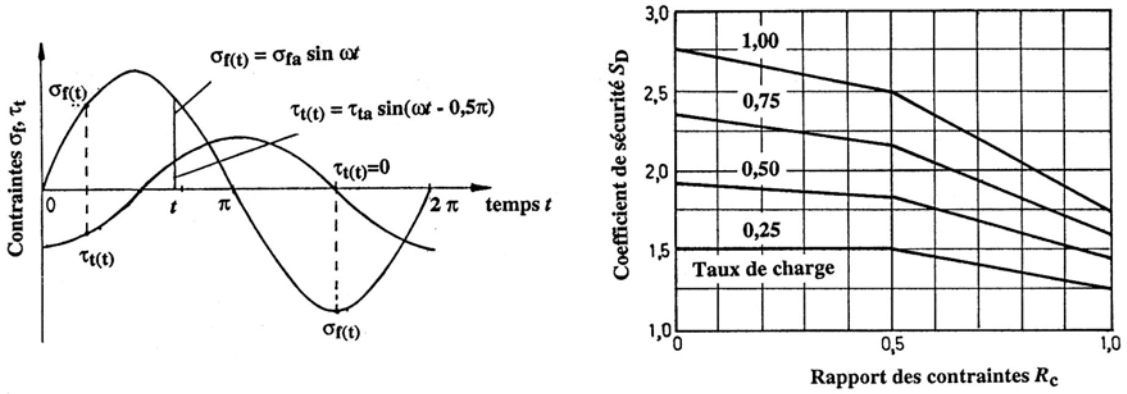


Figure 3.14 Variation des contraintes de flexion et de torsion avec déphasage en fonction du temps
Coefficient de sécurité en charge dynamique S_D en fonction de R_c, du taux de charge

1. *Charge statique* : Etat de contrainte σ et τ : Recherche de la contrainte idéale σ_i selon l'exposé du paragraphe 1.6.1.3 et relations (3.5.1) et (3.5.2).
2. *Charge dynamique* :
   Recherche de la contrainte moyenne résultante à partir de σ_m et τ_m par une relation semblable à celle de la charge statique :

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_m^2 + 3(\alpha_{0s}\,\tau_m)^2}. \qquad (3.19.1)$$

   avec : $\alpha_{0s} = R_p / [(3)^{0,5}\, R_{pt}]$.
   Recherche de l'amplitude de la contrainte idéale à partir de σ_a et τ_a :

$$\sigma_{ia} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3(\alpha_{0a}\,\tau_a)^2}. \qquad (3.19.2)$$

   avec : $\alpha_{0a} = R_a / [(3)^{0,5}\, R_{ta}]$.

La contrainte normale est soit une contrainte σ_n, soit plus souvent une contrainte de flexion σ_f . L'état de contrainte est reporté sur le diagramme de Smith modifié, le plus souvent le diagramme de flexion. La recherche du coefficient de sécurité s'effectue alors selon la figure 3.12.

3.4.4 EXEMPLE DE CONTRÔLE DE LA SÉCURITÉ

Soit un arbre de machine, en acier Ac 50-2, sollicité par les efforts simultanés suivants dans la section de contrôle, diamètre d =120 mm , épaulement D = 180 mm, rayon de raccordement R = 5 mm, état de la surface N6 :

1. Force axiale compressive : F_N = - 80 kN ± 80 kN (force normale compressive et pulsante),
2. Effort tranchant : F_T (négligé),
3. Moment fléchissant : M_f = ± 8 000 m·N,
4. Moment de torsion : M_t = 4 000 m·N ± 4 000 m·N (couple pulsant),
5. Température de la pièce : 0°C < ϑ < 100°C, facteurs de température = 1,00.

- connaissant l'état de contrainte à rapport constant, tracer un rayon issu de l'origine du diagramme de Smith, jusqu'à la valeur de R_c représentée à une échelle convenable dans la partie supérieure de la figure.
- trouver la contrainte supérieure limite $\sigma_{o\ lim}$ au point de coupure de ce rayon avec la limite supérieure du diagramme.
- calculer le coefficient de sécurité dynamique par le quotient :

En traction simple : $$S_D = \frac{\sigma_{0\,lim}}{\sigma_0}. \qquad (3.18.1)$$

En flexion : $$S_D = \frac{\sigma_{f0\,lim}}{\sigma_{f0}}. \qquad (3.18.2)$$

En torsion : $$S_D = \frac{\tau_{t0\,lim}}{\tau_{t0}}. \qquad (3.18.3)$$

4. Cas général : Contrainte variable dans le domaine compris entre la contrainte inférieure σ_u et la contrainte supérieure σ_0 . L'historique complet de la variation de la contrainte en fonction du temps devrait être connue de manière à définir un coefficient de sécurité. Le coefficient peut se trouver en supposant, en première approximation, une variation selon la discussion du point 3 . Pour résoudre le problème général des charges variables, il faudrait introduire les notions d'accumulation des risques de détérioration et la probabilité de rupture.

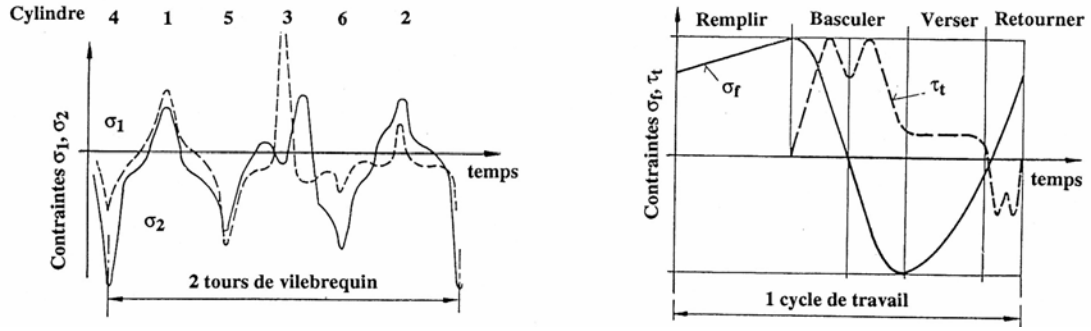


Figure 3.13 Contraintes multiples : c'est souvent une combinaison de contraintes de flexion et torsion
À gauche : contraintes principales dans un vilebrequin d'un moteur à 6 cylindres
À droite : variation des contraintes de flexion et torsion dans un arbre de convertisseur

5. Valeur du coefficient de sécurité en charge dynamique : Le coefficient de sécurité S_D va dépendre des contraintes calculées, du rapport des contraintes : $R_c = |\sigma_m|/|\sigma_{o,u}|$ et du taux de charge. Il est représenté sur la figure 3.14 à droite.

Le coefficient de sécurité sera d'autant plus élevé que la charge réelle sur la pièce s'éloigne de l'allure idéale admise dans la discussion : seulement une contrainte simple, à valeurs moyenne et à amplitude constantes, variant harmoniquement en fonction du temps.

3.4.3.3 SÉCURITÉS EN CHARGE DYNAMIQUE MULTIPLE

L'état de charge dynamique avec des contraintes normales et tangentielles dans la section de contrôle est le cas général. La figure 3.13 montre à gauche la variation des contraintes principales dans la section plane du maneton d'un moteur à 6 cylindres, à droite la variation des contraintes de flexion et torsion dans l'arbre supportant un convertisseur Thomas. Ces figures montrent que les contraintes composantes sont déphasées. De nombreuses recherches sont

1. limite des contraintes "statiques" R_p, R_{pf}, R_{pt} :
   en traction - compression : $R_{p\,lim} = c_g\, c_{\vartheta s}\, R_p$,
   en flexion : $R_{pf\,lim} = c_g\, c_{\vartheta s}\, R_{pf}$ en torsion : $R_{pt\,lim} = c_g\, c_{\vartheta s}\, R_{pt}$.

2. limite des amplitudes de contrainte R_a, R_{fa}, R_{ta} :
   - calcul du facteur de correction total, les valeurs pouvant dépendre du type de contrainte selon texte précédent :
   $c_{tot} = c_s\, c_{gd}\, c_a\, c_f / \beta_k$,
   en traction - compression : $R_{a\,lim} = c_{tot}\, R_a$
   en flexion : $R_{fa\,lim} = c_{tot}\, R_{fa}$ en torsion : $R_{ta\,lim} = c_{tot}\, R_{ta}$.

La limite des contraintes statiques se concrétise par un abaissement du segment horizontal et la limite des amplitudes par une diminution de la valeur alternée sur l'axe des contraintes supérieure σ_o et inférieure σ_u . Sur la figure, le pourtour de la surface hachurée représente un coefficient de sécurité en charge dynamique simple $S_D = 1{,}0$.

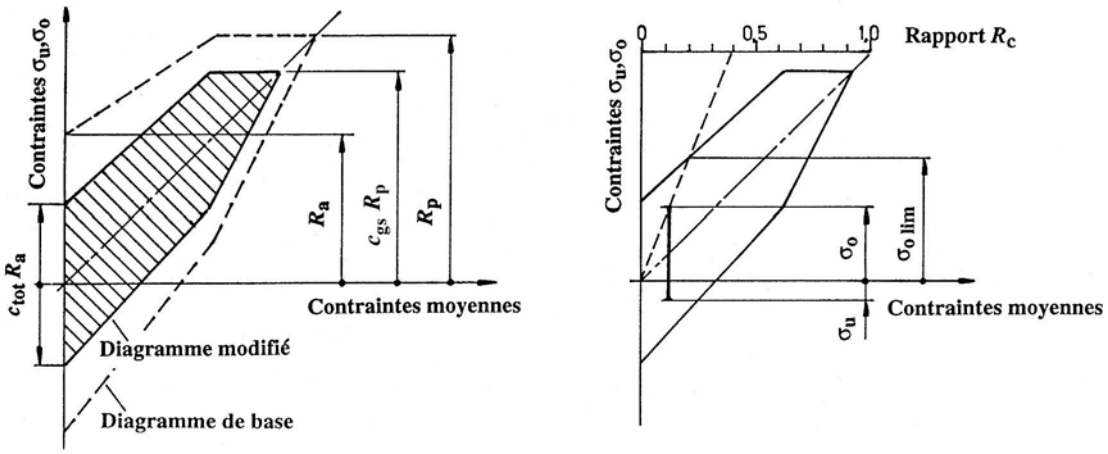


Figure 3.12 Modification de l'étendue du diagramme de Smith en traction - compression
Recherche du coefficient de sécurité dynamique à rapport des contraintes constant

La variation temporelle de la contrainte simple dans la section contrôlée peut prendre plusieurs allures dont les caractéristiques principales, citées pour le cas particulier des contraintes normales, sont :

1. Contrainte moyenne σ_m constante et amplitude de la contrainte σ_a variable :
   A contrainte moyenne constante et augmentation de l'amplitude de la partie variable, les risques de destruction sont d'autant plus grands que la contrainte supérieure s'approche de la ligne limite sur le diagramme de Smith.
2. Contrainte inférieure σ_u constante et amplitude de la contrainte σ_a variable :
   La somme de la contrainte inférieure et du double de l'amplitude ne peut pas dépasser la ligne supérieure du diagramme de Smith modifié.
3. Rapport des contraintes R_c constant :
   La contrainte supérieure, quelle que soit sa valeur dans le domaine des contraintes admissibles, suit une droite issue de l'origine du diagramme de Smith. Il est possible d'exprimer le coefficient de sécurité en charge dynamique S_D par les considérations suivantes, voir fig. 3.12 à droite :

3.4.3 SÉCURITÉS EN RÉSISTANCE

La notion de sécurité, définie à partir de l'état de contrainte dans la pièce, se trouve en comparant les niveaux existants aux valeurs limites. Ces sécurités sont tout d'abord données pour des états de contrainte simple et ensuite étendues aux états à contraintes multiples.

3.4.3.1 SÉCURITÉS EN CHARGE STATIQUE SIMPLE

Il faut distinguer les matériaux ductiles, c'est-à-dire possédant un allongement de rupture plus grand que quelques %, avec limite apparente ou conventionnelle d'élasticité $R_{p0,2}$ bien marquée, des matériaux fragiles se cassant presque sans striction. Pour la première catégorie, nous admettons que la contrainte maximale peut atteindre cette limite dans les parties entaillées et provoquer éventuellement une plastification partielle de la section. Les coefficients de sécurité S_S se calculent de la manière suivante, les valeurs admissibles minimales du coefficient $S_{S\,adm}$ étant valables pour un taux de charge de 25 % :

1. *Matériaux ductiles* :

$$S_S = c_g\, c_{\vartheta s}\, R_p / (\alpha_k\, \sigma_{n\,nominal}) ,$$

Pièces non entaillées

$$S_S = c_g\, c_{\vartheta s}\, R_{pf} / (\alpha_k\, \sigma_{f\,nominal}) , \qquad \text{avec } S_{S\,adm} \geq 1{,}25 \text{ à } 2{,}0$$

$$S_S = c_g\, c_{\vartheta s}\, R_{pt} / (\alpha_k\, \tau_{t\,nominal}) . \qquad (3.17.1)$$

2. *Matériaux fragiles* :

$$S_S = R_m / (\alpha_k\, \sigma_{n\,nominal}) ,$$

$$S_S = R_{mf} / (\alpha_{kf}\, \sigma_{f\,nominal}) , \qquad \text{avec } S_{S\,adm} \geq 2{,}0 \text{ à } 4{,}0$$

$$S_S = R_{mt} / (\alpha_{kt}\, \tau_{t\,nominal}) . \qquad (3.17.2)$$

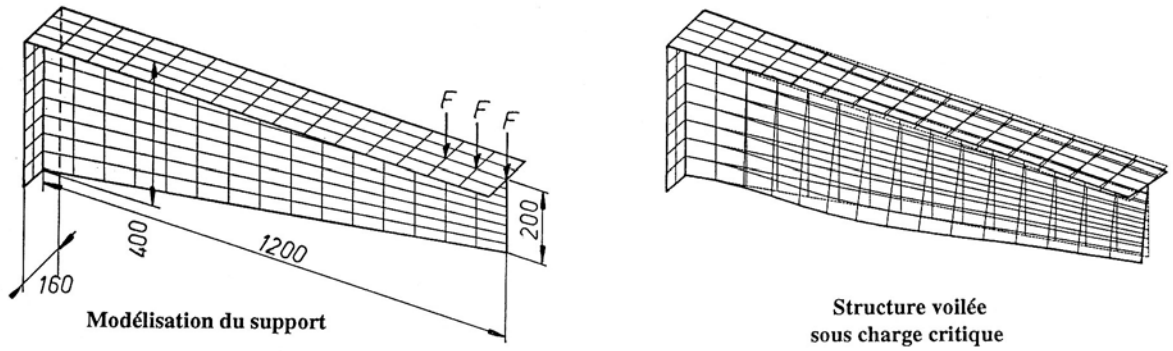


Figure 3.11 Exemple de stabilité d'une pièce : Support en porte-à-faux avec voilement : ici $S_{cr} = 5{,}2$

3. *Déformation et stabilité* :
   - déformations admissibles : elles ne doivent pas mettre en danger les fonctions de la pièce;
   - stabilité : la charge doit rester nettement inférieure à la charge critique, le rapport entre la charge critique et la charge réelle devant être : $S_{cr} \geq 2{,}5$ à $5{,}0$.

3.4.3.2 SÉCURITÉS EN CHARGE DYNAMIQUE SIMPLE

Dans le cas de contraintes dynamiques simples, l'état de contrainte doit se situer dans la zone admissible sur le diagramme modifié de Smith, valable pour la section contrôlée, compte tenu des diverses corrections proposées précédemment. Pour les pièces en acier travaillant aux températures inférieures à 100°C, les modifications à apporter sont les suivantes, fig. 3.12 à gauche :

3.4.2.3 EFFET DE L'ANISOTROPIE

La résistance dépendant de la direction des contraintes, en particulier dans les pièces laminées ou forgées, porte le nom d'anisotropie. La résistance perpendiculaire aux "fibres" est plus basse que dans le sens de laminage ou de formage. Il est possible de tenir compte de cette diminution au moyen du facteur d'anisotropie c_a , rapport entre la résistance dans le sens perpendiculaire (|) à celle dans le sens de fabrication (‖) :

1. en traction ou compression : $c_a = R_{p(\perp)} / R_{p(\parallel)}$, (3.16.1)
2. en flexion : $c_a = R_{Pf(\perp)} / R_{pf(\parallel)}$. (3.16.2)

Ce coefficient s'introduit seulement en traction - compression, en flexion, lorsque les contraintes normales sont perpendiculaires au sens du formage. Il dépend partiellement de la présence d'une entaille et du rapport des contraintes.

Tableau 3.2
Coefficients d'anisotropie c_a et de forme de section c_f

Paramètres	$0 \leq R_C \leq 0,5$		$0,5 \leq R_C \leq 1,0$	
R_C et β_k	$\beta_k = 1$	$\beta_k > 1$	$\beta_k = 1$	$\beta_k > 1$
R_m en N/mm²	**Coefficient c_a**			
< 600	0,85	0,84	0,90	0,96
600 à 900	0,83	0,82	0,87	0,94
900 à 1200	0,80	0,80	0,85	0,92
> 1200	0,75	0,80	0,83	0,90
Type de charge	Flexion Simple	Flexion Rotative	Traction Compression	Torsion
Forme de section	**Coefficient c_f**			
Circulaire	0,90	1,0	1,0	1,0
Carrée	1,00	0,8 à 0,9	0,9 à 1,0	0,8 à 0,9
Rectangulaire	1,00	0,8 à 0,9	0,9 à 1,0	0,8 à 0,9
Δ équilatérale	0,90	0,9	0,9	0,8
Rhombique	0,90	1,0	1,0	0,9

3.4.2.4 EFFET DE LA FORME DE LA SECTION

Les valeurs de résistance de base données dans les tables sont valables pour des pièces à section cylindrique. L'expérience montre que les autres sections sont moins résistantes à composition physico-chimiques identiques et procédés de fabrication analogues. Cette diminution dépend de la forme de la section et du type de sollicitation. Elle peut s'exprimer au moyen d'un facteur de forme de section $c_f \leq 1,0$, le tableau 3.2 donnant les valeurs moyennes.

3.4.2 CORRECTIONS DES DIAGRAMMES DE RÉSISTANCE

Les diagrammes de résistance sont applicables seulement aux pièces ayant exactement la forme et les dimensions des éprouvettes. Comme cette forme n'est pratiquement jamais utilisée, il est nécessaire d'apporter diverses corrections sur les diagrammes de Smith.

3.4.2.1 EFFET DE L'ÉTAT DE SURFACE

Toute pièce à surface non polie possède une résistance amoindrie. La diminution dépend de l'état de surface, de N12 à N3, et de la nuance d'acier exprimée par sa résistance statique à la traction R_m . La fig. 3.10 à gauche donne le facteur de rugosité c_s en fonction de ces deux paramètres

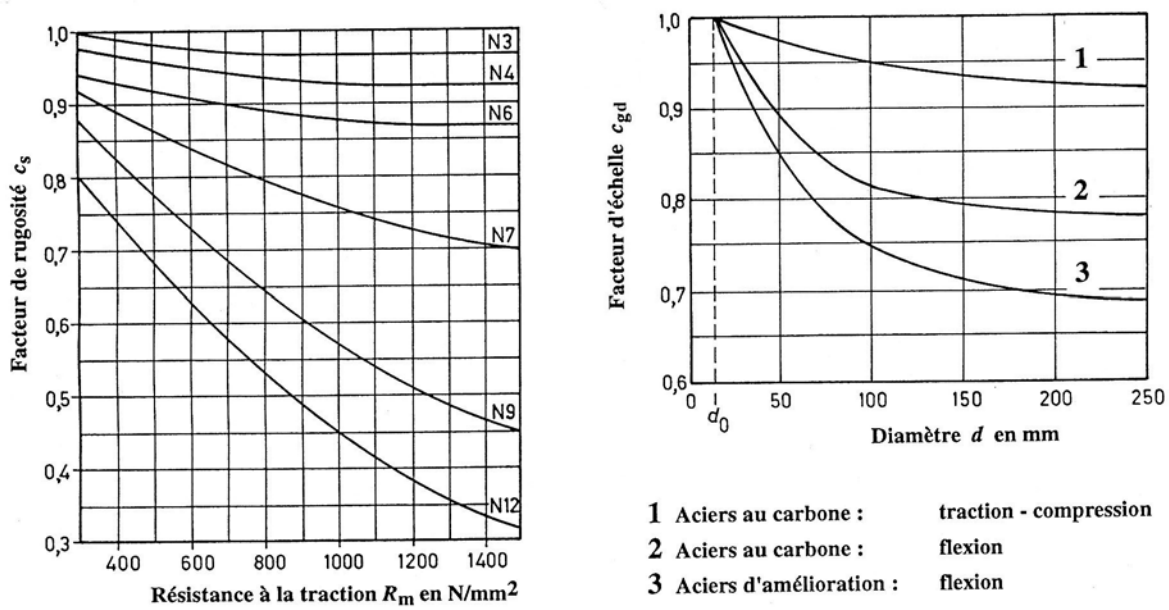


Figure 3.10 Facteur de rugosité c_S , Facteur d'échelle c_{gd}

3.4.2.2 FACTEUR D'ECHELLE

Les mesures de déformations en fonction de la résistance statique ou de la durée de vie sur des pièces réelles montrent une diminution de performances avec l'augmentation des dimensions. Cette particularité provient de la structure cristalline réelle des matériaux engendrée par les procédés technologiques de fabrication. Le facteur d'échelle en charge dynamique c_{gd} se définit comme le rapport de la contrainte limite dans la pièce de dimension d à la contrainte limite relevée sur éprouvette de dimension d_0 :

1. contraintes normales : $c_{gd} = \sigma_{lim(d)} / \sigma_{lim(d0)} <= 1{,}0$. (3.15.1)
2. contraintes tangentielles : $c_{gd} = \tau_{lim(d)} / \tau_{lim(d0)} <= 1.0$. (3.15.2)

Ce c_{gd} coefficient peut se lire sur la figure 3.10 à droite en fonction de la dimension d et de la nuance d'acier, du type de charge, d_0 représentant le diamètre nominal de référence des éprouvettes (7,5 à 12,7 mm).

3.4.1 TAUX DE CHARGE

Le contrôle complet des éléments de machines doit tenir compte non seulement de la charge maximale, mais de la variation de son amplitude en fonction du temps. Dans la plupart des cas, une machine ou un appareil, conçu pour une charge ou une puissance donnée, ne fournit ou n'absorbe pas continuellement la puissance maximale ou n'est pas sollicitée par la charge maximale. Il peut même arriver que cette machine ne soit jamais utilisée à sa valeur nominale.

3.4.1.1 CHARGE EN FONCTION DU TEMPS

Pour établir les conditions de charge en fonction du temps, il faut connaître non seulement le type de machine, mais aussi son évolution pendant sa durée de vie. Cette caractéristique fondamentale n'est pas toujours donnée avec précision car la mesure des sollicitations des éléments de machines n'est pas courante. Supposons qu'il soit possible d'obtenir un relevé détaillé de la charge de la machine en fonction du temps. Le temps total d'observation sera égalé à 100 % et la charge nominale prévue dans les spécifications sera représentée aussi par 100 %. La charge relative en fonction de la durée relative d'utilisation de la machine sera représentée graphiquement, voir fig. 3.9 à gauche.

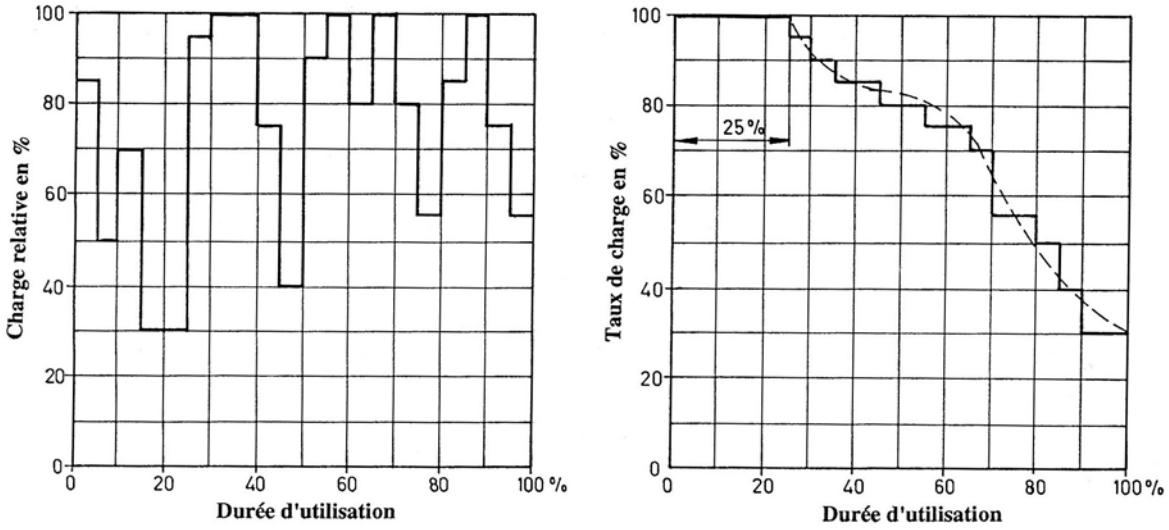


Figure 3.9 Charge relative et taux de charge en fonction de la durée d'utilisation relative

3.4.1.2 TAUX DE CHARGE

Sur une deuxième représentation, issue de la première, il faut réorganiser la construction en portant le taux de charge relatif cumulé en fonction de la durée d'utilisation relative. Le temps relatif total sera donné par 100 % et le taux de charge relatif maximal par 100 % également. Additionner tous les temps relatifs pour lesquels la charge relative dans le premier diagramme vaut 100 % et porter cette somme en abscisses sur le deuxième graphique. Dessiner un trait horizontal de cette longueur à l'ordonnée 100 %. Continuer la construction en additionnant les temps des charges relatives par incrément de -5 %, soit à 95 %, 90 %, 85 %, etc. jusqu'à 5 % et finalement 0 %. Le taux de charge est le rapport du temps pendant lequel la machine travaille sous la charge maximale, soit 100 %, au temps total d'utilisation. Cette caractéristique peut s'introduire dans le choix du coefficient de sécurité à prévoir pour la machine ou pour un des éléments composants.

3.3 repérer sur l'axe vertical les contraintes alternées $+R_a$ et $-R_a$,
3.4 relier les deux contraintes R_a avec le point (1,5 R_m , 1,5 R_m) ,
3.5 limiter le diagramme par une horizontale à la contrainte limite élastique $R_{p0,2}$,
3.6 repérer le point d'intersection de cette horizontale avec la ligne oblique supérieure,
3.7 porter une composante alternée égale de chaque côté de la ligne à 45°.

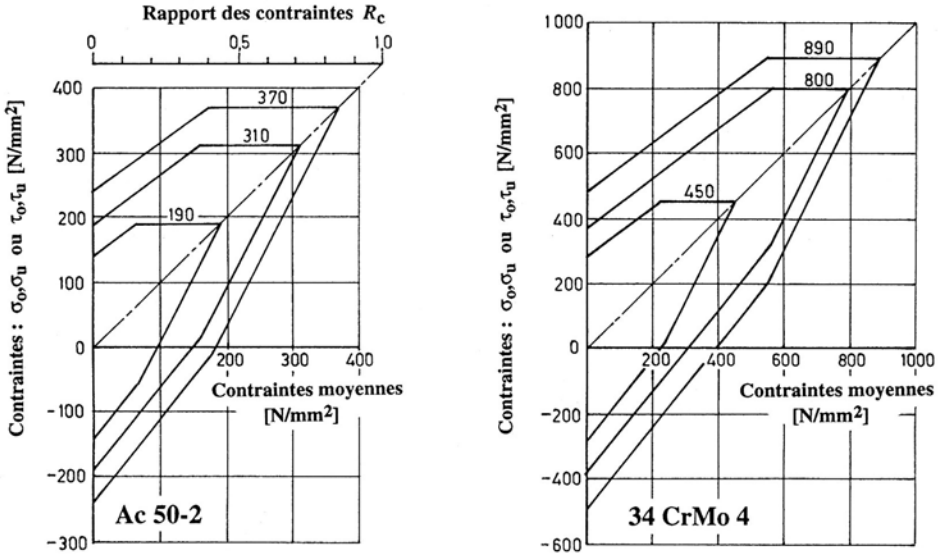


Figure 3.8 Diagrammes de Smith pour des aciers de construction de machines
Ac 50-2 : R_p = 310 N/mm2, R_{pf} = 370 N/mm2, R_{pt} = 190 N/mm2
34 CrMo 4 : R_p = 800 N/mm2, R_{pf} = 890 N/mm2, R_{pt} = 450 N/mm2

Plusieurs méthodes ont été proposées pour effectuer ce tracé. La construction décrite ici donne de bons résultats pour les aciers au carbone et faiblement alliés. Elle est répétée pour les contraintes de flexion et de torsion. Il est admis que les aciers possèdent les mêmes résistances en contraintes moyennes positives et négatives de sorte que le diagramme est dessiné seulement pour des contraintes moyennes positives. Pour les fontes grises et les fontes à graphite sphéroïdal, le comportement dans le domaine des contraintes moyennes négatives est fortement différent de celui dans le domaine des contraintes moyennes positives; le diagramme de Smith doit se tracer alors entièrement.

3.4 SÉCURITÉS

Il existe principalement deux méthodes pour trouver la sécurité en résistance des matériaux : la première fait intervenir la notion de coefficient de sécurité, rapport entre la valeur limite et la valeur réelle dans la partie contrôlée, la seconde méthode comparant la valeur réelle à la valeur admissible.

3.3.3 VALEUR DE RÉSISTANCE DES ACIERS

Le tableau 3.1 donne les résistances statiques en dynamiques des principaux aciers utilisés dans la conception des machines. Les symboles de résistance ont été partiellement simplifiés par rapport aux normes en vigueur ou étendus aux résistances dynamiques. L'indice **p** est utilisé pour la résistance à la limite conventionnelle d'élasticité, l'indice **a** pour l'amplitude de la résistance alternée, l'indice **f** pour la flexion et l'indice **t** pour la torsion.

3.3.4 DIAGRAMMES DE RÉSISTANCE DYNAMIQUE

La construction des divers diagrammes de durée de vie en fonction du type de contrainte et de la valeur de la contrainte alternée limite supportée par l'éprouvette se laisse condenser sur un diagramme unique valable pour la nuance de matière étudiée. Ces graphiques se dessinent à partir de résultats d'essais de durée ou par interpolation et extrapolation de résultats partiels ou comparaison avec des matériaux à comportement similaire. Ce cours utilise la représentation selon Smith très prisée en conception de machines.

La représentation selon Smith facilite le contrôle des coefficients de sécurité dans une pièce de forme déterminée sollicitée par des charges variables. Elle peut contenir tous les cas de contrainte : traction - compression, flexion et torsion, pour des rapports de contrainte R_c allant de -1,0 à +1,0. Ce diagramme se construit, pour chacun des types de contrainte, de la manière suivante:

1. *sur l'axe horizontal* : la contrainte moyenne :
   traction - compression : $\sigma_m = 0{,}5\ (\sigma_u + \sigma_o)$,
   flexion : $\sigma_{fm} = 0{,}5\ (\sigma_{fu} + \sigma_{fo})$,
   torsion : $\tau_{tm} = 0{,}5\ (\tau_{tu} + \tau_{to})$.
2. *sur l'axe vertical* : les contraintes limites supérieure et inférieure :
   traction - compression : inférieure σ_u , supérieure σ_o ,
   flexion : inférieure σ_{fu} , supérieure σ_{fo} ,
   torsion : inférieure τ_{tu} , supérieure τ_{to} .

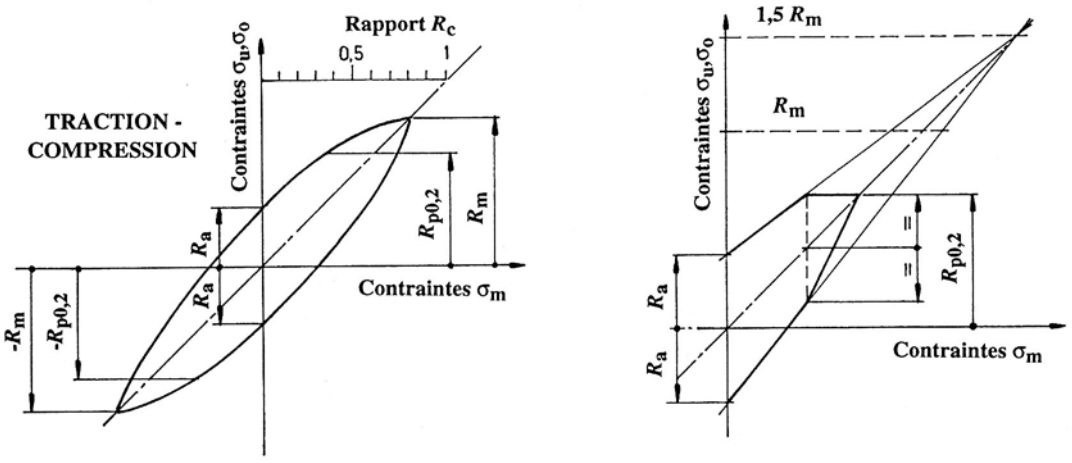


Figure 3.7 Diagramme de Smith : Contraintes limites en traction - compression
Construction fondamentale du diagramme de Smith

3. *construction proprement dite* : (diagramme traction - compression)
   3.1 dessiner la ligne des contraintes statiques à 45° ,
   3.2 repérer sur l'axe vertical les contraintes R_m et 1,5 R_m ,

Tableau 3.1

Résistances statiques et dynamiques des aciers

Désignation VSM ou DIN	Résistance en N/mm²								
	Statique			Limite élastique			Alternée		
	R_m	R_{mt}	A_5	R_e.R_p	R_{pf}	R_{pt}	R_a	R_{fa}	R_{ta}
	Aciers de construction au carbone								
Ac 34-2	340	200	30	220	240	130	130	160	90
Ac 37-2	370	220	25	240	260	150	140	180	100
Ac 42-2	420	250	24	260	320	170	160	200	120
Ac 50-2	500	300	22	310	370	190	190	240	140
Ac 60-2	600	360	17	360	430	220	210	280	160
Ac 70-2	700	420	12	420	500	260	240	330	200
	Aciers de cémentation								
C 10	380	230	30	210	340	150	200	210	150
C 15	420	250	28	230	360	160	190	210	150
15 Cr 3	600	360		400	560	240	300	350	220
16 MnCr 5	800	480		600	750	360	340	400	250
15 CrNi 6	900	540		650	810	410	380	440	290
20 MoCr 5	900			700	850	440	400	460	290
20 MnCr 5	1000	600		700	900	420	420	480	300
18 CrNi 8	1200	720		800	1100	470	470	550	330
	Aciers d'amélioration								
C 35	650	390	22	420	540	270	250	310	180
C 45	750	450	18	480	620	310	300	370	210
C 60	850	510	14	570	700	390	330	410	250
30 Mn 5	850	540	14	600	710	400	340	420	250
25 CrMo 4	900	540	14	650	810	410	380	440	290
34 Cr 4	1000	600	12	800	890	450	380	490	280
34 CrMo 4	1000	600	12	800	890	450	380	490	280
37 MnV 7	1000	600	12	800	890	450	380	490	280
42 CrMo 4	1100	660	11	900	980	500	420	520	310
36 CrNiMo 4	1100	660	11	900	980	500	420	520	310
34 CrNiMo 6	1100	660	16	900	1000	500	460	530	350
50 CrV 4	1100	660	16	900	1000	500	460	530	350
30 CrMoV 9	1250	750	12	1050	1120	570	480	560	370
30 CrNiMo 8	1250	750	12	1050	1120	570	480	560	370
	Aciers au carbone de moulage								
GS 50	400	240	25	200	270	120	160	160	90
GS 52	520	300	18	260	330	150	200	200	110
GS 60	600	360	15	300	440	180	240	240	140

Symboles utilisés :

R_m Résistance à la traction
R_{mt} Résistance à la torsion
A_5 Allongement après rupture (%)
R_p Limite d'élasticité en traction
R_{pf} Limite d'élasticité en flexion
R_{pt} Limite d'élasticité en torsion
R_a Amplitude en traction
R_{fa} Amplitude en flexion
R_{ta} Amplitude en torsion

Remarques : les résistances statiques et dynamiques sont données pour des éprouvettes, diamètres environ 10 mm à 15 mm.

Les valeurs proposées dans ce tableau diffèrent ce celles de la recommandation FKM datant de 2003.

2. la résistance aux sollicitations dynamiques ne peut pas se comparer aux caractéristiques statiques comme par exemple la résistance de rupture en traction R_m.
3. la qualité de l'état de surface peut avoir une influence prépondérante dans la résistance aux charges dynamiques d'une pièce. L'influence est moins marquée pour les aciers ordinaires de construction que pour les aciers à haute résistance statique. La résistance est fortement amoindrie lorsque la pièce est en contact avec des agents corrosifs comme l'eau de mer ou même l'eau douce.
4. L'amplitude admissible de la contrainte variable diminue s'il s'ajoute une contrainte statique moyenne différente de zéro. Elle dépend également de la dimension nominale.
5. La fonte grise à texture grossière résiste relativement bien aux sollicitations dynamiques indépendamment de l'état de surface par suite d'une hétérogénéité interne très prononcée. Elle est sensible par contre aux entailles internes engendrées par la présence du graphite.
6. La résistance aux contraintes dynamiques dépend également de la dimension transversale de la pièce : plus la dimension est grande, plus la résistance diminue.

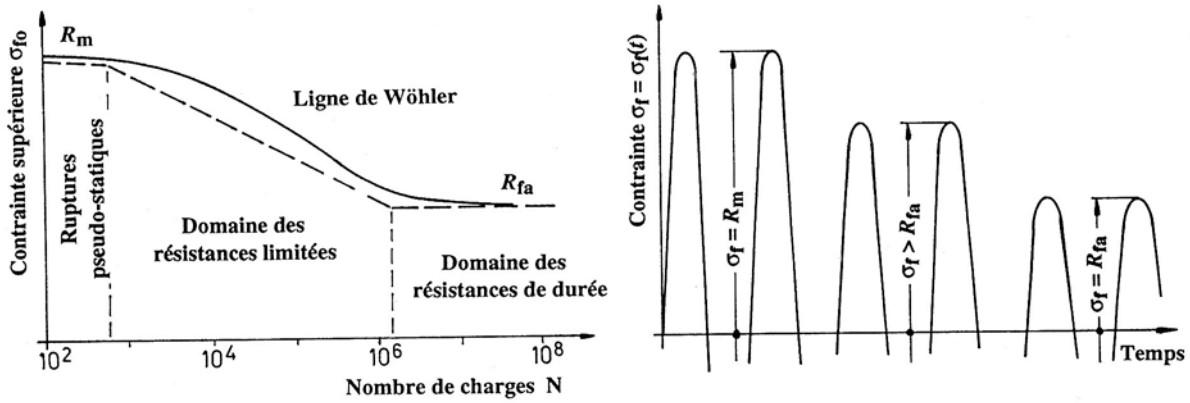


Figure 3.6 Diagramme de Wöhler et variation des contraintes lors des essais

Les essais dynamiques s'effectuent si possible sous charge variant harmoniquement en fonction du temps. Pour obtenir des résultats exploitables, il est nécessaire d'obtenir cinq à six points de mesure par point retenu et d'exploiter statistiquement les résultats. Les essais s'effectuent à amplitude de contrainte dynamique constante ou à contrainte inférieure constante. Les résultats sont condensés sur des graphiques dont le plus courant est celui proposé par Wöhler :

- en abscisses : le nombre de charges supportées à l'échelle logarithmique,
- en ordonnées : les contraintes variables supportées par les éprouvettes.

Les courbes obtenues partent de la contrainte de rupture du matériau et montrent une diminution de l'amplitude de la contrainte en fonction du nombre de charges et également de la contrainte moyenne. Le nombre de charges nécessaire pour atteindre la branche horizontale sur le diagramme de Wöhler dépend du matériau et de la forme de l'éprouvette :

- aciers avec éprouvette lisse : $(2 \text{ à } 5) \cdot 10^6$ charges,
- aciers avec éprouvette entaillée : 10^7 à 10^8 charges,
- cuivre et alliages de cuivre : $5 \cdot 10^7$ charges,
- métaux légers : $(1 \text{ à } 5) \cdot 10^7$ charges,
- hauts polymères : $8 \cdot 10^7$ charges.

Le dépassement de la courbe de résistance sous charge variable amène une destruction de la pièce à plus ou moins brève échéance.

10 mm. Les mesures de la charge et des déformations permettent de définir dans l'essai de traction :

1. la contrainte de rupture : R_m
2. la contrainte limite élastique (difficile !) : R_e
3. la contrainte limite apparente d'élasticité : $R_{p0,2}$
4. l'allongement de rupture : $l_{mesure}/d = 5$ A_5
5. le module d'élasticité : E

La limite élastique R_e ne peut se mesurer que sur les éprouvettes avec diminution de la charge axiale. Des valeurs analogues peuvent se relever dans les essais de flexion et de torsion. Pour les matériaux métalliques et sans valeurs particulières à disposition de l'utilisateur, il est possible de donner approximativement la contrainte de rupture en fonction de la dureté Brinell :

Aciers au carbone :	R_m /HB = 0,36;
Aciers au Cr Ni :	R_m /HB = 0,34;
Fonte grise :	R_m /HB = 0,10;
Alliages AlCuMg :	R_m /HB = 0,35;
Fontes d'aluminium	R_m /HB = 0,26.

La résistance statique des matériaux pour une pièce de dimensions données dépend également de sa grandeur. Elle diminue avec l'augmentation de grandeur. Pour les aciers ordinaires non alliés, le facteur d'échelle c_{gs} défini par rapport à $R_{p0,2}$ selon recommandation FKM est :

- $d < 40$ mm : $c_{gs} = 1,0$.
- 40 mm $\leq d \leq$ 250 mm : $c_{gs} = [1- 0,100 \ln(d_{\{mm\}}/7,5]/[1-0,100 \ln(40/7,5)]$.
- $d > 250$ mm : $c_{gs} = 0,78$.

L'effet de la température peut s'introduire au moyen d'un facteur de correction $c_{\vartheta s}$. Pour les aciers ordinaires non alliés et pour courte durée de sollicitation, ce facteur vaut :

Pour $0 \leq \vartheta \leq 100$ °C : $c_{\vartheta s} = 1,00$.

Pour $100 < \vartheta < 500$°C : $c_{\vartheta s} = 1,0 - 1,7 \cdot 10^{-3} (\vartheta_{\{°C\}}-100\}$.

3.3.2 RÉSISTANCE DYNAMIQUE DES MATÉRIAUX

Sous l'action de contraintes variables dans le temps, les matériaux métalliques se rompent par dislocation de la structure cristalline. Les pièces rompues ne présentent que peu de déformation, même si le matériau est tenace lors d'un essai de traction statique. La cassure rappelle plutôt celle d'une matière fragile comme la fonte grise. Ces ruptures sont d'autant plus à craindre qu'elles peuvent se produire pour des sollicitation qui, calculées au moyen des formules fondamentales de la résistance des matériaux, seraient tout à fait admissibles. La rupture s'amorce presque toujours près d'un point faible de la pièce comme par exemple vers une entaille provoquée par un tracé, un usinage défectueux, un défaut dans la matière.

Les conditions de rupture en charge dynamique ont été constatées et étudiées pour la première fois par Wöhler lors d'essais de durée en flexion rotative. Les essais de fatigue sur les matériaux métalliques sont entrepris sur des éprouvettes de petites dimensions, diamètres généralement compris entre 6 et 20 mm seulement, car les machines d'essai ne peuvent pas produire des efforts très grands en charge variable. Le comportement dynamique des matériaux dépend de nombreux facteurs dont les principaux sont :

1. le nombre d'alternances et l'amplitude de la contrainte alternée. A partir d'un certain nombre de charges, de 2 à $100 \cdot 10^6$ charges, la contrainte alternée peut être supportée indéfiniment sans risque de rupture.

Remarque : Les directives FKM définissent un autre rapport des contraintes introduisant les contraintes maximale et minimale : $R_{FKM} = \sigma_{min}/\sigma_{max}$.

3.2.3.3 CHOCS

Les chocs et les à-coups interviennent assez souvent sur les éléments de machines et provoquent des variations brusques de contrainte. La capacité de déformation et l'énergie accumulée dans la pièce sous forme élastique ou sous forme de déformations plastiques limitent les pointes de tension. Pour éviter des ruptures toujours dangereuses, il est recommandé d'exiger des matériaux les qualités suivantes :

1. une résistance statique suffisante,
2. un allongement de rupture important,
3. une très bonne résilience.

3.2.3.4 CHARGE À HAUTE OU BASSE TEMPÉRATURE

Les caractéristiques mécaniques données dans les tables sont valables à la température ambiante (entre –20 et 100°C). Lorsque la température croît, le module d'élasticité, la résistance à la traction, la contrainte à la limite élastique et l'allongement de rupture modifient leurs valeurs. Pour les aciers de construction mécanique, les caractéristiques mécaniques des tables sont à peu près valables jusqu'à 120 à 200°C selon les nuances d'acier.

Pour des températures supérieures, les diverses résistances mécaniques baissent et l'allongement de rupture augmente. En charge statique ou dynamique à température élevée, le facteur temps commence à jouer un rôle considérable. La variation de la déformation d'une pièce en fonction du temps, sollicitée par des contraintes statiques et/ou dynamiques continues, porte le nom de fluage. Ce phénomène inévitable est prépondérant dans les turbo-machines thermiques comme les turbines et les compresseurs à vapeur et à gaz.

A basses températures, la fragilité du métal augmente et une diminution brusque de la résilience est souvent présente dans les aciers, d'où augmentation de la fragilité.

3.3 PROPRIÉTÉS DES MATÉRIAUX

Le calcul des éléments de machines est basé sur l'hypothèse que les mêmes niveaux de contraintes dans les pièces engendrent les mêmes risques de détérioration. Les valeurs limites nominales étant relevées sur des éprouvettes, il est nécessaire de distinguer les types de résistance suivants :

1. *Résistances relevées sur éprouvettes* : valeurs trouvées sur des éprouvettes simples sollicitées par des contraintes simples : traction, compression, flexion ou torsion.
2. *Résistances des pièces* : valeurs trouvées sur des organes réels sous l'effet de charges conformément à l'utilisation prévue, compte tenu de la forme, du procédé de fabrication, des propriétés technologiques du ou des matériaux.

Il est possible de distinguer trois domaines de résistance : résistance statique, résistance à durée de vie limitée et résistance à durée de vie illimitée sous charge variable.

3.3.1 RÉSISTANCE STATIQUE DES MATÉRIAUX

Les valeurs des résistances sont relevées en traction, plus rarement en compression, en flexion et en torsion sur des éprouvettes lisses et à surfaces polies, les diamètres étant environ

Il devient possible de définir, à partir de ces deux contraintes, les caractéristiques :

- contrainte normale moyenne : $\sigma_m = 0{,}5\ (\sigma_u + \sigma_o)$, (3.14.1)
- amplitude de la contrainte normale : $\sigma_a = 0{,}5\ (\sigma_o - \sigma_u)$, (3.14.2)
- rapport des contraintes : $R_c = |\sigma_m| / |\sigma_{o,u}|$, (3.14.3)

C'est le rapport de la contrainte moyenne à la valeur absolue de la contrainte supérieure ou inférieure.

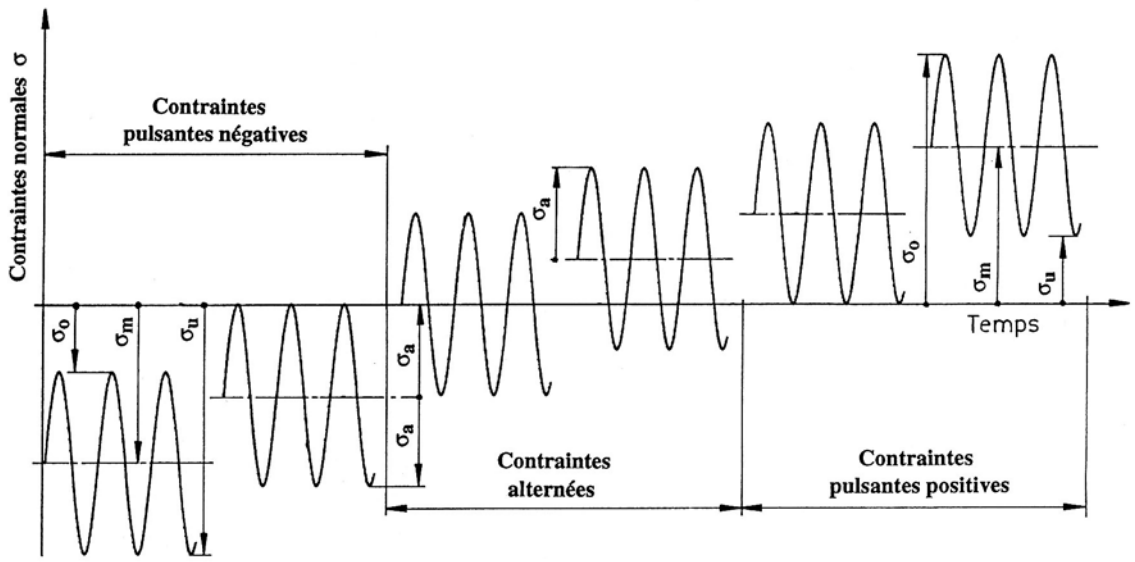


Figure 3.5 Contraintes normales dynamiques : définition des contraintes pulsantes et alternées

Les définitions s'appliquent d'une manière analogue aux contraintes normales ou tangentielles engendrées par l'effort tranchant, les moments fléchissant ou de torsion. Tout cas de charge dynamique peut se traiter comme une superposition de deux cas de charge :

- une charge statique impliquant une contrainte σ_m ou τ_m,
- une charge alternée provoquant une contrainte variable d'amplitude σ_a ou τ_a.

Les contraintes sont dites *pulsantes* si, sur l'aire élémentaire dA , les contraintes conservent leur signe positif ou négatif pendant toute la charge. Elles sont dites *alternées* si leur signe passe d'une valeur positive à une valeur négative et vice versa pendant la charge variable. Ces deux définitions permettent de situer deux cas particuliers :

1. *Contrainte pulsante fondamentale* : la contrainte sur l'aire élémentaire dA varie entre la contrainte nulle et la contrainte maximale ou minimale. Le rapport des contraintes vaut dans ce cas $R_c = 0{,}5$, voir figure 3.5.
2. *Contrainte alternée fondamentale* : la contrainte moyenne sur l'aire élémentaire dA est nulle. L'amplitude de la contrainte est égale à la contrainte supérieure et le rapport des contraintes vaut $R_c = 0$, voir figure 3.5.

Les essais des matériaux en charges dynamiques s'effectuent sur de petites éprouvettes sollicitées si possible par des efforts harmoniques simples. En pratique, les forces et les couples appliqués sur les pièces ne possèdent pas ce genre de variation de charge. Il faut alors distinguer les résultats obtenus par essais sur éprouvettes des résultats sur les pièces réelles. Il en résulte généralement une diminution des contraintes limites admissibles sur la pièce réelle par rapport aux valeurs relevées sur les éprouvettes.

et finalement le coefficient d'effet d'entaille par :

$$\beta_k = f_v \, \alpha_{k\,\rho F} \, . f_v \, . \qquad (3.12.3)$$

Le calcul du coefficient d'effet d'entaille β_k s'effectue en trois pas :

1. calcul du facteur de l'effet de soutien s ,
2. calcul du rayon de courbure fictif et du coefficient de forme $\alpha_k \, \rho_F$,
3. calcul du coefficient d'effet d'entaille β_k compte tenu de l'hypothèse introduite dans la recherche de la contrainte idéale σ_i.

3.2.3 EFFET DE LA CHARGE

Les charges extérieures sur la structure sont des forces, des couples ou des températures qui engendrent des contraintes et des déformations en fonction du temps. Elles peuvent se représenter donc en fonction du temps et se décrire par des expressions : $F = F(t)$, $M = M(t)$ ou $T = T(t)$. Les sollicitations mécaniques peuvent se classer en :

1. sollicitations statiques,
2. sollicitations dynamiques,
3. sollicitations par des chocs,
4. sollicitations à des températures différentes de la température ambiante.

Avant de commencer le contrôle des contraintes dans un élément de machine, il faut connaître exactement les conditions de charge, ce qui n'est pas souvent très simple.

3.2.3.1 CHARGE STATIQUE

En charge statique, les sollicitations sont appliquées lentement et progressivement pour atteindre finalement la valeur stationnaire et constante en module et direction pendant tout le service. Ce cas de charge est excessivement rare en pratique. Il est aussi possible de classer les modifications lentes de charge dans cette catégorie pour autant que les contraintes ne varient pas plus de 5 N/mm^2 par seconde.

3.2.3.2 CHARGE DYNAMIQUE

En charge dynamique, les efforts et les sollicitations varient continuellement sur la pièce. Les contraintes peuvent varier d'une manière aléatoire ou posséder une allure périodique. Dans ce dernier cas, il est possible de décomposer le signal en un somme de signaux harmoniques par l'analyse de Fourier. Le cas idéal est représenté par une variation harmonique simple des contraintes. Sur un élément de surface élémentaire dA , la contrainte normale σ et la contrainte tangentielle τ peuvent varier entre un limite inférieure et une limite supérieure. En discutant seulement sur une contrainte normale à variation harmonique, la contrainte $\sigma = \sigma(t)$ peut s'exprimer par :

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin \omega t, \qquad (3.13)$$

avec :

σ_m contrainte normale moyenne,
σ_a amplitude de la contrainte normale,
$\omega = 2 \pi/T$ pulsation, T étant la période.

Désignons par σ_o la contrainte normale supérieure et par σ_u la contrainte normale inférieure définies par :

$$\sigma_o = \sigma_m + \sigma_a \qquad \text{et} \qquad \sigma_u = \sigma_m - \sigma_a.$$

aciers d'amélioration η_k = 0,6 à 0,8; aciers à haute résistance η_k = 0,85 à 1,0 . D'après cette hypothèse, le coefficient d'effet d'entaille serait à peu près égal au coefficient de forme pour les aciers à haute résistance ou les aciers durcis superficiellement.

2. ***Méthode de H. Neuber et all.*** : Cette méthode introduit la notion de *chiffre de soutien* dans la détermination de l'état de contrainte dans la partie entaillée et tient compte du comportement réel du matériau. Les matériaux métalliques sont constitués d'une structure plus ou moins cristalline non homogène provoquant des résistances supplémentaires à la déformation. Cette propriété est dénommée effet de soutien microscopique et se laisse exprimer par une correction sur le rayon de l'entaille au moyen d'un rayon de courbure fictif donné par l'expression [1.19] :

$$\rho_F = \rho + s\,\rho^*, \qquad (3.12.1)$$

avec :

ρ rayon de courbure géométrique le plus faible au droit de l'entaille,
ρ^* longueur complémentaire dépendant de $R_{p0,2}$ du matériau selon figure 3.4,
s facteur de l'effet de soutien microscopique. Il dépend de la forme de la pièce entaillée, du genre de sollicitation et de l'hypothèse introduite pour calculer la contrainte idéale.

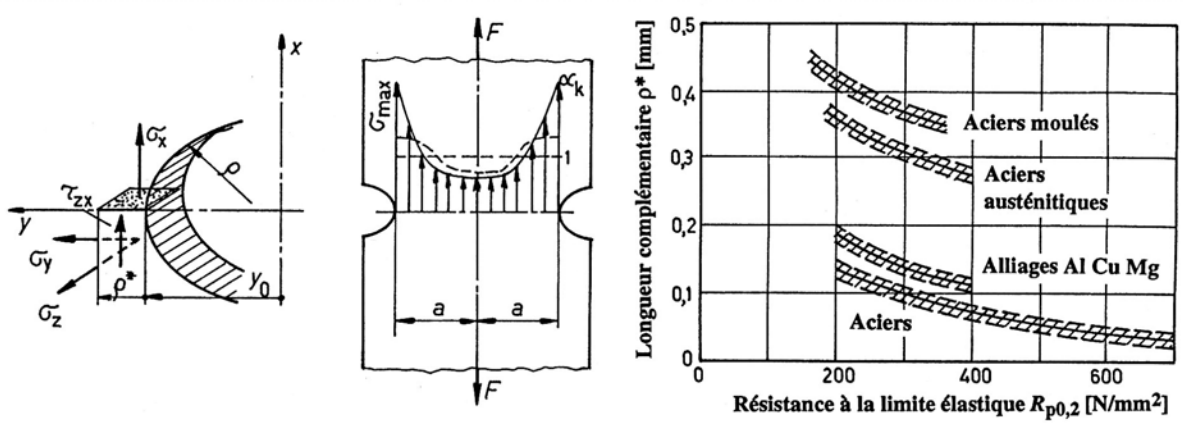


Figure 3.4 Etat de contrainte dans l'entaille. Effet de la forme dans une pièce entaillée plate
Valeur de la longueur complémentaire ρ^* pour les aciers en fonction de $R_{p0,2}$

Les valeurs de s sont fonction de la forme, de l'hypothèse de combinaison des contraintes et du type de contrainte se trouve dans ce tableau.

Hypothèse	Traction et flexion		Torsion et
Pour sigma i	Entaille dans plat	Entaille circulaire	Cisaillement
Cisaillement (Mohr)	$s = 2$	$s = (2-\nu)/(1-\nu)$	$s = 1$
Cisaillement (von Mises)	$s = 2{,}5$	$s = (5-2\nu+2\nu^2)/(1-2\nu+2\nu^2)$	$s = 1$

La grandeur ρ_F est *le rayon de courbure fictif* à introduire dans le calcul du coefficient de forme fictif. La théorie développée par H. Neuber fait intervenir la contrainte idéale σ_i dans la définition du coefficient de forme et non la contrainte principale σ_1. En appliquant l'hypothèse énergétique de distorsion, le coefficient de correction f_v se trouve par :

$$f_v = \sqrt{1-\nu+\nu^2}\,, \qquad (3.12.2)$$

et le *gradient relatif de contrainte* par :

$$\chi_0 = \frac{\mathrm{d}\sigma / \mathrm{d}y}{\sigma} = \frac{1}{e_1}. \qquad (3.11.2)$$

avec : e_1 la distance du centre de gravité à la fibre sollicitée par la contrainte maximale de flexion $\sigma_{f\ max}$. Ce gradient relatif de contrainte influence le comportement de la pièce. Il pourrait se trouver pour une pièce entaillée si la contrainte était connue en fonction de l'abscisse y du point sur la surface sollicitée en flexion : $\sigma = \sigma(y)$.

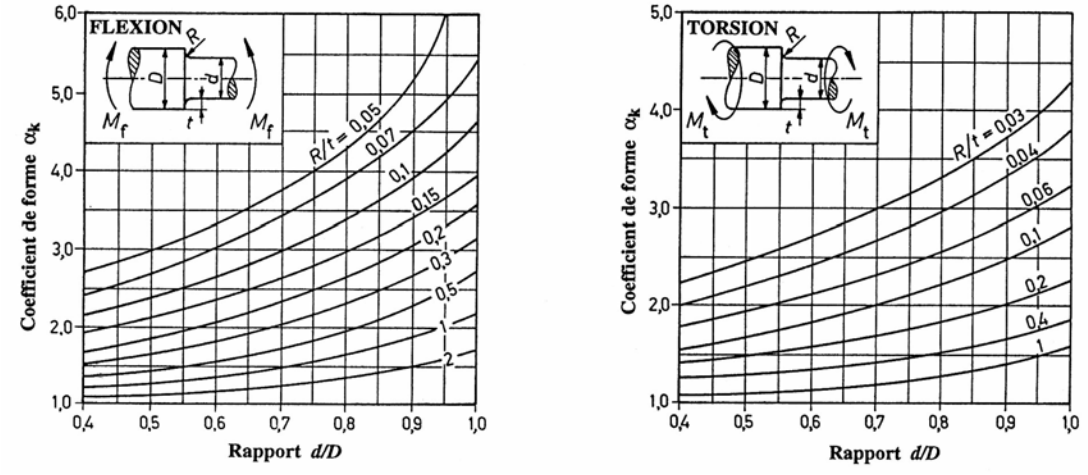


Figure 3.3 Valeur du coefficient de forme pour un arbre cylindrique avec épaulement
Sollicitation : à gauche en flexion, à droite en torsion

3.2.2 COEFFICIENT D'EFFET D'ENTAILLE

Le coefficient d'effet d'entaille, désigné par le symbole β_k , est le rapport entre la résistance aux sollicitations alternées de la pièce non entaillée à la résistance aux sollicitations alternées de la pièce entaillée. Le coefficient d'effet d'entaille est compris habituellement entre 1 et la valeur du coefficient de forme α_k. Les aciers à haute résistance statique sont plus sensibles à l'effet d'entaille que les aciers ordinaires au carbone non alliés. Une forme défectueuse d'une pièce sollicitée par des contraintes dynamiques ne peut en aucun cas être compensée par l'utilisation d'un matériau à plus grande résistance statique.

Le coefficient d'effet d'entaille dépend de la forme de la pièce, de sa grandeur et des caractéristiques mécaniques du matériau. Diverses propositions ont été formulées pour relier le coefficient d'effet d'entaille β_k au coefficient de forme α_k.

1. ***Méthode de Thum*** : Dans cette méthode, le coefficient d'effet d'entaille est relié au coefficient de forme par la notion du facteur de sensibilité à l'entaille défini par l'expression :

$$\eta_k = \frac{\beta_k - 1}{\alpha_k - 1}.$$

ce facteur η_k étant compris entre 0 et 1.
Le coefficient d'effet d'entaille se calcule par :

$$\beta_k = 1 + \eta_k\,(\alpha_k - 1).$$

Thum avait estimé que le facteur de sensibilité à l'entaille était une constante dépendant seulement du matériau. Cette hypothèse n'a pas été confirmée par les essais. Les valeurs moyennes de ce coefficient sont : aciers de construction (Ac37 à Ac 70) : η_k = 0,4 à 0,8;

Le coefficient de forme dépend uniquement de la géométrie de la pièce au voisinage de l'entaille, cette géométrie pouvant être plane ou spatiale. Il dépend aussi du genre de contrainte simple comme la traction - compression, la flexion ou la torsion.

Les coefficients de forme pour des pièces entaillées simples, en particulier les plaques ou les arbres, sont déterminés :

1. par l'application de la théorie de l'élasticité dans la partie à section variable, cette méthode étant très compliquée pour un ingénieur même universitaire. L'ouvrage classique traitant ce sujet à été écrit par H. Neuber : Kerbspannungslehre, 2. Auflage 1958 [1.18].
2. par la méthode de la photoélasticité au moyen de modèles fabriqués en matière transparente sollicités par des efforts simples et examinés sous lumière polarisée.
3. par la méthode des éléments finis en modélisant la pièce le mieux possible et en sollicitant le modèle par les efforts voulus. La précision dépend beaucoup de la modélisation.

Les coefficients de forme sont, à des rares exceptions près, toujours supérieurs à 1.

