SOMMAIRE

CHAPITRE I - COURS

La théorie des torseurs a acquis une grande importance en mécanique par la grande clarté qu'elle procure dans des problèmes classiques. Elle permet de modéliser de manière remarquable aussi bien les actions mécaniques appliquées à un système que l'état des vitesses d'un solide (*). Historiquement cette théorie est née de cette profonde analogie (théorie de la vis de Ball). Elle donne une expression très concise des théorèmes généraux à caractère vectoriel en dynamique. Par ailleurs la mécanique analytique n'échappe pas au domaine de ses applications : la puissance virtuelle développée par les actions appliquées à un solide s'exprime systématiquement en connaissant le torseur des actions mécaniques et celui des vitesses virtuelles.

Cette importance justifie l'étude systématique qui est faite en préambule au cours de mécanique générale.

(*) La couverture représente la formulation du torseur aérodynamique et du torseur des vitesses pour un véhicule automobile.

I.I DIFFERENTS TYPES DE VECTEURS - ASPECT PHYSIQUE

Suivant la nature des grandeurs physiques qui peuvent être représentées par des vecteurs, ceux-ci peuvent être divisés en trois catégories :

- vecteurs libres
- vecteurs glissants
- vecteurs liés

1.1.1 Vecteur libre :

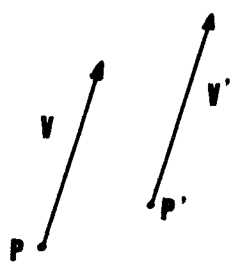


Fig 1.1

Supposons qu'une grandeur physique puisse être représentée par un vecteur lié, mais que tout vecteur lié équipollent représente la même grandeur; On dit alors que cette grandeur est représentable mathématiquement par un vecteur libre.

Exemple : en mécanique nous verrons qu'un système de force de somme nulle, encore appelé ***couple***, est un vecteur libre.

Remarque : on dit que les vecteurs ne sont pas localisés.

1.1.2 Vecteurs glissants :

Supposons qu'une grandeur physique puisse se représenter par un vecteur lié, mais qu'en outre tout vecteur lié ayant même support représente la même grandeur. On dit que cette grandeur est représentable mathématiquement par un vecteur glissant.

Exemple : En mécanique du solide *indéformable*, les forces sont mathématiquement des vecteurs glissants. Sur la Fig 2, l'équilibre du cadre est le même que la force F soit appliquée en A ou en B à condition de supposer le cadre rigide.

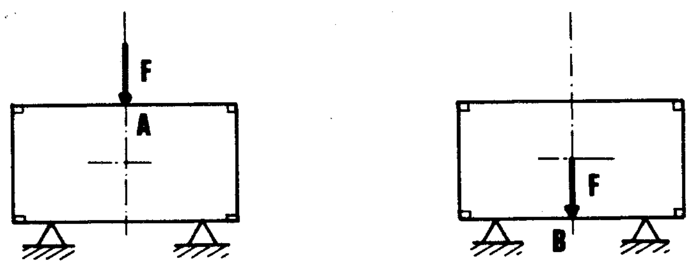


Fig 1.2

Remarque : on dit encore que chacun des vecteurs considéré représentatif de cette grandeur est localisé sur une droite.

1.1.3 Vecteurs liés

Supposons qu'une grandeur soit représentable mathématiquement par un vecteur lié mais que tout autre vecteur lié représente une grandeur différente. On dit que cette grandeur physique est représentable mathématiquement par un vecteur lié.

Exemple : forces appliquées à un solide *déformable*. Suivant que le point d'application se trouve en A ou en B, la déformation du cadre est différente.

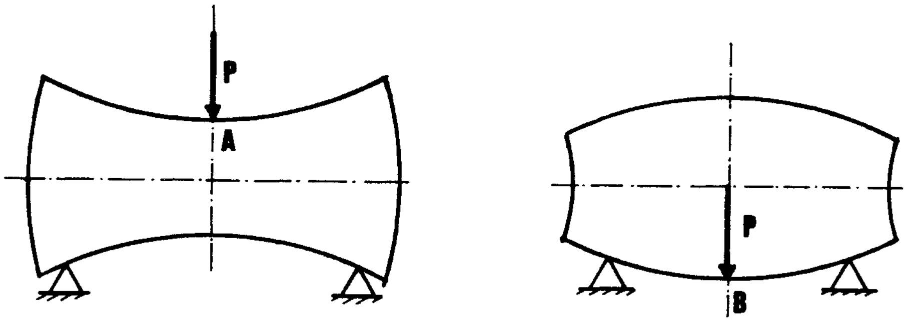


Fig 1.3

1.1.4 Remarque

a/ le nombre de paramètres nécessaires à la représentation de ces trois types de vecteurs est différent.

La description :

- d'un vecteur lié	nécessite	6 scalaires
- d'un vecteur glissant	"	5 scalaires
- d'un vecteur libre	"	3 scalaires

b/ en général, il est convenu de noter

- un vecteur lié : $[\overrightarrow{AB}]$
- un vecteur glissant : $(\overrightarrow{AB})$
- un vecteur libre : $\overrightarrow{AB}$

I.2 DEFINITION D'UN GLISSEUR

Soit $[\overrightarrow{AB}]$ un vecteur lié. Sur la droite (D) support de $[\overrightarrow{AB}]$ on peut définir un ensemble de vecteurs liés équipollents à $[\overrightarrow{AB}]$. (Voir Fig 4). C'est ce qu'on appelle un *glisseur*

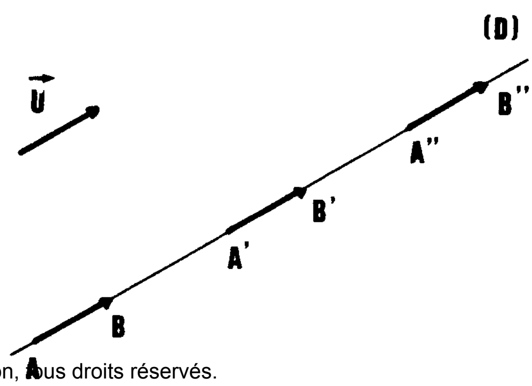


Fig 1.4

Si $[\overrightarrow{AB}]$ est un représentant d'un glisseur, on désigne le vecteur glissant par $(\overrightarrow{AB})$. On pourra ainsi dire que ce vecteur glissant est constitué par l'association d'une droite (D) et d'un vecteur libre $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$. On peut noter

$$(\overrightarrow{AB}) = \{(D), \overrightarrow{AB}\}$$

Remarque : Il est clair que, de par sa définition, le glisseur est une abstraction.

I.3 MOMENT D'UN GLISSEUR EN UN POINT

1.3.1 Définition :

On appelle *moment en O* d'un glisseur $(\overrightarrow{AB})$ le vecteur lié $[\overrightarrow{OG}]$ d'origine O et représentant le produit vectoriel $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}} \qquad (1.1)$$

On note aussi

$$\boxed{\vec{M}(O) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}} \qquad (1.2)$$

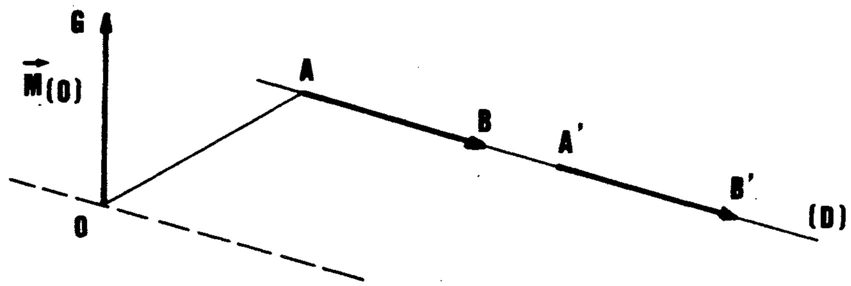


Fig 1.5

1.3.2 Remarques :

a/ le choix d'un vecteur lié pour la définition du moment témoigne du souci de particulariser le point de calcul. Ce choix à priori arbitraire s'éclairera par la suite.

b/ de la définition (1.2) il vient immédiatement

$$\vec{M}(O) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \qquad (1.3)$$

1.3.3 Théorème :

Le moment en un point d'un glisseur est indépendant du représentant $[\overrightarrow{AB}]$ *adopté pour caractériser ce glisseur.*

Soit $[\overrightarrow{A'B'}]$ un autre représentant du glisseur (Fig 5)

$$\vec{M}_{(0)} = \overrightarrow{OA'} \wedge \overrightarrow{A'B'} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'}) \wedge \overrightarrow{A'B'}$$
$$= \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{AA'} \wedge \overrightarrow{A'B'}$$

Mais $\overrightarrow{AA'} \wedge \overrightarrow{A'B'} = 0$. ($\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ colinéaires)

De plus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ (définition du glisseur)

Il vient donc :

$$\vec{M}_{(0)} = \overrightarrow{OA'} \wedge \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad (1.4)$$

1.3.4 Remarques

a/ Par ce théorème, on voit que le moment en un point est bien une propriété caractéristique d'un glisseur ; on peut prendre n'importe quel point A sur (D) pour calculer le moment.

b/ On aurait naturellement pu définir le moment d'un vecteur lié. D'ailleurs pour définir le vecteur moment d'un glisseur nous en avons pris un représentant qui est un vecteur lié. Cependant si on avait fait cette définition on aurait pu énoncer immédiatement le théorème suivant :

Tous les vecteurs liés équipollents et ayant même support ont même moment en un point.

