

Année universitaire 2007-2008



Module de mécanique fondamentale

Mécanique générale et analytique

Emmanuel Plaut

Table des matières

Deux citations... ou « <i>pourquoi tant de maths ?</i> »...	1
Introduction	3
Contrat d'objectifs	5
1 Cinématique des solides indéformables - Composition des mouvements	7
1.1 Mouvements de solides indéformables - Référentiels	7
1.1.1 Description générale d'un mouvement	7
1.1.2 Mouvement de solide indéformable : approche par étude des déformations	8
Éléments mathématiques sur le calcul tensoriel	9
1.1.3 Notion de référentiel - Cadre de travail	12
1.1.4 Mouvement de solide indéformable : approche par étude directe	13
1.1.5 Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Oz	15
1.1.6 Cas d'un solide en mouvement autour d'un point fixe O : angles d'Euler	16
1.1.7 Cas général	18
1.2 Composition des mouvements par changement de référentiel	18
1.2.1 Composition des dérivées temporelles de vecteurs	18
1.2.2 Composition des vitesses	19
1.2.3 Composition des vecteurs rotations instantanées	20
1.2.4 Composition des accélérations	20
1.3 Exercices	21
Ex. 1.1 : Cinématique d'une grande roue de fête foraine	21
Ex. 1.2 : Étude de l'« indéformabilité » d'un champ de vecteurs donné	21
Ex. 1.3 : De la force d'inertie dite « centrifuge »	21
2 Cinétique des masses et inertie	23
2.1 Masse - Centre d'inertie - Référentiel de Koenig	23
2.1.1 La masse est la quantité de matière	23
2.1.2 Convention d'écriture d'une quantité proportionnelle à la masse	24
2.1.3 Centre d'inertie et référentiel de Koenig	24
2.2 Résultante et moment cinétiques	25
2.2.1 Définitions	25
2.2.2 Premier théorème de Koenig	26

2.3	Tenseur d'inertie	26
2.3.1	Définitions et propriétés générales	26
2.3.2	Théorème de Huyghens	28
2.3.3	Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe	28
2.3.4	Cas d'un solide en mouvement autour d'un point fixe O	29
2.3.5	Cas général de mouvement solide	29
2.3.6	Tenseurs d'inertie de solides homogènes de forme simple	29
2.4	Énergie cinétique	32
2.4.1	Définition	32
2.4.2	Second théorème de Koenig	33
2.4.3	Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe	33
2.4.4	Cas d'un solide en mouvement autour d'un point fixe O	33
2.4.5	Cas général de mouvement solide	33
2.5	Exercices	34
Ex. 2.1 :	Calcul de tenseurs d'inertie de solides homogènes de forme simple	34
Ex. 2.2 :	Étude de l'inertie d'un rotor disque excentré incliné	34
Ex. 2.3 :	Étude de l'inertie d'un vilebrequin de moteur bicylindre	35
Ex. 2.4 :	Étude de l'inertie d'une hélice d'hélicoptère	36
3	Dynamique newtonienne	37
3.1	Loi fondamentale pour un point matériel - Choix du référentiel de travail	37
3.1.1	Loi fondamentale de la dynamique en référentiel galiléen	37
3.1.2	Loi fondamentale de la dynamique en référentiel non galiléen	37
3.1.3	Du référentiel de Copernic au référentiel géocentrique - Et de la gravité	38
3.1.4	Du référentiel géocentrique au référentiel du laboratoire	39
3.2	Introduction aux lois globales : cas d'un système discret	40
3.2.1	Loi d'évolution de l'énergie cinétique - Notion de puissance d'efforts	41
3.2.2	Loi de l'action-réaction - Notion de résultante et moment d'efforts	42
3.2.3	Loi d'évolution de la résultante cinétique	43
3.2.4	Loi d'évolution du moment cinétique	43
3.3	Lois globales dans le cas général	43
3.3.1	Lois d'évolution de la résultante et du moment cinétique	44
3.3.2	Loi d'évolution de l'énergie cinétique	45
3.3.3	Forme intégrée par rapport au temps - Notion de travail	46
3.4	Introduction à la problématique de l'équilibrage des rotors	47
3.5	Exercices et problèmes	48
Pb. 3.1 :	Étude des mouvements de rotation de solides - Introduction aux gyroscopes	48
Ex. 3.1 :	Dynamique d'un disque en roulement-pivotement sur un plan horizontal	49
Pb. 3.2 :	Équilibrage d'un rotor quelconque	50
Pb. 3.3 :	Étude d'un avion à hélice(s) bipale(s) ou tripale(s)	52

4 Liaisons - Formalisme lagrangien	55
4.1 Liaisons	55
4.1.1 Paramétrage d'un système - Liaisons	55
4.1.2 Mouvements virtuels (compatibles)	56
4.1.3 Liaisons parfaites	57
4.1.4 Liaison pivot	58
4.1.5 Liaison glissière	58
4.1.6 Liaison pivot glissant	59
4.1.7 Liaison rotule ou articulation	59
4.1.8 Liaison appui plan	59
4.1.9 Liaisons de contact « ponctuel » parfaites	60
4.1.10 Liaisons de contact « ponctuel » imparfaites avec frottement : lois de Coulomb	60
4.2 Établissement des équations de Lagrange	61
4.2.1 Théorème des puissances virtuelles	62
4.2.2 Théorème de d'Alembert	63
4.2.3 Calcul des forces d'inertie généralisées	65
4.2.4 Calcul des forces généralisées : efforts donnés potentiels - Exemples types	67
4.2.5 Équations de Lagrange	70
4.3 Application : étude des petits mouvements autour d'une position d'équilibre	71
4.4 Extension : fonction de dissipation de Rayleigh	73
4.5 Exercices et problèmes	74
Ex. 4.1 : Étude introductive de la dynamique d'un moteur monocylindre	74
Ex. 4.2 : Modélisation d'un pendule double	76
Ex. 4.3 : Modélisation du flambement d'une poutre par un système à 1 d.d.l.	77
Ex. 4.4 : Modélisation du flambement d'une poutre par un système à 2 d.d.l.	77
Ex. 4.5 : Étude du fonctionnement d'un régulateur centrifuge à boules	78
Ex. 4.6 : Étude des petits mouvements d'un demi-disque sur une droite horizontale	79
Pb. 4.1 : Étude introductive d'un réducteur à train planétaire	80
Pb. 4.2 : Étude des mouvements d'un satellite éventuellement structuré	81
5 Formalisme hamiltonien	85
5.1 Établissement des équations de Hamilton	85
5.1.1 Transformation de Legendre - Hamiltonien - Moments conjugués	85
5.1.2 Équations de Hamilton	86
5.2 Conservation du hamiltonien	87
5.3 Loi de conservation associée à une coordonnée cyclique	87
5.4 Exercice	88
Ex. 5.1 : Étude d'un pendule à deux degrés de liberté	88
A TP Mathematica : étude d'un pendule double	89
B Règles de notation et d'annotation de vos copies	93
Index des unités	95

Bibliographie

97

« La philosophie est écrite dans ce vaste livre qui constamment se tient ouvert devant nos yeux (je veux dire l'Univers), et on ne peut le comprendre si d'abord on n'apprend pas à connaître la langue et les caractères dans lesquels il est écrit. Or il est écrit en langue mathématique, (...) sans laquelle il est humainement impossible d'en comprendre un seul mot, sans laquelle on erre vraiment dans un labyrinthe obscur. »

Galilée

« La Géométrie appartient en quelque chose à la Mécanique. »

Newton

Introduction

Ce cours constitue la première partie du *module de mécanique fondamentale* de l'ENSEM ; la deuxième partie de ce module sera le cours de *mécanique des milieux continus* enseigné par Rachid Rahouadj.

La première partie de ce cours, constituée des chapitres 1, 2 et 3, constitue une « mise à niveau » en *mécanique générale*, entendue essentiellement comme la mécanique de systèmes composées de parties *solides indéformables*. Les *solides indéformables* représentent une classe particulière de « *milieux continus* », ce terme étant utilisé pour signifier que l'on considère la matière à une échelle « macroscopique » (disons au moins micrométrique) à laquelle la matière apparaît comme « continue »¹. Grâce à des compléments de *cinématique* donnés dans le chapitre 1, qui anticipe d'ailleurs sur le chapitre correspondant de Rahouadj (2006), nous allons définir les *solides indéformables* comme des *solides dont les déformations sont nulles*. Dans le chapitre 2 la *théorie de la cinétique des solides indéformables* est développée ; on introduit en particulier la notion importante de *tenseur d'inertie*. Des rappels et compléments de *dynamique newtonienne* sont enfin donnés dans le chapitre 3.

La deuxième partie de ce cours, constituée des chapitres 4 et 5, est une introduction à la *mécanique analytique*. La mécanique analytique est une méthode de modélisation de systèmes mécaniques solides unifiée, efficace et d'une grande valeur prédictive. On établit ainsi les *formalismes lagrangien et hamiltonien* pour l'étude de *systèmes constitués de solides indéformables liés par des liaisons parfaites et soumis à des efforts potentiels* ; dans certains cas des liaisons de type élastique pourront être décrites par ce formalisme, puisque les efforts correspondants dérivent d'une énergie potentielle élastique. Cette classe de systèmes est assez intéressante pour l'ingénieur, car, en première approximation, on peut modéliser de nombreux systèmes réels (mécanismes, machines, moteurs, véhicules, structures, etc...) par des systèmes de ce type. Pouvoir écrire rapidement les équations de la dynamique de tels systèmes, en particulier sans avoir à calculer les inconnues de liaison, constitue donc la motivation au niveau « ingénierie » de cette partie. Dans cette optique, un prolongement naturel de ce cours est l'étude de la *dynamique des structures*, esquissée ici par une première approche des problèmes de *stabilité* des solutions d'équilibre, et qui se poursuivra en deuxième année en filière mécanique. Signalons aussi que, pour des questions de temps, les sections 4.1.10 et 4.4 ainsi que le chapitre 5 ne seront pas abordés lors du cours oral, et pourront donc être considérés comme des « compléments culturels » hors programme.

Chaque chapitre contient une liste d'exercices et de problèmes référencés dans la table des matières, dont certains seront abordés en petite classe. L'annexe A présente le sujet de TP « Mathematica » que vous devrez traiter à la fin de ce cours, et l'annexe B les règles de notation et d'annotation de vos copies de test et d'examen. Signalons enfin qu'un contrat d'objectifs vous est proposé après cette introduction.

Il ne faudra pas s'étonner de l'usage permanent d'outils mathématiques tels que le calcul tensoriel par exemple, qui permettent la mise en place de méthodes sûres et efficaces ; signalons à ce propos que quelques « *parenthèses mathématiques* » complétant le corps du texte seront introduites par le symbole **X**. Que les

¹Bien sûr la *mécanique quantique* (que l'on n'enseigne pas à l'ENSEM car elle est peu utile pour l'ingénieur électromécanicien « standard ») nous apprend que la matière observée à petite échelle est essentiellement discontinue puisque composée de « particules élémentaires » ou atomes. La notion de milieu continu sera reprise et précisée par Rahouadj (2006).

élèves que les mathématiques rebutent méditent les citations des maîtres qui précèdent cette introduction... D'ailleurs un autre prolongement naturel de ce cours serait l'étude des *systèmes dynamiques* , qui constitue une sous-discipline des mathématiques recellant des surprises intéressantes : voir par exemple la discussion de la page 76 ainsi que le cours du Master 2 recherche de mécanique - énergétique de Jean-Régis Angilella.

L'étudiant mécanicien, qui se doit donc d'être un bon mathématicien, ne devra pas oublier non plus qu'il est aussi un physicien. En effet la mécanique des systèmes indéformables, par exemple celle des objets célestes « vus de loin », est historiquement la première discipline de la physique, dont le développement au XVII^{ème} siècle a contribué à l'avènement de la science moderne. Faire de la mécanique, c'est donc avant tout faire de la physique, comme nous essaierons de le montrer à plusieurs reprises, par exemple en menant une petite réflexion sur les systèmes d'unités - réflexion visant aussi à ancrer la connaissance de quelques « ordres de grandeur » utiles... De plus, les limitations que rencontrent la mécanique classique, que ce soit du côté de l'infiniment petit (mécanique quantique) ou du très rapide (mécanique relativiste), n'ont été bien comprises que récemment, et ouvrent donc sur la recherche contemporaine en physique fondamentale... Globalement, nous ne pourrons, pour des questions de temps, qu'effleurer ces points de vue culturels, essentiellement lors de petites « *parenthèses du physicien* » signalées par le symbole Φ .

Afin de vous faciliter la tâche et de ne pas rajouter des difficultés inutiles à votre apprentissage, on utilisera dans ce document les *conventions de notation* suivantes, qui consistent en une extension simple des notations que vous avez utilisées en classes préparatoires :

- les caractères italiques désignent les scalaires ou les composantes de tenseurs (exemple : x) ;
- les caractères majuscules droits désignent les points matériels (exemple : M) ;
- les caractères gras surmontés d'une flèche désignent les vecteurs (exemple : \vec{v}), le vecteur unitaire dans la direction des lignes de la coordonnée x étant noté \vec{e}_x ;
- les caractères gras surmontés d'une double flèche désignent les tenseurs d'ordre deux (exemple : $\vec{\epsilon}$) ;
- les caractères gras désignent les tableaux unidimensionnels de nombres (exemple : \mathbf{q}) ;
- les caractères gras italiques désignent les tableaux bidimensionnels de nombres i.e. les matrices (exemple : \mathbf{M}).

Vous devez cependant être conscient du fait que dans la plupart des traités de mécanique, que vous trouverez par exemple au centre de documentation de l'INPL, des notations plus concises sans flèches sont en général utilisées, par exemple \underline{v} au lieu de \vec{v} et $\underline{\underline{\epsilon}}$ au lieu de $\vec{\epsilon}$.

Avertissons que ce photocopié ne contient pratiquement pas d'exemples, mais que ceux-ci seront donnés lors du cours oral ou des petites classes, qui seront très complémentaire du cours écrit². Le plan pratique de déroulement de ce cours (emploi du temps, contenu du cours oral et des petites classes, plus quelques conseils et recommandations) est présenté sur la *page web* évolutive

www.ensem.inpl-nancy.fr/Emmanuel.Plaut/mga

que je vous invite à consulter régulièrement. Cette page contient aussi les règles d'évaluation de ce cours, ainsi que des annales corrigées...

Je tiens à remercier ici très chaleureusement Didier Bernardin, Rachid Rahouadj et Olivier Séro-Guillaume, qui, par leurs remarques, suggestions, corrections... ou dessins (!) m'ont permis d'améliorer ce document au fil des années³.

Nancy, le 26 septembre 2007.

Emmanuel Plaut.

²À titre d'exemple, ce n'est que dans le cours oral que la problématique de l'équilibrage des rotors sera présentée...

³Il leur reste du pain sur la planche puisque cette version présente est encore bien imparfaite.

Contrat d'objectifs

À toutes fins utiles - vous pouvez imaginer de « cocher » -, ce contrat est disponible sur

www.ensem.inpl-nancy.fr/Emmanuel.Plaut/mga

§

Lorsque vous aurez assimilé le **chapitre 1**, vous devrez être capable...

- d'expliciter le champ de vitesse (de moments!) et d'accélération d'un solide indéformable quelconque;
- de manipuler les lois de composition des mouvements par changement de référentiel :
 - composition des dérivées temporelles de vecteurs,
 - composition des vitesses,
 - composition des vecteurs rotations instantanés,
 - composition des accélérations.

§

Lorsque vous aurez assimilé le **chapitre 2**, vous devrez être capable, étant donné la distribution de masse d'un système et son mouvement, d'exprimer et de calculer (grâce éventuellement aux théorèmes de Koenig et de Huyghens)...

- le centre d'inertie de ce système,
- la résultante cinétique de ce système,
- le moment cinétique de ce système, éventuellement grâce au tenseur d'inertie de ce système,
- l'énergie cinétique de ce système.

§

Lorsque vous aurez assimilé le **chapitre 3**, vous devrez être capable d'écrire pour un système « quelconque » les lois fondamentales de la dynamique :

- la loi d'évolution de la résultante cinétique,
- la loi d'évolution du moment cinétique,
- la loi d'évolution de l'énergie cinétique.

Lorsque vous aurez assimilé le *chapitre 4*, vous devrez être capable...

- de paramétrer un système « lié » avec des coordonnées généralisées ;
- de décrire des liaisons parfaites à l'aide des mouvements virtuels qu'elles permettent
- et d'en déduire des informations sur les efforts de liaison correspondants ;
- d'expliciter le théorème des puissances virtuelles pour un système donné :
 - écriture de la puissance virtuelle des quantités d'accélération,
 - écriture de la puissance virtuelle des efforts appliqués ;
- d'expliciter le théorème de d'Alembert pour un système donné :
 - identifier des forces d'inertie généralisées,
 - identifier des forces généralisées ;
- d'expliciter les équations de Lagrange pour un système donné :
 - écriture de la fonction énergie cinétique,
 - écriture de la fonction énergie potentielle,
 - écriture des équations de Lagrange proprement dites ;
- de déterminer pour un système donné ses positions d'équilibre
- et les petits mouvements autour de celles-ci.

Chapitre 1

Cinématique des solides indéformables Composition des mouvements

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la *cinématique*¹, c'est-à-dire à la description géométrique des mouvements sans se soucier de l'origine physique de ces mouvements. Après quelques éléments généraux sur la cinématique des milieux continus, nous nous focalisons sur les *solides « indéformables »*, pour lesquels on peut négliger toute déformation ; il s'agit bien entendu d'une approximation, aucun solide n'étant parfaitement indéformable. Nous définissons aussi, afin de positionner correctement notre vision classique d'un espace-temps euclidien justement universel et indéformable (!) dans un contexte plus large, les limites de ce cours de *mécanique classique*. Enfin nous rappelons toutes les *formules de changement de référentiels*.