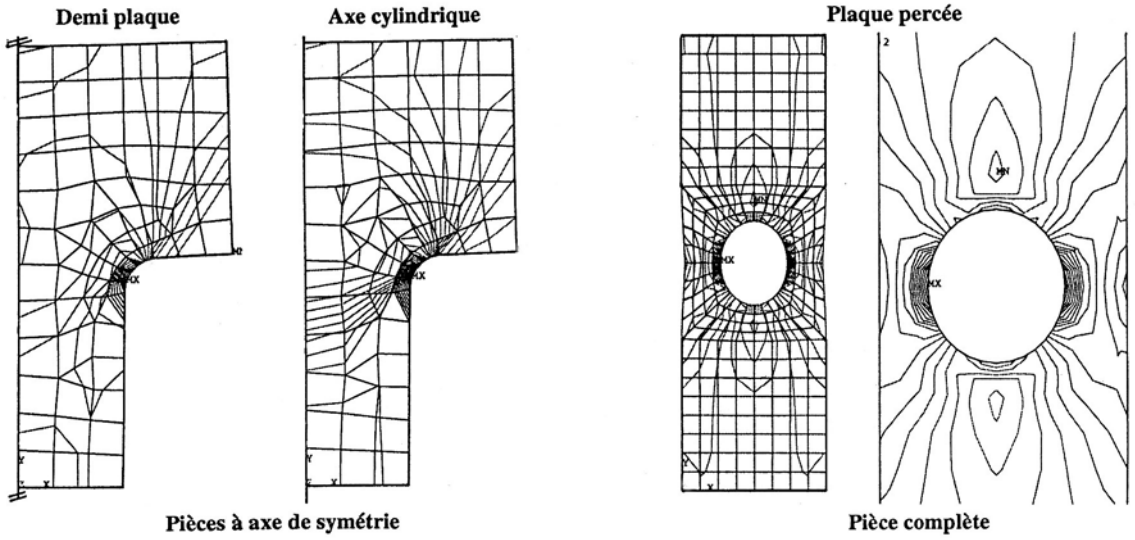


Figure 3.2 Recherche de coefficients de forme au moyen de la méthode des éléments finis
Représentation des éléments et des niveaux de contrainte dans une demi plaque, un arbre cylindrique et une plaque percée sollicités en traction simple

Dans la plupart des cas, le coefficient de forme est lu sur une représentation graphique du coefficient de forme en fonction de la géométrie de la pièce ou calculé par des formules plus ou moins approximatives. La figure 3.3 montre les valeurs du coefficient de forme α_k pour un arbre avec un épaulement, grand diamètre D , petit diamètre d , rayon de raccordement R , sollicité en flexion ou en torsion. Sur cette figure, le coefficient de forme est fonction du rapport des diamètres d/D et les courbes sont construites à R/t constant, t étant la hauteur de l'épaulement.

Dans une pièce sans entaille sollicitée en traction ou compression simple, la répartition de la contrainte dans toute section plane perpendiculaire à la ligne moyenne est uniforme. Si la pièce est sollicitée en flexion ou en torsion, cette répartition est supposée linéaire pour toute section en flexion, linéaire seulement pour les sections circulaires en torsion. Cette variation de contrainte permet de définir, dans le cas simple d'une pièce sollicitée par un moment fléchissant M_{fz} , le *gradient de contrainte* par une expression de forme différentielle :

$$\tan\alpha_0 = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y} = \frac{\sigma_{f\,max}}{e_1}, \qquad (3.11.1)$$

$$f_{\mathrm{F1}} = \frac{\partial W_u}{\partial F_{\mathrm{1(F1=0)}}} = \int_0^l \frac{F_{\mathrm{N}}\, F_{\mathrm{N1}}\, \mathrm{d}s}{E\, A} + \int_0^l k_{\mathrm{y}} \frac{F_{\mathrm{Ty}}\, F_{\mathrm{Ty1}}\, \mathrm{d}s}{G\, A} + \int_0^l k_{\mathrm{z}} \frac{F_{\mathrm{Tz}}\, F_{\mathrm{Tz1}}\, \mathrm{d}s}{G\, A} +$$

$$\int_0^l \frac{M_{\mathrm{fy}}\, M_{\mathrm{fy1}}\, \mathrm{d}s}{E\, I_{\mathrm{y}}} + \int_0^l \frac{M_{\mathrm{fz}}\, M_{\mathrm{fz1}}\, \mathrm{d}s}{E\, I_{\mathrm{z}}} + \int_0^l \frac{M_{\mathrm{t}}\, M_{\mathrm{t1}}\, \mathrm{d}s}{E\, I_{\mathrm{t}}}. \qquad (3.9)$$

avec :

F_{N}, F_{ty}, F_{Tz}, M_{fy}, M_{fz}, M_{t}	les efforts dans la section,
F_{N1}, F_{ty1}, F_{Tz1}, M_{fy1}, M_{fz1}, M_{t1}	les efforts engendrés par la force unitaire F_1,
k_{y}, k_{z}	les coefficients de correction en cisaillement.

Pour les pièces à tronçons rectilignes, la méthode de multiplication des diagrammes est applicable tandis que dans les tronçons curvilignes, il est nécessaire d'introduire la relation générale proposée. La solution des structures hyperstatiques est facilitée par l'emploi de la méthode dite des forces. Cette méthode fait apparaître un système d'équations linéaires :

$$[\mathbf{C}]\ \{\mathbf{F}\}_{\mathrm{w}} + \{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{0}\},$$

dans lequel :

[**C**] est la matrice des coefficients d'influence,
$\{\mathbf{F}\}_{\mathrm{w}}$ est le vecteur des forces surabondantes,
{**D**} est le vecteur des "déplacements".

Les coefficients d'influence $c_{\mathrm{i,j}}$ du système linéaire peuvent se trouver par les intégrales de Mohr ou par la méthode de la multiplication des diagrammes dans les tronçons rectilignes.

3.2 EFFETS DE LA FORME ET DE LA CHARGE

Les pièces à section constante sur toute leur longueur ou à section progressivement variable sont excessivement rares dans les éléments de machines. Il devient nécessaire d'apporter des corrections aux relations fondamentales de la résistance des matériaux. Au droit d'une variation de section ou dans le tronçon d'un raccordement, la répartition des contraintes est modifiée par le phénomène dit de *concentration de contraintes*. La pièce est dite entaillée par la modification plus ou moins brusque de section.

3.2.1 COEFFICIENT DE FORME

Pour un matériau théorique parfaitement isotrope et homogène, le coefficient de forme d'une pièce entaillée, désigné par le symbole α_{k}, est le rapport entre la contrainte maximale et la contrainte nominale correspondant au genre de contrainte, calculée par les relations fondamentales de la résistance des matériaux. Ce coefficient vaut :

- en traction - compression : $$\alpha_k = \frac{\sigma_{\mathrm{n\,max}}}{\sigma_{\mathrm{n\,nom}}}; \qquad (3.10.1)$$

- en flexion : $$\alpha_k = \frac{\sigma_{\mathrm{f\,max}}}{\sigma_{\mathrm{f\,nom}}}; \qquad (3.10.2)$$

- en torsion : $$\alpha_k = \frac{\tau_{\mathrm{t\,max}}}{\tau_{\mathrm{t\,nom}}}. \qquad (3.10.3)$$

3. Déformation en torsion simple : (pour une pièce à section circulaire)

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = -\frac{M_\mathrm{t}}{G\,I_\mathrm{p}}. \qquad (3.6.3)$$

4. Relation entre E et G (seulement pour un matériau à comportement isotrope) :

$$G = \frac{E}{2\,(1+\nu)}. \qquad (3.7)$$

5. Allongement spécifique (à une seule direction) :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \qquad (3.8.1)$$

6. Angle de glissement : $$\gamma = \frac{\tau}{G}. \qquad (3.8.2)$$

Dans ces expressions :

E module d'élasticité du matériau,
G module de glissement,
ε Δl / dx
γ déformation angulaire engendrée par la contrainte tangentielle simple.

Ces diverses relations permettent de trouver les déformations axiales et transversales des pièces allongées rectilignes sollicitées par des efforts simples. Si les pièces sont coudées ou curvilignes, le calcul des déformations impose l'introduction du principe de superposition des efforts, valable tant que les déformations restent petites. Les déformations en flexion et en torsion sont prépondérantes dans les pièces allongées. L'effet du cisaillement n'est pas à négliger dans les pièces courtes ou trapues.

3.1.4.2 MÉTHODES ÉNERGÉTIQUES

Les diverses méthodes énergétiques de la résistance des matériaux facilitent la recherche des déformations et des efforts surabondants sur les pièces allongée de forme quelconque. Citons les théorèmes les plus utilisés.

Théorème de Castigliano :

La dérivée partielle de l'énergie potentielle élastique d'un système par rapport à l'effort appliqué est égale au déplacement du point d'application de cet effort dans sa propre direction.

Théorème de Maxwell-Betti :

Le déplacement du point P_2 sous l'action de la force F appliquée au point P_1 est égal au déplacement du point P_1 sous l'effet de la force F appliquée au point P_2. C'est le principe de la réciprocité des déplacements.

Théorème de Ménabréa :

Sous l'effet d'efforts extérieurs, forces ou couples, un système élastique se déforme de telle sorte que l'énergie élastique accumulée dans le système devienne minimale.

Le théorème de Castigliano, de portée générale, peut se transformer en une somme de termes contenant les intégrales de Mohr. Dans le cas général, la pièce étudiée est sollicitée par des efforts normaux et tranchants, des moments fléchissants et de torsion. Pour trouver la déformation en un point donné, il suffit d'y appliquer une force dite unitaire F_1 dans la direction du déplacement linéaire ou angulaire recherché. La déformation f_{F1} se trouve alors par l'expression générale :

avec :

$\vec{e}$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$, $\vec{e}_{yz}$ les vecteurs unitaires des axes dans le plan *Cyz*.

Dans le cas le plus simple de pièces longilignes, cas traité dans ce chapitre, la contrainte idéale ou dite de comparaison, basée sur l'hypothèse énergétique de distorsion HED ou dite aussi contrainte de von Mises, se trouve par l'expression :

$$\sigma_i = \sigma_{HED} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3(\alpha_0 \tau)^2}. \qquad (3.5.1)$$

Dans cette expression, le coefficient de correction α_0, proposé par Mohr, se trouve à partir des limites d'élasticité (apparentes ou conventionnelles) en traction compression ou en flexion $R_{p0,2}$ et en torsion $R_{pt0,2}$:

$$\alpha_0 = \frac{R_{p0,2}}{\sqrt{3} \cdot R_{pt0,2}}. \qquad (3.5.2)$$

Si la pièce est courte et sollicitée par des efforts tels que la répartition des contraintes est très différente de celle d'une pièce longiligne, la recherche de la contrainte idéale s'effectue en tenant compte de toutes les contraintes présentes dans un volume élémentaire dV découpé dans la pièce.

3.1.4 DÉFORMATIONS DES PIÈCES

Le calcul des déformations des éléments de machines et des pièces adjacentes, en particulier pour les pièces de grandes dimensions, est dans la plupart des cas plus important que la recherche des contraintes. La théorie de la résistance des matériaux est une théorie linéaire dans laquelle les contraintes sont proportionnelles aux déformations supposées le plus souvent constantes ou linéairement variables. Malheureusement, la recherche des déformations axiales et transversales d'un élément est habituellement très long, à moins que cet élément soit de forme excessivement simple. Dans ce cas très particulier, l'application d'une des nombreuses formules de la résistance des matériaux permet de trouver la valeur recherchée.

3.1.4.1 RELATIONS GÉNÉRALES ENTRE DÉFORMATIONS ET CONTRAINTES

Deux grandes méthodes de recherche des déformations et des contraintes existent en parallèle :

1. la résistance des matériaux partant des efforts externes pour trouver la répartition interne des déformations et des contraintes,
2. la théorie de l'élasticité partant des déformations et contraintes dans un volume élémentaire dV pour aboutir à l'effet des efforts extérieurs. Cette théorie, difficilement accessible aux ingénieurs peu habiles en mathématiques, peut se remplacer avantageusement par la méthode des éléments finis (MEF).

L'application de la résistance des matériaux, dans les problèmes à une dimension, introduit les relations suivantes valables pour les déformations :

1. Loi de Hooke en traction simple (difficulté en cisaillement simple) :

$$\Delta l = \frac{\sigma_n l}{E}. \qquad (3.6.1)$$

2. Déformation en flexion simple (suivant une direction principale) :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_f}{E I_z}. \qquad (3.6.2)$$

3.1.2.2 RÉPARTITION DES CONTRAINTES TANGENTIELLES

La répartition des contraintes tangentielles doit obéir obligatoirement au principe de la réciprocité des contraintes tangentielles, ce qui complique énormément la recherche de la répartition de cette caractéristique mécanique. Les contraintes tangentielles provoquées par les efforts tranchants F_{Ty} et F_{Tz} sont supposées réparties paraboliquement dans la section plane en présence d'au moins un moment fléchissant, celles engendrées par le moment de torsion étant supposées réparties linéairement dans les sections circulaire pleines ou annulaires. Pour des sections de formes différentes, la théorie élémentaire de la résistance des matériaux est incapable de trouver cette répartition de contrainte. Les contraintes tangentielles sur l'aire élémentaire dA se trouvent par les expressions :

- Contraintes de cisaillement : $$\tau_y = \frac{F_{Ty} \cdot S_z^*}{b_z \cdot I_z}, \qquad (3.3.1)$$

$$\tau_z = \frac{F_{Tz} \cdot S_y^*}{b_y \cdot I_y}. \qquad (3.3.2)$$

- Contraintes de torsion : $$\tau_t = \frac{M_t}{I_p} \cdot r. \qquad (3.4)$$

Dans ces diverses expressions, les caractéristiques géométriques de la section plane sont :

A aire de la section,
I_y moment quadratique axial de la section par rapport à l'axe Cy,
I_z moment quadratique axial de la section par rapport à l'axe Cz,
I_p moment quadratique polaire d'une section circulaire : $I_p = I_y + I_z$,
S_y* moment statique de surface de la section extérieure par rapport à l'axe Cy,
S_z* moment statique de surface de la section extérieure par rapport à l'axe Cz,
y abscisse de l'aire élémentaire dA,
z ordonnée de l'aire élémentaire dA,
b_y largeur de la section à l'ordonnée z,
b_z largeur de la section à l'abscisse y,
r distance radiale de l'aire élémentaire dA (seulement pour une surface circulaire).

La présence simultanée de six efforts composants et des six contraintes correspondantes est assez rare dans les applications simples bien que les éléments de machines sont sollicités le plus souvent d'efforts spatiaux et de contraintes spatiales. Le contrôle des contraintes composantes est fortement facilité par la construction des diagrammes des efforts. Les sections dites dangereuses sont repérées sur la pièce là où les moments fléchissants et de torsion sont maximaux et où les sections sont minimales.

3.1.3 CONTRAINTES RÉSULTANTES ET IDÉALES

Sur la même aire élémentaire dA de la section plane, les contraintes normales, calculées au moyen des relations proposées, sont additionnées algébriquement et les contraintes tangentielles sont additionnées vectoriellement, bien que les contraintes ne soient pas des grandeurs vectorielles. Cette recherche des résultantes normale et tangentielle se fera dans la partie la plus sollicitée de la section, généralement dans la partie la plus éloignée de la *fibre neutre* de flexion. Les résultantes sont :

- contrainte normale résultante : $\sigma_x = \sigma_n + \sigma_{fy} + \sigma_{fz}$,
- contrainte tangentielle résultante : $\vec{e}\,\tau = \vec{e}_y\,\tau_y + \vec{e}_z\,\tau_z + \vec{e}_{yz}\,\tau_t$,

3. une composante couple M_f tangente à la coupe, dans le plan *Cyz*, décomposable en deux *moments fléchissants* partiels suivant les axes principaux de la section :

$$\vec{M}_f = \vec{M}_{fy} + \vec{M}_{fz}.$$

4. une composante couple normale à la section, selon l'axe *Cx*, appelée *moment de torsion* et désignée par M_t.
5. Résultante générale : $\vec{F} = \vec{F}_N + \vec{F}_{Ty} + \vec{F}_{Tz}.$
   Couple principal : $\vec{M} = \vec{M}_{fy} + \vec{M}_{fz} + \vec{M}_t.$

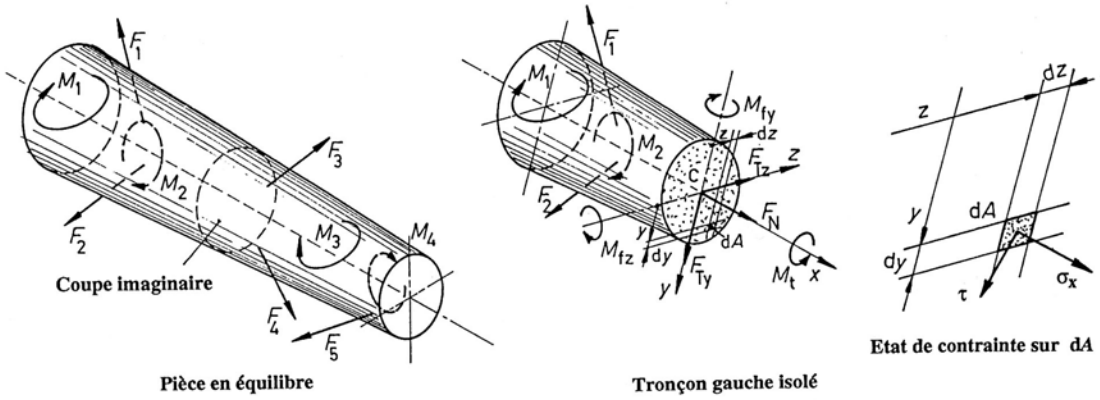


Figure 3.1 Efforts sur une pièce et dans une section plane quelconque

3.1.2 CONTRAINTES SIMPLES

La répartition des contraintes dans la coupe imaginaire doit correspondre aux conditions d'équilibre statique du tronçon isolé et ne pas mettre en défaut les possibilités de transmission des efforts par la continuité de la pièce et les règles énoncées en résistance des matériaux. Les contraintes simples calculables sont soit des contraintes normales, symbole σ , soit des contraintes tangentes à la section, symbole τ .

3.1.2.1 RÉPARTITION DES CONTRAINTES NORMALES

La contrainte normale engendrée par l'effort normal F_N est supposée répartie uniformément dans toute la section. Les contraintes normales créées par les deux moments fléchissants M_{fy} et M_{fz} sont supposées réparties linéairement à partir de la paire d'axes rectangulaires. Les contraintes normales, sur l'aire dA, se trouvent par les relations :

- Contrainte normale $$\sigma_n = \frac{F_N}{A}. \qquad (3.1)$$

- Contraintes de flexion : $$\sigma_{fy} = \frac{M_{fy}}{I_y} \cdot z, \qquad (3.2.1)$$

$$\sigma_{fz} = \frac{M_{fz}}{I_z} \cdot y. \qquad (3.2.2)$$

La contrainte normale totale sur cette surface élémentaire σ_x est la somme algébrique de ces trois composantes :

$$\sigma_x = \sigma_n + \sigma_{fy} + \sigma_{fz}.$$

CHAPITRE 3

CONTRÔLE DES ÉLÉMENTS DE MACHINES

Le calcul et le contrôle de tous les éléments de machines font intervenir des simplifications dans l'élaboration du modèle de calcul. Les résultats de l'analyse vont dépendre en partie des hypothèses initiales introduites dans le modèle et dans une moindre importance de la méthode de résolution. Le comportement d'un élément de machines est fonction non seulement de ses propres caractéristiques mais aussi directement des pièces adjacentes. Ce chapitre rappelle les notions de base en résistance des matériaux et complète ces connaissances par des particularités importantes applicables au contrôle des mécanismes. Chaque famille d'éléments de machines possède un comportement spécifique. Les méthodes de contrôle doivent tendre vers un modèle aussi fidèle que possible et conforme au comportement de l'élément. Disons d'emblée que : les éléments les plus anciens et les plus simples appartiennent à l'ensemble des éléments les plus mal connus. L'utilisation des ordinateurs et des méthodes numériques de calcul, comme par exemple la méthode des éléments finis, permet d'étendre les connaissances sur le comportement des éléments de machines, d'ajouter des paramètres négligés jusqu'ici dans les hypothèses initiales et des facteurs complémentaires dans les modèles, d'optimiser la ou les solutions retenues.

3.1 RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX DE BASE

La théorie générale de la résistance des matériaux introduit des simplifications dans la solution des problèmes. Elle suppose que les pièces à calculer ou à contrôler sont de formes allongées, à section constante ou éventuellement progressivement variable, constituées de matériaux homogènes, à comportement linéaire c'est-à-dire que les contraintes sont proportionnelles aux déformations. La plupart des éléments et des organes de machines ne correspondent pas à cette description simplifiée, car très souvent la géométrie des pièces est telle que les sections sont brusquement variables, comme par exemple dans les arbres ou axes, ou les dimensions longitudinales des pièces représentent seulement une à quatre fois les dimensions transversales.

3.1.1 EFFORTS DANS UNE SECTION IMAGINAIRE

Une pièces, statiquement déterminée ou non, sollicitée par des efforts extérieurs, peut être sectionnée en pensée par une coupe plane imaginaire, habituellement perpendiculaire à la ligne moyenne de la pièce longiligne. Cette surface plane est définie par son centre de gravité C, une paire d'axes principaux de gravité Cyz, et les caractéristiques surfaciques : aire A, moments quadratiques axiaux I_y, I_z et polaire I_p. L'axe Cx est perpendiculaire à cette section (fig.3.1). La réduction de tous les efforts extérieurs, situés d'un même côté de la coupe, au centre de gravité C de la section plane, se résume en une résultante générale $\vec{F}$ et un couple principal $\vec{M}$. Ces deux grandeurs vectorielles sont décomposées en grandeurs normales et tangentes à la coupe :

1. une composante force normale à la coupe, selon l'axe Cx, appelée *effort normal* et désignée par F_N.
2. une composante tangente à la coupe F_T, dans le plan Cyz, décomposable en deux *efforts tranchants* partiels suivant les axes principaux de la section :

$$\vec{F}_T = \vec{F}_{Ty} + \vec{F}_{Tz}.$$

- épaisseur minimale du moyeu : $s \approx 0{,}7\ [\ M_t / \sigma_n\ l\ ]^{0,5}$.

Les symboles utilisés sont :

$d_m = 0{,}5\ (d_1 + d_2)$ diamètre moyen,
$d_r = d_2 + 2\ e$ diamètre théorique de calcul,
$e_r = 0{,}25\ (d_1 - d_2)$ excentricité de calcul,
σ_n contrainte normale.

4.4.4.3 DENTURE FRONTALE

Ce type de denture permet de transmettre des couples de torsion très élevés entre deux pièces grâce à la présence de profils dentés placés radialement. Le centrage des pièces est assuré par la pièce elle-même. L'assemblage est précontraint par l'action d'une force axiale F_a obtenue habituellement par un serrage à vis. Le couple porteur se transmet par les flancs des deux dentures. Pour faciliter la fabrication de ce type de denture, nommé denture Hirth, la maison Voith offre des couronnes standardisées possédant les propriétés suivantes :

1. Exactitude de division : ± 3",
2. Précision de position : approximativement 0,001 mm,
3. Résistance à l'usure : très élevée,
4. Auto centrage : faux rond et voilage au maximum 0,01 mm,
5. Assemblage par force axiale : force relativement faible.

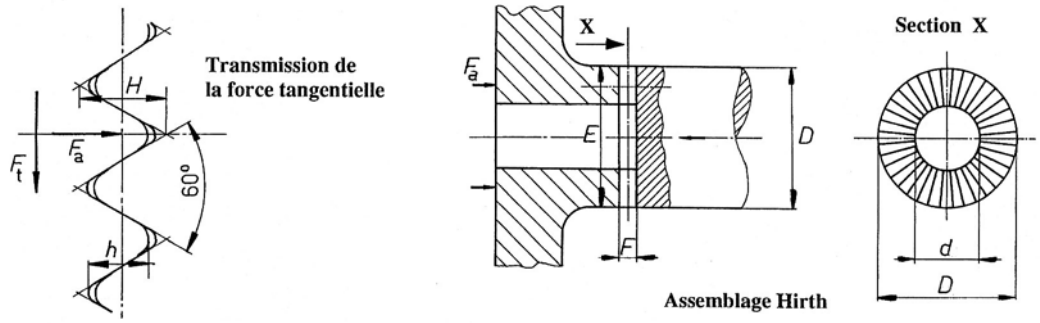


Figure 4.38 Principe de la transmission des efforts au moyen d'une denture frontale

Mode de calcul

La force tangentielle résultante sur toute les dents peut se trouver à partir du couple de torsion et du diamètre moyen 0,5 ($D + d$) des dentures :

$$F_t = 4\ M_t / (D + d).$$

Comme l'inclinaison de la dent est 30°, la composante axiale F_a engendrée par la force tangentielle se calcule par :

$$F_a = F_t \tan 30°.$$

Cette force axiale doit être absorbée par la précontrainte de l'assemblage comme par exemple des ressorts à rondelle, un système hydraulique ou des vis de fixation avec un coefficient de sécurité de 1,8 à 3. Les anneaux sont fabriqués en acier 34 Cr 4 avec une dureté Vickers comprise entre 880 et 1130 N/mm^2. La denture est trempée par chauffage au four à induction et rectifiée.

- moment quadratique polaire : $I_p = \pi\, d_1^4 / 32 \; - \; 3\,\pi\, d_1^2\, e_1^2 / 4 \; - \; 6\,\pi\, e_1^4$,
- modules de résistance :
  - à la torsion : $W_p = (d_1 + 4\, e_1)\, A^4 / [20\, I_p\, d_1\, (d_1 + 8\, e_1)]$,
  - à la flexion : $W_z = I_p / d_2$.

Le couple de torsion transmissible vaut approximativement :

$$Mt \approx p\, l\, (0{,}75\, \pi\, e_1\, d_1 + 0{,}05\, d_1^2).$$

L'épaisseur à prévoir pour le moyeu se donne par :

- pour $d_4 \leq 35$ mm : $s \approx 1{,}44\, [\, M_t / \sigma_n\, l]^{0,5}$,
- pour $d_4 > 35$ mm : $s \approx 1{,}20\, [\, M_t / \sigma_n\, l]^{0,5}$.

Les symboles utilisés sont :

d_1,d_4 diamètres d'égale épaisseur, champs de tolérance pour d_1 :
- g6 pour assemblage mobile sans charge,
- k6 pour assemblage sans déplacement.

d_2,d_5 diamètres des cercles extérieurs,
d_3,d_6 diamètres des cercles intérieurs,
e_1,e_2 excentricité,
l longueur portante du moyeu,
s épaisseur minimale du moyeu,
p pression,
W_p module de résistance en torsion,
W_z module de résistance en flexion.

4.4.4.2 PROFIL P4C

Ce profil est normalisé selon DIN 32 712 et sert à la transmission de couples de torsion dans la conception générale de machines, dans les machines outils, les véhicules et en aéronautique, les machines électriques. Il est employé pour des assemblages à demeure ou amovibles. Ce profil est fabriqué par mortaisage ou brochage dans le moyeu, le champ de tolérance sur la face du carré étant H7 .

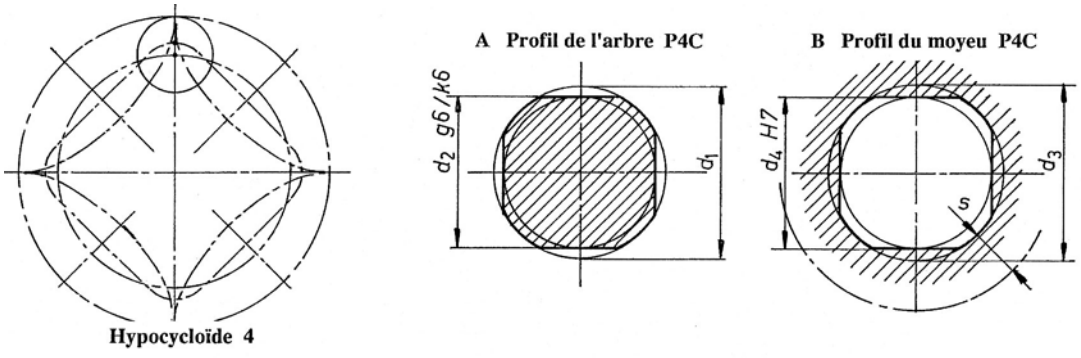


Figure 4.37 Profil carré P4C : principe de génération, profils selon norme DIN 32 712

Dans la pratique courante, les dimensions géométriques et de contrôle peuvent se trouver par les formules approximatives données dans la norme.

- aire : $A \approx \pi\, d_m^2 / 4$,
- modules de résistance :
  - à la torsion : $W_p \approx 0{,}2\, d_2^3$,
  - à la flexion : $W_z \approx 0{,}15\, d_2^3$,
- couple transmissible : $M_t \approx p\, l\, (\pi\, e_r\, d_r + 0{,}05\, d_r^2)$,

Tableau 4.4
Pressions admissibles pour les assemblages à arbres et moyeux cannelés
Valeurs applicables à des aciers d'amélioration
Résistance R_m = 1000 N/mm^2

	Pressions en N/mm2 Genre d'assemblage : Déplacement			
Type de charge	Bloqué Dur	Sans Charge	Avec charge	Avec charge
Charge continue Bon graissage	200	100	35	25
Charge légèrement Variable	150	75	25	20
Charge fortement Variable	110	55	16	10
Arbre / moyeu			durci	non durci

4.4.4 PROFILS POLYGONAUX P

Les profils polygonaux à forme triangulaire ou carrée sont obtenus à partir de courbes hypocycloïdales raccourcies, le rapport entre les diamètres du cercle de roulement et du cercle roulant étant 3 ou 4. En modifiant la position radiale du point générateur sur le cercle roulant, la forme du profil peut être modifiée et adaptée aux conditions de transmission du couple de torsion. Les profils extérieurs et intérieurs peuvent être fabriqués dans la classe de tolérances IT6, ce qui permet d'assurer un centrage très favorable des deux pièces.

4.4.4.1 PROFIL P3G

Le profil P3G, normalisé selon DIN 32 711, est utilisé dans la conception de machines générales, de machines-outils, de véhicules routiers et de machines électriques. Ce profil permet de transmettre un couple de torsion pour des assemblages à demeure ou démontables.

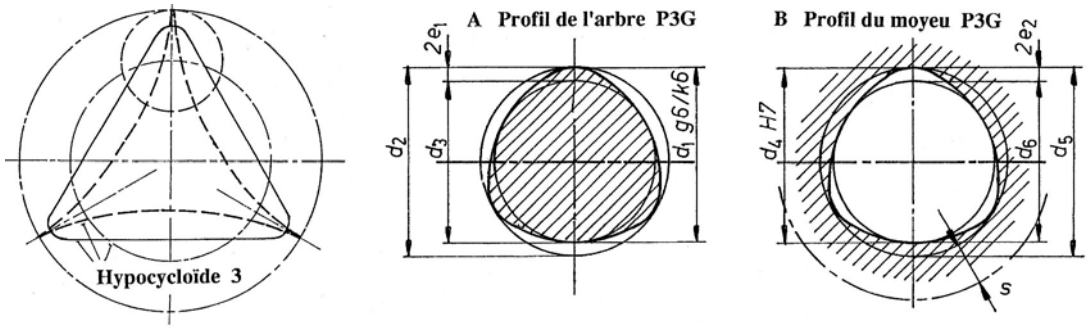


Figure 4.36 Profils polygonaux : principe de la génération, profils P3G , DIN 32 7111

Pratiquement, le profil P3G est un corps à épaisseur constante et s'introduit lorsque l'alésage dans le moyeu doit être rectifié. Les grandeurs nominales sont comprises entre 14 et 100 mm. Les caractéristiques de la section de l'arbre, données dans la norme, sont :

- aire : $A = \pi d_1^2/4 - 4 \pi e_1^2$,

4.4.3.2 DOMAINE D'UTILISATION ET BUTS DU CALCUL

1. Domaine d'utilisation

Le document décrit les connaissances actuelles sur les assemblages à arbres cannelés et dentelés montés avec jeux ou avec ajustements à jeux réduits. Les assemblages à centrage par l'arbre n'y sont pas traités. Le comportement des assemblages montés avec serrage n'est pas encore connu pour l'instant. L'usure entre l'arbre et le moyeu profilés n'est pas encore traitée dans ce descriptif.

2. Buts

Le texte donne une présentation des possibilités actuelles de calcul dans les assemblages à arbre et moyeux profilés. Les méthodes de contrôle usuelles, utilisées jusqu'ici, partent d'hypothèses très primitives sur les tolérances d'ajustement et ne tiennent compte que du couple de torsion. Le but de l'exposé, basé sur des recherches théoriques de P. Dietz et des résultats pratiques, est de tenir compte de plusieurs effets dont :

- la grandeur et la position de la charge extérieure constituée par : un couple de torsion, un moment fléchissant, des forces axiale et/ou transversale.
- les jeux sur les flancs, les écarts sur le pas et sur les épaisseurs par le choix des tolérances et des ajustements,
- la répartition de la charge dans la direction axiale,
- le comportement élastique de l'assemblage.

Des méthodes d'estimation sont proposées pour les sollicitations de l'arbre et du moyeu, pour la charge appliquée sur les dentures ou les cannelures, les contraintes dans le pied de dent et la pression sur les flancs porteurs, l'effet sur les flancs de forces radiales. L'utilisation de cette méthode nécessite évidemment de la part de l'utilisateur une analyse réaliste de tous les facteurs de calcul, en particulier les valeurs admissibles en fonction du choix des matériaux, les risques d'avaries en service compte tenu des conditions réelles de sollicitation et les facteurs de sécurité correspondants.

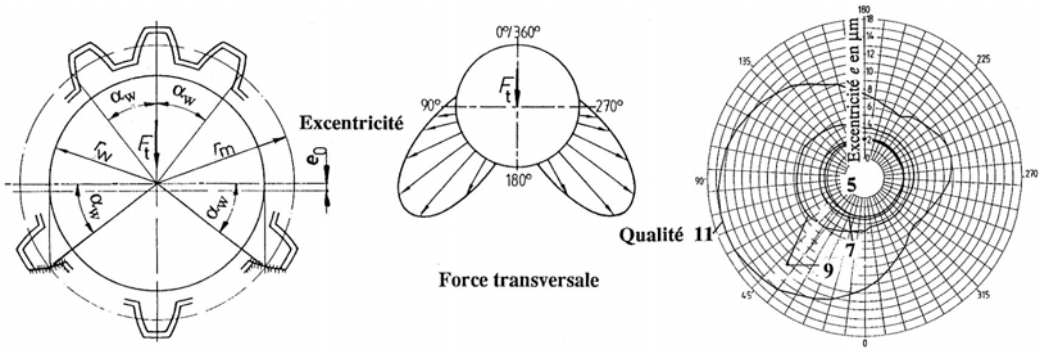


Figure 4.35 Répartition des forces sur les flancs de la denture dans le cas d'une combinaison :
Un couple et une force transversale.
Pression sur le flanc de la dent et grandeurs de calcul de la flexion dans le pied

Le choix de la dimension nominale est telle que le diamètre de référence corresponde au diamètre intérieur du roulement pouvant encore se glisser derrière l'assemblage dentelé. Pour les modules $m \leq 1{,}75$ mm et $d_B < 40$ mm, les diamètres de référence sont entiers par incrément de 1 mm.

4.4.3 PORTANCE DES ASSEMBLAGES À ARBRES CANNELÉS ET DENTELÉS

La méthode proposée ici fait l'objet d'une norme provisoire DIN 5466 de juillet 1983 et se base surtout sur plusieurs publications, en particulier celles de P. Dietz [1.36] et [1.37]. Le texte présente seulement les principes des méthodes et les hypothèses utilisés dans la norme.

4.4.3.1 BASES DE LA THÉORIE DE LA RÉPARTITION DE LA CHARGE

Le modèle de calcul peut être considéré comme un assemblage arbre - moyeu dans lequel l'arbre est attaché au moyeu par une suspension élastique. Les ressorts représentés sur la figure 4.34 symbolisent le comportement de la paire de dentures en engrènement. Sous l'effet de la charge, la partie intérieure subit un déplacement par rapport à la partie extérieure jusqu'à ce que les sollicitations extérieures soient compensées par les forces intérieures élastiques. Les flancs avant et arrière des dentures se déplacent tout d'abord pour éliminer le jeu dans l'assemblage et viennent en contact seulement après ce premier déplacement

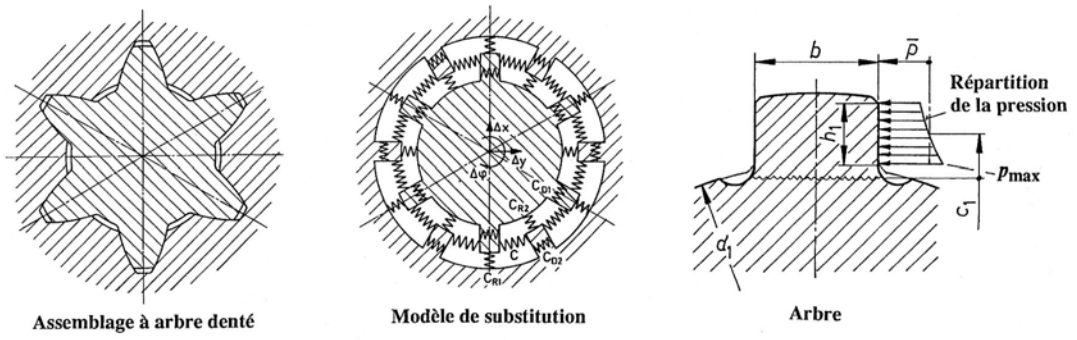


Figure 4.34 Assemblage à profil denté. Modèle de calcul composé des parties intérieure et extérieure reliées par des ressorts.
Hypothèse de la répartition de la pression sur le flanc de la dent

La méthode introduite par P. Dietz pour trouver la répartition des efforts intérieurs a consisté à admettre un déplacement arbitraire dont les composantes sont :

$$\Delta x \, , \Delta y \text{ et } \Delta\varphi,$$

et à contrôler l'interférence des profils de l'arbre et du moyeu. Cette interférence permet de trouver la déformation des surfaces en contact et à partir de la rigidité des ressorts, de calculer la charge appliquée. Une fois les charges intérieures connues, il est possible de rechercher la force résultante et le couple extérieur pour mettre le système en équilibre statique. La recherche de la déformation des dents ou des cannelures s'effectue en simplifiant la forme géométrique : trapèze ou rectangle, en introduisant la théorie des plaques dans la formulation des déformations et d'admettre une pression entre flancs selon une loi exprimée par un polynôme du troisième degré.

L'article de P.Dietz donne un organigramme général montrant la voie itérative introduite dans la recherche de l'équilibre de l'assemblage au moyen d'un calcul automatique. Les figures suivantes se servent de ces résultats.

- système de tolérance fixant les écarts sur les dimensions des dents de l'arbre et des creux dans le moyeu, les classes de qualité. Ce système de tolérances est semblable à celui des dentures droite ou hélicoïdale.

La norme DIN 5480 comprend 16 parties (Blatt), soit environ 80 pages, décrivant toutes les particularités de ces assemblages : généralités, dimensions générales, dimensions nominales pour tous les modules, système de tolérance, méthodes de contrôle, outillage. Les dimensions générales de l'arbre et du moyeu pour la denture à 30° figurent dans le tableau 3.3.

Tableau 4.3
Dimensions générales des assemblages à denture en développante
Selon norme DIN 5480, partie 1

Grandeur		Assemblage avec angle de 30°
Module	m	0,5 - 0,6 - 0,75 - 0,8 - 1 - 1,25 1,5 - 1,75 - 2 - 2,5 - 3 - 4 - 5 6 - 8 - 10
Pas	p	$\pi\ m$
Nombre de dents		
Arbre	z_1	
Moyeu	z_2	$-\ z_1$
Déport de denture		
Arbre	$x_1\ m$	$(-0{,}05\ \ldots\ +0{,}45)\ m$
Moyeu	$x_2\ m$	$-\ x_1\ m = (+0{,}05\ \ldots\ -0{,}45)\ m$
Saillie	h_{aP}	$0{,}45\ m$
		brochage fraisage mortaisage
Creux	h_{fP}	$0{,}55\ m$ $0{,}60\ m$ $0{,}65\ m$
	H_{ap0}	$= h_{fP}$
Hauteur de dent	h_P	$h_{aP} + h_{fP}$
Jeu de tête	c	$h_{fP} - h_{aP}$
Rayon de pied	r_{fP}	$0{,}16\ m$
Chanfrein de tête	f_{max}	$0{,}15\ m$ (voir DIN 5480 partie 16)
Diamètre primitif	d	$z\ m$
Diamètre de base	d_b	$z\ m\ \cos\alpha$
Diamètre de référence	d_B	$z_1\ m + 2\ x_1\ m + 1{,}1\ m$
Moyeu : diamètres		
De tête	d_{a2}	$z_2\ m + 2\ x_2\ m + 0{,}9\ m$
De pied	d_{f2}	$z_2\ m + 2\ x_2\ m - 2\ h_{fP}$
Arbre : diamètres		
De tête	d_{a1}	$z_1\ m + 2\ x_1\ m + 0{,}9\ m$
De pied	d_{f1}	$z_1\ m + 2\ x_1\ m - 2\ h_{fP}$
Epaisseur :		
Dent du moyeu	s_2	$0{,}5\ \pi\ m + 2\ x_2\ m\ \tan\alpha$
Entre dent	e_2	s_1
Dent de l'arbre	s_1	$0{,}5\ \pi\ m + 2\ x_1\ m\ \tan\alpha$

La denture se définit par le profil de référence, le nombre de dents z et le diamètre de référence désigné par d_B.

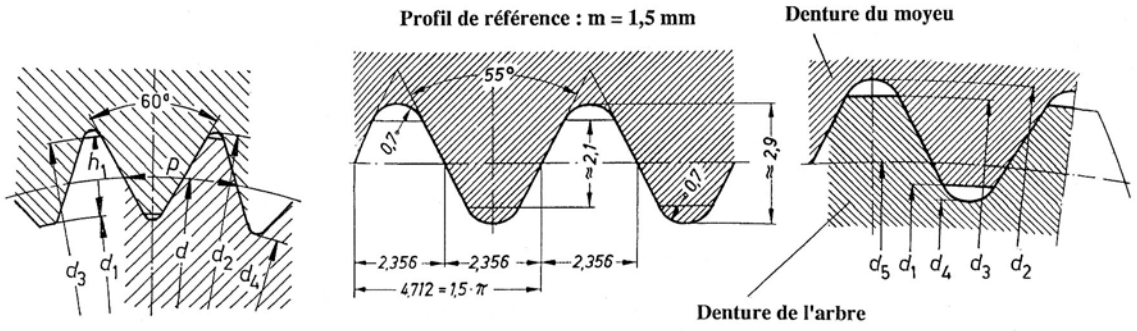


Figure 4.32 Assemblage à denture rectiligne selon DIN 5481.
A gauche : denture à 60°, A droite : denture à 55°

4.4.2.3 ASSEMBLAGES À DENTURE RECTILIGNE

L'avantage essentiel de ce mode d'assemblage est de pouvoir orienter facilement la position du moyeu par rapport à celle de l'arbre en décalant les deux pièces d'un ou de plusieurs pas circonférentiels. La denture est à profil triangulaire sur l'arbre, l'angle au sommet du triangle isocèle étant 60°. Les dimensions prévues dans la norme DIN 5481, f. 1, vont des diamètres 7 x 8 , 28 dents, à 55 x 60 , 42 dents, figure 4.32 , à gauche. Cette norme comprend également des assemblages à profil de référence triangulaire, angle total du triangle isocèle 55°, module 1,5 mm, pour des nombres de dents compris entre 41 et 81, figure 4.32 à droite. La norme fixe également les écarts admissibles pour ces deux types de profils dentés.

4.4.2.4 ASSEMBLAGES À CANNELURES EN DÉVELOPPANTE

Les assemblages à denture basse, dites cannelures à flancs en développante, servent à créer des assemblages entre arbre et moyeu démontables, coulissants ou serrés permettant de transmettre des couples et de centrer les pièces tout en facilitant la fabrication des composants. Les variantes se distinguent les unes des autres par les angles de pression : 30° ; 37,5° ou 45°, la denture avec angle de pression à 30° étant la plus courante. Les bases de la normalisation selon DIN 5480 sont :

- des profils de référence commun pour tous les modules d'où relations générales pour la définition de toutes les dimensions;
- centrage sur les flancs des dents, exceptionnellement sur le diamètre intérieur ou extérieur de l'arbre;

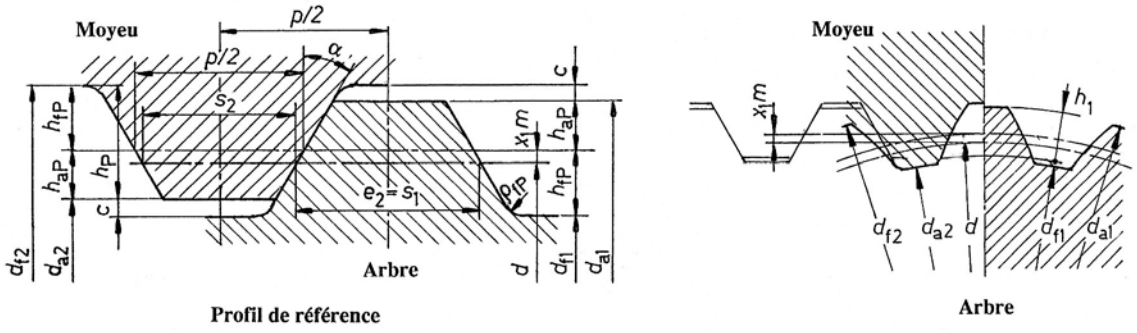


Figure 4.33 Assemblage à denture en développante : profil de référence
Dimensions de l'arbre et du moyeu

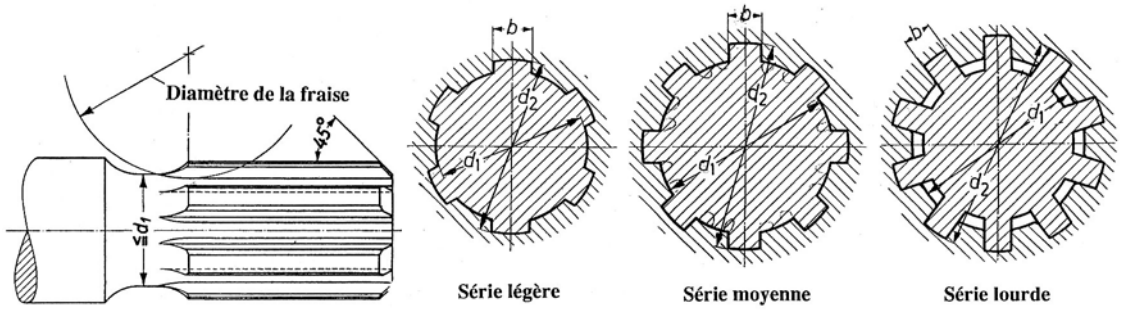


Figure 4.30 Arbres et moyeux cannelés des séries : légère, moyenne et lourde (norme suisse VSM)

Depuis 1982, il existe une norme ISO 14 concernant les cannelures cylindriques à flancs parallèles, à centrage intérieur, contenant les dimensions, les tolérances et les méthodes de vérification dimensionnelle. Cette norme n'a pas été acceptée en Suisse, mais par contre en Allemagne, en France et en Italie, etc. Elle comprend deux séries d'assemblages cannelés : série légère et série moyenne.

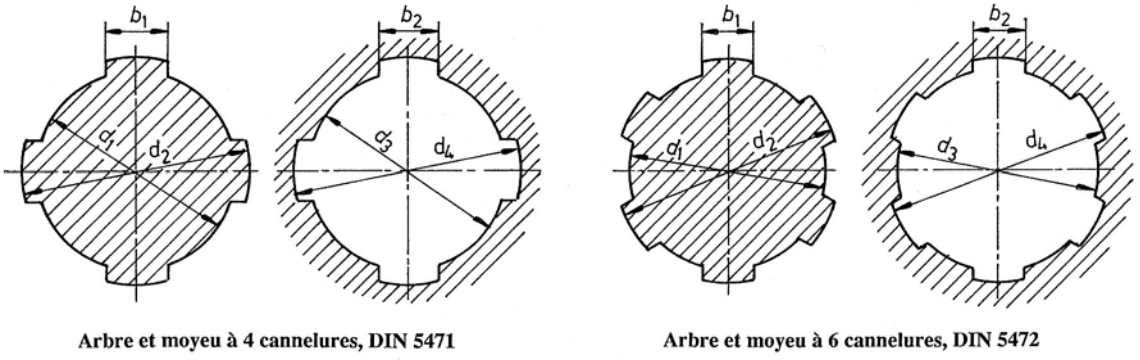


Figure 4.31 Arbres et moyeux cannelés pour machines outils selon DIN 5471 et 5472

4.4.2.2 ARBRES ET MOYEUX CANNELÉS POUR MACHINES OUTILS

Deux normes DIN 5471 et DIN 5472 décrivent les dimensions des arbres et moyeux cannelés avec 4 cannelures pour DIN 5471, 6 cannelures pour DIN 5472, centrage sur le diamètre intérieur. Ces deux normes prévoient trois variantes d'exécution pour l'arbre :

- *forme A* : profil par génération au moyen d'une fraise,
- *forme B* : profil par fraise disque sur diviseur,
- *forme C* : flancs rectifiés. Il est recommandé dans ce cas de prévoir tout d'abord un dégagement à la racine de la surface rectifié par fraisage.

Le centrage s'effectue sur le diamètre d_1 de l'arbre : champs de tolérances : g6 pour un ajustement avec jeu, j6 pour un ajustement serré, alésage H7 , la classe de tolérance étant IT7 ou éventuellement IT6 si c'est nécessaire. Les dimensions normées sont comprises entre (diamètre intérieur x diamètre extérieur x largeur de la cannelure) :

- assemblage à 4 cannelures : de 11 x 15 x 3 à 68 x 78 x 16,
- assemblage à 6 cannelures : de 21 x 25 x 5 à 130 x 145 x 24.

4.4.1.2 PROFIL HEXAGONAL

Les hypothèses de répartition de pression dans la direction axiale et sur les faces sont identiques à celles du profil carré. La répartition triangulaire sur toute la face pourrait intervenir lorsque l'assemblage est serré, le serrage initial étant négligé, sur la demi face lorsque l'assemblage est prévu avec du jeu. Les six poussées résultantes sur les faces doivent compenser le couple de torsion à transmettre M_t . La pression maximale se trouve, dans le cas de ces deux hypothèses, par la même expression :

$$p_{max} = 8\, M_t / e^2\, l_u = 6\, M_t / s^2\, l_u. \qquad (4.17)$$

Le contrôle de l'assemblage est aussi complété par le contrôle de la contrainte de torsion dans la section hexagonale. Cette contrainte vaut :

$$\tau_t = M_t / W_t,$$

avec :
$W_t = 0{,}189\, s^3$ le module de résistance à la torsion d'une section hexagonale.

4.4.2 ARBRES ET MOYEUX CANNELÉS OU DENTELÉS

Si l'arbre de transmission doit supporter un couple de torsion relativement élevé par un assemblage à clavette, la pression maximale entre la clavette, l'arbre et le moyeu devient trop grande, donc inadmissible. C'est très souvent le cas dans les assemblages comportant des arbres en acier amélioré pour lesquels la contrainte de rupture dépasse 600 à 800 N/mm^2. Comme déjà dit sous 4.3, l'introduction de deux clavettes n'est pas recommandée. Il est préférable de prévoir un assemblage à arbre et moyeu cannelés ou dentelés.

4.4.2.1 DESCRIPTION DES ARBRES ET MOYEUX CANNELÉS

Les cannelures sont taillées dans l'arbre, la forme, les dimensions et leur nombre étant normés. Malheureusement la normalisation nationale suisse ne correspond pas nécessairement à celle des autres pays, ce qui rend aléatoire l'interchangeabilité des pièces. Le couple de torsion devrait pouvoir se transmettre uniformément par toutes les faces portantes des cannelures. Les normes VSM , datant de 1945, prévoient trois gammes d'assemblages :

1. *Série légère* : pour faible couple et faible sollicitation de l'arbre à la torsion transmis principalement par un arbre creux. Rapport de la longueur du moyeu au diamètre de l'arbre : inférieur à 1,5 .
2. *Série moyenne* : pour couple élevé et sollicitation maximale de l'arbre à la torsion, mais sans déplacement axial du moyeu par rapport à l'arbre ou avec déplacement axial du moyeu mais sans charge. Rapport de la longueur du moyeu au diamètre de l'arbre : environ 1,5 à 2 .
4. *Série lourde* : pour couple et sollicitation maximale de l'arbre en torsion pendant le déplacement du moyeu par rapport à l'arbre. Rapport de la longueur du moyeu au diamètre de l'arbre : environ 1,5 à 2 .

polygonaux sont beaucoup moins fréquents. La gamme des dimensions des carrés, des hexagones et des octogones est normée, les largeurs et longueurs recommandées étant à adopter de préférence.

La transmission du couple de torsion entre l'arbre et le moyeu est obtenu par les pressions exercées sur les faces du polygone. La répartition de cette pression dépend de la précision de l'emboîtement, de la forme des deux pièces et de leur élasticité dans la transmission du couple. La répartition exacte de la pression entre les deux pièces ne peut pas se trouver simplement sans introduire un certain nombre d'hypothèses simplificatrices.

3.4.1.1 PROFIL CARRÉ

Les hypothèses introduites dans la recherche de la pression sont :

1. l'allure de la répartition axiale de la pression, sur la longueur portante l_u , est supposée constante,
2. la répartition de la pression sur chaque face du corps polygonal est admise selon deux modèles :
   - triangulaire sur toute la largeur s , ce qui pourrait correspondre à un assemblage ajusté pratiquement sans jeu,
   - triangulaire sur la demi largeur s , ce qui pourrait correspondre à un assemblage avec jeu plus important.

La répartition de la pression est représentée sur la figure 4.29 : partie supérieure sur toutes les faces, partie inférieure, sur toutes les demi faces. Les quatre poussées résultantes sur les faces planes doivent équilibrer le couple de torsion à transmettre M_t. La pression maximale se trouve, dans les deux variantes proposées, par la même expression :

$$p_{max} = 3\, M_t / s^2\, l_u. \qquad (4.16)$$

Le contrôle de l'assemblage est complété par le calcul de la contrainte de torsion dans le carré :

$$\tau_t = M_t / W_t,$$

avec :
$W_t = 0{,}208\, s^3$, module de résistance à la torsion de la section carrée.

La figure 4.29 à droite montre deux solutions pour le montage d'un élément sur un carré :

- montage coulissant à section transversale carrée constante,
- montage serré sur une pyramide tronquée à base carrée, solution utilisée très souvent dans la fixation de volant à main sur des organes pour fluides.

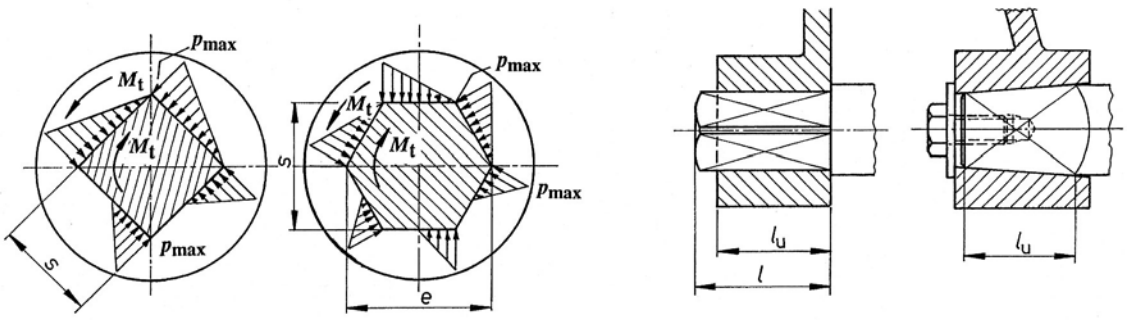
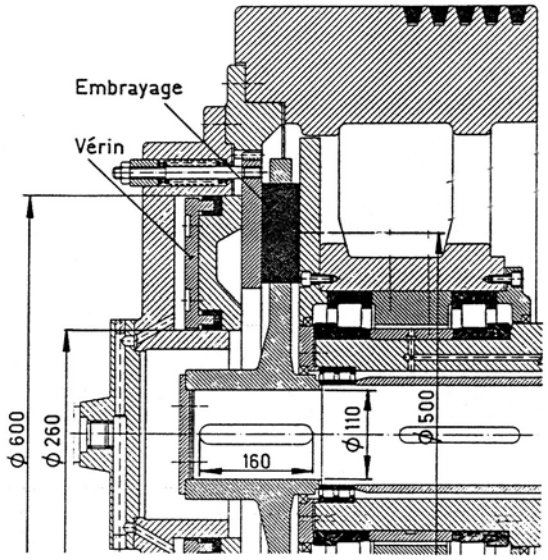


Figure 4.29 Transmission d'un couple de torsion par profils carré et hexagonal

3. *Contrôle de la clavette parallèle*

Force tangentielle de calcul : $F_t = 2\ M_t / d = 2 \cdot 7\,340$ m·N / 0,11 m = 133 450 N.
Longueur portante forme A : l_u = 160 mm - 28 mm = 132 mm.
Hauteurs portantes : h_1 = environ 8,2 mm, et h_2 = environ 7,8 mm.
Pressions moyennes :
- entre l'arbre et la clavettes : $\bar{p}_1$ = 133 450 N / (132 · 8,2 mm²) = 123,3 N/mm² .
- entre le moyeu et la clavette : $\bar{p}_2$ = 133 450 N / (132 . 7,8 mm²) = 129,6 N/mm² .

La pression moyenne est élevée surtout si elle est introduite par à-coups.



Cliché FAG

Figure 4.28 Entraînement d'un arbre de presse par un volant et un embrayage à disque unique

4. *Contrôle de l'arbre entaillé*

Diamètre de calcul : $d_1 = d - t_1$ = 110 mm - 10 mm = 100 mm.
Module de résistance à la torsion : $W_t = \pi\ 100^3$ mm³ / 16 = 196 350 mm³.
Contrainte de torsion : $\tau_t = 7{,}34 \cdot 10^6$ mm·N / 196 350 mm³ = 37,4 N/mm².

Remarque :

Il serait avantageux de remplacer la clavette parallèle par une paire de clavettes inclinées tangentielles car la transmission du couple serait assurée par un contact plus efficace.

4.4 ARBRES ET MOYEUX PROFILÉS

La transmission d'un couple de torsion entre un arbre et un moyeu peut aussi se réaliser par l'intermédiaire de l'emboîtement de ces deux pièces l'une dans l'autre, sans aucune pièce supplémentaire, grâce à la forme profilée des deux composants.

4.4.1 PROFILS CARRÉ ET HEXAGONAL

La première possibilité d'adopter un profil à emboîtement est constituée par l'emploi d'un profil transversal polygonal. Dans la plupart des cas courants, la forme carrée est taillée dans l'arbre cylindrique et creusée dans l'alésage. Le profil hexagonal et les autres profils

cylindriques ou tronconiques. Dans les moyeux coniques, la clavette semi-circulaire se met d'elle-même dans la position correcte. La normalisation se limite aux diamètres inférieurs à 50 mm. Les contrôles sont semblables à ceux des autres clavettes.

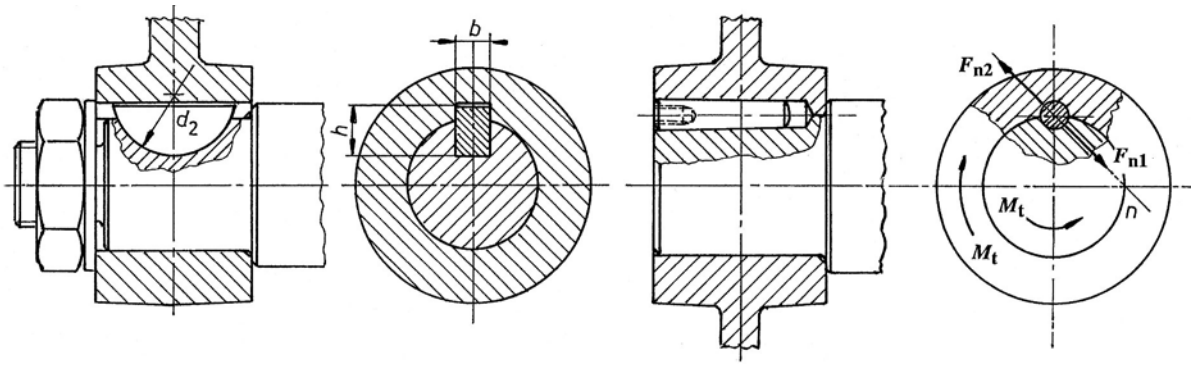


Figure 4.27 Clavette disque ou Woodruff. Clavette cylindrique ou conique

Dans les petits mécanismes, il est possible de remplacer la clavette à section rectangulaire par une clavette à section circulaire ou tronconique. L'usinage des rainures semi-circulaires ou semi-tronconiques s'effectue simultanément dans les deux pièces en positionnant le moyeu sur l'arbre : trou percé puis alésé. La transmission du couple s'effectue pratiquement sur deux quarts de la surface, diamétralement opposés. Les forces F_{n1} sur l'arbre et F_{n2} sur le moyeu sont inclinées à 45°.

4.3.8 EXEMPLE DE CONTRÔLE D'UN ASSEMBLAGE À CLAVETTE

Le volant d'une presse pour carrosserie est entraîné à la fréquence de rotation de 6,17 t/s par un moteur produisant une puissance de 33 kW et cinq courroies trapézoïdales. La transmission du couple vers l'arbre s'effectue par l'intermédiaire d'un embrayage à disque unique actionné par un vérin pneumatique à piston annulaire, diamètre extérieur 600 mm, diamètre intérieur 260 mm. Le diamètre moyen du disque d'embrayage est 500 mm, le coefficient de frottement de glissement sur les garnitures 34 %. La pression d'alimentation du vérin, compte tenu des pertes dans les conduites et les valves de commande, vaut 4 bar. Le rapport entre la poussée réelle et la poussée théorique produite par le vérin est estimé à 94 %. De l'embrayage, le couple est transmis sur l'arbre de sortie, diamètre 110 mm, par une clavette parallèle, forme A , longueur L = 160 mm. Vérifier la transmission du couple sur cet arbre sous l'effet de la charge maximale.

1. *Couple transmis par le moteur*

Vitesse angulaire de l'arbre moteur : $\omega = 2\,\pi\,n = 2\,\pi \cdot 6{,}17$ t/s = 38,77 rad/s.

Couple moteur : $M_{mot} = P/\omega = 33\,000$ W / 38,77 s^{-1} = 851,2 m·N.

2. *Couple produit par l'embrayage*

Hypothèse sur la transmission de couple dans l'embrayage :
Au moment du contrôle, l'embrayage glisse et sert de limiteur de couple.

Poussée produite par le vérin : $F_p = p\,\eta\,A = 0{,}4$ N/mm² $0{,}94\,\pi\,(600^2 - 260^2)$ mm²/4,
F_p = 86 350 N.

Couple de glissement de l'embrayage : $M_{gl} = \mu\,r\,F_N = 0{,}34 \cdot 0{,}25$ m · 86 350 N,
M_{gl} = 7 340 m·N,

soit environ 8,6 fois le couple nominal du moteur.

4.3.5.4 RECOMMANDATIONS

Si les pressions dépassent les pressions admissibles, il est recommandé de modifier le mode de transmission du couple de torsion. Le montage d'une clavette parallèle diamétralement opposée n'est pas recommandée car il est pratiquement impossible d'assurer une portance égale sur les deux clavettes. Le montage d'une seconde clavette inclinée, placée à 120° de la première, n'est pas recommandée pour la même raison. La longueur utile de la clavette ne devrait pas dépasser 1,5 fois le diamètre de l'arbre car la répartition de la pression ne serait pratiquement pas modifiée au début de la transmission des efforts. Dans l'assemblage arbre, clavette et moyeu, il est recommandé d'introduire le couple moteur d'un côté, d'appliquer le couple résistant de l'autre côté de l'assemblage.

4.3.6 CLAVETTE INCLINÉE TANGENTIELLE

La clavette inclinée tangentielle se compose d'une paire de clavettes formant coin à section rectangulaire, possédant une pente de 1 % . Le clavetage complet se compose de deux paires de clavettes disposées à 120° l'une de l'autre. Ce montage permet de transmettre des couples fortement variables dans les deux sens de rotation. La normalisation prévoit des diamètres d'arbre compris entre 60 mm et 1000 mm.