1.3.5. Coordonnées du moment d'un glisseur

Soit un repère orthonormé direct R et un point P de ce repère. Considérons un glisseur $(\overrightarrow{AB})$

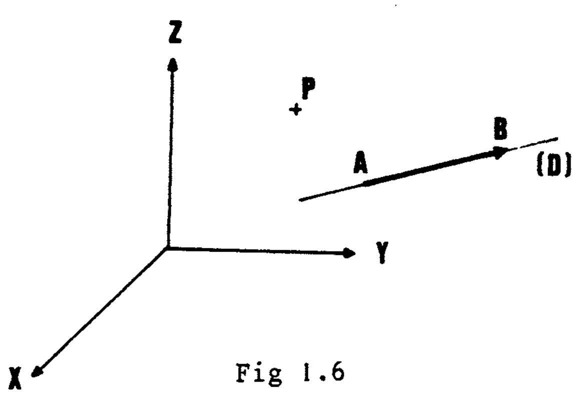


Fig 1.6

De par la définition : $\vec{M}_{(P)} = \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{AB}$

Posons $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_R \qquad \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_R \qquad \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_R$

Nous avons $\vec{M}_{(P)} = \begin{bmatrix} x_0 - x \\ y_0 - y \\ z_0 - z \end{bmatrix}_R \wedge \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_R$

ou encore

$$\vec{M}_{(P)} = \begin{bmatrix} (y_0 - y)Z - (z_0 - z)Y \\ (z_0 - z)X - (x_0 - x)Z \\ (x_0 - x)Y - (y_0 - y)X \end{bmatrix}_R \tag{1.5}$$

1.3.6 Changement de l'origine des moments

Soit un glisseur $(\vec{AB})$ et deux points quelconques O et O'. Cherchons la relation qui existe entre $\vec{M}_{(O)}$ et $\vec{M}_{(O')}$

Par définition

$$\vec{M}_{(O)} = \vec{OA} \wedge \vec{AB} \tag{1.7}$$

et aussi

$$\vec{M}_{(O')} = \vec{O'A} \wedge \vec{AB} \tag{1.8}$$

L'équation (1.8) peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \vec{M}_{(O')} &= (\vec{O'O} + \vec{OA}) \wedge \vec{AB} \\ &= \vec{O'O} \wedge \vec{AB} + \vec{OA} \wedge \vec{AB} \end{aligned}$$

En utilisant (1.7) on obtient finalement la formule du *changement de l'origine des moments*

$$\boxed{\vec{M}_{(O')} = \vec{M}_{(O)} + \vec{O'O} \wedge \vec{AB}} \tag{1.9}$$

1.3.7 Coordonnées d'un glisseur : Théorème :

a/ *Enoncé* :

Etant donné un vecteur libre $\vec{U} \neq 0$, un point O et un vecteur lié $\vec{OG}$ d'origine O, tel que $\vec{U}.\vec{OG} = 0$, il existe un glisseur et un seul dont le vecteur libre soit $\vec{U}$ et dont le moment en O soit $\vec{OG}$.

$\vec{U}$ et $\vec{OG}$ sont appelés "*coordonnées vectorielles*" du glisseur. Les coordonnées de ces vecteurs sont appelées "*coordonnées scalaires*" du glisseur

b/ *Démonstration* :

Soit un point A appartenant au glisseur cherché. On a

$$\vec{OG} = \vec{OA} \wedge \vec{U} \tag{1.10}$$

Cette équation, appelée *équation de la division vectorielle*, n'est possible que si $\vec{OG}.\vec{U} = 0$. Ceci justifie la restriction posée dans l'énoncé.

L'équation (10) ayant pour inconnue $\vec{OA}$ ne possède pas de solution unique. En effet, supposons que $\vec{OA}_1$ et $\vec{OA}_2$ soient solutions de (1.10). On peut alors écrire

$$\vec{OG} = \vec{OA}_1 \wedge \vec{U}$$
$$\vec{OG} = \vec{OA}_2 \wedge \vec{U}$$

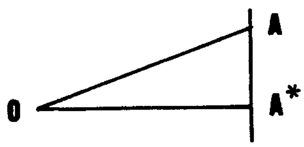
Ce qui par soustraction nous donne $\vec{U} \wedge (\vec{OA}_1 - \vec{OA}_2) = 0$

Ceci se comprend aisément, le moment étant perpendiculaire au vecteur libre du vecteur glissant, $[OG]$ ne peut représenter le moment que s'il est perpendiculaire à $\vec{U}$.

Multiplions vectoriellement les deux membres de la relation vectorielle par $\vec{U}$

$$(\overrightarrow{OG} \wedge \vec{U}) = (\overrightarrow{OA} \wedge \vec{U}) \wedge \vec{U}.$$
$$= \vec{U} \cdot (\overrightarrow{OA} \cdot \vec{U}) - \overrightarrow{OA}\ (\vec{U})^2$$

Cherchons la solution particulière correspondant à A^* tel que $\overrightarrow{OA^*}.\vec{U} = 0$. A^* est le pied de la perpendiculaire abaissée de 0 sur l'axe du glisseur cherché. On a



$$\overrightarrow{OA^*} = \frac{\vec{U} \wedge \overrightarrow{OG}}{U^2} \qquad (1.12)$$

(Un point A quelconque est déterminé par

$$OA = \overrightarrow{OA^*} + \lambda\vec{U} \qquad (1.13)$$

Le point A^* est unique. Tous les points répondant à la question sont sur une parallèle menée par A^* à $\vec{U}$. C'est l'axe du glisseur (le produit vectoriel $\vec{U} \wedge \overrightarrow{OG}$ détermine un vecteur et un seul).

1.3.8 Remarques

a/ *Remarque 1*

A un glisseur on peut faire correspondre deux vecteurs $\vec{U}$ et $[\overrightarrow{OG}]$. Réciproquement à deux vecteurs $\vec{U}$ et $[\overrightarrow{OG}]$ on peut faire correspondre un glisseur et un seul. C'est pourquoi on peut vraiment parler de coordonnées d'un glisseur.

b/ *Remarque 2*

Si l'on avait défini le moment d'un vecteur lié on aurait pu lui associer deux vecteurs $\vec{U}$ et $[\overrightarrow{OG}]$.

Mais réciproquement à deux vecteurs $\vec{U}$ et $[\overrightarrow{OG}]$ tels que $\vec{U}.\overrightarrow{OG} = 0$ on peut faire correspondre une infinité de vecteurs liés qui seraient tous équipollents et de même support.

Autrement dit, on n'aurait pas pu avoir une correspondance biunivoque.

c/ *Remarque 3*

On peut parfaitement caractériser une droite (D) quand on connait un vecteur glissant porté par cette droite. Par conséquent les *coordonnées pluckériennes* de la droite (D) dans un repère orthonormé sont les composantes scalaires d'un glisseur quelconque ayant (D) pour support.

1.3.9 Remarque 2 :

On peut parfaitement caractériser une droite (D) quand on connait un vecteur glissant porté par cette droite. Par conséquent les *coordonnées pluckériennes* de la droite (D) dans un repère orthonormé sont les composantes scalaires d'un glisseur quelconque ayant (D) pour support.