1.1 Mouvements de solides indéformables - Référentiels

1.1.1 Description générale d'un mouvement

Dans ce cours nous nous intéressons à la dynamique d'un ou plusieurs solides indéformables éventuellement liés. Cette dynamique est caractérisée par un observateur imaginaire, réputé « immobile », capable de mesurer « à l'oeil » des temps et des distances. Le nom générique de cet observateur « omniscient », pour nous mécaniciens, est « *référentiel* » ; nous reviendrons sur cette notion importante section 1.1.3.

Un solide est, pour nous, un « milieu continu »², repéré dans une position de référence par un ensemble de points matériels M_0 de l'espace physique, qui, lors du mouvement décrit de façon *lagrangienne*, c'est-à-dire *en suivant ces points matériels*, se trouvent à l'instant t en des positions $M(t)$. En théorie notre observateur omniscient peut déterminer une fonction $\vec{\Phi}$ telle que, si O est un point fixe origine qu'il s'est choisi,

$$\forall t, \forall M_0, \overrightarrow{OM}(t) = \vec{\Phi}(\overrightarrow{OM_0}, t) . \quad (1.1)$$

La fonction $\vec{\Phi}$ doit posséder de bonnes propriétés³, par exemple une régularité de type C^1 ; d'autre part $\vec{\Phi}(.,t)$ se doit d'être bijective. Sa réciproque $\vec{\Psi}(.,t)$ permet donc de passer de la configuration actuelle à la

¹Du grec « kinéma » : mouvement.

²Voir l'introduction page 3.

³En effet le milieu continu matériel doit conserver cette nature ; ces propriétés seront passées en revue dans Rahouadj (2006).

configuration de référence :

$$\forall t, \forall M(t), \quad \overrightarrow{\mathbf{OM}_0} = \overrightarrow{\Psi}(\overrightarrow{\mathbf{OM}}(t), t). \quad (1.2)$$

Toujours en description lagrangienne, le vecteur vitesse du point matériel que l'on est en train de suivre est

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}(\overrightarrow{\mathbf{OM}_0}, t) = \frac{\partial \overrightarrow{\Phi}}{\partial t}(\overrightarrow{\mathbf{OM}_0}, t). \quad (1.3)$$

Dans une description *eulérienne* du mouvement, on s'intéresse à la vitesse instantanée du point matériel coïncidant avec M *point donné de l'espace* à l'instant t , voulant en quelque sorte « oublier » la configuration de référence⁴. Cette vitesse est donnée par

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}(\overrightarrow{\mathbf{OM}}, t) = \overrightarrow{\mathbf{V}}(\overrightarrow{\Psi}(\overrightarrow{\mathbf{OM}}, t), t) \quad (1.4a)$$

et notée en général de façon plus simple

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{v}}(M, t) = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{dt}}, \quad (1.4b)$$

le d/dt voulant désigner la « dérivée dans le mouvement »⁵.

1.1.2 Mouvement de solide indéformable : approche par étude des déformations

Pour définir la notion de déformabilité/indéformabilité d'un solide, on peut penser à étudier la façon dont évolue le produit scalaire entre deux petits segments matériels issus d'un même point A , soient les segments AM et AM' avec

$$M = A + d\overrightarrow{\mathbf{M}} \quad \text{et} \quad M' = A + d\overrightarrow{\mathbf{M}'}. \quad (1.5)$$

Si le solide est indéformable, le produit scalaire correspondant, d'après sa signification géométrique, doit être conservé, ce que l'on peut écrire de façon différentielle sous la forme

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{\mathbf{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AM}'}) = 0.$$

En utilisant la bilinéarité du produit scalaire et la définition (1.4a) du champ de vitesse, on obtient, en omettant de rappeler la dépendance en temps, la condition

$$\overrightarrow{\mathbf{AM}} \cdot \frac{d\overrightarrow{\mathbf{AM}'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{\mathbf{AM}}}{dt} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AM}'} = \overrightarrow{\mathbf{AM}} \cdot (\overrightarrow{\mathbf{v}}(M') - \overrightarrow{\mathbf{v}}(A)) + (\overrightarrow{\mathbf{v}}(M) - \overrightarrow{\mathbf{v}}(A)) \cdot \overrightarrow{\mathbf{AM}'} = 0. \quad (1.6)$$

Afin de pouvoir exploiter plus avant cette condition, on va utiliser l'hypothèse que les segments AM et AM' sont infiniment petits, d'où la possibilité d'approcher les différences de vitesse qui apparaissent grâce à l'application linéaire tangente ou différentielle du champ de vitesse. Cette application, que les mécaniciens préfèrent désigner comme le « gradient (eulérien) de $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ en A », et noter $\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\mathbf{v}})$, est définie par l'identité suivante

$$\forall d\overrightarrow{\mathbf{M}}, \quad d\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\mathbf{v}}) \cdot d\overrightarrow{\mathbf{M}} \quad (1.7)$$

où $d\overrightarrow{\mathbf{v}}$ est l'approximation linéaire de $\overrightarrow{\mathbf{v}}(A + d\overrightarrow{\mathbf{M}}) - \overrightarrow{\mathbf{v}}(A)$ valable quand $d\overrightarrow{\mathbf{M}}$ tend vers $\overrightarrow{\mathbf{0}}$. Utilisant (1.5) et (1.7), on peut récrire la condition (1.6) linéarisée sous la forme

$$d\overrightarrow{\mathbf{M}} \cdot (\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\mathbf{v}}) \cdot d\overrightarrow{\mathbf{M}'}) + (\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\mathbf{v}}) \cdot d\overrightarrow{\mathbf{M}}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}'} = 0.$$

⁴En termes heuristiques on peut dire qu'Euler a moins de mémoire que Lagrange (!), ou encore que, pour Euler, c'est l'espace qui prime, alors que pour Lagrange, c'est la matière.

⁵On parle aussi parfois de « dérivée totale par rapport au temps ». Un exemple de calcul des transformations $\overrightarrow{\Phi}$ et $\overrightarrow{\Psi}$ sera offert dans l'exercice 1.1 traité dans la partie « méthodologie » de la première petite classe.

En utilisant la transposition des tenseurs il vient

$$d\vec{\mathbf{M}} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla}(\vec{\mathbf{v}}) \cdot d\vec{\mathbf{M}}' \right) + d\vec{\mathbf{M}} \cdot \left({}^T \overrightarrow{\nabla}(\vec{\mathbf{v}}) \cdot d\vec{\mathbf{M}}' \right) = 0$$

soit par bilinéarité

$$d\vec{\mathbf{M}} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla}(\vec{\mathbf{v}}) + {}^T \overrightarrow{\nabla}(\vec{\mathbf{v}}) \right) \cdot d\vec{\mathbf{M}}' = 0.$$

Ceci étant valable quels que soient $d\vec{\mathbf{M}}$ et $d\vec{\mathbf{M}}'$ asymptotiquement petits, il vient la condition d'indéformabilité

$$\overrightarrow{\nabla}(\vec{\mathbf{v}}) + {}^T \overrightarrow{\nabla}(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{0}}. \quad (1.8)$$

Avant de revenir sur les tenseurs d'un point de vue mathématique⁶, et de résoudre cette équation tensorielle aux dérivées partielles, mentionnons que le tenseur trouvé ici, dans le membre de gauche de cette équation, n'est autre que le double du *tenseur des vitesses de déformation* $\vec{\mathbf{d}}$, que l'on retrouvera avec joie dans Rahouadj (2006)...

X Dans le contexte de ce cours, un *tenseur d'ordre deux* $\overrightarrow{\mathbf{L}}$ est une *application linéaire*⁷ de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 dans lui-même qui à tout vecteur $\vec{\mathbf{x}}$ associe le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{x}}$. Le point entre $\overrightarrow{\mathbf{L}}$ et $\vec{\mathbf{x}}$ signifie naturellement l'opération de *produit contracté*, qui correspond ici au produit d'une matrice avec un vecteur lorsque l'on a choisi une base de travail $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$: si

$$\mathbf{M} = \mathbf{Mat} \left(\overrightarrow{\mathbf{L}}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\} \right) = (L_{ij})_{i=1,2,3, j=1,2,3} \quad (1.9)$$

est la matrice représentant le tenseur sur cette base, et

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{\mathbf{e}}_i, \quad (1.10)$$

alors

$$\overrightarrow{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 L_{ij} x_j \vec{\mathbf{e}}_i. \quad (1.11)$$

Rappelons que si l'on opère un changement de base orthonormée entre les bases $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ et $\{\vec{\mathbf{e}}_{i'}\}$, les vecteurs colonnes représentant les vrais vecteurs

$$\mathbf{x} = \mathbf{Vect} \left(\vec{\mathbf{x}}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\} \right) = (x_i)_{i=1,2,3} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{Vect} \left(\vec{\mathbf{x}}, \{\vec{\mathbf{e}}_{i'}\} \right) = (x'_{i'})_{i'=1,2,3}$$

se transforment suivant

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}' \quad (1.12)$$

où \mathbf{P} est la matrice de passage d'élément générique $\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_{j'}$ (ici le point désigne toujours le produit contracté mais s'interprète, maintenant, comme le produit scalaire euclidien). En conséquence dans la nouvelle base $\{\vec{\mathbf{e}}_{i'}\}$ la nouvelle matrice représentant le tenseur $\overrightarrow{\mathbf{L}}$ est

$$\mathbf{M}' = \mathbf{Mat} \left(\overrightarrow{\mathbf{L}}, \{\vec{\mathbf{e}}_{i'}\} \right) = {}^T \mathbf{P} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}, \quad (1.13)$$

${}^T \mathbf{P}$ désignant la transposée de \mathbf{P} , qui est aussi son inverse.

Un concept utile permettant une écriture concise et intrinsèque des tenseurs est celui de *produit tensoriel*. Si $\vec{\mathbf{a}}$ et $\vec{\mathbf{b}}$ sont deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , on définit leur produit tensoriel par

$$\forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3, \quad \left(\vec{\mathbf{a}} \otimes \vec{\mathbf{b}} \right) \cdot \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} \left(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{x}} \right). \quad (1.14)$$

⁶Le complément qui suit est très succinct, et il faudra surtout se référer au cours de calcul tensoriel d'Antoine (2006).

⁷Les mathématiciens disent aussi *endomorphisme*.

On peut donc, par exemple, récrire (1.9) sous la forme

$$\overleftrightarrow{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 L_{ij} \vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{e}}_j . \quad (1.15)$$

Il n'y a aucun risque d'oublier la base de travail choisie avec une telle écriture explicite, que l'on essaiera donc de privilégier.

Revenant à (1.7), en écrivant les formules de différentiation

$$dv_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j ,$$

on obtient par identification

$$\overleftrightarrow{\nabla}(\vec{\mathbf{v}}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{e}}_j . \quad (1.16)$$

Rappelons finalement la définition intrinsèque de la transposition des tenseurs, qui correspond heureusement à la transposition des matrices : si $\overleftrightarrow{\mathbf{L}}$ est un tenseur donné, le tenseur transposé ${}^T\overleftrightarrow{\mathbf{L}}$ est l'unique tenseur vérifiant

$$\forall \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{x}} \cdot \left(\overleftrightarrow{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{y}} \right) = \left({}^T\overleftrightarrow{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{x}} \right) \cdot \vec{\mathbf{y}} . \quad (1.17)$$

Ce décor tensoriel étant planté, on peut maintenant s'attaquer à la résolution de l'équation (1.8) dans le domaine connexe occupé par le solide. On considère d'abord les composantes diagonales de (1.8),

$$\forall i \in \{1,2,3\}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 .$$

En intégrant par rapport à x_i on obtient

$$v_1 = v_1(x_2, x_3), \quad v_2 = v_2(x_3, x_1), \quad v_3 = v_3(x_1, x_2) . \quad (1.18)$$

La composante d'indices 1 2 de (1.8) donne

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_2, x_3) = -\frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x_3, x_1) .$$

À x_3 fixé le premier membre ne dépend que de x_2 alors que le second membre ne dépend que de x_1 ; comme ces variables sont indépendantes on en déduit

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_2, x_3) = -\frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x_3, x_1) = f(x_3) ,$$

d'où, en intégrant par rapport à x_2 , puis x_1 ,

$$v_1 = x_2 f(x_3) + g(x_3), \quad v_2 = -x_1 f(x_3) + h(x_3) . \quad (1.19)$$

La composante d'indices 1 3 de (1.8) donne

$$x_2 f'(x_3) + g'(x_3) = -\frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x_1, x_2) .$$

À x_2 fixé le premier membre ne dépend que de x_3 alors que le second membre ne dépend que de x_1 ; comme ces variables sont indépendantes on en déduit

$$x_2 f'(x_3) + g'(x_3) = -\frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x_1, x_2) = i(x_3) , \quad (1.20)$$

d'où le fait que $f'(x_3)$ et $g'(x_3)$ sont constantes, c'est-à-dire que $f(x_3)$ et $g(x_3)$ sont affines⁸. Alors $i(x_2)$ aussi est affine, et en reprenant (1.19) et (1.20) on obtient

$$v_1 = Ax_2x_3 + Bx_2 + Cx_3 + D, \quad v_2 = -Ax_1x_3 - Bx_1 + h(x_3), \quad v_3 = -Ax_2x_1 - Cx_1 + j(x_2). \quad (1.21)$$

La composante d'indices 2 3 de (1.8) donne enfin

$$-Ax_1 + h'(x_3) = Ax_1 - j'(x_2).$$

À x_1 fixé le premier membre ne dépend que de x_3 , le second membre que de x_2 , donc

$$-Ax_1 + h'(x_3) = Ax_1 - j'(x_2) = k(x_1).$$

On en déduit que $h(x_3)$ et $j(x_2)$ sont affines, puis que $A = 0$, puis que $h'(x_3) = -j'(x_2)$. Au bilan

$$v_1 = Bx_2 + Cx_3 + D, \quad v_2 = -Bx_1 + Ex_3 + F, \quad v_3 = -Cx_1 - Ex_2 + G, \quad (1.22)$$

d'où, en introduisant les vecteurs

$$\vec{v}_0 = D\vec{e}_1 + F\vec{e}_2 + G\vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \vec{\Omega} = -E\vec{e}_1 + C\vec{e}_2 - B\vec{e}_3, \quad (1.23)$$

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) + \vec{v}_0. \quad (1.24)$$

X

Une simple reformulation de (1.24) montre que tout champ de vitesse de solide indéformable doit être un **champ de moments** de la forme

$$\boxed{\forall A, M \text{ points du solide, } \vec{v}(M,t) = \vec{v}(A,t) + \vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{AM}}. \quad (1.25)$$

La **résultante** $\vec{\Omega}$ de ce champ de moments, qui ne dépend que de l'instant t considéré, est le **vecteur rotation instantanée** du solide; on le désigne aussi parfois comme le **vecteur vitesse de rotation instantanée**. Dans certains cours de mécanique on fait d'ailleurs correspondre à un tel champ de moments un **torseur**, en l'occurrence le **torseur cinématique** du solide⁹

$$\{\mathcal{T}_{\text{cinématique}}(M)\} := \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega} \\ \vec{v}(M) \end{array} \right\}. \quad (1.26)$$

En conséquence le vecteur $\vec{\Omega}$ est parfois désigné comme la **résultante cinématique** du solide.

L'équation (1.25) montre qu'un **mouvement solide** est entièrement déterminé par la donnée au cours du temps

du mouvement d'un point particulier de ce solide (\leftrightarrow terme $\vec{v}(A)$)

et du vecteur rotation instantanée de ce solide (\leftrightarrow terme $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$).

Cette simplicité est une bonne nouvelle, justifiant que dans ce cours de mécanique générale on n'ait pas encadrée la formule (1.4a) dont on peut éventuellement se passer¹⁰. En faisant référence à cette décomposition en deux termes, on peut dire qu'un mouvement solide est (instantanément!) la composition

⁸Une fonction f affine de x est une fonction de la forme

$$f(x) = Ax + B,$$

c'est-à-dire un polynôme de degré 1 en x .

⁹L'emploi du symbole $:=$ au lieu du symbole $=$ indique une relation de **définition**.

¹⁰Par contre la formule (1.4a) sera encadrée dans le cours de mécanique des milieux continus *déformables* de Rahouadj (2006)!...

d'une **translation** (on désigne ainsi la contribution de $\vec{v}(A)$ dans l'équation (1.25) - attention, le mouvement du point particulier A n'est pas toujours un mouvement de translation uniforme, loin de là! Ce peut par exemple être un mouvement de « rotation », voir par exemple l'exercice 1.1 ou la discussion de la section 3.1.3!)

et d'une **rotation** (on désigne ainsi la contribution de $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$ dans l'équation (1.25), contribution qui va être étudiée et interprétée comme résultant effectivement d'une rotation dans les sous-sections à venir).

Sauf en cas de chocs, on exige des fonctions vectorielles correspondantes $\vec{v}(\vec{A}, t)$ et $\vec{\Omega}(t)$ qu'elles soient continues et dérivables.

1.1.3 Notion de référentiel - Cadre de travail

On peut revenir maintenant à la notion de **référentiel**, en disant que se donner un référentiel c'est se donner un **mouvement solide indéformable de référence**, à savoir le mouvement de la chaise sur laquelle l'observateur imaginaire est assis... Il faut bien distinguer ce choix d'un mouvement solide de référence, qui relève de la physique, de celui du *repère* (un point origine + une base orthonormée) et du *système de coordonnées* (cartésiennes, cylindriques ou sphériques), qui relève plutôt de la technique mathématique. Dans le même référentiel, on pourra être amené, selon les symétries du problème étudié, à utiliser des repères différents et/ou des systèmes de coordonnées différents.

Précisons bien que dans ce cours on ne considérera que des mouvements se produisant à des vitesses relatives très faibles par rapport à celle de la lumière (1.27), et on négligera donc tous les effets relativistes. Dans ce cadre de **mécanique classique** ou de « **relativité galiléenne** », les notions de temps et de distance sont **absolues**, et on peut donc affirmer qu'un **référentiel** c'est **l'espace euclidien**, dont la métrique est universelle, entraîné par le mouvement d'un observateur, **plus la droite du temps**, qui s'écoule identiquement pour tous.