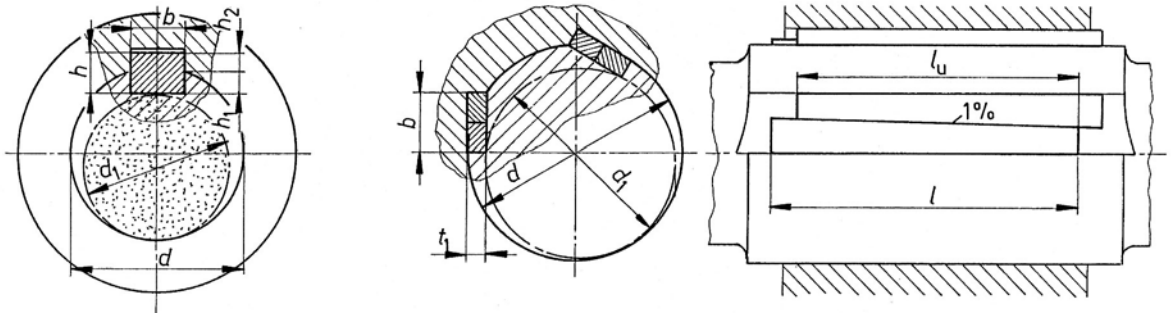


Figure 4.26 Dimensions de contrôle sur la clavette parallèle.
Clavetage à clavettes inclinées tangentielles

Chaque paire de clavettes transmet le couple de torsion dans un seul sens. Le moment du couple peut se calculer en supposant une pression répartie uniformément sur les faces portantes d'une des paires de clavettes :

$$M_t = 0{,}5\ (d - t_1)\ F_t \qquad \text{et} \qquad F_t = 2\ M_t / (d - t_1),$$

avec F_t la force normale appliquée sur les petites faces parallèles des clavettes.

La surface de contact est : $A_a = l_u \cdot t_1$,

et la pression moyenne : $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = F_t / A_a$.

La pression moyenne ne devra pas dépasser la pression admissible donnée dans le tableau 3.2 . Le contrôle de la contrainte de torsion dans l'arbre se fait par l'intermédiaire du diamètre du cercle inscrit d_1 dans l'arbre entaillé.

4.3.7 AUTRES TYPES DE CLAVETTES

La clavette semi-circulaire ou Woodruff s'utilise fréquemment en construction automobile et dans les machines-outils. Elle permet de transmettre de modestes couples car l'arbre est fortement entaillé par la rainure. Cet assemblage n'est applicable qu'aux extrémités des arbres

$$A_a = l_u\, h_1 \qquad \text{et} \qquad A_m = l_u\, h_2,$$

avec :

l_u longueur portante de la clavette, cette longueur ne devrait pas dépasser 1,5 fois le diamètre nominal d de l'arbre. Pour une clavette parallèle de forme A : $l_u = l - b$,

h_1 hauteur de contact entre la clavette et l'arbre,

h_2 hauteur de contact entre la clavette et le moyeu.

La pression moyenne se trouve alors par les expressions :

- entre la clavette et l'arbre : $p_1 = F_t / A_a$, (4.14.1)

- entre la clavette et le moyeu : $p_2 = F_t / A_m$. (4.14.2)

Les pressions ne devront pas dépasser les valeurs admissibles proposées dans le tableau 3.2 .

4.3.5.2 CONTRÔLE DE L'ARBRE

L'arbre entaillé est sérieusement affaibli par une forme peu favorable à la transmission du couple de torsion et sa transformation en forces tangentielle et normale. Le coefficient de forme, défini par le rapport entre la contrainte maximale de torsion de l'arbre entaillé à la contrainte nominale dans l'arbre non entaillé varie approximativement entre 2,5 et 4 suivant la forme de la rainure, en particulier en fonction du rayon de raccordement au fond de la rainure. Le coefficient d'effet d'entaille dépend du type de sollicitation. Pour un arbre de la nuance Ac 50-2, R_m = 500 N/mm^2, clavette de forme A, ce coefficient vaut approximativement en flexion β_{kf} = 1,8 et en torsion β_{kt} = 1,4, la contrainte étant définie par la section circulaire non entaillée. Une méthode élémentaire de contrôle consiste à calculer la contrainte de torsion dans une section circulaire inscrite dans l'arbre entaillé, donc tangente au fond de la rainure. Pour un arbre équipé d'une seule clavette, le diamètre de ce cercle vaut : $d_1 = d - t_1$. Le module de résistance à la torsion se trouve par :

$$W_{t1} = \pi\, d_1^3/16, \qquad (4.15.1)$$

et la contrainte de torsion par : $\tau_t = M_t / W_{t1}$. (4.15.2)

4.3.5.3 CONTRÒLE DU CISAILLEMENT DE LA CLAVETTE

Ce contrôle est nécessaire seulement si l'une ou les deux pressions dépassent les valeurs admissibles du tableau. La section cisaillée de calcul vaut :

$$A_c = b\, l_u,$$

et la contrainte moyenne de cisaillement :

$$\tau_{moyen\ c} = F_t / A_c.$$

La contrainte de cisaillement ne devra pas dépasser la valeur admissible applicable à la matière de la clavette. Un contrôle complémentaire du moyeu est nécessaire si la section m sur la figure 4.23 est faible.

M_a couple dans l'arbre à droite de la section placée à l'abscisse x,
G_a, G_m modules de glissement de l'arbre et du moyeu,
I_{pa}, I_{pm} moments quadratiques polaires de l'arbre et du moyeu.

Si l'on désire obtenir une variation linéaire du couple dans l'arbre et dans le moyeu, tout en maintenant la rigidité torsionnelle de l'arbre I_{pa} = constante, il faudrait modifier la forme extérieure du moyeu selon le graphique à droite sur la figure 4.24 , le diamètre tendant vers le diamètre de l'arbre à gauche, tendant vers l'infini à droite !

Dans une étude au moyen des éléments finis effectuée par R. Braschel, R. Hartmann et G. Müller [1.34] , la transmission du couple de torsion a été modélisée dans la section frontale pour un assemblage à clavette ajustée double. La modélisation de la clavette, la déformation des trois composants et la répartition des isocontraintes idéales sont représentées sur la figure 4.25 . La zone de contact a été affectée d'éléments de liaison permettant de transmettre des pressions, et si désiré, des frottements. Le couple de torsion dans l'arbre a été simulé par une accélération angulaire. Les résultats obtenus par cette méthode montrent que la répartition de la pression obéit approximativement à la répartition proposée par Boussinesq pour le contact d'une charge linéique indéformable sur un semi-infini élasto-isotrope.

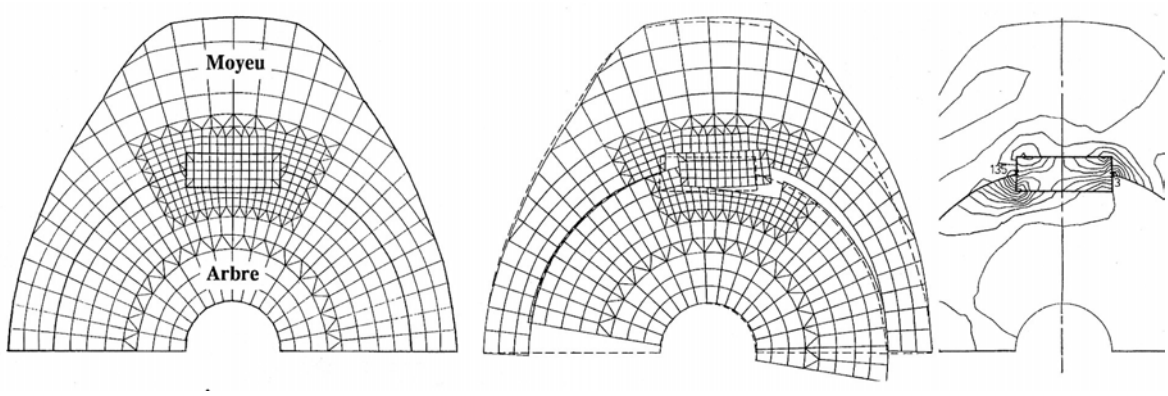


Figure 4.25 Modèle en éléments finis de la demi structure, déplacement de la clavette
Répartition des isocontraintes dans la zone de contact

4.3.5 CONTRÔLE DE LA CLAVETTE , DE L'ARBRE ET DU MOYEU

Les difficultés de chiffrer exactement la répartition des charges entre les trois éléments de l'assemblage nous obligent d'introduire des hypothèses fortement simplificatrices dans le contrôle de ces diverses pièces.

4.3.5.1 CONTRÔLE DE LA PRESSION

Le contrôle de la pression sur les faces latérales de la clavette parallèle ou inclinée fait intervenir les hypothèses suivantes, figure 4.26 à gauche :

- poussée résultante située au niveau du cylindre non entaillé,
- pression répartie uniformément entre la clavette, l'arbre et le moyeu,
- oubli volontaire des rayons et chanfreins dans l'estimation des aires de contact.

Le couple de torsion peut s'exprimer en fonction de la force tangentielle de calcul par :

$$M_t = 0{,}5\, d\, F_t \qquad \text{donc} \qquad F_t = 2\, M_t / d.$$

Les aires de contact entre la clavette et l'arbre A_a, entre la clavette et le moyeu A_m, se trouvent par :

$$\varphi_{\text{arbre x1}} = \int_0^{x_1} \frac{M_t(1-x/l)}{G_{\text{arbre}} \cdot I_{\text{p arbre}}} \cdot \mathrm{d}x,$$

$$\varphi_{\text{moyeu x2}} = \int_0^{x_1} \frac{M_t \cdot x/l}{G_{\text{moyeu}} \cdot I_{\text{p moyeu}}} \cdot \mathrm{d}x.$$

avec :

G_{arbre} module de glissement de l'arbre,
G_{moyeu} module de glissement du moyeu,
$I_{\text{p arbre}}$ moment quadratique polaire de l'arbre,
$I_{\text{p moyeu}}$ moment quadratique polaire du moyeu.

La déformation de deux pièces obéit à des lois paraboliques, les deux déformations ne se recouvrant pas. L'hypothèse idéale d'une variation constante du couple dans le sens axial est mise en défaut par la recherche des déformations. Sur la figure 4.24 à gauche, la partie hachurée représente la différence entre la déformation angulaire de l'arbre et celle du moyeu. La pression réelle ne peut pas être uniforme dans la direction axiale.

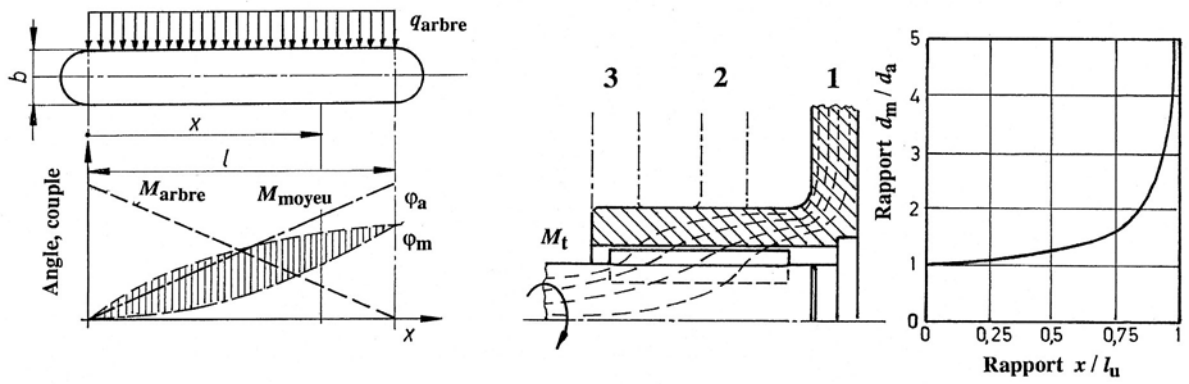


Figure 4.24 Hypothèses sur la répartition des pressions sur la clavette

La répartition de la pression sur les faces portantes de la clavette dépend aussi du mode de transmission du couple de l'arbre vers le moyeu. Sur la figure 4.24 au centre, les lignes de forces démontrent la transmission des efforts de l'arbre vers le moyeu à travers la clavette. Les conditions les plus favorables existent lorsque le couple de torsion M_t est introduit d'un côté de l'assemblage, le couple résistant étant de l'autre côté de l'assemblage, au point 1 sur la figure. Si le couple résistant se trouve au point 2 ou même au point 3, les tronçons de moyeu et d'arbre à droite des points de bifurcation des lignes de forces ne participent que très faiblement à la transmission du couple et la pression sur les faces de la clavette atteint des valeurs très élevées.

Pour obtenir une transmission correcte du couple dans l'assemblage, il faudrait que les déformations du moyeu et de l'arbre obéissent à l'égalité :

$$\mathrm{d}\varphi_{\text{m(x)}} / \mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi_{\text{a(x)}} / \mathrm{d}x.$$

En introduisant les relations fondamentales de la résistance des matériaux, cette condition se transforme en :

$$\frac{M_t - M_{\text{a(x)}}}{G_m\, I_{pm}} = \frac{M_{\text{a(x)}}}{G_a\, I_{pa}},$$

avec :

M_t couple introduit à gauche dans l'arbre,

4.3.4 TRANSMISSION DU COUPLE DE TORSION

L'assemblage "classique" pour la transmission d'un couple de torsion entre un arbre et un moyeu est la clavette parallèle ou éventuellement inclinée. Cet élément de machine est difficilement calculable car la répartition des pressions sur les faces portantes dépend non seulement de la clavette, mais surtout de la forme des deux autres constituants, en particulier du moyeu car l'arbre est habituellement à section cylindrique constante. La répartition frontale ou axiale de la pression ne peut pas se trouver par une expression élémentaire et même avec les meilleurs moyens de calcul actuels, cette pression ne peut se trouver que par l'intermédiaire d'un modèle très simplifié.

Dans la coupe frontale, perpendiculaire à l'axe de rotation, la transmission du couple de torsion, dans un assemblage à clavette parallèle, doit se réaliser d'une part par le contact entre l'arbre et le moyeu, force $\vec{F}_{\text{moyeu}}$ éventuellement tangente au cercle de frottement, d'autre part par une force normale à la clavette $\vec{F}_{\text{clavette}}$. Cette dernière force se répartit approximativement sur la moitié de la hauteur de la clavette. L'équilibre statique de la clavette seule impose une force surtout concentrée au niveau supérieur de la rainure. De plus, la clavette parallèle ne peut être soumise qu'à l'action de trois forces : une pression entre la rainure de l'arbre et la clavette, imposée par l'équilibre de rotation de l'arbre seul, une force normale provenant du contact de la clavette au fond de la rainure dans l'arbre et une force sur la face de la clavette en contact avec la rainure du moyeu, figure 4.23. La répartition de la pression n'est certainement ni uniforme, ni linéairement variable sur les faces portantes. Sans frottement, il est impossible de mettre la clavette en équilibre statique.

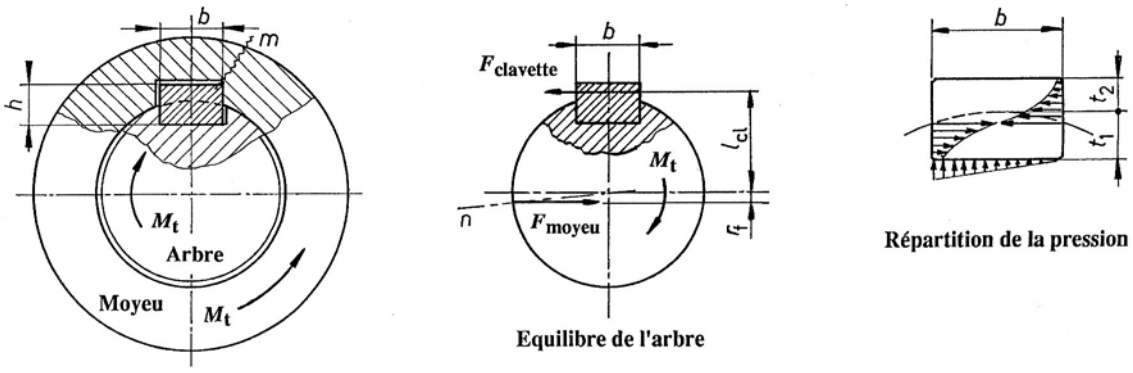


Fig. 4.23 Transmission du couple, équilibre de l'arbre avec clavette
Répartition des pressions dans la section frontale

Dans la direction axiale, la répartition de la pression dépend essentiellement des capacités de déformation torsionnelle de la clavette, de l'arbre et du moyeu. Supposons pour simplifier la discussion un couple de torsion se transmettant de l'arbre vers le moyeu suivant une loi linéaire et des sections constantes pour l'arbre et le moyeu. A l'abscisse x , dans le sens axial de l'arbre, le couple dans l'arbre vaut :

$$M_{\text{arbre x}} = M_t\,(1 - x / l),$$

le couple dans le moyeu valant : $M_{\text{moyeu x}} = M_t \cdot x / l.$

La déformation angulaire, sur le tronçon de longueur dx, d'une pièce à section cylindrique constante s'exprime par :

$$\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x = M_x /(G\, I_p).$$

En introduisant cette relation différentielle pour les deux déformations angulaires, l'angle de rotation des deux pièces se trouve par :

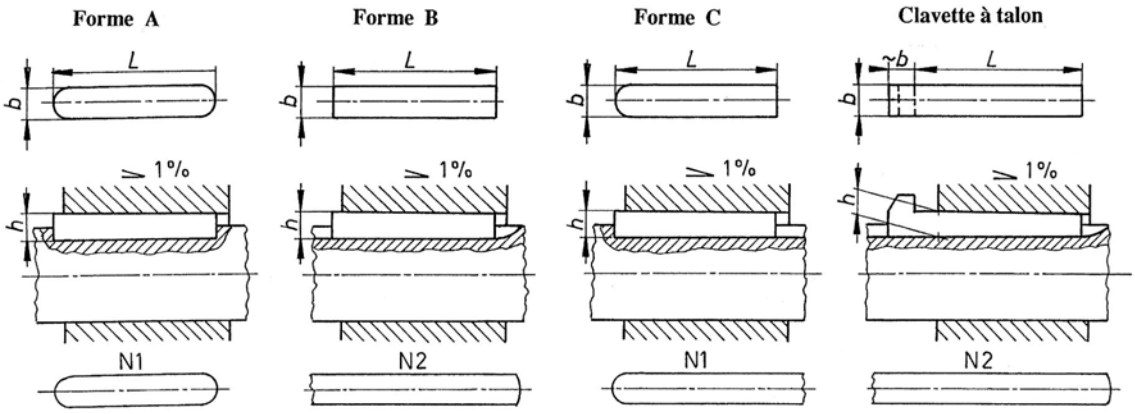


Figure 4.22 Clavettes et clavetage par clavettes inclinées (VSM)

La transmission du couple de torsion entre les trois composants : arbre, clavette et moyeu, s'effectue partiellement par frottement. Si la force tangentielle sur la face portante dépasse la force d'adhérence et en présence de jeux latéraux, la clavette transmet aussi cette force par emboîtement. Les clavettes inclinées creuses et sur méplat n'appartiennent plus à la normalisation actuelle.

Le logement de la clavette dans l'arbre se réalise par des rainures :

- type N1 obtenu par fraisage en bout, extrémités arrondies soit des deux côtés pour des rainures fermées, soit d'un seul côté pour les rainures ouvertes.
- type N2 obtenu par fraisage tangentiel utilisé pour les clavettes à extrémités planes.

La normalisation suisse prévoit des clavettes parallèles et inclinées pour des diamètres d'arbre compris entre 6 mm et 650 mm.

4.3.3 PRESSIONS ADMISSIBLES

La pression admissible entre la clavette et la rainure dans l'arbre ou dans le moyeu est donnée dans le tableau 3.2 . Pour des matières à résistance mécanique différente, multipliez la valeur du tableau par le rapport des résistances.

Tableau 4.2
Pressions moyennes admissibles entre les clavettes parallèles ou inclinées et l'arbre ou le moyeu
Pressions en N/mm^2

Type de clavette	Charge légèrement Variable		Charge fortement Variable	
	Ac 50	Ft grise	Ac 50	Ft grise
Inclinée Parallèle	120 120	75 75	80 80	50 50
Tangentielle	-	-	160	100

$$\frac{F_{Bx}}{F_s} = \frac{1}{\tan(\alpha_1 + \rho_1) + \tan(\alpha_2 + \rho_2)}.$$

Par exemple, en supposant les pentes du coin très faibles vis à vis des angles de frottement de glissement, pour un coefficient de frottement de glissement de 10 % , le facteur d'amplification vaut environ 5.

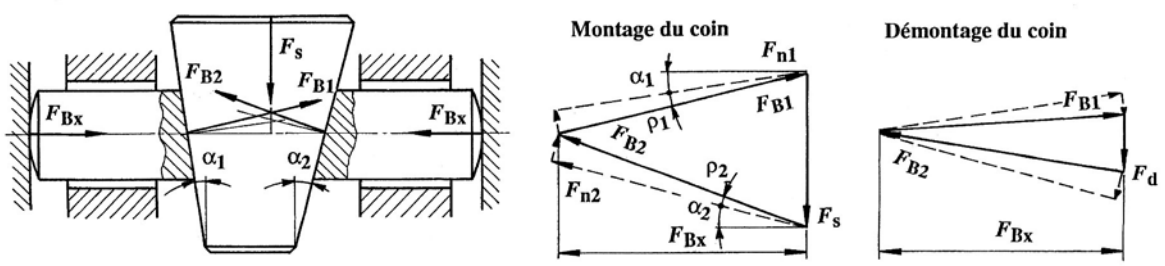


Figure 4.21 Modèle d'assemblage à coin au montage et au démontage

2. Forces au démontage du coin

En admettant la composante horizontale des réactions d'appui conservée sur chacune des faces du coin, la force de démontage se trouve par :

$$F_d = F_{Bx} [\tan(\alpha_1 - \rho_1) + \tan(\alpha_2 - \rho_2)] .$$

La condition d'irréversibilité du mécanisme est donnée par : $F_d \leq 0$. Sous charge statique permanente, le coin ne se desserre pas si cette condition de charge est vraiment présente. Sous charges variables, les déformations des diverses pièces du mécanisme provoquent généralement des glissements entre les surfaces en contact. Le coin doit être assuré contre le démontage par un dispositif complémentaire.

3. Cas particuliers

Une des faces du coin est perpendiculaire aux lignes d'action des projections F_{Bx} ou les coefficients de frottement sont identiques sur les deux faces pentues. Si les angles sont très petits, il est possible de remplacer les expressions des tangentes par une somme ou une différence d'arcs.

4.3.2.2 CLAVETTES INCLINÉES

L'introduction de clavettes inclinées est favorable à la transmission de couples de torsion moyennement variables; par contre il présente l'énorme inconvénient d'excentrer le moyeu par rapport à l'arbre, d'où une limitation de la fréquence de rotation par suite des forces centrifuges pouvant gêner le comportement de l'assemblage. Les clavettes inclinées trouvent emploi dans les machines de chantier, les engins de levage, les machines agricoles, etc. Les normes VSM prévoient quatre modèles de clavettes inclinées, voir figure 4.22 :

1. Clavette inclinée à bouts arrondis, forme A,
2. Clavette inclinée à extrémités planes, forme B,
3. Clavette inclinée avec une extrémité plane, l'autre bout étant arrondi, forme C,
4. Clavette inclinée avec talon de démontage, forme spéciale facilitant l'extraction de la clavette de son logement.

La forme de la rainure dans l'arbre est de type N1 ou N2; la pente de 1 % se trouve sur la face en contact avec la rainure dans le moyeu.

loger les vis d'extraction. La figure 4.20 montre diverses variantes, avec leur désignation, tirées des normes suisse VSM. Les clavettes parallèles sont fabriquées en acier dans les nuances Ac 50 et Ac 60.

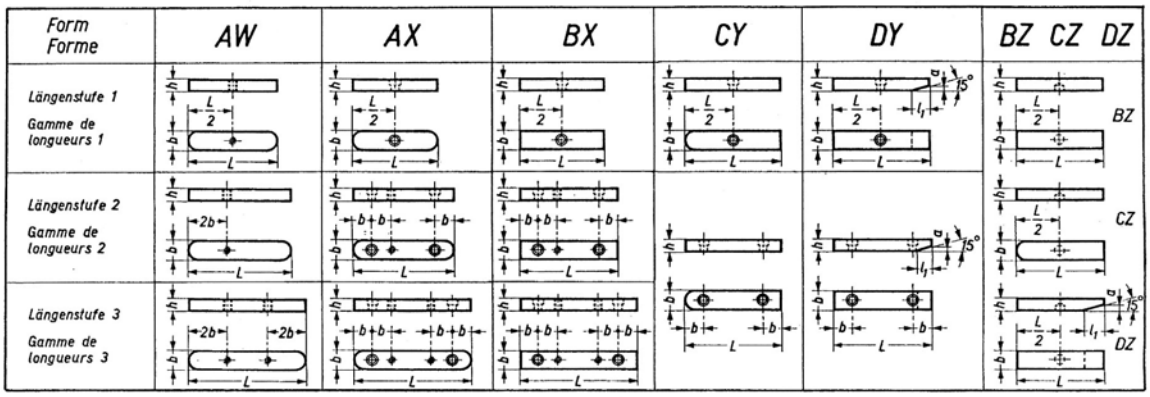


Figure 4.20 Clavettes parallèles avec logement pour vis et trous filetés (VSM)

4.3.2 DESCRIPTION DES CLAVETTES INCLINÉES

La clavette inclinée est constituée par un coin de faible épaisseur chassé entre l'arbre et le moyeu. Il en résulte un serrage énergique dans la direction radiale. L'angle du plan incliné est normalisé à 1 %, ce qui assure l'irréversibilité de l'assemblage.

4.3.2.1 EFFET DE COIN

Proposons-nous d'étudier l'assemblage à coin utilisé dans les clavettes inclinées. Les coins peuvent s'utiliser comme élément de réglage, de positionnement de deux ou plusieurs pièces les unes par rapport aux autres et comme pièce d'assemblage à action particulièrement importante. L'assemblage à coin travaille habituellement par frottement et par emboîtement. Le principe introduit est un double plan incliné inséré entre deux pièces.

1. Forces au montage du coin

Les forces de serrage sont créées par les deux pentes du coin et les forces résultantes sur les faces obliques. Le coin isolé est soumis à l'action de trois forces :

- la force de montage F_s supposée perpendiculaire à sa face,
- la réaction d'appui totale du plan incliné de gauche F_{B1},
- la réaction d'appui totale du plan incliné de droite F_{B2}.

Les directions de ces réactions sont imposées d'une part par l'inclinaison du plan incliné, d'autre part par le coefficient de frottement de glissement entre le coin et les pièces voisines. La force de serrage F_s est reliée aux projections horizontales des réactions d'appui F_{Bx} par, voir figure 4.21 :

$$F_s = F_{Bx} [\tan(\alpha_1 + \rho_1) + \tan(\alpha_2 + \rho_2)] . \qquad (4.13)$$

En supposant les appuis des pièces latérales sans frottement ou à frottement négligeable, la projection F_{Bx} correspond aux efforts produits sur les appuis extérieurs au mécanisme à coin. Le coin peut être considéré comme un amplificateur de forces. Le facteur d'amplification, rapport de la force axiale F_{Bx} à la force de serrage F_s, se trouve par :

4.3 LES CLAVETTES

Les clavettes sont des éléments de machines intercalées entre des surfaces planes ou plus souvent entre un arbre et un moyeu. Elles transmettent les efforts principalement par emboîtement. Leur section transversale est carrée ou rectangulaire. Les clavettes d'arbre nécessitent la fabrication de deux rainures, l'une dans l'arbre, l'autre dans le moyeu. Elles servent à transmettre un couple de torsion de l'arbre vers le moyeu ou dans le sens inverse. La fabrication de pièces à section rectangulaire et de rainures positionnées correctement dans l'arbre et le moyeu est une opération difficilement réalisable avec grande précision.

4.3.1 DESCRIPTION DES CLAVETTES PARALLÈLES

Les clavettes parallèles possèdent une section transversale constante, carrée dans les petites dimensions, le plus souvent rectangulaire, et sont montées encastrées dans l'arbre. Les normes VSM et DIN, basées sur ISO, prévoient plusieurs types de clavettes. Les normes suisses VSM retiennent les quatre types suivants, figure 4.19 :

1. Clavette parallèle à bouts arrondis, forme A,
2. Clavette parallèle à extrémités planes, forme B,
3. Clavette parallèle avec une extrémité plane, l'autre bout étant arrondi, forme C,
4. Clavette parallèle avec extrémités planes, surface partiellement biseautée sur la face en contact avec l'arbre, forme D.

   Les rainures dans l'arbre sont du type N1 , arrondies aux deux extrémités, ou du type N2, sans arrondis.

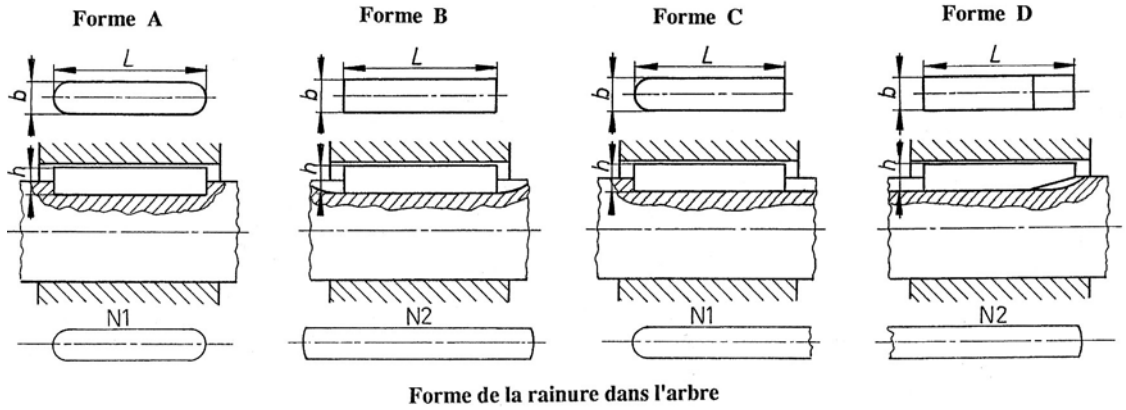


Figure 4.19 Formes des clavettes normées selon VSM et clavetage parallèle

Entre la clavette et le fond de la rainure de clavette dans le moyeu, un léger jeu radial évite le contact entre la clavette et le moyeu. Les champs de tolérances prévus sont applicables à la largeur *b* de la rainure dans l'arbre et dans le moyeu :

- clavetage libre : H9 / H9 ,
- clavetage légèrement serré : N9 / JS9 ,
- clavetage serré : P9 / P9 .

Les champs de tolérance étant de classe 9, il est difficile d'obtenir sûrement les clavetages proposés sans effectuer une ou plusieurs retouches au montage. Le clavetage légèrement serré est réservé aux assemblages dans lesquels le moyeu se déplace par rapport à l'arbre. La clavette est maintenue dans l'arbre par des vis de fixation à tête cylindrique. Pour faciliter l'extraction de la clavette serrée dans l'arbre, la clavette peut être équipée de trous filetés pour

Aire de contact dans la rainure : Ap = 228 mm2.
Constante d'élasticité du segment selon table : K = 133,0 kN·mm.
Contrainte limite apparente d'élasticité de l'arbre : R_e = 310 N/mm^2.

Charges selon catalogue (symboles selon [1.40]) :
Force dans la gorge : F_N = 38,0 kN,
Force sur le segment (angles vifs) : F_R = 73,3 kN,
Force sur le segment (chanfreins) : F_{Rg} = 14,4 kN,
Chanfrein nominal de calcul : g = 2,0 mm.

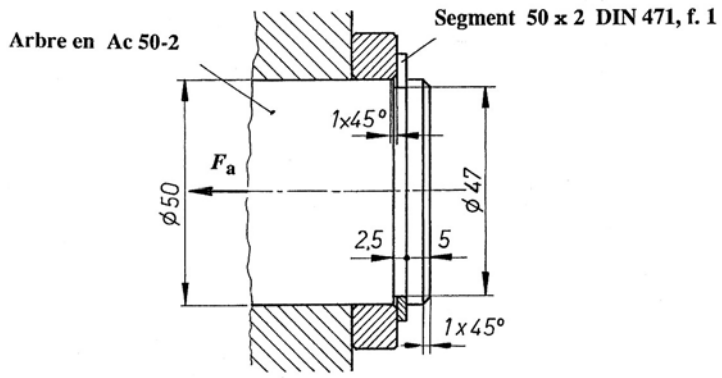


Figure 4.18 Contrôle d'un assemblage avec segment d'arrêt A 50

2. *Contrôle des valeurs du catalogue avec S = 1* :

Largeur moyenne du segment : b_m = 5,1 mm (1 - 0,25) = 3,83 mm,
Dimension complémentaire : $y = d_2$ = 47 mm,
Constante d'élasticité du segment : $K = (\pi\ 21 \cdot 10^4\ \text{N/mm}^2\ 2^3\ \text{mm}^3/6) \cdot \cdot \ln(1 + 2 \cdot 3{,}83\ \text{mm}/47\ \text{mm}) = 132\,813\ \text{N·mm}$,
Force dans la gorge : $F_N = F_{a\,max} = 200\ \text{N/mm}^2\ 228\ \text{mm}^2/1{,}2.1 = 38\,000$ N,
Sur le segment : angle de gauchissement : $\psi_{lim} = 0{,}22$ rad,
- bras de levier : $h_{vifs} = 0{,}3 + 0{,}002 \cdot 50$ mm = 0,4 mm,
- bras de levier si g = 2,0 mm : $h_{chanf} = 0{,}05$ mm + 2,0 mm = 2,05 mm,
- Angles vifs : $F_R = F_{a\,lim} = 0{,}22 \cdot 132\,813\ \text{N·mm}/0{,}4\ \text{mm} \cdot 1 = 73\,047$ N,
- avec chanfreins : $F_{Rg} = F_{a\,lim} = 0{,}22 \cdot 132\,813\ \text{N·mm}/2{,}05\ \text{mm}.1 = 14\,253$ N.

3. *Capacité de charge de la gorge* :

Rapport n / t : n / t = 4 mm / 1,5 mm = 2,7,
Facteur de correction : f_q = 1,4 ,
Force limite : $F_{a\,lim}$ = 310 N/mm^2 · 228 mm^2 / 1,4 · 1 = 50 485 N.

4. *Capacité de charge du segment* :

Bras de levier réel : h_{chanf} = 0,05 mm + 1,0 mm = 1,05 mm,
Force limite : Fa lim = 0,22 · 132 813 N.mm/1,05 mm·1 = 27 827 N.

5. *Force admissible compte tenu du coefficient de sécurité* :

La charge admissible est limitée ici par la capacité portante du segment. En adoptant un coefficient de sécurité S = 3 , la charge axiale vaut : $F_{a\,max}$ = 27 827 N / 3 = 9 250 N .

6. *Déplacement axial sous charge* :

Déplacement : f = 9250 N·1,052 mm^2/132 813 N·mm + 0,05 mm = 0,13 mm.

4.2.4.4 CONTRÔLE DÉTAILLÉ DE L'ASSEMBLAGE

Le contrôle complet de l'assemblage avec segment d'arrêt, en particulier si l'arbre au droit de l'entaille est sollicité simultanément par des efforts combinés comme un effort normal, un moment fléchissant et/ou un couple de torsion, devrait s'effectuer selon les recommandations données par W. Beitz et B. Pfeifer [1.31] . Si l'on désire tenir compte du coefficient de frottement de glissement entre les pièces de l'assemblage, comme représenté sur la figure 4.17 à droite, il est possible d'appliquer la relation développée par G. Pahl et J. Heinrich [1.38] pour la détermination du comportement du segment sous l'effet de la charge axiale, soit :

$$\psi = \frac{1 \mp \mu \cdot s / h}{K / (F_a h) + (s / h) \mp \mu + \mu^2 \cdot s / h}.$$

le coefficient de frottement de glissement valant pratiquement μ = 20 %.

4.2.5 RECOMMANDATIONS COMPLÉMENTAIRES

Le fonctionnement correct de l'assemblage contenant un segment d'arrêt nécessite l'observation des quelques règles élémentaires de montages citées ici.

1. *Influence du bras de levier h*
   Le bras de levier *h* diminue la capacité de charge du segment s'il devient trop grand. Pour les éléments de machines équipés d'arrondis, comme par exemple les roulements, il est nécessaire d'intercaler entre ces pièces une bague intermédiaire à angle vif. Un contrôle minutieux de la capacité portante du segment permet de déceler la solution la plus appropriée.
2. *Segment d'arrêt monté sur un arbre cannelé*
   La surface de contact entre le segment et l'arbre est diminuée pratiquement de moitié. Le calcul du gauchissement du segment dans la gorge n'est plus possible dans ces conditions, ce qui limite la capacité portante de l'assemblage.
3. *Pièces mobiles en rotation*
   Si l'effort axial et la vitesse de glissement restent très modestes, il est possible de prévoir un contact direct entre le segment d'arrêt et la pièce mobile en rotation. Si par contre la poussée devient moyenne à forte, il est nécessaire d'intercaler une rondelle intermédiaire entre la pièce mobile et le segment d'arrêt. Cette pièce d'appui doit être fixée sur la pièce soutenant le segment. Sans cette précaution, la pièce d'appui deviendrait mobile car le couple de frottement entre la pièce mobile et la rondelle d'appui serait plus grand qu'entre la rondelle et le segment.

4.2.6 EXEMPLE DE CONTRÔLE D'UN SEGMENT D'ARRÊT

Un segment d'arrêt 50 x 2 DIN 471, feuille 1, est monté sur un arbre de nuance Ac 50-2. La poussée axiale est transmise par l'intermédiaire d'une bague munie d'un chanfrein 1 x 45°. Contrôlez l'effort transmissible par cet assemblage et les déformations correspondantes.

1. *Dimensions géométriques et valeurs du catalogue*

Diamètres :

de l'arbre	d_1 = 50 mm,
de la gorge	d_2 = 47 mm,
intérieur, segment libre	d_3 = 45,8 mm,
Epaisseur	s = 2 mm,
Largeur	b = environ 5,1 mm,

Pour un appui à diamètre réduit sur l'arbre, il faut également contrôler le cas de charge le plus défavorable dans le gauchissement du segment.

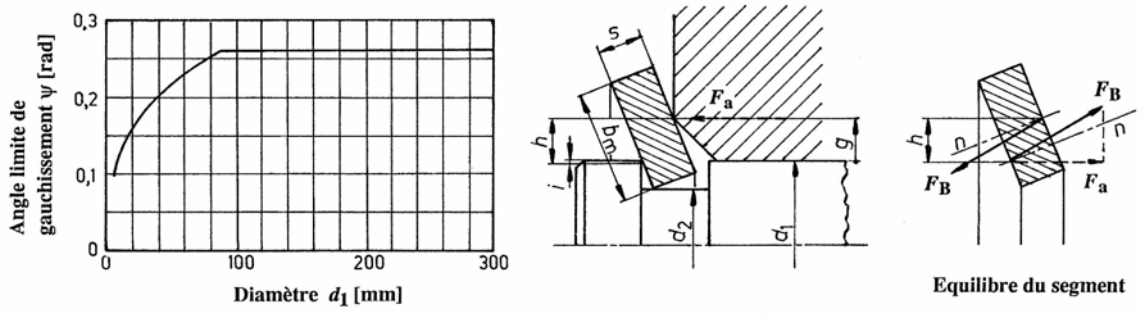


Figure 4.17 Angle de gauchissement admissible pour les segments d'arrêt
Appui avec chanfrein et équilibre du segment avec frottement (selon [1.38])

Sous l'effet de la charge axiale, la pièce venant s'appuyer sur le segment se déplace proportionnellement à la poussée. Ce déplacement peut se trouver à partir des caractéristiques du segment par l'expression simplifiée :

$$f = F\,h^2 / K + f_0. \qquad (4.11)$$

Le déplacement initial du segment f_0 varie entre 0,02 et 0,05 mm et représente la résultante de tous les déplacements produits dans l'assemblage jusqu'à ce que les surfaces portantes soient vraiment en contact. Rappel : le bras de levier h vaut :

$h = 0{,}3 + 0{,}002\ d_1$ pour des appuis à angle droit,

$h = 0{,}05 + g$ pour des appuis avec chanfrein ou rayon.

Si sous l'effet de la charge, le déplacement de la pièce est supérieur à la valeur calculée, il faut soit améliorer le contact en diminuant la dimension du bras de levier h , soit choisir un segment d'arrêt plus épais.

4.2.4.3 FRÉQUENCE DE ROTATION LIMITE

Sous l'effet de la force centrifuge, la pression entre le segment extérieur et la gorge taillée dans l'arbre diminue. Si la vitesse angulaire est suffisamment grande, le segment ne touche plus au fond de la gorge et peut se dégager entièrement de la gorge. Pour les segments d'arrêt selon norme DIN 471, feuille 1 et 2, les segments de type W , la fréquence de rotation limite se trouve par la formule :

$$n_{\lim} = \frac{620000\,b}{(d_2 + b)^2} \cdot \sqrt{\frac{d_2 - d_3}{d_3 + b}}. \qquad \text{[tours / seconde]} \qquad (4.12)$$

toutes les dimensions géométriques des diamètres et largeur étant exprimées en mm.

Ces valeurs doivent être multipliées par 0,95 pour les segments de type K, V et L . Cette expression donne la fréquence de rotation pour libérer le segment du fond de la gorge. La libération complète du segment de la gorge a lieu pour une fréquence de rotation 50 % plus grande.

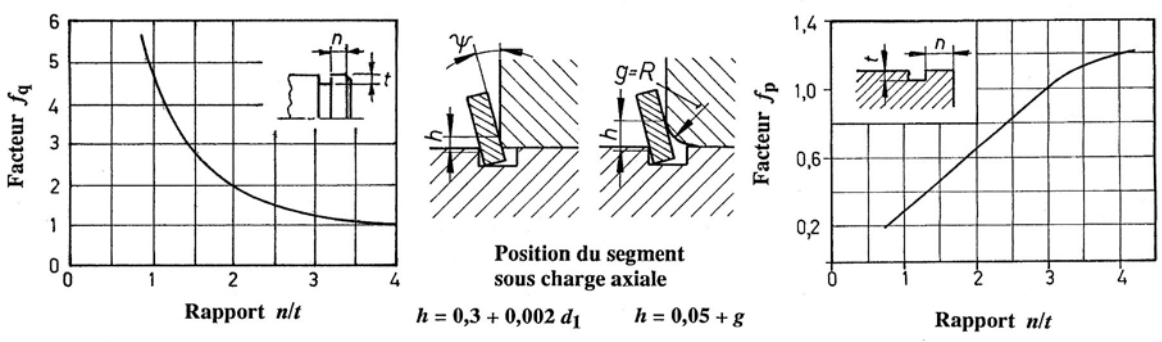


Figure 4.16 Facteurs de calcul pour les gorges de segments d'arrêt

4.2.4.2 CAPACITÉ DE CHARGE DU SEGMENT

Le contrôle et le calcul du segment se base sur le fait que le segment, sous l'effet de la poussée axiale de la pièce de machine, subit un moment fléchissant engendré par le décalage des lignes d'action des poussées. Le bras de levier réel est désigné par le symbole h . Il dépend de la déformation des pièces et de la forme de l'arête de la contre - pièce. Pour les segments d'arrêt selon DIN 471 et DIN 472 feuille 1, le bras de levier peut se trouver par les relations proposées sur la figure 4.16 au centre. La capacité de charge du segment dépend de sa résistance au déversement, de l'angle maximal de déformation admissible et du bras de levier. La force axiale admissible sur le segment s'exprime par la relation générale :

$$F_{a\,adm} = \psi\, K / h\, S, \qquad (4.10)$$

avec :

ψ angle de gauchissement limite, exprimé en radian, donné par la figure 4.17 en fonction du diamètre nominal d_1 du segment,
S coefficient de sécurité,
K constante d'élasticité du segment donnée dans les tables ou calculable par l'expression :

$$K = (\pi\, E\, s^3 /6) \cdot \ln(1 + 2\, b_m/y),$$

avec :

$b_m = b - e$	largeur moyenne du segment,
$e = 0{,}25\ b$	excentricité moyenne pour les segments d'arbre,
$e = 0{,}30\ b$	excentricité moyenne pour les segments d'alésage,
$y = d_2$	pour les segments d'arbre,
$y = d_2 - 2\ b_m$	pour les segments d'alésage,
$h = 0{,}3 + 0{,}002\ d_1$	appui à angle droit,
$h = 0{,}6 = \text{constant}$	appui à angle droit pour $d_1 \geq 150$ mm,
g	chanfrein ou rayon selon dimension du catalogue.

Les valeurs du catalogue sont applicables pour des segments d'arrêt avec un module d'élasticité : $E = 21 \cdot 10^4$ N/mm^2. Si les conditions de montage ne correspondent pas au cas fondamental, il faut apporter les corrections suivantes :

1. Utilisation d'un matériau à module d'élasticité E' :

$$F_{a\,adm}' = F_{a\,adm} \cdot E' / E.$$

2. Montage du segment avec chanfrein ou arrondi g' différent de celui de la dimension du catalogue :

$$F_{a\,adm}' = F_{a\,adm} \cdot g / g'.$$

4.2.4 CONTRÔLE DES PIÈCES DE L'ASSEMBLAGE

Le contrôle de l'assemblage peut s'effectuer dans la plupart des cas en se servant des valeurs données dans les tables du fabricant (Catalogue Seeger Orbis [1.40]). Dans certaines applications particulières, le contrôle comporte trois parties :

- la capacité de charge de l'assemblage :
  portance de la gorge,
  portance du segment d'arrêt;
- étude de la position du segment dans la gorge sous l'effet de la poussée axiale;
- fréquence de rotation maximale de l'arbre pour assurer la fonction des segments d'arrêt extérieurs.

4.2.4.1 CAPACITÉ DE CHARGE DE LA GORGE

Les valeurs données dans les tables sont applicables aux gorges et bouts d'arbre dans les conditions suivantes :

- rapport n / t = 3, t étant la profondeur de gorge et n la longueur portante extérieure sur l'arbre,
- matière de l'arbre ou de l'alésage avec une limite conventionnelle d'élasticité R_e = 200 N/mm^2.

Une augmentation du rapport géométrique n/t supérieur à 4 n'apporte pas d'amélioration sensible de la résistance de la gorge. Dans le cas d'un rapport n/t inférieur à 3, il faut procéder à une correction des valeurs nominales à l'aide du facteur f_q de la figure 3.16 . La capacité de charge de la gorge est contrôlée par l'intermédiaire de la pression moyenne entre le segment et sa gorge. L'aire théorique de contact est :

- pour un segment monté sur un arbre : $A_p = \pi\,(d_1^2 - d_2^2) / 4$,
- pour un segment monté dans un moyeu : $A_p = \pi\,(d_2^2 - d_1^2) / 4$.

La force axiale maximale de calcul applicable sur la surface annulaire se trouve par :

$$F_{a\,max} = R_e\, A_p / f_q\, S, \qquad (4.9)$$

avec :

R_e = 200 N/mm^2 , valable pour la matière de la pièce avec la gorge,

f_q = 1,2 pour n/t = 3,

S = 1 , coefficient de sécurité $\rightarrow$ attention : pas de sécurité, donc valeur limite !

Cette force axiale maximale ne contient donc aucune sécurité par rapport à l'écoulement de la matière sous charge statique ou rupture sous charge dynamique. En charge statique, le coefficient de sécurité doit être au moins égal à 3 . Si les conditions nominales ne sont pas remplies, il est nécessaire de procéder aux corrections suivantes :

- R_e' du matériau : $F_{a\,max}' = F_{a\,max} \cdot R_e' / R_e$.
- profondeur t' : $F_{a\,max}' = F_{a\,max} \cdot t' / t = F_{a\,max} \cdot A_p' / A_p$.
- rapport $n/t < 3$: $F_{a\,max}' = F_{a\,max} \cdot f_p$,

  f_p selon figure 4.16.

Les anneaux expansifs, à section rectangulaire ou carrée constante, subissent une déformation qui s'écarte de la forme circulaire et le contact au fond de la gorge ne s'établit qu'en trois points. Il est recommandé d'utiliser chaque fois les segments à section variable là où la place à disposition est suffisante.

4.2.3 TRANSMISSION DE LA POUSSÉE AXIALE

Les tables des fabricants contiennent les dimensions géométriques des segments et les grandeurs nécessaires à leur montage et au contrôle des assemblages. La transmission de la poussée axiale dans l'assemblage dépend non seulement de la forme du segment, mais également de la géométrie des pièces assemblées. Exemple : la transmission entre une bague, sollicitée par une charge axiale, et le segment d'arrêt monté dans la gorge de l'axe, fait intervenir une modification brusque des lignes de forces accompagnée de concentrations de contraintes locales. Les gorges des segments et des anneaux, usinées à angles vifs, engendrent une augmentation notable des sollicitations. Selon G. Pahl et J. Heinrich [1.38], les coefficients de forme des arbres entaillés pleins peuvent se donner par les relations :

- en traction : $\alpha_{kn} = 1{,}27 + 1{,}17 \left(t / r \right)^{0{,}5}$,
- en flexion : $\alpha_{kf} = 1{,}14 + 1{,}08 \left(t / r \right)^{0{,}5}$,
- en torsion : $\alpha_{kt} = 1{,}48 + 0{,}45 \left(t / r \right)^{0{,}5}$.

Dans ces expressions, t est la profondeur de la gorge et r est le rayon de fond de gorge, environ 0,04 mm à 0,06 mm dans les exécutions usuelles dites à angles vifs. Cet effet peut être atténué partiellement par un arrondi ou par des entailles de décharge [1.32].

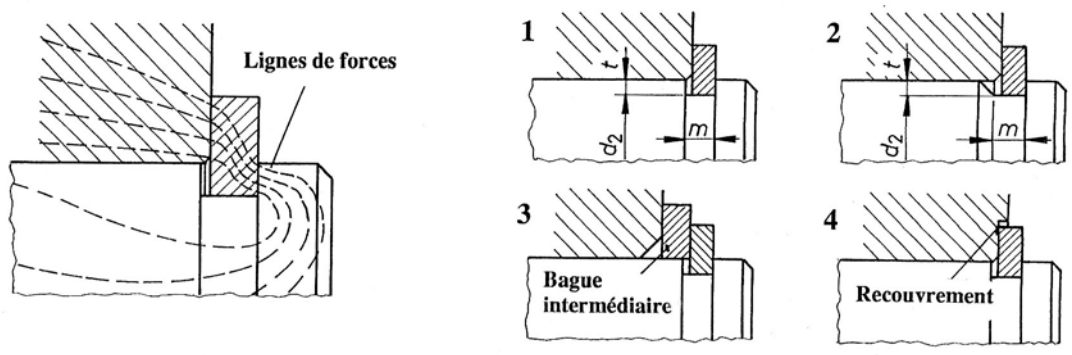


Figure 4.15 Transmission de la poussée entre la pièce et le segment d'arrêt
Conditions d'appui du segment dans les gorges

Il est recommandé de ne pas introduire de segments d'arrêt sur les parties des arbres ou des axes sollicités en flexion et/ou torsion à moins d'une modification du tracé de la forme de la pièce cylindrique. La dimension de fond de gorge, indiquée dans les tables, provoque une pression relativement élevée sur le segment. Elle peut être modifiée afin soit d'augmenter cette pression sur les pièces soumises à la force centrifuge, soit pour agrandir la surface de contact entre la gorge et le segment. La largeur de la gorge peut être adaptée aux conditions de fabrication. La surface d'appui, dans le sens de la poussée, doit rester plane et parfaitement radiale sous charge.

3. *Joncs d'arrêt DIN 73130 pour axes de pistons*. Ces joncs sont fabriqués en deux variantes, l'une avec crochets de montage, forme A, l'autre sans crochets, forme C, diamètres de 10 à 35 mm.

4.2.2 LARGEUR DU SEGMENT OUVERT

En partant de la déformation subie par une pièce allongée et cintrée, sollicitée en flexion, la relation pour calculer la déformation en flexion dans un segment devant rester circulaire s'écrit :

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \pm \frac{M_f}{E\, I_z}.$$

le moment fléchissant à la distance x de la ligne d'action des deux forces F directement opposées étant :

$$M_{fx} = x \cdot F.$$

L'exigence d'atteindre une déformation telle que la forme géométrique reste en tout moment circulaire, c'est-à-dire que le pourtour intérieur ou extérieur du segment présente partout le même rayon de courbure ρ, impose une largeur b_x variable valant :

$$b_x = b \sqrt[3]{\frac{x}{d_n}}. \qquad (4.8)$$

Pratiquement, le contour théorique du segment est remplacé par deux circonférences dont les centres sont éloignés l'un de l'autre de la distance e . La différence entre le profil idéal et le profil approché est sensible aux deux extrémités libres du segment. A cet endroit, le segment doit être renforcé pour les tenons de la pince de montage. Cette forme particulière est à la base du brevet de la maison Seeger [1.40].

La contrainte maximale de flexion dans la section la plus sollicitée, placée sur l'axe de symétrie du segment, dimensions $b \cdot s$, se trouve par :

$$\sigma_{f\,max} = \frac{6\, F\, d_n}{b^2\, s}.$$

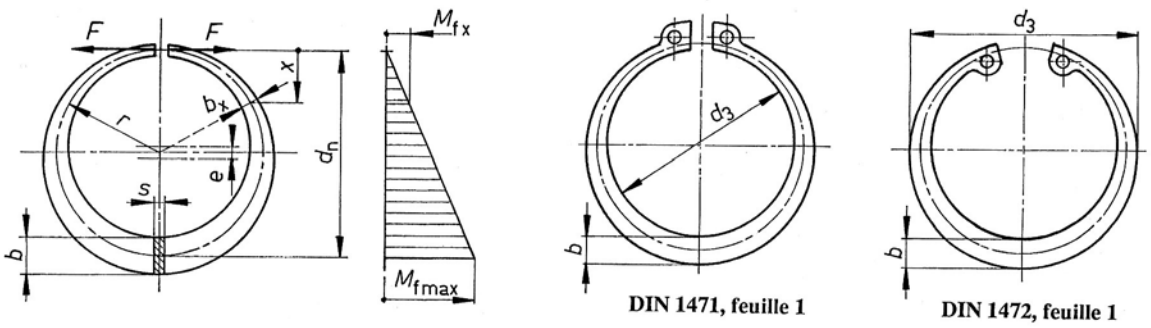


Figure 4.14 Anneau d'égale déformation en flexion selon brevet Seeger
Formes fondamentales : segment extérieur DIN 471, feuille 1, segment intérieur DIN 472, feuille 1

Pour rester dans le domaine des contraintes admissibles, les fabricants et les normes adoptent des dimensions optimales non seulement pour le segment, mais également pour la gorge de montage.

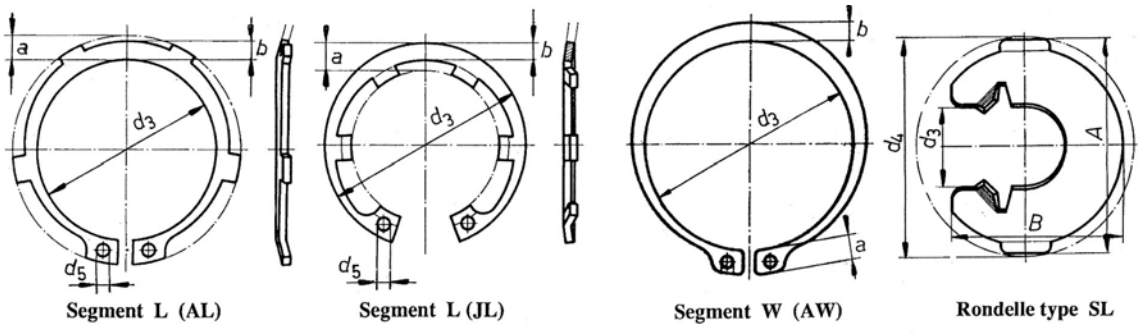


Figure 4.12 Segments d'arrêt compensant le jeu axial

3. *Rondelles de sûreté type SL pour arbres*. Elles sont à montage radial et compensent le jeu axial grâce à leur forme. Il faut aplatir ces rondelles pour le montage ou le démontage jusqu'à ce que les bossages permettent un engagement latéral dans la gorge. Ces rondelles épousent intégralement la forme de la gorge et sont utilisables sur des arbres tournant à des vitesses élevées.

4.2.1.5 ANNEAUX EXPANSIFS

Les anneaux expansifs à section constante ont pour inconvénient de subir, lors de leur mise en tension, une déformation s'écartant de l'arc de cercle et sont presque indémontables des alésages.

1. *Anneaux expansifs DIN 5417 pour arbres*. Ils servent à la fixation de roulements à rouleaux dont la bague extérieure comporte une gorge. L'utilisation de tels roulements et anneaux expansifs confère les avantages d'un alésage cylindrique et une portée axiale peu élevée. Diamètres selon normalisation des roulements : de 30 à 400 mm.

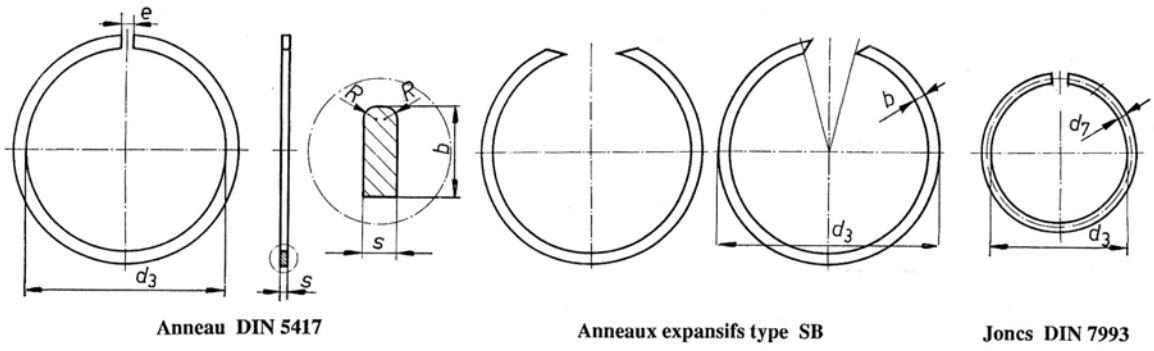


Figure 4.13 Anneaux expansifs

2. *Anneaux expansifs types SW / SB pour arbres et alésages*. Ce sont les anneaux qui possèdent la plus petite largeur radiale à l'exception des joncs d'arrêt. Ils sont utilisés pour la fixation de roulements à aiguilles, de cages à aiguilles et de bagues d'étanchéité. Diamètres : pour arbres type SW de 4 à 460 mm, pour alésages type SB de 7 à 440 mm.
3. *Joncs d'arrêt DIN 7993 pour arbres et alésages*. Ils sont fabriqués à partir de fils de section circulaire et de dureté brevetée. Ils sont utilisés de préférence dans des gorges demi rondes, avec un recouvrement en quart de rond de l'élément de machine qui exerce la pression. Diamètres : pour arbre type RW de 4 mm à 125 mm; pour alésage type RB de 7 mm à 125 mm.

4.2.1.3 SEGMENTS D'ARRÊT À MONTAGE RADIAL

A part la possibilité du montage radial, les avantages de ces segments sont : la profondeur de gorge n'est pas limitée par l'élasticité du segment, mais peut être choisie à volonté, aucune pince n'est nécessaire au montage ou démontage ce qui facilite le montage automatique.

1. *Cavaliers type St pour arbres*. Ils sont fabriqués pour de petits diamètres, d = 3 à 10 mm. Grâce à leur largeur importante, ils portent dans la gorge avec une force élevée.
2. *Colliers d'épaulement DIN 6799 pour arbres*. Ils sont utilisés en grande série dans la fabrication de machines de bureau et d'appareillage en raison des facilités de montage à l'aide d'un distributeur, diamètres d = 1,2 à 24 mm.

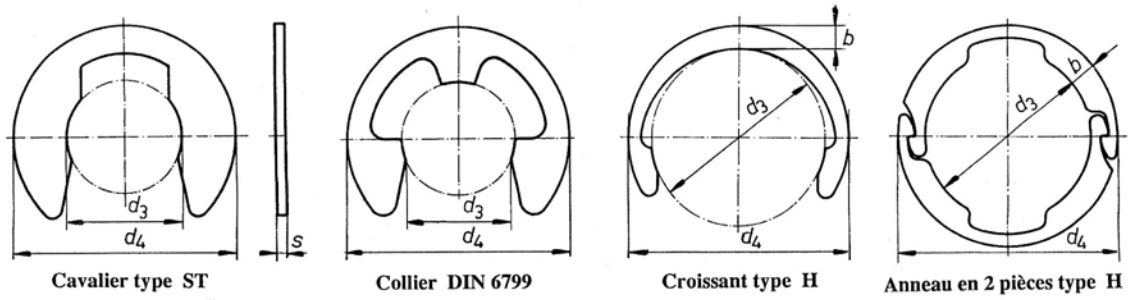


Figure 4.11 Segments d'arrêt à montage radial

3. *Croissants type H pour arbre*. Ce sont les seuls segments d'arrêt à montage radial conçus selon le principe Seeger. La hauteur d'épaulement n'est pas aussi grande que celle des types St ou DIN 6799. Les diamètres sont compris entre 3 et 55 mm. Utilisation : fixation intérieure des cages à aiguilles de cardans.
4. *Anneaux en 2 pièces, type S pour arbres*. Ils se composent de deux parties identiques se recouvrant et sont donc équilibrés. Ce sont les segments qui résistent le mieux à la force centrifuge. Avant d'utiliser ces anneaux, il faut examiner si leur montage est possible.

4.2.1.2 SEGMENTS D'ARRÊT COMPENSANT LE JEU AXIAL

Le montage sans jeu axial d'une pièce de machine ne peut être obtenu uniquement au moyen des segments d'arrêt standards à face plane. Les écarts cumulés d'usinage de la gorge, de la pièce à monter et du ou des segments entraînent inévitablement un jeu axial. Les segments d'arrêt de ce groupe sont en mesure de compenser élastiquement un tel jeu.

1. *Segments d'arrêt type L pour arbres et alésages*. La forme correspond à celle des segments d'arrêt type K. Ils ont toutefois des expansions du type rondelle à ressort qui leur permettent de compenser élastiquement un jeu axial de faible importance. Diamètres : pour arbres type AL : 16 mm à 100 mm; pour alésages type JL : 16 mm à 100 mm.
2. *Segments d'arrêt type W pour arbres et alésages*. Ils ont une fonction semblable à celle des segments type L, mais peuvent cependant compenser des jeux sensiblement plus importants tout en exerçant un efforts plus faible. Diamètres : pour arbre type AW : 40 mm à 150 mm; pour alésages type JW : 40 mm à 150 mm; exécution seulement sur commande.

3. *Segments d'arrêt type K DIN 983 / 984* . Ces segments possèdent plusieurs expansions uniformément réparties sur leur périphérie et assurent ainsi une meilleure fixation que les segments DIN 471 / 472 lorsque les pièces de machines possèdent des chanfreins, arrondis ou écartements importants. Ces segments de type K conviennent spécialement au montage à emboîtement et s'introduisent dans le montage des roulements à rouleaux à écartement d'arête important.
4. *Segments d'arrêt renforcés DIN 471 / 472 f. 2* . L'épaisseur, et dans les petites dimensions, la largeur radiale sont supérieures à celle des segments normés selon feuille 1. Ils absorbent des efforts axiaux plus importants, la capacité de charge étant proportionnelle au carré de l'épaisseur. Ces segments sont utilisés principalement sur des arbres cannelés ou dans des alésages cannelés.