1.3.10 Exercice :

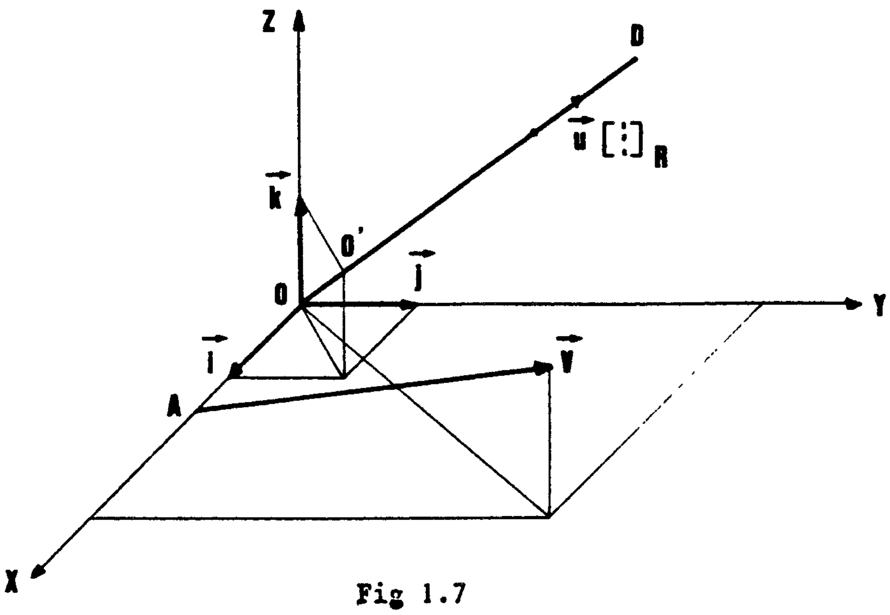


Fig 1.7

Soit un repère orthonormé R d'origine O.

Soit un glisseur $(\vec{V}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}_R$ dont un représentant a pour origine $A \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_R$.

Considérons aussi $O' \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_R$

1°/ Calculer son moment au point O

$$\vec{M}_{(O)} = \vec{OA} \wedge \vec{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_R \wedge \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_R$$

2°/ Calculer son moment au point O'par la définition

$$\vec{M}_{(O')} = \vec{O'A} \wedge \vec{V} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 0-1 \\ 0-1 \end{bmatrix}_R \wedge \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ +2 \end{bmatrix}_R$$

3°/ Retrouver le moment en O' en utilisant la formule du changement d'origine

$$\vec{M}_{(O')} = \vec{M}_{(o)} + \vec{O'O} \wedge \vec{V}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_R + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}_R \wedge \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}_R$$

$$\vec{M}_{(O')} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

I.4 MOMENT D'UN GLISSEUR PAR RAPPORT A UN AXE

1.4.1 Définition :

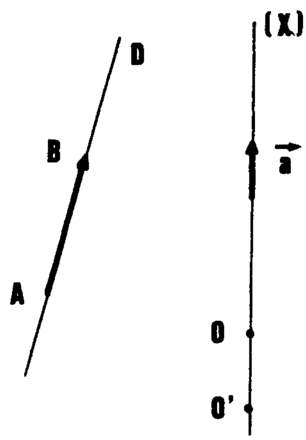


Fig 1.8

Soient $(\vec{AB})$ un glisseur ayant pour représentant le vecteur glissant $(\vec{AB})$, et un axe (X) de vecteur unitaire $(\vec{a})$

Soit O un point de l'axe (X).

On appelle *moment d'un glisseur par rapport à un axe* la projection sur cet axe du moment par rapport à un point de l'axe.

$$\boxed{M_{/(X)}(\vec{AB}) = (\vec{OA} \wedge \vec{AB}).\vec{a}} \qquad (1.14)$$

1.4.2 Théorème :

Le moment par rapport à un axe est indépendant du point choisi sur cet axe.

Soit O' un autre point de l'axe (X).
Calculons la quantité

$$(\vec{O'A} \wedge \vec{AB}).\vec{a} \qquad (1.15)$$

$$= \left[(\vec{O'O} + \vec{OA}) \wedge \vec{AB}\right].\vec{a}$$

$$= (\vec{O'O} \wedge \vec{AB}).\vec{a} + (\vec{OA} \wedge \vec{AB}).\vec{a}$$

Or $(\vec{O'O} \wedge \vec{AB}).\vec{a} = 0$ (produit mixte de deux vecteurs colinéaires)

$$(\vec{O'A} \wedge \vec{AB}).\vec{a} = (\vec{OA} \wedge \vec{AB}).\vec{a} = M_{/X}(\vec{AB}) \qquad (1.16)$$

1.4.3. Exercice :

Reprenons l'exercice traité au paragraphe 1.3.10 et calculons

1°/ le moment par rapport à OX

$$M_{/OX}(\vec{V}) = (\vec{OA} \wedge \vec{V}).\vec{x}$$

$$= \vec{M}_{(O)}.\vec{x}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_R . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_R = 0$$

Résultat évident puisque $\vec{V}$ coupe l'axe OX.

2°/ <u>le moment par rapport à OY</u>

$$M_{/OY}(\vec{V}) = \vec{M}_{(O)} \cdot \vec{y}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_R \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_R = -1$$

3°/ <u>le moment par rapport à OZ</u>

$$M_{/OZ}(\vec{V}) = \vec{M}_{(O)} \cdot \vec{z}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_R \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_R = 3$$

4°/ <u>le moment par rapport à (D)</u>

$$M_{/D}(\vec{V}) = \vec{M}_{(O)} \cdot \vec{u}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ou encore

$$M_{/D}(\vec{V}) = \vec{M}_{(O')} \cdot \vec{u}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}_R \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

I.5 TORSEURS : (OU DYNAME)

1.5.1 Définition :

On appelle *torseur* ou *dyname*, un ensemble de vecteurs glissants en nombre quelconque.

On le notera par exemple

$$[T] = \{(\overrightarrow{A_1B_1}), \ldots\ldots, (\overrightarrow{A_iB_i}), \ldots\ldots, (\overrightarrow{A_nB_n})\} \qquad (1.17)$$

1.5.2 Définitions concernant les torseurs :

a) on appelle *somme du torseur* le vecteur libre somme des vecteurs libres des différents vecteurs glissants

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AiBi} \qquad (1.18)$$

$$\vec{S} = \vec{U}_1 + \ldots + \vec{U}_i + \ldots + \vec{U}_n$$

b) on appelle *moment en O* du système $[T]$ le vecteur lié d'origine O somme des moments en O des divers glisseurs de (T)

$$\vec{M}_{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i} \qquad (1.19)$$

$$= \vec{M}_{1(0)} + \vec{M}_{2(0)} + \ldots \vec{M}_{i(0)} + \ldots + \vec{M}_{n(0)}$$

c) *Equivalence de deux torseurs*

Deux torseurs sont dits *équivalents* s'ils ont même moment en tout point.

d) *Torseur nul*

On dit qu'un torseur est nul quand son moment par rapport à tout point de l'espace est nul

e) *Remarque*

$\vec{S}$ et $\vec{M}(0)$ sont dits les *éléments de réduction* en O du torseur $[T]$

f) *Exercice*

Soit un repère orthonormé direct R. Un glisseur $(\vec{F})$ de vecteur libre $\vec{F} = (6,3,6)_R$ passe par le point A tel que $\overline{OA} = (2,1,10)_R$

Déterminer les éléments de réduction du torseur en B tel que $\overrightarrow{OB} = (6,10,12)_R$

α) la somme est $\quad \vec{S} = \vec{F} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}_R$

β) le moment en B est $\quad \vec{M}_{(B)} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}_R - \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} -4 \\ -9 \\ -2 \end{bmatrix}_R$$

d'où $\quad \vec{M}_{(B)} = \begin{bmatrix} -4 \\ -9 \\ -2 \end{bmatrix}_R \wedge \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}_R$

$$\vec{M}_{(B)} = \begin{bmatrix} -48 \\ +12 \\ 42 \end{bmatrix}_R$$

1.5.3 Formule de changement de l'origine des moments

Soit un torseur $[T]$

$$\vec{M}(O) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i}$$

$$\vec{M}(O') = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{O'A_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i}$$

$$\vec{M}(O') = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i}) \wedge \overrightarrow{A_iB_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{A_iB_i} + \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i})$$

$$\vec{M}(O') = \vec{M}(O) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S} \qquad (\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iB_i}) \qquad (1.20)$$

1.5.4 Conditions nécessaire et suffisante de l'équivalence de deux torseurs

a) *condition nécessaire* (analyse)

Soient deux torseurs $[T]$ et $[T']$ équivalents. On a donc par hypothèse

$\vec{M}(P) = \vec{M}'(P)$ pour $\forall$ (P)

$\vec{M}(P) = \vec{M}(O) + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{S}$

$\vec{M}'(P) = \vec{M}'(O) + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{S}'$

d'où

$0 = \overrightarrow{PO} \wedge (\vec{S} - \vec{S}')$

Cette relation doit être vérifiée pour tout P et O. D'où $\vec{S} = \vec{S}'$ (1.21)

Deux torseurs équivalents ont même somme.

b) *condition suffisante*

Soient deux torseurs $[T]$ et $[T']$ ayant même somme et même moment en un point. Nous allons montrer qu'ils ont même moment en tout point ; c'est à dire qu'ils sont équivalents.