Φ Dans le cas de vitesses approchant celle de la lumière, dit de la **mécanique relativiste einsteinnienne**, les notions de distance et de temps deviennent **relatives**, c'est-à-dire qu'elles dépendent du référentiel. Pire, en **relativité générale**, lorsque l'on considère de grandes masses et/ou de grandes distances, d'ordre astronomique, l'espace physique n'apparaît même plus comme euclidien...

Mentionnons de façon plus « terre à terre » que les définitions modernes (dans le système international ou SI) des unités de temps (cette définition date de 1967) et de distance (celle-la date de 1983) nécessaires à la mécanique classique font appel à des notions de mécanique quantique et relativiste, qui toutes deux sortent du cadre classique de ce cours!... Ainsi la seconde (s) est définie comme « la durée de 9192631770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de Césium 133 » mesurable par une horloge atomique, ce phénomène étant d'origine quantique, tandis que « le mètre (m) est la longueur parcourue dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299792458 de seconde » (voir par exemple Jedrzejewski 2002), la constance de cette vitesse de la lumière

$$c = 299792458 \text{ m/s} \simeq 300000 \text{ km/s} \quad (1.27)$$

étant elle-même un phénomène relevant de la relativité! On est confronté au fait, fréquent en physique, que la compréhension profonde d'une théorie simple requiert la connaissance des théories plus complexes qui l'englobent...

D'un point de vue *historique*, nous pouvons être fiers du rôle important joué par la France dans la mise en place du **système métrique décimal**, ancêtre du **système international** (SI). Cette mise en place a été lancée par la révolution française, et les élèves férus d'histoire des sciences pourront lire à ce sujet le livre de Guedj (2000). La première définition scientifique de l'unité de longueur a ainsi été posée par une loi française de 1795 : « le mètre est la dix millionième partie de l'arc de méridien terrestre entre le pôle

boréal et l'équateur ». Ainsi cet arc mesure 10000 km (de 1795), donnée à retenir pour des applications géophysiques de la mécanique. On en déduit en particulier le rayon terrestre r_T puisque

$$\frac{1}{4}2\pi r_T = 10000 \text{ km} \iff r_T = \frac{2}{\pi} 10000 \text{ km} = 6370 \text{ km} .$$

Pour l'anecdote la mise en place du mètre a nécessité une mesure précise de la longueur d'une portion de l'arc de méridien terrestre, mesure effectuée dans des conditions difficiles voire héroïques entre 1792 à 1798, comme cela est raconté dans un style très vivant par Guedj (2000). Mentionnons aussi, pour garder la tête froide et modérer d'éventuelles ardeurs chauvines, que l'unité de temps choisie par les savants français de l'époque révolutionnaire, à savoir la seconde « cent-millième partie du jour astronomique », a eu infiniment moins de succès que l'unité de longueur choisie par ces mêmes savants, puisqu'elle fut abandonnée moins de douze ans après son adoption, c'est-à-dire en 1805 (Guedj 2000).

Le système SI dont on a finalement hérité après quelques aléas est quand même bien pratique puisque correspondant à des vitesses typiques de l'être humain,

$$1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$$

étant une vitesse de marche à cadence normale.

Φ

Dans la suite de cette section, nous décrirons pour simplifier les divers mouvements solides possibles dans un référentiel réputé « fixe » ou « absolu » \mathcal{R}_0 . La désignation de $\vec{\Omega}$ comme « vecteur rotation instantanée » d'un solide se justifiera en considérant le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe section 1.1.5. Avant cela donnons une méthode différente de celle passant par les déformations pour établir que la structure du champ de vitesse d'un solide indéformable est toujours celle d'un champ de moments (1.25).

1.1.4 Mouvement de solide indéformable : approche par étude directe

On oublie ici volontairement les résultats de la section 1.1.2 afin de les établir d'une autre façon. Pour cela on part du fait que, étant donné un point particulier A d'un solide indéformable, et un point quelconque M de ce même solide, l'application \vec{f} qui au vecteur $\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{M}_0}$ construit à partir des positions de référence de ces points associe le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{M}}$ dans la position courante à l'instant t est *orthogonale*, i.e. conserve le produit scalaire :

$$\forall M_0, M'_0, \quad \vec{f}\left(\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{M}_0}\right) \cdot \vec{f}\left(\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{M}'_0}\right) = \overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{M}_0} \cdot \overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{M}'_0} . \quad (1.28)$$

X Montrons qu'une application vérifiant cette propriété, réécrite de façon plus vectorielle,

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{f}(\vec{u}) \cdot \vec{f}(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

est toujours linéaire. Pour cela on remarque que l'image d'une base orthonormée $\{\vec{e}_i\}$ par \vec{f} est une base orthonormée, soit $\{\vec{f}(\vec{e}_i)\}$. Soient maintenant x_1, x_2, x_3 trois scalaires quelconques. Considérons le vecteur

$$\vec{y} = \vec{f}\left(\sum_i x_i \vec{e}_i\right) - \sum_i x_i \vec{f}(\vec{e}_i) .$$

On a, par orthogonalité de \vec{f} ,

$$\forall j, \quad \vec{f}(\vec{e}_j) \cdot \vec{y} = \vec{e}_j \cdot \sum_i x_i \vec{e}_i - \sum_i x_i \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = x_j - x_j = 0 , \text{ d'où } \vec{y} = \vec{0}, \text{ CQFD.}$$

X

Puisque $\vec{\mathbf{f}}$ est linéaire elle s'identifie à un *tenseur de rotation*¹¹ $\overrightarrow{\mathbf{R}}$ qui dépend en général, de fait, de l'instant t considéré. On peut donc écrire que

$$\forall t, \quad \overrightarrow{\mathbf{AM}}(t) = \overrightarrow{\mathbf{R}}(t) \cdot \overrightarrow{\mathbf{A_0M_0}}. \quad (1.29)$$

Par dérivation par rapport au temps, on en déduit la différence des vitesses « lagrangiennes »

$$\vec{\mathbf{V}}(\overrightarrow{\mathbf{OM_0}}, t) - \vec{\mathbf{V}}(\overrightarrow{\mathbf{OA_0}}, t) = \dot{\overrightarrow{\mathbf{R}}}(t) \cdot \overrightarrow{\mathbf{A_0M_0}} \quad (1.30)$$

en notant dorénavant avec un point au dessus d'une grandeur la dérivée par rapport au temps de cette grandeur. D'après l'équation (1.4a) cette différence est aussi celle des vitesses « eulériennes »,

$$\vec{\mathbf{v}}(\overrightarrow{\mathbf{OM}}, t) - \vec{\mathbf{v}}(\overrightarrow{\mathbf{OA}}, t) = \dot{\overrightarrow{\mathbf{R}}}(t) \cdot \overrightarrow{\mathbf{A_0M_0}}. \quad (1.31)$$

Cette nouvelle équation n'est pas complètement eulérienne puisque le membre de droite dépend des positions de référence de A et M, et non de leur position actuelle. Pour corriger ce défaut il suffit d'inverser la relation (1.29), en notant que l'orthogonalité de $\overrightarrow{\mathbf{R}}$ s'écrit

$$\forall t, \quad \overrightarrow{\mathbf{R}} \cdot {}^T \overrightarrow{\mathbf{R}} = {}^T \overrightarrow{\mathbf{R}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{R}} = \overrightarrow{\mathbf{1}}. \quad (1.32)$$

En multipliant l'équation (1.29) par ${}^T \overrightarrow{\mathbf{R}}$ on obtient donc

$$\overrightarrow{\mathbf{A_0M_0}} = {}^T \overrightarrow{\mathbf{R}}(t) \cdot \overrightarrow{\mathbf{AM}}(t), \quad (1.33)$$

d'où, par injection dans (1.31), et en simplifiant les notations, la relation complètement eulérienne

$$\vec{\mathbf{v}}(M, t) - \vec{\mathbf{v}}(A, t) = \dot{\overrightarrow{\mathbf{R}}}(t) \cdot {}^T \overrightarrow{\mathbf{R}}(t) \cdot \overrightarrow{\mathbf{AM}}(t). \quad (1.34)$$

Observons alors que par dérivation par rapport au temps de l'équation (1.32) on obtient

$$\forall t, \quad \dot{\overrightarrow{\mathbf{R}}} \cdot {}^T \overrightarrow{\mathbf{R}} + \overrightarrow{\mathbf{R}} \cdot {}^T \dot{\overrightarrow{\mathbf{R}}} = \vec{\mathbf{0}} \quad (1.35)$$

qui prouve que le tenseur $\overrightarrow{\mathbf{\Omega}} = \dot{\overrightarrow{\mathbf{R}}} \cdot {}^T \overrightarrow{\mathbf{R}}$ est *antisymétrique*, i.e. solution de

$${}^T \overrightarrow{\mathbf{\Omega}} = -\overrightarrow{\mathbf{\Omega}}. \quad (1.36)$$

D'après Antoine (2006) (on peut retrouver ce résultat par une étude élémentaire, par exemple matricielle) toute application antisymétrique $\overrightarrow{\mathbf{\Omega}}$ peut être caractérisée par un vecteur $\vec{\mathbf{\Omega}}$ tel que

$$\forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{\mathbf{\Omega}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{\Omega}} \wedge \vec{\mathbf{x}}. \quad (1.37)$$

En conséquence l'équation (1.34) montre que

$$\vec{\mathbf{v}}(M, t) - \vec{\mathbf{v}}(A, t) = \vec{\mathbf{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}} \quad (1.38)$$

soit la structure de champ de moments (1.25).

¹¹En effet $\vec{\mathbf{f}}$ est a priori une transformation orthogonale *directe*, du moins si on choisit (ce que l'on supposera toujours) la configuration de référence « du bon côté du miroir », le nôtre, pour paraphraser Lewis Carroll.

1.1.5 Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Oz

En notant $\phi(t)$ l'angle de la rotation effectuée entre les instants 0 et t , les positions instantanées sont données par l'action de l'opérateur de rotation correspondant $\overrightarrow{\mathbf{R}}_{Oz, \phi(t)}$ selon

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}}(t) = \overrightarrow{\mathbf{R}}_{Oz, \phi(t)} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OM}}(0)$$

avec, dans la base fixe $\{\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z\}$,

$$\text{Mat} \left(\overrightarrow{\mathbf{R}}_{Oz, \phi(t)}, \{\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z\} \right) = \begin{pmatrix} \cos \phi(t) & -\sin \phi(t) & 0 \\ \sin \phi(t) & \cos \phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par dérivation de $\overrightarrow{\mathbf{OM}}(t)$ par rapport au temps on obtient pour le champ de vitesse instantané

$$\vec{\mathbf{v}}(M, t) = \vec{\mathbf{v}}(O, t) + \dot{\phi}(t) \vec{\mathbf{e}}_z \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}}(t),$$

où, en fait, $\vec{\mathbf{v}}(O, t) = \vec{\mathbf{0}}$. Par identification avec (1.25) on voit que le vecteur rotation instantané vaut dans ce cas

$$\vec{\mathbf{\Omega}}(t) = \dot{\phi}(t) \vec{\mathbf{e}}_z \quad (1.39)$$

qui caractérise bien complètement la rotation $\overrightarrow{\mathbf{R}}_{Oz, \phi(t)}$ (sachant que $\phi(0) = 0$). On notera que dans le cas d'une rotation à vitesse angulaire constante, où $\phi(t) = \Omega t$, on obtient $\vec{\mathbf{\Omega}}(t) = \Omega \vec{\mathbf{e}}_z$. La norme de $\vec{\mathbf{\Omega}}$ peut donc être désignée - cette notation sera générale - comme la **vitesse de rotation** du solide.

X Une autre méthode « générale » d'extraction du vecteur rotation instantané d'un solide repose sur le fait qu'un champ de vitesse de la forme (1.25) vérifie¹²

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\mathbf{v}}) = 2\vec{\mathbf{\Omega}}.$$

Inversant cette formule on calculera donc $\vec{\mathbf{\Omega}}$ à partir de¹³

$$\vec{\mathbf{\Omega}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\mathbf{v}}).$$

Faites-le ici, et vérifiez que vous retrouvez bien l'expression (1.39)!

X

Φ La formule (1.39) prouve que l'unité SI pour $\vec{\mathbf{\Omega}}$ est celle des vitesses angulaires de rotation, à savoir le radian par seconde (rad/s). Les mécaniciens préfèrent souvent utiliser les tours par minute :

$$1 \text{ tr/mn} = \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 0,105 \text{ rad/s}.$$

Vous savez sans doute que dans une voiture la vitesse maximale de rotation de l'arbre moteur est de l'ordre de 6000 tr/mn... Mais savez vous que certains moteurs électriques hautes performances¹⁴ pour turbocompresseurs d'Alstom tournent jusqu'à 120000 tr/mn, et que la fraise de votre dentiste peut tourner jusqu'à 350000 tr/mn?...

Φ

¹²C'est un bon exercice de calcul tensoriel que de le démontrer ; pour cela on pourra par exemple utiliser avec joie le pseudo-tenseur alterné fondamental ϵ_{ijk} .

¹³Cette formule reviendra en mécanique des fluides pour définir le « vecteur tourbillon » d'un écoulement!...

¹⁴Pouvant délivrer des puissances de l'ordre de quelques mégawatts.

1.1.6 Cas d'un solide en mouvement autour d'un point fixe O : angles d'Euler

De façon moins restrictive on peut supposer que seul un point O du solide reste fixe lors du mouvement. La position instantanée du solide peut alors être définie en repérant la direction d'un axe particulier passant par O de ce solide, soit OZ, puis l'angle de rotation du solide autour de cet axe, soit ϕ . De façon standard, on définit les **angles d'Euler** en adjoignant à ce dernier angle de **rotation propre** ϕ les angles de **précession** ψ et de **nutiation** θ définis par la relation vectorielle entre le vecteur unitaire \vec{e}_Z repérant l'axe particulier OZ et les vecteurs de base fixe $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ suivante :

$$\vec{e}_Z = \cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta (\sin \psi \vec{e}_x - \cos \psi \vec{e}_y) . \quad (1.40)$$

De manière opérationnelle ceci correspond à poser

$$\theta = \arccos(\vec{e}_Z \cdot \vec{e}_z) \in [0, \pi[\quad (1.41)$$

puis (sauf dans le cas où $\theta = 0$ et ψ est alors indéterminé)

$$\vec{e}_{y'} = -\frac{(\vec{e}_Z \cdot \vec{e}_x) \vec{e}_x + (\vec{e}_Z \cdot \vec{e}_y) \vec{e}_y}{\sin \theta}, \quad \vec{e}_{x'} = \vec{\mathbf{R}}_{Oz, -\frac{\pi}{2}} \cdot \vec{e}_{y'}, \quad \psi = \arg(\vec{e}_{x'}) \text{ choisi dans } [0, 2\pi[. \quad (1.42)$$

Il est alors clair que la base liée au solide $\{\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z\}$ peut être définie en choisissant $\phi \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\vec{e}_X = \vec{\mathbf{R}}_{Oz, \phi} \cdot \vec{e}_{x'} . \quad (1.43)$$

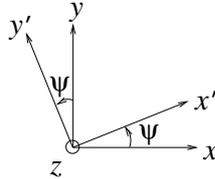
Notons que

$$\vec{e}_{x'} = \cos \psi \vec{e}_x + \sin \psi \vec{e}_y = \cos \phi \vec{e}_X - \sin \phi \vec{e}_Y . \quad (1.44)$$

Une relecture des équations précédentes montre que cette base liée au solide $\{\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z\}$ se déduit de la base de référence $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ par trois rotations successives :

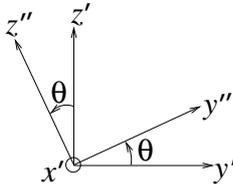
1. par la **rotation de précession** d'angle ψ autour de \vec{e}_z

$$\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\} \mapsto \{\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z\} \quad \text{avec} \quad \vec{e}_z = \vec{e}_z \quad (1.45)$$



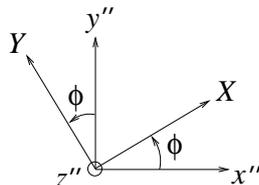
2. par la **rotation de nutiation** d'angle θ autour de $\vec{e}_{x'}$

$$\{\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z\} \mapsto \{\vec{e}_{x''}, \vec{e}_{y''}, \vec{e}_z\} \quad \text{avec} \quad \vec{e}_{x'} = \vec{e}_{x''} \quad (1.46)$$



3. par la **rotation propre** d'angle ϕ autour de $\vec{e}_{z''}$

$$\{\vec{e}_{x''}, \vec{e}_{y''}, \vec{e}_z\} \mapsto \{\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z\} \quad \text{avec} \quad \vec{e}_{z''} = \vec{e}_Z \quad (1.47)$$



On montre facilement que les deux premiers vecteurs de la base liée au solide sont donnés par¹⁵

$$\vec{e}_X = (\cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi) \vec{e}_x + (\cos \psi \cos \theta \sin \phi + \sin \psi \cos \phi) \vec{e}_y + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_z \quad (1.48)$$

$$\vec{e}_Y = -(\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi) \vec{e}_x + (\cos \psi \cos \theta \cos \phi - \sin \psi \sin \phi) \vec{e}_y + \sin \theta \cos \phi \vec{e}_z \quad (1.49)$$

Les formules inverses s'obtiennent par transposition de la matrice de passage, d'où

$$\vec{e}_x = (\cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi) \vec{e}_X - (\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi) \vec{e}_Y + \sin \psi \sin \theta \vec{e}_Z \quad (1.50)$$

$$\vec{e}_y = (\cos \psi \cos \theta \sin \phi + \sin \psi \cos \phi) \vec{e}_X + (\cos \psi \cos \theta \cos \phi - \sin \psi \sin \phi) \vec{e}_Y - \cos \psi \sin \theta \vec{e}_Z \quad (1.51)$$

$$\vec{e}_z = \sin \theta (\sin \phi \vec{e}_X + \cos \phi \vec{e}_Y) + \cos \theta \vec{e}_Z . \quad (1.52)$$

Bien sûr les intervalles de valeurs donnés ci-dessus pour ψ , θ et ϕ l'ont été en vue de définir un paramétrage bijectif des orientations possibles du solide ; lors de la description d'un mouvement physique on s'autoriserait en général à sortir des intervalles spécifiés, c'est-à-dire à prendre pour $\psi(t)$, $\theta(t)$ et $\phi(t)$ des fonctions continues continûment dérivables à valeurs dans \mathbb{R} tout entier.