4.2.1.2 SEGMENTS D'ARRÊT À VERROUILLAGE AUTONOME

Les segments d'arrêt à verrouillage autonome sont montés sur des arbres ou dans des alésages lisses dépourvus de gorge. Les valeurs indiquées dans les tables pour les charges axiales admissibles peuvent varier dans des proportions importantes. Il faut tenir compte des chocs et des vibrations diminuant la portance de ces éléments. Il est recommandé de vérifier par essais si leur emploi s'avère judicieux.

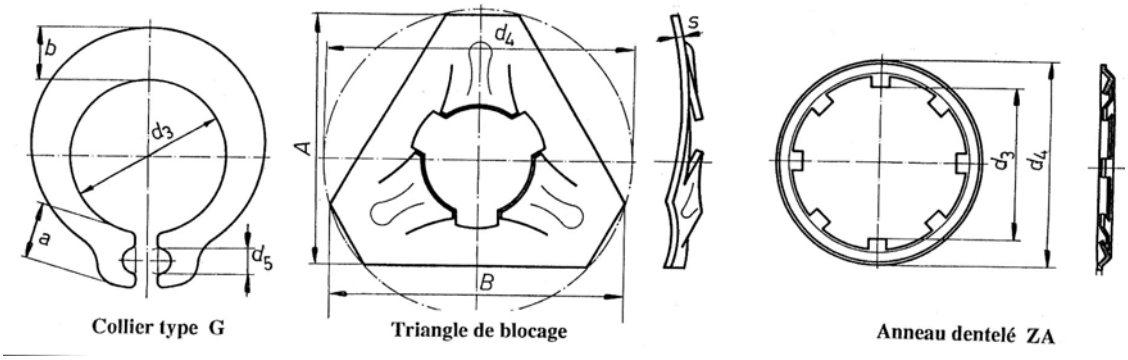


Figure 4.10 Segments d'arrêt à verrouillage autonome

1. *Collier d'étranglement, type G* . Ces colliers sont utilisés sur des arbres lisses sans gorge, diamètres 1,5 à 30 mm. En raison de leur largeur et épaisseur, ils sont capables de transmettre des efforts axiaux relativement grands. Les éléments à fixer peuvent se verrouiller sans jeu. Emploi : appareillage et machines de bureau.
2. *Triangles de blocage pour arbre*. Ils sont bombés et sont poussés dans un sens sur les arbres lisses, diamètres 1,5 à 12 mm. Les 3 languettes renforcées exercent un effet de ressort. La charge, de sens opposée, bloque les triangles sur l'arbre, ce qui rend le démontage impossible sans endommager les pièces. Emploi : construction d'appareils électriques.
3. *Triangles - frein d'écrou pour filetage métrique*. Ils présentent une surface triangulaire bombée découpée en son milieu en forme de pas de vis. Pour des efforts faibles, ils peuvent remplacer l'écrou et le frein d'écrou, dimensions M3 à M10.
4. *Anneaux dentelés pour arbre et alésage*. Leur fonction et application correspondent à celles des triangles de blocage. Ils possèdent toutefois un profil concentrique et une hauteur radiale de montage plus faible. La matière des arbres ou alésage doit être de dureté inférieure à celle des anneaux. Diamètres : extérieur de 1,5 à 45 mm, intérieur de 8 à 50 mm.

4.2 LES SEGMENTS D'ARRÊT

Les segments d'arrêt ou circlips sont des éléments de machines utilisés couramment dans les assemblages de pièces cylindriques sollicitées par des charges constantes ou peu variables. Ils permettent de retenir axialement les parties mobiles, de supporter des charges axiales et d'occuper très peu de place. Le but du segment d'arrêt, qu'il soit monté dans un alésage ou sur un axe, est de former un épaulement frontal qui bloque les pièces appuyées contre lui. Le segment d'arrêt est une pièce ouverte afin de faciliter son montage. La section transversale, habituellement rectangulaire, est variable afin d'obtenir une déformation constante sur toute la surface de contact du segment dans la gorge de montage. Les segments d'arrêt sont normalement fabriqués en acier à ressort dans diverses nuances. Ils sont de plus protégés contre la corrosion pour le transport et le stockage par phosphatage et couche d'huile. Dans des applications spécialement délicates, ces segments peuvent subir un traitement par galvanoplastie.

4.2.1 DESCRIPTION DES DIVERS TYPES DE SEGMENTS

Les segments d'arrêt et les anneaux expansifs sont partiellement normalisés selon DIN. D'autres formes moins courantes existent dans le commerce et s'introduisent dans des assemblages particuliers.

4.2.1.1 TYPES STANDARDS

Ce groupe comprend les segments d'arrêt à montage axial, à section variable pour former une pièce d'égale résistance et se montant dans des gorges.

1. *Segments d'arrêt DIN 471 / 472, f. 1*. Ce sont les segments les plus universels car ils sont capables de transmettre des efforts axiaux importants entre la pièce exerçant la poussée et la paroi de la gorge. Les segments extérieurs peuvent s'utiliser pour des vitesses élevées. La gamme normée prévoit des segments jusqu'au diamètre nominal de 300 mm, les fabricants offrant des dimensions intermédiaires et des segments jusqu'à 1000 mm. Des segments de ce type existent également en dimensions en pouces.

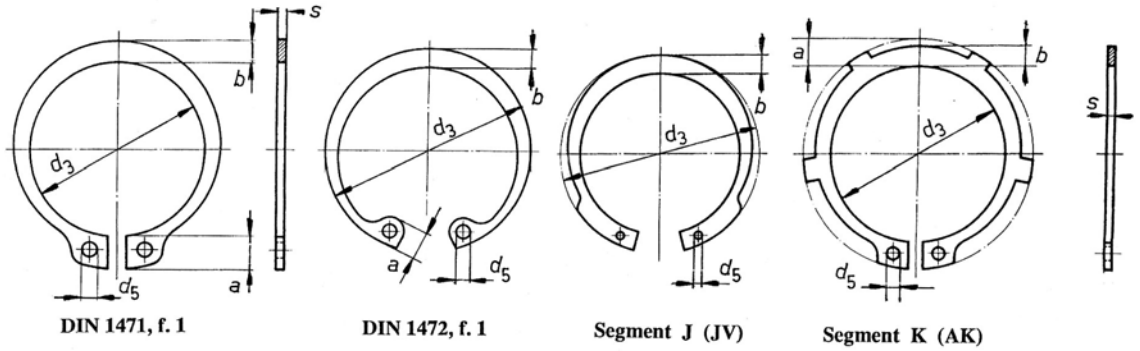


Figure 4.9 Segments d'arrêt : types standards

2. *Segments d'arrêt type V* . Ces segments présentent une hauteur radiale de montage inférieure à celle des segments d'arrêt selon DIN et forment un épaulement concentrique à l'axe de l'arbre ou de l'alésage. Ces segments peuvent transmettre des efforts axiaux et servir d'épaulement radial. Ils sont utilisés dans les cas d'espace radial réduit.

- entre la goupille et l'arbre : $p_{i\,max} = 6\,M_t / Di^2\,d$,
$p_{i\,max} = 6 \cdot 8000\ mm \cdot N/(16^2 mm^2 \cdot 4\ mm) = 46{,}9\ N/mm^2$.

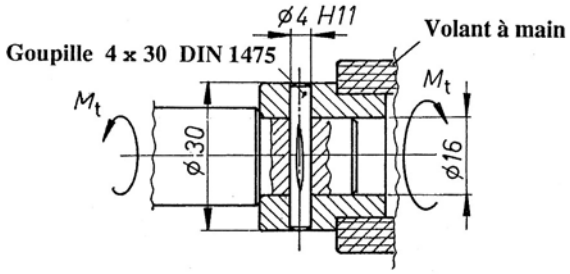


Figure 4.8 Fixation d'un petit volant à main

2. *Efforts dans la goupille*

Les efforts sont calculés dans la section située au passage de l'arbre vers le moyeu.
La charge linéique extérieure vaut : $q_e = 12{,}4\ N/mm^2 \cdot 4\ mm = 49{,}7\ N/mm$.
Effort tranchant : $F_T = q_e\,(D_e - D_i)/2 = 49{,}7\ N/mm\,(30\text{-}16)mm/2 = 348\ N$.
Moment fléchissant : $M_f = F_T\,(D_e - D_i)/4 = 326\ N \cdot (30\text{-}16)mm/4 = 1217\ mm \cdot N$.

3. *Contraintes simples*

Diamètre de la goupille : $d = 4\ mm$.
Aire de la section : $A = \pi\,d^2 / 4 = \pi\,4^2\ mm^2/4 = 12{,}57\ mm^2$.
Module de résistance à la flexion : $W_z = \pi\,d^3 / 32 = \pi\,4^3\ mm^3 / 32 = 6{,}283\ mm^3$.
Contrainte de cisaillement : $\tau_{c\,max} = (4 \cdot 348\ N) / (3 \cdot 12{,}57\ mm^2) = 36{,}9\ N/mm^2$.
Contrainte de flexion : $\sigma_{f\,max} = 1217\ mm \cdot N / 6{,}283\ mm^3 = 193{,}7\ N/mm^2$.

4. *Torsion dans l'arbre plein*

Module de résistance à la torsion : $Wp = \pi\,d3 / 16 = \pi\,163\ mm^3 / 16 = 804{,}2\ mm^3$.
Contrainte de torsion : $\tau_t = 8\,000\ mm \cdot N / 804{,}2\ mm^3 = 9{,}9\ N/mm^2$.

5. *Effet d'entaille dans l'arbre*

Module de résistance à la torsion : $W_{p\,entaille} = 804{,}2\ mm^3 - 2\ mm \cdot 16^2\ mm^2/3 = 633{,}5\ mm^3$.
Coefficient d'effet d'entaille ($R_m = 500\ N/mm^2$): $\beta_{kt} = 1{,}75$.
Contrainte de torsion : $\tau_{t\,max} = 8\,000\ mm \cdot N \cdot 1{,}75 / 633{,}5\ mm^3 = 22{,}1\ N/mm^2$.

Le contrôle de la contrainte de torsion dans une section située dans le plan de l'axe de la goupille n'est guère possible sans introduire le coefficient de forme de la section entaillée.

6. *Remarques finales*

Bien que l'assemblage paraisse à première vue dimensionné correctement, la pression maximale et la contrainte de cisaillement sont admissibles tandis que la contrainte de flexion dépasse largement les valeurs admissibles pour ce type de goupille. Pour le couple proposé, il faudrait modifier les dimensions adoptées ou changer le moyen de transmission du couple du volant vers l'arbre.

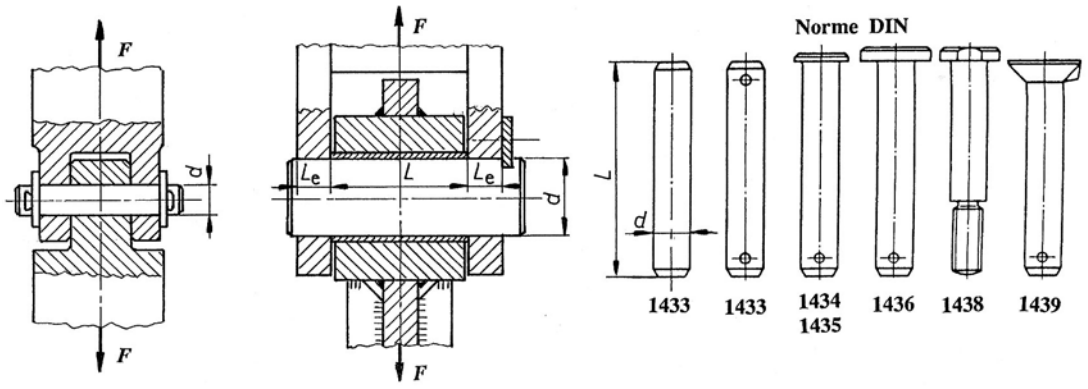


Figure 4.7 Articulation avec tourillon et sécurités. Tourillons selon norme

L'hypothèse de répartition uniforme de la pression moyenne entre le tourillon est conservée bien que toutes les pièces se déforment, voir par exemple la figure 1.1 représentant un mécanisme de ce type. La partie mobile se situe habituellement dans la pièce centrale de l'articulation. Comme les pressions admissibles pour les pièces mobiles sont nettement inférieures à celle des assemblages serrés, la surface projetée du coussinet doit être suffisamment grande, le rapport L / d ne devant pas dépasser 2 à 2,5 . Les diagrammes des efforts sont donnés sur la figure 3.4 , les sections à contrôler étant : la flexion au milieu de la longueur du tourillon, le cisaillement dans la section au droit du jeu axial entre les pièces.

Contrôles :

1. *Pression* :
   - entre tourillon et pièce centrale :

$$p_i = F / (L\, d) \leq p_{adm}\,, \qquad (4.7.1)$$

   - entre tourillon et fourche :

$$p_e = F / (2\, L_e\, d) \leq p_{adm}\,. \qquad (4.7.2)$$

2. *Contraintes* :
   - flexion : $\sigma_{f\,max} = M_{f\,max} / W_z \leq \sigma_{f\,adm}$,
   - cisaillement : $\tau_{c\,max} = 2\, F / 3\, A \leq \tau_{c\,adm}$.

4.1.7 EXEMPLE DE CONTRÔLE D'UNE GOUPILLE

Soit à contrôler les pressions et les contraintes dans la transmission d'un couple au moyen d'une goupille transversale montée dans un volant à main, diamètre extérieur 100 mm, sollicité par deux forces tangentielles de 80 N formant un couple. L'assemblage s'effectue au moyen d'une goupille transversale cannelée, dimensions 4 x 30 DIN 1475 , montée entre un arbre, diamètre 16 mm, Ac 50-2, et un moyeu, diamètre 30 mm, selon figure 4.8 .

1. *Pressions sur la goupille*

Couple de torsion : $M_t = 100\ mm \cdot 80\ N = 8\,000\ mm{\cdot}N$.

En admettant une répartition de pression linéaire entre l'arbre et la goupille, uniforme entre le moyeu et la goupille, la pression se trouve par :

- entre goupille et moyeu : $p_e = 2\, M_t / l_m (D_e - D_i)\, d$,

avec : $l_m = 0{,}5\ (30+16)\ mm = 23\ mm$,

d'où : $p_e = 2 \cdot 8000\ mm{\cdot}N / [23\ mm\ (30\text{-}16)\ mm \cdot 4\ mm] = 12{,}4\ N/mm^2$,

La pression positive agit sur la longueur $e_1 = e\ (b + 1) / 2\ b$, la pression négative sur la longueur $e_2 = e\ (b - 1) / 2\ b$, avec $b = 6\ (a + e/2)/e$.

Contrôle des contraintes dans la goupille :

La charge linéique maximale ou minimale se trouve par :

1. charge linéique maximale : $q_{max} = p_{max}\ d$,
2. charge linéique minimale : $q_{min} = p_{min}\ d$.

Le diagramme des efforts tranchants F_T est constant dans le tronçon en porte-à-faux, variable paraboliquement dans l'encastrement. Il en résulte une variation linéaire du moment fléchissant dans la partie en porte-à-faux et une variation cubique dans l'encastrement. Les contraintes se trouvent par :

1. contrainte de cisaillement : $\tau_{c\,max} = {}^4/_3 \cdot F_{T\,max} / A$,
2. contrainte de flexion : $\sigma_{f\,max} = M_{f\,max} / W_z$,

avec :

$A = \pi\ d^2/4$ aire de la section cisaillée,

$W_z = \pi\ d^3/32$ module de résistance à la flexion.

Contrôle usuel d'une pièce en porte-à-faux :

La contrainte maximale de flexion se trouve dans l'encastrement si l'hypothèse de la répartition de la pression est conservée. Pratiquement, le contrôle de la contrainte de flexion s'effectue au droit de l'encastrement avec un moment fléchissant valant $M_f = a\ F$. Dans les pièces en porte-à-faux, la contrainte et la déformation en flexion deviennent très rapidement importantes si la partie libre est beaucoup plus grande que le diamètre de la goupille.

Les méthodes de contrôle proposées dans les trois cas particuliers montrent le principe de la solution : introduction des hypothèses simplificatrices, calcul des pressions et des charges linéiques, contrôle des contraintes dans les sections les plus sollicitées après construction des diagrammes des efforts. Ces contrôles devraient être complétés par la recherche des déformations des diverses pièces.

L'arbre entaillé par le passage de la goupille possède un coefficient d'effet d'entaille compris entre 1,7 pour R_m = 400 N/mm^2 et 2,0 pour R_m = 900 N/mm^2 de l'arbre, valable pratiquement pour la traction, la flexion et la torsion dans l'arbre.

4.1.6 TOURILLONS D'ARTICULATION

Les tourillons sont des pièces cylindriques utilisées comme axe dans les articulations. Ils sont montés avec jeux radial dans l'une des pièces ou dans les deux composants. Un certain nombre de modèles courants sont normalisés. Pour les tourillons normés, le jeu important entre le tourillon et les pièces de l'articulation nécessite une sécurité contre tout déplacement axial hors du mécanisme. Les solutions usuelles de fixation sont : goupille fendue, goupille conique, segment d'arrêt. Les tourillons sans tête sont à préférer aux modèles avec tête, ces derniers étant réservés aux emplacements difficilement accessibles.

Le contrôle des tourillons d'articulation est semblable à celui des goupilles transversales placées dans des assemblages sollicités par une force axiale. La valeur de la pression moyenne entre le tourillon et les surfaces cylindriques creuses dans les parties à glissement va dépendre non seulement de la qualité du tourillon, mais aussi des propriétés des coussinets et de la présence ou de l'absence de lubrifiant.

La construction des diagrammes des efforts tranchants F_T, à variation parabolique dans la partie centrale, à variation linéaire dans la partie extérieure, et des moments fléchissants M_f, à variation parabolique et cubique, met en évidence les sections à contrôler. L'effort tranchant est maximal au milieu de la goupille, minimal aux joints des deux pièces assemblées. Le moment de flexion est maximal ou minimal dans la section où l'effort tranchant devient nul. Les contraintes simples ce trouvent par, figure 4.5 :

1. contrainte maximale de cisaillement :

$$\tau_{c\,max} = {}^4/_3 \cdot F_{T\,max} / A, \qquad (4.5.1)$$

2. contrainte maximale de flexion :

$$\sigma_{f\,max} = M_{f\,max} / W_z, \qquad (4.5.2)$$

avec :

$A = \pi\, d^2/4$ aire de la section cisaillée,

$W_z = \pi\, d^3/32$ module de résistance à la flexion.

4.1.5 GOUPILLE ENCASTRÉE EN PORTE-À-FAUX

La goupille encastrée est utilisée pour supporter des charges transversales appliquées à l'extérieur de l'encastrement. La répartition de la pression, avant et après l'application de la charge, reste inconnue.

Hypothèses initiales :

1. la pression de montage entre la goupille et l'encastrement est négligée,
2. la charge extérieure est une force concentrée F,
3. la pression entre la goupille et l'encastrement, après application de la charge, est répartie linéairement (triangulairement),
4. l'effet d'entaille au droit de l'encastrement est négligé.

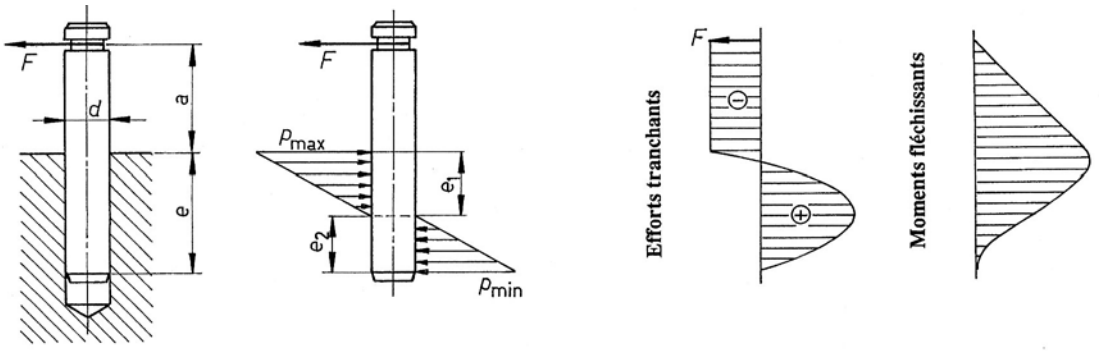


Figure 4.6 Goupille encastrée en porte-à-faux avec charge extérieure concentrée

Contrôle des pressions maximale et minimale :

En utilisant la relation générale de la pression et compte tenu de l'encastrement, la pression maximale au droit de l'encastrement et la pression minimale à l'extrémité de la goupille se trouvent par, figure 4.6 :

1. pression maximale :

$$p_{max} = F / e\, d \cdot (1 + 6\,(a + e/2)/e), \qquad (4.6.1)$$

2. pression minimale :

$$p_{min} = F / e\, d \cdot (1 - 6\,(a + e/2)/e). \qquad (4.6.2)$$

Le tracé des diagrammes des efforts tranchants F_T et des moments fléchissants M_f le long de la goupille permet de déceler les valeurs, figure 4.4 :

1. effort tranchant maximal : $F_{T\,max} = F_a / 2$,
2. moment fléchissant maximal : $M_{f\,max} = F_a\, D_e/8$.

Les contraintes en ces points peuvent se trouver par :

1. contrainte maximale de cisaillement :

$$\tau_{c\,max} = 4\, F_a / 6\, A, \qquad (4.3.1)$$

2. contrainte maximale de flexion :

$$\sigma_{f\,max} = F_a\, D_e / 8\, W_z, \qquad (4.3.2)$$

avec :

$A = \pi\, d^2/4$ aire de la section cisaillée,

$W_z = \pi\, d^3/32$ module de résistance à la flexion,

d, De, Di diamètres de la goupille, extérieur et intérieur de l'assemblage des pièces selon figure 4.4.

3. Assemblage sollicité par deux couples opposés

La transmission d'un couple de torsion entre un arbre et un moyeu se réalise par l'intermédiaire d'une goupille transversale. Ce type d'assemblage est réservé aux pièces de petites dimensions et faibles efforts.

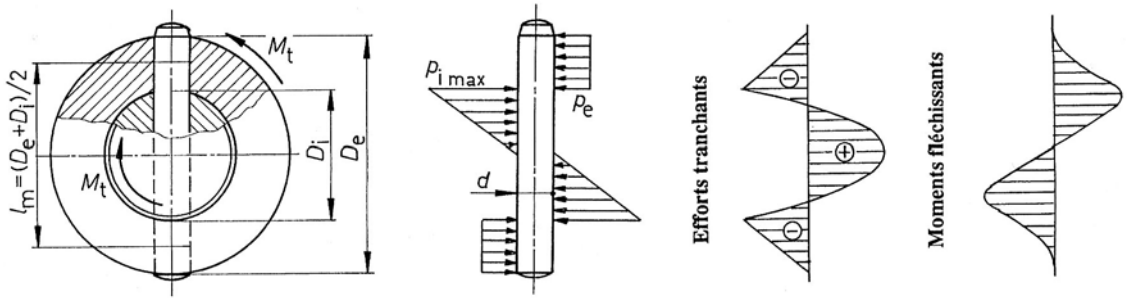


Figure 4.5 Goupille transversale : assemblage soumis à deux couples opposés

Hypothèses initiales :

1. la pression entre la goupille et le moyeu est répartie uniformément,
2. la pression entre la goupille et l'arbre est répartie linéairement (triangulairement),
3. la pression de montage est négligée.

Contrôle de la pression :

1. entre goupille et moyeu :

$$p_e = 2\, M_t / l_m\, (De - Di)\, d, \qquad (4.4.1)$$

2. entre goupille et arbre :

$$p_{i\,max} = 6\, M_t / d\, D_i^2. \qquad (4.4.2)$$

Contrôle des contraintes dans la goupille :

La répartition des pressions entre la goupille, l'arbre et le moyeu étant connue, la charge linéique se trouve par :

1. entre la goupille et le moyeu : $q_e = p_e\, d$,
2. entre la goupille et l'arbre : $q_{i\,max} = p_{i\,max}\, d$.

$$\tau = k \; F_T / A, \qquad (4.1)$$

avec :
$k = 4/3$ pour une section circulaire pleine,
$k = 2$ pour une section annulaire,
F_T effort tranchant,
A aire transversale de la goupille.

4.1.4 GOUPILLE TRANSVERSALE

1. Généralités

La goupille transversale s'utilise principalement aux extrémités des axes ou des arbres lors du montage de petits éléments comme des leviers, des bagues d'arrêt, des volants à main.

Proportions à adopter :

$d / D_i = 0{,}2$ à $0{,}4 \; D_i$ $\qquad$ $D_e / D_i = 1{,}5$ à 2.

2. Assemblage sollicité par une force axiale

L'assemblage se compose d'un axe, d'une bague d'arrêt ou de tout autre pièces à section circulaire annulaire à fixer, et d'une goupille transversale cylindrique ou conique pleine, creuse ou cannelée.

Hypothèses initiales :

1. la pression entre la goupille et les deux pièces assemblées est répartie uniformément. Elle se calcule en moyen de la force radiale et de la surface projetée de la goupille.
2. la pression produite au montage de la goupille est négligée.

Contrôle de la pression :

1. pression entre la goupille et la bague d'arrêt :

$$p_e = F_a / (d \cdot (D_e - D_i)). \qquad (4.2.1)$$

2. pression entre la goupille et l'axe :

$$p_i = F_a / (d \, D_i). \qquad (4.2.2)$$

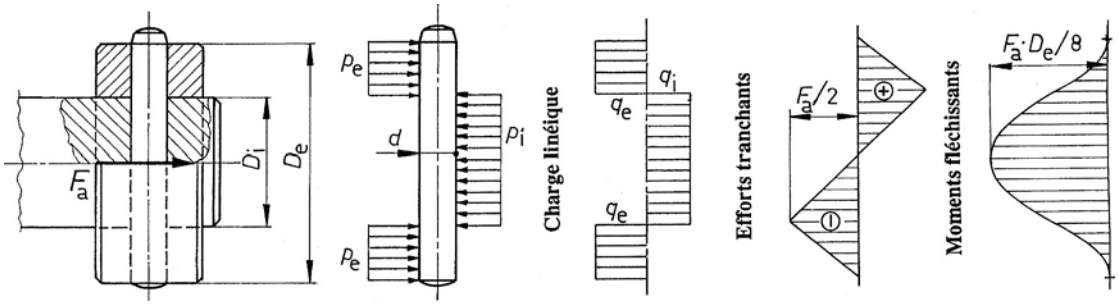


Figure 4.4 Goupille transversale : assemblage soumis à une force axiale

Contrôle des contraintes de cisaillement et de flexion

Les pressions sur la goupille dans les parties extérieure et intérieure étant connue, les charges linéiques sur la goupille valent :

1. charge linéique à l'extérieur : $q_e = p_e \, d$,
2. charge linéique à l'intérieur : $q_i = p_i \, d$.

par la maison Kerpin, d'où la désignation du modèle par KS xx ou Kerbstift, et sont partiellement normalisées par DIN.

5.1 goupilles cannelées d'ajustage avec gorge, acier 9SMn28K, selon norme DIN 1469 forme C, modèle KS 67, diamètres 2 à 8 mm, la gorge servant de point d'accrochage pour ressort.
5.2 goupilles cannelées cylindriques, acier 9SMnPb28K, selon norme DIN 1470, modèle KS 5, diamètres 2 à 8 mm, remplacent avantageusement la goupille cylindrique pleine.
5.3 goupilles cannelées coniques, acier 9SMnPb28K, selon norme DIN 1471, modèle KS 1, diamètres 1,5 à 12 mm, remplacent avantageusement la goupille conique pleine.
5.4 goupilles cannelées d'ajustement, acier 9SMnPb28K, selon norme DIN 1472, modèle KS 2, diamètres 1,5 à 12 mm, moitié de la longueur cylindrique sans entaille.
5.5 goupilles cannelées cylindriques, acier 9SMnPb28K, selon norme DIN 1473, modèle KS 3, diamètres 0,8 à 12 mm, cannelées sur toute la longueur.
5.6 goupilles cannelées embrochables, acier 9SMnPb28K, selon norme DIN 1474, modèle KS 4, diamètres 1,5 à 10 mm, cannelées sur la moitié de la longueur.
5.7 goupilles cannelées bombées, acier 9SMnPb28K, selon norme DIN 1474, modèle KS 8, diamètres 1,5 à 10 mm, partie centrale cannelée sur 1/3 de la longueur.
5.8 goupilles cannelées d'ajustage, acier 9SMnPb28K, modèle KS 24, diamètres 1,5 à 10 mm.

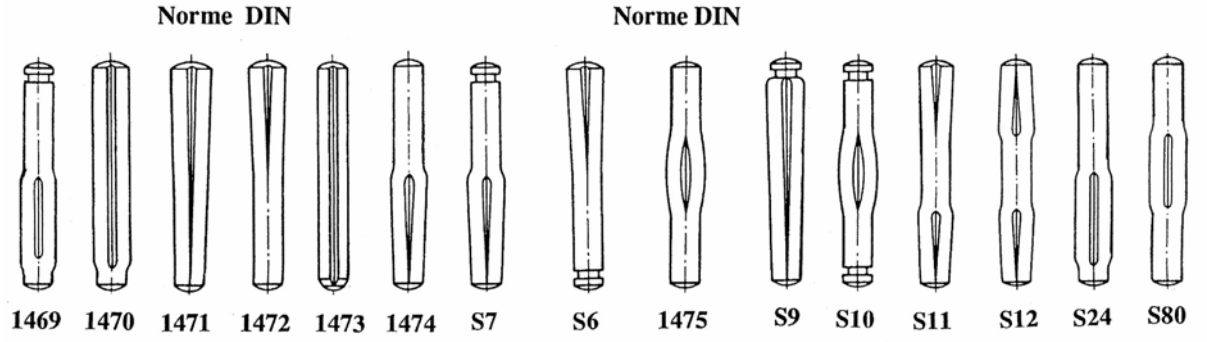


Figure 4.3 Goupilles cannelées

Les clous cannelés sont à tête demi ronde, norme DIN 1476, diamètres 1,4 à 10 mm, ou à tête conique, norme DIN 1477, diamètres 1,4 à 6 mm.

6. Goupilles en acier inoxydable

Afin d'éviter la destruction des assemblages par l'attaque de la rouille, les fournisseurs d'éléments d'assemblage offrent une gamme de goupilles en acier inoxydable. Cette collection comprend actuellement (selon catalogue Bossard) [1.33] :

6.1 goupilles cylindriques, champ de tolérance h8, acier A1, selon norme VSM 12771 B.
6.2 goupilles coniques, champ de tolérance h10, acier A1, selon norme VSM 12770 B.
6.3 goupilles élastiques en spirale, acier X12CrNi17/7, selon norme DIN 7343 Prym.
6.4 goupilles élastiques à fente, acier X12CrNi17/7, selon norme DIN 1481.
6.5 goupilles élastiques à fente dentée, acier X12CrNi17/7, selon norme VSM 12785.
6.6 clous cannelés à tête demi-ronde, acier A2, selon norme DIN 1476.

4.1.3 CONTRÔLE ÉLÉMENTAIRE DES GOUPILLES

La plupart des goupilles sont sollicitées par des pressions radiales provenant des pièces à assembler et des efforts extérieurs. Il en résulte principalement un cisaillement transversal accompagné de flexion. Le contrôle élémentaire de ce type de montage se résume à calculer la contrainte maximale de cisaillement par :

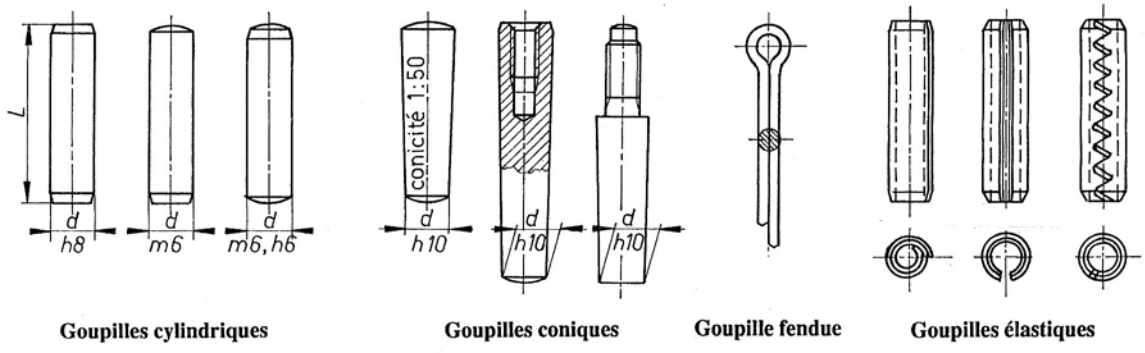


Figure 4.2 Goupilles cylindriques, coniques, fendues et élastiques

Si des impératifs sévères de centrage ou de positionnement sont exigés, ces éléments sont les seuls à remplir ces fonctions. La goupille conique impose des ajustements longitudinal et diamétral de cet élément dans le logement alésé dans les pièces.

3. Goupilles fendues

Les goupilles fendues, en acier à surface zinguée bleu, servent de sécurité sur des axes ou des tourillons peu sollicités. Les diamètres sont compris entre 1 et 8 mm, normes DIN 94 ou ISO 1234, la section transversale étant demi cylindrique. Les goupilles simples ou doubles à ressort sont constituées d'un fil d'acier cylindrique cintré, diamètres 1 à 8 mm, et servent de sécurité dans des mécanismes très peu sollicités.

4. Goupilles élastiques

Ces goupilles permettent un montage simplifié dans l'assemblage par un simple perçage. La pression exercée par la goupille suffit habituellement dans les assemblages modérément sollicités. Si l'assemblage exige un positionnement précis des pièces ou si les efforts sont importants et variables, seules les goupilles à section pleine peuvent donner satisfaction. Les modèles les plus courants sont décrits ci-après.

4.1 goupilles élastiques en spirale, fabriquées à partir de feuillard en acier ressort traité, HV 416 à 524, norme DIN 7343 Prym en exécution normale, DIN 7344 Prym en exécution lourde, diamètres 0,8 à 16 mm, élément idéal pour le montage automatisé grâce aux deux extrémités coniques.

4.2 goupilles élastiques à fente axiale, en acier à ressort traité, HV 422 à 560, norme DIN 1481 en exécution lourde, norme DIN 7346 en exécution légère, diamètres 1 à 12 mm, avec deux extrémités coniques pour diamètre inférieur à 8 mm.

4.3 goupilles élastiques à fente dentée, en acier à ressort traité, HRC 42 à 50, norme VSM 12785 en exécution lourde, norme VSM 12786 avec surface extérieure rectifiée, diamètres 1 à 20 mm.

5. Goupilles et clous cannelés

Cette catégorie de goupilles est caractérisée par une section transversale circulaire pleine et cannelures longitudinales à lèvres. La position et la forme des lèvres varient avec la fonction exigée. Les lèvres sont comprimées par l'alésage de la pièce solidaire de la goupille. Les pièces mobiles se déplacent sur un guidage cylindrique non entaillé. Les tolérances d'exécution du trou dans les pièces dépendent du diamètre : H9 pour $2 \leq d \leq 3$ mm, H11 pour $d > 3$ mm. La fixation de plaquettes ou de très petits éléments sur les machines s'effectue très souvent au moyen de clous cannelés. Les goupilles cannelées ont été développées initialement

4.1.2 DESCRIPTION DES GOUPILLES

1. Goupilles cylindriques

Les goupilles cylindriques sont utilisées pour centrer deux pièces l'une par rapport à l'autre. La goupille est généralement chassée dans la pièce massive et coulissante dans la pièce mobile. Les modèles existants sont cités ci-après avec indication de la norme et gamme pratique des diamètres selon catalogue Bossard [1.33].

1.1 goupilles cylindriques en acier de décolletage, nuance 9SMn28K non trempée, norme VSM 12771B, champ de tolérance h8, diamètres de 1 à 10 mm. Les écarts de dimensions diamétrales ne permettent pas un montage sans retouches, d'où solution à éviter.

1.2 goupilles cylindriques rectifiées en acier de décolletage, nuance 9SMn28K non trempée, norme VSM 12771A, champ de tolérance m6, diamètre de 1 à 10 mm. Les écarts de dimensions diamétrales permettent un montage sans retouches et ces goupilles doivent être préférées aux précédentes.

1.3 goupilles cylindriques rectifiée en acier trempé, HRC 60 ± 2, norme DIN 6325, champ de tolérance m7, diamètres 0,8 à 12 mm. Légèrement plus chères que les précédentes, elles supportent des pressions plus élevées.

1.4 goupilles cylindriques rectifiée en acier trempé, HRC 60 ± 2, norme DIN 6325, champ de tolérance h6, diamètres 1 à 12 mm. Elles permettent d'introduire les ajustement à alésage normal.

Pour obtenir un serrage suffisant entre les goupilles de champ de tolérance m6, il faut prévoir un champ de tolérance M7 ou mieux P7 pour l'alésage. La pression résultante entre goupille chassée et les pièces ne peut être qu'estimée car la forme des pièces massives ne correspond habituellement pas au cas idéal de calcul.

2. Goupilles coniques

Les goupilles coniques sont fabriquées avec une conicité de 1:50, grandeur diamétrale de 1 mm pour 50 mm de longueur. Elles existent en plusieurs exécutions et variantes. La dimension nominale de la goupille est définie sur le petit diamètre du tronc de cône. Les modèles existants sont cités ci-après avec l'indication de la norme et des diamètres selon catalogue Bossard [1.33].

2.1 goupilles coniques en acier de décolletage, norme VSM 12770B, champ de tolérance h10, diamètres 1 à 12 mm. La norme VSM 12770A prévoit la classification de goupilles coniques rectifiée, champ de tolérance h10, diamètres 1 à 12 mm.

2.2 goupilles coniques rectifiées en acier trempé, HRC 60 ± 2, norme VSM 12770A, champ de tolérance h10, diamètres 1 à 12 mm.

2.3 goupilles coniques rectifiées en acier trempé, HRC 60 ± 2, norme DIN 7979 forme D, champ de tolérance m6, avec trou taraudé. diamètres 6 à 20 mm, filetages intérieurs M4 à M10. Une exécution rectifiée non trempée avec trou taraudé fait l'objet de la norme DIN 7978, forme A, champ de tolérance h10, diamètres 6 à 20, filetages intérieurs M4 à M12.

2.4 goupilles coniques non trempées, à téton fileté et longueur constante de la partie conique, norme DIN 258, champ de tolérance h10, diamètres 5 à 20 mm, filetages extérieurs de M5 à M16. Une seconde variante est à longueur constante de la partie filetée, norme DIN 7977, en acier de décolletage, champ de tolérance h10, diamètres 5 à 30 mm, filetages M5 à M24.

Les goupilles coniques, munies de trou taraudé ou de téton fileté, se démontent facilement au moyen d'une vis ou d'un écrou. Elles s'emploient lorsque le logement dans les pièces est borgne. Les goupilles cylindriques et coniques exigent un usinage onéreux, en particulier les goupilles coniques, et sont à éviter dans les constructions usuelles.

4.1 GOUPILLES

4.1.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES GOUPILLES

Les goupilles servent à centrer deux ou plusieurs pièces, à fixer des parties de machines les unes par rapport aux autres, à transmettre des efforts ou à limiter ces efforts par cisaillement de la section résistante de la goupille. Le contrôle de ces éléments est toujours très sommaire. Il part d'hypothèses simplificatrices et généralement très primitives. Les dimensions transversales sont comprises entre 1 et 12 mm, éventuellement jusqu'à 20 mm. Il en résulte une limitation dans l'emploi aux pièces assemblées de dimensions modestes.

Les contrôles se limitent à la détermination de la pression entre la goupille et les pièces adjacentes, des contraintes de cisaillement et/ou de flexion. La pression admissible entre la goupille et les pièces assemblées dépend d'une part de la fonction à remplir par l'assemblage, d'autre part des caractéristiques mécaniques de la goupille et des pièces adjacentes. Les valeurs données dans le tableau 4.1 sont applicables à des assemblages sollicitées par des charges statiques, pulsantes et alternées. Si la matière de la goupille ou des pièces ne figure pas dans le tableau, les valeurs admissibles seront introduites à partir de la charge pulsante. Pour la charge statique, ces valeurs pourront être majorées de 50% et seront diminuées de 30% en charges alternées. Les goupilles annulaires supportent des efforts limités le plus souvent par la résistance à l'écrasement. Pour les goupilles cannelées ou encochées, admettre 70% des valeurs proposées dans le tableau. Un contrôle exact des assemblages par goupille chassées ou avec jeu n'est guère possible.

Tableau 4.1
Pressions et contraintes admissibles dans les assemblages à goupilles
Valeurs en N/mm^2

	Pressions admissibles en N/mm^2			
Nature des pièces à assembler	Assemblages pressés *p* adm. Statique	pulsant	alterné	Articulations *p* admissible
Fonte grise	70	50	50	Ac/GG 5
Fonte d'acier	90	60	40	Ac/Fte Ac 7
Acier Ac 37	90	60	40	Ac/CuSn 8
Ac 50	130	90	60	Ac durci sur
Ac 70	170	115	75	Bz 10
Durci	200	130	80	Ac durci 15
Bronze, laiton	40	30	20	

Contraintes de flexion et de cisaillement admissibles en N/mm^2						
Matière de la pièce	Flexion stat.	Puls.	alternée	Cisaillement stat.	puls.	alterné
Ac 37, 4.6	80	55	35	50	35	25
Ac 50, 6.8	120	80	50	75	50	35
Ac 60, C 35	130	90	60	85	60	45
Ac 70, 8.8	150	110	70	100	70	50

CHAPITRE 4

ÉLÉMENTS À EMBOÎTEMENT

Dans les éléments d'assemblage à emboîtement, la transmission des efforts et des mouvements s'effectue par la forme particulière de l'élément monté habituellement dans une ou plusieurs pièces de machines. La sécurité de l'assemblage dépend non seulement de l'élément pris isolément, mais aussi des pièces adjacentes. L'assemblage d'un arbre ou axe avec un moyeu forme une famille de solutions classées dans cette catégorie. Selon K. Roth, l'ensemble [1.39] arbre - moyeu peut se subdiviser principalement en cinq classes selon les composants et le genre de transmission des efforts (figure 4.1) :

1. *Assemblage à emboîtement* : sans élément intermédiaire, donc seulement par la forme extérieure de l'arbre et la forme intérieure du moyeu.
2. *Assemblage à emboîtement* : avec élément intermédiaire, l'arbre et le moyeu étant le plus souvent de forme cylindrique.
3. *Assemblage à frottement tangentiel* : sans élément intermédiaire, l'arbre et le moyeu ayant même forme de révolution : cylindrique ou conique.
4. *Assemblage à frottement tangentiel* : avec élément intermédiaire, cet élément transmettant les efforts par frottement entre l'arbre et le moyeu.
5. *Assemblage à frottement combiné* : la transmission des efforts s'effectue par un élément intermédiaire chassé entre l'arbre et le moyeu.

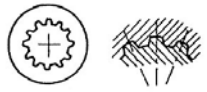
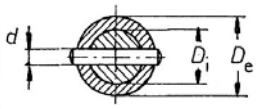
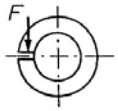
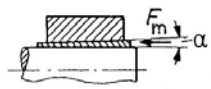
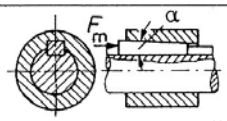
CLASSE		PARTIE PRINCIPALE			DOMAINE D'UTILISATION						APPENDICE
Connexion des faces	Type de transmission	No.	Désignation	EXEMPLE DE DISPOSITION	Couple transmissible	Couple dépendant de	Supporte des charges axiales	Possibilités de centrage	Déplacement axial du moyeu	Déplacement en rotation	Remarques
Emboîtement	DIRECTE	1	Arbre profilé		GRAND	Facteur de forme	NON	OUI	POSSIBLE	Possible par incréments	——
Emboîtement	INDIRECTE	2	Goupille transversale		PETIT	Facteur de forme	POSSIBLE	OUI	POSSIBLE	POSSIBLE	Montage simple
Tangentiel	DIRECTE	3	Assemblage pincé		PETIT - GRAND	Température force axiale	OUI	OUI	Seulement si : $F_a > F_R$	Continu	——
Tangentiel	INDIRECTE	4	Eléments de serrage		MOYEN	Température force axiale	OUI	POSSIBLE		Continu	Fabrication simple
Tangentiel et normal	INDIRECTE	5	Assemblage précontraint		MOYEN	Température force axiale	POSSIBLE	NON	NON	POSSIBLE	——

Figure 4.1 Classification des assemblages arbre - moyeu selon K. Roth

ÉLÉMENTS D'ASSEMBLAGE

Les éléments d'assemblage sont des pièces de machines qui servent à lier deux ou plusieurs pièces afin de transmettre un ou plusieurs efforts, forces et/ou couples entre elles. La classification des éléments d'assemblage traités dans ce chapitre peut s'effectuer à partir de la fonction remplie par l'élément. Nous distinguerons principalement :

1. *Eléments à emboîtement*
   La transmission des efforts est réalisée grâce à la géométrie particulière de l'élément et des pièces adjacentes.
2. *Eléments à frottement*
   La transmission des efforts s'effectue par le frottement d'adhérence ou de glissement entre l'élément et les pièces adjacentes.
3. *Eléments élastiques*
   La transmission des efforts et surtout la capacité de grande déformation de ces éléments en sont les caractéristiques générales. Ces éléments seront dénommés tout simplement ressorts.
4. *Eléments mixtes*
   La transmission des efforts se fait par emboîtement et par frottement des éléments dans les pièces annexes. Une classe particulièrement importante est représentée par les mécanismes à vis employés comme vis d'assemblage.
5. *Eléments complémentaires*
   Les éléments d'étanchéité peuvent compléter la collection des éléments fondamentaux cités ici. Une partie des joints sera traitée dans un chapitre particulier.

Une grande partie des éléments d'assemblage fait l'objet d'une normalisation nationale, chez nous les normes allemandes DIN ou les normes suisses VSM/SNV, et de plus en plus internationale selon ISO. La tendance actuelle dans l'industrie est de diminuer le nombre de modèles existants afin de réduire le stock de pièces en magasin et les coûts d'investissement. Les exigences imposées par la sécurité dans la construction de machines imposent un choix et un contrôle détaillé des éléments et des pièces adjacentes : fiabilité de l'élément d'assemblage, choix des hypothèses de calcul, choix des conditions de fabrication et de montage, mesures complémentaires compte tenu des conditions de sollicitations mécaniques et climatiques.

Le choix du mode d'assemblage est fréquemment dicté par le genre de machine, la fréquence de montage et de démontage, par l'outillage à disposition et les possibilités de fabrication, les matériaux de l'élément et des pièces voisines, les conditions ambiantes, le savoir faire du personnel, par une certaine tradition, le prix de revient de l'élément de liaison et de fabrication des pièces annexes. Il est recommandé d'utiliser les éléments fabriqués en grande série et de catalogue, de limiter le nombre de modèles différents sur une même machine, de rendre l'accès facile pendant les opérations de fabrication, de montage et d'entretien. L'assemblage doit pouvoir transmettre correctement les efforts prévus dans toutes les conditions de service avec une sécurité suffisante.

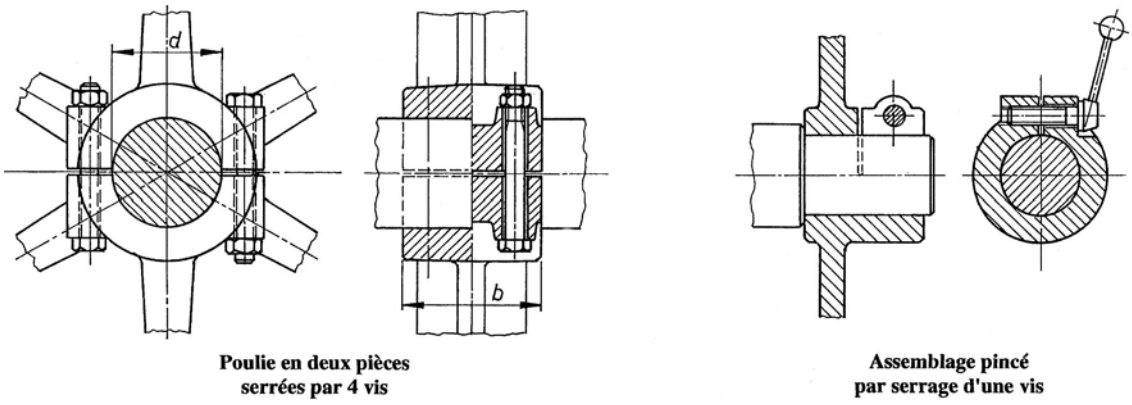


Figure 5.17 Montage d'une poulie en deux parties Assemblage pincé sur un axe cylindrique

La pression résultante réelle doit être suffisante afin de transmettre sûrement le couple de torsion entre l'arbre et le moyeu, le coefficient de sécurité au glissement étant S_{gl} = 1,5 à 2. La figure 5.17 montre encore une disposition complémentaire de fixation, courante dans les machines-outils. Le guidage de la pièce mobile est assuré par un alésage cylindrique normal tandis que le pincement du moyeu sur l'arbre s'effectue par une partie de moyeu souple obtenue par la découpe d'une fente perpendiculaire à l'axe et d'une fente dans le sens longitudinal.

Il existe encore une collection d'éléments d'assemblage travaillant par frottement grâce à la déformation de pièces intermédiaires. Citons quelques modèles courants :

1. Manchon SKF , type SH , se compose de deux bagues intérieure et extérieure comportant des filets qui représentent une succession de troncs de cônes élémentaires.

2. Bague de tolérance Star, formée à partir d'un feuillard, soit d'acier à ressort trempé et revenu, soit d'acier résistant à la corrosion, utilise le principe de la tôle ondulée comme pièce déformable entre l'arbre et le moyeu.

3. Rondelle étoilée Ringspann permettant d'une part d'éliminer les jeux axiaux dans les montages et de transmettre des efforts, surtout des couples de torsion, par déformation de rondelles ressort étoilées.

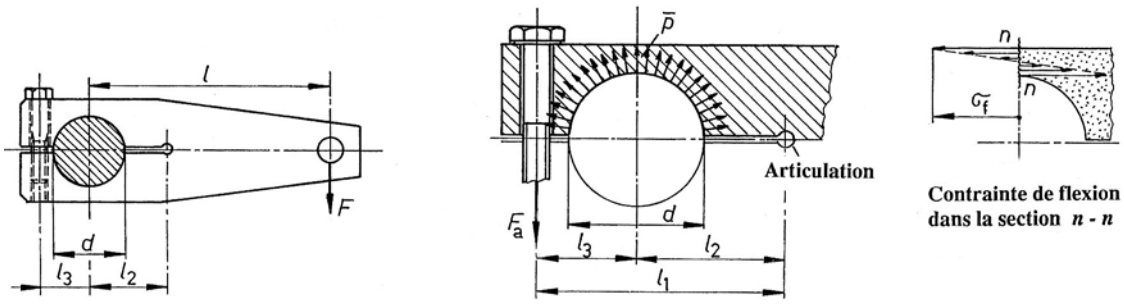


Figure 5.16 Assemblage pincé partiellement fendu : disposition et modèle de calcul

Le contrôle de la pression moyenne s'effectue au moyen de la relation de Stribeck :

$$\overline{p} = \frac{z\, l_1 F_a}{l_2\, b\, d}, \qquad (5.22.1)$$

avec :

b longueur de contact,
d diamètre de l'arbre.

Le coefficient de sécurité au glissement doit être au moins égal à 2 vu l'imprécision dans l'estimation de la pression. Le contrôle de la contrainte de flexion dans la section n - n fait intervenir le moment fléchissant $M_f = l_3\, z\, F_a$ et le couple de torsion transmissible se trouve par :

$$M_t = \pi \frac{\mu_0}{S_{gl}} \overline{p}\, b \frac{d^2}{2}. \qquad (5.22.2)$$

μ_0 étant le coefficient de frottement d'adhérence entre l'arbre et le moyeu.

5.3.2 POULIE OU VOLANT EN DEUX PARTIES

Dans les poulies et volants en deux partie, les vis de serrage sur le moyeu servent à compenser le jeu diamétral de montage et à produire la pression entre l'arbre et l'alésage. Si z est le nombre de vis et F_a la tension axiale dans chaque vis, la pression de montage, supposée uniforme, sera donnée par :

$$\overline{p} = \frac{z F_a - F_0}{b\, d}, \qquad (5.23)$$

avec :

F_0 la force à produire pour supprimer le jeu entre les pièces à serrer.

Comme les pièces montées par ce moyen de fixation tournent à une certaine fréquence de rotation, l'effet centrifuge ne peut pas être négligé dans l'estimation des contraintes et des efforts transmissibles. La pression en service est contrôlée par la construction du triangle de précontrainte, voir les explications sur les vis de fixation.

est possible de monter des douilles avec divers alésages cylindriques pour la fixation de l'arbre.

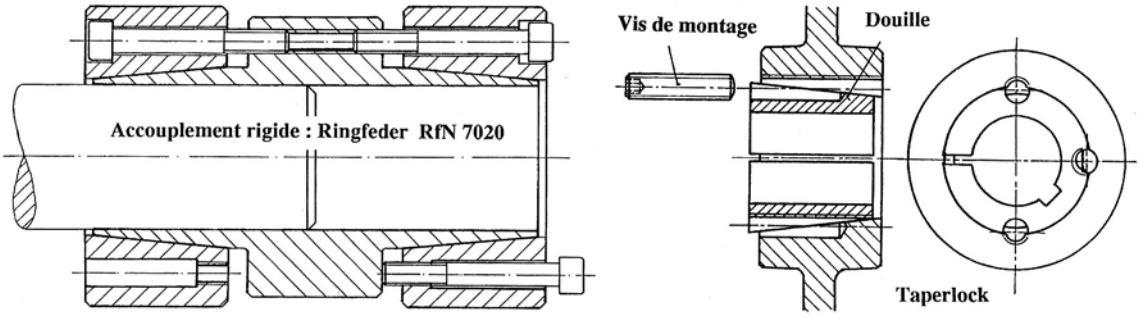


Figure 5.15 Accouplement RfN 7020 Montage de la douille fendue Taper-Lock

Le démontage de la douille conique est facilité par un demi filetage dans la douille et un trou borgne dans le moyeu. En serrant une vis sans tête dans cette cavité, la douille sort de l'alésage.

Une autre application courante de ce principe est concrétisée par les manchons coniques utilisés dans les roulements à alésage conique. Ce type de fixation permet de diminuer sensiblement les exigences dans les champs de tolérance pour l'arbre : h9 ou h10, les défauts de forme, de faux-rond et conicité devant être limités toutefois entre IT5 et IT7.

5.3 ASSEMBLAGES PINCÉS

Dans les assemblages pincés, la pression de contact est obtenue par déformation des pièces ajustées au moyen de vis de serrage. Cette solution s'utilise pour la fixation de poulies et volants en deux parties, le centrage d'ensembles mécaniques sur colonne cylindrique, la transmission de couple modestes entre de petits leviers ou pièces à fonction secondaire sur des arbres. L'ajustement de la position axiale ou angulaire est fortement facilité par ce mode d'assemblage.

5.3.1 ASSEMBLAGES PARTIELLEMENT FENDUS

Le calcul et le contrôle d'un assemblage partiellement fendu au moyen d'une relation simple sont pratiquement impossibles. Si l'arbre et l'alésage possèdent un jeu diamétral très faible, il est possible d'admettre que l'extrémité de la fente correspond à une articulation élastique sans frottement. La force normale produite sur les surfaces en contact vaut :

$$F_n = z\, F_a\, l_1 / l_2,$$

avec :

z nombre de vis,
F_a force axiale produite par chaque vis,
l_1 bras de levier pour les vis,
l_2 bras de levier pour la force normale.

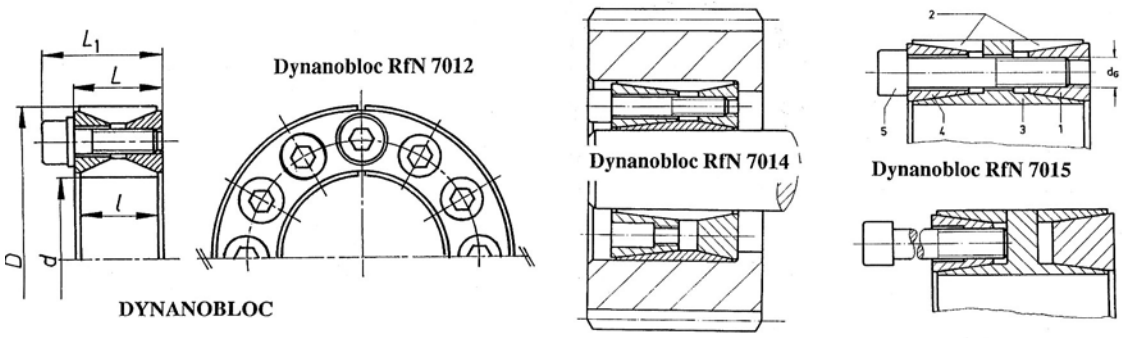


Figure 5.13 Forme de l'élément Dynanobloc RfN 7012 et dimensions générales au montage
Dynanoblocs RfN 7014 et RfN 7015

5.2.4.3 ÉLÉMENTS À CÔNES SIMPLES

Le Dynanobloc RfN 7013 se compose d'une bague intérieure venant en contact avec l'arbre et d'une bague extérieure venant en contact avec le moyeu. La faible conicité entre les deux pièces assure une bonne concentricité. Deux variantes sont à disposition :

- modèle RfN 7013.0 provoquant le déplacement axial du moyeu au montage,
- modèle RfN 7013.1 prenant appui sur le moyeu par une bride de butée.

Les dimensions de l'arbre sont comprises entre 20 mm et 150 mm. Les champs de tolérance à adopter sont : h8 pour l'arbre, H8 pour le moyeu, la rugosité au moins N7 .

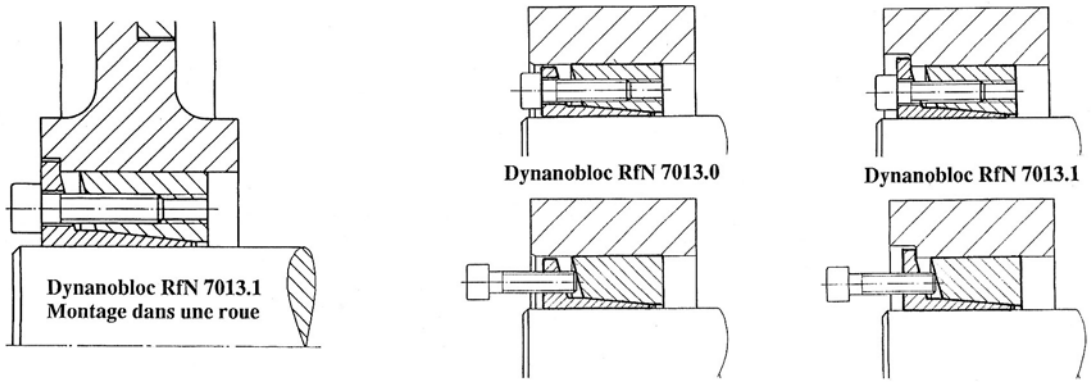


Figure 5.14 Dynanobloc RfN 7013 : forme, montage et démontage

Une application particulière du principe de cet élément est donnée dans l'accouplement rigide à double cône. Cet élément se monte sur des arbres de 20 mm à 150 mm et permet d'assurer une liaison rigide en torsion et en flexion.

5.2.4.4 CÒNES AMOVIBLES : SYSTÈME T A P E R - L O C K

Ce type d'élément de fixation s'emploie dans les montages de poulies à courroies trapézoïdales ou d'accouplement. Le cône amovible, système Taper-Lock, est constitué par une pièce fendue axialement, extérieurement tronconique, intérieurement cylindrique avec rainure de clavette. Cette douille présente deux ou trois demi perçage borgnes qui se montent en face de demi filetages usinés dans le moyeu tronconique. Le déplacement de la douille au montage est assuré par des vis sans tête à six pans creux placées d'une part dans les demi trous borgnes, d'autre part en prise avec les demi filetages. Pour un tronc de cône intérieur donné, il

$$M_t = \frac{F_a - F_0}{\tan\alpha + 2\mu} \cdot \frac{\mu}{S_{gl}} \cdot \frac{d}{2}, \qquad (5.21.1)$$

en supposant le même coefficient de frottement pour toutes les surfaces en contact. Le coefficient de frottement de calcul et des tables du catalogue vaut 0,12 pour des éléments huilés, 0,15 pour des surfaces sèches.

Les pressions entre l'Anobloc et les pièces serrées se trouvent par :

- entre Anobloc et arbre : $$\overline{p}_i = \frac{F_a - F_0}{A_i\,(\tan\alpha + 2\mu)}, \qquad (5.21.2)$$

- entre Anobloc et moyeu : $$\overline{p}_e = \overline{p}_i \cdot \frac{d}{D}, \qquad (5.21.3)$$

avec : $A_i = \pi\, d\, l$, aire de contact entre l'Anobloc et l'arbre.

Les champs de tolérance à adopter pour l'arbre et le moyeu, usinés avec une rugosité R_a inférieure à 0,001 mm, sont :

- jusqu'à	d = 38 mm :	arbre h6	alésage du moyeu H7
- au delà de	d = 38 mm :	arbre h8	alésage du moyeu H8

La qualité du centrage de l'assemblage dépend essentiellement des pièces assemblées. Il est possible de monter deux ou trois Anobloc en série avec pertes de la force axiale de serrage d'un Anobloc au suivant. Les contrôles à prévoir dans l'assemblage avec Anobloc sont :

- possibilité de transmission d'un couple de torsion, d'une force axiale ou des deux efforts simultanément en utilisant les valeurs de la table,
- pression sur l'arbre, pression sur le moyeu,
- contraintes dans l'arbre, contraintes dans le moyeu,
- épaisseur de la bride de serrage,
- choix des vis en nombre et taille.

Tous ces calculs sont semblables à ceux des emmanchements.

5.2.4.2 DYNANOBLOC RfN 7012

Le Dynanobloc est constitué par deux bagues fendues à double cône insérées entre deux anneaux équipés de vis de serrage à tête cylindrique à six pans creux. Ni l'arbre, ni le moyeu ne sont affaiblis par des rainures, l'effet d'entaille restant faible, environ égal à 1,3 …. 1,5 . Le positionnement du moyeu par rapport à l'arbre est très simple. Les tableaux du fabricant donnent les dimensions, pour des diamètres de 20 mm à 1 000 mm, le couple ou la force axiale transmissible par le Dynanobloc en fonction du couple de serrage sur les vis de la classe 12.9, la pression sur l'arbre et sur le moyeu.

Les surfaces biconiques du Dynanobloc sont inclinées d'un angle d'environ 14°. Comme les bagues sont fendues, les tolérances d'ajustement sont très larges : pour l'arbre tous les champs compris entre k11 et h11, pour le moyeu tous les champs compris entre N11 et H11. La différence entre la cote effective de l'arbre et du moyeu doit rester cependant inférieure à IT9. La rugosité des surfaces portantes doit être N8 ou meilleure. L'élément n'est pas auto-centreur; le faux rond du moyeu dépend de l'exécution du centrage sur l'arbre et de l'ajustement adopté. Les vis sont à serrer avec une clef dynamométrique en appliquant le couple proposé selon les recommandations de montage. Il existe un modèle Dynanobloc RfN 7014 préconisé pour transmettre des couples ou efforts axiaux très importants ou pour assurer une bonne concentricité entre les pièces. Le Dynanobloc RfN 7015 est recommandé pour des conditions sévères de service et de concentricité.