Par hypothèse $\vec{M}(O) = \vec{M}'(O)$ $\vec{S} = \vec{S}'$

$\vec{M}(P) = \vec{M}(O) + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{S}$

$\vec{M}'(P) = \vec{M}'(O) + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{S}'$

d'après l'hypothèse $\vec{M}'(P) = \vec{M}(O) + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{S}$

$$\vec{M}(P) = \vec{M}'(P) \qquad \forall (P) \qquad (1.22)$$

1.5.5 Coordonnées d'un torseur :

Un torseur $[T]$ est déterminé dès que l'on connait :

- la somme du torseur $\vec{S}$
- le moment en un point O : $\vec{M}(O)$

Les vecteurs $\vec{S}$ et $\vec{M}(O)$ sont dits *coordonnées vectorielles* du torseur $[T]$. Soit O l'origine d'un repère orthonormé $(O\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$. Les coordonnées X, Y, Z et L, M, N de $\vec{S}$ et $\vec{M}(O)$ sont dites *coordonnées scalaires* du torseur $[T]$.

Connaissant les six coordonnées la formule $\vec{M}(P) = \vec{M}(O) + \vec{PO} \wedge \vec{S}$ permet de trouver le moment de $[T]$ en tout point (P).

1.5.6 Invariant scalaire d'un torseur. *Automoment*.

Soit un torseur $[T]$ dont les coordonnées vectorielles sont $\vec{S}$ et $\vec{M}(O)$

$$\vec{M}(P) = \vec{M}(O) + \vec{PO} \wedge \vec{S}$$

pour $\forall$ (P)

Multiplions scalairement par $\vec{S}$ les deux membres de cette relation

$$\vec{M}(P).\vec{S} = \vec{M}(O).\vec{S}$$

D'où le théorème

Le produit scalaire du moment en un point par la somme est un invariant. On l'appelle l'automoment du torseur.

$$\vec{M}(O).\vec{S} = LX + MY + NZ$$

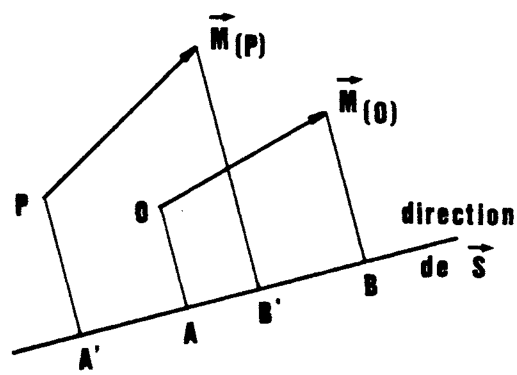


Fig 1.9

1.5.7. Comoment de deux torseurs

a) *Définition*

Soient deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ dont les coordonnées vectorielles sont :

$$[T_1] = \begin{matrix} \vec{S}_1 \\ \vec{M}_1(O) \end{matrix} \qquad\qquad [T_2] = \begin{matrix} \vec{S}_2 \\ \vec{M}_2(O) \end{matrix}$$

On appelle *comoment* des deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ le scalaire

$$C_{12} = \vec{S}_1 . \vec{M}_2(O) + \vec{S}_2 . \vec{M}_1(O) \tag{1.24}$$

b) *Le comoment est un invariant*

α) Préliminaire

Le torseur formé de l'ensemble des vecteurs glissants de $[T_1]$ et $[T_2]$ est appelé *torseur somme.*

$$[T_1] = \{\overrightarrow{(A_1B_1)}, \ldots, \overrightarrow{(A_iB_i)}, \ldots, \overrightarrow{(A_nB_n)}\}$$

$$[T_2] \quad \{(\alpha_1\beta_1), \ldots, (\alpha_j\alpha_j), \ldots, (\alpha_p\alpha_p)\}$$

La somme $(\vec{S})$ de ce torseur est par définition

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iB_i} + \sum_{j=1}^{p} \overrightarrow{\alpha_j\beta_j} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

Le moment $\vec{M}(0)$ est par définition

$$\vec{M}(0) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i} + \sum_{j=1}^{p} \overrightarrow{O\alpha_j} \wedge \overrightarrow{\alpha_j\beta_j}$$

$$= \vec{M}_1(0) + \vec{M}_2(0)$$

: Le torseur somme a pour somme la somme des sommes des torseurs constitutifs et pour moment en un point la somme des moments des torseurs constitutifs.

β) C_{12} est un invariant

L'automoment du torseur $[T] = [T_1] + [T_2]$ est un invariant

$$\begin{aligned}\vec{S}.\vec{M}(0) &= (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)\,[\vec{M}_1(0) + \vec{M}_2(0)] \\ &= \vec{S}_1\vec{M}_1(0) + \vec{S}_2\vec{M}_1(0) + \vec{S}_1\vec{M}_2(0) + \vec{S}_2\vec{M}_2(0) \\ &= \vec{S}_1\vec{M}_1(0) + \vec{S}_2\vec{M}_2(0) + C_{12}\end{aligned}$$

$\vec{S}.\vec{M}(0)$	est invariant	(automoment de	$[T]$)
$\vec{S}_1\vec{M}_1(0)$		(″ ″	$[T_1]$)
$\vec{S}_2\vec{M}_2(0)$		(″ ″	$[T_2]$)

C_{12} différence de deux quantités invariantes est invariant.

c) *Remarque. Comoment d'un torseur avec lui-même.*

Le comoment est

$$C_{11} = 2\,\vec{S}_1 \,.\, \vec{M}_1(0) \tag{1.25}$$

c'est à dire deux fois l'automoment

1.5.8 Moment par rapport à un axe

a) *Définition*

On appelle moment du torseur [T] par rapport à un axe (X) la somme des moments par rapport à cet axe des différents glisseurs qui constituent le torseur. On note

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i})\,\vec{a} \qquad (1.26)$$

$\vec{a}$ désignant un vecteur unitaire de l'axe

b) *Théorème*

Le moment par rapport à un axe est la projection sur cet axe du moment par rapport à un point de l'axe.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i})\,\vec{a}$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i})\,\vec{a}$$

$$M(X) = \vec{M}(0)\,.\,\vec{a}$$

c) *Exercice*

Montrer que le moment par rapport à un axe d'un torseur est égal au comoment du torseur et d'un vecteur unitaire porté par l'axe.

Soit [T] un torseur d'éléments de réduction en un point 0, $\vec{S}$ et $\vec{M}(0)$. Soit (X) un axe quelconque mais passant par 0 et défini par un vecteur glissant $(\vec{a})$, qui peut alors être considéré comme un torseur particulier [Tx] d'éléments de réduction $\vec{a}$ et $\vec{M}(0) = 0$.

Le comoment de [T] et [Tx] est selon la définition (1.23) $\vec{M}(0).\vec{a}$, ce qui nous donne bien la définition du moment du torseur [T] par rapport à l'axe (X).

Naturellement, on peut prendre ceci comme définition du moment par rapport à un axe.

1.5.9 Torseurs spéciaux

a) *Définition*

Un torseur est dit spécial si $\vec{S}\,.\,\vec{M}(0) = 0 \qquad (1.27)$

b) *Théorème* : condition nécessaire pour qu'un torseur soit équivalent à un vecteur glissant unique

Soit un torseur $[T]$ donné par ses coordonnées vectorielles $\vec{S}$ et $\vec{M}(O)$. Pour que le vecteur glissant (AB) soit équivalent à $[T]$ on doit avoir condition nécessaire et suffisante

$$\overrightarrow{AB} = \vec{S}$$
$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{M}(O) \qquad \text{ce qui implique } \vec{S} \neq 0$$
$$\vec{M}(O).\vec{S} = 0$$

Le torseur est spécial.

S'il en est ainsi on aura

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\vec{S} \wedge \vec{M}(O)}{S^2} + x\,\vec{S} \qquad (1.28)$$

D'où le théorème

Pour qu'un torseur soit équivalent à un vecteur glissant il faut et il suffit que

$$\vec{S} \neq 0$$
$$\vec{S}.\vec{M}(O) = 0$$

Le vecteur glissant est unique, on a $\overrightarrow{AB} = \vec{S}$ et le support passe par le point A^* tel que

$$OA^* = \frac{\vec{S} \wedge \vec{M}(O)}{S^2}$$

On dit dans ces conditions que le vecteur glissant est le représentant *canonique* du torseur.

c) *couple*

α) *définition*

On appelle couple tout torseur dont la somme est nulle $\vec{S} = 0$. C'est un torseur spécial car $\vec{S}.\vec{M}(O) = 0$.