Le calcul de la vitesse d'un point quelconque du solide, défini par

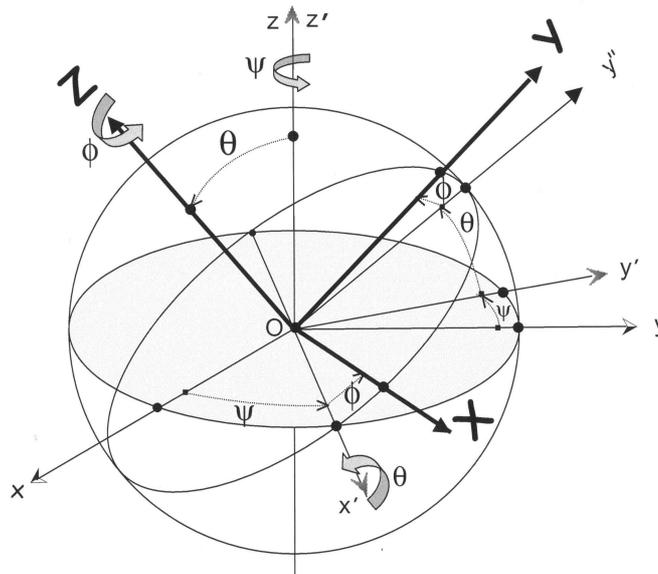
$$\vec{OM} = X \vec{e}_X + Y \vec{e}_Y + Z \vec{e}_Z$$

avec X, Y, Z constants, conduit alors, par identification avec l'identité (1.25), au vecteur rotation instantanée

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}(t) &= [\dot{\phi}(t) \sin \psi(t) \sin \theta(t) + \dot{\theta}(t) \cos \psi(t)] \vec{e}_x + [\dot{\theta}(t) \sin \psi(t) - \dot{\phi}(t) \cos \psi(t) \sin \theta(t)] \vec{e}_y \\ &\quad + [\dot{\phi}(t) \cos \theta(t) + \dot{\psi}(t)] \vec{e}_z \\ &= [\dot{\psi}(t) \sin \theta(t) \sin \phi(t) + \dot{\theta}(t) \cos \phi(t)] \vec{e}_X(t) + [\dot{\psi}(t) \sin \theta(t) \cos \phi(t) - \dot{\theta}(t) \sin \phi(t)] \vec{e}_Y(t) \\ &\quad + [\dot{\phi}(t) + \dot{\psi}(t) \cos \theta(t)] \vec{e}_Z(t) \\ &= \dot{\psi}(t) \vec{e}_z + \dot{\theta}(t) \vec{e}_{x'} + \dot{\phi}(t) \vec{e}_Z . \end{aligned} \quad (1.53)$$

La deuxième forme donnée pour $\vec{\Omega}(t)$ fait bien apparaître les contributions des trois rotations décrites ci-dessus. D'autre part le cas d'un solide tournant autour d'un axe fixe vu à la section précédente apparaît bien comme un cas particulier du cas présent, où $\psi = \theta = 0$ et donc $\vec{e}_z = \vec{e}_Z$.

Pour terminer on peut donner une figure tridimensionnelle définissant les angles d'Euler et les vecteurs associés¹⁶ :



¹⁵Le troisième vecteur étant donné par l'équation (1.40).

¹⁶Il semble cependant plus simple de retenir les trois figures bidimensionnelles précédentes.

1.1.7 Cas général

Un mouvement général de solide indéformable peut être défini par la donnée de la trajectoire d'un point particulier de ce solide, soit A, et par la donnée des angles d'Euler repérant l'orientation du solide dans un repère cartésien $Axyz$ où les orientations x, y et z restent fixes. On détermine alors le champ de vitesse grâce à

$$\vec{v}(M,t) = \vec{v}(A,t) + \vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{AM}(t) \quad (1.54)$$

où $\vec{v}(A,t) = \dot{\overrightarrow{OA}}(t)$, $\vec{\Omega}(t)$ est donné par (1.53). On dit en conséquence qu'un solide indéformable libre de se déplacer dans tout l'espace possède *six degrés de liberté* : les 3 coordonnées de A plus les 3 angles d'Euler ψ, θ, ϕ .

Pour terminer, donnons la forme générale du *champ des accélérations*

$$\vec{\gamma}(M,t) = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}(M,t)}{dt} \quad (1.55)$$

de ce solide, obtenu par dérivation temporelle de (1.54), et réutilisation de (1.54) pour le terme en $\dot{\overrightarrow{AM}}(t)$:

$$\vec{\gamma}(M,t) = \vec{\gamma}(A,t) + \dot{\vec{\Omega}}(t) \wedge \overrightarrow{AM}(t) + \vec{\Omega}(t) \wedge [\vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{AM}(t)] \quad (1.56)$$

Φ L'unité SI d'accélération est le mètre par seconde carrée (m/s^2). Une unité alternative naturelle pour les habitants de la planète Terre est l'accélération d'un corps en chute libre au voisinage de la surface de la Terre, notée g , et sur laquelle on reviendra section 3.1.3.

Φ

1.2 Composition des mouvements par changement de référentiel

Intéressons nous maintenant à la comparaison entre la description des mouvements

- d'une part par un observateur immobile, lié à un référentiel absolu \mathcal{R}_0 dans lequel O est point fixe ;
- d'autre part par un observateur mobile, lié à un référentiel relatif \mathcal{R} dans lequel A(t) point fixe origine est connu. On suppose aussi le vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t)$ connu.

1.2.1 Composition des dérivées temporelles de vecteurs

Soit $\vec{w}(t)$ un vecteur de nature physique (vecteur matériel éventuellement, mais aussi, peut-être, vecteur vitesse, vecteur accélération, vecteur force, etc...) évoluant au cours du temps. On se pose la question de savoir comment les deux observateurs précédemment nommés peuvent relier leurs mesures de

$$\frac{d\vec{w}(t)}{dt}$$

Pour cela on part de l'écriture de $\vec{w}(t)$ dans une base $\{\vec{e}_X(t), \vec{e}_Y(t), \vec{e}_Z(t)\}$ liée au mouvement solide de \mathcal{R} :

$$\vec{w}(t) = X(t)\vec{e}_X(t) + Y(t)\vec{e}_Y(t) + Z(t)\vec{e}_Z(t) \quad (1.57)$$

Par définition, puisque cette base est fixe pour \mathcal{R} ,

$$\left. \frac{d\vec{w}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{X}(t)\vec{e}_X(t) + \dot{Y}(t)\vec{e}_Y(t) + \dot{Z}(t)\vec{e}_Z(t) \quad (1.58)$$

Dans \mathcal{R}_0 par contre non seulement les composantes de $\vec{\mathbf{w}}(t)$ mais aussi les vecteurs $\vec{\mathbf{e}}_X(t)$, $\vec{\mathbf{e}}_Y(t)$ et $\vec{\mathbf{e}}_Z(t)$ évoluent dans le temps, et pour calculer

$$\left. \frac{d\vec{\mathbf{w}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}$$

il faut en conséquence déterminer les valeurs des dérivées

$$\left. \frac{d\vec{\mathbf{e}}_X(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}, \quad \left. \frac{d\vec{\mathbf{e}}_Y(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\vec{\mathbf{e}}_Z(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}.$$

Pour cela on peut noter que chacun de ces vecteurs de base peut être vu comme un bipoint reliant l'origine $A(t)$ de \mathcal{R} à un point fixe de \mathcal{R} , par exemple

$$\vec{\mathbf{e}}_X(t) = \overrightarrow{\mathbf{AB}}(t).$$

En appliquant l'équation (1.54) on obtient

$$\left. \frac{d\vec{\mathbf{e}}_X(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \vec{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(B \in \mathcal{R}, t) - \vec{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(A \in \mathcal{R}, t) = \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}}(t) = \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \vec{\mathbf{e}}_X(t), \quad (1.59)$$

cette forme de relation étant en fait valable pour n'importe quel vecteur fixe de \mathcal{R} , d'où en particulier

$$\left. \frac{d\vec{\mathbf{e}}_Y(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \vec{\mathbf{e}}_Y(t), \quad (1.60)$$

$$\left. \frac{d\vec{\mathbf{e}}_Z(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \vec{\mathbf{e}}_Z(t). \quad (1.61)$$

En appliquant la formule de Leibniz à (1.57) on obtient la **loi de composition des dérivées temporelles de vecteurs** :

$$\boxed{\left. \frac{d\vec{\mathbf{w}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\vec{\mathbf{w}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \vec{\mathbf{w}}(t)} \quad (1.62)$$

1.2.2 Composition des vitesses

Considérons maintenant le problème consistant à relier les observations de vitesse d'un certain point matériel mobile $M(t)$ faites

- par l'observateur immobile lié au référentiel absolu \mathcal{R}_0 :

$$\vec{\mathbf{v}}_a(t) = \left. \frac{d\overrightarrow{\mathbf{OM}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} \quad \text{vitesse absolue de } M(t); \quad (1.63)$$

- d'autre part par l'observateur mobile, lié au référentiel relatif \mathcal{R} :

$$\vec{\mathbf{v}}_r(t) = \left. \frac{d\overrightarrow{\mathbf{AM}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \quad \text{vitesse relative de } M(t). \quad (1.64)$$

Par transitivité puis application de (1.62) on obtient

$$\vec{\mathbf{v}}_a(t) = \left. \frac{d\overrightarrow{\mathbf{OA}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} + \left. \frac{d\overrightarrow{\mathbf{AM}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \vec{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(A \in \mathcal{R}, t) + \left. \frac{d\overrightarrow{\mathbf{AM}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}}(t).$$

Il apparaît

$$\vec{\mathbf{v}}_e(t) = \vec{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(A \in \mathcal{R}, t) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}}(t) = \vec{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(M \in \mathcal{R}, t) \quad (1.65)$$

vitesse du point du référentiel mobile \mathcal{R} coïncidant à l'instant t avec $M(t)$ (cf l'équation (1.54)); $\vec{\mathbf{v}}_e(t)$ est la **vitesse d'entraînement** du point $M(t)$. Au bilan on obtient la **loi de composition des vitesses**, dite aussi « *loi de Galilée* » :

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}_a(t) = \vec{\mathbf{v}}_r(t) + \vec{\mathbf{v}}_e(t)} \quad (1.66)$$

vitesse absolue = vitesse relative + vitesse d'entraînement

1.2.3 Composition des vecteurs rotations instantanées

Supposons qu'en plus des référentiels \mathcal{R}_0 et \mathcal{R} on s'intéresse aussi à un troisième référentiel \mathcal{R}' . Nous allons montrer la *loi de composition des vecteurs rotations instantanées* :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}_0}(t) = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t)} \quad (1.67)$$

Une démonstration possible consiste à partir, pour un bipoint $\overrightarrow{\mathbf{BC}}(t)$ quelconque de \mathcal{R}' , des relations de définition

$$\left. \frac{d\overrightarrow{\mathbf{BC}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \overrightarrow{\mathbf{BC}}(t),$$

$$\left. \frac{d\overrightarrow{\mathbf{BC}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \overrightarrow{\mathbf{BC}}(t),$$

puis à appliquer (1.62) pour obtenir

$$\left. \frac{d\overrightarrow{\mathbf{BC}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\overrightarrow{\mathbf{BC}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \overrightarrow{\mathbf{BC}}(t).$$

Par identification, $\overrightarrow{\mathbf{BC}}(t)$ étant quelconque, on obtient bien (1.67).

Cette loi de composition permet de justifier a posteriori la forme (1.53) du vecteur rotation général d'un solide en utilisant les angles d'Euler, puisque le mouvement du solide a été décrit comme la composition de trois rotations successives.

1.2.4 Composition des accélérations

Posons maintenant la question du lien entre

- l'*accélération absolue* d'un point mobile $M(t)$ vue par l'observateur immobile lié au référentiel \mathcal{R}_0 :

$$\vec{\gamma}_a(t) = \left. \frac{d^2\overrightarrow{\mathbf{OM}}(t)}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_0}, \quad (1.68)$$

- et l'*accélération relative* de ce même point mobile $M(t)$ vue par l'observateur mobile lié au référentiel \mathcal{R} :

$$\vec{\gamma}_r(t) = \left. \frac{d^2\overrightarrow{\mathbf{AM}}(t)}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}}. \quad (1.69)$$

Dans ce but partons de l'équation (1.66), que l'on explicite sous la forme

$$\left. \frac{d\overrightarrow{\mathbf{OM}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\overrightarrow{\mathbf{AM}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\overrightarrow{\mathbf{OA}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}}(t).$$

Par dérivation par rapport au temps dans le référentiel \mathcal{R}_0 et utilisation de la loi de dérivation composée (1.62) on obtient

$$\vec{\gamma}_a(t) = \vec{\gamma}_r(t) + \dot{\vec{\Omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}}(t) + \left. \frac{d^2\overrightarrow{\mathbf{OA}}(t)}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_0} + \dot{\vec{\Omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}}(t) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \left. \frac{d\overrightarrow{\mathbf{AM}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}.$$

Après application au dernier terme de la loi (1.62) on voit apparaître

- l'accélération du point du référentiel mobile \mathcal{R} coïncidant à l'instant t avec $M(t)$ (cf l'équation (1.56)), *accélération d'entraînement* du point M :

$$\vec{\gamma}_e(t) = \left. \frac{d^2\overrightarrow{\mathbf{OA}}(t)}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_0} + \dot{\vec{\Omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}}(t) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge [\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}}(t)]; \quad (1.70)$$

- l'*accélération de Coriolis* du point M :

$$\vec{\gamma}_c(t) = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \vec{v}_r(t). \quad (1.71)$$

Au bilan on peut écrire la *loi de composition des accélérations* :

$$\boxed{\vec{\gamma}_a(t) = \vec{\gamma}_r(t) + \vec{\gamma}_e(t) + \vec{\gamma}_c(t)} \quad (1.72)$$

accélération absolue = accélération relative + accélération d'entraînement + accélération de Coriolis

1.3 Exercices

Exercice 1.1 Cinématique d'une grande roue de fête foraine

Décrivez précisément le mouvement de la nacelle d'une grande roue de fête foraine d'axe Oz, en explicitant les transformations $\vec{\Phi}$ et $\vec{\Psi}$ introduites section 1.1, les champs de vitesse « lagrangien » $\vec{V}(\overrightarrow{\mathbf{OM}_0}, t)$ et « eulerien » $\vec{v}(\overrightarrow{\mathbf{OM}}, t)$, et le vecteur rotation instantanée (constant dans le régime de fonctionnement standard considéré) $\vec{\Omega}_{\text{nacelle/sol}}$.

Reliez dans un deuxième temps ce vecteur rotation aux vecteurs rotation $\vec{\Omega}_{\text{nacelle/roue}}$ et $\vec{\Omega}_{\text{roue/sol}}$.

Exercice 1.2 Étude de l'« indéformabilité » d'un champ de vecteurs donné [examen 2000 – 2001]

Quelles sont les contraintes à imposer sur les valeurs des paramètres a, b, c, d pour que le champ de vecteurs défini en coordonnées cartésiennes par

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) = (a \cos bt - ct x_2 + dt x_1) \vec{e}_1 + (a \sin bt + ct x_1 + dt x_2) \vec{e}_2 - dt(x_1 + x_2) \vec{e}_3$$

soit à tout instant t le champ de vitesse d'un solide indéformable S ?

Ces contraintes étant supposées vérifiées, donnez alors la valeur du vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}(t)$ de S dans le référentiel lié au repère cartésien $Ox_1x_2x_3$.

Exercice 1.3 De la force d'inertie dite « centrifuge »

1 « Rappel » de mathématiques : en utilisant par exemple le pseudo-tenseur alterné fondamental ϵ_{ijk} , redémontrez l'identité vectorielle classique (à connaître par cœur !)

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}. \quad (1.73)$$

2 On considère un référentiel relatif \mathcal{R} en mouvement de rotation autour d'un axe Oz fixe dans un référentiel absolu \mathcal{R}_0 , le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}$ étant constant égal à $\omega \vec{e}_z$. Par un choix judicieux du point A dans la formule (1.70), et en usant de (1.73), simplifiez l'expression de l'accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e(M)$ d'un point quelconque M de \mathcal{R} . Montrez qu'elle est « centripète », et qualifiez la force d'inertie correspondante $-m\vec{\gamma}_e(M)$ (cf. la section 3.1.2).

Chapitre 2

Cinétique des masses et inertie

« Abomination pour Yahvé : la balance fausse !
Mais le poids juste lui plait. »

Salomon

Nous allons maintenant introduire toutes les notions utiles à l'écriture des équations de la dynamique permettant d'analyser et d'expliquer les mouvements de systèmes matériels. Ces notions sont celles de la *cinétique*, que l'on pourrait définir comme la *cinématique* faite par un géomètre-physicien-mécanicien conscient de l'importance de la notion de *masse* et sachant *peser* les objets, et non plus seulement par un géomètre pur travaillant sur des mouvements abstraits. Dans le cadre de ce module de mécanique fondamentale nous pouvons donc proposer les définitions suivantes :

cinématique = description des mouvements de *milieux continus*
≠ *cinétique* = description des mouvements de *milieux continus massiques* .

Il est important de mentionner que les notions de masse, centre d'inertie, référentiel de Koenig, moment et résultante cinétiques, énergie cinétique, ont un sens aussi pour des systèmes constitués de plusieurs solides et/ou de particules matérielles, *systèmes déformables* par essence. En particulier les deux théorèmes de Koenig sont valables pour de tels systèmes. Par contre la notion de tenseur d'inertie et les formules correspondantes concernent exclusivement les *solides indéformables* ; les simplifications introduites résultent d'ailleurs toujours de la structure de champ de moments équation (1.25) du champ de vitesse de tels solides. L'écriture proprement dite des équations de la dynamique prendra place au chapitre 3.