5.2.4.1 ANOBLOC RfN 8006

L'Anobloc se compose de deux bagues tronconiques à surfaces cylindriques extérieure et intérieure. Monté entre un arbre et un moyeu cylindriques, la bague intérieure soumise à une force axiale s'introduit dans la bague extérieure, ce qui provoque des déformations radiales des deux composants : une diminution du diamètre intérieur de la bague intérieure, une augmentation du diamètre extérieur de la bague extérieure. Cette déformation peut se poursuivre jusqu'à ce que ces parties viennent en contact avec l'arbre et le moyeu. A ce moment, l'assemblage est encore facile à positionner angulairement ou éventuellement axialement. L'augmentation de la poussée axiale de montage engendre ensuite la pression nécessaire entre les surfaces de contact pour assurer la transmission par frottement d'un couple de torsion ou d'une force axiale. L'efficacité de l'ensemble dépend directement du coefficient de frottement et de la pression exercée sur les surfaces cylindriques de l'Anobloc.

Les tables du fabricant donnent les dimensions géométriques de ces éléments, les diamètres d'arbre étant compris entre 6 et 500 mm. Le couple ou la poussée axiale transmissibles sont indiqués dans le catalogue pour une pression nominale de 100 N/mm^2 sur l'arbre. L'angle du cône est : tanα = 0,3 et α = 16,7° de façon à favoriser le démontage de l'élément qui reste un problème dans les assemblages avec risques de formation de rouille d'appui.

Le principe de la transformation de la force axiale en poussées sur les cônes intérieur et extérieur des deux bagues, en force sur l'arbre et le moyeu, toutes ces forces étant affectées de frottement, est représenté sur la figure 5.12. La force axiale totale de serrage F_a est obtenue habituellement par un système de serrage à plusieurs vis placées dans une pièce d'appui.

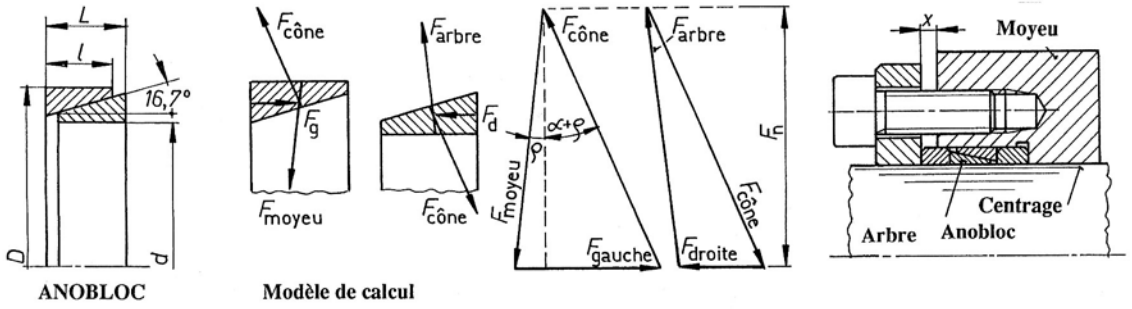


Figure 5.12 Anobloc Ringfeder RfN 8006 : parties constituantes et principe des efforts entre anneaux
Principe de montage d'un Anobloc entre un arbre et un moyeu

Cette force de serrage F_a se décompose en deux parties :

- une force F_0 nécessaire à l'élimination des jeux dans l'assemblage non encore serré,
- une force F_a' transformant la force axiale en pression sur l'arbre et dans le moyeu par l'intermédiaire des troncs de cônes de l'Anobloc.

Cette force vaut :

$$F_a' = F_a - F_0.$$

En simplifiant les relations trouvées dans l'assemblage à troncs de cône, il est possible d'exprimer l'effort normal sur les surfaces cylindriques par l'expression :

$$F_n = F_a' / [\tan(\alpha + \rho) + \mu] \approx F_a' / (\tan\alpha + 2\,\mu).$$

Finalement, le couple de torsion transmissible, compte tenu du coefficient de sécurité S_{gl}, se trouve par :

Il se trouve par :

$$M_{adm} = \mu_0 \, \bar{p} \, A_{cône} \, (d_m/2) \, / \, S_{gl}. \qquad (5.20)$$

Très souvent, l'assemblage à cône est complété par une clavette. L'assemblage transmet alors l'effort partiellement par frottement, partiellement par emboîtement.

5.2.3 ARBRES ET MOYEUX TRONCONIQUES

Les normes nationales et ISO 775-1969 prévoient des extrémités d'arbre tronconiques pour des diamètres d'arbre compris entre 6 et 630 mm. La conicité est normée à 1:10 pour toutes les variantes. Ces extrémités d'arbre sont employées pour des poulies, des accouplements ou des roues dentées. Le serrage des deux pièces est assuré par une extrémité filetée, extérieurement pour la gamme usuelle, éventuellement intérieurement pour les diamètres compris entre 12 et 120 mm.

Pour les diamètres d'arbre compris entre 6 et 220 mm, la norme prévoit deux exécutions avec clavette à faces parallèles disposée parallèlement à l'axe :

1. cône court avec l_2 = environ 1,2 fois le diamètre nominal d_1,
2. cône long avec l_2 = environ 1,6 fois le diamètre nominal d_1.

Pour les diamètres compris entre 240 et 630 mm, la norme prévoit seulement le cône court et une rainure de clavette placée selon la direction de la génératrice du cône. Habituellement, un serrage même énergique de l'écrou ne permet pas d'atteindre une pression suffisante pour transmettre les efforts et de ce fait d'utiliser pleinement la capacité de charge de l'arbre. Une partie du couple de torsion se transmet par la clavette. Le couple transmissible est de même grandeur que celui des arbres cylindriques, la recommandation IEC 72 étant valable pour un acier avec R_m de 500 N/mm^2 au moins.

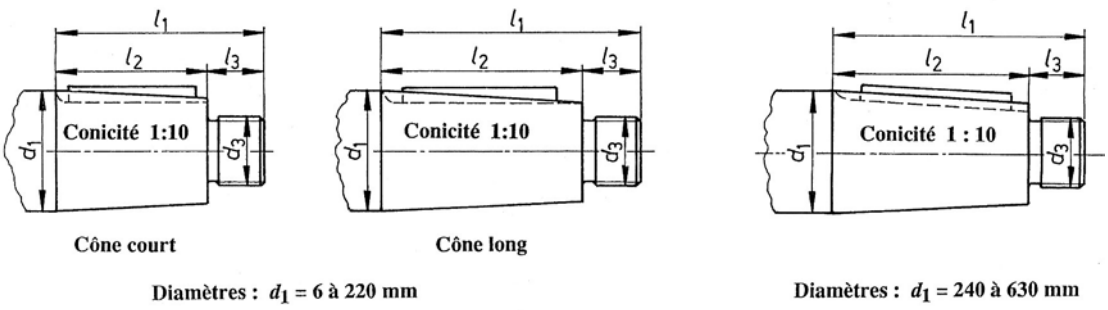


Figure 5.11 Extrémité d'arbre tronconique : cônes courts et longs, position de la clavette

Les contraintes engendrées par la pression de montage peuvent se contrôler dans l'arbre et le moyeu au moyen des relations développées pour les emmanchements et frettages. Le contrôle de la contrainte de torsion est toujours recommandé, cette contrainte pouvant être accompagnée de flexion.

5.2.4 ASSEMBLAGES À ÉLÉMENTS TRONCONIQUES

Les propriétés intéressantes des assemblages à cônes ont incité divers fabricants d'éléments de machines à livrer des assemblages, extérieurement cylindriques, utilisant le principe du serrage par surfaces tronconiques. Créés primitivement par la firme Ringfeder GmbH à Kreefeld (RFA), ces éléments sont livrés actuellement par plusieurs fournisseurs dans de nombreuses variantes. Cette description comprend seulement les principaux représentants de cette famille.

$$dF_{a\,cône} = - 2\,\pi\,(1 + \mu / \tan\alpha)\,\bar{p}\,r\,dr.$$

L'équilibre axial s'écrit : F_a – Somme des $dF_{a\,cône} = 0$.

Sommons les forces axiales élémentaires et égalons cette somme à la force active produite à droite sur l'assemblage :

$$F_a = \pi\,\bar{p}\,(r_e^2 - r_i^2)\cdot(1 + \mu / \tan\alpha).$$

Introduisons finalement la surface projetée du tronc de cône :

$$A_p = \pi\,(r_e^2 - r_i^2).$$

Finalement, la pression se trouve par :

$$\bar{p} = \frac{F_a}{A_p(1+\mu/\tan\alpha)}. \qquad (5.19)$$

En admettant la pression entre l'arbre et le moyeu conservée, le coefficient de frottement de glissement inchangé, la force F_{des} à produire axialement pour libérer l'assemblage se trouve par :

$$F_{des} = \bar{p}\,A_p\,(1 - \mu/\tan\alpha).$$

La condition d'irréversibilité est donnée également par : $\mu > \tan\alpha$.

Pratiquement, l'arbre et le moyeu sont initialement au repos et la force à produire pour décoller les pièces sera certainement nettement plus grande à la valeur calculée pour F_{des}. Dans la relation proposée, il faudrait introduire plus correctement le coefficient de frottement d'adhérence, soit :

$$F_{des} = \bar{p}\,A_p\,(1 - \mu_0/\tan\alpha).$$

5.2.2 TRANSMISSION D'UN COUPLE DE TORSION

L'assemblage à cône est prévu pour transmettre un couple de torsion entre l'arbre et le moyeu. Il est admis qu'après montage, la pression sur les surfaces en contact reste conservée. Calculons le couple limite transmissible et procédons au même découpage de la surface que précédemment.

Sur la surface élémentaire d'aire : $dA = ds\,dx\cos\alpha$, la force normale vaut : $dF_n = \bar{p}\,dA$ et la force de frottement limite $dF_{R0} = \mu_0\,\bar{p}\,dA$. Le moment élémentaire engendré par cette force, maintenant tangentielle, par rapport à l'axe de rotation de l'arbre, se trouve par :

$$dM_{axe} = r\,dF_{R0} = \mu_0\,\bar{p}\,r\,ds\,dx/\cos\alpha.$$

Pour l'anneau élémentaire total, le moment élémentaire résultant se trouve par :

$$dM_{axe} = 2\,\pi\,\mu_0\,\bar{p}\,r^2\,dx/\cos\alpha.$$

Le couple limite applicable est égal à la somme des moments élémentaires, soit :

$$M_{lim} = 2/3\cdot\pi\,\mu_0\,\bar{p}\,(r_e^3 - r_i^3)/\sin\alpha.$$

Dans cette expression, $(r_e - r_i)/\sin\alpha$ représente la longueur de la génératrice du tronc de cône et $(r_e + r_i)$ le diamètre moyen du tronc de cône d_m. L'aire de contact entre les deux pièces vaut : $A_{cône} = \pi\,d_m\,l$. Le couple limite transmissible, avant le glissement des surfaces, peut alors se trouver approximativement par :

$$M_{lim} \approx \mu_0\,\bar{p}\,A_{cône}\,d_m/2\ .$$

Le couple de torsion transmissible doit introduire le coefficient de sécurité au glissement S_{gl} .

5.2 ASSEMBLAGES PAR CÔNES

Les assemblages par cônes permettent d'obtenir des montages simples entre un arbre et un moyeu tronconiques. Le centrage réciproque des deux pièces est assuré par une conicité identique sur les deux éléments.

5.2.1 PRESSION DANS L'ASSEMBLAGE À CÔNE

La détermination de la pression sur les surfaces tronconiques de l'assemblage nécessite l'introduction de quelques hypothèses simplificatrices :

1. la pression entre l'arbre et le moyeu est supposée répartie uniformément sur toute les surfaces de contact,
2. les coefficients de frottement de glissement ou d'adhérence après montage restent invariables,
3. la pression dépend seulement de la géométrie des deux surfaces en contact, la forme extérieure du moyeu étant négligée.

Pour trouver la pression, supposons que l'arbre tronconique soit déplacé à l'intérieur du moyeu par un système à vis et écrou. Soit F_a la force axiale produite par l'écrou pendant le montage. L'équilibre de l'arbre impose que cette force soit compensée par les poussées avec frottement du moyeu sur l'arbre. Découpons dans ce but une surface constituée par un anneau conique élémentaire placé à l'abscisse x , hauteur dx , rayon du cône r.

Sur une partie de l'anneau élémentaire de longueur circonférentielle ds , l'aire de la surface vaut $dA = ds \cdot dx/\cos\alpha$, la force normale élémentaire valant dF_n et la force de frottement dF_R. Projetons ces deux forces selon les directions axiale et radiale :

- dans le sens axial : $- dF_n \sin\alpha - dF_R \cos\alpha = - (\sin\alpha + \mu \cos\alpha)\, dF_n$,
- dans le sens radial : $dF_n \cos\alpha - dF_R \sin\alpha = (\cos\alpha - \mu \sin\alpha)\, dF_n$.

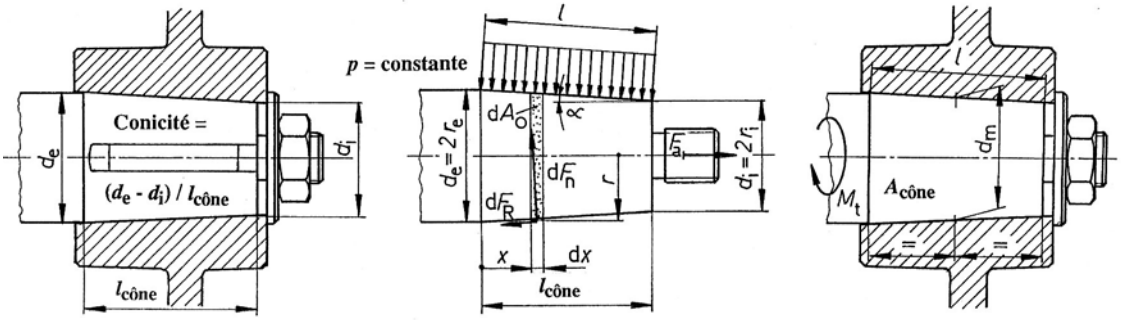


Figure 5.10 Equilibre d'un tronc de cône pendant l'opération de montage
Couple transmissible par l'assemblage à cône

Comme la pression est supposée répartie uniformément sur toute la surface, la somme de toutes les composantes radiales sur le cône élémentaire est nulle tandis que la somme des composantes axiales peut s'exprimer en fonction de la pression p, de l'aire totale du cône élémentaire par :

$$dA = 2\,\pi\, r\, dx / \cos\alpha,$$

donc : $$- dF_{a\,cône} = 2\,\pi\,(\sin\alpha + \mu \cos\alpha)\, \bar{p}\, r\, dx / \cos\alpha\ .$$

Sur la distance élémentaire dx , la variation de rayon vaut : $dr = - dx \tan\alpha$ et la force axiale élémentaire $dF_{a\,cône}$ sur le cône s'écrit :

- Modules d'élasticité : $E_1 = E_2 = E = 210\,000$ N/mm^2,
- Coefficients de Poisson : $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$,
- Coefficient de sécurité : $S_{gl} = 1{,}8$,
- Coefficient de frottement : $\mu_0 = 0{,}14$.

Calcul de l'emmanchement

1. *Serrage et pression* :

$Q_1 = 25$ mm / 100 mm = 0,25 ;
$Q_2 = 100$ mm / 180 mm = 0,5556 ;
$K_1 = [(1 + 0{,}252)/(1 - 0.252) - 0{,}3] / E = 0{,}8333 / E$.
$K_2 = [(1 + 0{,}5562)/(1 - 0{,}5562) + 0{,}3] / E = 2{,}193 / E$, $K_1 + K_2 = 3{,}026 / E$.

Valeur du serrage (en µm) en fonction des divers champs de tolérance adoptables :

		H7	r6	s6	t6	u6
Ecart ES/es		35	76	101	126	166
Ecart EI/ei		0	54	79	104	144
Serrage		max	76	101	126	166
		min	19	44	69	109
Pertes de serrage (rugosité) :		2,5 (0,0008 + 0,0016) mm = 0,006 mm .				
Serrages	efforts 1/3		32	57	82	122 µm ,
contrôle pour	contraintes		51	76	101	141 µm .
Pression :	efforts		22,2	39,6	56,9	84,7 N/mm^2,
	contraintes		35,4	52,7	70,1	97,8 N/mm^2.

Couple résultant : $M_{t\,r} = [(0{,}5 \cdot 50000\ \text{N} \cdot 100\ \text{mm})^2 + (8000000\ \text{mm} \cdot \text{N})^2]^{0,5}$
$M_{t\,r} = 8\,382$ m·N .
Coefficient de frottement : $\mu_0 = 0{,}14$,
Coefficient de sécurité : $S_{gl} = 1{,}8$ pour charge pulsante,
Aire de contact : $A_e = \pi \cdot 100\ \text{mm} \cdot 160\ \text{mm} = 50\,265$ mm^2,
Pression minimale à prévoir : $p_{min} = (1{,}8 \cdot 8\,382\,000\ \text{N/mm}^2) / (0{,}5 \cdot 0{,}14 \cdot 50\,265 \cdot 100)$
$p_{min} = 42{,}9$ N/mm^2.

Remarque :

Le champ de tolérance à prévoir serait H7 / s6 en admettant un coefficient de sécurité légèrement inférieur à la valeur prévue initialement, d'où $S_{gl} = 1{,}67$!

2. *Contrôle des contraintes* :

2.1 Arbre : $\sigma_{1\,i} = 2 \cdot 52{,}7\ \text{N/mm}^2/(1 - 0{,}25^2) = 112{,}4$ N/mm^2.
Caractéristique de la section : $A = \pi\,(100^2 - 25^2)\text{mm}^2/4 = 7363$ mm2,
$W_p = 195\,582$ mm^3.
Contraintes : $\sigma_n = 50000$ N / 7363 mm^2 = 6,8 N/mm^2,
$\tau_t = 8\,000\,000$ mm·N / 195 582 mm^3 = 40,9 N/mm^2.

2.2 Manchon : $\sigma_{2\,i} = [52{,}7\ \text{N/mm}^2/(1 - 0{,}556^2)] \cdot [3 + 0{,}556^4]^{0,5} = 134{,}2$ N/mm^2.

Toutes ces contraintes sont admissibles, car inférieures à la limite d'élasticité $R_{p0,2}$.

Ainsi, la pression limite intérieure dans le manchon assurant encore une élasticité totale de la pièce a lieu pour une pression valent :

$$p_{\text{i lim}} = \frac{R_e}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{r_{\text{i}}^2}{r_{\text{e}}^2}\right).$$

Le manchon est entièrement plastifié pour $c = r_{\text{e}}$ et une pression intérieure valant :

$$p_{\text{i plastiifcation}} = \frac{2\,R_{\text{e}}}{\sqrt{3}} \ln \frac{r_e}{r_i}.$$

Cette limite destructrice est à éviter dans tous les cas.

5.1.10 REMARQUES COMPLÉMENTAIRES

Le calcul d'un emmanchement simple ou multiple introduit un certain nombre d'hypothèses simplificatrices qui sont très souvent mises en défaut dans la solution retenue. Citons ici quelques points à ne pas négliger.

1. *Montage* : le montage dans le sens axial introduit des contraintes tangentielles supplémentaires engendrées par la pression de serrage, le frottement entre les surfaces et par le mode opératoire.

2. *Transmission des efforts* : la transmission d'une force axiale, d'un couple de torsion ou d'un moment fléchissant dans l'assemblage provoque une modification de la répartition de la pression. Il faut éviter à tout prix un décollement de la surface du manchon sous l'effet de ces efforts.

3. *Répartition de la pression* : tous les calculs partent d'une longueur identique des pièces de l'assemblage. Comme cette condition est rarement réalisée, les résultats pratiques ou les recherches théoriques montrent une modification assez importante de cette répartition.

4. *Coefficient de sécurité* : le coefficient de sécurité sera d'autant plus grand que les hypothèses simplificatrices s'éloignent de la réalité.

5. *Déplacement axial* : La mise en équation des assemblages emmanchés s'effectue dans un plan perpendiculaire à la direction axiale des pièces. Sous l'effet de la pression sur l'arbre, cette pièce s'allonge et sous l'effet de la pression sur le manchon, cette pièce raccourcit. Il en résulte une augmentation des contraintes dans ces deux pièces dépendant du coefficient de frottement sur les surfaces serrées. De plus, comme les contraintes dépendent des rayons, les surfaces terminales de l'arbre et du manchon ne restent plus planes.

5.1.11 EXEMPLE DE CALCUL D'UN ASSEMBLAGE

Soit à trouver les conditions géométriques à remplir par un assemblage emmanché dont les conditions géométriques et mécaniques à remplir sont :

- Diamètres de l'arbre : $d_{1\text{i}} = 25$ mm,
  $d_{1\text{e}} = 100$ mm, état de surface N6 ,
- Diamètres du manchon : $d_{2\text{i}} = 100$ mm, état de surface N7 ,
  $d_{2\text{e}} = 180$ mm,
- Longueur d'emmanchement : $b = 160$ mm,
- Efforts à transmettre : Force axiale : $F_{\text{a}} = 50\,000$ N,
  Couple : $M_{\text{t}} = 8\,000\,000$ mm·N.
- Champs de tolérance : Manchon : H7
  Arbre choix : r6 s6 t6 ou u6 .
- Matériaux : Arbre : Ac 50-2,
  Manchon : 34 Cr 4

Si les matières utilisées dans l'assemblage sont ductiles, il est possible d'admettre une déformation plastique partielle pour l'arbre creux et/ou le moyeu. Le début de cette déformation intervient lorsque la contrainte de comparaison atteint la limite R_e ou $R_{p0,2}$. F.G. Kollmann [1.54, 1.55, 1.56] a montré la solution analytique des deux problèmes fondamentaux des emmanchements dans le domaine élasto-plastique.

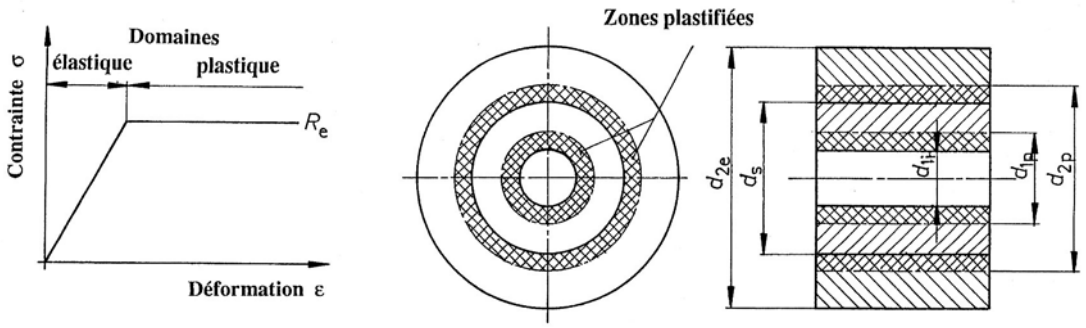


Figure 5.9 Assemblage emmanché avec déformations dans le domaine élasto-plastique

Les déformations dans les deux composants de l'assemblage peuvent être toutes les deux élastiques, l'une élastique et l'autre élasto-plastique ou les deux élasto-plastiques. En partant des relations des contraintes idéales, en admettant un matériau obéissant à la loi idéale des déformations selon figure 5.9, soit un comportement à deux branches, la première élastique, la seconde parfaitement plastique, les conditions suivantes peuvent intervenir :

1. *Arbre creux*

- début de la déformation plastique : $p_{dp} = 0{,}5\ R_e\ (1 - Q_1^2)$,
- plasticité complète pour : $p_{fp} = R_e\ (1 - Q_1^2)$,
- déformation élasto-plastique : $p_{dp} \le p \le p_{fp}$,
- diamètre extérieur de la zone plastifiée : $d_{1p} = d_{1e}\ \{1 - p/R_e - [(1 - p/R_e)^2 - Q_1^2]^{0.5}\}/Q_1^2$.

2. *Arbre plein*

La déformation plastique s'étend au volume total de l'arbre dès que la pression d'emmanchement p est égale à la résistance R_e.

3. *Manchon*

- début de la déformation plastique : $p_{dp} = 0{,}5\ R_e\ (1 - Q_2^2)$,
- le diamètre extérieur de la zone plastifiée se trouve par la solution de l'équations transcendante :

$$2\ \ln(d_{2p}/d_{2i}) - (Q_2 \cdot d_{2p}/d_{2i})^2 + 1 - 2\ p/R_e = 0.$$

Seuls les manchons minces, pour lesquels $Q_2 \ge 0{,}368$, peuvent être entièrement plastifiés. Une plastification complète du manchon est toutefois à éviter.

La plastification des composants tubulaires commence toujours à partir de la surface intérieure du cylindre creux. Les résultats sont légèrement différents si l'on introduit l'hypothèse de l'énergie de déformation.

En appliquant une autre condition limite pour l'hypothèse des contraintes, la pression intérieure dans un manchon unique est reliée à l'épaisseur plastifiée par la relation :

$$p_i = \frac{R_e}{\sqrt{3}}\left(1 + 2\ln\frac{c}{r_i} - \frac{c^2}{r_e^2}\right),$$

avec : c le rayon au début de la plastification.

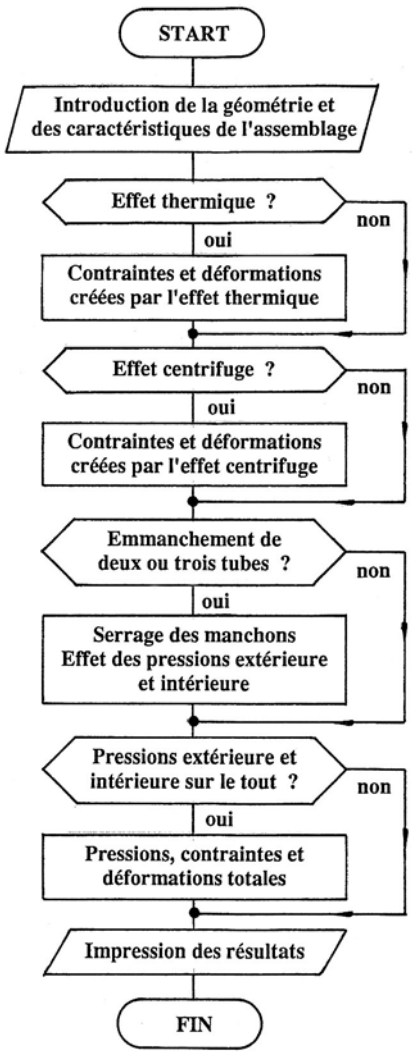


Figure 5.8 Organigramme du calcul d'un emmanchement avec effets thermique et centrifuge

5.1.9 ASSEMBLAGES À DÉFORMATIONS ÉLASTO - PLASTIQUES

Deux problèmes fondamentaux sont à résoudre dans la transmission d'efforts par les emmanchements : soit l'effort extérieur à transmettre est donné, soit le serrage entre les pièces est imposé par exemple par les champs de tolérance. En limitant le calcul des pièces au domaine élastique des déformations, la contrainte maximale de comparaison, contrôlée à l'intérieur du tube, ne doit jamais atteindre la limite élastique du matériau et les possibilités de transmission de charge sont fixées par la géométrie des pièces. En calcul manuel et simple dans le domaine élasto-plastique, il est plus facile d'introduire l'hypothèses du cisaillement maximal plutôt que l'hypothèse énergétique de distorsion car les contraintes principales sont précisément σ_t et σ_r :

$$\sigma_i = |\sigma_t - \sigma_r|.$$

Cette contrainte de comparaison se trouve par les expressions suivantes :

- dans un arbre plein : $\sigma_i = p$,
- dans un arbre creux : $\sigma_i = 2\,p\,/\,(1 - Q_1^2)$,
- dans le manchon : $\sigma_i = 2\,p\,/\,(1 - Q_2^2)$.

d'écrire des relations semblables pour l'emmanchement 3 . Les contraintes radiale et tangentielle provoquées par les pressions inconnues intérieure et extérieure sur le manchon i, soit $p_{i\,i}$ et $p_{e\,i}$. Les contraintes principales se trouvent par les expressions générales :

- radiale : $$\sigma_{r\,i} = \frac{p_{ii} r_{ii}^2 - p_{ei} r_{ei}^2}{r_{ei}^2 - r_{ii}^2} - \frac{p_{ii} - p_{ei}}{r^2} \cdot \frac{r_{ii}^2\, r_{ei}^2}{r_{ei}^2 - r_{ii}^2}; \qquad (5.18.1)$$

- tangentielle : $$\sigma_{t\,i} = \frac{p_{ii} r_{ii}^2 - p_{ei} r_{ei}^2}{r_{ei}^2 - r_{ii}^2} + \frac{p_{ii} - p_{ei}}{r^2} \cdot \frac{r_{ii}^2\, r_{ei}^2}{r_{ei}^2 - r_{ii}^2}; \qquad (5.18.2)$$

- déformation tangentielle : $\varepsilon_{t\,i} = (\sigma_{t\,i} - \nu\, \sigma_{r\,i}) / E.$ (5.18.3)

Pour la surface commune de contact 2, figure 5.7, le serrage spécifique se trouve par :

$$\varepsilon_S = \frac{S_2}{r_2} = \varepsilon_{t_2, r=r_{i2}} - \varepsilon_{t_1, r=r_{e1}}.$$

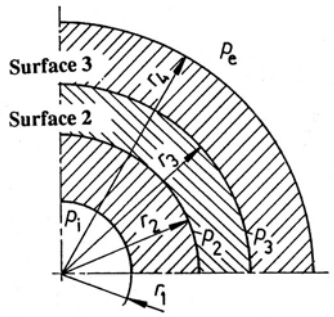


Figure 5.7 Emmanchement à trois manchons

5.1.8.4 MODE PRATIQUE DE CALCUL

L'organigramme de la figure 5.7 montre le principe de calcul d'un assemblage constitué par plusieurs manchons, sollicité par des pressions intérieure et/ou extérieure, par l'effet thermique et la force centrifuge [1.60].

D'après cet organigramme, le calcul s'effectue pour chacun des manchons à l'état non monté sous l'effet des sollicitations thermique et/ou centrifuge. Les déformations résultantes sont considérées comme des compléments au serrage prévu initialement. La superposition des déformations et des contraintes est possible car les valeurs calculées sont des déformations et contraintes principales. L'effet de pressions intérieure et/ou extérieure sur l'ensemble est introduit dans la recherche de la déformation diamétrale totale. Le montage des manchons permet de trouver la pression d'emmanchement, les déformations et les contraintes sur l'ensemble. Comme chaque manchon nécessite le même algorithme de calcul, les opérations à effectuer utilisent les mêmes relations et peuvent se placer dans des sous-programmes.

Dans ces deux expressions, α est le coefficient de dilatation linéaire du matériau, E le module d'élasticité et ν le coefficient de Poisson. La variation de rayon, proportionnelle au produit du coefficient de dilatation linéaire par la différence de température, se trouve en appliquant la relation générale en état plan de contrainte :

$$\Delta r_{(r)} = r\,[\sigma_{t(r)} - \nu\,\sigma_{r(r)}] / E. \qquad (5.16.4)$$

Connaissant les caractéristiques mécaniques et les températures en surfaces cylindriques intérieure et extérieure, ces trois relations permettent de trouver les contraintes et déformation radiale au rayon r.

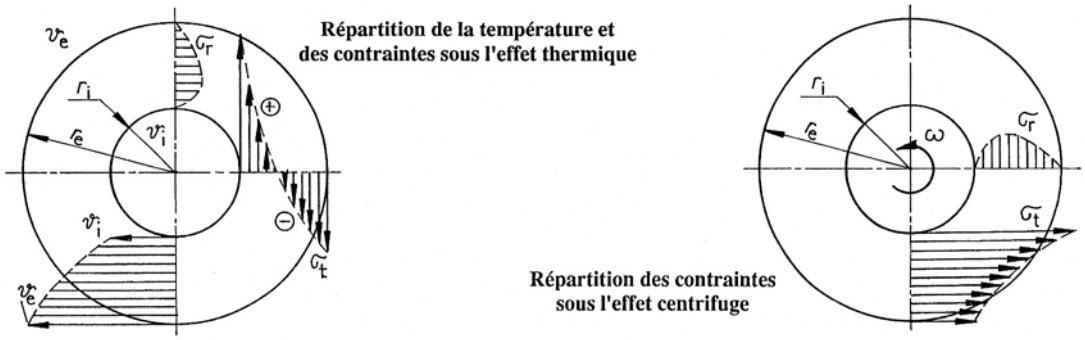


Figure 5.6 Contraintes engendrées par l'effet thermique ou centrifuge dans un manchon

5.1.8.2 EFFET DE LA FORCE CENTRIFUGE

Sous l'effet de la rotation du manchon à la vitesse angulaire ω , les contraintes radiale et tangentielle au rayon r se trouvent par :

- contrainte radiale : $$\sigma_{r(r)} = \frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)\left(r_i^2 + r_e^2 - \frac{r_i^2 r_e^2}{r^2} - r^2\right); \qquad (5.17.1)$$

- contrainte tangentielle : $$\sigma_{t(r)} = \frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)\left(r_i^2 + r_e^2 + \frac{r_i^2 r_e^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right). \qquad (5.17.2)$$

La déformation radiale correspondante au rayon r se trouve simplement par :

$$\Delta r_{(r)} = r\,[\sigma_{t(r)} - \nu\,\sigma_{r(r)}] / E. \qquad (5.17.3)$$

Dans les deux expressions des contraintes, ρ est la masse volumique du matériau. Ces deux relations se trouvent en ajoutant, à l'équilibre radial de l'élément selon figure 5.1, l'effet de la force centrifuge élémentaire provenant de la masse de l'élément.

5.1.8.3 EFFET COMBINÉ DES DIVERSES SOLLICITATIONS

Dans le cas général, chaque partie de l'assemblage est sollicité par une pression intérieure, extérieure ou d'emmanchement. Considérons un emmanchement double, constitué par trois manchons, sollicité par les pressions intérieure p_i et extérieure p_e . Les pressions d'emmanchement p_2 et p_3 doivent se calculer à partir du serrage, désigné ici par le symbole S, au moyen de la relation écrite par exemple pour l'emmanchement 2 :

$$S_2 = [\,(r + \Delta r_\vartheta + \Delta r_\omega)_{2,r=ri} - (r + \Delta r_\vartheta + \Delta r_\omega)_{1,r=re}\,] - p_S,$$

où p_S est la perte de serrage due à la rugosité des surfaces des manchons 1 et 2. Nous pouvons encore admettre (2 à 3) ($R_{a1} + R_{a2}$) pour ces pertes ou aussi 0,6 ($R_{t1} + R_{t2}$) . Il est possible

manchon, déformations diamétrales et pression sur les surfaces cylindriques, efforts limites transmissibles. Les coefficients de frottement de calcul, proposés par la firme SKF [1.59], compte tenu de la sécurité, sont :

- assemblage monté normalement avec de l'huile minérale : 0,12,
- assemblage avec surfaces de contact soigneusement dégraissées et emploi de glycérine comme agent de pression : 0,18,
- assemblage fretté à chaud monté normalement après chauffage de l'élément extérieur à 300 °C dans un four électrique : 0,14,
- assemblage fretté à chaud avec surfaces de contact soigneusement dégraissées, monté après chauffage à 300 °C dans un four électrique : 0,20.

Pour un assemblage fabriqué soigneusement, monté par pression d'huile sur des surfaces tronconiques, la force axiale de montage est approximativement égale au produit de la pression par l'aire de la surface en contact multipliée par un coefficient de frottement équivalent d'environ 0,5 % ou même moins. Lors du démontage, il est recommandé de retenir la pièce mobile par une butée appropriée.

5.1.8 EFFETS THERMIQUE ET CENTRIFUGE

Le calcul d'assemblages emmanchés s'utilise dans de nombreux éléments de machines ou intervient également dans d'autres pièces mécaniques comme les douilles pressées, les réservoirs épais sous pression intérieure ou extérieure, les éléments de la commande hydraulique : valves et distributeurs afin de connaître les jeux entre les pièces coulissantes sous l'influence de la pression. L'effet de différences de températures entre les surfaces extérieures des pièces et les parties intérieures est toujours très important sur le comportement de l'assemblage. L'effet thermique peut mettre en danger la fonction de l'assemblage en particulier dans les périodes d'échauffement ou de refroidissement. Ces variations de température en fonction du temps, accompagnées de charges souvent variables, sont malheureusement très difficilement calculables en pratique.

5.1.8.1 EFFET DE LA TEMPÉRATURE

Pour un tube épais, comme par exemple un manchon, soumis à une température intérieure différente de la température extérieure, à l'état stationnaire de transmission de chaleur, la température au rayon r est donnée par :

$$\vartheta_{(r)} = (\vartheta_i - \vartheta_e)\frac{\ln(r_e / r)}{\ln(r_e / r_i)} + \vartheta_e. \qquad (5.16.1)$$

avec :

ϑ_i température intérieure au rayon r_i,

ϑ_e température extérieure au rayon r_e.

Les contraintes radiale et tangentielle au rayon r se trouvent alors par les expressions :

- radiale : $$\sigma_{r(r)} = \frac{\alpha E}{2(1-\nu)}(\vartheta_e - \vartheta_i)\left(\frac{\ln(r_e / r)}{\ln(r_e / r_i)} - \frac{r_i^2(r_e^2 - r^2)}{r^2(r_e^2 - r_i^2)}\right). \qquad (5.16.2)$$

- tangentielle : $$\sigma_{t(r)} = \frac{\alpha E}{2(1-\nu)}(\vartheta_e - \vartheta_i)\left(\frac{\ln(r_e / r)}{\ln(r_e / r_i)} + \frac{r_i^2(r_e^2 + r^2)}{r^2(r_e^2 - r_i^2)} - \frac{1}{\ln(r_e / r_i)}\right). \qquad (5.16.3)$$

une mince pellicule de liquide qui sépare les pièces et les risques d'une détérioration des états de surface pendant le montage sont réduits au minimum.

Afin d'assurer l'alimentation continue en huile sous pression pendant toute la durée du montage, l'assemblage est habituellement réalisé avec un arbre et un moyeu légèrement tronconiques. Le serrage est atteint par déplacement axial des parties coniques l'une dans l'autre au moyen d'un outillage de montage. La longueur de déplacement ou longueur d'enfoncement est calculée à partir de la position où les surfaces entrent en contact.

Après démontage de l'outillage, la pression en surface mouillée expulse le liquide à travers le canal d'alimentation et les bords de l'assemblage. Le contact direct s'établit entre les surfaces et l'assemblage atteint sa pleine capacité de transmission. Le démontage s'effectue en introduisant à nouveau de l'huile sous pression entre les surfaces. Un assemblage tronconique fabriqué soigneusement se détache automatiquement.

2. *Types d'assemblage*

L'élément extérieur peut être monté soit directement sur l'arbre tronconique, soit sur un manchon intermédiaire reposant sur l'arbre et présentant une surface extérieure tronconique ou un alésage tronconique. Une conicité de 1/30 est généralement recommandée pour les assemblages montés sous pression d'huile. La conicité est limitée à 1/50 pour les assemblages qui doivent transmettre des efforts de flexion considérable ou à 1/80 pour des éléments de très grande longueur.

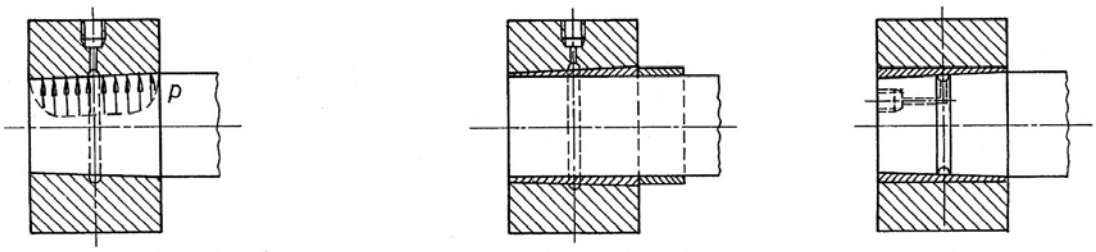


Figure 5.5 Types d'assemblages par la méthode SKF à pression d'huile

La figure 5.5 montre les dispositions suivantes :

2.1. *Elément extérieur monté directement dans une portée conique*.

Ce montage est réalisable s'il est possible de fabriquer les deux surfaces tronconiques correctement et si la porosité des matériaux utilisés autorise ce montage direct. L'huile est amenée vers les surfaces d'assemblage par un canal percé à travers l'arbre ou à travers le manchon.

2.2. *Assemblage avec douille tronconique entre l'arbre et le manchon*

Cette solution permet le remplacement facile de la douille si cette dernière vient à être endommagée au cours de montages et/ou de démontages répétés. La douille peut être soit extérieurement tronconique, soit posséder un alésage tronconique. L'injection du liquide sous pression doit s'effectuer à travers l'élément à surface tronconique. L'épaisseur de la douille doit être réduite au minimum afin de ne pas diminuer la pression d'emmanchement.

3. *Calcul d'un assemblage monté par pression d'huile*

Le serrage diamétral est choisi en tenant compte des mêmes critères que précédemment : valeur des efforts extérieurs, coefficient de sécurité et de frottement dans l'assemblage, contraintes admissibles dans les pièces. Les relations citées sont applicables directement aux assemblages montés par pression d'huile : contraintes radiales et tangentielles dans l'arbre et le

5.1.7.2 MONTAGE PAR DILATATION THERMIQUE

Le montage de frettes par échauffement du manchon ou par refroidissement de l'arbre s'utilise lorsque le serrage est très important ou lorsque le diamètre de serrage est grand. La dilatation diamétrale positive en échauffement, négative en refroidissement, doit tenir compte du serrage maximal prévu et d'un jeu de montage compris entre j = 0,05 à 0,1 mm pour un diamètre de serrage inférieur à 100 mm, $j = d_s/1000$ pour un diamètre de serrage supérieur à 100 mm. L'élévation de température à prévoir pour le manchon s'obtient par :

$$\Delta \vartheta_e = (\Delta d_{max} + j) / \alpha_e d_s. \qquad (5.15.1)$$

La différence de température pour le refroidissement de l'arbre vaut :

$$\Delta \vartheta_r = (\Delta d_{max} + j)/ \alpha_r d_s. \qquad (5.15.2)$$

Tableau 5.2
Caractéristiques mécaniques et coefficients de dilatation linéaire
Matériaux utilisés dans les frettages

Matériaux	Caractéristiques Mécaniques Module E N/mm^2	Coefficient ν	Coefficient de dilatation α 10^{-6} α_e	α_r
Aciers				
- au carbone	20 à 22 · 10^4	0,3	11	-9
- faiblement allié	20 à 22 · 10^4	0,3	11	-9
- moulé	20 à 22 · 10^4	0,3	11	-9
Fonte				
- grise	8 à 11 · 10^4	0,25	10	-8
- malléable	9 à 10 · 10^4	0,25	10	-8
Laitons	7 à 8 · 10^4	0,30	18	-16
Alliages d'aluminium	6 à 8 · 10^4	0,28	24	-18

Remarques

Le module d'élasticité est valable à la température ambiante et des températures voisines. Pour la fonte grise, le module d'élasticité varie avec la classe de fonte, l'épaisseur des parois et le niveau des contraintes, la fonte grise étant un matériau à comportement non linéaire. Les coefficients de dilatation linéaire sont valables pour des échauffements ou des refroidissements de 100 K à partir de la température ambiante. Si le mode de montage prévoit le refroidissement de l'arbre, il est recommandé de contrôler la fragilité du matériau à basse température.

5.1.7.3 MONTAGE PAR PRESSION D'HUILE

Le montage d'un assemblage fretté par la méthode dite à pression d'huile à été développé par le fabricant de roulements SKF au début des années 40.

1. *Description de la méthode*

L'assemblage fretté est monté par déplacement axial de l'arbre et/ou du manchon, la force axiale, normalement très importante pour ce mode de montage, étant réduite par l'utilisation d'huile sous pression injectée entre les surfaces venant progressivement en contact. Il se forme

5.1.6.3 CONTRAINTES ADMISSIBLES

Dans le domaine élastique, la contrainte de comparaison dans les deux pièces devra rester inférieure à la contrainte à la limite apparente d'élasticité R_e pour un matériau ductile, inférieure à la contrainte à la limite conventionnelle d'élasticité $R_{p0,2}$ pour un matériau tenace. Si la contrainte idéale dépasse l'une de ces valeurs limites, le contrôle doit utiliser la notion de calcul élasto-plastique des pièces. Comme l'arbre et le manchon transmettent également un effort axial et/ou un couple de torsion, ces efforts engendrent des contraintes complémentaires dans les pièces. Une étude plus poussée de diverses sections de contrôle est vivement recommandée si les contraintes sont très près des valeurs limites. Le coefficient d'effet d'entaille pour un assemblage sollicité par une flexion se situe entre 1,6 et 2,8 selon la solution retenue.

5.1.6.4 RECOMMANDATIONS

Très souvent, l'assemblage est placé dans un tronçon soumis également à la flexion alternée. Les risques de glissement des surfaces augmentent énormément et pour éviter ce phénomène, il est recommandé d'appliquer les propositions suivantes :

1. la longueur d'emmanchement devrait être toujours plus grande que la moitié du diamètre de serrage : $b > 0{,}5\ d_s$.
2. la transmission du moment fléchissant s'effectue surtout aux extrémités du manchon. Il faut donc obtenir un produit élevé entre la pression locale multipliée par le coefficient de frottement. Il est préférable de tendre vers un coefficient de frottement élevé et une pression basse plutôt que l'inverse.
3. la transmission du moment fléchissant sur l'assemblage est améliorée en augmentant le diamètre de serrage par rapport à celui de l'arbre. Les valeurs recommandées sont :
   - rapport des diamètres : $d_s/d_{arbre} = 1{,}1$,
   - raccordement par un rayon : $R/(d_s - d_{arbre})$ = environ 2 mm.

Cette solution est nettement supérieure à celle qui prévoit une ou plusieurs entailles de décharge de chaque coté du manchon.

5.1.7 CONDITIONS DE MONTAGE ET DE DÉMONTAGE

La transmission des efforts par les assemblages emmanchés ou frettés est très efficace et relativement facile à exécuter : un arbre cylindrique extérieurement, un manchon cylindrique intérieurement. Les champs de tolérances pour l'ajustement serré sont situés dans les qualités IT6 à IT8. Le prix de revient est inférieur à tout autre type d'assemblage. L'inconvénient principal de ce mode d'assemblage est la difficulté du démontage, surtout après un service prolongé où des souillures ou de la rouille d'appui ne favorisent pas cette opération. L'assemblage de l'arbre et du manchon peut s'effectuer par trois méthodes de montage.

5.1.7.1 MONTAGE PAR GLISSEMENT DES PIÈCES

Les deux pièces étant à la même température, l'arbre est glissé dans le manchon au moyen d'un outillage approprié comme par exemple une presse mécanique ou hydraulique. La force d'emmanchement à produire est à peu près proportionnelle à la longueur emmanchée. L'introduction de l'arbre dans le moyeu ou du moyeu sur l'arbre est facilité par un graissage des surfaces accompagnée malheureusement d'une diminution de la capacité de charge. Ce mode de montage est limité aux pièces de petites dimensions et faibles charges.

vent au centre du moyeu. Résultat surprenant de cette première étude : la répartition de pression la plus uniforme est obtenue avec une nervure extérieure ! Dans le cas du manchon cylindrique, la pression moyenne p_{moy} est pratiquement égale à la valeur calculée.

5.1.6 CONTRAINTES

Les contraintes radiale et axiale sur l'arbre et le manchon sont calculables par les relations générales trouvées précédemment. Ce sont des contraintes principales. La contrainte de contrôle doit utiliser l'un des critères de combinaison usuelle :

- critère du cisaillement limite,
- critère de l'énergie de distorsion.

Les résultats sont différents selon le critère utilisé. Nous utiliserons le critère de l'énergie de distorsion ou critère dit de von Mises au niveau de l'assemblage dans le calcul de la contrainte idéale.

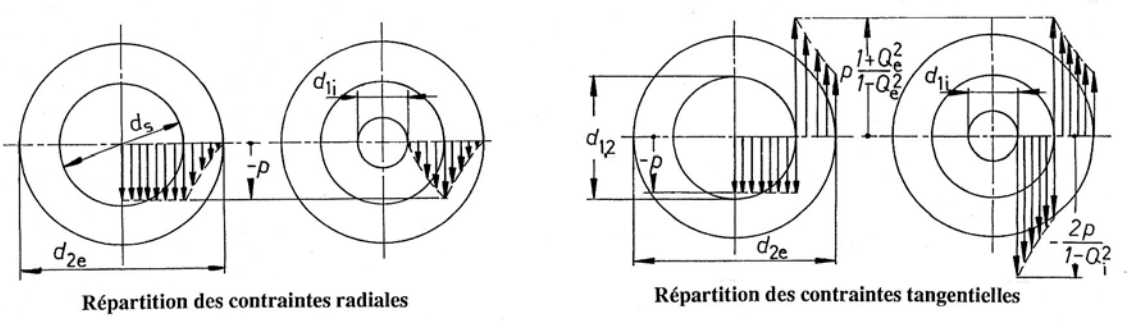


Fig. 5.4 Répartition des contraintes radiales et tangentielles

5.1.6.1 CONTRAINTES DANS L'ARBRE

L'arbre est soumis à l'action d'une pression extérieure p créant un état de contrainte biaxial dans le cylindre. Deux cas sont à considérer : soit un arbre plein, soit un arbre creux. Si l'arbre est creux, la contrainte tangentielle est minimale, en valeur algébrique, à l'intérieur du tube épais. Sur cette surface intérieure, la contrainte radiale est nulle. La contrainte idéale de contrôle se trouve par :

- arbre creux : $\sigma_{1i} = |\sigma_{t1}| = 2\,p\,/\,(1 - Q_1^2)$. (5.14.1)

Si l'arbre est plein, c'est-à-dire si $Q_1 = 0$, la contrainte dans l'arbre est égale à la pression sur l'arbre :

- arbre plein : $|\sigma_{t1}| = p$ d'où $\sigma_{1i} = 2\,p$. (5.14.2)

5.1.6.2 CONTRAINTES DANS LE MANCHON

Le cylindre creux est soumis intérieurement à l'action de la pression p créant un état de contrainte biaxial : une contrainte tangentielle et une contrainte radiale. Le point de contrôle se situe au niveau de la surface intérieure du cylindre. La contrainte idéale en ce point se trouve par :

$$\sigma_{2i} = \frac{p}{1-Q_2^2}\sqrt{3+Q_2^4}\,. \qquad (5.14.3)$$

5.1.5.5 EFFET DE RENFORCEMENTS

La forme de l'arbre plein ou creux est pratiquement toujours cylindrique, celle du moyeu peut être cylindrique, tronconique et peut présenter des renforcements locaux engendrés par des nervures, des bras ou des toiles. Pour savoir quelle est l'influence de ces éléments sur la répartition de la pression entre l'arbre et le moyeu, nous avons modélisé en élément finis un assemblage constitué par un arbre creux à diamètre constant et un moyeu avec ou sans nervure. Les dimensions adoptées sont visibles sur la figure 3.45 , l'assemblage étant symétrique.

Arbre creux :

diamètre intérieur : $d_{1i} = 20$ mm,
diamètre extérieur : $d_{1e} = 100$ mm,

Manchon :

diamètre intérieur : $d_{2i} = 100$ mm,
diamètre extérieur : $d_{2e} = 200$ mm,

Longueurs :

arbre : $l_1 = 320$ mm,
manchon : $l_2 = 160$ mm.

Serrage :

diamétral : total = 0,04 mm.

Coefficient de frottement entre les deux pièces pendant le montage : 0,16 .
Rugosité : admis des surfaces parfaitement cylindriques sans rugosité.
Matière : pièces en acier avec : $E_1 = E_2 = 21 \cdot 10^4$ N/mm^2 et $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$.

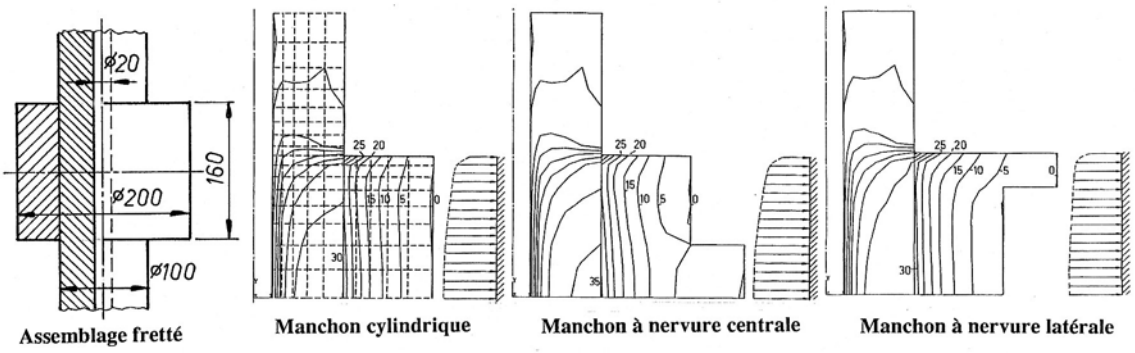


Figure 5.3 Modèle de base de l'étude : Forme de l'arbre et du machon
Répartition des contraintes radiales avec isocontraintes à 5 N/mm^2

Pour les grandeurs proposées, la pression dans l'emmanchement calculée vaut :

$$\bar{p} = 30{,}5 \text{ N/mm}^2.$$

La modélisation du manchon a compris trois variantes :

1. Manchon cylindrique, $p_{max} = 34{,}25$ N/mm^2, $p_{moy} = 30{,}7$ N/mm^2,
2. Manchon avec nervure centrale, $p_{max} = 36{,}62$ N/mm^2,
3. Manchon avec nervure latérale, $p_{max} = 34{,}37$ N/mm^2.

La modélisation comprend seulement le quart de la structure et la forme des éléments est donnée sur la première figure; des éléments interface à frottement sont placés entre l'arbre et le moyeu. Le calcul de l'ensemble devient ainsi non linéaire. Les figures sont complétées par la représentation de la contrainte radiale sur la face intérieure du manchon. Cette contrainte correspond à la pression entre les pièces. Les pressions maximales données ci-dessus se trou-

Tableau 5.1
Coefficient de frottement d'adhérence dans les emmanchements et frettages

Emmanchement par montage axial, arbre en Ac 50			
Surfaces :		sèches	grasses
Acier	Ac37	0,08 à 0,15	0,06 à 0,14
	Ac 60	0,08 à 0,16	0,06 à 0,12
Fontes	GG 20	0,06 à 0,14	0,05 à 0,08
	GGG 60	0,06 à 0,14	0,05 à 0,08
Alliages	AlSi 12	0,04 à 0,10	0,04 à 0,08
	CuPb	0,05 à 0,09	
Frettage entre un arbre et un moyeu en acier Procédé d'assemblage			
Par dilatation thermique			0,12 à 0,18
thermique : surfaces dégraissées			0,14 à 0,22
par pression d'huile			0,10 à 0,15

5.1.5.2 TRANSMISSION D'UNE FORCE AXIALE

La force axiale transmissible F_a par l'assemblage s'obtient par :

$$F_a = \bar{p}\ \mu_0\ A_e / S_{gl}, \qquad (5.13.1)$$

avec : $A_e = \pi\ d_s\ b$ aire de la surface de contact entre l'arbre et le manchon,
d_s diamètre commun de serrage.

5.1.5.3 TRANSMISSION D'UN COUPLE DE TORSION

Le couple de torsion transmissible par l'assemblage vaut :

$$M_t = \bar{p}\ \mu_0\ A_e\ (d_s/2) / S_{gl}, \qquad (5.13.2)$$

avec : $A_e = \pi\ d_s\ b$ aire de la surface de contact entre l'arbre et le manchon.
d_s diamètre commun de serrage.

5.1.5.4 TRANSMISSION D'UNE FORCE AXIALE ET D'UN COUPLE

Si l'assemblage est sollicité simultanément par une force axiale F_a et un couple de torsion M_t, les forces de frottement élémentaires $dF_{R'}$ devront posséder un coefficient de sécurité au glissement S_{gl}. La charge combinée, force axiale F_a, couple de torsion M_t, peut se transformer en un couple de torsion résultant $M_{t\,r}$ calculable par :

$$M_{t\,r} = \{\ [F_a\ (d_s/2)]^2 + M_t^2\}^{0,5}\ \leq\ \bar{p}\ \mu_0\ A_e\ (d_s/2) / S_{gl}, \qquad (5.13.3)$$

les symboles utilisés étant identiques aux précédents.

Pratiquement, les ajustements réels ne se situent pas aux limites des champs de tolérances. Un contrôle valable et plausible des efforts transmissibles consisterait à admettre un serrage au tiers du serrage maximal, un contrôle des contraintes aux deux tiers du serrage maximal.

5.1.4 PRESSION ENTRE L'ARBRE ET LE MOYEU

La conception d'un assemblage emmanché ou fretté consiste à trouver la pression, les contraintes et la sécurité de fonctionnement à partir des dimensions adoptées et des caractéristiques mécaniques des matériaux. Pour simplifier le calcul manuel, nous pouvons écrire :

Diamètre extérieur de l'arbre = diamètre intérieur du manchon = diamètre de serrage d_s.

Posons encore pour simplifier :

- pour l'arbre : $K_1 = [(1 + Q_1^2)/(1 - Q_1^2) - \nu_1] / E_1,$ (5.11.1)
- pour le manchon : $K_2 = [(1 + Q_2^2)/(1- Q_2^2) + \nu_2] / E_2.$ (5.11.2)

Le serrage réel total provient d'une diminution du diamètre extérieur de l'arbre et d'une augmentation du diamètre intérieur du manchon :

$$\Delta d = |\Delta d_1| + \Delta d_2 - (2 \text{ à } 3) (R_{a1} + R_{a2}). \quad (5.11.3)$$

En se servant des relations pour les deux déformations diamétrales, la pression dans l'emmanchement se trouve simplement par :

$$\overline{p} = \frac{\Delta d}{(K_1 + K_2) d_s}. \quad (5.12)$$

Pratiquement, l'arbre de l'assemblage est presque toujours plus long que le manchon. La pression à l'extrémité du manchon est différente de la valeur calculée par la relation proposée. Le rapport entre la pression réelle et la pression de calcul dépend du rapport entre la longueur du manchon et le diamètre de serrage, du rapport des dimensions diamétrales de l'arbre et du manchon, du coefficient de frottement entre les surfaces provenant soit des efforts lors du montage, soit aussi de la déformation non négligeable dans la direction axiale. Les contraintes engendrées par le frottement des surfaces peuvent modifier les résultats analytiques.

5.1.5 CAPACITÉ PORTANTE DE L'EMMANCHEMENT

La capacité portante de l'assemblage dépend du genre de sollicitation, de la pression exercée entre les surfaces, du coefficient de frottement d'adhérence et du coefficient de sécurité adopté.

5.1.5.1 COEFFICIENTS DE FROTTEMENT D'ADHÉRENCE

Le coefficient de frottement dépend surtout de la présence de lubrifiant sur les surfaces et du genre de montage. Les valeurs proposées dans le tableau sont des moyennes.

Le coefficient de sécurité au glissement S_{gl} varie entre :

- charge statique : 1,4,
- charge dynamique pulsante 1,8 ,
- charge dynamique alternée : 2,2 .

Ce coefficient sera d'autant plus élevé que les conditions de montage et les charges extérieures sont mal connues.

5.1.3 RELATIONS PARTICULIÈRES AUX ASSEMBLAGES EMMANCHÉS

Les relations trouvées ci-dessus sont applicables directement aux assemblages emmanchés ou frettés. Pour simplifier l'écriture et les calculs, introduisons les rapports géométriques des diamètres de l'arbre et du manchon, les grandeurs de l'arbre étant indicées 1, celles du manchon 2 :

$$Q_1 = d_{1i} / d_{1e} \qquad \text{et} \qquad Q_2 = d_{2i} / d_{2e}. \qquad (5.9)$$

Le principe de la réciprocité des pressions entre deux surfaces en contact impose une pression égale sur la surface extérieure de l'arbre et sur la surface intérieure du manchon :

$$p = p_{1e} = p_{2i}.$$

Les contraintes radiale et tangentielle au niveau des deux surfaces en contact se trouvent par :

1. *Arbre* : $r = r_{1e}$:

1.1 Contrainte radiale : $\sigma_{r1} = - p$,

1.2 Contrainte tangentielle : $\sigma_{t1} = - p\,(1 + Q_1^2) / (1 - Q_1^2)$,

1.3 Déformation diamétrale : $\Delta d_{1e} = - p\, d_{1e}\, [(1 + Q_1^2) / (1 - Q_1^2) - \nu_1] / E_1$.

2. *Moyeu* : $r = r_{2i}$:

2.1 Contrainte radiale : $\sigma_{r2} = - p$,

2.2 Contrainte tangentielle : $\sigma_{t2} = p\,(1 + Q_2^2) / (1 - Q_2^2)$,

2.3 Déformation diamétrale : $\Delta d_{2i} = p\, d_{2i}\, [(1 + Q_2^2) / (1 - Q_2^2) + \nu_2] / E_2$.

3. *Serrage entre les pièces* :

Le serrage diamétral entre les deux pièces montées concentriquement vaut :

$$\Delta d = d_{1e} - d_{2i}\ .$$

Cette relation est valable pour deux surfaces cylindriques parfaitement lisses. Le serrage réel des pièces est inférieur au serrage théorique calculé à partir des dimensions diamétrales mesurées sur les deux pièces. La perte de serrage représente approximativement 1 à 1,5 fois la rugosité moyenne arithmétique R_a pour chaque surface. En exprimant par R_{a1} et R_{a2} les rugosités des deux surfaces, le serrage réel s'obtient par :

$$\Delta d = d_{1e} - d_{2i} - (2 \text{ à } 3)\cdot(R_{a1} + R_{a2}). \qquad (5.10)$$

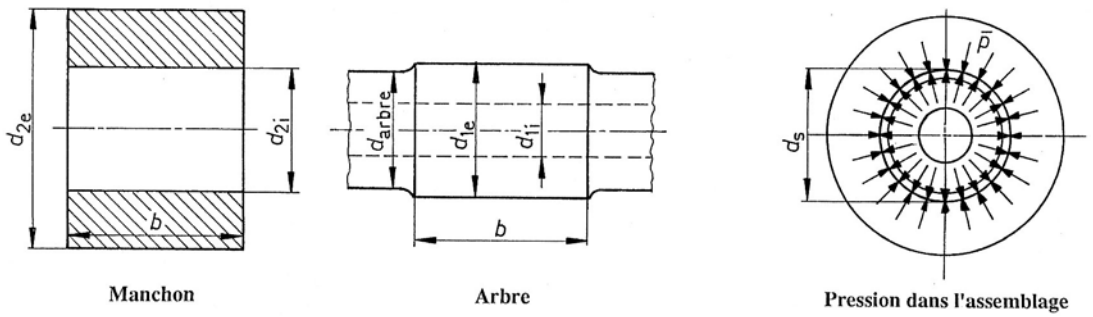


Figure 5.2 Dimensions des deux pièces
Réciprocité de la pression entre l'arbre et le manchon (principe : action = réaction)

Les conditions de serrage de l'assemblage sont fixées par l'ajustement adopté entre les deux pièces. Elles varient entre les écarts supérieurs et inférieurs des deux diamètres tolérés.

$$\sigma_r = C_1 + \frac{C_2}{r^2}. \qquad (5.6.1)$$

D'une façon semblable, la solution générale pour la contrainte tangentielle σ_t devient :

$$\sigma_t = C_1 - \frac{C_2}{r^2}. \qquad (5.6.2)$$

Les deux constantes C_1 et C_2 sont déterminées en introduisant les valeurs locales de la contrainte radiale représentée par les pressions intérieure et/ou extérieure sur les surfaces cylindriques du tube épais.

5.1.2.4 TUBE ÉPAIS SOUS PRESSION INTÉRIEURE

Pour un tube épais, sans fonds, soumis seulement à l'action d'une pression intérieure p_i, les conditions particulières connues sont :

1. pour le rayon $r = r_i$, la contrainte radiale vaut : $\sigma_r = - p_i$,
2. pour le rayon $r = r_e$, la contrainte radiale vaut : $\sigma_r = 0$.