β) *théorème*

Le moment d'un couple en un point quelconque est équipollent à un vecteur fixe non nul ; le vecteur libre dont il est un représentant est appelé moment du couple

$$\vec{M}(P) = \vec{M}(O) + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{S}$$
$$\vec{M}(P) = \vec{M}(O) \quad \text{pour } \forall\ (P) \qquad (1.29)$$

d'où le théorème

d) *Remarque*

Lorsqu'un torseur est spécial il est équivalent soit à un vecteur glissant unique soit à un couple.

1.5.10 Système de vecteurs glissants particuliers

a) *Système de vecteurs glissants concourants*

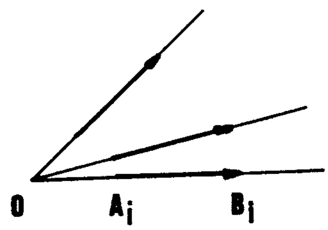


Fig 1.10

Soit un système de vecteurs glissants $(\overrightarrow{A_iB_i})$ passant tous par un point 0

- la somme est $\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iB_i}$

(1.30)

- le moment est $M(0) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \Lambda \overrightarrow{A_iB_i}$

Prenons un vecteur glissant $(\overrightarrow{AB})$ passant par 0 et tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{S}$

on a $\vec{S} = \overrightarrow{AB}$ par hypothèse

$\vec{M}_0(AB) = 0 = \vec{M}_0[T]$ (1.31)

Par suite le torseur $[T]$ est équivalent à un vecteur glissant unique passant par 0 et tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{S}$. Ce vecteur glissant unique est appelé *résultante* du torseur. C'est le théorème de Varignon pour les vecteurs flissants concourants (la résultante est un vecteur glissant alors que la somme est un vecteur libre)

b) *Système de vecteurs glissants parallèles*

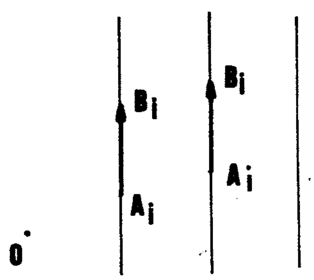


Fig 1.11

Les vecteurs glissants étant tous parallèles, on peut poser

$$\overrightarrow{A_iB_i} = \lambda_i \vec{u} \qquad (1.32)$$

- la somme est $\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \vec{u}$$

(cette somme naturellement peut être nulle mais ce cas a déjà été envisagé - voir couple)

Nous prendrons donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$ par hypothèse

- le moment est

$$\vec{M}(0) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \Lambda \lambda_i \vec{u}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \Lambda \vec{u}$$

$$\vec{M}(0) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}\right) \Lambda \vec{u}$$

mais comme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$ par hypothèse, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \overrightarrow{OA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \overrightarrow{OG}$$

G étant le barycentre des points A_i affectés des coefficients λ_i. On peut donc écrire

$$\vec{M}(0) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \overrightarrow{OG} \wedge \vec{u}$$

$$= \overrightarrow{OG} \wedge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \vec{u}$$

$$\vec{M}(0) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{S} \qquad (1.33)$$

Soit maintenant un vecteur $(\overrightarrow{AB})$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{S}$ et passant par G tel que

$$\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \overrightarrow{OA_i}$$

On a

$$\overrightarrow{AB} = \vec{S}$$
$$\vec{M}_0(AB) = \overrightarrow{OG} \quad \vec{S} = \vec{M}(0) \qquad (1.34)$$

Le vecteur glissant $(\overrightarrow{AB})$ est équivalent au torseur donné. D'où le théorème pour les vecteurs glissants parallèles.

Un système de vecteurs glissants parallèles est équivalent à un vecteur glissant unique de vecteur libre $\vec{S}$ *dont l'axe passe par le barycentre des points* A_i *affectés d'un coefficient égal à la mesure algébrique du vecteur* $\overrightarrow{A_iB_i}$ *sur l'axe de direction commune.*

Conclusion :

Le théorème de Varignon s'applique donc lorsque le point de concours des vecteurs glissants est rejeté à l'infini.

1.5.11 AXE CENTRAL D'UN TORSEUR : REPARTITION

a) Théorème préliminaire :

1/ *Enoncé :*

Pour que le moment d'un torseur [T] soit constant le long d'une droite (Δ), il faut et il suffit que cette droite soit parallèle à la somme $\vec{S}$ de [T], (supposée différente de zéro)

2/ *Condition nécessaire*

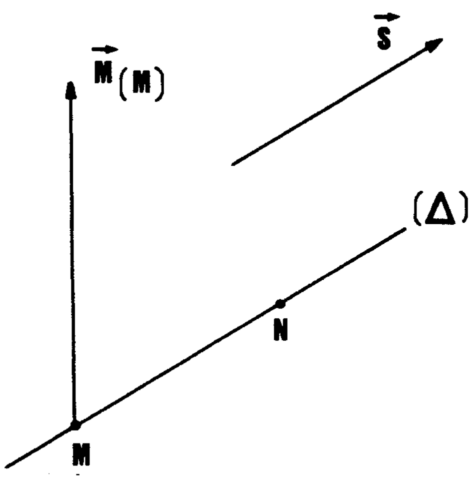


Fig 1.12

Soit (Δ) une droite et soient M et N deux points distincts sur cette droite. On a donc

$$\vec{M}_{(M)} = \vec{M}_{(N)} \quad \text{par hypothèse}$$

On peut toujours écrire $\vec{M}_{(M)} = \vec{M}_{(N)} + \overrightarrow{MN} \wedge \vec{S}$

On doit donc avoir $\overrightarrow{MN} \wedge \vec{S} = 0$

Par hypothèse $\overrightarrow{MN} \neq 0$

$\vec{S} \neq 0$

Donc, pour que le produit vectoriel soit nul, la seule condition possible est d'avoir $\overrightarrow{MN}$ colinéaire à $\vec{S}$ et donc (Δ) parallèle à $\vec{S}$ (Fig 1.13)

3/ *condition suffisante*

Soit (Δ) une droite parallèle à $\vec{S}$ et soient M et N deux points distincts sur cette droite. On a $\overrightarrow{MN} = x\,\vec{S}$. On peut aussi écrire

$$\vec{M}_{(M)} = \vec{M}_{(N)} + \overrightarrow{MN} \wedge \vec{S}$$

et donc on a bien

$$\vec{M}_{(M)} = \vec{M}_{(N)}$$

b) Axe central. Théorème et définition

Nous avons vu que tout le long d'une parallèle à $\vec{S}$ le moment d'un torseur est constant.

Nous allons chercher maintenant le lieu des points I tel que $\vec{M}_{(I)} = \lambda\vec{S}$, c'est à dire le lieu des points tel que le moment soit colinéaire à la somme.

1/ *Théorème*

Si la somme $\vec{S}$ d'un torseur [T] n'est pas nulle, le lieu des points I où le moment de [T] est colinéaire à $\vec{S}$ est une droite (Δ) parallèle à $\vec{S}$ appelée axe central.

I.10 AXE CENTRAL D'UN TORSEUR : REPARTITION

1.10.1 Théorème préliminaire :

a/ *Enoncé :*

Pour que le moment d'un torseur $[T]$ soit constant le long d'une droite (Δ), il faut et il suffit que cette droite soit parallèle à la somme $\vec{S}$ de $[T]$, (supposée différente de zéro)

b/ *Condition nécessaire*

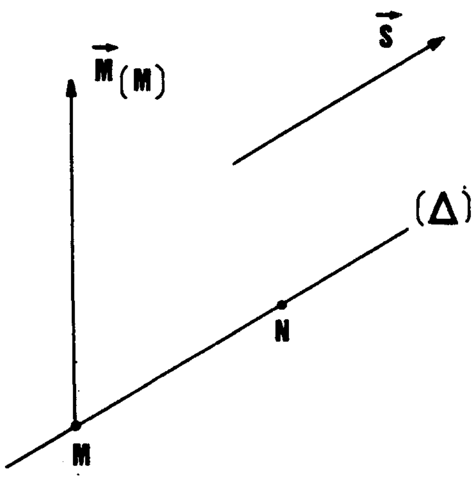


Fig 1.12

Soit (Δ) une droite et soient M et N deux points distincts sur cette droite. On a donc

$$\vec{M}_{(M)} = \vec{M}_{(N)} \quad \text{par hypothèse}$$

On peut toujours écrire $\vec{M}_{(M)} = \vec{M}_{(N)} + \overrightarrow{MN} \wedge \vec{S}$

On doit donc avoir $\overrightarrow{MN} \wedge \vec{S} = 0$

Par hypothèse $\overrightarrow{MN} \neq 0$

$\vec{S} \neq 0$

Donc, pour que le produit vectoriel soit nul, la seule condition possible est d'avoir $\overrightarrow{MN}$ colinéaire à $\vec{S}$ et donc (Δ) parallèle à $\vec{S}$ (Fig 1.13)

c/ *condition suffisante*

Soit (Δ) une droite parallèle à $\vec{S}$ et soient M et N deux points distincts sur cette droite. On a $\overrightarrow{MN} = x\,\vec{S}$. On peut aussi écrire

$$\vec{M}_{(M)} = \vec{M}_{(N)} + \overrightarrow{MN} \wedge \vec{S}$$

et donc on a bien

$$\vec{M}_{(M)} = \vec{M}_{(N)}$$

1.10.2 Axe central. Théorème et définition

Nous avons vu que tout le long d'une parallèle à $\vec{S}$ le moment d'un torseur est constant.