2.1 Masse - Centre d'inertie - Référentiel de Koenig

2.1.1 La masse est la quantité de matière

Comme nous l'avons dit plus haut, pour un mécanicien le mouvement apparait comme une qualité des objets *matériels*, la *quantité de matière* présente étant mesurée par sa *masse*.

Φ L'unité correspondante, le kilogramme (kg), a été définie par une loi française de 1799 comme la masse d'un décimètre cube (c'est-à-dire un litre !) d'eau pure à son maximum de densité i.e. 4 °C (voir par exemple Jedrzejewski 2002 ; noter que pour des mesures très précises on se réfère maintenant plutôt à des étalons du kilogramme soigneusement contrôlés). Ceci nous permet de définir la *densité volumique* correspondante comme étant

$$\rho_{\text{eau à } 4^{\circ}\text{C}} = \frac{1 \text{ kg}}{10^{-3} \text{ m}^3} = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad (2.1)$$

qui est souvent utilisée comme référence pour définir des densités de matière condensée.

Φ

2.1.2 Convention d'écriture d'une quantité proportionnelle à la masse

Les milieux continus les plus classiques sont à distribution volumique de masse, donc leur masse totale m s'écrit, si V est leur volume,

$$m = \iiint_V d^3m = \iiint_V \rho(M) d^3V \quad (2.2)$$

où d^3m est l'élément de masse, $\rho(M)$ la densité volumique, d^3V l'élément de volume. Cependant on pourra rencontrer des systèmes qu'il est pertinent, à une échelle suffisamment « grande », de décrire comme ayant une distribution surfacique, linéique ou ponctuelle de masse¹. Afin de simplifier les notations nous définissons la **convention d'écriture générique suivante** : si $f(M)$ est une fonction régulière de M , la quantité « globale » ou « totale » de f dans tout le système est

$$F = \int f(M) dm := \iiint_V f(M) d^3m \text{ si le système est à distribution } \mathbf{volumique} \text{ de masse} \quad (2.3a)$$

avec $d^3m = \rho(M) d^3V$, $\rho(M)$ la densité volumique, d^3V l'élément de volume,

$$:= \iint_S f(M) d^2m \text{ si le système est à distribution } \mathbf{surfacique} \text{ de masse} \quad (2.3b)$$

avec $d^2m = \rho'(M) d^2S$, $\rho'(M)$ la densité surfacique, d^2S l'élément de surface,

$$:= \int_L f(M) dm \text{ si le système est à distribution } \mathbf{linéique} \text{ de masse} \quad (2.3c)$$

avec $dm = \rho''(M) dl$, $\rho''(M)$ la densité linéique, dl l'élément de longueur,

$$:= \sum_i f(M_i) m_i \text{ si le système est à distribution } \mathbf{ponctuelle} \text{ de masse} \quad (2.3d)$$

avec m_i la masse du point M_i .

Bien entendu il peut exister des systèmes dont les sous-parties sont de dimensions différentes ; il convient alors de sommer les contributions de chaque sous-partie.

Mettant en application cette convention pour la fonction $f(M) = 1$, on notera généralement pour la **masse totale** d'un système

$$\boxed{m = \int dm} . \quad (2.4)$$

2.1.3 Centre d'inertie et référentiel de Koenig

De même, en appliquant (2.3) à la fonction $f(M) = \overrightarrow{\mathbf{OM}}$, on peut définir le **centre d'inertie** G du système par la formule

$$\boxed{\forall O, m \overrightarrow{\mathbf{OG}} = \int \overrightarrow{\mathbf{OM}} dm} \quad (2.5)$$

Le référentiel d'orientation fixe par rapport au référentiel absolu \mathcal{R}_0 , mais dont l'origine se déplace au cours du temps comme $G(t)$, est appelé **référentiel de Koenig** lié au système, et noté \mathcal{K} .

L'existence de **symétries** du système étudié S contraint en général la position de G . Pour le montrer on considère le cas d'un système à distribution volumique de masse.

¹Mathématiquement on peut dire d'un système à distribution de masse dans un volume V qu'il est de dimension 3, d'un système à distribution de masse sur une surface S qu'il est de dimension 2, d'un système à distribution de masse sur une courbe L qu'il est de dimension 1, d'un système à distribution de masse sur des points M_i qu'il est de dimension 0.

Si par exemple ce système admet xOy comme *plan de symétrie* :

$$\forall x, y, z, \quad M = O + x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \in S \iff M' = O + x\vec{e}_x + y\vec{e}_y - z\vec{e}_z \in S \text{ et } \rho(M') = \rho(M), \quad (2.6)$$

alors on observe, en faisant le changement de variable $z \mapsto -z$ dans la composante z de (2.5),

$$mz_G = \iiint_V z \rho(M) d^3V,$$

que $z_G = -z_G$, d'où $z_G = 0$: G appartient à ce plan de symétrie.

Si l'un des axes de base, par exemple Oz , est *axe de symétrie* :

$$\forall x, y, z, \quad O + x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \in S \iff O - x\vec{e}_x - y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \in S \text{ et } \rho(M') = \rho(M), \quad (2.7)$$

alors le changement de variable $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ dans les composantes x et y de (2.5) montre que $x_G = y_G = 0$: G appartient à cet axe de symétrie.

Le cas d'un *axe de révolution*, par exemple Oz , défini par :

$$\forall x, y, z, \phi \quad O + x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \in S \iff O + \vec{R}_{Oz, \phi} \cdot [x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z] \in S \text{ et } \rho(M') = \rho(M), \quad (2.8)$$

donne le même résultat puisqu'en utilisant une rotation d'angle $\phi = \pi$ on montre la propriété (2.7), c'est-à-dire que cet axe est de symétrie.

2.2 Résultante et moment cinétiques

2.2.1 Définitions

Nous définissons la *quantité de mouvement* « de translation » totale du système,

$$\boxed{\vec{p}(t) := \int \vec{v}(M, t) dm = \int \dot{\vec{OM}}(t) dm = m\dot{\vec{OG}}(t)} \quad (2.9)$$

dans le référentiel absolu \mathcal{R}_0 où O est fixe². Notez que la commutation de la dérivée par rapport au temps et de l'intégrale sur la distribution de masse,

$$\vec{p} = \int \frac{d\vec{OM}}{dt} dm = \frac{d}{dt} \int \vec{OM} dm, \quad (2.10)$$

résulte en fait de la conservation de la masse, comme on le démontrera dans Rahouadj (2006).

Au vu de l'existence (en général) de degrés de liberté de rotation, il est clair que les équations de la dynamique correspondantes ne pourront pas seulement porter sur cette « quantité de mouvement de translation ». On est donc amené à introduire la « quantité de mouvement de rotation » du système par rapport à ce point O , soit³

$$\boxed{\vec{\sigma}(O, t) := \int \vec{OM}(t) \wedge \vec{v}(M, t) dm} \quad (2.11)$$

En utilisant la relation de transitivité $\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$ ainsi que la définition (2.9), on observe que

$$\boxed{\forall O, A, \quad \vec{\sigma}(A, t) = \vec{\sigma}(O, t) + \vec{p}(t) \wedge \vec{OA}} \quad (2.12)$$

²En utilisant la convention d'écriture (2.3) pour la fonction $f(M) = \vec{v}(M, t)$. Certains auteurs désignent \vec{p} comme l'« impulsion » du système. Notez bien que le point au dessus de \vec{OM} ou \vec{OG} désigne la dérivée par rapport au temps dans le mouvement.

³En utilisant la convention d'écriture (2.3) pour la fonction $f(M) = \vec{OM}(t) \wedge \vec{v}(M, t)$...

ce qui montre que $\vec{\sigma}$ est un champ de moments de résultante $\vec{\mathbf{p}}$. On désigne pour cette raison $\vec{\sigma}(O,t)$ comme le **moment cinétique** du système par rapport au point O, et $\vec{\mathbf{p}}(t)$ comme la **résultante cinétique** du système. Dans certains cours de mécanique on introduit d'ailleurs le **torseur cinétique**

$$\{\mathcal{T}_{\text{cinétique}}(O)\} := \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathbf{p}} \\ \vec{\sigma}(O) \end{array} \right\}. \quad (2.13)$$

2.2.2 Premier théorème de Koenig

L'équation (2.12) permet de relier le moment cinétique en O d'un système au moment cinétique en son centre d'inertie G :

$$\vec{\sigma}_{\mathcal{R}_0}(O) = \overrightarrow{\mathbf{OG}} \wedge \vec{\mathbf{p}} + \vec{\sigma}_{\mathcal{R}_0}(G) \quad (2.14)$$

où nous avons rappelé l'utilisation du référentiel absolu \mathcal{R}_0 . Or, par définition du référentiel de Koenig \mathcal{K} et composition des vitesses, on a

$$\vec{\sigma}_{\mathcal{R}_0}(G) = \int \overrightarrow{\mathbf{GM}} \wedge \vec{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(M) dm = \int \overrightarrow{\mathbf{GM}} \wedge \vec{\mathbf{v}}_{\mathcal{K}}(M) dm + \int \overrightarrow{\mathbf{GM}} \wedge \vec{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(G) dm.$$

La deuxième intégrale étant nulle par définition de G, on obtient le résultat remarquable :

$$\vec{\sigma}_{\mathcal{R}_0}(G) = \vec{\sigma}_{\mathcal{K}}(G) \text{ moment cinétique propre du système.} \quad (2.15)$$

Par injection dans l'équation (2.14) on obtient le **premier théorème de Koenig** :

$$\boxed{\vec{\sigma}_{\mathcal{R}_0}(O) = \overrightarrow{\mathbf{OG}} \wedge \vec{\mathbf{p}} + \vec{\sigma}_{\mathcal{K}}(G)} \quad (2.16)$$

le moment cinétique absolu d'un système est égal au moment cinétique du centre d'inertie affecté de la masse totale du système, augmenté du moment cinétique propre du système.

2.3 Tenseur d'inertie

Nous nous plaçons maintenant dans le cas d'un **système S solide indéformable**.

2.3.1 Définitions et propriétés générales

En injectant dans la définition (2.11) la forme « champ de moments » générale du champ de vitesse,

$$\vec{\mathbf{v}}(M \in S, t) = \vec{\mathbf{v}}(O \in S, t) + \vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}}(t),$$

on aboutit à

$$\vec{\sigma}(O, t) = \overrightarrow{\mathbf{OG}}(t) \wedge m \vec{\mathbf{v}}(O, t) + \int \overrightarrow{\mathbf{OM}}(t) \wedge \left[\vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}}(t) \right] dm. \quad (2.17)$$

L'identité vectorielle (1.73) permet de récrire dans (2.17) le vecteur à intégrer sous la forme

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge \left[\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}} \right] = \mathbf{OM}^2 \vec{\Omega} - \left(\overrightarrow{\mathbf{OM}} \cdot \vec{\Omega} \right) \overrightarrow{\mathbf{OM}} = \left[\mathbf{OM}^2 \vec{\mathbf{1}} - \overrightarrow{\mathbf{OM}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{OM}} \right] \cdot \vec{\Omega}$$

en notant pour simplifier \mathbf{OM}^2 le carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$. En introduisant le **tenseur⁴ d'inertie** $\vec{\vec{\mathbf{I}}}(O, t)$ du solide par rapport au point O défini par⁵

$$\boxed{\vec{\vec{\mathbf{I}}}(O, t) = \int \left[\mathbf{OM}^2(t) \vec{\mathbf{1}} - \overrightarrow{\mathbf{OM}}(t) \otimes \overrightarrow{\mathbf{OM}}(t) \right] dm} \quad (2.18)$$

⁴Quelques rappels mathématiques sur la notion de tenseur ont été donnés page 9.

⁵En utilisant la convention d'écriture (2.3) pour la fonction $f(M) = \mathbf{OM}^2 \vec{\mathbf{1}} - \overrightarrow{\mathbf{OM}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{OM}} \dots$

il vient que

$$\forall O \in S, \vec{\sigma}(O,t) = \overrightarrow{OG}(t) \wedge m\vec{v}(O \in S,t) + \overrightarrow{I}(O,t) \cdot \vec{\Omega}(t) \quad (2.19)$$

Le tenseur d'inertie est évidemment un tenseur *symétrique*.

En coordonnées cartésiennes, le vecteur \overrightarrow{OM} étant repéré par

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z,$$

l'équation (2.18) s'explique selon

$$\text{Mat} \left[\overrightarrow{I}(O,t), \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\} \right] = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

où apparaissent les *moments d'inertie par rapport aux axes* x, y, z :

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm, \quad I_{yy} = \int (z^2 + x^2) dm, \quad I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm, \quad (2.21)$$

et les *produits d'inertie* :

$$I_{xy} = I_{yx} = - \int xy dm, \quad I_{yz} = I_{zy} = - \int yz dm, \quad I_{zx} = I_{xz} = - \int zx dm. \quad (2.22)$$

Le calcul des intégrales (2.21) et (2.22) ne pose pas de problèmes dans son principe ; des résultats types seront donnés en section 2.3.6. En pratique, dans le cas de solides de forme compliquée, les logiciels de Conception Assistée par Ordinateur effectuent automatiquement et numériquement tous ces calculs.

De manière générale, $\overrightarrow{I}(O,t)$ étant symétrique peut se diagonaliser dans une certaine base orthonormée liée au solide S . Les axes OX, OY, OZ correspondants sont appelés *axes principaux d'inertie* du solide, tandis que les éléments diagonaux correspondants I_{XX}, I_{YY}, I_{ZZ} sont appelés *moments principaux d'inertie* du solide. On notera qu'ils ne dépendent plus de t , contrairement aux composantes de $\overrightarrow{I}(O,t)$ dans une base quelconque. Pour cette raison, quand cela est possible⁶, on pourra choisir de travailler dans le référentiel lié à $G(t)$ et s'orientant comme les axes principaux d'inertie du solide. Ce référentiel lié au solide S est appelé *référentiel central d'inertie* de S .

Sans aller éventuellement jusqu'à cette diagonalisation complète, on a souvent intérêt à calculer le tenseur d'inertie dans une base où le solide présente certaines symétries.

Par exemple, si le solide admet xOy comme *plan de symétrie*, on observe, en faisant le changement de variable $z \mapsto -z$ dans les intégrales et en utilisant la propriété de définition (2.6), que

$$I_{xz} = I_{yz} = 0.$$

Ceci prouve que l'axe Oz est axe principal d'inertie du solide ; alors les deux autres axes principaux se trouvent forcément dans le plan xOy .

Si l'un des axes de base, par exemple Oz , est *axe de symétrie* du solide, alors le changement de variable $(x,y) \mapsto (-x, -y)$ montre grâce à la propriété (2.7) qu'on a aussi

$$I_{xz} = I_{yz} = 0.$$

Là encore l'axe Oz est axe principal d'inertie.

⁶Et quand il n'y a pas de solutions plus simples du fait de mouvements restreints, cf. la section 2.3.3.

D'après la remarque faite à la fin de la section 2.1, si Oz est **axe de révolution** on aboutit aux mêmes résultats. De plus, en faisant le changement de variable $(x,y) \mapsto (-y,x)$ correspondant à une rotation de $\pi/2$ dans (2.8), on montre que

$$I_{xy} = 0$$

et

$$I_{xx} = I_{yy} .$$

Ceci signifie que les axes Ox , Oy , Oz sont axes principaux d'inertie, et que les deux premiers moments principaux d'inertie sont égaux.

2.3.2 Théorème de Huyghens

Afin d'examiner le lien entre les tenseurs d'inertie en deux points origines différents O et A , insérons la relation de transitivité

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$

dans le tenseur élémentaire à intégrer pour calculer $\vec{\mathbf{I}}(O)$ équation (2.18). Il vient

$$OM^2 \vec{\mathbf{1}} - \overrightarrow{OM} \otimes \overrightarrow{OM} = \left(OA^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} + AM^2 \right) \vec{\mathbf{1}} - \left(\overrightarrow{OA} \otimes \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \otimes \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} \otimes \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM} \otimes \overrightarrow{AM} \right) .$$

On en déduit par intégration, et en utilisant l'équation (2.5) pour A à la place de O , la relation

$$\vec{\mathbf{I}}(O) = m \left[\left(OA^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AG} \right) \vec{\mathbf{1}} - \overrightarrow{OA} \otimes \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} \otimes \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} \otimes \overrightarrow{AG} \right] + \vec{\mathbf{I}}(A) . \quad (2.23)$$

Cette relation se simplifie remarquablement si A coïncide avec le centre d'inertie G du solide; on aboutit alors au **théorème de Huyghens** :

$$\boxed{\vec{\mathbf{I}}(O) = m \left(OG^2 \vec{\mathbf{1}} - \overrightarrow{OG} \otimes \overrightarrow{OG} \right) + \vec{\mathbf{I}}(G)} \quad (2.24)$$

Ce théorème, qui permet de déduire $\vec{\mathbf{I}}$ en un point quelconque O de la connaissance de $\vec{\mathbf{I}}(G)$, justifie que l'on ne donne dans le formulaire de la section 2.3.6 que les valeurs de $\vec{\mathbf{I}}(G)$. Avant d'établir ce formulaire, nous allons donner des formes simplifiées de (2.19) dans des cas particuliers.