En substituant ces deux valeurs particulières dans la solution générale pour la contrainte radiale, les constantes C_1 et C_2 peuvent se trouver. Les contraintes s'expriment alors par :

1. Contrainte radiale : $$\sigma_r = -p_i \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}\left(\frac{r_e^2}{r^2} - 1\right). \qquad (5.7.1)$$

1. Contrainte tangentielle : $$\sigma_t = p_i \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}\left(\frac{r_e^2}{r^2} + 1\right). \qquad (5.7.2)$$

Le déplacement diamétral d'un point situé au rayon r dans le tube épais se trouve à partir de la déformation spécifique tangentielle ε_t par :

$$\Delta d = 2\, v = 2\, r\, \varepsilon_t = 2\, r/E \cdot (\sigma_t - \nu\, \sigma_r),$$

soit : $$\Delta d = 2r \frac{p_i}{E} \cdot \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_e^2}{r^2}(1+\nu) + 1 - \nu\right). \qquad (5.7.3)$$

5.1.2.5 TUBE ÉPAIS SOUS PRESSION EXTÉRIEURE

Pour un tube épais, sans fonds, soumis seulement à l'action d'une pression extérieure p_e , les conditions particulières sont :

1. pour le rayon $r = r_i$, la contrainte radiale vaut : $\sigma_r = 0$,
2. pour le rayon $r = r_e$, la contrainte radiale vaut : $\sigma_r = - p_e$.

En substituant ces valeurs particulières dans la solution générale, les contraintes en un point situé au rayon r s'expriment par :

1. Contrainte radiale : $$\sigma_r = -p_e \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}\left(1 - \frac{r_i^2}{r^2}\right). \qquad (5.8.1)$$

2. Contrainte tangentielle : $$\sigma_t = -p_e \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}\left(1 + \frac{r_i^2}{r^2}\right). \qquad (5.8.2)$$

La déformation diamétrale au rayon r se trouve par :

$$\Delta d = -2r \frac{p_e}{E} \cdot \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_i^2}{r^2}(1+\nu) + 1 - \nu\right). \qquad (5.8.3)$$

ou encore : $$r\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r}+\sigma_r-\sigma_t=0. \qquad (5.1.2)$$

5.1.2.2 DÉFORMATIONS

Sous l'effet de ces contraintes, le volume élémentaire se déplace et se déforme dans les directions radiale et tangentielle. Le déplacement du volume élémentaire dans la direction radiale est symbolisée par la lettre *v*. Les déformations relatives suivant ces deux directions s'expriment par :

- direction radiale : $$\varepsilon_r=\frac{(v+\mathrm{d}v)-v}{\mathrm{d}r}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}. \qquad (5.2.1)$$

- direction tangentielle : $$\varepsilon_t=\frac{(r+v)\,\mathrm{d}\varphi-r\,\mathrm{d}\varphi}{r\,\mathrm{d}\varphi}=\frac{v}{r}. \qquad (5.2.2)$$

Combinons ces deux relations en remplaçant le quotient différentiel d*v*/d*r* par son expression en fonction de la déformation spécifique tangentielle :

$$\varepsilon_r=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\varepsilon_t\,r)=r\frac{\mathrm{d}\varepsilon_t}{\mathrm{d}r}+\varepsilon_t.$$

ou encore $$r\frac{\mathrm{d}\varepsilon_t}{\mathrm{d}r}+\varepsilon_t-\varepsilon_r=0. \qquad (5.3)$$

Les déformations spécifiques sont reliées aux contraintes par les relations générales de la résistance des matériaux en état plan de contrainte soit :

- direction radiale : $$\varepsilon_r=\frac{1}{E}\cdot(\sigma_r-\nu\sigma_t).$$

- direction tangentielle : $$\varepsilon_t=\frac{1}{E}\cdot(\sigma_t-\nu\sigma_r).$$

Après introduction de ces expressions dans la relation différentielle précédente, simplification et mise en évidence, la relation devient :

$$r\left(\frac{\mathrm{d}\sigma_t}{\mathrm{d}r}-\nu\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r}\right)+(\sigma_t-\sigma_r)\cdot(1+\nu)=0. \qquad (5.4)$$

Cette relation différentielle exprime la compatibilité entre les déformations de l'élément et les contraintes sur les faces.

5.1.2.3 RELATION DIFFÉRENTIELLE ET SOLUTION GÉNÉRALE

Pour résoudre ces deux relations différentielles simultanées, éliminons l'une des contraintes, par exemple la contrainte tangentielle, donnée par la première expression :

$$\sigma_t=r\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r}+\sigma_r,$$

et introduisons cette expression dans la seconde relation différentielle. Après calcul de la dérivée par rapport au rayon, simplification, la relation différentielle finale s'écrit :

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2\sigma_r}{\mathrm{d}r^2}+3r\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r}=0. \qquad (5.5)$$

C'est une équation différentielle linéaire, homogène, du second ordre dans laquelle la contrainte radiale σ_r est fonction du rayon. La solution générale de cette équation différentielle est de la forme :

E_2 module d'élasticité du moyeu,
ν_1 coefficient de Poisson de l'arbre,
ν_2 coefficient de Poisson du moyeu,
R_{e1} contrainte à la limite apparente d'élasticité de l'arbre ou éventuellement R_{p1} à la limite conventionnelle d'élasticité,
R_{e2} contrainte à la limite apparente d'élasticité du manchon ou éventuellement R_{p2} à la limite conventionnelle d'élasticité.

La cote nominale du diamètre extérieur de l'arbre est égale à celle du diamètre intérieur du manchon. Seuls des champs de tolérance bien adaptés, imposant les écarts dimensionnels, permettent d'assurer en service un serrage convenable entre l'arbre et le manchon.

5.1.2 RELATIONS FONDAMENTALES

La recherche de la répartition des contraintes et des déformations dans un assemblage fretté se sert des résultats obtenus dans l'étude d'un tube épais, sans fonds, soumis à l'action d'une pression soit extérieure, soit intérieure. C'est un problème de recherche des contraintes et des déformations dans la direction radiale en état plan de contrainte, la déformation longitudinale étant négligée. Etudions les contraintes et les déformations d'un tube épais, dimensions radiales r_i et r_e, sollicité par des pressions intérieure p_i et extérieure p_e.

5.1.2.1 ÉQUILIBRE

Découpons dans ce but un anneau élémentaire au rayon r, épaisseur dr, et isolons un volume élémentaire, repéré angulairement par l'angle dφ. La longueur égale de l'arbre et du manchon est désignée par b. Les contraintes sur les faces latérales de cet élément sont soit dans la direction radiale, indice r, soit dans la direction tangentielle, indice t. Dans la direction radiale, supposons une augmentation de contrainte de dσ_r sur l'épaisseur dr. Sur les faces latérales, la contrainte vaut σ_t . Exprimons l'équilibre du volume élémentaire en projetant les forces sur la direction du rayon:

$$-\sigma_r\, b\, r\, \mathrm{d}\varphi + \sigma_r\, b\, r\, d\varphi + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\sigma_r\, b\, r\, \mathrm{d}\varphi) - 2\,\sigma_t\, b\, \mathrm{d}r\, \frac{d\varphi}{2} = 0.$$

Après simplification et division par $b \cdot \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi$, cette relation devient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\sigma_r\, r) - \sigma_t = 0, \qquad (5.1.1)$$

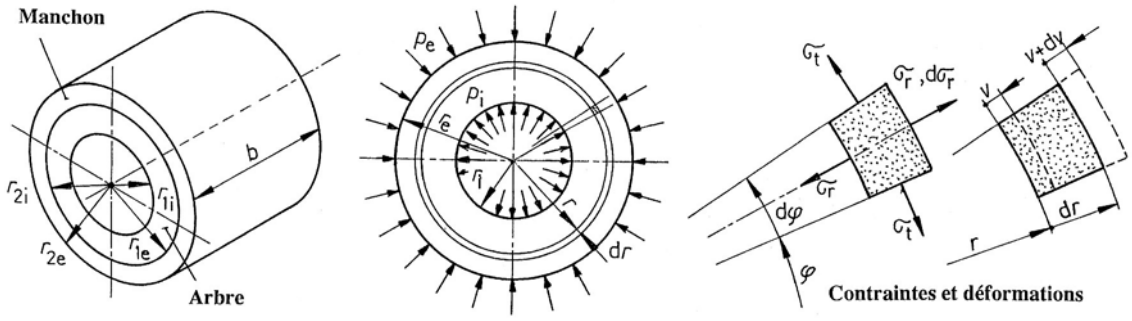


Figure 5.1 Manchon et arbre fretté assemblés : dimensions générales
Contraintes sur les faces du tube épais, équilibre et déformations de l'élément

CHAPITRE 5

ÉLÉMENTS À FROTTEMENT

Dans les éléments de machines travaillant par frottement, la transmission des efforts entre les diverses pièces est assurée par la création d'une ou de plusieurs pressions élevées sur les faces en contact de telle sorte que la force de frottement d'adhérence soit supérieure aux efforts extérieurs appliqués sur l'assemblage. La sécurité de l'assemblage est donnée par le rapport entre l'effort limite provoquant le glissement des surfaces et l'effort réellement appliqué sur la structure.

5.1 EMMANCHEMENTS ET FRETTAGES

L'assemblage emmanché ou fretté, dans lequel la transmission du couple de torsion ou de l'effort axial est basé exclusivement sur le frottement entre deux éléments montés avec un fort serrage, est connu depuis longtemps pour sa sécurité de fonctionnement. Il représente très souvent la seule possibilité de rendre solidaire un arbre et un moyeu sollicités par de grands efforts à direction variable et se produisant par à-coups. L'emmanchement peut s'effectuer à froid en glissant l'une des pièces sur l'autre, par dilatation ou contraction thermique, ou au moyen d'une pression hydrostatique entre les surfaces des deux pièces. Cette dernière possibilité d'assemblage est particulièrement favorable lors du démontage de l'assemblage.

5.1.1 HYPOTHÈSES INITIALES ET CARACTÉRISTIQUES

Le calcul des emmanchements ou frettages cylindriques, constitués par une pièce intérieure nommée arbre plein ou creux et une pièce extérieure appelée manchon, fait intervenir un ensemble d'hypothèses simplificatrices dont les principales sont citées ici :

1. les deux pièces ont exactement la même longueur.
2. les deux pièces sont constituées par des cylindres géométriquement parfaits, pleins ou creux pour l'arbre. L'effet de bras ou de nervures sur le manchon nécessite éventuellement une correction du diamètre extérieur de calcul.
3. la loi de proportionnalité de Hooke est applicable, c'est-à-dire les contraintes simples et résultante sont situées toujours dans le domaine élastique linéaire. Il est possible de construire des assemblages sollicités par des déformations partiellement plastiques ou d'utiliser des matériaux à comportement non linéaire comme par exemple la fonte grise.
4. les deux pièces, arbre et manchon, sont à la même température et ne sont pas soumises à l'effet centrifuge. Comme ces deux effets interviennent fréquemment dans la pratique, ils seront discutés en fin de ce sous-chapitre.

Introduisons les divers symboles pour les dimensions géométriques de l'assemblage, l'indice 1 étant réservé à l'arbre, l'indice 2 au manchon, pour les caractéristiques mécaniques des matières :

d_{1i} diamètre intérieur de l'arbre, cette dimension étant nulle pour un arbre plein,
d_{1e} diamètre extérieur ou nominal de l'arbre,
d_{2i} diamètre intérieur du manchon,
d_{2e} diamètre extérieur du manchon,
E_1 module d'élasticité de l'arbre,

Pour les températures comprises entre - 30°C et - 120°C, les aciers d'amélioration au nickel, comme par exemple la nuance 12 Ni 19, numéro 1.5680, peuvent remplir pleinement leur fonction tandis que pour des températures encore plus basses, jusqu'à - 250°C, les aciers austénitiques au chrome nickel, comme la nuance X 12 CrNi 18 9, et les aciers inoxydables A2 et A4 peuvent s'utiliser. Attention à la fragilité accrue de certains aciers !

Des alliages particuliers sont utilisés dans la fabrication de la visserie pour l'aéronautique et la recherche spatiale. Citons les alliages à base de titane comme Ti 6Al 4V et Ti 6Al 6V 2Sn qui possèdent un rapport résistance à masse volumique plus favorable que les aciers à haute résistance. Par contre, ils exigent des conditions particulières de fabrication, de montage et d'utilisation. Il est également possible d'introduire des aciers à ultrarésistance avec des contraintes de rupture comprises entre 1200 et 1800 N/mm^2, accompagnées malheureusement d'une grande sensibilité à l'entaille.

6.6.5.4 VISSERIE EN MATIÈRE SYNTHÉTIQUE

Les fabricants de vis et écrous offrent une gamme réduite de vis à tête cylindrique ou hexagonale, des écrous, des bouchons filetés et des goujons, des rondelles intercalaires, etc., en polyamide PA 66 ou PA 6 . Le domaine d'utilisation de ces articles est donné par leur bonne résistance aux produits courants tels l'acétone, le benzène, le beurre et le lait, les huiles et les graisses alimentaires, la vaseline, etc. La température d'utilisation ne devrait pas dépasser 80 à 100°C si l'on désire atteindre une longue durée de vie.

8.8 à 10.9. Ces coefficients varient entre 0,25 et 0,50 pour des surfaces sèches, entre 0,12 et 0,35 pour des surfaces partiellement lubrifiées.

6.6.5.3 VISSERIE POUR HAUTES ET BASSES TEMPÉRATURES

La visserie courante est utilisable dans le domaine des températures comprises entre -20 °C et + 300 °C. L'effet thermique doit intervenir dans le calcul des pièces sollicitées par des températures différentes de celle de montage. La dilatation thermique de la vis n'est presque jamais égale à celle des pièces serrées. Il en résulte une modification du serrage dans l'assemblage.

Tableau 6.10
Choix d'aciers pour visserie utilisée à températures élevées
Caractéristiques mécaniques à température ambiante (20°C)

	Désignation de l'acier DIN (VSM)	Numéro DIN	R_m N/mm^2	$R_{p0,2}$ N/mm^2	A_5 %	DVM J
Utilisation : Domaine des températures entre 300 °C et 540 °C						
VE	Ck 35	1.1181	500 à 600	280	22	41
VE	24 CrMo 5	1.7258	600 à 750	450	18	55
VE	24 CrMoV 55	1.7733	700 à 850	550	17	55
VE	21 CrMoV 511	1.8070	700 à 850	550	17	55
E	Ac 50-2	1.0532	500 à 600	300	20	–
E	C 35	1.0501	500 à 600	280	22	–
Utilisation : Domaine des températures entre 540 °C et 650 °C						
V	X22 CrMoV 121	1.4923	800 à 950	600	14	34
V	X8 CrNiMoBNb 1616 K	1.4986	650 à 850	500	16	34
E	X19 CrMo 121	1.4921	700 à 850	500	16	48

V pour les vis VE pour les vis et écrous E pour les écrous
DVM Résilience DVM en joules

En plus, une augmentation de la température provoque une diminution du module d'élasticité, de la limite élastique et de la contrainte de rupture accompagnée d'une augmentation de l'allongement de rupture. A température élevée, l'oxydation et éventuellement la corrosion par l'oxygène et d'autres gaz sont accélérées. L'effet du fluage ne peut plus être négligé dès que les températures sont supérieures à 400°C.

Pour les assemblages soumis à l'effet thermique, il est recommandé de contrôler le serrage des pièces à la température ambiante au moment du montage, à la température de service, pendant le passage de la température ambiante à la température de service et pendant la période de refroidissement. Le serrage initial ne devrait pas engendrer une contrainte normale dans la section la plus faible supérieure à 70 % de la limite élastique à la température d'utilisation.

- *cadmiage - passivage* : même épaisseur que le zingage, mais meilleure protection contre la corrosion en climat marin, plus cher que le zingage et procédé très polluant.
- *nickelage* : procédé décoratif qui permet une bonne protection contre la corrosion. Recouvrement dur employé dans l'appareillage électrique et les télécommunications.
- *chromage* : effectué après nickelage, épaisseur environ 0,4 mm, augmente la protection contre la corrosion.
- *cuivrage* : si nécessaire, comme couche préliminaire avant le nickelage et le chromage; utilisé à titre décoratif.
- *eloxage* : pour les pièces en aluminium, l'oxydation anodique forme une couche protectrice contre la corrosion et empêche l'apparition de taches. Ce procédé permet d'obtenir pratiquement toutes les colorations souhaitées.

6.6.5.2 VISSERIE EN ACIER INOXYDABLE

Lorsque la couche protectrice des vis normales est insuffisante ou lorsque l'assemblage doit résister longtemps à l'attaque d'un milieu corrosif, seules les vis en acier inoxydable ou éventuellement en alliages particuliers entrent en ligne de compte. Les normes en vigueur sont la norme DIN 267 partie 11 et ISO 3506.

Les vis à tête hexagonale ainsi que les vis à tête cylindrique à six pans creux dont le diamètre de filetage est égal ou supérieur à 5 mm doivent être clairement caractérisées, si possible sur la tête de la vis : groupe d'acier et classe de résistance, ainsi que la marque d'origine. Les classes utilisées couramment dans le commerce sont : A2/70 et A4/70 . Ces deux classes sont inoxydables, résistent aux acides et sont facilement soudables. Les éléments en aciers austénitiques peuvent s'utiliser jusqu'à :

classe A2/70 : jusqu'à - 196°C,
classe A4/70 : jusqu'à - 60°C.

Tableau 6.9
Propriétés mécaniques des aciers inoxydables austénitiques pour la visserie

Groupe d'acier	Classe de résistance	Domaine des diamètres	VIS			ECROU
			R_m N/mm^2	$R_{p0,2}$ N/mm^2	A_5	Sp N/mm^2
A1,	50	≤ M39	500	210	0,6 *d*	500
A2,	70	≤ M20	700	450	0,4 *d*	700
et A4	80	≤ M20	800	600	0,3 *d*	800
Toutes les valeurs sont calculées et basées sur la section résistante du filetage de la vis.						
Baisse de la limite apparente d'élasticité des aciers austénitiques à température élevée. Rapport entre la limite apparente d'élasticité à chaud à celle à 20°C.						
Groupe d'acier	Température					
	+ 100°C		+ 200°C	+ 300°C	+ 400°C	
A2 / 70	85 %		80 %	75 %	70 %	
A4 / 70	85 %		80 %	75 %	70 %	

L'échange d'une vis de classe 8.8, diamètre M5 à M16, contre une vis de la classe 70 n'est possible que si l'on choisit pour la vis inoxydable le diamètre plus grand. Entre M20 et M30, les vis de la classe 4.6 peuvent s'échanger contre celles d'un même diamètre de la classe 70. Les coefficients de frottement μ_{vis} et $\mu_{tête}$ sont nettement plus élevés que ceux des vis en acier

frottement, erreur sur les rayons de contact, erreur de l'instrument de mesure. Il est possible d'améliorer le résultat en mesurant l'allongement de la vis sous la force de serrage.

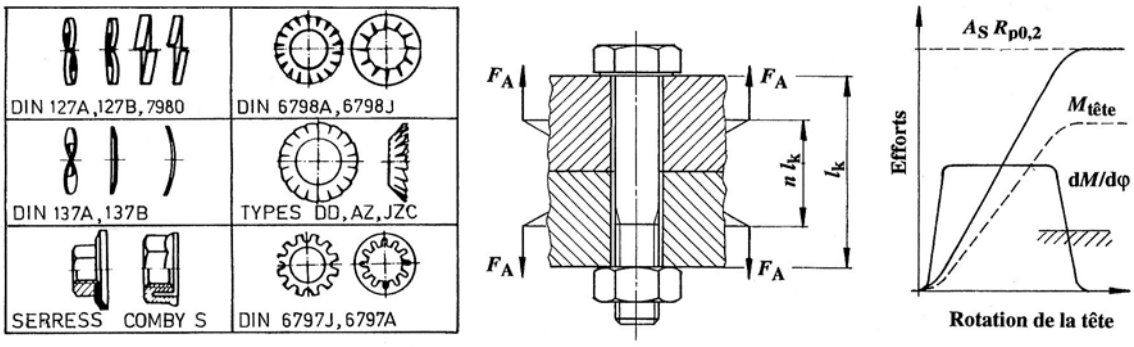


Figure 6.27 Rondelles dites de sécurité
Couple de serrage contrôlé à la limite $R_{p0,2}$ et quotient $dM_{clef}/d\varphi$

2. *Serrage* manuel ou motorisé *avec contrôle de la limite d'élasticité* : la limite apparente d'élasticité est déterminée par mesure simultanée du couple et de l'angle de rotation afin de trouver le quotient différentiel $dM_{clef}/d\varphi$. Dès que la contrainte à la limite d'élasticité est atteinte, ce quotient devient nul, figure 6.27. Le serrage se sert pratiquement d'un point limite situé dans la partie descendante de la courbe dérivée. Indépendamment du coefficient de frottement sous la tête de la vis, le serrage est prolongé jusqu'à ce que la contrainte idéale atteigne la limite élastique. La déformation plastique de la vis se situe dans la fourchette nécessaire à la définition de $R_{p0,2}$. La contrainte atteinte dans une vis de classe 12.9 est comprise entre 1100 N/mm^2 et 1200 N/mm^2 suivant la qualité de l'acier et le coefficient de frottement sur le filetage. La vis peut être dimensionnée à partir de la force minimale de montage $F_{M\,min}$, le facteur de serrage étant $\alpha_A = 1{,}0$.
3. *Serrage défini par l'angle de rotation*, commande manuelle ou motorisée. Dans ce mode de serrage, la mesure de l'angle de rotation comprend non seulement la génération de l'effort axial dans la vis, mais aussi le lissage des surfaces et des pièces. Pour que ce système remplisse convenablement sont rôle, il est nécessaire d'atteindre la limite apparente d'élasticité dans la vis et de consacrer plusieurs essais afin de trouver la valeur à prescrire. Cette méthode nécessite l'utilisation d'aciers ductiles et s'applique principalement dans l'industrie automobile.

6.6.5 VISSERIE POUR CONDITIONS PARTICULIÈRES

Les vis usuelles résistent mal à l'attaque d'un milieu acide ou basique bien que la plupart des éléments reçoivent un traitement de protection en surface.

6.6.1 PROTECTION CONTRE LA CORROSION

Le procédé courant de protection est constitué par un zingage de la vis suivi d'un traitement de passivage nommé également chromatisation. Le passivage s'effectue immédiatement après le zingage en plongeant rapidement la pièce dans un bain acide chromique. Cette opération augmente la résistance à la corrosion et empêche la couche de zinc de se ternir et de se décolorer. Les groupes de procédés sont normés selon DIN 50941 : A - chromatisation transparente, B - chromatisation bleue, C - chromatisation jaune, D - chromatisation olive, la résistance à la corrosion allant en augmentant. Les autres procédés de protection sont :

L'assemblage est particulièrement en danger lorsque les efforts extérieurs sont une combinaison de forces axiale et transversale. Sous l'effet de ces forces, les surfaces peuvent glisser légèrement ce qui provoque un déplacement soit de la tête, soit de l'écrou ou des deux.

Les moyens pour éviter le phénomène du desserrage des assemblages à vis sont :

1. *Tension axiale suffisante* dans la vis afin d'éviter le glissement des pièces, d'où choix d'une des classes de qualité supérieure ou augmentation du diamètre nominal de la vis, avec contrôle de la pression superficielle.
2. *Amélioration des déformations élastiques* en adoptant un rapport l_k/d égal ou supérieur à 5 ou en introduisant une vis d'extension à rigidité plus faible en flexion.
3. *Sécurités contre la perte de l'assemblage* comme par exemple les vis et écrous à tête hexagonale ou à tête à six pans creux avec collerette incorporée. Utilisation de rondelles trempées supportant les pressions limites du tableau 6.7 , introduction d'éléments de sécurité comme les rondelles à éventails DIN 6798 ou les rondelles dentées DIN 6797 pour des vis jusqu'à la classe 8.8. Pour les vis des classes 10.9 et 12.9, ces éléments subissent des précontraintes tellement élevées qu'ils sont aplatis et ne forment plus l'effet ressort désiré.
4. *Sécurités contre le desserrage* obtenues seulement dans des conditions optimales de montage comme : surface des joints lisses et propres, le minimum de surfaces serrées, élimination de serrage combiné d'éléments plastiques ou quasi élastiques comme les éléments d'étanchéité en cuivre, en aluminium, en caoutchouc ou en plastique, nouveau serrage de la vis peu de temps après la mise en service sous charge (doit figurer dans les prescriptions de service), amélioration de la méthode de serrage. L'enduit d'une couche mince de polyamide soudée sur la partie filetée permet d'augmenter la sécurité. Les sécurités chimiques comme les colles micro capsulées ou les colles anaérobiques peuvent s'introduire dans les assemblages à montage unique.
5. Les moyens de serrage et les éléments de sécurité peuvent se tester dans une machine d'essai appropriée. Donnons les résultats d'essais réalisés sur une vis M 10 x 35, classe de qualité 8.8, surface de la vis légèrement huilée, précontrainte au serrage à 90 % de $R_{p0,2}$ plaques en acier traité 900 à 1050 N/mm^2, fréquence 15 Hz.
   - rondelle ressort DIN 127 B : desserrage après 150 à 250 cycles,
   - rondelle dentée DIN 6797 A : desserrage après 250 cycles,
   - rondelle éventail DIN 6798 A : même comportement que la précédente,
   - écrou en métal avec sécurité : conserve 20 % de la précontrainte après 1000 cycles,
   - vis Tensilock, vis nervurée : conserve 85 % de la précontrainte après > 1000 cycles,
   - colle micro-capsulée Precote : conserve 85 % de la précontrainte après > 1000 cycles.

   (renseignements fournis par Bossard S.A. et tirés de [1.62 et 1.63]).

6.6.4 MÉTHODES DE SERRAGE

Toutes les méthodes de serrage sont basées sur la mesure du couple de serrage et l'estimation des coefficients de frottement sur les surfaces glissantes. Les principales méthodes de serrage sont :

1. *Serrage commandé par le couple de serrage* avec clef dynamométrique ou visseuse de précision avec mesure du couple de rotation. Le couple total à produire est égal à la somme du couple entre vis et écrou :

$$M_{clef} = M_{vis} + M_{tête}.$$

Ces valeurs peuvent se calculer par les formules trouvées précédemment. Les erreurs influençant la valeur de la force de serrage sont : erreur sur le choix des coefficients de

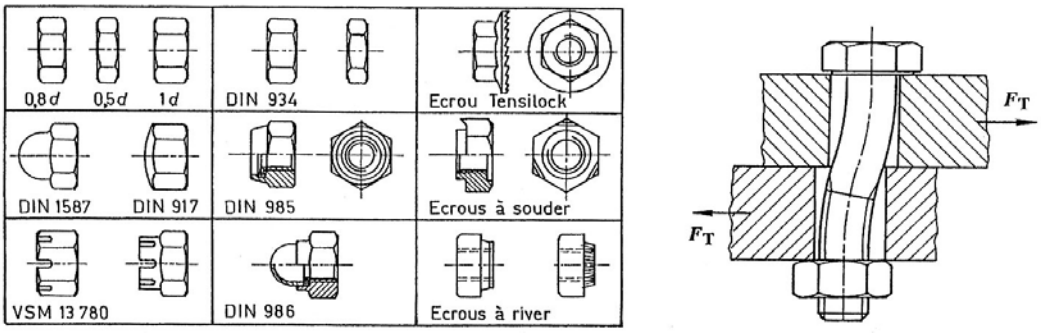


Figure 6.26 Ecrous pour assemblages vissés. Modèle pour comportement sous force transversale

6.6.3 SÉCURITÉ CONTRE LE DESSERRAGE

Pour qu'un assemblage vissé puisse remplir sa fonction en toute sécurité, il faut tenir compte des facteurs suivants : bonne géométrie des pièces serrées en particulier le parallélisme des surfaces, nombre suffisant de vis, choix correct de la classe de qualité des vis, influence de la température et de la corrosion, coût de l'assemblage (matériau, vis, usinage des pièces). En serrant la vis, la précontrainte effective dans la vis ou plutôt le couple de serrage sur la clef devrait garantir la constitution d'une construction cohérente. Cela impose d'une part un calcul selon VDI 2230 et un serrage effectué sous contrôle sérieux des efforts. La précision dans le couple de serrage permet de diminuer le facteur de serrage donc de diminuer également le diamètre des vis.

La sécurité contre le desserrage des vis d'un assemblage est un point très important à ne pas négliger. Sous l'effet de charges variables dans le temps, la vis, l'écrou et les pièces serrées se déforment. Le glissement entre les surfaces hélicoïdales des parties filetées de la vis et de l'écrou a lieu suivant la ligne de plus grande pente, la force de frottement étant opposée au mouvement de glissement ce qui modifie la direction du glissement à la charge et à la décharge. Si les surfaces glissent, ce mouvement répété peut à la longue diminuer la force de serrage F_V et libérer finalement la vis. L'ensemble n'est assuré que si la vis et l'écrou le sont aussi, soit directement entre eux, soit par l'intermédiaire des pièces à assembler. Il faut toujours prévoir les conséquences d'un desserrage accidentel, en particulier les risques d'accidents pour le personnel, les interruptions coûteuses de service, les possibilités de trouver des pièces de rechange sur place et les conditions d'accès aux points délicats. Sous charge statique constante, l'assemblage à vis ne devrait jamais se desserrer. Par contre, sous charge variable, en particulier sous forces transversales, il est possible que la force de montage résiduelle diminue en fonction du temps. Les études et essais en laboratoire, confirmés par la pratique, ont montré que beaucoup d'éléments de sécurité ne remplissaient que partiellement l'effet désiré. La perte de serrage provient essentiellement du tassement des surfaces comprimées et de la déformation plastique des pièces ou éventuellement de la vis.

Un assemblage à vis conçu correctement et serré suivant les recommandations précédentes doit remplir sa fonction sans adjonction d'éléments supplémentaires de sécurité. Les forces de serrage dans la vis et les pièces suffisent à maintenir en place le tout sous l'effet des efforts extérieurs. L'expérience a montré que le desserrage des assemblages provenait de deux causes principales :

- diminution de la tension axiale de serrage provoquée par les déformations plastiques de la vis et des pièces serrées;
- desserrage du système vis - écrou par glissement des surfaces hélicoïdales des filetages de la vis et de l'écrou ou application de forces transversales trop élevées.

favorable au montage sur manipulateurs ou robots. Dans la collection courante, citons les vis avec empreinte cruciforme ou la vis type Torx à filetage extérieur ou intérieur. Pour les vis hors norme, il est nécessaire de contrôler, en plus du comportement général de la vis, la résistance de la tête dans les parties les plus faibles, en particulier les ruptures par cisaillement vers le raccordement entre la partie cylindrique et la tête.

Les vis sans tête et les goujons existent en diverses exécutions : avec fente et bout plat, entièrement fileté, avec pointe, avec téton, avec bout en cuvette, etc. Les goujons sont prévus avec ou sans rainure de fin de filetage, avec un corps intermédiaire renforcé ou même rectifié servant de centrage. La longueur de définition normée concerne la partie libre du goujon.

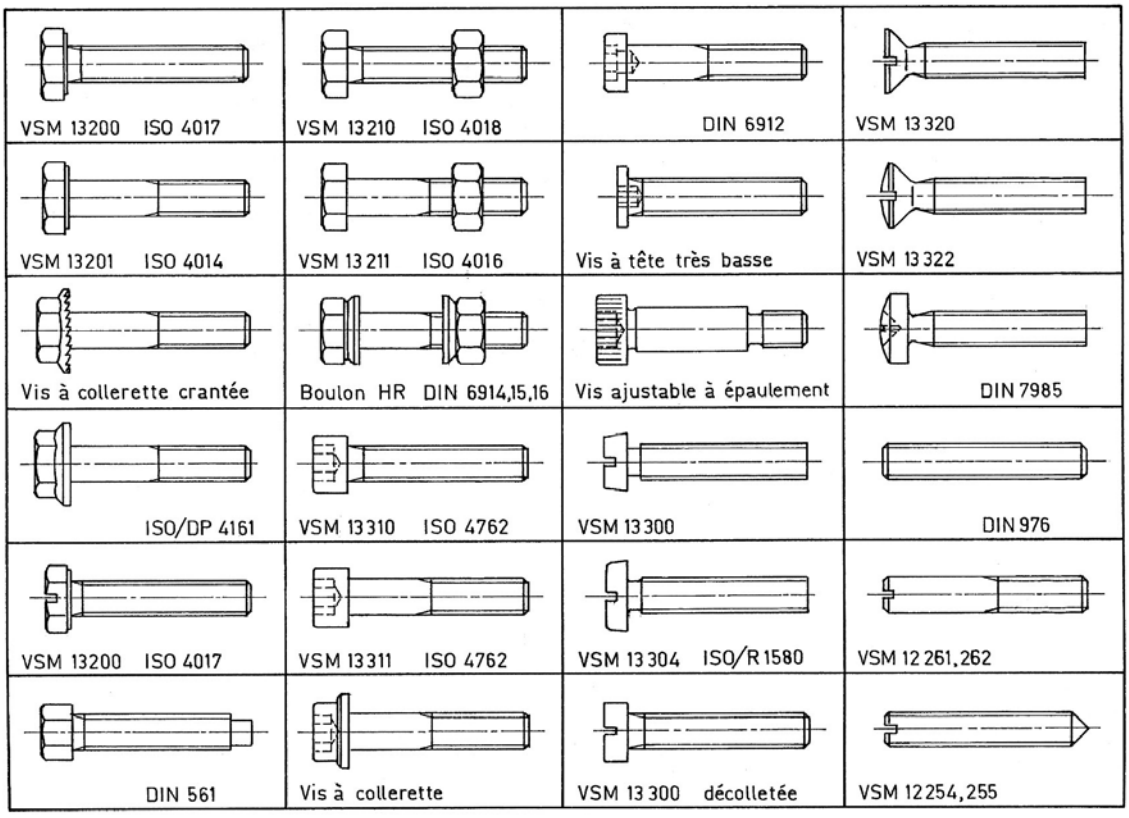


Figure 6.25 Principaux types de vis utilisées en construction de machines

Les écrous usuels sont du type hexagonal, la hauteur normale étant 0,8 fois le diamètre nominal 0,8 d . La forme de ces écrous est normalisée et diverses variantes sont à disposition : écrou hexagonal bas 0,5 d, écrou carré, écrou borgne, écrou crénelé, écrou dit de sécurité avec anneau frein en polyamide, écrou à oreilles, écrou étanche, écrou à collerette avec crans d'arrêt, écrou hexagonal ou carré à souder ou à river, écrou à encoche, écrou cylindrique à fente ou à trou, etc. La classe de qualité s'indique seulement par le premier symbole de résistance et doit en principe correspondre à celui de la vis.

A part les vis usuelle utilisées en construction de machines ou métallique, la gamme complète des vis comprend également toute la famille des vis à tôle, des vis auto perçantes, des vis réservées au montage dans les pièces en matière synthétique, les vis à bois et pour panneaux agglomérés, etc.

La profondeur minimale vissée dépend de plusieurs facteurs : le profil du filetage, le pas du filet, les champs de tolérance, la forme de la pièce filetée : écrou ou pièce massive, du trou de passage pour la vis, la résistance et la ténacité de la vis et de l'écrou, du genre de sollicitation, du coefficient de frottement, du nombre de montage et démontage. Si la longueur vissée est inférieure à la longueur minimale, il se produit un arrachement du filetage dans la pièce la moins résistante. La résistance du filet croît proportionnellement à la profondeur vissée jusqu'à rupture dans le noyau de la vis. Une augmentation de la hauteur de l'écrou ou de la profondeur vissée n'augmente pas la résistance à la traction de la partie libre du filet. Les filetages à pas fin demandent une profondeur vissée supplémentaire et sont également sensibles à la saleté et la détérioration. Les pas fins sont surtout employés comme filetage de sécurité et permettent, à dimension nominale égale, de transmettre une plus grande charge si la profondeur vissée est respectée.

Avec le boulon, constitué d'une vis à tête hexagonale et d'un écrou, il suffit de percer les pièces à serrer avec le jeu diamétral nécessaire. Sur gabarit de perçage, la précision des entraxes et la coïncidence des trous est habituellement suffisante. Il ne faut pas oublier l'accessibilité de l'assemblage des deux côtés afin de pouvoir serrer les vis au montage. Le goujon, pièce cylindrique avec filetage aux deux extrémités, fixé à demeure dans l'une des pièces, généralement la plus massive, permet le démontage fréquent des pièces mobiles. Cette solution convient aux couvercles glissés sur les goujons à axe vertical, le montage s'effectuant à l'aide d'un engin de levage.

6.6.2 CHOIX DU TYPE DE VIS ET D'ÉCROU

La vis à tête hexagonale, entièrement ou partiellement filetée selon la longueur adoptée, est la solution à préférer en mécanique générale car elle est peu délicate et permet l'utilisation totale de la résistance de la vis pendant le montage et en service. Ce type de vis existe en plusieurs classes de qualité : de 4.6 à 12.9 . L'espace entre les vis doit être suffisant pour le passage des clefs de serrage. Plusieurs variantes et exécutions particulières sont à disposition : vis à tête hexagonale à collerette, vis à tête hexagonale réduite, vis à tête hexagonale à collerette crantée, etc. Le boulon se compose d'une vis et d'un écrou hexagonal. Il existe plusieurs exécutions et classes de qualité. Le boulon dit pour assemblage à haute résistance, type HR, classe de qualité 10.9, s'emploie dans la construction métallique.

La vis à tête cylindrique à six pans creux est répandue dans les machines-outils, la classe de qualité usuelle étant 8.8 . Elle se monte dans les assemblages à place réduite pour les têtes de vis ou lorsque les têtes doivent être noyées dans la pièce serrée. Variantes : vis à tête cylindrique à collerette et six pans creux, vis à tête cylindrique basse et six pans creux, vis ajustable à épaulement et six pans creux, etc. Avant d'utiliser une vis de forme spéciale, s'assurer qu'elle existe en magasin.

Les vis à tête cylindrique et fente sont utilisées pour les assemblages de petites dimensions, jusqu'à M6, les efforts supportables étant faibles. Elles sont fabriquées soit par déformation de matière, soit par décolletage. La classe de qualité courante est 5.8 pour les premières, une résistance R_m = 500 à 700 N/mm^2 pour les secondes. La vis Pan-Head présente une tête plus grande en diamètre que la vis à tête cylindrique. Les vis à tête conique permettent de serrer et de centrer les pièces de petites dimensions. Elles existent en plusieurs exécutions et classe de résistance, habituellement 5.8 et 8.8. Elles exigent malheureusement une excellente précision dans l'alignement du trou fileté et du centrage tronconique.

Le montage motorisé des assemblages à vis a exigé de nouvelles formes de tête et moyens d'entraînement, la forme hexagonale ou la présence de fente pour tournevis n'étant pas

6. Remarque finale

Les résultats calculés dans cet exemple ne correspondent pas à ceux de l'article. Par exemple la force axiale maximale proposée était $F_{M\,max}$ = 32 828 N ce qui correspond à une contrainte normale σ_n = 989 N/mm^2 et une contrainte idéale σ_i = 1216 N/mm^2 (!) , donc nettement plus élevée que $R_{p0,2}$. Le résultat du calcul dépend donc principalement de l'estimation de l'élasticité des pièces serrées. La détermination des caractéristiques des surfaces de la pièce est très primitif dans cet exemple.

6.6 RECOMMANDATIONS POUR LE CHOIX DES VIS

Le choix du type d'assemblage : vis, boulon (vis et écrou) ou goujon, dépend d'une série de facteurs. Dans tous les cas, l'assemblage doit assurer correctement la fonction prévue initialement, transmettre les efforts sûrement et présenter une résistance suffisante en service. Dans la recommandation VDI 2230 , la charge axiale de montage $F_{M\,max}$ et le couple de serrage correspondant M_{clef} sont calculés au moyen de formules approximatives.

6.6.1 CHOIX DU TYPE D'ASSEMBLAGE

Si la vis est simplement prévue avec taraudage dans la contre - pièce, il faut chercher à percer l'avant-trou sur toute l'épaisseur afin de faciliter l'évacuation des copeaux à la fabrication. *Attention* : l'étanchéité n'est plus assurée par le contact entre la vis et le filetage intérieur dans la pièce. Pour une utilisation extrême des vis dans un assemblage, qui pourrait se traduire par une rupture dans la partie libre sollicitée principalement en traction, généralement le premier filet porteur, ou dans la section amincie pour une vis d'extension, la longueur vissée doit être suffisamment grande. Le tableau ci-après donne les valeurs usuelles.

Tableau 6.8

Longueur minimale en prise entre une vis et une pièce filetée intérieurement

Matière des Pièces serrées	Longueur en fonction de la classe de vis			
	3.6 4.6	4.8 6.8	8.8	10.9 12.9
Aciers de construction				
Acier avec R_m ≤ 400	0,8 *d*	1,2 *d*		
> 400 à 600	0,8 *d*	1,0 *d*	1,2 *d*	
> 600 à 800	0,8 *d*	1,0 *d*	1,2 *d*	1,2 *d*
> 800	0,8 *d*	1,0 *d*	1,0 *d*	1,0 *d*
Fontes de fer, de cuivre				
Fontes grises	1,2 *d*	1,5 *d*	1,5 *d*	–
Alliages de cuivre	1,2 *d*	1,2 *d*		–
Alliages légers				
Fontes d'aluminium	1,6 *d*	2,2 *d*		–
Aluminium pur	1,6 *d*			–
Alliages Al durcis	0,8 *d*	1,2 *d*	1,6 *d*	–
Alliages Al non durcis	1,2 *d*	1,6 *d*		–
Métaux tendres	2,5 *d*	–	–	–
Polyamides PA 6, PA 66	2,5 *d*	–	–	–

$/(\pi \cdot 205\,000) = 3{,}633 \cdot 10^{-6}$ mm/N,
$\delta_{GM} = (0{,}5/36 + 0{,}4/50{,}3)\ 8/205\,000 = 0{,}852 \cdot 10^{-6}$ mm/N,
$\delta_{vis} = 4{,}795 \cdot 10^{-6}$ mm/N.

Elasticité des pièces : $D_e = 13{,}2$ mm (cylindre inscrit dans le profil)
$x = (28{,}55/13{,}2)^{0{,}2} = 1{,}167$,
$A_{ers} = \pi\ (12{,}7^2 - 8{,}5^2)/4 + (\pi/8) \cdot 12{,}7 \cdot (13{,}2 - 12{,}7) \cdot (2{,}167^2 - 1)$
$A_{ers} = 79{,}2$ mm^2,
$I_{ers} = 4\,950$ mm^4 (sans justification directe dans l'article),
$I_{BT} = 23{,}1 \cdot 13{,}23$ mm^4/12 = 4427 mm^4 (rectangle circonscrit).
$\delta_{pièces} = 28{,}55/(79{,}2 \cdot 205\,000) = 1{,}758 \cdot 10^{-6}$ mm/N,
$\delta^*_{pièces} = \delta_{pièces}\ (1 + 0{,}482 \cdot 79{,}2/4950) = 1{,}765 \cdot 10^{-6}$ mm/N,
$\delta^{**}_{pièces} = \delta_{pièces}(1 - 0{,}48.2{,}7 \cdot 79{,}2/4950) = 1{,}722 \cdot 10^{-6}$ mm/N.

Rapport des élasticités : $\Phi = \Phi_k = 1{,}758 / (4{,}795 + 1{,}758) = 0{,}268$,
Facteur de niveau : $n = 0{,}50$,
Rapports corrigés : $\Phi n = 0{,}5 \cdot 0{,}268 = 0{,}134$,
$\Phi ek = 1{,}722 / (4{,}795 + 1{,}765) = 0{,}262$,
$\Phi en = 0{,}5\ \ 0{,}262 = 0{,}131 =$ environ Φ_n .
Pertes de serrage : $f_Z = 0{,}0051$ mm,
$F_Z = 0{,}0051 / (4{,}795 \cdot 10^{-6} + 1{,}765 \cdot 10^{-6}) =$ environ 800 N.

3. Dimensions à prévoir

Force maximale de montage : $F_{M\,max} = 1{,}18\ [9\,086 + (1 - 0{,}131) \cdot 10\,600 + 800] = 22\,535$ N.
Selon tableau et coefficient $\mu = 0{,}14$, en interpolant entre les classes 10.9 et 12.9 , la force axiale serait : $F_{M\,lim} = (18\,700 + 21\,900)$ N / 2 = 20 300 N $\rightarrow$ dimension insufisante.

4. Contrôle des contraintes et pression

Comme la vis est d'une classe de qualité hors norme et le tableau 6.5 ne donne pas les valeurs pour les coefficients de frottement, calculons les grandeurs particulières.

Angle du filet vis M8 x 1 : $\tan\gamma = 1\ \text{mm}/(\pi\ 7{,}35\ \text{mm}) \rightarrow \gamma = 2{,}48°$.
Angle de frottement équivalent : $\tan \rho_e = 0{,}12/\cos 30° \rightarrow \rho_e = 7{,}89°$.
Force axiale (3.55.2) : $F_a = F_{M\,lim} = 0{,}9 \cdot 1035$ N/mm$^2 \cdot 33{,}2$ mm^2/
$[1 + 12\ (7{,}35/6{,}5)^2 \tan^2 10{,}37°]^{0{,}5} =$
(90 % de $R_{p0,2}$) $F_a = F_{M\,lim} = 25\,135$ N $\rightarrow$ dimension suffisante.

Calcul du couple à produire sur la clef de serrage sous $F_a = 25\,135$ N :
Couple entre vis et filetage : $M_{vis} = 0{,}5 \cdot 7{,}35$ mm $\cdot$ 25 135 N $\cdot \tan 10{,}37° = 16\,900$ mm$\cdot$N,
Diamètre moyen de contact : $d_m = 0{,}5\ (9{,}2\ \text{mm} + 12{,}7\ \text{mm}) = 10{,}95$ mm.
Couple sur la tête : $M_{tête} = 0{,}5 \cdot 10{,}95$ mm $\cdot\ 0{,}14 \cdot 25\,135$ N = 19 265 mm$\cdot$N,
Couple sur la clef : $M_{clef} = 16\,900$ mm$\cdot$N + 19 300 mm$\cdot$N = 36,2 m$\cdot$N.
Augmentation de tension : $F_{SA} = \Phi_{en}\ F_A = 0{,}131 \cdot 10\,600$ N = 1 390 N.
Variation de la contrainte : $\Delta\sigma_n = 1\,390$ N/33,2 mm^2 = 41,9 N/mm^2 $< 0{,}1\ R_{p0,2}$.
Amplitude de la contrainte : $\sigma_{n\,a} = 0{,}5 \cdot 1\,390$ N / 33,2 mm^2 = 20,9 N/mm^2.
Aire de contact : $A_p = \pi\ (12{,}7^2 - 9{,}2^2)$mm^2/4 = 60,2 mm^2,
Pression sur la tête de vis : $p = (25\,135\ \text{N} + 1\,390\ \text{N})/(0{,}9 \cdot 60{,}2\ \text{mm}^2) = 490$ N/mm^2.

5. Contrôle du contact entre les pièces serrées

En admettant les valeurs calculées atteintes réellement et en remplaçant la surface de contact par un rectangle circonscrit, le déplacement maximal autorisé pour la force résiduelle de serrage serait : u = 13,2 mm/6 = 2,2 mm, l'aire de la surface de contact étant $A_D = 23.1$ mm $\cdot$ 13,2 mm = 304 mm^2. En appliquant simplement la relation (6.25.3), la force de serrage nécessaire pour provoquer le décollement serait :

$F_{Kab} = 10\,600$ N[(2,7 + 0,48)mm $\cdot$ 2,2 mm]/(4427 mm^4/304 mm^2 - 0,48 $\cdot$ 2,2 mm^2)
$F_{Kab} = 5\,490$ N.

Cette force est inférieure à F_{Kerf} nécessaire pour transmettre la force transversale.

6.5.5.2 BIELLE DE MOTEUR À EXPLOSION

La fixation du palier de bielle utilisée dans un moteur à explosion s'effectue au moyen de deux vis selon figure 6.24. La force axiale dans la bielle, au point mort haut, compte tenu des inerties des pièces, vaut 21 200 N , cette charge étant centrée. Une étude de la transmission des efforts dans la partie vissée montre que le décalage des forces axiales vaut 2,7 mm, les vis étant également excentrées de 0,48 mm par rapport au centre de gravité de la surface de contact. De plus, une force transversale existe sur chaque vis et vaut 6 % de la force dans la bielle. Il s'agit typiquement d'un assemblage avec vis et charge excentrées. Cet exemple correspond au calcul proposé par S. Jende dans VDI-Z 132 (1990), Nr. 7, pages 66 à 78 , avec utilisation du programme KABOLT développé à la TU de Berlin (Professeur W.Beitz).

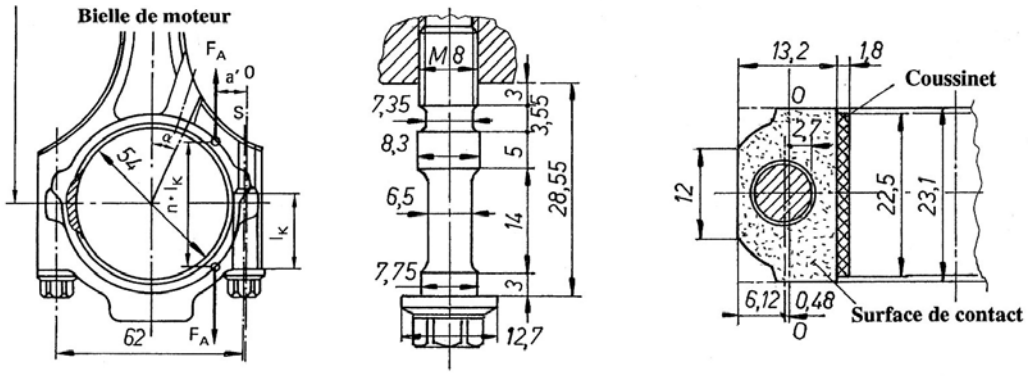


Figure 6.24 Fixation du palier de bielle d'un moteur à explosion

1. Calculs préliminaires

Choix de la vis :	M8 x 1 x 43, classe de qualité 11.9,
Dimensions de la vis	selon fig. 6.24,
Entraxe :	62 mm,
Diamètre du palier	d_{palier} = 54 mm,
Module d'élasticité :	E_{vis} = 205 000 N/mm^2,
	$E_{pièces}$ = 205 000 N/mm^2 (Acier nuance C45),
Résistance de la vis :	$R_{p0,2}$ = 1 035 N/mm^2 (donnée par le fabricant KAMAX),
Filetage M8 x 1 :	d_2 = 7,350 mm d_3 = 6,773 mm d_t = 12,7 mm,
	A_d = 50,3 mm^2 A_3 = 36,0 mm^2 A_S = 39,2 mm^2,
	d_T = 6,5 mm A_T = 33,2 mm^2 (figure 6.24),
	d_B = 8,5 mm $d_{chanfrein}$ = 9,2 mm.
Fixation partie filetée :	trou fileté.
Coefficients de frottement :	sur la vis : $\mu_{vis/écrou}$ = 0,12 $\mu_{tête}$ = 0,14.
	entre les pièces serrées : μ_e = 0,14.
Efforts appliqués :	Force axiale : F_A = 10 600 N,
	Force transversale : F_T = 0,06 · 21 200 N = 1 272 N,
	Force résiduelle : F_{Kerf} = 1 272 N/0,14 = 9 086 N.
Longueur serrée :	l_k = 28,55 mm,
Rapport :	l_k/d = 3,57.
Facteur de serrage :	α_A = 1,18 (selon procédé très précis de montage).

2. Elasticité de l'assemblage

Elasticité de la vis :	$\delta_{vis} = \delta_K + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_{GM}$,
	$\delta_K = 0{,}4 \cdot 8/(205\,000 \cdot 50{,}3) = 0{,}310 \cdot 10^{-6}$ mm/N,
	$\Sigma\delta_i = 4\,[3/7{,}75^2 + 14/6{,}5^2 + 5/8{,}3^2 + 3{,}55/7{,}35^2 + 3/6{,}773^2]$

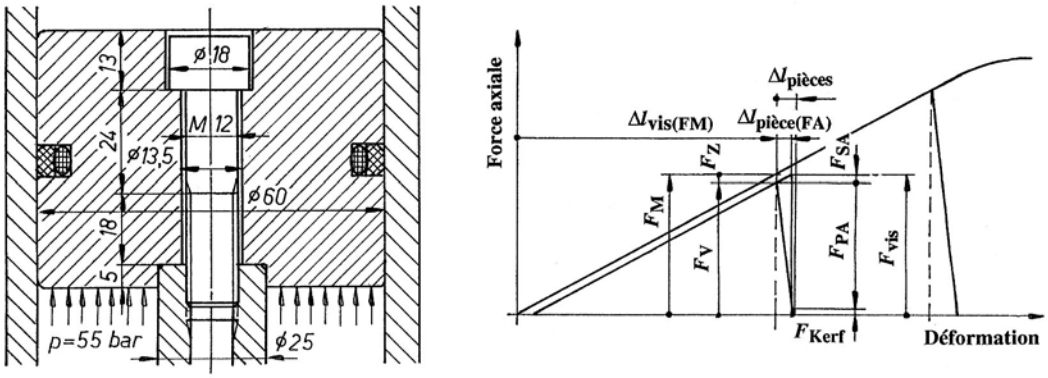


Figure 6.23 Contrôle d'un piston hydraulique et triangles de précontrainte

Elasticité des pièces : $x = [42/(18+42)]0,2 = 0,931.$
$A_{ers} = \pi\ (18^2\text{-}13,5^2)/4 + (\pi/8)\ 18\ (60\text{-}18)\ [(0,931+1)^2\text{-}1],$
$A_{ers} = 921\ mm^2.$
$\delta_{pièces} = 42/(921 \cdot 205000) = 0,222 \cdot 10^{-6}\ mm/N.$
Rapport des élasticités : $\Phi = \Phi_k = 0,222/(2,985 + 0,222) = 0,069.$
Facteur de niveau : $n = 0,3$ (estimé selon figure).
Rapport corrigé : $\Phi n = 0,3\ \Phi k = 0,021.$
Pertes de serrage : $f_Z = 0,005$ mm selon fig. 6.20.
$F_Z = 0,005\ mm/[(2.985 + 0,222)\ 10^{-6}\ mm/N] = 1\ 560\ N.$

3. Dimensions à prévoir

Force maximale de montage : $F_{M\ max} = 1,6\ [1000\ N + (1 - 0,021)\ 24\ 946\ N + 1\ 560\ N],$
$F_{M\ max} = 43\ 170\ N.$

Le tableau 6.5 donne pour une vis M12 , classe 10.9 , une force axiale de 56 000 N. La vis remplit donc les conditions proposées. Le couple à produire sur la clef, pour un coefficient de frottement de 14 % sur toutes les surfaces, vaut 130 m·N.

4. Contrôle des contraintes et pression

Augmentation de tension : $F_{SA} = \Phi n\ F_A = 0,021 \cdot 24\ 946\ N = 524\ N,$
Variation de la contrainte : $\sigma_n = 524\ N/84,3\ mm^2 = 6,2\ N/mm^2 < 0,1\ R_{p0,2}.$
Amplitude de la contrainte : $\sigma_{n\ a} = 0,5 \cdot 524\ N/76,3\ mm^2 = 3,4\ N/mm^2$ (admissible).
Aire de contact : $A_p = \pi\ (18^2 - 13,5^2)\ mm^2/4 = 111,3\ mm^2.$
Pression sur la tête : $p = (56\ 000\ N + 524\ N)/(0,9 \cdot 111,3\ mm2) = 564\ N/mm^2.$
Cette pression est admissible.

5. Triangles de précontrainte (figure 6.23 à droite)

Pertes de serrage : $F_Z = 1\ 560\ N,$
Force résiduelle : $F_{Kerf} = 1\ 000\ N,$
Diminution du serrage : $F_{PA} = (1 - 0,021)\ 24\ 946\ N = 24\ 422\ N,$
Force axiale minimale : $F_{M\ min} = 1\ 000\ N + 24\ 422\ N + 1560\ N = 26\ 982\ N.$
Force de montage : $F_V = F_{M\ min} - F_Z = 26\ 982\ N - 1\ 560\ N = 25\ 422\ N.$
Force axiale maximale : $F_{M\ max} = 1,6\ F_{M\ min} = 43\ 171\ N.$
Déformations de la vis et des pièces sous l'action de $F_{M\ min}$:
Déformation de la vis : $\Delta l_{vis} = \delta_{vis}\ F_{M\ min} = 0,081\ mm,$
Déformation des pièces : $\Delta l_{pièces} = n\ \delta_{pièces}\ F_{M\ min} = 0,0018\ mm,$
Variation de longueur sous l'effet de la charge extérieure :
Déformation de la vis : $\Delta l_{vis(FA)} = 2,985 \cdot 10^{-6}\ mm/N \cdot 524\ N = 0,0016\ mm,$
Déformation des pièces : $\Delta l_{pièces(FA)} = 0,3 \cdot 0,222 \cdot 10\text{-}6\ mm/N \cdot 24\ 422\ N = 0,0016\ mm.$
Couple de serrage min. : $M_{tête} = (43\ 171\ N/\ 56\ 000\ N) \cdot 130\ m{\cdot}N = 100\ m{\cdot}N.$

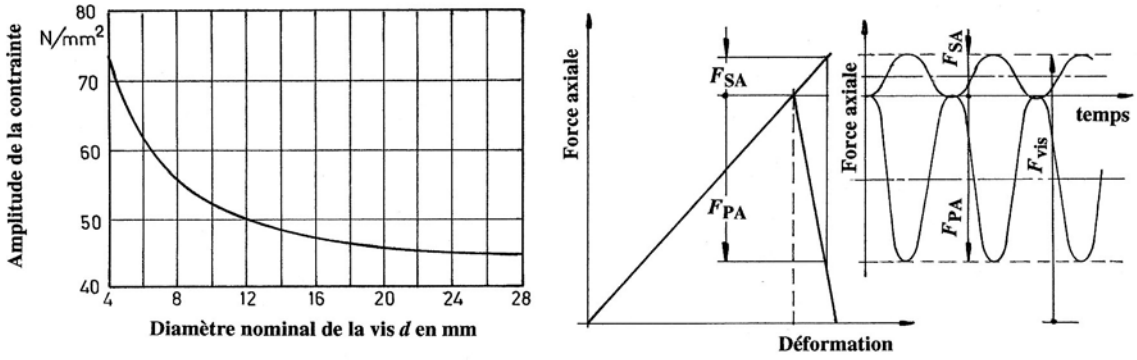


Figure 6.22 Valeur de l'amplitude de la contrainte alternée admissible en fonction de la taille de la vis
Représentation de la charge en fonction du temps

6.5.5 EXEMPLES DE CALCUL D'ASSEMBLAGES À VIS

6.5.5.1 CONTRÔLE DE LA FIXATION D'UN PISTON HYDRAULIQUE

Ce premier exemple est tiré de la recommandation VDI 2230 et correspond au numéro 6.1, page 47. L'assemblage à vis est constitué par un piston diamètre D_e = 80 mm, une tige de piston, diamètre D_i = 25 mm, une vis de fixation à tête cylindrique dont la dimension doit être trouvée et vérifiée. Il s'agit d'un assemblage centré, la force produite est la poussée axiale sous une pression de 55 bar. La force minimale de serrage exigée pour des questions d'étanchéité est 1 000 N . Le vérin est utilisé à la cadence de 40 cycles à la minute. La charge est donc dynamique. Le piston et la tige sont fabriqués en acier d'amélioration C45V. Le serrage de la vis est réalisé au moyen d'une clef dynamométrique qui sera réglée et contrôlée au moyen d'une mesure dynamique du couple de serrage. Les résultats de notre calcul ne correspondent pas exactement avec les valeurs de la recommandation.

1. Calculs préliminaires

Aire mouillée du piston : $A = \pi\,(80^2 - 25^2)\ \text{mm}^2/4 = 4\,535{,}7\ \text{mm}^2$.
Poussée sur le piston : $F_p = 5{,}5\ \text{N/mm}^2 \cdot 4\,535{,}7\ \text{mm}^2 = 24\,946\ \text{N}$.
Choix de la vis : M 12 x 60 , DIN 912, classe de qualité 10.9.
Diamètres du filetage : $d_2 = 10{,}863$ mm, $d_3 = 9{,}853$ mm $d_t = 18$ mm.
Aires des sections : $A_d = 113{,}1\ \text{mm}^2$, $A_3 = 76{,}25\ \text{mm}^2$, $A_S = 84{,}3\ \text{mm}^2$.
Module d'élasticité : $E = 205\,000\ \text{N/mm}^2$.
Diamètre du trou : $d_B = 13{,}5$ mm.
Fixation partie filetée : trou fileté.
Facteur de serrage : $\alpha_A = 1{,}6$.
Coefficient de frottement : $\mu = 0{,}14$.
Longueur serrée : $l_k = 24\ \text{mm} + 18\ \text{mm} = 42\ \text{mm}$.
Rapport : $l_k/d = 42\ \text{mm}/12\ \text{mm} = 3{,}5$.

2. Elasticité de l'assemblage

Elasticité de la vis : $\delta_{vis} = \delta_K + \delta_1 + \delta_2 + \delta_{GM}$
$\delta_K = 0{,}4 \cdot 12/(205000 \cdot 113.1) = 0.207 \cdot 10^{-6}\ \text{mm/N}$,
$\delta_1 = 24 / (205000\ \ 113{,}1) = 1{,}036 \cdot 10^{-6}\ \text{mm/N}$,
$\delta_2 = 18 / (205000\ \ 76{,}3) = 1{,}151 \cdot 10^{-6}\ \text{mm/N}$,
$\delta_{GM} = (0{,}5/76{,}3 + 0{,}4/113{,}1) \cdot 12/205000 = 0{,}591 \cdot 10^{-6}\ \text{mm/N}$,
$\delta_{vis} = 2{,}985 \cdot 10^{-6}\ \text{mm/N}$.

- avec :
  $s = 0$, $a = 0$ assemblage à vis et force extérieure centrées,
  $s > 0$, $a = s$ assemblage à vis et force extérieure excentrées sur le même axe,
  $s > 0$, $a \neq 0$ assemblage à vis et force extérieure excentrées sur deux axes.
  Introduire le facteur d'élasticité correspondant aux conditions d'excentricité.
  Dans les pas suivants, le rapport de serrage applicable sera écrit Φ_{ij}.

Pas 5 Détermination de la perte de serrage due au lissage des surfaces :

$$F_Z = f_Z / (\delta_{vis} + \delta_{pièces}),$$

avec : $f_Z \approx 3{,}29\ (l_k/d)^{0{,}34}\ 10^{-3}$ [mm].

Pas 6 Détermination de la taille de la vis :
- pour toutes les méthodes de montage en comportement élastique :

$$F_{M\,max} = \alpha_A\ [F_{Kerf} + (1 - \Phi_{ij})\ F_A + F_Z], \qquad (6.26)$$

- recherche de la taille de la vis dans le tableau avec $F_M \geq F_{M\,max}$. Si la vis ne se trouve pas dans le tableau, il faut utiliser les relations générales développées sous 6.4.2 à partir des dimensions géométriques et du coefficient de frottement. Le tableau donne le couple de serrage.
- pour un serrage effectué jusqu'à la limite élastique :

$$F_{M\,min} = F_{Kerf} + (1 - \Phi_{ij})\ F_A + F_Z,$$

et recherche de la taille de la vis par : $F_M/0{,}9 \geq F_{M\,min}$.

Pas 7 Répétition des pas : Pas 4 $\rightarrow$ Pas 6 jusqu'à ce que la dimension adoptée pour la vis soit correcte; calcul du nouveau rapport l_k/d.