Nous allons chercher maintenant le lieu des points I tel que $\vec{M}_{(I)} = \lambda\vec{S}$, c'est à dire le lieu des points tel que le moment soit colinéaire à la somme.

a/ *Théorème*

Si la somme $\vec{S}$ d'un torseur $[T]$ n'est pas nulle, le lieu des points I où le moment de $[T]$ est colinéaire à $\vec{S}$ est une droite (Δ) parallèle à $\vec{S}$ appelée axe central.

Il passe par le point I^* tel que $\quad \vec{OI}^* = \dfrac{\vec{S} \wedge \vec{M}_{(O)}}{S^2}$ (1.35)

b/ *démonstration vectorielle :*

D'après le théorème préliminaire 1.9 I le lieu, s'il existe, est une droite parallèle à $\vec{S}$, car s'il existe un point I, tous les points répondant à la question sont sur une droite menée par I, parallèlement à $\vec{S}$.

Cherchons donc un point I qui répondrait à la question c'est à dire

$$\vec{M}_{(I)} = \lambda \vec{S}$$

On sait que le torseur considéré $[T]$ peut être caractérisé par ses éléments de réduction $\vec{S}$ et $\vec{M}_{(O)}$ supposés non nuls. On peut donc écrire

$$\vec{M}_{(I)} = \vec{M}_{(O)} + \vec{IO} \wedge \vec{S}$$

$$\lambda \vec{S} = \vec{M}_{(O)} + \vec{IO} \wedge \vec{S}$$

Mettons cette expression sous la forme $\quad [\lambda\vec{S} - \vec{M}_{(O)}] = \vec{IO} \wedge \vec{S} \quad$ (1.36)

ce qui revient à résoudre cette équation vectorielle par $\vec{IO}$.

Il n'y aura existence de la solution que pour $[\lambda\vec{S} - \vec{M}_{(O)}] \cdot \vec{S} = 0$ c'est à dire pour

$$\lambda = \frac{\vec{S}.\vec{M}_{(O)}}{S^2} \qquad (1.37)$$

$\vec{S}.\vec{M}_{(O)}$ automoment du torseur, invariant, λ est aussi invariant puisque S^2 est aussi invariant. On l'appelle le "pas" du torseur $[T]$. Nous avons déjà résolu une équation telle que 1.3.6 au paragraphe 1.3.7, pour un point I^* particulier tel que $\vec{OI}^* \cdot \vec{S} = 0$ c'est à dire étant la projection de O sur la droite cherchée. Selon le résultat 1.13 on a donc

$$\vec{OI}^* = \frac{\vec{S} \wedge \vec{M}(O)}{S^2} \qquad (1.38)$$

Ce point est unique.
Et donc la droite (Δ) lieu des points I sera telle que

$$\vec{OI} = \vec{OI}^* + x\,\vec{S} \qquad (1.39)$$

selon (1.11)

En conclusion, tous les points I répondant à la question sont situés sur une parallèle à $\vec{S}$ menée par I^*. Cette droite est l'axe central du torseur $[T]$, ayant λ pour pas.

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{OI}^* &= \frac{\vec{S} \wedge \vec{M}_{(O)}}{S^2} \\ \vec{OI} &= \vec{OI}^* + x\,\vec{S} \\ \lambda &= \frac{\vec{S}\,.\vec{M}_{(O)}}{S^2} \end{aligned}} \qquad (1.40)$$

c/ *Détermination analytique*

Considérons un repère orthonormé direct R et soit [T] un torseur dont les éléments de réduction en O sont $\vec{S}$ et $\vec{M}_{(O)}$ supposés non nuls tels que

$$\vec{S} = (X,Y,Z)_R$$

$$\vec{M}_{(O)} = (L,M,N)_R$$

Soit un point P quelconque défini par $\qquad \vec{OP} = (x,y,z)_R$

On a $\qquad \vec{M}_{(P)} = \vec{M}_{(O)} + \vec{PO} \wedge \vec{S}$

$$\vec{M}_{(P)} = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}_R + \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix}_R \wedge \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_R$$

$$\vec{M}_{(P)} = \begin{bmatrix} L - yZ & + zY \\ M - zX & + xZ \\ N - xY & + yX \end{bmatrix}_R$$

Si le point P appartient à l'axe central on doit avoir $\vec{M}_{(I)} = \lambda \vec{S}$

Soit analytiquement

$$\begin{bmatrix} L - yZ + zY \\ M - zX + xZ \\ N - xY + yX \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} \lambda X \\ \lambda Y \\ \lambda Z \end{bmatrix}_R \qquad \text{ou encore}$$

$$\boxed{\frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z} = \lambda} \qquad (1.41)$$

Remarque : Pour résoudre (1.41) on tiendra compte des considérations particulières d'un problème donné.

1.10.3 Exercices d'application :

a/ *Exercice n° 1*

L'axe central d'un torseur passe par le point I^* tel que $\vec{OI^*}$ = (6,3,2) dans un repère R. La somme du torseur est $\vec{S}$ = (10,4,-3), le pas est positif et le module de $\vec{M}(I^*)$ est de 50.

Déterminer le moment en O du torseur.

Le moment $\vec{M}_{(I^*)}$ a la direction de la somme géométrique $\vec{M}_{(I^*)} = \lambda \vec{S}$

Le pas λ étant positif, le vecteur unitaire $\vec{U}$ de l'axe central peut être défini par $\vec{S}$

$$\vec{U} = \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|} = \frac{\begin{bmatrix}10\\4\\-3\end{bmatrix}}{\sqrt{10^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{\begin{bmatrix}10\\4\\-3\end{bmatrix}_R}{5\sqrt{5}}$$

Par conséquent

$$\vec{M}_{(I^*)} = |\vec{M}_{(I^*)}| \,.\, \vec{U}$$

$$= 50 \,.\, \frac{\begin{bmatrix}10\\.4\\-3\end{bmatrix}_R}{5\sqrt{5}}$$

$$\vec{M}_{(I^*)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix}100\\40\\-30\end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix}44,84\\17,7\\-13,3\end{bmatrix}_R$$

Le moment en O sera donné par

$$\vec{M}_{(O)} = \vec{M}_{(I^*)} + \vec{OI^*} \wedge \vec{S}$$

Calculons $\vec{OI^*} \wedge \vec{S}$

$$\vec{OI^*} \wedge \vec{S} = \begin{bmatrix}6\\3\\2\end{bmatrix}_R \wedge \begin{bmatrix}10\\4\\-3\end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix}-17\\+38\\-6\end{bmatrix}_R$$

et donc on a

$$\vec{M}_{(O)} = \begin{bmatrix}44,84\\17,7\\-13,3\end{bmatrix}_R + \begin{bmatrix}-17\\+38\\-6\end{bmatrix}_R$$

$$\vec{M}_{(O)} = \begin{bmatrix}27,84\\55,7\\-19,3\end{bmatrix}_R$$

b/ *Exercice n° 2*

Les coordonnées (éléments de réduction) d'un torseur sont

$\vec{S} = (10,6,4)$ $\quad$ $\vec{M}_{(O)} = (6,3,-6)$ dans un repère orthonormé R $[O,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}]$

Déterminer le point I où l'axe central (Δ) rencontre le plan $(O,\vec{Z},\vec{X})$.