2.3.3 Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Alors tout point O de cet axe est fixe, donc l'équation (2.19) donne pour le moment cinétique en un tel point :

$$\vec{\sigma}(O,t) = \vec{\mathbf{I}}(O,t) \cdot \vec{\Omega}(t) . \quad (2.25)$$

Si \vec{e} unitaire désigne la direction de l'axe de rotation, on sait que

$$\vec{\Omega}(t) = \Omega(t) \vec{e} .$$

Le moment cinétique du solide le long de l'axe de rotation est donc

$$\boxed{\vec{e} \cdot \vec{\sigma}(O,t) = I(O\vec{e}) \Omega(t)} \quad (2.26)$$

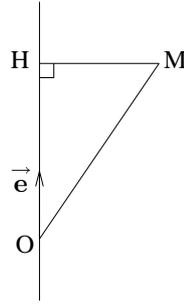
où

$$\boxed{I(O\vec{e}) = \vec{e} \cdot \vec{\mathbf{I}}(O,t) \cdot \vec{e}} \quad (2.27)$$

est le **moment d'inertie du solide** par rapport à l'axe $O\vec{e}$. Il ne dépend pas du choix du point O sur l'axe ni de l'instant t considéré, car d'après l'équation (2.18)

$$I(O\vec{e}) = \int \left[OM^2 - \left(\vec{e} \cdot \overrightarrow{OM} \right)^2 \right] dm = \int \mathbf{HM}^2 dm \quad (2.28)$$

où H est le projeté orthogonal du point M sur l'axe $O\vec{e}$:



Cette définition est cohérente avec la dénomination donnée plus haut pour les moments d'inertie par rapport aux axes de base x, y, z équation (2.21) :

$$I_{xx} = I(O\vec{e}_x) = \vec{e}_x \cdot \vec{\mathbf{I}}(O, t) \cdot \vec{e}_x, \quad (2.29a)$$

$$I_{yy} = I(O\vec{e}_y) = \vec{e}_y \cdot \vec{\mathbf{I}}(O, t) \cdot \vec{e}_y, \quad (2.29b)$$

$$I_{zz} = I(O\vec{e}_z) = \vec{e}_z \cdot \vec{\mathbf{I}}(O, t) \cdot \vec{e}_z, \quad (2.29c)$$

qui toutefois peuvent dépendre de t si la base x, y, z n'est pas liée à S .

2.3.4 Cas d'un solide en mouvement autour d'un point fixe O

Alors l'équation (2.19) s'écrit encore :

$$\vec{\sigma}(O, t) = \vec{\mathbf{I}}(O, t) \cdot \vec{\Omega}(t), \quad (2.30)$$

que l'on a intérêt à expliciter dans une base liée à S , où les composantes du tenseur $\vec{\mathbf{I}}(O, t)$ seront indépendantes de l'instant t considéré.

2.3.5 Cas général de mouvement solide

Dans le cas général on a intérêt à utiliser le premier théorème de Koenig (2.16) qui s'écrit pour un solide indéformable, d'après l'équation (2.19),

$$\vec{\sigma}(O) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{p} + \vec{\sigma}_K(G) = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}(G) + \vec{\mathbf{I}}(G, t) \cdot \vec{\Omega} \quad (2.31)$$

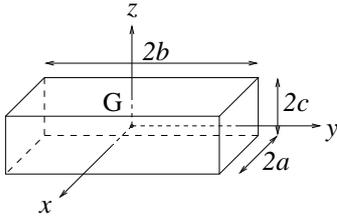
La même remarque que précédemment tient pour l'explicitation du tenseur $\vec{\mathbf{I}}(G, t)$.

2.3.6 Tenseurs d'inertie de solides homogènes de forme simple

Donnons les tenseurs d'inertie de solides homogènes de forme géométrique simple. Pour les exemples 1 à 3 suivants, les calculs se font en coordonnées cartésiennes, avec lesquelles

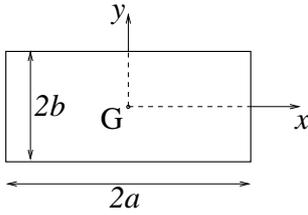
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z, \quad d^3V = dx dy dz. \quad (2.32)$$

Un calcul préliminaire de la masse totale, selon l'équation (2.4), donne la valeur de ρ . On peut alors calculer $\vec{\mathbf{I}}(G)$ à partir de l'équation (2.18).

Exemple 1 : parallélépipède rectangle droit :

$$V = \{(x,y,z) \in [-a,a] \times [-b,b] \times [-c,c]\}, \quad \rho = \frac{m}{8abc},$$

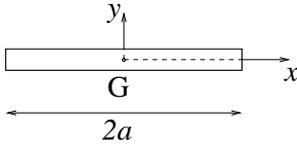
$$\text{Mat}[\vec{\mathbf{I}}(G), \{\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z\}] = \frac{m}{3} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Exemple 2 : plaque rectangulaire d'épaisseur négligeable $c \simeq 0$:

Se déduit du précédent dans la limite $c \rightarrow 0$, $\int_{-c}^c \rho dz \rightarrow \rho' \neq 0$, ce qui revient à utiliser des intégrales de surface.

Ainsi $\rho' = \frac{m}{4ab}$, et

$$\text{Mat}[\vec{\mathbf{I}}(G), \{\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z\}] = \frac{m}{3} \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Exemple 3 : barre de dimensions latérales négligeables $b \simeq c \simeq 0$:

Se déduit du précédent dans la limite $b \rightarrow 0$, $\int_{-b}^b \rho' dy \rightarrow \rho'' \neq 0$, ce qui revient à utiliser des intégrales linéiques.

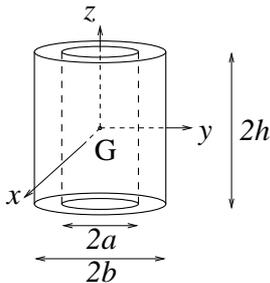
Ainsi $\rho'' = \frac{m}{2a}$, et

$$\text{Mat}[\vec{\mathbf{I}}(G), \{\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z\}] = \frac{m}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Pour les exemples 4 à 8 suivants, les calculs se font en coordonnées cylindriques, avec lesquelles

$$\vec{\mathbf{OM}} = r(\cos \theta \vec{\mathbf{e}}_x + \sin \theta \vec{\mathbf{e}}_y) + z \vec{\mathbf{e}}_z, \quad d^3V = r dr d\theta dz. \quad (2.36)$$

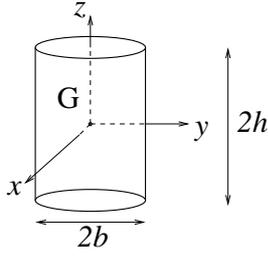
Là encore on doit commencer par calculer ρ grâce à l'équation (2.4), puis on calcule $\vec{\mathbf{I}}(G)$ grâce à l'équation (2.18).

Exemple 4 : cylindre creux de révolution :

$$V = \{(r,\theta,z) \in [a,b] \times [0,2\pi] \times [-h,h]\}, \quad \rho = \frac{m}{2\pi(b^2 - a^2)h},$$

$$\text{Mat}[\vec{\mathbf{I}}(G), \{\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z\}] = m \begin{pmatrix} \frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{h^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{h^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2 + b^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

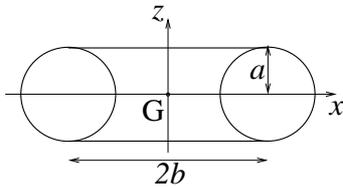
Exemple 5 : cylindre de révolution : ce cylindre plein peut être vu comme un cylindre creux avec $a = 0$:



$$V = \{(r, \theta, z) \in [0, b] \times [0, 2\pi] \times [-h, h]\}, \quad \rho = \frac{m}{2\pi b^2 h},$$

$$\text{Mat}[\vec{\mathbf{I}}(G), \{\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z\}] = m \begin{pmatrix} \frac{b^2}{4} + \frac{h^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{4} + \frac{h^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Exemple 6 : anneau torique :

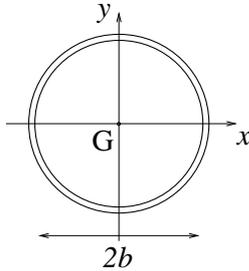


$$V = \{(r, \theta, z) \in [b - \sqrt{a^2 - z^2}, b + \sqrt{a^2 - z^2}] \times [0, 2\pi] \times [-a, a]\},$$

$$\rho = \frac{m}{2\pi^2 a^2 b},$$

$$\text{Mat}[\vec{\mathbf{I}}(G), \{\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z\}] = m \begin{pmatrix} \frac{5a^2}{8} + \frac{b^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5a^2}{8} + \frac{b^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3a^2}{4} + b^2 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

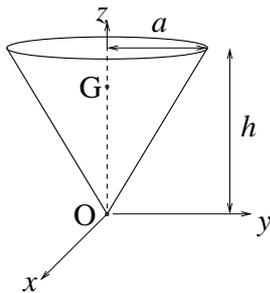
Exemple 7 : cerceau :



Se déduit du précédent dans la limite $a \rightarrow 0$, d'où

$$\text{Mat}[\vec{\mathbf{I}}(G), \{\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z\}] = m \begin{pmatrix} \frac{b^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Exemple 8 : cône de révolution :



$$V = \{(r, \theta, z) \in [0, az/h] \times [0, 2\pi] \times [0, h]\},$$

$$\rho = \frac{3m}{\pi a^2 h}, \quad \vec{\mathbf{OG}} = \frac{3}{4}h \vec{\mathbf{e}}_z,$$

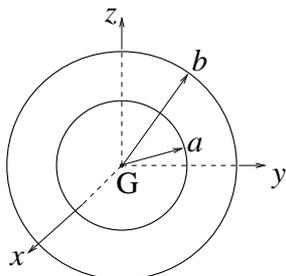
$$\text{Mat}[\vec{\mathbf{I}}(G), \{\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z\}] = \frac{3m}{10} \begin{pmatrix} \frac{4a^2 + h^2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4a^2 + h^2}{8} & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Pour les derniers exemples, les calculs se font en coordonnées sphériques, avec lesquelles

$$\overrightarrow{\text{OM}} = r[\sin\theta(\cos\phi\vec{e}_x + \sin\phi\vec{e}_y) + \cos\theta\vec{e}_z], \quad d^3V = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi. \quad (2.42)$$

Là encore on calcule ρ grâce à l'équation (2.4), puis $\vec{\mathbf{I}}(\text{G})$ grâce à l'équation (2.18).

Exemple 9 : sphère creuse :



$$\begin{aligned} V &= \{(r, \theta, \phi) \in [a, b] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]\}, \\ \rho &= \frac{3m}{4\pi(b^3 - a^3)}, \\ \vec{\mathbf{I}}(\text{G}) &= \frac{2}{5} m \frac{b^5 - a^5}{b^3 - a^3} \vec{\mathbf{1}}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Exemple 10 : sphère :

Dans le cas $a = 0$ on obtient pour une sphère pleine de rayon b que

$$\vec{\mathbf{I}}(\text{G}) = \frac{2}{5} m b^2 \vec{\mathbf{1}}. \quad (2.44)$$

Exemple 11 : coque sphérique :

Pour une coque de rayon a , infiniment mince en r , en utilisant des intégrales de surface en sphérique avec

$$d^2S = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi,$$

on calcule une densité surfacique de masse

$$\rho' = \frac{m}{4\pi a^2},$$

puis

$$\vec{\mathbf{I}}(\text{G}) = \frac{2}{3} m a^2 \vec{\mathbf{1}}. \quad (2.45)$$

2.4 Énergie cinétique

2.4.1 Définition

Lors de l'étude de la dynamique des systèmes en général, nous verrons l'intérêt d'une reformulation faisant intervenir leur *énergie cinétique*⁷

$$E_c := \int \frac{1}{2} \mathbf{v}^2(\text{M}) \, dm \quad (2.46)$$

qui se mesure en joules J ($1 \text{ J} = 1 \text{ m}^2\text{kg/s}^2 = 1 \text{ N m}$). L'objet de l'analyse qui va suivre est d'établir des méthodes efficaces de calcul de cette énergie cinétique, dans un premier temps pour des systèmes généraux (section 2.4.2) puis pour des systèmes *solides indéformables* (sections suivantes).

⁷Rappelons une dernière fois que nous faisons systématiquement usage dans ce document de la convention d'écriture (2.3).

2.4.2 Second théorème de Koenig

Par composition des vitesses entre le référentiel absolu \mathcal{R}_0 et le référentiel de Koenig \mathcal{K} du système, on a

$$\vec{v}_{\mathcal{R}_0}(\text{M}) = \vec{v}_{\mathcal{K}}(\text{M}) + \vec{v}_{\mathcal{R}_0}(\text{G}) ,$$

d'où

$$E_c = \int \frac{1}{2} \mathbf{v}_{\mathcal{K}}^2(\text{M}) dm + \int \overrightarrow{\text{GM}} \cdot \vec{v}_{\mathcal{R}_0}(\text{G}) dm + \int \frac{1}{2} \mathbf{v}_{\mathcal{R}_0}^2(\text{G}) dm .$$

La deuxième intégrale étant nulle par définition du centre d'inertie G du système, on obtient le **second théorème de Koenig** :

$$E_c = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2(\text{G}) + E_{c\mathcal{K}}(t) \quad (2.47)$$

où $E_{c\mathcal{K}}$, **énergie cinétique propre** du système, est l'énergie cinétique dans le référentiel de Koenig.

L'énergie cinétique d'un système est la somme de l'énergie cinétique du mouvement de son centre d'inertie et de l'énergie cinétique propre.

2.4.3 Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Si O est un point de cet axe de rotation, sa vitesse $\vec{v}(\text{O},t)$ est nulle, donc $\vec{v}(\text{M},t)$ se réduit d'après la structure de champ de moments du champ de vitesse solide indéformable à $\vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{\text{OM}}$. Par remplacement dans (2.46) on en déduit

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \int \vec{v}(\text{M},t) \cdot [\vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{\text{OM}}] dm = \frac{1}{2} \vec{\Omega}(t) \cdot \int [\overrightarrow{\text{OM}} \wedge \vec{v}(\text{M},t)] dm$$

en utilisant la possibilité de permutation circulaire dans un produit mixte. Il vient donc

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}(t) \cdot \vec{\sigma}(\text{O},t) = \frac{1}{2} I(\text{O}\vec{e}) \Omega^2(t) \quad (2.48)$$

en notant \vec{e} est la direction de l'axe de rotation, telle que

$$\vec{\Omega}(t) = \Omega(t) \vec{e} ,$$

et en utilisant l'équation (2.26).

2.4.4 Cas d'un solide en mouvement autour d'un point fixe O

Le calcul précédent est encore valable dans ce cadre, à condition de ne plus faire apparaître le vecteur \vec{e} (ou de le définir comme la direction instantanée $\vec{e}(t)$ du vecteur rotation $\vec{\Omega}(t)$). On obtient

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}(t) \cdot \vec{\mathbf{I}}(\text{O},t) \cdot \vec{\Omega}(t) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}(t) \cdot \vec{\sigma}(\text{O},t) . \quad (2.49)$$

2.4.5 Cas général de mouvement solide

Dans le cas général on a intérêt à utiliser le second théorème de Koenig (2.47), qui s'écrit compte tenu de l'équation (2.49) :

$$E_c = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2(\text{G}) + E_{c\mathcal{K}} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2(\text{G}) + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\mathbf{I}}(\text{G}) \cdot \vec{\Omega} \quad (2.50)$$

où

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\text{solide}/\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{\text{solide}/\mathcal{K}} . \quad (2.51)$$

2.5 Exercices

Exercice 2.1 Calcul de tenseurs d'inertie de solides homogènes de forme simple

Établissez, par le calcul des intégrales de volume, de surface ou de ligne correspondantes, les formules (2.33) à (2.45) de ce document.

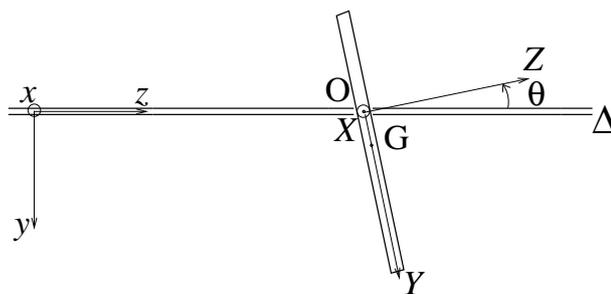
Exercice 2.2 Étude de l'inertie d'un rotor disque excentré incliné

Un rotor mal équilibré peut être décrit en première approximation comme un disque circulaire homogène de masse m , de rayon R et d'épaisseur suffisamment faible pour être négligée. Ce disque est fixé sur un axe de rotation Δ passant par un point excentré O du disque. Ainsi le centre d'inertie G du disque ne se trouve pas sur l'axe Δ , et on définit justement le vecteur unitaire \vec{e}_Y par

$$\vec{e}_Y = \frac{\vec{OG}}{a}.$$

Le mouvement de rotation de ce disque est caractérisé par un angle d'Euler de précession ψ autour de Oz qui évolue au cours du temps. De plus la normale \vec{e}_Z au plan du disque fait avec l'axe Δ un angle θ constant, que l'on peut identifier à un angle d'Euler de nutation. Il n'y a pas de rotation propre du disque. Le premier vecteur de la base liée au disque est naturellement $\vec{e}_X = \vec{e}_Y \wedge \vec{e}_Z$.

À l'instant t_0 où est dessinée la figure en coupe ci-contre, $\psi(t_0) = 0$. On note \mathcal{R}_0 le référentiel absolu de laboratoire et \mathcal{R} le référentiel tournant lié à l'axe et au disque.



1 Vérifiez que les vecteurs de la base liée au disque ont pour expression

$$\begin{aligned}\vec{e}_X &= \cos \psi(t) \vec{e}_x + \sin \psi(t) \vec{e}_y, \\ \vec{e}_Y &= \cos \theta [-\sin \psi(t) \vec{e}_x + \cos \psi(t) \vec{e}_y] + \sin \theta \vec{e}_z, \\ \vec{e}_Z &= \sin \theta [\sin \psi(t) \vec{e}_x - \cos \psi(t) \vec{e}_y] + \cos \theta \vec{e}_z.\end{aligned}$$

2 Donnez l'expression du vecteur rotation instantané du disque $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}$.

3.a On veut calculer dans le référentiel \mathcal{R}_0 le moment cinétique du disque $\vec{\sigma}(O)$ lors de son mouvement de rotation défini par la donnée de $\psi(t)$ au cours du temps, en utilisant le tenseur d'inertie du disque. Quelle formule reliant $\vec{\sigma}(O)$ et $\vec{I}(O)$ faudra t'il utiliser ? Dans quelle base a t'on intérêt à mener les calculs ?