Pas 8 Contrôle de la force maximale admissible dans la vis. Cette force maximale est admissible lorsque sa variation de tension axiale remplit la condition :

$$F_{SA} = \Phi_{ij}\ F_A \leq 0{,}1\ R_{p0,2}\ A_S,$$

ce qui autorise une légère augmentation de la contrainte engendrée par la flexion. Pour les vis d'extension, la condition à remplir sera :

$$F_{SA} = \Phi_{ij}\ F_A \leq 0{,}1\ R_{p0,2}\ A_T.$$

Pour un serrage à la limite élastique, le contrôle s'effectue sur la déformation plastique de la vis et les possibilités de charges subséquentes sur l'assemblage.

Pas 9 Détermination de la contrainte dynamique dans la vis par :

$$\sigma_{n\,a} = 0{,}5\ \Phi_{ij}\ (F_{Ao} - F_{Au}) / A_3 \leq \sigma_{n\,a\ admissible}.$$

Lorsque la charge est excentrée, il faudrait tenir compte de l'effet de la flexion dans la vis. L'amplitude de la contrainte alternée admissible est représentée sur la figure 6.22.

Pas 10 Contrôle final de la pression sous la tête de la vis ou de l'écrou :

$$p = (F_M + \Phi_{ij}\ F_A) / A_p \leq p_G.$$

Pour les vis serrées jusqu'à la limite élastique, la pression se calcule par :

$$p = 1{,}2\ (F_M + \Phi_{ij}) / Ap \leq pG,$$

le facteur 1,2 faisant intervenir le rapport entre la limite élastique réelle et la valeur minimale de la table.

décollement des surfaces, la force résiduelle de serrage F_{Kerf} permettant de transmettre les forces tangentielles. Les conditions de montage font intervenir les tolérances sur la force de montage F_M données par le facteur de serrage $\alpha_A = F_{M\ max}/F_{M\ min}$. Tous ces facteurs interviennent dans la relation générales donnée par :

$$F_{M\ max} = \alpha_A\ F_{M\ min} = \alpha_A\ [F_{Kerf} + (1 - \Phi)\ F_A + F_Z].$$

La force axiale F_M sert de point de départ pour trouver la dimension à donner à la vis. La force donnée dans la table engendre une contrainte idéale valant 90 % de la limite apparente d'élasticité minimale. La vis choisie produit alors dans les conditions idéales la force de montage $F_{M\ max}$. La variation de la force axiale dans la vis F_{SA} ne doit pas provoquer une variation de contrainte idéale supérieure à 10 % de $R_{p0,2}$. Il en découle que :

$$F_{SA} = \Phi\ F_A \leq 0{,}1\ R_{p0,2}\ A_S.$$

Si la charge axiale extérieure est dynamique, l'amplitude de la force supplémentaire dans la vis F_{SA} a ne doit pas dépasser la valeur admissible. Le calcul de l'assemblage est complété par le contrôle de la pression sous la tête de la vis ou sous l'écrou.

6.5.4.2 DÉFINITION DES PAS DE CALCUL

En partant des points discutés précédemment, il est possible d'énoncer les 10 pas de calcul à prévoir pour trouver la dimension de la vis ou pour contrôles les valeurs adoptées.

Pas 1 Détermination approximative du diamètre de la vis d, par exemple par la méthode proposée sous 6.4.4 , calcul du rapport l_k/d , de la pression moyenne sous la tête de la vis par selon 6.5.2.6 :

$$p = F_M / 0{,}9\ A_p.$$

La force de montage F_M est lue dans le tableau 6.5 pour un coefficient de frottement de 0,14 et la pression admissible p_G est donnée dans le tableau 6.7. Si p_G est dépassée, il faut soit modifier les dimensions de la vis, soit introduire une rondelle suffisamment résistante sous la tête de la vis et/ou sous l'écrou. Calculer le nouveau rapport l_k/d.

Pas 2 Déterminer le facteur de serrage α_A à partir de la méthode utilisée et du tableau 6.6 ainsi que de l'état de surface. Ce facteur vaut $\alpha_A = 1{,}0$ pour une méthode de mesure introduisant la limite d'élasticité de la vis.

Pas 3 Détermination de la force minimale de serrage F_{Kerf} en tenant compte des fonctions à remplir par l'assemblage à vis, soit :
- force de frottement $F_{R'}$ nécessaire pour transmettre soit une force transversale F_T, soit un couple de torsion M_t, compte tenu du coefficient de sécurité au glissement;
- force nécessaire pour obtenir l'étanchéité dans un joint sollicité par la pression;
- pas de décollement des surfaces provoqué par l'action d'une vis et/ou d'une charge extérieure excentrées.

Pas 4 Recherche d'un des rapports de serrage : Φ_k , Φ_{ek} ou Φ_{en} :
- détermination du facteur d'élasticité de la vis δ_{vis};
- détermination du facteur d'élasticité des pièces serrées $\delta_{pièces}$;
- détermination du facteur du niveau d'application de la charge n;
- détermination de la longueur théorique et pratique de serrage l_k et $n\ l_k$;
- détermination du rapport de serrage dans le cas général :

$$\Phi_{en} = \Phi_{ek}\ n = n\ [\delta^{**}_{pièces} / (\delta_{vis} + \delta^{*}_{pièces})]$$

6.5.3.4 GENRES DE FORCES AXIALES

A part la force extérieure F_A, il faut considérer d'autres forces sur l'assemblage à vis. Si F_A est une force centrée compressive, il faut l'introduire avec le signe négatif dans les relations. Les variations de forces axiales F_{SA} et F_{PA} deviennent négatives et la charge axiale dans la vis diminue. La force de serrage restante entre les surfaces serrées vaut :

$$F_{KR} = F_V + F_{PA}.$$

La figure 6.21 à gauche montre le triangle de précontrainte fondamental pour une force F_A compressive à partir des déformations linéaires des pièces.

Très souvent, les assemblages à vis sont sollicités par des charges variant en fonction du temps. La charge axiale F_A varie entre la force minimale F_{Au} et la force maximale F_{Ao} en fonction du temps. L'amplitude de la variation de la tension axiale F_{SA} a dans la vis se trouve par :

$$F_{SA\,a} = \Phi_k\,(F_{Ao} - F_{Au})/2,$$

et la force moyenne : $$F_{vis\,m} = F_V + \Phi_k\,(F_{Ao} - F_{Au})/2.$$

Comme l'amplitude de la contrainte dynamique admissible dans les vis est relativement modeste, il est nécessaire de limiter la part supportée par la vis. Un moyen très efficace d'atteindre ce but est de créer une grande élasticité de la vis δ_{vis} en adoptant par exemple des vis d'extension et une petite élasticité des pièces serrées $\delta_{pièces}$, ce qui diminue la valeur du rapport Φ_K.

Si une vis est déformée plastiquement par une force extérieure F_A, la caractéristique de la déformation de la vis s'incurve jusqu'au point K de la figure 6.21 à droite. La déformation de décharge est linéaire et suit le segment rectiligne KB, coupant l'axe horizontal en $f_{vis\,pl}$. Si la force F_A est appliquée à nouveau sur l'assemblage, son module étant inférieur ou égal à la valeur ayant provoquée la déformation plastique, le triangle de précontrainte est DBCK, la force de montage diminuant de F_Z. Des conditions semblables interviennent lorsque ce sont les pièces serrées qui sont déformées plastiquement.

6.5.4 PAS DE CALCUL

Le calcul d'un assemblage vissé part des efforts appliqués sur l'assemblage agissant à l'extérieur de l'assemblage. Ces efforts et la géométrie de toutes les pièces se concrétisent en une force axiale F_A, une force transversale F_T, un moment fléchissant M_f et éventuellement un moment de torsion M_t, voir figure 6.14. La transformation des efforts appliqués en composantes s'effectue selon les lois de l'élastomécanique. Il est admis par la suite que les forces et couples cités sont tous connus initialement.

La recommandation DIN 2230 traite des pas de calcul basés sur l'hypothèse du comportement linéaire de l'assemblage. Cette méthode est applicable à la phase de conception d'un assemblage usuel. Un paragraphe complémentaire traite le comportement non linéaire de l'assemblage. Nous limitons l'exposé au comportement linéaire.

6.5.4.1 MÉTHODE LINÉAIRE DE CALCUL

Le calcul est basé sur la force de montage F_M diminuée des pertes de serrage F_Z par lissage des surfaces serrées, de la variation de la force de serrage dans les pièces : $F_{PA} = (1 - \Phi)\,F_A$ et des diverses fonctions à remplir par l'assemblage comme par exemple l'étanchéité, le

2. La vis est en position centrée, $s = 0$, mais la force extérieure F_A est excentrée $a \neq 0$. Les conditions générales sont applicables et une simplification intervient dans l'application des relations. La vis doit supporter une sollicitation complémentaire de flexion. Remarquons aussi que la tolérance dans la position du trou de perçage et de la vis provoque immanquablement $s \neq 0$ d'où des efforts supplémentaires dans la vis.

   $\Phi_{en} = n\ \delta_{pièces}/(\delta_{vis} + \delta_{pièces}) = \Phi_n$ et $F_{Kerf} = F_A\ (a\ u\ A_D)/I_{BT}$.

3. Dans le cas d'une charge extérieure sous forme d'un moment pur et à partir des points cités précédemment, il est possible de tirer le rapport des forces Φ_m et la force minimale de serrage par :

   $$F_{SA} = n\ [\delta_{pièces}\ s^2\ A_{ers}\ M_f]\ /\ \{s\ I_{BT}\ [\delta_{vis} + \delta_{pièces}\ (1 + s^2\ A_{ers}/I_{BT})]\},$$

   avec : $\Phi_m = n\ [\delta_{pièces}\ s^2\ A_{ers}]\ /\ \{[\delta_{vis} + \delta_{pièces}\ (1 + s^2\ A_{ers}/I_{BT})]\ I_{BT}$,

   et finalement : $F_{SA} = \Phi_m\ M_f/s$.

   La force minimale de serrage pour éviter le décollement unilatéral des surfaces peut se trouver comme précédemment. Toutefois, il faut remarquer que sous l'action d'un couple pur, avec $a\ F_A \rightarrow M_f$ et $1/a \rightarrow 0$, alors $F_A \rightarrow 0$. Les relations deviennent :

   $$F_{Kab} = F_{Kerf} = u\ M_f/(I_{BT}/A_D + s\ u),$$

   $$F_{PA} = -\ F_{SA} = -\ \Phi_m\ M_f/s,$$

   et ainsi que : $F_{Vab} = F_{Kab} + F_{PA} = M_f\ [u/(I_{BT}/A_D + s\ u) - \Phi_m\ /s]$.

   Pour une force F_V donnée, le moment limite de décollement $M_{f\,ab}$ se laisse calculer.

4. Dans le cas particulier de la surface rectangulaire, sans tenir compte du trou de passage de la vis, le noyau central de la section est un losange dont l'une des demi diagonale vaut $e = u/3$, figure 6.18 à droite. L'application simultanée d'une force compressive F et d'un moment fléchissant $M_f = e\ F$ permet de trouver la contrainte ou la pression par l'expression fondamentale :

   $$\sigma = p = -\ F/A + M_f\ x/I_{BT}.$$

   Le moment limite se laisse alors déterminer lorsque la répartition de la pression est triangulaire sur la surface de contact, soit avec $s_k = u/3 = h/6$:

   $$M_{f\,lim} = e\ F_K = (u/3)\ F_K = (h/6)\ F_K.$$

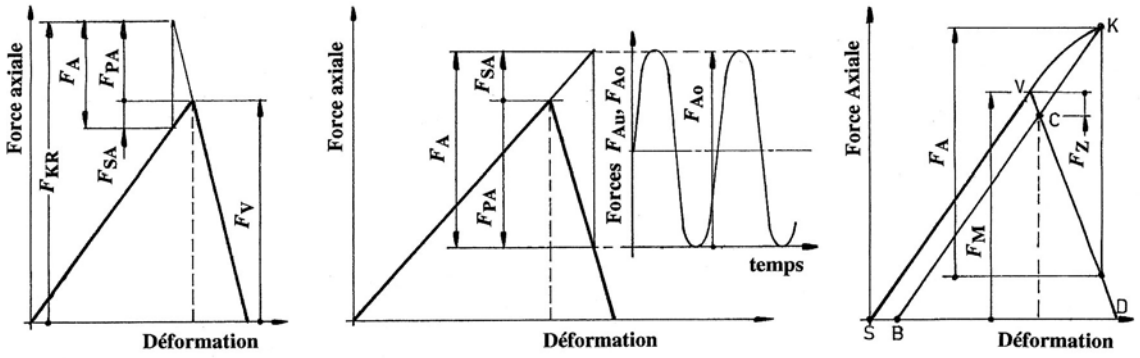


Figure 6.21 Triangles de précontrainte pour forces compressives et variables en fonction du temps

$$F_{SA} = F_A \, \delta^{**}_{pièces} / (\delta_{vis} + \delta^{*}_{pièces}) = \Phi_{ek} \, F_A.$$

Ces relations ne tiennent pas compte du niveau d'application de la force extérieure. Introduisons le facteur de correction de niveau *n* dans la relation pour obtenir finalement :

$$F_{SA} = n \, \Phi_{ek} \, F_A = \Phi_{en} \, F_A, \qquad (6.24.1)$$

et :
$$F_{PA} = F_A - F_{SA} = (1 - \Phi_{en}) \, F_A. \qquad (6.24.2)$$

6.5.3.2 FORCES ET DÉFORMATIONS À LA LIMITE DU DÉCOLLEMENT

Si la force extérieure F_A dépasse la valeur limite F_{Aab}, ce phénomène provoque le décollement des surfaces et engendre une pression nulle comme discuté au chapitre 1. La pression de contact se calcule comme la contrainte normale résultante dans une pièce sollicitée simultanément par une force compressive et un moment fléchissant. En tenant compte du nivellement des surfaces et de la force résiduelle F_V, la pression de contact à l'abscisse *x* se trouve par les expressions générales de la contrainte normale σ_n :

$$\sigma_n = p = F/A_D + x \, M_f / I_{BT},$$

avec : $F = F_V - (1 - \Phi_{en}) \, F_A$ et $M_f = (a - \Phi_{en} \, s) \, F_A - s \, F_V$.

En substituant ces valeurs dans l'expression de la contrainte ou de la pression, nous obtenons :

$$\sigma_n = - [F_V - (1 - \Phi_{en}) \, F_A] / A_D + x \, [a - \Phi_{en} \, s) - s \, F_V] / I_{BT}.$$

Pour une section de contact rectangulaire de largeur *b*, hauteur $h = 2 \, u$ selon figure 6.18 à droite, il est possible de calculer la valeur de la force F_{Aab} provoquant la pression ou contrainte nulle à l'abscisse $x = u$:

$$F_{Aab} = F_V / [(1 + a \, u \, A_D/I_{BT})/(1 + s \, u \, A_D/I_{BT}) - \Phi_{en}]. \qquad (6.25.1)$$

Il est également possible de trouver la force de serrage limite F_{Vab} en fonction de la force axiale extérieure F_A :

$$F_{Vab} = F_A \, [(a - s) \, u] / (I_{BT}/A_D + s \, u) + (1 - \Phi_{en}) \, F_A.$$

La force de serrage existante F_{Kab} au moment du décollement se trouve par l'expression :

$$F_{Kab} = F_{Vab} - (1 - \Phi_{en}) \, F_A = F_A \, [(a - s) \, u] / (I_{BT}/A_D + s \, u). \qquad (6.25.2)$$

Pour éviter tout décollement des surfaces sous l'effet d'une force axiale excentrée F_A, il faut que la force de serrage nécessaire F_{Kerf} soit au moins égale à :

$$F_{Kerf} = F_{Kab} = F_A \, [(a - s) \, u] / (I_{BT}/A_D + s \, u). \qquad (6.25.3)$$

Si la valeur de cette force est insuffisante pour transmettre correctement par frottement une force transversale appliquée sur l'assemblage ou pour remplir une condition complémentaire d'étanchéité, le dimensionnement de la vis devra tenir compte de cette relation.

6.5.3.3 CAS PARTICULIERS

1. La force de serrage F_V et la force extérieure F_A sont toutes deux excentrées, les pièces serrées sont prismatiques, mais si minces que la surface de contact A_D est approximativement égale à A_{ers}. La relation précédente pour F_{Kerf} est applicable.

Tableau 6.7
RECOMMANDATION VDI 2230 / juillet 1986
Pression superficielle admissible entre vis et pièces serrées

Matière	Module d'élasticité E en N/mm^2	Pression superficielle Admissible p_G en N/mm^2
Ac 37	205 000	260
Ac 50	205 000	420
C 45	205 000	700
42 CrMo 4	205 000	850
30 CrNiMo 8	205 000	750
X 5 CrNiMo 1810	200 000	210
X 10 Cr Ni Mo 189	200 000	220
Acier inoxydable	200 000	1000 à 1250
Titane non allié	70 000	300
Ti-Al-4V	70 000	1000
Ft 15	103 000	600
Ft 25	118 000	800
Ft 35	154 600	900
Ft 40	191 300	1100
FGS 35.3	172 000	480
GD-MgAl 9	44 000	220 (140)
GC-MgAl 9	44 000	140 (220)
GC-AlSi 6 Cu 4	70 000	200
AlZnMg Cu 0.5	70 000	370
Al 99	70 000	140
Composite CFV	–	120
Composite CFC	–	140

6.5.3.1 DECOLLEMENT DES SURFACES

Il est possible de trouver les conditions géométriques et mécaniques intervenant dans le décollement des surfaces lors de l'application simultanée de la force de serrage des vis et les forces axiales. Soit un assemblage à vis unique avec vis et force extérieure excentrées. Le système de coordonnées *O-O* passe par le centre de gravité de la section transversale, la vis étant excentrée de la distance s , la force extérieure F_A de traction de a avec $a > s$. Sous l'effet de cette force, la force axiale dans la vis varie de F_{SA} et dans les pièces serrées de F_{PA}. Comme les déformations doivent être égales, nous pouvons poser :

$$\Delta l_{vis(FA)} = \Delta l_{pièces(FA)} \quad \text{ou} \quad \delta_{vis}\, F_{SA} = \delta_{pièces}\, F_{PA},$$

ou encore : $\delta_{vis}\, F_{SA} = \delta_{pièces}\, (F_A - F_{SA}) = \delta_{pièces}\, F_A - \delta_{pièces}\, F_{SA}.$

Pour des pièces serrées et chargées excentriquement, la relation se transforme en :

$$\delta_{vis}\, F_{SA} = \delta^{**}_{pièces}\, F_A - \delta^{*}_{pièces}\, F_{SA}.$$

En recherchant la variation de la tension axiale de la vis F_{SA} en fonction des diverses élasticités, l'expression devient, compte tenu de la relation 6.20.1 :

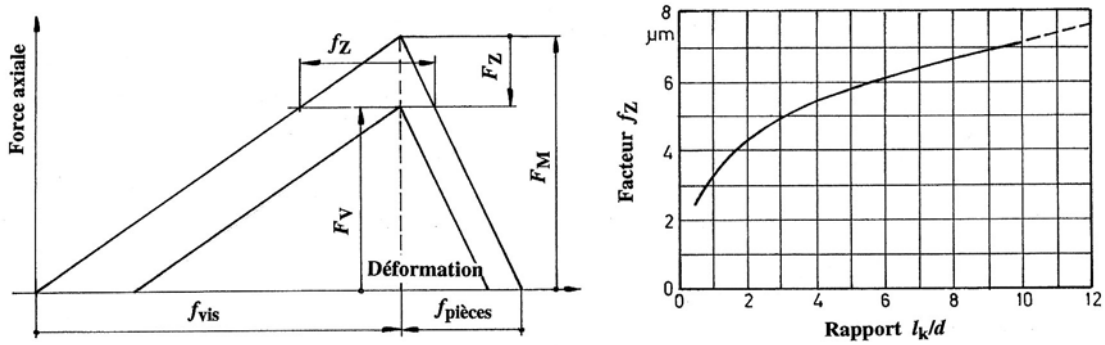


Figure 6.20 Modification du triangle de précontrainte et valeur du facteur de perte de serrage f_Z

6.5.2.6 PRESSION SUPERFICIELLE ENTRE LES PIÈCES ET LA VIS

La pression superficielle provoquée par l'effort normal maximal dans la vis ne devrait pas dépasser la pression superficielle limite p_G valable pour la matière des pièces serrées. Cette pression se trouve par :

$$\bar{p} = (F_M + \Phi F_A) / A_p \leq p_G, \qquad (6.23.1)$$

avec : $A_p = \pi (d_t^2 - d_B^2) / 4.$

Si des contraintes de fluage ne sont pas évitables, il faut prévoir une diminution de la force de serrage après relaxation de la vis. La force de serrage initiale est à déterminer avec grande précision. Les valeurs limites données dans le tableau 6.7 ont été déterminées expérimentalement sur quelques matériaux. Si l'on introduit une rondelle intercalaire pour diminuer la pression superficielle sur les pièces, il est nécessaire de contrôler la résistance et l'épaisseur de cet élément en supposant une transmission de l'effort suivant un cône à 45°.

Le tableau 6.7 donne les pressions admissibles. Pour les vis serrées jusqu'à la limite élastique, la pression se calculera par :

$$\bar{p} = 1{,}2\ (F_M + \Phi F_A) / A_p \leq p_G, \qquad (6.23.2)$$

le facteur 1,2 faisant intervenir la limite élastique réelle du matériau par rapport à la valeur minimale.

6.5.3 CALCUL DE L'ASSEMBLAGE SOLLICITÉ PAR DES EFFORTS

A part la force axiale de serrage F_A, il faut considérer toutes les forces et couples pouvant intervenir dans la sollicitation de l'assemblage, La figure 6.14 donne une première idée générale des dispositions des vis dans des assemblages typiques et les sollicitations à supporter : forces normales et/ou tangentielles, couples de flexion et/ou de torsion. Le serrage des pièces est diminué par l'action de forces axiales extérieures et ce serrage doit être en mesure de transmettre des forces tangentielles par frottement si ces forces existent. De plus, les surfaces serrées doivent rester en contact et ne pas subir de décollement incompatible avec la fonction de l'assemblage.

Tableau 6.6
Valeurs approchées pour le facteur de serrage α_A

Facteur α_A	Tolérance ±	**Moyens de serrage - Moyens de réglage** Remarques
1,0	5 % à 12 %	Serrage automatique ou manuel contrôlé par rapport à R_e. La tolérance de la force de serrage dépend de la valeur de R_e de la vis.
1,0	5 % à 12 %	Serrage automatique ou manuel contrôlé par rotation. Détermination du couple de serrage par essais. La tolérance de la force de serrage dépend de R_e de la vis. La vis est dimensionnées pour $F_{M\,min}$.
1,2 à 1,6	9 % à 23 %	Serrage hydraulique. Réglage par mesure de la longueur ou de la pression. Petites valeurs pour les vis longues, grandes valeurs pour les vis courtes : $l_k / d \leq 2$.
1,4 à 1,6	17 % à 23 %	Serrage avec clef dynamométrique avec mesure dynamique du couple de serrage. Recherche du couple par essais sur pièce originale. Petites valeurs pour grand nombre d'essais.
1,6 à 1,8	23 % à 28 %	Détermination du couple de serrage par estimation du coefficient de frottement. Petites valeurs pour clefs dynamométriques avec mesure du couple. Plus grandes valeurs pour clefs avec limitation du couple.
1,7 à 2,5	26 % à 43 %	Serrage avec clef dynamométrique avec contrôle du couple. La clef est réglée pour le couple de serrage de contrôle qui se compose du couple nominal + une sécurité + coefficient de frottement estimé.
2,5 à 4,0	43 % à 60 %	Serrage avec moteur à percussion. La clef est réglée pour le couple de contrôle qui se compose du couple nominal + un supplément. Plus petites valeurs pour un grand nombre de contrôles.

6.5.2.5 EFFET DU TASSEMENT DES SURFACES

Outre les déformations élastiques dans un assemblage à vis, il existe des pertes de serrage provoquées par le nivellement plastique des rugosités des surfaces en contact. La relation entre la perte de serrage en force F_Z et le facteur de perte de serrage f_Z se trouve à partir du graphique de la figure 6.20 et des triangles semblables sur le triangle de précontrainte :

$$F_Z/F_M = f_Z / (f_{vis} + f_{pièces}) = f_Z / (\delta_{vis} + \delta_{pièces})F_M.$$

d'où :
$$F_Z = f_Z / (\delta_{vis} + \delta_{pièces}) = f_Z\, \Phi_k / \delta_{pièces}. \qquad (6.22.1)$$

Le facteur de perte de serrage f_Z est relativement faible car lors du montage de l'assemblage, il y a déjà nivellement des surfaces. Les essais ont démontré que ce facteur ne dépendait pratiquement pas du nombre de surfaces en contact dans l'assemblage ni directement de leur rugosité. Pour des pièces massives, il peut se trouver approximativement au moyen de la relation :

$$f_Z = 3{,}29\ (l_k/d)^{0{,}34} \cdot 10^{-3}\ \text{[mm]}. \qquad (6.22.2)$$

Le facteur calculé par cette relation n'est valable que si la pression superficielle entre vis et pièces serrées ne dépasse pas la valeur admissible. Si cela est tout de même le cas, il y a affaissement de la matière sous la tête de la vis ou de l'écrou ce qui engendre une perte de serrage supérieure à celle donnée par cette relation.

Une étude détaillée de l'effet du niveau d'introduction de la force axiale et de l'augmentation de rigidité du cône de déformation dans les pièces serrées montre que le facteur réel $\bar{n}_{red}$ est plus petit que n . La relation corrigée devient :

$$\Phi_{en} = \bar{n}_{red}\, \Phi_{ek},$$

correspondant mieux aux conditions réelles de comportement de l'assemblage.

6.5.2.4 PRÉCISION DE LA FORCE DE SERRAGE

Le dimensionnement de la vis ainsi que le choix de la classe de qualité découle de la force de serrage nécessaire. La force dans la vis pendant l'opération de montage peut s'engendrer par diverses méthodes. A part l'efforts axial de traction subi par la vis, il s'ajoute habituellement un couple de torsion provoqué par la clef de serrage et le frottement entre les surfaces du filetage. À même tension axiale dans la vis, une augmentation du moment de torsion augmente également la contrainte idéale dans la vis. Les méthodes actuelles de serrage mesurent toujours indirectement cette valeur en fonction du couple appliqué, de la déformation longitudinale de la vis, de l'angle de serrage ou le point du début de la déformation plastique. Toutes ces méthodes provoquent une certaine dispersion dans les résultats, ce qui finalement impose un choix de vis plus grandes ou plus résistantes. La recommandation tient compte de ce fait par l'introduction du facteur de serrage α_A. Ce facteur est le rapport entre la force maximale de montage $F_{M\ max}$, atteinte dans les meilleures conditions de frottement, et la force minimale de montage $F_{M\ min}$, nécessaire pour transmettre l'efforts prévu :

$$\alpha_A = F_{M\ max}/F_{M\ min}. \qquad (6.21)$$

avec :

$F_{M\ max}$ Force de montage maximale pouvant exister dans les meilleures conditions de transformation du couple de serrage en force axiale, la contrainte idéale limite n'étant pas dépassée.

$F_{M\ min}$ Force de montage minimale assurant la fonctionnalité de l'assemblage.

Ces diverses forces nécessitent un complément d'information concernant l'obtention de la force axiale dans la vis :

1. La force axiale dépend du couple de serrage et des coefficients de frottement entre les divers composants.
2. Pour assurer pleinement la fonction de l'assemblage, il est nécessaire d'atteindre la force minimale $F_{M\ min}$ de montage.
3. En tenant compte du frottement sur le filetage et sous la tête de la vis, cette force minimale est atteinte par le couple minimal de serrage $M_{A\ min}$.
4. Par suite des diverses insécurités dans l'outillage et la manipulation, le plus grand couple de serrage $M_{A\ max}$ peut provoquer une augmentation de tension axiale dans la vis par rapport à $F_{M\ min}$.
5. La vis doit donc être dimensionnée à partir de la force minimale $F_{M\ min}$ et le calcul doit introduire les conditions limites supérieures de sollicitation sous $F_{M\ max}$, cette limite pouvant représenter par exemple 90% de la limite apparente $R_{p0,2}$.

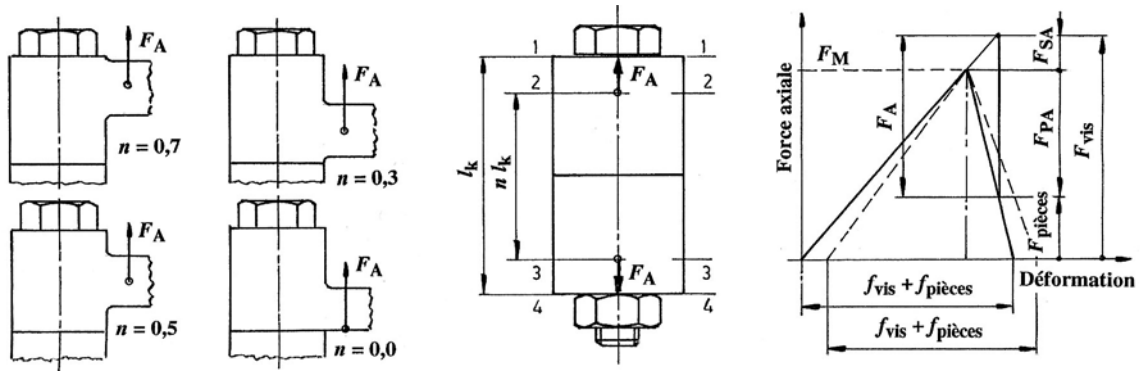


Figure 6.19 Effet des niveaux d'application de la charge extérieure

Les déformations résultantes s'expriment alors par :

1. entre les niveaux 2-2 et 3-3 : $\Delta l_{2\text{-}3(FA)} = n\ \delta_{pièces}\ F_{PA}$,
2. entre les niveaux externes : $\Delta l_{1\text{-}2(FA)} = F_{SA}\ [\delta_{vis} + (1 - n)\ \delta_{pièces}]$.

Ces deux déformations doivent être d'une part identique avant décollement des surfaces et l'équilibre des forces doit être satisfait, d'où :

$$F_{SA}\ [\delta_{vis} + (1 - n)\ \delta_{pièces}] = F_{PA}\ n\ \delta_{pièces}$$

et

$$F_A = F_{SA} + F_{PA}.$$

Cette relation est semblable à celle du système centré. Calculons l'augmentation de la tension axiale dans la vis F_{SA} ou la variation de la tension axiale dans les pièces serrées F_{PA}, pour une position centrée de la force axiale engendrée par la vis, par les relations suivantes, le facteur précédent Φ étant désigné par Φ_k dans la recommandation :

$$F_{SA} = n\ [\delta_{pièces}/(\delta_{vis} + \delta_{pièces})]\ F_A = n\ \Phi_k\ F_A = \Phi_n\ F_A, \qquad (6.19.1)$$

$$F_{PA} = F_A\ [\delta_{vis} + (1 - n)\ \delta_{pièces}] / (\ \delta_{vis} + \delta_{pièces}), \qquad (6.19.2)$$

$$F_{PA} = (1 - n\ \Phi_k)\ F_A = (1 - \Phi_n)\ F_A, \qquad (6.19.3)$$

donc :

$$\Phi_n = n\ \Phi_k = n\ \ [\delta_{pièces}/(\delta_{vis} + \delta_{pièces})]. \qquad (6.19.4)$$

Dans le cas réel, avec introduction des efforts extérieurs aux niveaux 2-2 et 3-3, l'élasticité fondamentale est à corriger avec la valeur n et le rapport Φ_n permet de trouver les variations des efforts dans la vis et dans les pièces serrées. Ces relations montrent également que pour une valeur n variant de 0 à 1,0 , la variation de tension axiale dans la vis F_{SA} peut prendre des valeurs comprises entre 0 et $\Phi_k\ F_A$. Ces relations sont valables lorsque l'axe de la vis et la direction de la charge sont centrés. Lorsque l'axe de la vis est excentré de s et la charge de a, le rapport Φ_k pour $n = 1,0$ se transforme en Φ_{ek} :

$$\Phi_{ek} = \delta^{**}_{pièces} / (\delta_{vis} + \delta^{*}_{pièces}), \qquad (6.20.1)$$

et lorsque le niveau d'application de la charge extérieure est différent du cas théorique, alors le facteur Φ_{ek} se transforme en Φ_{en} :

$$\Phi_{en} = n\ [\delta^{**}_{pièces} / (\delta_{vis} + \delta^{*}_{pièces})] = n\ \Phi_{ek}, \qquad (6.20.2)$$

et :

$$F_{SA} = \Phi_{en}\ F_A.$$

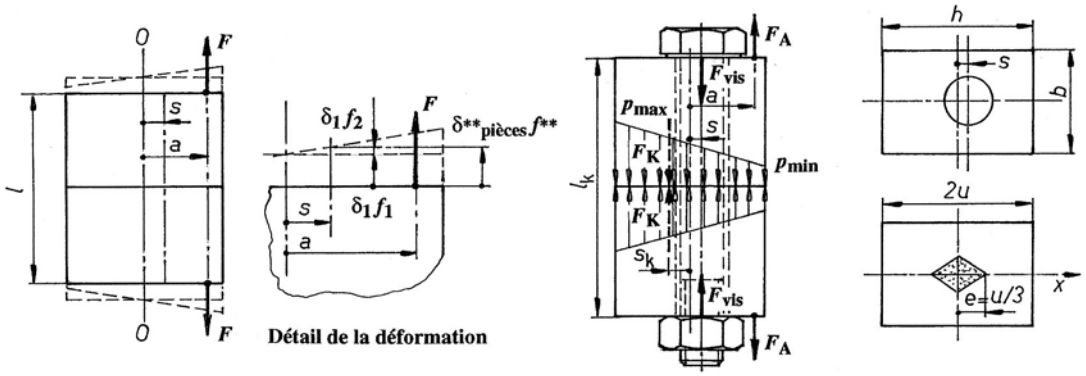


Figure 6.18 Déformations du corps prismatique avec vis et/ou charge excentrée

Le calcul peut être nettement amélioré si l'on tient compte des élasticités locales et des déformations microgéométriques au niveau des surfaces. Ces effets sont importants pour les assemblages à vis hyperstatiques car les élasticités locales peuvent déplacer le point à moment nul et corriger la distance "*a*" dans le bon sens. Par contre, le décollement des surfaces intervient plus tôt. La détermination de ces facteurs est en principe possible, mais nécessite de nombreuses opérations non élémentaires. Les excentricités provoquent un moment fléchissant dans les pièces. Aux forces axiales appliquées s'ajoutent des contraintes de flexion qui doivent s'introduire dans le contrôle de l'assemblage. De plus, l'inclinaison des surfaces provoque une augmentation de sollicitation dans la vis.

Dans les assemblages serrés et chargés excentriquement, le calcul fait intervenir des relations basées sur l'élasticité des pièces et de nombreuses hypothèses simplificatrices. L'utilisateur des diverses formules doit s'assurer que ces hypothèses sont applicables et apporter éventuellement les corrections nécessaires. L'introduction de l'excentricité améliore nettement la sécurité dans le choix de la vis par rapport aux relations simples du système centré.

6.5.2.3 EFFET DU NIVEAU D'INTRODUCTION DE LA CHARGE

La mise en équation des forces et déformations suppose que la charge extérieure est appliquées au niveau de la tête de la vis et de l'écrou. Dans la pratique, l'introduction de la force extérieure s'effectue entre ces deux points. Le calcul du facteur de correction n sur la longueur de serrage l_k peut se trouver approximativement par la méthode des éléments finis. La figure 6.19 montre les diverses valeurs de n en fonction de la position des lignes de force. Les niveaux d'introduction sont désignés par 2-2 et 3-3 , les niveaux 1-1 et 4-4 correspondant à ceux de la tête de vis et de l'écrou. La force axiale extérieure F_A provoque une décharge entre les niveaux 2-2 et 3-3 de F_{PA} tandis que les deux autres tronçons sont sollicités par une force additionnelle F_{SA}.

En introduisant les hypothèses simplificatrices citées précédemment, l'élasticité des pièces entre les niveaux 2-2 et 3-3 peut se donner par : $n\ \delta_{pièces}$ avec $n < 1$. Pour les parties externes entre les niveaux 1-1 et 2-2 ou entre 3-3 et 4-4, l'élasticité peut s'exprimer par :

$$\delta_{pièces} - n\ \delta_{pièces} = (1 - n)\ \delta_{pièces}.$$

rapport au centre de gravité de la section constante, d'aire A_{ers} et de moment quadratique I_{Bers}, sur la ligne d'action de cette force. Si la force était centrée, la déformation se trouverait immédiatement par :

$$\Delta l_{pièces(s=0)} = \delta_{pièces} F.$$

La composante de flexion de la contrainte normale totale sur la ligne d'action de la force vaut, en appliquant la relation générale de la flexion simple avec $M_f = s\ F$:

$$\sigma_s = (s\ F/I_{Bers}) \cdot s = s^2\ F / I_{Bers},$$

et la déformation correspondantes :

$$\Delta l_{pièces(s)} = \sigma_s\ l_k / E_{pièces} = s^2\ l_k\ F / (I_{Bers} \cdot E_{pièces}).$$

Finalement, la déformation totale sur la ligne d'action de la force est égale à la somme des deux déformations partielles, soit :

$$\Delta l_{pièces} = \delta_{pièces} (1 + s^2\ A_{ers}/I_{Bers})\ F, \qquad (6.17.1)$$

$$\Delta l_{pièces} = \delta^*_{pièces}\ F, \qquad (6.17.2)$$

avec :

$$\delta^*_{pièces} = \delta_{pièces} (1 + s^2\ A_{ers}/I_{Bers}). \qquad (6.17.3)$$

Ces résultats coïncident avec la théorie générale de la répartition des pressions sur les surfaces vue au chapitre 1.

6.5.2.2 EFFET DE L'EXCENTRICITE DE LA CHARGE

Dans la plupart des cas réels, la charge extérieure axiale F_{ext}, désignée dans la recommandation par F_A, n'est pas appliquée exactement suivant l'axe de gravité des sections transversales, mais se trouve excentrée de la distance a , figure 6.18. Lorsque l'axe de la vis est excentré de la distance s et l'axe de la charge axiale est excentrée de a , le facteur d'élasticité se trouve par une relation semblable à la précédente :

$$\delta^{**}_{pièces} = \delta_{pièces} (1 + a\ s\ A_{ers}/I_{Bers}). \qquad (6.18)$$

La mise en équation nécessite le choix d'une direction positive. Cette direction est choisie dans le sens de l'excentricité s de la vis, l'excentricité de la charge a étant positive si elle est située du même côté, sinon elle est négative. Il faut vouer un soin particulier aux petites excentricités avec des sections de formes défavorables pour les pièces serrées car elle engendrent des déformations en flexion qui augmentent l'élasticité des pièces. Au moment d'atteindre la force axiale de décollement F_{Aab}, il est possible qu'il existe déjà un décollement partiel sans inconvénient majeur sur la fonctionnalité de l'assemblage car le calcul de F_{Aab} est basé sur une pression linéaire au niveau des surfaces. La recherche du rapport Φ et de la variation de la tension axiale dans la vis est valable seulement dans le domaine $F_A \leq F_{Aab}$.

6.5.2.1 EFFET DE L'EXCENTRICITÉ DE LA VIS

L'application excentrée de la force de serrage par la vis provoque, en plus de la déformation axiale, une déformation de flexion, ce qui engendre une augmentation de l'élasticité des pièces. Les hypothèses simplificatrices introduites pour résoudre ce problème sont les suivantes :

1. les pièces serrées forment des corps prismatiques,
2. les pièces serrées, au niveau des surfaces de contact, sont sollicitées sur toute leur étendue par la pression,
3. toutes les sections transversales des corps prismatiques restent planes après déformation selon l'hypothèse de Bernoulli. La répartition des contraintes obéit à la loi de Hooke, donc cette répartition reste linéaire dans toute section.

Ces simplifications sont admissibles seulement pour des corps dont les surfaces en contact ne dépassent pas $G = d_t + h_{min}$. Il est recommandé de concevoir ces surfaces selon les prescriptions énoncées précédemment et d'en limiter l'étendue. La figure 6.17 montre une partie d'un assemblage multivis, la limite transversale b étant fixée soit par la distance entre les vis, soit par $d_t + h_{min}$.

Le calcul de la pression de contact peut se trouver lorsque le contour de la surface de contact ne se situe pas plus loin que 0,5 ($d_t + h_{min}$) de l'axe de la vis S-S, h_{min} étant l'épaisseur de la pièce la plus mince dans l'assemblage. Sur la figure 6.17, la surface A_D au contact des deux pièces est un rectangle de dimensions b c_T moins le trou de perçage. Le corps prismatique présente une section constante d'aire $A_B = b\ c_B$ moins la section du trou et pour la partie des corps prismatiques étagés une section d'aire $A_{Bi} = b\ (c_B + \Delta c_{Bi})$. Le moment quadratique axial de substitution du corps étagé vaut :

$$I_{Bers} = l_k / [h_1/I_{B1} + h_2/I_{B2} + (l_k-(h_1+h_2))/I_B].$$

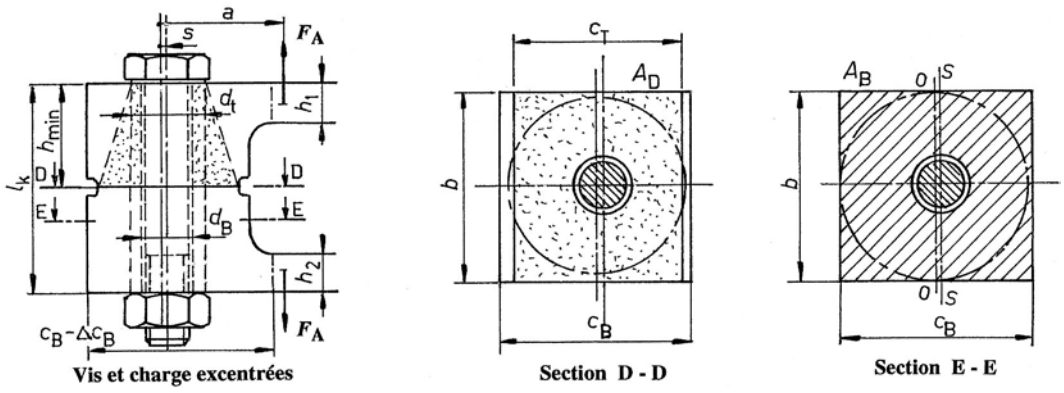


Figure 6.17 Assemblage sollicité par une charge excentrée

Cette expression devient : $I_{Bers} = I_B = b\ c_B^3/12$ lorsque la section est à largeur constante et $h_1 = h_2 = 0$. Pour un corps prismatique à section variable, le moment quadratique de substitution peut se trouver facilement graphiquement ou par l'expression générale :

$$I_{Bers} = \frac{l_k}{\int_0^{l_k} dx / I(x)}.$$

Les moments quadratiques I_{Bers} et I_B sont utilisés pour trouver le facteur d'élasticité des pièces serrées excentriquement $\delta^*_{pièces}$ ou sollicitées excentriquement $\delta^{**}_{pièces}$. Calculons la déformation d'une pièce prismatique, sollicitée par une force F excentrée de la distance s par

- placer la ligne d'action des forces extérieures au centre de gravité de la surface de contact ou réduire l'excentricité,
- placer le point d'application des forces extérieures près de la surface de contact des pièces serrées,
- augmenter le facteur d'élasticité de la vis δ_{vis} par rapport à celui des pièces $\delta_{pièces}$.

2. *Assemblages à poutrelles*
   - atteindre si possible la largeur d'appui $b = d_t\, h$,
   - atteindre une longueur d'appui si possible égale à h,
   - réduire l'excentricité des forces extérieures,
   - concevoir le déplacement de la zone de raccordement sous l'effet des forces extérieures si possible parallèlement aux axes des vis.
3. *Choix des vis*
   - utiliser des vis en acier des classes supérieures en résistance mécanique,
   - diminuer les coefficients de frottement entre les pièces mobiles, vis, écrou et filetage, pendant le serrage,
   - introduire un mode de serrage avantageux avec peu de dispersion dans la génération de la force de serrage.

6.5.2 ANALYSE DES EFFORTS ET DES DÉFORMATIONS

Le cas fondamental a été discuté sous 6.4.5 et les résultats de base sont applicables dans la recommandation VDI 2230 . Les grandeurs de base sont :

1. Elasticité de la vis : facteur δ_{vis},
2. Elasticité des pièces serrées : facteur $\delta_{pièces}$,
3. Rapport de calcul : $\Phi = \delta_{pièces} / (\delta_{vis} + \delta_{pièces})$.

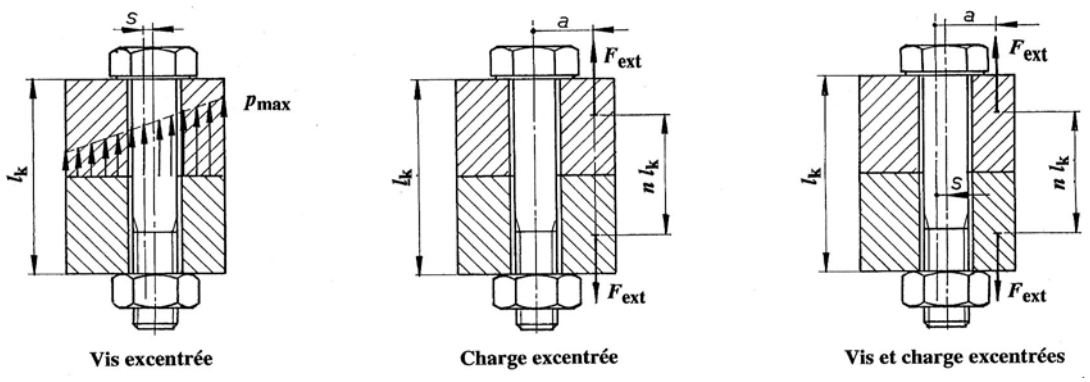


Figure 6.16 Assemblages à vis avec vis et/ou charges extérieures excentrées

A cette mise en équilibre fondamentale, il faut ajouter les corrections suivantes :

1. Effet de l'excentricité de la vis et/ou de la charge extérieure, figure 6.16,
2. Effet du niveau d'application de la charge extérieure,
3. Précision dans la valeur de la force axiale dans la vis au moment du serrage,
4. Effet du tassement des surfaces des pièces serrées.

6.5.1.3 MÉCANISME AVEC ASSEMBLAGE À POUTRELLE

Dans les assemblages dits à poutrelle, largeur $b \leq d_t + h_{min}$, sur lesquels la force axiale F_A agit à l'extérieur du domaine $G = d_t + h_{min}$, c'est la loi des leviers qui intervient principalement dans la recherche des efforts. Le calcul au moyen des diverses hypothèses décrites plus loin n'est que partiellement valable.

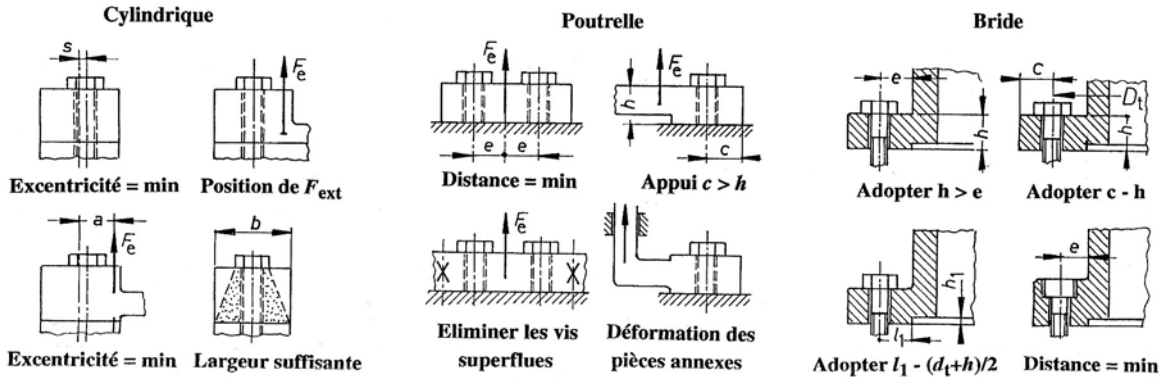


Figure 6.15 Recommandation de conception pour les assemblages cylindriques

6.5.1.4 MÉCANISME À PLAQUE CIRCULAIRE

Le calcul d'un assemblage à plaque circulaire suppose, dans la plupart des cas, une poussée résultante appliquée au centre et une transmission concentrique des efforts vers les bords. La théorie des plaques permet de trouver les forces dans les vis.

6.5.1.5 MÉCANISME À BRIDE AVEC OU SANS JOINT

Cette géométrie nécessite un traitement particulier du problème. La complexité de l'assemblage et les conditions à remplir comme l'étanchéité du joint sous l'action de la pression de service et l'effet éventuel de la température, la déformation de la bride, la présence de matériaux différents, représentent une autre classe de calculs. Pour le calcul des brides dans la technique des tuyauteries, voir les références spécialisées.

6.5.1.6 MÉCANISME À BRIDE AVEC APPUI CIRCULAIRE

Pour les assemblages à brides pour lesquels la conception des pièces et la position des vis influencent directement les tensions dans les vis, il est possible, à partir d'hypothèses simplificatrices et d'introduire le modèle à poutrelle. Il est aussi recommandé, dans des conditions particulières, d'utiliser des méthodes plus évoluées introduisant le calcul par ordinateur.

6.5.1.7 RECOMMANDATIONS DE CONCEPTION

La figure 6.15 donne quelques recommandations générales sur la conception des assemblages à vis afin d'en augmenter la capacité de charge sous les efforts extérieurs.

Les règles à observer dans les assemblages à vis sont :

1. *Assemblages cylindriques*

   - placer la vis au centre de gravité de la surface de contact ou minimiser l'excentricité,

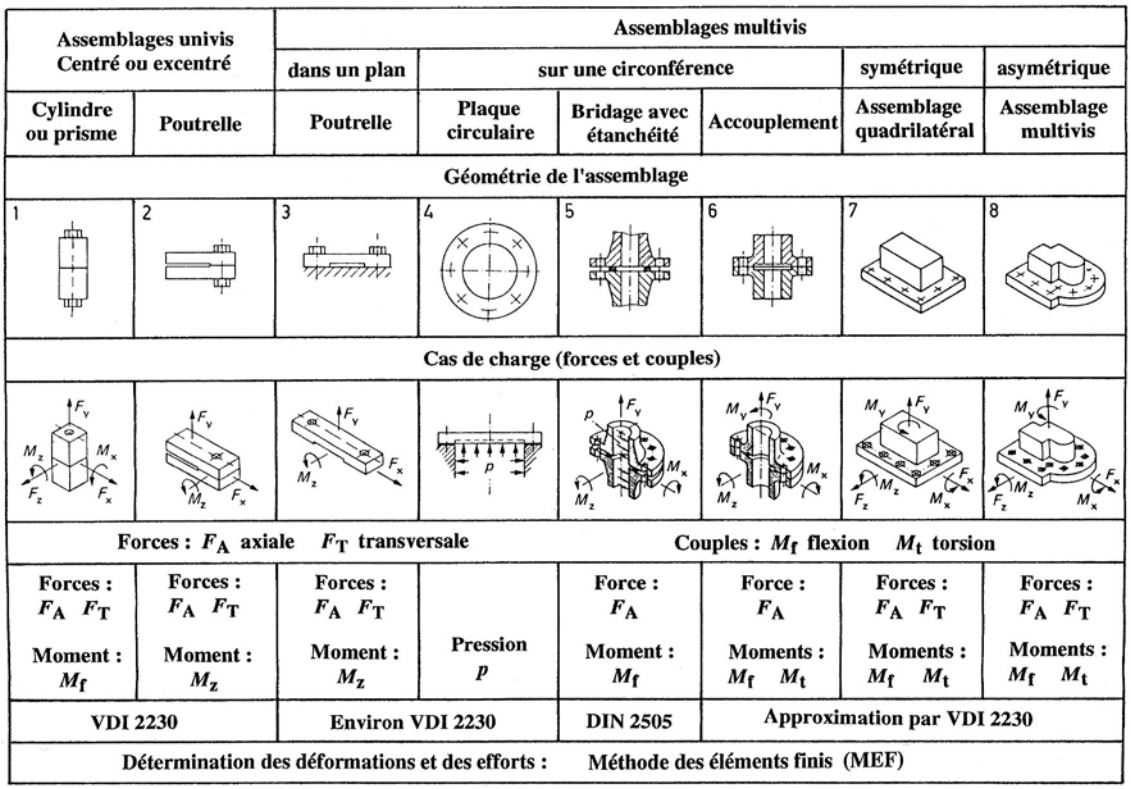


Figure 6.14 Dispositions fondamentales des assemblages à vis

Les principales différences dans les hypothèses sont les suivantes :

1. Selon 6.5.3, une force F_{Kerf}, force de serrage nécessaire sur les surfaces serrées, est calculée de manière à empêcher tout jeu, donc tout décollage des surfaces sous l'application de la charge extérieure. Il est admis que la pression de contact entre les surfaces sous pression est constante et le comportement des pièces linéaire. Il en résulte une simplification dans le calcul de l'assemblage. Dès que le contact entre les surfaces n'est plus réalisé par suite de l'application d'une force $F_{Aab} > F_A$, due à F_A ou à une excentricité a plus importante, les hypothèses de base ne sont plus valables. Les limites du calcul sont citées dans ce paragraphe.

   Pour les assemblages cylindriques ($G \leq d_t + h_{min}$) avec action de la force axiale F_A à la distance $a > 0$ et excentricité de l'axe de la vis $s > 0$, voir les figures 6.15 et 6.16, une déformation complémentaire de flexion intervient. La distance "s" est imposée principalement par la géométrie de l'assemblage, la distance "a" doit être trouvée à partir d'observations de la répartition de la charge dans le système hyperstatique.
2. Selon 6.5.3.2, la déformation en flexion de la pièce en forme de poutrelle est déterminée à l'aide du calcul de la ligne élastique de la pièce rectiligne, ce qui permet de trouver l'excentricité de la force de serrage. Les hypothèses peuvent également s'appliquer dans les assemblages avec jeux. Le calcul doit être interrompu lorsque les forces de serrage sont situées à l'extérieur du noyau central de la section de contact : pour une surface circulaire $s_k > D_{min}/8$ et pour une surface rectangulaire $s_k > e = u/3$ (losange).

6.5 CALCUL DES ASSEMBLAGES SELON VDI 2230

La recommandation VDI 2230, feuille 1, s'applique aux vis en acier, filetages compris entre M4 et M39 et une longueur de serrage $l_k/d \leq 10$. Les vis de dimensions inférieure ou supérieure peuvent se calculer suivant cette recommandation si les classes de résistance correspondent à DIN ISO 898, partie 1. Les caractéristiques des matériaux sont applicables à la température ambiante. A basse ou à haute température, ces caractéristiques doivent être adaptées aux valeurs réelles.

Les conditions extrêmes de sollicitation comme les basses ou hautes températures, l'effet de la corrosion ou des charges par à-coups ne font pas partie de cette recommandation. Pour des calculs particuliers ou des applications bien spécifiques, se référer aux normes et prescriptions usuelles comme par exemple celles pour les vis HR (HR = haute résistance) en construction métallique ou des réservoirs sous pression.

6.5.1 CHOIX DES HYPOTHÈSES DE CALCUL

La méthode de calcul d'un assemblage à vis dépend principalement de la géométrie de l'assemblage et des charges appliquées. Les assemblages multivis doivent être décomposés en géométries assimilables aux cas traités par cette recommandation. La figure 6.14 montre les géométries de base, les charges habituelles et les propositions de calcul. Selon la complexité de la charge, les hypothèses à introduire sont plus ou moins vastes.

6.5.1.1 GÉNÉRALITÉS

Pour tous les assemblages, il est admis que les axes de toutes les vis sont parallèles à l'état non chargé, que ces axes de vis sont perpendiculaires aux surfaces des pièces serrées. Les déformations plastiques macrogéométriques ne sont pas directement incluses dans le contrôle mais sont prises en considération par l'effet du tassement des surfaces serrées. Les dispositions fondamentales peuvent se classer en :

1. Mécanisme à assemblage cylindrique, géométrie 1;
2. Mécanisme à assemblage en poutrelle, géométries 2 et 3;
3. Mécanisme à plaque circulaire, géométrie 4;
4. Mécanisme à bride avec joint déformable 5;
5. Mécanisme à bride avec appui surfacique, géométries 6 , 7 et 8.

A partir de ces distinctions, l'utilisateur peut adopter la voie de calcul la plus proche du cas réel. Les descriptions ci-après ont pour but de faciliter ce choix.

6.5.1.2 MÉCANISME À ASSEMBLAGE CYLINDRIQUE

L'assemblage cylindrique ne doit pas dépasser, au niveau des surfaces de contact, la limite $G = d_t + h_{min}$. Les assemblages cylindriques peuvent être considérés comme une partie d'un assemblage multivis, comme par exemple un serrage de couvercle cylindrique, de carter, etc. Les excentricités de la charge et de l'axe de la vis sont nulles ($a = 0$ et $s = 0$). Il s'agit du modèle fondamental à deux composants élastiques, la vis et les pièces serrées. Dans les assemblages cylindriques à vis, ou assemblages prismatiques, avec $G \leq d_t + h_{min}$ avec application excentrée de l'effort extérieur $a > 0$ et excentricité de l'axe de la vis $s > 0$, une déformation complémentaire de flexion est présente et modifie le cas fondamental. Le calcul s'effectue alors selon le paragraphe 6.5.3.

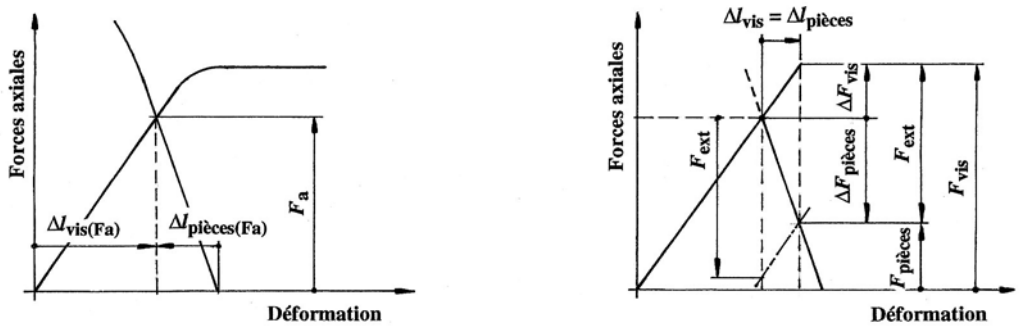


Figure 6.13 Triangles de précontrainte dans le cas fondamental selon fig. 6.11 et 6.12

Sous l'effet de la force extérieure $\vec{F}_{ext}$, la force axiale dans la vis augmente tandis que le serrage des pièces diminue proportionnellement à la déformation axiale de la vis. Les deux relations d'équilibre et de déformation permettent d'écrire :

- équilibre : $F_{ext} = \Delta F_{vis} + \Delta F_{pièces}$,
- pour la vis : $\Delta l_{vis} = \Delta F_{vis}\, \delta_{vis}$,
- pour les pièces serrées : $\Delta l_{pièces} = \Delta F_{pièces}\, \delta_{pièces}$.

Comme les deux déformations doivent rester identiques, remplaçons dans l'équation d'équilibre les variations de force par les déformations correspondantes :

$$F_{ext} = \Delta l_{vis}\, (\delta_{vis} + \delta_{pièces}) / (\delta_{vis}\, \delta_{pièces}),$$

$$F_{ext} = \Delta F_{vis}\, (\delta_{vis} + \delta_{pièces}) / \delta_{pièces}.$$

Finalement, l'augmentation de tension axiale dans la vis se trouve par :

$$\Delta F_{vis} = F_{ext} \cdot \delta_{pièces} / (\delta_{vis} + \delta_{pièces}).$$

Introduisons pour simplifier l'écriture le rapport :

$$\Phi = \frac{\delta_{pièces}}{\delta_{vis} + \delta_{pièces}}. \qquad (6.15.1)$$

Les variations de tension axiale dans la vis et dans les pièces serrées se calculent par :

$$\Delta F_{vis} = \Phi\, F_{ext}, \qquad (6.15.2)$$

$$\Delta F_{pièces} = (1 - \Phi)\, F_{ext}. \qquad (6.15.3)$$

Pour trouver ces deux variations sur le triangle de précontrainte, il suffit de porter vers le bas la force extérieure à partir du point d'intersection des deux caractéristiques élastiques des composants, de tracer une parallèle à la caractéristique de la vis jusqu'à l'intersection avec la caractéristique des pièces serrées. Ce point de concours permet de trouver le serrage résiduel dans les pièces, la force totale dans la vis et de mettre en évidence la force extérieure. La partie droite de la figure 6.13 montre le principe de la construction et les valeurs recherchées. Les forces et les déformations supplémentaires valent :

- dans la vis : $F_{vis} = F_a + \Delta F_{vis}$, (6.16.1)
- dans les pièces serrées : $F_{pièces} = F_a - \Delta F_{pièces}$, (6.16.2)
- déformations axiales : $\Delta l_{vis} = \Delta l_{pièces} = \delta_{vis}\, \Phi\, F_{ext}$. (6.16.3)

Pour faciliter la recherche de l'élasticité des pièces , on introduit la notion d'aire de substitution A_{ers} à partir de d_t ou D_e. Pour les assemblages à vis avec axe excentré par rapport à l'axe de gravité des pièces serrées, le moment de flexion augmente la déformation de l'assemblage. L'élasticité des pièces pour un assemblage avec forces centrées sera désignée par $\delta_{pièces}$, celle pour un assemblage avec forces excentrées par $\delta^*_{pièces}$.

Le calcul de l'élasticité des pièces serrées s'effectue en introduisant la section de substitution A_{ers} donnée par l'expression proposée par W. Thomala :

$$A_{ers} = \pi\,(d_t^2 - D_B^2)/4 + (\pi/8)\,d_t\,(D_e - d_t)\,[(x+1)^2 - 1], \qquad (6.14.1)$$

avec :

$x = (l_k\,d_t/D_e^2)^{1/3}$ pour les vis avec écrou,
$x = (l_k/D_e)^{1/5}$ pour les vis avec filetage en prise dans un trou fileté.

Cette relation est applicable dans le domaine $d_t \le D_e \le d_t + l_k$. Pour $d_t < D_e \le 1{,}5\,d_t$, cette relation est applicable seulement jusqu'à $l_k/d = 10$. Dans la recommandation VDI 2230, seule la première expression pour le facteur x est donnée et applicable aux vis avec écrou ou trou fileté. W. Thomala a distingué deux cas et nous avons reproduit ces deux expressions, contrairement à la recommandation VDI 2230. Lorsque $D_e < d_t$, comme sur la figure 6.12 à gauche, ce qui est excessivement rare en pratique, la section de substitution est égale à :

$$A_{ers} = \pi\,(D_e^2 - d_B^2)\,/\,4.$$

Lorsque $D_e > d_t + l_k$, la section de substitution reste pratiquement constante et se trouve par la valeur calculée pour $D_e = d_t + l_k$. La déformation axiale des pièces serrées par la force axiale de montage F_a se trouve par :

$$\Delta l_{pièces} = F_a\,l_k/(A_{ers}\,E_{pièces}). \qquad (6.14.2)$$

Cette déformation permet de définir, comme pour la vis, le facteur d'élasticité des pièces serrées par :

$$\delta_{pièces} = \Delta l_{pièces}/F_a = l_k/(A_{ers}\,E_{pièces}). \qquad (6.14.3)$$

Il ne faudra jamais perdre de vue toutes les simplifications apportées dans la détermination des facteurs d'élasticité de la vis et des pièces serrées, de leurs influences sur le résultat final. La figure 6.11 est complétée par la représentation de la force axiale en fonction de la déformation positive de la vis. La figure 6.12 est également complétée par la représentation de la force axiale compressive en fonction du raccourcissement des pièces serrées.