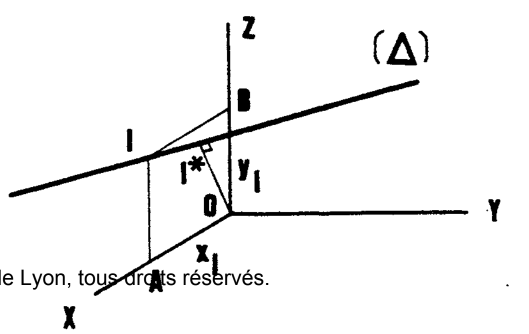


Fig 1.13

$$y_I = -\frac{3}{76} - \frac{4}{6} \times \frac{21}{38} = -\frac{31}{76}$$

Le point I a donc pour coordonnées dans R : $\vec{OI} = \begin{bmatrix} -\frac{47}{38} \\ 0 \\ -\frac{31}{76} \end{bmatrix}_R$

d) Répartition des moments autour de l'axe central

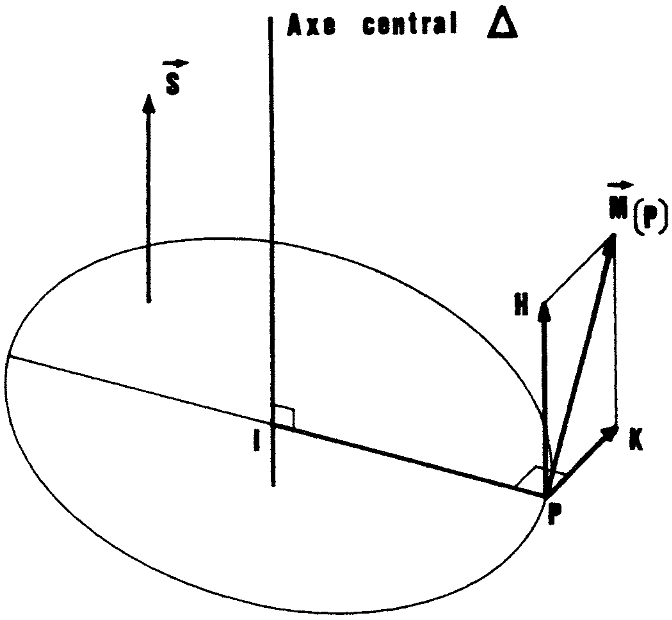


Fig 1.14

Soit un point P quelconque qui se projette en I sur l'axe central.

On a d'une manière générale

$$\vec{M}_{(P)} = \vec{M}_{(I)} + \vec{PI} \wedge \vec{S}$$

Mais I appartient à l'axe central Δ et donc

$$\vec{M}_{(I)} = \lambda \vec{S}$$

donc

$$\vec{M}_{(P)} = \lambda \vec{S} + \vec{PI} \wedge \vec{S}$$

Posons $\lambda\vec{S} = \vec{PH}$

$\vec{PI} \wedge \vec{S} = \vec{PK}$

On écrit donc :

$$\boxed{\vec{M}_{(P)} = \vec{PH} + \vec{PK}} \qquad (1.42)$$

On voit immédiatement que $\vec{PK}$ est perpendiculaire à $\vec{PH}$ et donc
$\vec{PH} \cdot \vec{PK} = 0$ (1.43)

On voit aussi que $\vec{PI}$ perpendiculaire à $\vec{S}$ d'où $\vec{PI} \cdot \vec{S} = 0$ (1.44)

Calculons maintenant le module de $\vec{M}_{(P)}$ noté $|\vec{M}_{(P)}|$. On a

$\vec{M}_{(P)}^2 = (\vec{PH})^2 + (\vec{PK})^2$ en considérant 1.43

$\vec{PH} = \lambda\vec{S} \rightarrow (\vec{PH})^2 = \lambda^2 S^2$

$\vec{PK} = \vec{PI} \wedge \vec{S}$

$|\vec{PK}| = |\vec{PI}| \cdot |\vec{S}|$ en considérant (1.44)

$= d \cdot |\vec{S}|$ si d désigne la distance de P à l'axe central

donc $(\vec{PK})^2 = d^2 S^2$

Finalement $\vec{M}_{(P)}{}^2 = (\lambda^2 + d^2)\ S^2$

et $|\vec{M}_{(P)}| = |\vec{S}|\ .\ \sqrt{d^2 + \lambda^2}$ (1.45)

De (1.42) et (1.45) on peut donc tirer les propositions suivantes quant à la répartition des moments autour de l'axe central

1/ Remarque 1

Le moment en un point quelconque est la somme de deux vecteurs, l'un constant $\lambda\vec{S}$ parallèle à la somme géométrique, l'autre variable $\vec{PI} \wedge \vec{S}$ perpendiculaire à la somme géométrique et dont le module varie proportionnellement à la distance du point à l'axe central, ce qui revient aussi à dire que tous les points situés à une même distance de l'axe central, c'est à dire sur un cylindre d'axe Δ, de rayon d, ont des moments qui ont même module.

2/ Remarque 2

L'axe central est le lieu des points dont le moment est minimum en module.

3/ Remarque 3

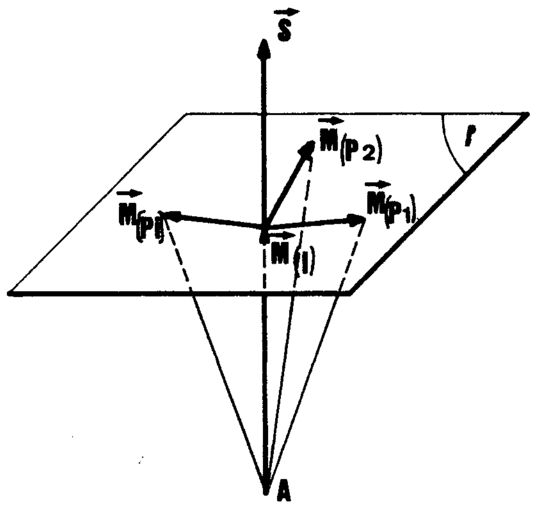


Fig 1.15

Ce qu'on vient de dire est évident si on représente en un point quelconque A la gerbe de sommet O des différents vecteurs moments.

Pour un torseur donné, rappelons que l'automoment est invariant, c'est à dire

$\vec{S}\ .\ \vec{M}_{(O)} =$ constante

Par suite les vecteurs de la gerbe de sommet A représentatifs des moments en tous points du torseur ont leur sommet dans un plan perpendiculaire à S.

Donc le moment est minimum s'il a la direction de S, c'est à dire si le point correspondant appartient bien à l'axe central.

1.5.12 CHAMP DE MOMENTS

a) Définition

Si on se donne le moyen de faire correspondre à tout point P d'une certaine région de l'espace un vecteur lié $[\vec{F}(P)]$ d'origine P on dit qu'on définit un champ de vecteurs.

En particulier, étant donné un torseur $[T]$, à tout point P de l'espace correspond le moment $\vec{M}_{(P)}$ du torseur en P. Le champ constitué par les vecteurs $\vec{M}_{(P)}$ est appelé champ de moments.

Il est caractérisé par la formule liant le moment en deux points P et Q

$$\vec{M}_{(P)} = \vec{M}_{(Q)} + \vec{PQ} \wedge \vec{S}$$

$\vec{S}$ étant la somme du torseur considéré

b) Equiprojectivité du champ de moments : Théorème de *Delassus*

1/ *Propriété du champ de moments : un champ de moments est équiprojectif*

Soients M et N deux points quelconques. On a

$$\vec{M}_{(M)} = \vec{M}_{(N)} + \vec{MN} \wedge \vec{S}$$

Multiplions scalairement les deux membres de cette relation par $\vec{MN}$

$$\vec{M}_{(M)} \cdot \vec{MN} = \vec{M}_{(N)} \cdot \vec{MN} \qquad (1.46)$$

Si l'on pose $\vec{MN} = x\vec{U}$, (1.46) s'écrit encore

$$\vec{M}_{(M)} \cdot \vec{U} = \vec{M}_{(N)} \cdot \vec{U}$$

autrement dit, la projection des moments en M et N sur le support de $\vec{MN}$ est constante. C'est ce qu'on appelle la propriété d'équiprojectivité.

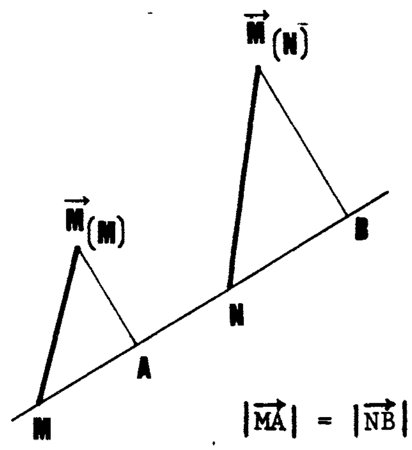


Fig 1.16

2/ *Réciproque de l'énoncé : Théorème de Delassus*

Tout champ équiprojectif est un champ de moments.