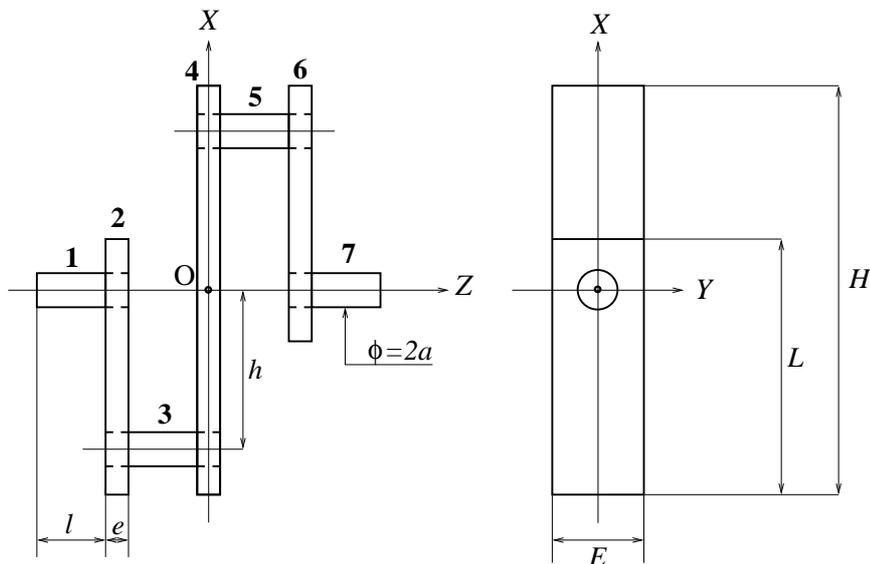
3.b Menez à bien ces calculs, en donnant pour cela l'expression complète de $\vec{I}(O)$. A t'on généralement colinéarité de $\vec{\sigma}(O)$ avec $\vec{\Omega}$?

3.c Quel est le moment d'inertie I_Δ du disque par rapport à l'axe Δ ?

4 Quelle est l'énergie cinétique « de rotation » correspondante ?

Exercice 2.3 Étude de l'inertie d'un vilebrequin de moteur bicylindre

Le vilebrequin représenté ci-dessous en vues de face et de profil comprend les tourillons 1 et 7, les manetons 3 et 5, les manivelles 2, 4 et 6. Manetons et tourillons sont des cylindres de rayon a , emmanchés sur toute l'épaisseur e de la ou des manivelles correspondantes, et de longueur hors emmanchement l . Toutes les manivelles possèdent trois plans orthogonaux de symétrie orientés perpendiculairement à chacun des vecteurs de la base liée au vilebrequin $\{\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z\}$. Toutes les pièces sont composées du même matériau de masse volumique ρ .



Le but de cet exercice est de déterminer le tenseur d'inertie $\vec{\mathbf{I}}(\text{O})$ de ce vilebrequin au point central O.

1 Compte tenu des symétries du vilebrequin, donnez la forme a priori de la matrice représentative M de $\vec{\mathbf{I}}(\text{O})$ dans la base $\{\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z\}$.

2 Montrez que l'on a intérêt à décomposer par la pensée le vilebrequin en 7 pièces virtuelles $1', 2', \dots, 7'$ correspondants à des cylindres pleins et à des plaques rectangulaires pleines pour calculer $\vec{\mathbf{I}}(\text{O})$, au lieu de considérer les pièces réelles comprenant 3 plaques rectangulaires percées.

3 Calculez les contributions correspondantes $\vec{\mathbf{I}}_1(\text{O}), \vec{\mathbf{I}}_2(\text{O}), \dots, \vec{\mathbf{I}}_7(\text{O})$ à $\vec{\mathbf{I}}(\text{O})$, en passant éventuellement par un calcul intermédiaire où chaque contribution est calculée en G_i centre d'inertie de la pièce virtuelle i' . En déduire les composantes non nulles de M .

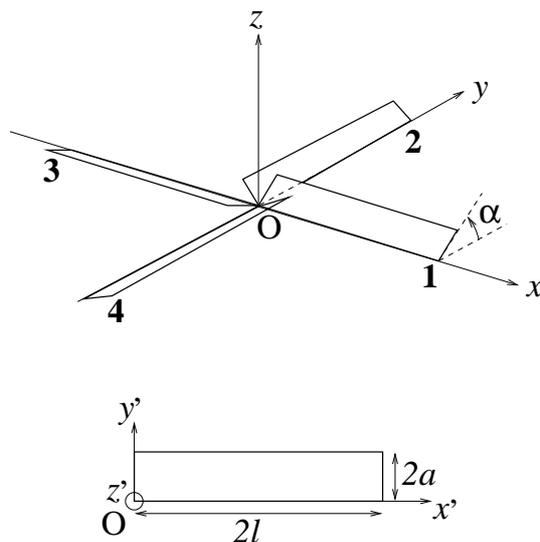
4 En réalité, dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R}_0 où l'axe OZ est fixe égal à Oz , et où la base $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ est orthonormale fixe, le vilebrequin est animé d'un mouvement de rotation repéré par l'angle

$$\theta(t) = \left(\widehat{\vec{e}_x, \vec{e}_X(t)} \right).$$

Donnez l'expression du vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}(t)$ du vilebrequin dans \mathcal{R}_0 . Calculez le moment cinétique du vilebrequin $\vec{\sigma}(\text{O}, t)$ dans \mathcal{R}_0 , en réfléchissant au choix de base le plus judicieux pour mener des calculs simples. Le moment cinétique est-il parallèle au vecteur rotation ?

Exercice 2.4 Étude de l'inertie d'une hélice d'hélicoptère

L'hélice d'hélicoptère représentée ci-dessous est constituée de quatre pales identiques, numérotées de 1 à 4 :



La base $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ est liée à l'hélice.

A chaque pale on associe une base $\{\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}\}$ comme représenté sur la partie basse de la figure.

Chaque pale est constituée d'un matériau homogène. Son épaisseur dans la direction z' peut être négligée. La masse d'une pale est m , sa longueur $2l$ et sa largeur $2a$. Son angle d'inclinaison par rapport au plan xOy est α .

- 1 Expliquez pourquoi, dans le but de calculer le moment cinétique de l'hélice en O dans son mouvement de rotation, on a intérêt à calculer le tenseur d'inertie de l'hélice $\vec{\vec{I}}(O)$ dans la base liée à l'hélice.
- 2 Calculez les moments d'inertie d'une pale $I_{x'x'}(O)$, $I_{y'y'}(O)$ et $I_{z'z'}(O)$ dans la base liée à cette pale. Parmi les produits d'inertie de cette même pale $I_{x'y'}(O)$, $I_{y'z'}(O)$ et $I_{z'x'}(O)$, quels sont ceux qui s'annulent a priori ?
- 3 Quelle est la forme a priori de la matrice représentative du tenseur d'inertie de l'hélice $\vec{\vec{I}}(O)$ dans la base liée à l'hélice ?
- 4 Calculez effectivement $\vec{\vec{I}}(O)$ dans la base liée à l'hélice.

Chapitre 3

Dynamique newtonienne

Nous nous intéressons enfin au problème de la *dynamique*¹, c'est-à-dire de la prédiction du mouvement d'un système matériel étant supposées connues les forces qui s'exercent sur ce système. Dans une première section, nous rappelons la loi fondamentale de la dynamique pour un point matériel, ce qui nous permet de discuter du choix d'un référentiel de travail. Nous introduisons ensuite dans la section 3.2, en partant du cas d'un système composé de plusieurs points matériels, les lois globales d'évolution de la résultante, du moment et de l'énergie cinétique. La généralisation à un système pouvant présenter des sous-systèmes continus est donnée en section 3.3. Rappelons que nous nous plaçons résolument dans le cadre de la *mécanique classique*, cf. la discussion de la page 12.

3.1 Loi fondamentale pour un point matériel - Choix du référentiel de travail

Nous nous intéressons ici à la dynamique d'une masse ponctuelle m située au point $M = M(t)$.

3.1.1 Loi fondamentale de la dynamique en référentiel galiléen

Le *principe* ou *loi fondamentale de la dynamique* de Newton, posé dans ses *Philosophiae naturalis principia mathematica* publiés en 1687, pose l'existence de référentiels dits *galiléens* dans lesquels le mouvement de M est entièrement déterminé par la connaissance de la *force* \vec{F} exercée sur M , qui égale le taux d'accroissement temporel de la quantité de mouvement de M :

$$\boxed{\frac{d}{dt}m\vec{v}(M) = m\vec{\gamma}(M) = \vec{F}} \quad (3.1)$$

la première égalité résultant de la conservation de la masse m .

La force physique \vec{F} , qui se mesure en Newtons N ($1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$), ne dépend pas du référentiel galiléen considéré. Si un référentiel galiléen est connu, tout référentiel en translation à vitesse constante par rapport à ce référentiel est aussi galiléen, puisque d'après la loi de composition des accélérations (1.72) les accélérations de points matériels ont même valeur dans les deux référentiels. Le problème est bien sûr de connaître un premier référentiel galiléen ; pour tous les problèmes de l'ingénieur le *référentiel de Copernic*, lié au soleil et d'axes dirigés vers des étoiles lointaines « fixes », peut être considéré comme galiléen.

3.1.2 Loi fondamentale de la dynamique en référentiel non galiléen

L'ingénieur préférera en général travailler dans un référentiel plus « proche » que le référentiel de Copernic : le référentiel lié au centre de la terre s'il étudie un satellite, le référentiel du laboratoire s'il étudie

¹Du grec « dunamis » : force.

un petit système, etc... Il se posera alors la question naturelle du changement de référentiel par rapport au référentiel de Copernic. L'ingénieur aura aussi besoin de savoir changer de référentiel lorsqu'il étudiera la dynamique de systèmes en rotation (machines tournantes, etc...) ou en mouvement (étude de la dynamique interne d'un véhicule par exemple). Il aura alors souvent intérêt à travailler dans un référentiel lié à la machine ou au véhicule étudié.

Supposons donc donné un référentiel galiléen ou « approximativement galiléen » (en un sens qui sera illustré section 3.1.4) \mathcal{R}_0 dans lequel la loi fondamentale de la dynamique sous la forme (3.1) est (éventuellement approximativement) valable. Désignons ce référentiel comme le référentiel absolu, et posons nous la question de la prédiction des mouvements dans un référentiel relatif \mathcal{R} en mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 . Pour cela il nous suffit d'utiliser le lien établi équation (1.72) entre l'accélération d'un point matériel observée dans \mathcal{R} et \mathcal{R}_0 :

$$\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}_a(M) - \vec{\gamma}_e(M) - \vec{\gamma}_c(M) .$$

Par injection dans (3.1) on obtient que la loi fondamentale de la dynamique dans le référentiel relatif s'écrit sous la forme :

$$\boxed{m\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{F}}_e + \vec{\mathbf{F}}_c} \quad (3.2)$$

où l'on a fait apparaître des « forces effectives nouvelles » ou « *forces d'inertie* » :

$$\vec{\mathbf{F}}_e = -m\vec{\gamma}_e(M) , \text{ la } \textit{force d'inertie d'entraînement} , \quad (3.3)$$

$$\vec{\mathbf{F}}_c = -m\vec{\gamma}_c(M) , \text{ la } \textit{force d'inertie de Coriolis} . \quad (3.4)$$

D'après les résultats de la section 1.2.4, et avec les mêmes notations, on peut écrire

$$\vec{\mathbf{F}}_e = -m \frac{d^2 \overrightarrow{\mathbf{OA}}(t)}{dt^2} \Big|_{\mathcal{R}_0} + m \overrightarrow{\mathbf{AM}}(t) \wedge \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) - m \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge [\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}}(t)] , \quad (3.5)$$

$$\vec{\mathbf{F}}_c = 2m \overrightarrow{\mathbf{v}}_r(t) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) . \quad (3.6)$$

3.1.3 Du référentiel de Copernic au référentiel géocentrique - Et de la gravité

La loi fondamentale sous la forme (3.2) va nous permettre de discuter de la prédiction des mouvements dans le *référentiel géocentrique* lié au centre de la terre \mathbf{O}_T , et d'orientation fixe dans le référentiel absolu de Copernic. Comme ces deux référentiels ne sont animés l'un par rapport à l'autre que d'un mouvement de translation, le changement de référentiel correspondant ne fait pas apparaître d'accélération de Coriolis. Par contre, d'après l'équation (1.70), il introduit une accélération d'entraînement

$$\vec{\gamma}_e(M) = \frac{d^2 \overrightarrow{\mathbf{O}_S \mathbf{O}_T}}{dt^2} = \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_{géo} \wedge \left(\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_{géo} \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}_S \mathbf{O}_T} \right) = -\Omega_{géo}^2 \overrightarrow{\mathbf{O}_S \mathbf{O}_T}$$

d'après l'équation (1.56), \mathbf{O}_S désignant le centre du soleil et $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_{géo}$ le vecteur rotation du centre de la terre par rapport au soleil.

Φ Cette accélération vaut

$$|\vec{\gamma}_e(M)| = \left(\frac{2\pi}{1 \text{ an}} \right)^2 150 \cdot 10^6 \text{ km} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2 .$$

Profitions-en, au passage, pour rappeler la *loi de la gravitation universelle* qui contrôle la vitesse de rotation $\Omega_{géo}$, en nous souvenant tout de même que cette loi posée par Newton dans ses *Principia* constitue avec la loi fondamentale de la dynamique le point de départ de la mécanique moderne : une masse ponctuelle m située au point \mathbf{O} exerce sur une masse ponctuelle m' située au point \mathbf{M} la force d'attraction gravitationnelle

$$\vec{\mathbf{F}} = -Gmm' \frac{\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\text{OM}^3} , \quad (3.7)$$

G étant la constante de la gravitation

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^2 \quad (3.8)$$

et \mathbf{OM}^3 une notation simplifiée du cube de la norme de $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$. En écrivant la loi fondamentale de la dynamique pour le mouvement de la terre autour du soleil,

$$-m_T \Omega_{géo}^2 \overrightarrow{\mathbf{O}_S \mathbf{O}_T} = -G m_T m_S \frac{\overrightarrow{\mathbf{O}_S \mathbf{O}_T}}{\mathbf{O}_S \mathbf{O}_T^3},$$

on aboutit bien à

$$\Omega_{géo} = \sqrt{\frac{G m_S}{\mathbf{O}_S \mathbf{O}_T^3}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^2 \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{(150 \cdot 10^9 \text{ m})^3}} = \frac{2\pi}{1 \text{ an}}.$$

Cette loi de la gravitation universelle explique aussi la valeur du champ gravitationnel de la terre sur sa surface

$$g = \frac{G m_T}{r_T^2} = G \rho_T \frac{4}{3} \pi r_T = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^2 \cdot 5,50 \cdot 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 6380 \text{ km} = 9,81 \text{ m}/\text{s}^2 \quad (3.9)$$

en utilisant pour densité moyenne de la terre $\rho_T = 5,50 \rho_{\text{eau}}$ à 4°C donnée par (2.1).

Φ

Pour tout mouvement au voisinage de la terre, suffisamment accéléré, cette accélération d'entraînement sera négligeable, de même d'ailleurs que les forces gravitationnelles dues au soleil ou à la lune². On considérera donc en général le référentiel géocentrique comme galiléen, en omettant de plus les termes gravifiques solaires et lunaires dans le bilan des forces :

$$\boxed{m \vec{\gamma}_r(\mathbf{M}) \simeq \vec{\mathbf{F}} \text{ dans le référentiel géocentrique.}} \quad (3.10)$$

3.1.4 Du référentiel géocentrique au référentiel du laboratoire

Pour beaucoup d'applications intéressant l'ingénieur, l'usage du référentiel géocentrique, quoique celui-ci soit déjà plus « proche » que le référentiel de Copernic, n'est pas satisfaisant, et on préférera travailler dans un « *référentiel du laboratoire* » lié à la surface de la terre. Le mouvement de ce référentiel dans le référentiel géocentrique est évidemment défini par le mouvement de rotation de la terre sur elle-même, mouvement qui a lieu à la vitesse angulaire constante

$$\Omega_T = \frac{2\pi}{24 \text{ h}} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad}/\text{s}, \quad (3.11)$$

et autour d'un axe fixe³. L'accélération d'entraînement en un point M quelconque du référentiel du laboratoire vaut donc d'après l'équation (1.56) :

$$\vec{\gamma}_e(\mathbf{M}) = \vec{\Omega}_T \wedge \left(\vec{\Omega}_T \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}_T \mathbf{M}} \right),$$

tandis que l'accélération de Coriolis vaut :

$$\vec{\gamma}_c(\mathbf{M}) = 2\vec{\Omega}_T \wedge \vec{v}_r(\mathbf{M}).$$

²Pour une discussion détaillée des corrections à cette approximation, et une prise en compte des « termes résiduels luni-solaires » correspondants, on pourra consulter Moreau (1971).

³En fait cet axe tourne lui-même très lentement dans le référentiel de Copernic, sur une période d'environ 26000 ans. Ce phénomène de *précession* de l'axe de rotation de la terre pourra bien sûr être négligé dans la quasi-totalité des applications.