6.4.5.4 EFFET DE LA FORCE EXTÉRIEURE CENTRÉE

Le problème hyperstatique de l'assemblage à vis avec force extérieure centrée se laisse plus facilement résoudre par la construction du triangle de précontrainte. A partir de la représentation graphique des déformations selon figures 6.11 et 6.12, il est possible de dessiner l'état d'équilibre après serrage de la vis sous la force axiale F_a en portant sur l'axe horizontal la déformation de la vis Δl_{vis} et la déformation des pièces serrées - $\Delta l_{pièces}$, la force de serrage étant portée sur l'axe vertical.

L'allongement positif de la vis est porté vers la droite, le raccourcissement des pièces serrées vers la gauche. A l'état assemblé, la force axiale dans la vis F_a est égale à la force axiale compressive sur les pièces. Le représentation des déformations linéaires des deux composants permet le tracé du triangle de précontrainte, le point d'intersection des deux droites caractéristiques étant situé à l'ordonnée F_a , voir figure 6.13.

Tableau 6.5 (suite)

2. Vis d'extension selon normes DIN avec $d_{(T)}$=0,9 d_3

Filetage métrique normal

Dimension	Force de serrage en N			Couple de serrage en m*N		
	8.8	10.9	12.9	8.8	10.9	12.9
M 4	-	-	-	-	-	-
M 5	4300	6300	7400	4.1	6.0	7.0
M 6	6000	8800	10300	7.0	10.3	12.0
M 8	11200	16400	19200	17.0	25.0	30
M 10	18000	26500	31000	35	51	60
M 12	26500	38500	45000	60	88	103
M 14	36000	53000	62000	96	140	165
M 16	51000	75000	88000	150	220	260
M 18	63000	89000	105000	210	300	350
M 20	82000	117000	137000	300	430	510
M 22	104000	148000	173000	420	590	690
M 24	118000	168000	197000	520	740	870
M 27	158000	225000	265000	790	1120	1300
M 30	191000	270000	320000	1060	1500	1750
M 33	241000	345000	400000	1450	2050	2400
M 36	280000	400000	470000	1850	2600	3100
M 39	340000	485000	570000	2400	3500	4000

Filetage métrique à pas fin

Dimension	Force de serrage en N			Couple de serrage en m*N		
	8.8	10.9	12.9	8.8	10.9	12.9
M 8x1	12700	18700	21900	19.0	28.0	33
M 10x1	21900	32000	37500	41	61	71
M 10x1.25	19900	29000	34000	38	56	65
M 12x1.25	31000	45500	53000	69	101	119
M 12x1.5	28500	42000	49000	64	95	111
M 14x1.5	42000	62000	72000	108	160	185
M 16x1.5	58000	85000	99000	165	245	290
M 18x1.5	78000	111000	130000	250	360	420
M 18x2	70000	100000	117000	230	330	390
M 20x1.5	99000	142000	166000	360	510	590
M 22x1.5	123000	176000	206000	480	680	800
M 24x1.5	150000	213000	250000	620	890	1040
M 24x2	139000	198000	231000	600	850	1000
M 27x1.5	194000	277000	324000	910	1300	1520
M 27x2	182000	260000	305000	880	1250	1450
M 30x1.5	245000	348000	408000	1270	1810	2120
M 30x2	231000	328000	384000	1210	1730	2020
M 33x1.5	301000	428000	501000	1700	2420	2840
M 33x2	285000	405000	475000	1650	2400	2800
M 36x1.5	362000	516000	604000	2230	3180	3720
M 36x3	310000	445000	520000	2000	2900	3400
M 39x1.5	430000	612000	717000	2860	4080	4770
M 39x3	375000	530000	630000	2600	3700	4400

Tableau 6.5

RECOMMANDATION VDI 2230 / juillet 1986

Force axiale et couple de serrage pour les vis à tête hexagonale ou cylindrique
Valeurs calculées pour une contrainte idéale à 90% de la résistance de la vis

Coefficient de frottement de calcul pour les surfaces frottantes : $\mu = 0{,}14$

1. Vis selon normes DIN 931 et 912 ou VSM 13200 et 13201

Dimension	Force de serrage en N			Couple de serrage en m*N		
	8.8	10.9	12.9	8.8	10.9	12.9
Filetage métrique normal						
M 4	3900	5700	6700	3.1	4.5	5.3
M 5	6400	9300	10900	6.1	8.9	10.4
M 6	9000	13200	15400	10.4	15.5	18.0
M 8	16500	24200	28500	25.0	37.0	43.0
M 10	26000	38500	45000	51	75	87
M 12	38500	56000	66000	87	130	150
M 14	53000	77000	90000	140	205	240
M 16	72000	106000	124000	215	310	370
M 18	91000	129000	151000	300	430	510
M 20	117000	166000	194000	430	620	720
M 22	146000	208000	243000	580	830	970
M 24	168000	239000	280000	740	1060	1240
M 27	221000	315000	370000	1100	1550	1850
M 30	270000	385000	450000	1500	2100	2500
M 33	335000	480000	560000	2000	2800	3400
M 36	395000	560000	660000	2600	3700	4300
M 39	475000	670000	790000	3400	4800	5600
Filetage métrique à pas fin						
M 8x1	18100	26500	31000	27	40	47
M 10x1	30500	44500	52000	57	84	98
M 10x1.25	28500	41500	48500	54	79	93
M 12x1.25	43000	64000	74000	96	140	165
M 12x1.5	40500	60000	70000	92	135	155
M 14x1.5	58000	86000	100000	150	220	260
M 16x1.5	79000	116000	136000	230	340	390
M 18x1.5	106000	152000	177000	350	490	580
M 18x2	98000	140000	164000	330	460	540
M 20x1.5	134000	191000	224000	480	690	800
M 22x1.5	166000	236000	275000	640	920	1070
M 24x1.5	200000	285000	333000	830	1180	1380
M 24x2	189000	270000	315000	810	1160	1350
M 27x1.5	258000	367000	430000	1200	1710	2000
M 27x2	245000	350000	410000	1190	1700	2000
M 30x1.5	323000	460000	538000	1670	2370	2780
M 30x2	309000	440000	515000	1610	2300	2690
M 33x1.5	396000	563000	659000	2220	3170	3710
M 33x2	380000	540000	630000	2250	3200	3700
M 36x1.5	475000	677000	792000	2910	4140	4850
M 36x3	425000	610000	710000	2800	3900	4600
M 39x1.5	562000	801000	937000	3720	5300	6200
M 39x3	510000	720000	850000	3600	5100	5900

à six pans creux et par δ_{GM} le facteur d'élasticité de la partie filetée de la vis en prise dans l'écrou. Ces deux facteurs peuvent se trouver par les expressions :

1. Elasticité de la tête : $\delta_K = 0{,}4\ d\ /(E\text{vis}\ A\text{d})$, (6.13.2)

2. Elasticité de l'écrou : $\delta_{GM} = \delta_G + \delta_M = 0{,}5\ d\ /\ (E_{vis}\ A_3) + 0{,}4\ d\ /\ (E_{vis}\ A_d)$, (6.13.3)

avec : $A_3 = \pi\ d_3^2/4$,
$A_d = \pi\ d^2/4$.

Le facteur 0,4, valable pour les têtes selon normes, peut être modifié pour des vis non normées ou à têtes différentes de la normale. Finalement, l'élasticité totale de la vis est :

$$\delta_{vis} = \delta_K + \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_i + \delta_{GM}. \quad (6.13.4)$$

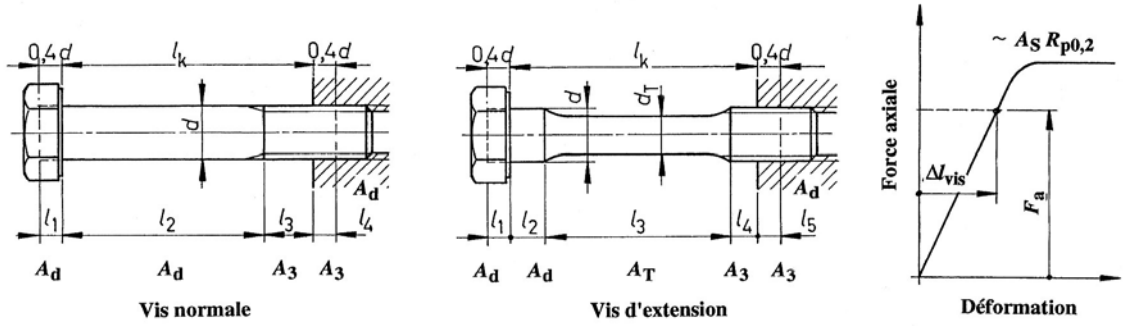


Figure 6.11 Déformation axiale des vis normale et d'extension

6.4.5.3 DÉFORMATION DES PIÈCES SERRÉES

Le calcul des pièces serrées est relativement difficile car la répartition des déformations sous la tête de vis dépend de la géométrie des pièces et de la répartition des contraintes dans les parties massives. Partant de la surface circulaire de contact de la tête de la vis, cette déformation correspond approximativement à celle d'un corps tronconique allant en s'agrandissant vers la surface de contact des pièces, voir figure ci-dessous. Si le corps est un tube dont le diamètre extérieur est inférieur ou égal au diamètre de contact de la tête, alors la déformation axiale peut s'exprimer facilement par les relations classiques de la résistance des matériaux. Par contre, si le diamètre extérieur des pièces serrées est plus grand, le corps de substitution est plus difficile à donner.

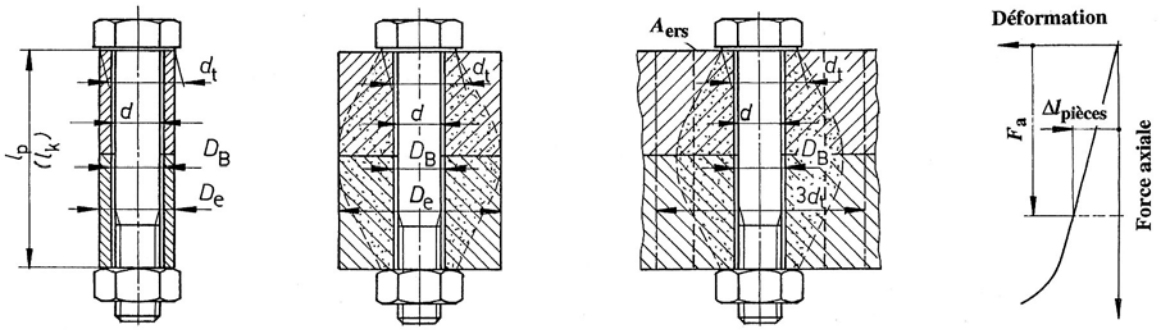


Figure 6.12 Déformation des pièces selon la dimension extérieure D_e des pièces

$\Sigma Y = 0$: $$F_{ext} + F_{pièce} - F_{vis} = 0. \qquad (6.12.1)$$

C'est la seule relation d'équilibre possible contenant deux inconnues ;

$F_{pièce}$ serrage résiduel des pièces,

F_{vis} tension axiale dans la vis,

Pour trouver ces deux forces, il est nécessaire de compléter l'équation d'équilibre par une équation de déformations. Sous l'effet de la charge extérieure, la vis s'allonge de Δl_{vis} et les pièces serrées se raccourcissent de $\Delta l_{pièces}$, ces deux grandeurs devant être égales tant que les pièces serrées restent en contact :

$$\Delta l_{vis} = \Delta l_{pièces}. \qquad (6.12.2)$$

La seule difficulté restant à éliminer les inconnues et d'exprimer correctement ces deux déformations.

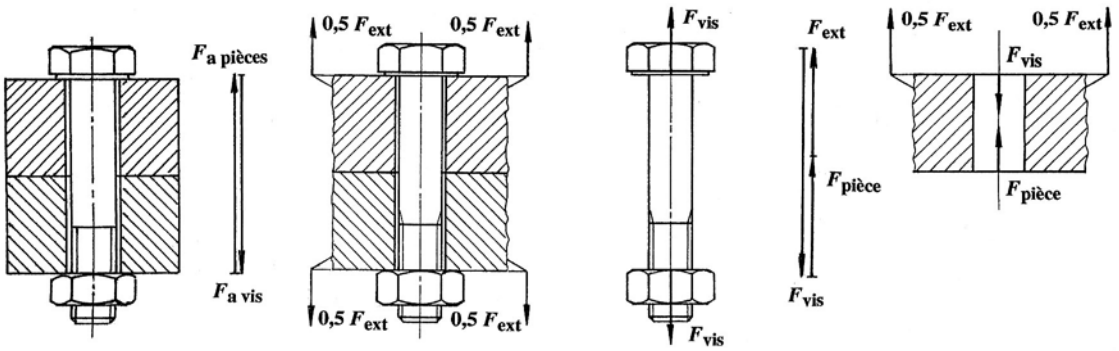


Figure 6.10 Assemblage à une vis, efforts dans la vis et les pièces serrées après application de F_{ext}

6.4.5.2 DÉFORMATION DE LA VIS

La vis, sous l'effet de la force de serrage $\vec{F}_a$, s'allonge de la longueur $\Delta l_{vis(Fa)}$. Cette déformation est proportionnelle à la force axiale et inversement proportionnelle à la rigidité de chaque tronçon constituant la vis. La déformation totale de la vis s'exprime par la loi de Hooke :

$$\Delta l_{vis} = F_a \left(\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{l_3}{A_3} + \ldots + \frac{l_i}{A_i} + \ldots \frac{l_n}{A_n} \right) \cdot \frac{1}{E_{vis}},$$

avec :

$l_1, l_2, \ldots, l_i$ longueur de chacun des tronçons déformables de la vis,

$A_1, A_2, \ldots, A_i$ aire transversale de chaque tronçon déformable.

Exprimons par $\delta_i = l_i / (E_{vis}\, A_i)$ le facteur d'élasticité du tronçon i de la vis. L'élasticité caractérise la propriété d'une structure à se déformer sous l'effet des forces. La connaissance de l'élasticité des composants de l'assemblage, vis et pièces serrées, est essentielle au calcul détaillé de l'ensemble. La déformation totale de la vis s'exprime d'un façon générale par :

$$\Delta l_{vis(Fa)} = F_a\, (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta n) = F_a\, \Sigma\, \delta i = Fa\, \delta_{vis}. \qquad (6.13.1)$$

Pour les tronçons cylindriques, la décomposition en cylindres à section constante est très simple. La partie filetée libre est introduite par l'aire du noyau de la vis, soit A_3 et non A_S. Exprimons par δ_K le facteur d'élasticité de la tête de la vis à forme hexagonale ou cylindrique

6.4.4.1. FORCE AXIALE AU SERRAGE

La plupart des tableaux publiés par les fabricants de vis ou dans les recommandations pour le calcul des assemblages à vis, classes de qualité 8.8, 10.9 et 12.9, prévoient une force axiale au serrage $\vec{F}_a$ engendrant dans la section de calcul une contrainte idéale atteignant 90% de la limite conventionnelle d'élasticité $R_{p0,2}$. En admettant cette valeur limite comme force de serrage initial, nous pouvons déterminer cette grandeur au moyen d'une des relations suivantes :

1. Vis normale : $$F_a = \frac{0,9\, R_{p0,2}\, A_S}{\sqrt{1+12\,(d_2/d_c)^2 \tan^2(\gamma+\rho_e)}}\,. \qquad (6.11.1)$$

2. Vis d'extension : $$F_a = \frac{0,9\, R_{p0,2}\, A_T}{\sqrt{1+12\,(d_2/d_T)^2 \tan^2(\gamma+\rho_e)}}\,. \qquad (6.11.2)$$

La force axiale $\vec{F}_a$ dépend donc de la géométrie de la vis, du coefficient de frottement et de la limite conventionnelle d'élasticité de l'acier.

6.4.4.2 CONTRÔLE AVEC FORCE AXIALE SUPPLÉMENTAIRE

L'augmentation de tension axiale dans la vis, due à l'application d'une force extérieure $\vec{F}_{ext}$ à direction axiale, ne peut se trouver qu'en résolvant un problème contenant deux inconnues, les variations de tension axiale dans la vis et dans les pièces serrées, alors qu'une seule équation d'équilibre est à disposition. Ce problème est donc hyperstatique et nécessite la recherche des déformations (voir le point 6.4.5).

Pour faciliter le contrôle d'assemblages très peu sollicités, Illgner et Blume ont proposé de limiter la charge extérieure à une valeur limite. Le calcul d'un assemblage s'effectue simplement en déterminant :

$$\text{Rapport : } F_a/F_{ext} \geq (F_a/F_{ext})_{table}$$

Le rapport limite se trouve sur la dernière ligne du tableau 6.4 des caractéristiques mécaniques des aciers pour visserie. Pour les vis de la classe 8.8 , le rapport limite vaut 4,4 et la charge extérieure admissible doit être inférieure ou égale à la force F_a divisée par 4,4. Le tableau 6.5 donne les valeurs des forces axiales et des couples de serrage pour un coefficient de frottement de 14 % entre la tête de la vis, la partie filetée de la vis et les pièces serrées.

6.4.5 RECHERCHE DES EFFORTS DANS L'ASSEMBLAGE À VIS

Considérons un assemblage à vis constitué par une seule vis et deux pièces serrées. Cet assemblage est sollicité extérieurement par deux forces extérieures $\vec{F}_{ext}$, directement opposées et centrées, appliquées au niveau des surfaces d'appui de la tête de la vis et de l'écrou.

6.4.5.1 CONDITIONS D'ÉQUILIBRE ET DE DÉFORMATION

Après serrage de la vis, la force axiale dans la vis est $\vec{F}_{a\ vis}$, cette force étant aussi la force appliquée sur les deux pièces serrées $\vec{F}_{a\ pièces}$. Après application de la force extérieure $\vec{F}_{ext}$, la vis subit une augmentation de tension axiale et l'équilibre axial des pièces serrées impose la somme (fig. 6.10) :

Tableau 6.4
Classe de qualité des vis : Caractéristiques mécaniques
Valeurs de résistance en N/mm2 à la température ambiante

Caractéristiques mécaniques		Classe de qualité							
		Classe 4		Classe 5		Classe 8.8		Classes 10,12	
		4.6	4.8	5.6	5.8	< M16	≥M16	10.9	12.9
Résistance à la traction R_m	nom	400	400	500	500	800	800	1000	1200
	max	400	420	500	520	800	830	1040	1220
Limite apparente d'élasticité R_{el}	nom	240	320	300	400				
	min	240	340	300	420				
Limite apparente d'élasticité $R_{p0,2}$	nom					640	640	900	1080
	min					640	650	940	1100
Allongement après rupture A5 en %	min	22	14	20	10	12	12	9	8
Dureté Vickers HV	min	120	130	155	160	230	255	310	372
	max	220	220	220	220	300	336	382	434
Résilience [J]	min			25		30	30	20	15
Rapport recommandé F_a/F_{ext}		2,7		3,0		4,4	4,4	4,5	4,7

Le symbole de la classe de qualité se compose de deux nombres :

- le premier nombre indique le centième de la résistance à la traction minimale, exprimée en N/mm^2,
- le second indique dix fois le rapport entre la limite apparente ou conventionnelle d'élasticité et la résistance minimale à la traction.

Les classes de qualité sont également valables pour les écrous. Elles sont désignées par un nombre correspondant au centième de la résistance à la traction R_m, exprimée en N/mm^2. Pour pouvoir transmettre correctement la charge axiale entre la vis et l'écrou, ce dernier doit être au moins de la même qualité que la vis ou d'une qualité directement supérieure. La hauteur de l'écrou doit être au moins égal ou supérieur à 0,8 fois le diamètre nominal de la vis, voir également la recommandation VDI 2230.

A partir du diamètre nominal M5 et la classe de qualité 8.8, les vis à tête hexagonale, à tête cylindrique à six pans creux et les goujons doivent porter, d'une manière durable, la marque distinctive de la classe de qualité. Les vis sont encore munies de la marque du fabricant. Les écrous doivent aussi porter la marque distinctive de qualité, à partir de la classe de qualité 8, et la marque du fabricant. Le filetage habituel est à droite. Les vis et écrous avec filetage à gauche doivent être marqués par la lettre L .

6.4.4 CONTRÔLE SIMPLIFIÉ D'UN ASSEMBLAGE À VIS

Le mécanisme avec vis de fixation peut être sollicité par des efforts extérieurs quelconques : forces axiale, forces tangentielles et couples ou une combinaison de ces efforts. Très souvent, les efforts appliqués sont très faibles et un contrôle au moyen des directives selon la recommandation VDI 2230 est bien superflu. Afin de faciliter le choix de la dimension des vis, nous donnons ici une méthode élémentaire de contrôle convenant dans la majorité des utilisations courantes des vis de serrage.

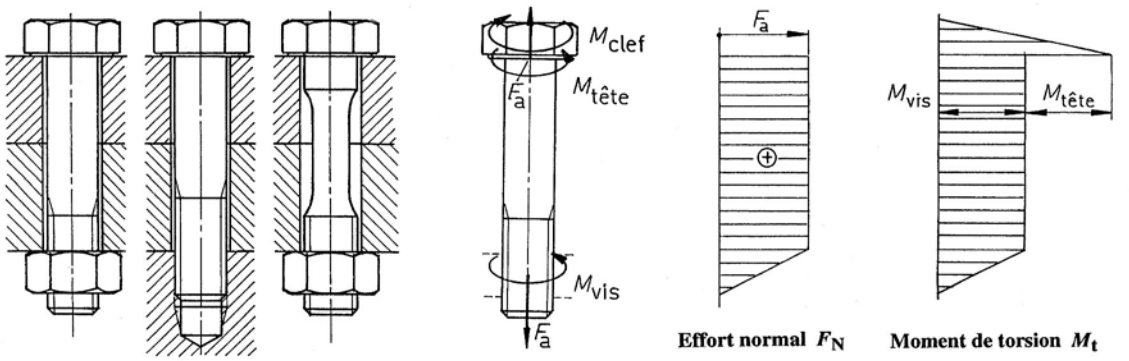


Figure 6.9 Contrôle des efforts et contraintes dans les vis d'assemblage
Types de vis : Vis avec écrou, vis dans un trou borgne, vis d'extension

Aire de la section résistante :
- vis normales : $A_S = \pi\, d_c^2/4 = \pi\,(d_2 + d_3)^2/16$,
- vis d'extension : $A_T = \pi\, d_c^2/4 = \pi\, d_T^2/4$.

Module de résistance à la torsion :
- vis normale : $W_p = \pi\, d_c^3/16$,
- vis d'extension : $W_p = \pi\, d_c^3/16 = \pi\, d_T^3/16$.

Les contraintes simples en traction et en torsion se déterminent par les relations fondamentales de la résistance des matériaux, soit :

1. Contrainte normale : $\sigma_n = F_a/A_S$ ou $\sigma_n = F_a/A_T$. (6.9.1)

2. Contrainte de torsion : $\tau_t = M_{vis}/W_p$. (6.9.2)

3.3 *Contrainte idéale ou de comparaison*

En appliquant l'hypothèse énergétique de distorsion, la contrainte idéale se calcule par l'expression générale :

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_n^2 + 3\,\tau_t^2}\ . \qquad (6.9.3)$$

Remplaçons les contraintes simples par leurs valeurs particulières contenant la force axiale $\vec{F}_a$, les conditions de frottement sur le filetage et les dimensions géométriques de la vis et de l'écrou. En mettant en évidence la contrainte normale simple, nous pouvons écrire :

1. Vis normale : $$\sigma_i = \frac{F_a}{A_S}\sqrt{1+12\,(d_2/d_c)^2\tan^2(\gamma+\rho_e)}, \qquad (6.10.1)$$

2. Vis d'extension : $$\sigma_i = \frac{F_a}{A_T}\sqrt{1+12\,(d_2/d_T)^2\tan^2(\gamma+\rho_e)}. \qquad (6.10.2)$$

Pour les vis normales et les coefficients de frottement usuels, la contrainte idéale vaut environ 1,2 à 1,3 fois la contrainte normale de traction.

6.4.3 CARACTÉRISTIQUES MÉCANIQUES DES ACIERS POUR VIS

Les vis en acier de classe de qualité courante pour les assemblages à vis sont utilisables dans des mécanismes travaillant dans un domaine de températures comprises entre -50°C et +300°C en milieu ambiant normal. Les conditions techniques de livraison pour les vis et les écrous sont normalisées sur le plan international par ISO , la norme suisse VSM 13190 et par la norme allemande DIN 898.

6.4.1.3 COUPLE DE SERRAGE SUR LA CLÉ

Le couple à produire sur l'outil de serrage est égal à la somme des deux couples précédents : couple dans le filetage, couple sous la tête de la vis. En admettant deux coefficients de frottement identiques de 14% et un angle de filet de 2,5°, 90% de ce couple moteur sert à vaincre les frottements, les 10% restants produisant la force axiale de serrage. Le couple sur l'outil vaut :

$$M_{clef} = M_{vis} + M_{tête} = [d_2/2 \cdot \tan(\gamma + \rho_e) + \mu_t (d_B + d_t)/4] F_a . \qquad (6.8.3)$$

Les coefficients de frottement de calcul sont donnés dans les deux tableaux 6.2 et 6.3 tirés de la recommandation VDI 2230.

6.4.2 EFFORTS ET CONTRAINTES DANS LA VIS

La vis est sollicitée simultanément par des couples et une force axiale pendant l'opération de serrage. Le contrôle des contraintes fait intervenir les opérations suivantes.

6.4.2.1 ÉQUILIBRE DE LA VIS

Equilibre de translation selon l'axe de la vis : F_a sur la tête = F_a dans le filetage,
Equilibre de rotation : couple de serrage = couple dans le filetage + couple sous la tête de vis.

6.4.2.2 EFFORTS DANS LA VIS

Effort normal : de la surface d'appui sous la tête à la partie filetée en prise avec l'écrou.
Couple de torsion : variation supposée linéaire sur la hauteur de la tête de la vis et dans la partie filetée, variation brusque sous la tête de la vis servant de butée (fig. 6.9).

6.4.2.3 CONTRÔLE DES CONTRAINTES

3.1 *Points de contrôle*

Pour les vis normales à tête hexagonale ou cylindrique à six pans creux :
dans la partie filetée de la vis,
Pour les vis d'extension, troisième modèle sur la figure 6.9, utilisées dans les assemblages sollicités par des charges dynamiques ou des efforts complémentaires:
dans la partie amincie.
D'après la norme DIN, le diamètre d_T de cette section vaut 90% du diamètre intérieur du filetage de la vis : $d_T = 0{,}9\ d_3$.

3.2 *Contraintes simples*

Les efforts dans la section de contrôle sont (voir figure 6.9) :
- effort axial : $F_N = F_a$,
- moment de torsion : $M_t = M_{vis}$.

La section de calcul est supposée circulaire pour les deux types de vis. Le diamètre de calcul d_c se trouve par :
- vis normales : $d_c = 0{,}5\ (d_2 + d_3)$,
- vis d'extension : $d_c = d_T$.

Tableau 6.3
RECOMMANDATION VDI 2230 / juillet 1986

Tableau des coefficients de frottement entre la tête de la vis ou l'écrou et les pièces serrées

Les valeurs données dans le tableau sont des moyennes obtenues dans la pratique industrielle

Etat de surface de la tête de la vis ou de l'écrou (acier)	Pièces (surfaces sèches)					
	Lisse rectifiée	Acier			Fontes : Ft/GTS	
		Lisse usinée	Galvan. Zn usinée	Galvan. Cd usinée	Lisse rectifiée	Lisse usinée
Pressée, sec Noir ou phosphaté	–	0,12 à 0,18	0,10 à 0,16	0,08 à 0,16	–	–
Pressée, huilée Noir ou phosphaté	0,16 à 0,22	0,10 à 0,18	0,10 à 0,16	0,08 à 0,16	0,10 à 0,18	0,14 à 0,20
Pressée, MoS2 Noir ou phosphaté	–	0,08 à 0,12	–	0,08 à 0,16	–	–
Tournée, huilée Noir ou phosphaté	0,10 à 0,18	0,10 à 0,18	0,10 à 0,16	0,08 à 0,16	–	0,10 à 0,18
Tournée, MoS2 Noir ou phosphaté	–	0,08 à 0,12	–	0,08 à 0,16	–	–
Rectifiée, huilée Noir ou phosphatée	0,16 à 0,22	–	0,10 à 0,18	0,08 à 0,16	0,10 à 0,18	0,14 à 0,22
Pressée, sec Galvanisé (Zn)	0,10 à 0,18	0,10 à 0,18	0,16 à 0,20	–	0,10 à 0,18	0,10 à 0,18
Pressée, huilée Galvanisé (Zn)	–	0,10 à 0,18	0,10 à 0,18	–	0,10 à 0,18	0,10 à 0,16
Pressée, sec Galvanisé (Cd)	0,08 à 0,16	0,08 à 0,16	–	0,12 à 0,20	0,08 à 0,16	0,08 à 0,16
Pressée, huilée Galvanisé (Cd)	–	0,08 à 0,14	–	0,12 à 0,14	–	–

6.4.1.2 COUPLE DE FROTTEMENT SOUS LA TÊTE DE LA VIS

La force axiale produite entre la partie filetée de la vis et le filetage intérieur de l'écrou doit être équilibrée par une poussée sous la tête de la vis (ou l'écrou). Désignons par :
- d_B le diamètre de perçage dans les pièces serrées,
- d_t le diamètre extérieur de contact de la tête de vis,
- μ_t le coefficient de frottement entre la tête de la vis et les pièces serrées.

Le diamètre moyen de contact entre ces pièces vaut : $d_{mt} = (d_B + d_t)/2$ et le couple de frottement sous la tête de la vis :

$$M_{tête} = \mu_t \, [(d_B + d_t)/4] \, F_a. \qquad (6.8.2)$$

selon recommandations ISO. Le couple de serrage, appliqué sur la tête de la vis, ou éventuellement sur l'écrou, sert à vaincre les frottements entre les diverses pièces et à produire la force axiale $\vec{F}_a$ de serrage.

Tableau 6.2
RECOMMANDATION VDI 2230 / juillet 1986

Tableau des coefficients de frottement entre la vis et la partie filetée constituée par l'écrou ou l'une des pièces serrées

Les valeurs données dans le tableau sont des moyennes obtenues dans la pratique industrielle

Filetage de la VIS (en acier)	Filetage dans l'écrou ou dans la pièce				
	Lisse	Acier Galvanisé Zn	Galvanisé Cd	Fonte Ft GTS fileté	Alliages Al Mg fileté
Roulé, sec Noir ou phosphaté	0,12 à 0,18	0,10 à 0,16	0,08 à 0,14	–	–
Roulé, huilé Noir ou phosphaté	0,10 à 0,16	–	–	0,10 à 0,18	0,08 à 0,20
Roulé, MoS2 Noir ou phosphaté	0,08 à 0,12	–	–	–	–
Taillé, huilé Noir ou phosphaté	0,10 à 0,16	–	–	0,10 à 0,18	–
Taillé, roulé, galvanisé Zn Sec	–	0,12 à 0,20	–	–	–
Taillé, roulé, galvanisé Zn Huilé	0,10 à 0,18	0,10 à 0,18	–	0,10 à 0,16	–
Taillé, roulé, galvanisé Cd Sec	–	–	0,12 à 0,16	–	–
Taillé, roulé, galvanisé Cd Huilé	0,08 à 0,14	–	0,12 à 0,14	0,08 à 0,16	–
Taillé ou roulé Collé	0,16 à 0,25	0,14 à 0,25	–	–	–

6.4.1.1 COUPLE ENTRE LA VIS ET L'ÉCROU

Les relations générales, démontrées précédemment, sont directement applicables au mécanisme à vis de fixation. Les caractéristiques mécaniques et géométriques intervenant dans le calcul sont :

1. angle du filet : $\tan\gamma = P/(\pi\, d_2)$,
2. angle de frottement : $\rho_e = \text{arc tan}(\mu/\cos\alpha_a)$,
   avec $\alpha_a = 30°$ pour le filetage métrique ISO,
3. couple entre la vis et l'écrou ou la pièce serrée filetée intérieurement :

$$M_{vis} = d_2/\,2 \cdot F_a \tan(\gamma + \rho_e), \qquad (6.8.1)$$

avec : F_a la force axiale de serrage dans la vis.

Section *b* :

Entre l'écrou et le volant à main :

- effort : seulement un couple de torsion : $M_t = 76{,}77$ m·N.
- contraintes : torsion : $\tau_t = 76\,770$ mm·N/2 236,5 mm^3 = 34,2 N/mm^2.

3.3 *Pression superficielle à l'extrémité sphérique*

Le contact entre l'extrémité sphérique de la vis et la soupape s'effectue sur une ligne de rayon R = 10 mm. La longueur de cette ligne fermée est : $l = 2\ \pi \cdot 10$ mm= 62,8 mm. Le calcul de la pression utilise la relation de Hertz pour le contact d'un cylindre sur un plan, les deux pièces étant en acier.

- Pression hertzienne : $p_{max} = 0{,}418\ [16\,560\ \text{N} \cdot 21 \cdot 10^4\ \text{N/mm}^2/(62{,}8\ \text{mm} \cdot 40\ \text{mm})$

$p_{max} = 491{,}8$ N/mm^2.

Cette pression superficielle selon Hertz est admissible.

3.4 *Contraintes dans le filetage de la vis*

Efforts appliqués au niveau du diamètre intérieur de la vis :

- distance : $c = 0{,}5\ (d_2 - d_3) = 0{,}5\ (25{,}2 - 22{,}5)\text{mm} = 1{,}5$ mm,
- effort tranchant : $F_T = 16\,070$ N,
- moment fléchissant : $M_f = 1{,}5$ mm · 16 070 N = 24 105 mm·N.

Caractéristiques de la section contrôlée :

- hauteur à l'encastrement : $h_1 = 0{,}5\ P + 2\ c \tan 15° = 0{,}5 \cdot 2{,}5$ mm + 2 · 1,5 mm · tan 15°

$h_1 = 3{,}3$ mm,

- aire cisaillée : $A = z_u\ h_1\ \pi\ d_3 = 7 \cdot 3{,}3$ mm · π · 22,5 mm = 1633 mm^2,
- module de résistance : $W_z = A\ h_1/6 = 1633$ mm^2 · 3,3 mm/6 = 898,2 mm^3.

Contraintes :

- cisaillement maximal : $t_{c\,max} = 1{,}5\ F_a/A = 1{,}5 \cdot 16\,070$ N/1633 mm^2 = 14,8 N/mm^2,
- flexion : $\sigma_f = M_f/W_z = 24\ 10^5$ mm·N/898,2 mm^3 = 26,8 N/mm^2.

Remarque finale :

Toutes ces contraintes sont admissibles dans le filetage de la vis.

6.4 GÉNÉRALITÉS SUR LES VIS DE SERRAGE

Une enquête réalisée dans l'industrie de la RFA a démontré que plus de 60% des assemblages utilisés en construction de machines sont constitués par des mécanismes à vis de serrage. Les vis servent le plus souvent à fixer des pièces peu chargées. Les efforts dans l'assemblage proviennent essentiellement du serrage initial des vis. Les vis et écrous, fabriqués selon les normes, suffisent alors pleinement. Dans certaines applications, les assemblages sont soumis à des sollicitations statiques très élevées ou à des charges dynamiques très importantes. La recherche de la répartition des charges dans le mécanisme à vis et dans les pièces serrées doit faire l'objet d'une étude détaillée et minutieuse. Depuis la parution de la recommandation VDI 2230 en 1977 et de l'édition améliorée en 1986, feuille 1 : "Calcul systématique des assemblages à vis hautement sollicités", la méthode de contrôle s'est cristallisée autour d'une certain nombre d'opérations de calcul et de contrôle. Dans ce sous-chapitre 6.4, nous traiterons le comportement général de l'assemblage à vis de serrage. La présentation de la recommandation VDI s'effectuera dans le sous-chapitre 6.5 .

6.4.1 COUPLES SUR LA VIS ET L'ÉCROU

Les vis de serrage sont pourvues de filetage métrique ou éventuellement Whitworth dans les pays anglo-saxons. Dans ce sous-chapitre, nous admettons un profil de filetage métrique

2.2 *Couple de torsion*

Le couple de frottement sur la tête de la vis est engendré par le déplacement de la vis en rotation alors que la soupape s'applique sur le siège du corps de soupape. Il se trouve facilement au moment final du serrage par :

$$M_{butée} = R\ \mu\ F_n = 10\ mm \cdot 0{,}15 \cdot 16\,560\ N = 24\,840\ mm{\cdot}N.$$

La composante tangentielle de la force de frottement entre la vis et le presse-étoupe, perpendiculaire à l'axe de la vis, produit un couple. Le couple correspondant se trouve par :

$$M_{pe} = d_t/2\ \pi\ d_t\ l_{pe}\ p\ \mu \cos\alpha = 14\ mm\ \pi\ 28\ mm \cdot 60\ mm \cdot 3\ N/mm^2 \cdot 0{,}08 \cdot \cos 3{,}25° =$$

$$M_{pe} = 17\,710\ mm{\cdot}N.$$

Le couple à produire pour déplacer la vis dans l'écrou se trouve par la relation générale des vis :

- Angle du filet : $\tan\gamma = P/(\pi\ d_2) = 5\ mm/(\pi \cdot 25{,}5\ mm)$ d'où $\gamma = 3{,}57°$.
- Angle de frottement équivalent : $\tan\rho_e = \mu/\cos 15° = 0{,}10/\cos 15°$ d'où $\rho_e = 5{,}91°$.
- Somme des angles : $\gamma + \rho_e = 3{,}57° + 5{,}91° = 9{,}48°$.
- Tangente de la somme des angles : $\tan(\gamma + \rho_e) = 0{,}167$.
- Couple entre la vis et l'écrou :

$$M_v = 0{,}5\ d_2\ F_a \tan(\gamma + \rho_e) = 12{,}75\ mm \cdot 16\,070\ N \cdot 0{,}167 = 34\,220\ mm{\cdot}N.$$

Le couple moteur à produire sur le volant est donné par l'équilibre de la vis :

$$\Sigma\ M_z = 0 : \quad M_{mot} = M_{butée} + M_{pe} + M_v = 24{,}84\ m{\cdot}N + 17{,}71\ m{\cdot}N + 34{,}22\ m{\cdot}N =$$

$$M_{mot} = 76{,}77\ m{\cdot}N.$$

2.3. *Rendement mécanique*

Le rendement total du mécanisme peut se calculer en supposant une rotation d'un tour de la vis. Le travail utile produit à l'extrémité inférieure de la vis vaut :

$$W_u = 16\,000\ N \cdot 5\ mm = 80\ J.$$

Le travail absorbé pour un tour se calcule par :

$$Wa = 76{,}77\ m{\cdot}N\ \ 2\ \pi\ (rad) = 482\ J.$$

Rendement global : $\eta_{tot} = W_u/W_a = 80\ J/\ 482\ J = 0{,}166$ ou 16,6 %.

3. Contrôles du mécanisme

3.1 *Pression entre la vis et l'écrou*

- Nombre de filets porteurs : $z_u = 40\ mm/5\ mm - 1 = 7$ filets porteurs,
- Projection de la largeur réelle de contact : $a_p = 0{,}5\ (28 - 23)mm = 2{,}5\ mm$,
- Pression moyenne : $p = F_a / (z_u\ \pi\ a_p\ d_2) = 16\,070\ N/(7\ \pi\ 2{,}5 \cdot 25{,}5\ mm^2)$

  $p = 11{,}5\ N/mm^2$.

Cette pression est acceptable selon tableau 6.1. De plus, cette pression est atteinte seulement en fin de mouvement lors du serrage final.

3.2 *Contraintes dans le noyau de la vis*

Section *a* :

Entre le presse-étoupe et l'écrou :

- effort normal : $F_N = 16\,070\ N$,
- couple de torsion : $M_t = 42{,}55\ m{\cdot}N$,
- aire de la section : $A_3 = \pi\ d_3^2/4 = \pi\ 22{,}52\ mm^2/4 = 397{,}6\ mm^2$,
- module de résistance : $W_{p3} = \pi\ d_3^3/16 = \pi\ 22{,}53\ mm^3/16 = 2236{,}5\ mm^3$.
- contraintes : normale : $\sigma_n = -\ 16\,070\ N/397{,}6\ mm^2 = -\ 40{,}4\ N/mm^2$,

  torsion : $\tau_t = 42\,550\ mm{\cdot}N/2236{,}5\ mm^3 = 19{,}0\ N/mm^2$,
- contrainte idéale : $\sigma_i = [40{,}4^2 + 3 \cdot 19{,}0^2]^{0{,}5}\ N/mm^2 = 52{,}1\ N/mm^2$.

- diamètre intérieur de l'écrou $D_1 = 23$ mm,
- jeu radial $c = 0{,}25$ mm,
- pas $P = 5$ mm,
- longueur de l'écrou $l = 40$ mm.

Coefficient de frottement entre la vis en acier et l'écrou en bronze, les surfaces hélicoïdales étant graissées : $\mu = 0{,}10$. Coefficient de frottement à l'extrémité de la vis et sur le siège de la soupape : $\mu = 0{,}15$. Coefficient de frottement entre la vis et la garniture du presse-étoupe : $\mu = 0{,}08$.

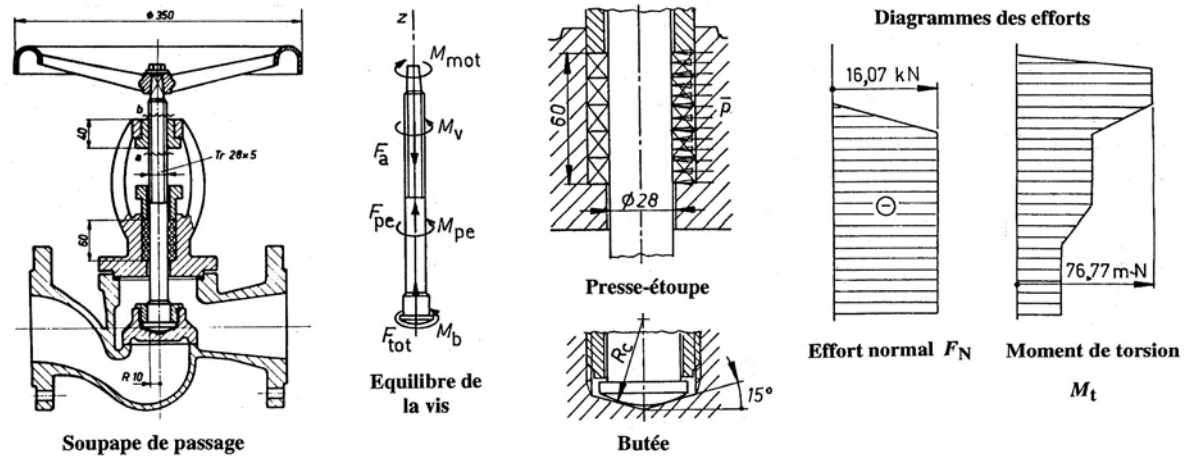


Figure 6.8 Soupape pour fluide DN 80 , équilibre et efforts dans la vis

2. Equilibre de la vis

Pendant l'opération de fermeture de la soupape, la vis est soumise à l'action de forces axiales et de couples de torsion.

2.1 *Forces axiales*

- sur la butée à l'extrémité inférieure de la vis : F_n répartie sur un rayon $R = 10$ mm,
- dans le presse-étoupe comme composante axiale de la force de frottement totale : $F_a\, p_e$,
- dans le contact entre la vis et l'écrou : F_a.

La butée est constituée d'une calotte sphérique convexe au rayon $R = 40$ mm en contact avec un appui conique creux à 150° d'angle total au sommet. Le rayon de calcul de la butée est $R = 10$ mm. La poussée axiale totale étant 16 kN , la force normale totale sur la butée se trouve par :

$$F_n = F_{tot}/\cos 15° = 16\,000 \text{ N} / \cos 15° = 16\,560 \text{ N}.$$

La pression dans la garniture du presse-étoupe est supposée répartie uniformément sur toute la longueur, cette pression valant $p = 30$ bar $= 3$ N/mm^2. La longueur de contact est 60 mm, le diamètre de la tige 28 mm. Le mouvement d'un point frottant sur la tige est hélicoïdal. L'angle de l'hélice du mouvement d'un point se trouve par :

$$\tan\alpha = P/(\pi\, d_t) = 5 \text{ mm}/(\pi\, 28 \text{ mm}) \text{ d'où } \alpha = 3{,}25° .$$

La composante axiale de frottement se calcule par :

$$F_{a\,pe} = \pi\, d_t\, l_{pe}\, p\, \mu \sin\alpha = \pi\, 28 \text{ mm} \cdot 60 \text{ mm} \cdot 3 \text{ N/mm}^2 \cdot 0{,}08 \cdot \sin 3{,}25° = 72 \text{ N}.$$

La force axiale dans l'écrou se trouve à partir de l'équilibre de translation de la vis :

$$\Sigma F_{zi} = 0 : \qquad F_a = F_{tot} + F_{a\,pe} = 16\,000 \text{ N} + 70 \text{ N} = 16\,070 \text{ N}.$$

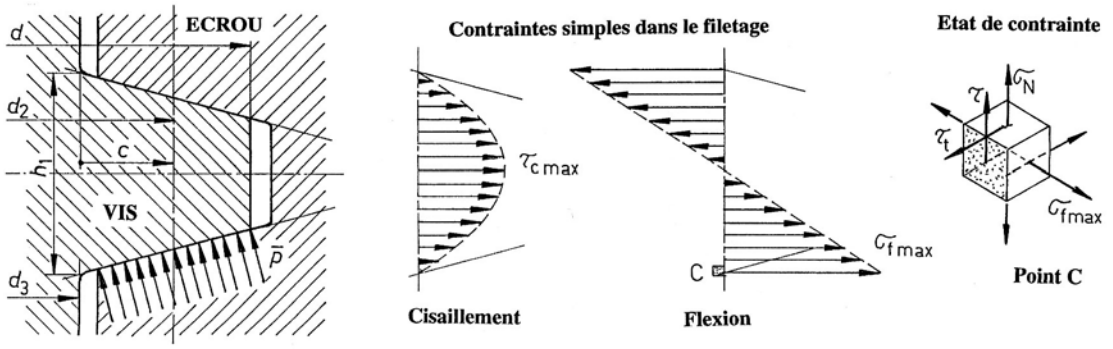


Figure 6.7 Répartition des contraintes dans le filetage trapézoïdal de la vis

2. Contraintes simples

Contrainte de cisaillement : $\tau_{c\,max} = 3\,F_a / (2\,z_u\,h_1\,\pi\,d_3)$, (6.7.1)

Contrainte de flexion : $\sigma_f = 6\,c\,F_a / (z_u\,h_1^2\,\pi\,d_3)$. (6.7.2)

La contrainte de cisaillement moyenne est corrigée par le facteur 3/2 applicable aux sections rectangulaires, la contrainte maximale se situant au milieu de la hauteur h_1. La contrainte de flexion est valable au bas ou au haut de l'encastrement du profil. Il n'est donc pas nécessaire de contrôler la contrainte idéale puisque ces deux contraintes sont déterminées en des points différents.

Le contrôle du coefficient de sécurité au fond du profil de la vis devrait tenir compte de la charge totale sur cette partie, en particulier sur le premier filet porteur de la vis. Les contraintes au point C, figure 6.7, sont :

- contrainte normale dans le noyau de la vis,
- contrainte de torsion engendrée par le couple moteur,
- contrainte de flexion dans le profil.

Remarques

Les choix des dimensions d'une vis de mouvement est très souvent imposé par la valeur de la pression superficielle admissible. Il est donc recommandé de commencer la vérification du mécanisme par le calcul de cette grandeur. Le calcul exact des contraintes et du coefficient de sécurité dans la section la plus sollicitée de la vis devrait tenir compte non seulement de la charge réelle, mais aussi de l'effet de la forme et de la combinaison des contraintes composantes simples.

6.3.5 EXEMPLE DE CONTRÔLE D'UNE VIS DE SOUPAPE

Dans une soupape pour fluide, diamètre nominal de passage 80 mm, la vis de commande est équipée d'un filetage trapézoïdal Tr 28 x 5 , la poussée axiale à l'extrémité inférieure étant 16 000 N pendant l'opération de fermeture de la soupape. Contrôlez les conditions de transmission des efforts, la pression dans le mécanisme vis - écrou, les contraintes dans les pièces.

1. Caractéristiques du filetage Tr 28 x 5

Selon les normes en vigueur, les dimensions principales du filetage trapézoïdal sont les suivantes :

- diamètre nominal $d = 28$ mm,
- diamètre sur flancs $d_2 = D_2 = 25{,}5$ mm,
- diamètre intérieur de la vis $d_3 = 22{,}5$ mm,

3.1 Caractéristiques de la section résistante :

Aire de la section : $A_3 = \pi\, d_3^2/4$,

Module de résistance à la torsion : $W_{p3} = \pi\, d_3^3/16$.

3.2 Contraintes nominales :

Contrainte normale : $\sigma_n = F_{N\,max}/A_3$, (6.6.1)

Contrainte de torsion : $\tau_t = M_{t\,max}/W_{p3}$. (6.6.2)

3.3 Contrainte idéale :

La contrainte idéale ou dite de comparaison sera trouvée par l'hypothèse énergétique de distorsion ou hypothèse de von Mises, sans coefficient de correction, par la relation fondamentale :

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_n^2 + 3\,\tau^2}\ .$$

3.4 Valeurs admissibles :

Comme le coefficient de forme est relativement élevé, égal à 2 à 6 selon la forme du profil et les arrondis de raccordement, les valeurs admissibles restent modestes dans un calcul élémentaire. La contrainte idéale ne devra pas dépasser 60 à 80 N/mm^2 pour l'acier de nuance Ac 37-2, 80 à 100 N/mm^2 pour l'acier Ac 50-2.

3.5 Sollicitations dynamiques :

Le coefficient d'effet d'entaille varie avec la nuance d'acier ou de matière utilisée, la forme du profil et sa fabrication, l'allure de la charge en fonction du temps. Le coefficient de sécurité, calculé selon la méthode proposée au chapitre 3, sera au moins 1,8 à 2,0.

3.6 Stabilité de la vis :

Pour les vis soumises à la compression, il est nécessaire de contrôler la stabilité de la pièce au flambement. La substitution d'une pièce à section constante à la place de la pièce réelle est une approche très approximative de la solution. Le coefficient de sécurité au flambement sera :

3 à 6 dans le domaine élastique,

1,5 à 4 dans le domaine élasto-plastique.

6.3.4 CONTRAINTES DANS LE FILETAGE

Les contraintes dans le profil de la vis et/ou l'écrou seront contrôlées seulement dans les assemblages fortement sollicités. Le modèle de calcul est une poutre encastrée d'un côté, libre à l'autre, sollicitée par une charge supposée répartie uniformément puisque nous avons admis une pression constante entre vis et écrou. L'effet du raidissement du profil hélicoïdal et les concentrations de contraintes dues à la forme des pièces sont négligées. Le profil de la vis travaille comme une poutre encastrée, longueur a_1, hauteur à l'encastrement dans la section cylindrique du noyau h_1, largeur $z_u\,\pi\,d_3$, sollicitée par une charge répartie uniformément.

1. Efforts dans la section *m* de contrôle

Effort tranchant : $F_T = F_a$,

Moment fléchissant : $M_f = c\,F_a$.

par exemple dans les éléments de serrage, la pression admissible peut être doublée à condition d'utiliser des aciers de bonne qualité et des surfaces polies. Au repos, la pression moyenne admissible peut être même triplée.

Tableau 6.1
Coefficients de frottement et pressions admissibles dans les vis de mouvement

Matières en contact	Coefficients de frottement d'adhérence μ_0 sec	d'adhérence μ_0 lubrifié	de glissement μ lubrifié
Acier sur acier	0,20 à 0,30	0,12 à 0,20	0,10 à 0,18
Acier sur fonte grise	0,20	0,10 à 0,20	0,08 à 0,16
Acier sur bronze	0,20	0,12 à 0,20	0,08 à 0,16
	Pressions admissibles		
Acier sur fonte grise	$p \leq 2$ à 6 N/mm^2		
Acier sur bronze	$p \leq 5$ à 12 N/mm^2		
Acier durci sur bronze	$p \leq 10$ à 15 N/mm^2		
Machines-outils	dépend de la vitesse de glissement		
Acier sur bronze	$p \leq 0,5$ à 2,0 N/mm^2		
Les pressions admissibles sont valables pour des vitesses de glissement jusqu'à 2 m/s			

Les coefficients de frottement de calcul entre la vis et l'écrou, les pressions admissibles en déplacement sont donnés dans le tableau 6.1. La recherche de l'équilibre de la vis s'effectue soit à partir de la position de repos, soit en mouvement "à la montée" et / ou "à la descente" de la charge. Dans la relation générale, le sens positif est celui de la montée de la charge dans l'écrou. Le rendement mécanique total est presque toujours très faible, environ 10 à 15 %, ce qui limite l'emploi des mécanismes à vis aux entraînements à faible vitesse ou à mouvements intermittents.

6.3.3 CONTRÔLE DU NOYAU DE LA VIS

Après la recherche de l'équilibre de la vis, le contrôle des contraintes dans la vis s'effectue à partir de l'observation de la variation des efforts dans la vis et des sections faibles ou de raccordement. Les points à traiter successivement sont :

1. *Construction des diagrammes des efforts* :

   Effort normal F_N,
   Effort tranchant F_T avec éventuellement deux diagrammes partiels,
   Moment fléchissant M_f avec éventuellement deux diagrammes partiels,
   Moment de torsion M_t.

2. *Recherche des sections dangereuses à contrôler* :

   Observation des sections les plus petites ou les points de raccordement entre partie filetée et partie cylindrique, appuis et épaulements.

3. *Contrôle des contraintes dans ces sections* :

   Montrons, dans le cas le plus simple de sollicitation, en présence seulement d'un effort normal et d'un moment de torsion, les relations de calcul pour le noyau de la vis :

parties déformables à élasticité linéaire. Un calcul par la méthode des éléments finis apporte la même constatation. L'amélioration du mode de transmission entre la vis et l'écrou de traction peut se réaliser en prévoyant un écrou à forme extérieure tronconique, l'épaisseur inférieure étant très faible.

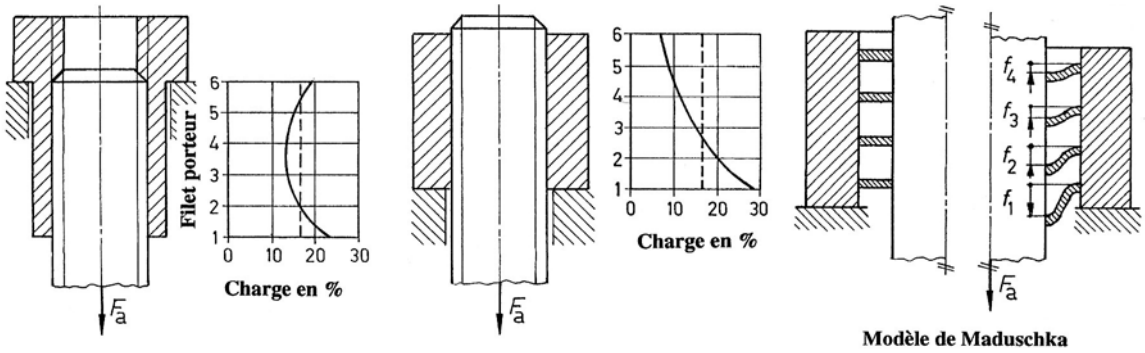


Figure 6.6 Répartition de la pression sur les filets porteurs

6.3 MÉCANISMES À VIS DE MOUVEMENT

Les mécanismes à vis de mouvement sont utilisés dans tous les domaines de la construction de machines comme par exemple dans les machines-outils, les vérins mécaniques, les engins de levage, la commandes des organes pour fluides, les presses manuelles, les dispositifs de serrage, etc. Le profil de filetage le plus couramment utilisé est le profil trapézoïdal ou dans des cas particuliers, les profils en dents de scie ou éventuellement rectangulaire.

6.3.1 COUPLES SUR LE MÉCANISME À VIS

La transmission de la force axiale $\vec{F}_a$ sur le mécanisme à vis s'effectue habituellement par l'intermédiaire d'au moins une butée. En supposant même force axiale, un coefficient de frottement μ_b entre la vis et la butée sur un diamètre moyen de contact d_{bm}, le moment du couple de frottement sur la butée se trouve par :

$$M_b = d_{bm}/2 \cdot \mu_b F_a.$$

Le couple moteur sur la mécanisme sert à vaincre les frottements dans l'écrou, dans la butée et sur les divers appuis, à déplacer la charge axiale $\vec{F}_a$ dans l'écrou. Il se trouve par :

$$M_{mot} = d_2/2\, F_a \tan(\gamma + \rho) + \Sigma M_a. \qquad (6.5)$$

Dans cette expression, ΣM_a représente toutes les pertes de couples dans les appuis et les guidages. La recherche précise de l'équilibre de la vis permet de trouver exactement les efforts appliqués sur la vis.

6.3.2 PRESSION ENTRE LA VIS ET L'ÉCROU

Comme la répartition de la pression superficielle entre les surfaces hélicoïdales de la vis et de l'écrou est loin d'être uniforme, la longueur portante de l'écrou est limitée à 1,5 fois le diamètre nominal de la vis. En effet, le premier filet porteur de l'écrou supporte jusqu'à 30 % de la charge axiale $\vec{F}_a$. Si la charge axiale est supportée seulement en fin de course, comme

En admettant une pression répartie uniformément sur toute la surface de calcul, le même coefficient de frottement μ, la force normale totale, somme algébrique de toutes les composantes normales élémentaires, peut s'exprimer en fonction de la charge axiale sur la vis $\vec{F}_a$ et de la géométrie du mécanisme par :

$$F_n = F_a \cos\rho / \cos(\gamma + \rho)$$

dans le cas de la montée de la charge dans l'écrou. La pression moyenne serait calculable par le rapport :

$$\bar{p} = F_n/A = F_a / (z_u \pi a d_m) \cdot \cos\gamma \cos\rho / \cos(\gamma + \rho) .$$

En développant $\cos(\gamma + \rho) = \cos\gamma \cos\rho - \sin\gamma \sin\rho$, le produit $\sin\gamma \sin\rho$ devient très faible pour les vis usuelles. La pression moyenne peut se trouver simplement par :

$$\bar{p} = F_a / (z_u \pi a d_m). \qquad (6.4.1)$$

Dans cette expression, le produit $z_u \pi a d_m$ représente la surface d'appui projetée sur un plan perpendiculaire à l'axe de la vis. L'erreur commise par la simplification est sans autre acceptable et toujours moins importante que l'hypothèses de la répartition uniforme de la pression.

2. *Pression dans le filetage à profils triangulaires*

Le contrôle de la pression moyenne p entre les filetages de la vis et de l'écrou à profils triangulaires, trapézoïdal ou en dents de scie, s'effectue également à partir de la surface projetée perpendiculairement à l'axe de la vis :

$$\bar{p} = F_a / (z_u \pi a_p d_2), \qquad (6.4.2)$$

avec :

a_p projection de la largeur réelle de contact.

Pour les filetages représentés sur les figures 6.1 et 6.2, cette dimension se trouve par :

- filetage trapézoïdal $a_p = (d - D_1)/2$,
- filetage en dents de scie $a_p = (d - D_1)/2$,
- filetage métrique ISO $a_p = (d - D_1)/2$.

3. *Répartition réelle de la pression*

L'assemblage à vis et écrou présente quelques particularités qu'il faut retenir lors de son utilisation dans les assemblages fortement sollicités. La répartition de la pression et la transmission de l'effort axial entre les deux constituants sera d'autant plus uniforme que les déformations axiales des deux pièces seront de même grandeur et de même sens. Si la vis est en traction, ce qui est habituellement le cas, l'écrou devrait aussi travailler dans le même sens sous l'effet d'une force de traction. Cette constatation est l'une des règles fondamentales à suivre en conception de machine, mais parfois difficilement réalisable.

La figure 6.6 montre la répartition de la charge dans les filets porteurs de deux assemblages à vis et écrou. La figure de gauche montre la solution classique de l'assemblage avec vis en traction et écrou en compression. La charge sur le premier filet porteur vaut 30% de la charge totale, soit pratiquement deux fois plus que la moyenne. La seconde figure montre un assemblage avec écrou dit de traction. La répartition de la charge est déjà nettement meilleure. Ces résultats ont été trouvés au moyen d'un modèle de calcul dû à Maduschka. Ce modèle de substitution se compose d'une vis en traction, constitué par un barreau cylindrique déformable, un écrou composé par un corps annulaire déformable, les deux pièces étant reliées par des disques encastrés sur le barreau et dans l'anneau, ces disques devant simuler la déformation des filetages de la vis et de l'écrou. L'ensemble se compose de

$$\rho_e = \text{arc tan } (\mu/\cos\alpha_a) .$$

L'équilibre de l'élément de vis dans l'écrou, avec filetage à profil triangulaire, est alors semblable à celui du profil rectangulaire. La condition d'équilibre statique s'exprime par la somme des forces élémentaires :

$$d\vec{F}_a + d\vec{F}_{B'} + d\vec{F}_h = 0,$$

avec :

$$dF_h = dF_a \tan(\gamma + \rho_e).$$

Il suffit de remplacer l'angle de frottement réel par l'angle de frottement équivalent ρ_e dans les relations. Le moment élémentaire produit par la force horizontale $d\vec{F}_h$ se trouve donc par :

$$dM = r_m \, dF_a \tan(\gamma + \rho_e),$$

et le couple total de torsion sur la vis par :

$$M = r_m F_a \tan(\gamma + \rho_e). \qquad (6.3)$$

Pour trouver le couple de torsion à produire sur la vis à profil triangulaire, il suffit d'imaginer un profil rectangulaire, de même angle de filet, défini au diamètre sur flancs d_2, à coefficient de frottement : $\mu_e = \mu / \cos\alpha_a$, α_a étant l'angle d'inclinaison du profil sur le rayon. Lorsque l'angle α_a est très faible comme dans les profils trapézoïdal ou en dents de scie, l'augmentation du frottement par rapport au profil rectangulaire reste très modeste. Par contre, pour les vis à profils triangulaires, la variation du couple n'est pas négligeable ce qui diminue encore le rendement mécanique du couple vis - écrou. L'irréversibilité de l'ensemble n'est pas meilleure, car le glissement entre les surfaces hélicoïdales intérieure et extérieure s'effectue suivant la ligne de plus grande pente, c'est-à-dire presque dans la direction radiale.

6.2.3 PRESSION MOYENNE ENTRE LA VIS ET L'ÉCROU

La détermination de la pression moyenne fait intervenir la première hypothèse : une pression répartie uniformément entre les surfaces hélicoïdales de la vis et de l'écrou. Pour tenir compte des conditions réelles de fabrication, en particulier pour les filetages des vis de mouvement, le nombre de filets porteurs de calcul z_u dans l'écrou est égal à :

$$z_u = b/P - 1,$$

b étant la longueur de l'écrou et P le pas.

La longueur d'appui du filetage de la vis dans l'écrou est égale à la longueur développée de l'hélice moyenne de diamètre d_m ou d_2 , soit :

$$l = z_u \, \pi \, d_m/\cos\gamma .$$

La répartition exacte de la pression entre les surfaces hélicoïdales de la vis et de l'écrou est un des nombreux problèmes non résolu actuellement. Plusieurs propositions ou hypothèses ont été avancées, mais aucune n'est capable d'exprimer correctement les conditions réelles de contact. C'est la raison pour laquelle le contrôle de la pression se borne à trouver la pression moyenne, valeur qui ne doit pas dépasser la pression admissible confirmée dans la pratique industrielle.

1. *Pression dans le filetage à profil rectangulaire*

Si a est la largeur radiale de contact entre les deux surfaces hélicoïdales, la surface de calcul vaut :

$$A = z_u \, \pi \, a \, d_m/\cos\gamma.$$