Démonstration

Considérons, par hypothèse, trois points quelconques O,P,Q non alignés et un champ de moments équiprojectif. On peut donc écrire

$$\vec{V}_{(P)} \vec{OP} = \vec{V}_{(O)} \cdot \vec{OP} \Longrightarrow \left[\vec{V}_{(P)} - \vec{V}_{(O)}\right] \cdot \vec{OP} = 0 \qquad (a)$$

$$\vec{V}_{(Q)} \cdot \vec{OQ} = \vec{V}_{(O)} \cdot \vec{OQ} \Longrightarrow \left[\vec{V}_{(Q)} - \vec{V}_{(O)}\right] \cdot \vec{OQ} = 0 \qquad (b)$$

$$\vec{V}_{(P)} \vec{PQ} = \vec{V}_{(Q)} \cdot \vec{PQ} \Longrightarrow \left[\vec{V}_{(P)} - \vec{V}_{(Q)}\right] \cdot \vec{PQ} = 0 \qquad (c)$$

la dernière relation peut s'écrire encore

$$\left[(\vec{V}_{(P)} - \vec{V}_{(O)}) - (\vec{V}_{(Q)} - \vec{V}_{(O)})\right] (\vec{OQ} - \vec{OP}) = 0$$

ou en développant on obtient l'expression suivante

$$(\vec{V}_{(P)} - \vec{V}_{(O)})\vec{OQ} - (\vec{V}_{(P)} - \vec{V}_{(O)})\vec{OP} - (\vec{V}_{(Q)} - \vec{V}_{(O)})\vec{OQ} + (\vec{V}_{(Q)} - \vec{V}_{(O)})\vec{OP} = 0$$

qui devient, compte tenu de (a) et (b)

$$(\vec{V}_{(P)} - \vec{V}_{(0)})\ \overrightarrow{OQ} + (\vec{V}_{(Q)} - \vec{V}_{(0)})\ \overrightarrow{OP} = 0$$

Nous avons finalement les trois relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{rll} [\vec{V}_{(P)} - \vec{V}_{(0)}]\ \overrightarrow{OP} = 0 & & (a) \\ [\vec{V}_{(Q)} - \vec{V}_{(0)}]\ \overrightarrow{OQ} = 0 & & (b) \\ [\vec{V}_{(P)} - \vec{V}_{(0)}]\ \overrightarrow{OQ} + [\vec{V}_{(Q)} - \vec{V}_{(0)}]\ \overrightarrow{OP} = 0 & & (c) \end{array}\right\} \quad (1.47)$$

Considérons maintenant une base orthonormée R d'origine O et de vecteurs unitaires $\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3$ qui ont pour extrémité K_1, K_2, K_3.

Appliquons les relations (1.47) aux extrémités des vecteurs unitaires. L'expression (1.47 a) ou bien (1.47 b) donne

$$\left.\begin{array}{l} [\vec{V}_{(K_1)} - \vec{V}_{(0)}]\ \overrightarrow{OK_1} = 0 \\ [\vec{V}_{(K_2)} - \vec{V}_{(0)}]\ \overrightarrow{OK_2} = 0 \\ [\vec{V}_{(K_3)} - \vec{V}_{(0)}]\ \overrightarrow{OK_3} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow [\vec{V}_{(Ki)} - \vec{V}_{(0)}] \cdot \overrightarrow{OKi} = 0 \quad (1.48)$$

L'expression (1.47 c) donne également

$$\begin{array}{l} [\vec{V}_{(K_1)} - \vec{V}_{(0)}] \cdot \overrightarrow{OK_2} + [\vec{V}_{(K_2)} - \vec{V}_{(0)}] \cdot \overrightarrow{OK_1} = 0 \\ [\vec{V}_{(K_2)} - \vec{V}_{(0)}] \cdot \overrightarrow{OK_3} + [\vec{V}_{(K_3)} - \vec{V}_{(0)}] \cdot \overrightarrow{OK_2} = 0 \\ [\vec{V}_{(K_3)} - \vec{V}_{(0)}] \cdot \overrightarrow{OK_1} + [\vec{V}_{(K_1)} - \vec{V}_{(0)}] \cdot \overrightarrow{OK_3} = 0 \end{array}$$

qui sous forme indicielle deviennent

$$[\vec{V}_{(Ki)} - \vec{V}_{(0)}]\ \overrightarrow{OK}_j - [\vec{V}_{(Kj)} - \vec{V}_{(0)}]\ \overrightarrow{OK}_i - = 0 \quad (1.49)$$

Posons $r_{ij} = (\vec{V}_{(Ki)} - \vec{V}_{(0)})\ \overrightarrow{OK}_j$ (1.50)

Les relations (1.48) et (1.49) s'écrivent alors

$$\left.\begin{array}{lll} r_{ij} = 0 & & i = j \\ r_{ij} + r_{ji} = 0 & & i \neq j \end{array}\right\} \quad (1.51)$$

(1.51) nous permettent de dire que les r_{ij} sont antisymétriques par rapport aux indices.

Considérons maintenant un point P quelconque. Ses coordonnées dans la base R seront

$$\vec{OP} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{OK}_i \qquad (1.52)$$

Pour ce point P la formule (1.47 c) peut s'écrire

$$\left[\vec{V}_{(P)} - \vec{V}_{(0)}\right] \cdot \vec{OQ} = - \left[\vec{V}_{(Q)} - \vec{V}_{(0)}\right] \cdot \vec{OP}$$

$$= - \left[\vec{V}_{(Q)} - \vec{V}_{(0)}\right] \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{OK}_i$$

$$= - \sum_{i=1}^{3} x_i \left[\vec{V}_{(Q)} - \vec{V}_{(0)}\right] \cdot \vec{OK}_i$$

Mais la formule (1.47 c) donne toujours

$$\left[\vec{V}_{(Q)} - \vec{V}_{(0)}\right] \vec{OK}_i = - \left[\vec{V}_{(Ki)} - \vec{V}_{(0)}\right] \vec{OQ}$$

D'où

$$\left[\vec{V}_{(P)} - \vec{V}_{(0)}\right] \cdot \vec{OQ} = \sum_{i=1}^{3} x_i \left[\vec{V}_{(Ki)} - \vec{V}_{(0)}\right] \cdot \vec{OQ}$$

On peut donc écrire en divisant par $\vec{OQ} \neq 0$

$$\vec{V}_{(P)} - \vec{V}_{(0)} = \sum_{i=1}^{3} x_i \left[\vec{V}_{(Ki)} - \vec{V}_{(0)}\right]$$

$$\vec{V}_{(P)} - \vec{V}_{(0)} = x_1 \left[\vec{V}_{(K_1)} - \vec{V}_{(0)}\right] + x_2 \left[\vec{V}_{(K_2)} - \vec{V}_{(0)}\right] + x_3 \left[\vec{V}_{(K_3)} - \vec{V}_{(0)}\right]$$

Multiplions scalairement par $\vec{x}_1 = \vec{OK}_1$, $\vec{x}_2 = \vec{OK}_2$ et $\vec{x}_3 = \vec{OK}_3$ successivement. On obtient, en utilisant (1.50)

$$\left[\vec{V}_{(P)} - \vec{V}_{(0)}\right] \cdot \vec{x}_1 = x_1 . r_{11} + x_2 r_{21} + x_3 r_{31}$$

$$\left[\vec{V}_{(P)} - \vec{V}_{(0)}\right] \cdot \vec{x}_2 = x_1 . r_{12} + x_2 r_{22} + x_3 r_{32}$$

$$\left[\vec{V}_{(P)} - \vec{V}_{(0)}\right] \cdot \vec{x}_3 = x_1 r_{13} + x_2 r_{23} + x_3 r_{33}$$

Compte tenu de (1.51) on peut écrire ces dernières relations sous forme matricielle

$$\vec{V}_{(P)} - \vec{V}_{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ -r_{12} & 0 & r_{23} \\ -r_{13} & -r_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$\vec{V}_{(P)} - \vec{V}_{(0)}$ est le produit d'une matrice antisymétrique par un vecteur. On peut donc le représenter par un produit vectoriel

$$\vec{V}_{(P)} - \vec{V}_{(0)} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OP} \qquad \text{avec } \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} r_{23} \\ -r_{13} \\ r_{12} \end{bmatrix}_R$$

et on a donc

$$\boxed{\vec{V}_{(P)} = \vec{V}_{(O)} + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{\Omega}} \qquad (1.53)$$

qui est bien l'expression qui caractérise un champ de vecteurs et donc un champ de moments en particulier.