Par convention, on inclut toujours le terme de force d'inertie d'entraînement $-m\vec{\gamma}_e(\mathbf{M})$ dans le champ gravitationnel effectif de la terre⁴, c'est-à-dire dans l'une des contributions à la force $\vec{\mathbf{F}}$. Dans le cas de mouvements suffisamment accélérés, pour que (3.10) soit valable, on écrira donc, en omettant toujours les termes gravifiques luni-solaires dans le bilan des forces, que dans le référentiel du laboratoire :

$$\boxed{m\vec{\gamma}_r(\mathbf{M}) \simeq \vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{F}}_c} \quad (3.12)$$

où la force d'inertie de Coriolis vaut

$$\vec{\mathbf{F}}_c = m\vec{\gamma}_c(\mathbf{M}) = -2m\vec{\Omega}_T \wedge \vec{\mathbf{v}}_r(\mathbf{M}) . \quad (3.13)$$

L'accélération correspondante est contrôlée par la vitesse de la particule mobile, selon

$$|\vec{\gamma}_c(\mathbf{M})| \simeq 2\vec{\Omega}_T |\vec{\mathbf{v}}_r(\mathbf{M})| \simeq \frac{|\vec{\mathbf{v}}_r(\mathbf{M})|}{6880 \text{ s}} . \quad (3.14)$$

Pour des mouvements de vitesse relativement faible, suffisamment accélérés, on pourra donc écrire dans le référentiel du laboratoire que

$$\boxed{m\vec{\gamma}_r(\mathbf{M}) \simeq \vec{\mathbf{F}}} \quad (3.15)$$

c'est-à-dire considérer le référentiel du laboratoire comme « approximativement galiléen ».

3.2 Introduction aux lois globales : cas d'un système discret

Dans le but d'introduire naturellement les lois de Newton sous forme globales, nous considérons maintenant le cas « simple » d'un système *discret* soumis seulement à des forces⁵, pour lequel les lois d'évolution de la résultante, du moment et de l'énergie cinétique peuvent se démontrer à partir de la loi fondamentale de la dynamique et de la loi de l'action-réaction seulement.

Notre système est donc constitué de masses « ponctuelles » repérées par un indice i , situées aux points $\mathbf{M}_i(t)$, de masse individuelle m_i . Dans le référentiel de travail, d'origine O , nous partirons de la loi fondamentale de la dynamique écrite pour chaque particule i :

$$\boxed{m_i\vec{\gamma}(\mathbf{M}_i) = m_i\ddot{\overrightarrow{OM}_i} = \vec{\mathbf{F}}_i} \quad (3.16)$$

La force $\vec{\mathbf{F}}_i$ exercée sur la particule i doit être décomposée en

$$\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i^{ext} + \vec{\mathbf{F}}_i^{int} \quad (3.17)$$

où $\vec{\mathbf{F}}_i^{ext}$ est la force exercée par l'extérieur du système sur la particule i (plus éventuellement des forces d'inertie si le référentiel de travail est non galiléen), et

$$\vec{\mathbf{F}}_i^{int} = \sum_{j \neq i} \vec{\mathbf{F}}_{ji} \quad (3.18)$$

est la somme des forces intérieures $\vec{\mathbf{F}}_{ji}$ exercées par le point matériel j sur le point matériel i .

⁴Qui ne pointe donc pas en général vers le centre de la terre !

⁵Par opposition au cas plus général de systèmes présentant des sous-systèmes *continus*, dans lesquels les efforts intérieurs par exemple ne peuvent être décrits par une simple densité de forces mais demandent l'introduction d'un tenseur des contraintes. Ce problème de la description correcte des efforts intérieurs est en fait peu pertinent dans le cas de solides indéformables (voir à ce sujet la conclusion de la section 3.3.2). Cependant il nous semble fondamentalement intéressant d'essayer de comprendre l'origine profonde des lois d'évolution de la résultante et du moment cinétique, en refusant de les poser a priori.

3.2.1 Loi d'évolution de l'énergie cinétique - Notion de puissance d'efforts

Multiplions scalairement l'équation (3.16) par $\overrightarrow{\mathbf{OM}}_i$. Il vient :

$$m_i \overrightarrow{\mathbf{OM}}_i \cdot \overrightarrow{\mathbf{OM}}_i = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_i \left(\overrightarrow{\mathbf{OM}}_i \right)^2 \right] = \overrightarrow{\mathbf{F}}_i^{ext} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OM}}_i + \overrightarrow{\mathbf{F}}_i^{int} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OM}}_i$$

En sommant ces équations pour tout indice de particule i on aboutit à la *loi d'évolution de l'énergie cinétique* :

la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique totale du système est égale à la **puissance des efforts extérieurs et intérieurs appliqués** :

$$\frac{dE_c}{dt} = P^{ext} + P^{int} = \sum_i \overrightarrow{\mathbf{F}}_i^{ext} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OM}}_i + \sum_i \overrightarrow{\mathbf{F}}_i^{int} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OM}}_i . \quad (3.19)$$

Φ Notons, en sus de l'unité SI de puissance, le Watt W (1 W = 1 J/s), l'existence d'unités « mécaniques » de puissance ou « chevaux »... Un cheval-vapeur européen est la puissance fournie (par un cheval à l'origine) pour entraîner un poids de 75 kg à 1 m/s (i.e. 3,6 km/h) en luttant contre la pesanteur,

$$1 \text{ ch} = 75 \text{ kg } 9,81 \text{ m/s}^2 \text{ } 1 \text{ m/s} = 736 \text{ W} ,$$

tandis qu'un "horse-power" américain est la puissance fournie pour entraîner un poids de 550 livres à 1 pied par seconde,

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ } 0,454 \text{ kg } 9,81 \text{ m/s}^2 \text{ } 30,48 \text{ cm/s} = 746 \text{ W} \dots$$

Ainsi les chevaux américains sont légèrement plus puissants que les chevaux européens!... Au delà de l'anecdote, ces définitions nous donnent une idée de la puissance moyenne que peut développer un être humain, soit environ deux fois moins qu'un cheval menant la tâche raisonnable définie plus haut, i.e. approximativement 400 W.

De façon un petit peu paradoxale, l'unité SI de puissance sert à définir une unité non SI d'énergie, à savoir le kiloWatt-heure :

$$1 \text{ kWh} = 1000 \text{ J/s } 3600 \text{ s} = 3,6 \text{ MJ} .$$

La table suivante indique l'évolution récente du prix du kiloWatt-Heure facturé par EDF à un particulier « consommateur standard », i.e. se satisfaisant d'une puissance délivrée de l'ordre de 20 kiloWatt :

Année	Prix du kWh
2004	0,1058€
2005	0,1057€
2006	0,1057€
2007	0,1085€

Ces prix sont extrêmement compétitifs par rapport au tarif de location d'un cheval qui fournirait le même travail. Cette constatation illustre la situation d'abondance énergétique dans laquelle nous vivons, en occident et plus particulièrement en France, grâce au progrès technique... et à la compétence des ingénieurs d'EDF et du CEA!... Ainsi les « meilleurs » des réacteurs nucléaires des centrales françaises produisent 1,45 GW d'énergie électrique, à comparer par exemple aux 3 MW des meilleures éoliennes un jour de grand vent. Attention toutefois : ces questions énergétiques sont subtiles, et l'énergie nucléaire n'est pas une solution miracle du fait du problème des déchets radioactifs. Une seule chose est sûre : dans les thématiques liées à l'énergie, il y a du pain sur la planche pour beaucoup d'ensembliers!...

Φ

3.2.2 Loi de l'action-réaction - Notion de résultante et moment d'efforts

En suivant la démarche de Truesdell (1991), nous préférons poser pour commencer une loi équivalente mais qui nous semble plus intuitive, la *loi d'invariance⁶ de la puissance des efforts intérieurs* :

la puissance des efforts intérieurs, qui mesure physiquement la variation d'énergie interne du système due aux interactions mécaniques internes au système, ne doit pas dépendre de l'observateur, c'est-à-dire du référentiel (même non galiléen) considéré.

Traduisons cette loi en faisant la différence entre la puissance des efforts intérieurs calculée dans un premier référentiel « absolu » \mathcal{R}_0 et celle calculée dans un deuxième référentiel « relatif » \mathcal{R} . On demande que :

$$P_{\mathcal{R}_0}^{int} - P_{\mathcal{R}}^{int} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i^{int} \cdot [\vec{\mathbf{v}}_a(M_i) - \vec{\mathbf{v}}_r(M_i)] = 0 .$$

La différence des vitesses qui apparaît est la vitesse d'entraînement du point M_i dans le référentiel \mathcal{R} , donnée par l'équation (1.65). La loi se traduit donc, A étant un point quelconque de \mathcal{R} , comme les vitesses de translation $\vec{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(A)$ et de rotation $\vec{\mathbf{\Omega}}$ de \mathcal{R} par rapport à \mathcal{R}_0 sont quelconques, par :

$$\begin{aligned} \forall A, \forall \vec{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(A), \forall \vec{\mathbf{\Omega}}, \quad & \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i^{int} \cdot [\vec{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(A) + \vec{\mathbf{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}}_i] = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i^{int} \right] \cdot \vec{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(A) + \left[\sum_i \overrightarrow{\mathbf{AM}}_i \wedge \vec{\mathbf{F}}_i^{int} \right] \cdot \vec{\mathbf{\Omega}} = 0 . \end{aligned}$$

Ceci a lieu si et seulement si la *résultante* des efforts intérieurs s'annule :

$$\vec{\mathbf{R}}^{int} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i^{int} = 0 , \quad (3.20)$$

de même que le *moment* des efforts intérieurs en tout point A :

$$\vec{\mathbf{\Gamma}}^{int}(A) = \sum_i \overrightarrow{\mathbf{AM}}_i \wedge \vec{\mathbf{F}}_i^{int} = 0 . \quad (3.21)$$

On peut donc donner une loi équivalente à celle d'invariance de la puissance des efforts intérieurs, la *loi de l'action-réaction⁷* :

la résultante et le moment des efforts intérieurs à un système sont toujours nuls.

En considérant comme système particulier⁸ le système constitué de deux points matériels i et j , on obtient immédiatement la loi de l'action-réaction sous la forme plus classique :

les forces d'interaction mutuelles entre deux objets i et j sont opposées :

$$\vec{\mathbf{F}}_{ij} = -\vec{\mathbf{F}}_{ji} ,$$

et dirigées suivant le vecteur qui relie les deux particules⁹, soit $\overrightarrow{\mathbf{M}_i\mathbf{M}_j}$:

$$\overrightarrow{\mathbf{M}_i\mathbf{M}_j} \wedge \vec{\mathbf{F}}_{ij} = \vec{\mathbf{0}} .$$

⁶Certains mécaniciens préfèrent parler d'*objectivité*.

⁷En termes de torseurs, le *torseur des efforts intérieurs* doit être nul :

$$\{\mathcal{T}_{\text{efforts intérieurs}(A)}\} := \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathbf{R}}^{int} \\ \vec{\mathbf{\Gamma}}^{int}(A) \end{array} \right\} = \{0\} .$$

⁸De manière générale le modélisateur a toute latitude pour découper (par la pensée!) un système donné en différents sous-systèmes, et cette démarche est souvent fructueuse.

⁹Certains auteurs parlent à ce sujet de forces d'interaction mutuelle *centrales*.

3.2.3 Loi d'évolution de la résultante cinétique

Sommons les équations (3.16) sur tous les indices i de particules. Il vient, en introduisant comme au chapitre précédent la masse totale m du système ainsi que son centre de gravité G :

$$m\overrightarrow{\text{OG}} = \sum_i \overrightarrow{\mathbf{F}}_i^{ext} + \sum_i \overrightarrow{\mathbf{F}}_i^{int} = \sum_i \overrightarrow{\mathbf{F}}_i^{ext}$$

d'après la loi de l'action-réaction. On en déduit la *loi d'évolution de la résultante cinétique* :

$$\dot{\overrightarrow{\mathbf{p}}} = \overrightarrow{\mathbf{R}}^{ext} \quad (3.22)$$

où l'on rappelle que O est un point fixe du référentiel de travail, et $\overrightarrow{\mathbf{R}}^{ext}$ désigne la résultante des efforts extérieurs, somme de toutes les forces extérieures appliquées au système :

$$\overrightarrow{\mathbf{R}}^{ext} = \sum_i \overrightarrow{\mathbf{F}}_i^{ext} . \quad (3.23)$$

3.2.4 Loi d'évolution du moment cinétique

Formons maintenant pour tout indice i de particule le produit vectoriel du vecteur position $\overrightarrow{\text{OM}}_i$ avec l'équation fondamentale (3.16). Après sommation sur i , le membre de gauche de l'équation bilan est

$$\sum_i m_i \overrightarrow{\text{OM}}_i \wedge \overrightarrow{\dot{\text{OM}}}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \overrightarrow{\text{OM}}_i \wedge \overrightarrow{\dot{\text{OM}}}_i \right) = \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}}(\text{O}) \quad (3.24)$$

d'après la définition (2.11) réécrite en version discrète. Au membre de droite de l'équation bilan il apparaît d'une part le moment des efforts extérieurs

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\Gamma}}^{ext}(\text{O}) = \sum_i \overrightarrow{\text{OM}}_i \wedge \overrightarrow{\mathbf{F}}_i^{ext} \quad (3.25)$$

et d'autre part le moment des efforts intérieurs

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\Gamma}}^{int}(\text{O}) = \sum_i \overrightarrow{\text{OM}}_i \wedge \overrightarrow{\mathbf{F}}_i^{int}$$

dont on sait qu'il est nul d'après la loi de l'action-réaction. On en déduit la *loi d'évolution du moment cinétique* :

$$\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}}(\text{O}) = \overrightarrow{\boldsymbol{\Gamma}}^{ext}(\text{O}) . \quad (3.26)$$

3.3 Lois globales dans le cas général

Intéressons-nous maintenant au cas général d'un système constitué d'une part de masses ponctuelles m_i situées aux points M_i , et d'autre part de sous-systèmes continus, contenus dans le volume V . Nous allons maintenant poser comme *principes fondateurs* les lois d'évolution de la résultante, du moment et de l'énergie cinétique : nous admettons que leur validité pour des systèmes discrets, démontrée dans la section précédente à partir des lois fondamentales de la dynamique et de l'action-réaction, s'étend au cas de systèmes présentant des sous-systèmes continus.

3.3.1 Lois d'évolution de la résultante et du moment cinétique

Nous postulons donc la validité générale de (3.22) et (3.26). Dans tout référentiel *galiléen* où O est un point fixe, les variations des quantités de mouvement de translation et de rotation d'un système sont entièrement déterminées par la connaissance des seuls *efforts extérieurs* appliqués sur ce système, selon la *loi d'évolution de la résultante cinétique* :

$$\boxed{\dot{\vec{p}} = \vec{\mathbf{R}}^{ext} \text{ résultante des efforts extérieurs appliqués}} \quad (3.27)$$

et la *loi d'évolution du moment cinétique* :

$$\boxed{\dot{\vec{\sigma}}(\text{O}) = \vec{\mathbf{\Gamma}}^{ext}(\text{O}) \text{ moment en O des efforts extérieurs appliqués}} \quad (3.28)$$

Pour expliciter ces lois nous supposons en général les efforts extérieurs décrits par la donnée

- d'une *densité volumique de forces* $\vec{\mathbf{f}}_{vol}$ agissant dans le volume V (ex : $\vec{\mathbf{f}}_{vol} = \rho \vec{\mathbf{g}}$ pour le poids, $\vec{\mathbf{g}}$ étant le champ gravitationnel de la terre),
- d'une *densité surfacique de forces* $\vec{\mathbf{T}}$ agissant sur la frontière ∂V de V ,
- de *forces ponctuelles* $\vec{\mathbf{F}}_i$ s'appliquant aux points M_i .

Alors la résultante des efforts extérieurs est

$$\vec{\mathbf{R}}^{ext} = \iiint_V \vec{\mathbf{f}}_{vol} d^3V + \iint_{\partial V} \vec{\mathbf{T}} d^2S + \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i, \quad (3.29)$$

tandis que, par analogie avec (3.25), le moment en O des efforts extérieurs est défini par

$$\vec{\mathbf{\Gamma}}^{ext}(\text{O}) = \iiint_V \overrightarrow{\text{OM}} \wedge \vec{\mathbf{f}}_{vol} d^3V + \iint_{\partial V} \overrightarrow{\text{OM}} \wedge \vec{\mathbf{T}} d^2S + \sum_i \overrightarrow{\text{OM}}_i \wedge \vec{\mathbf{F}}_i. \quad (3.30)$$

Il importe de constater que le champ de vecteurs $\vec{\mathbf{\Gamma}}^{ext}(\text{O})$ présente une structure de champ de moments, de résultante $\vec{\mathbf{R}}^{ext}$:

$$\forall A, \text{O}, \quad \vec{\mathbf{\Gamma}}^{ext}(A) = \vec{\mathbf{\Gamma}}^{ext}(\text{O}) + \vec{\mathbf{R}}^{ext} \wedge \overrightarrow{\text{OA}}. \quad (3.31)$$

Dans certains cours de mécanique on introduit d'ailleurs le *torseur des efforts extérieurs*

$$\{\mathcal{T}_{\text{efforts extérieurs}}(\text{O})\} := \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathbf{R}}^{ext} \\ \vec{\mathbf{\Gamma}}^{ext}(\text{O}) \end{array} \right\}. \quad (3.32)$$

Ceci permet de formuler les deux lois globales que nous venons d'énoncer en une seule, qui stipule que la dérivée par rapport au temps du torseur cinétique d'un système est égale au torseur des efforts extérieurs :

$$\frac{d}{dt} \{\mathcal{T}_{\text{cinétique}}(\text{O})\} = \{\mathcal{T}_{\text{efforts extérieurs}}(\text{O})\}. \quad (3.33)$$

Le fait que la seule connaissance de la force et du moment résultants d'une distribution d'efforts extérieurs soit nécessaire à l'écriture de (3.27) et (3.28) justifie souvent l'oubli des « détails microscopiques » de cette distribution d'efforts extérieurs. Dans cette optique, les efforts extérieurs sont seulement décrits comme la « superposition » d'une force $\vec{\mathbf{R}}^{ext}$ et d'un « couple » $\vec{\mathbf{\Gamma}}^{ext}(\text{O})$. Cette vue de l'esprit s'avèrera notamment utile dans l'étude des liaisons, comme on le verra au début du chapitre suivant.

Une extension à cette description « standard » des efforts extérieurs consiste à s'intéresser au cas d'un référentiel *non galiléen*. Les calculs ayant mené à l'équation (3.2) montrent qu'alors il faut rajouter dans les efforts extérieurs une *densité volumique de forces d'inertie* $-\rho \vec{\gamma}_e(\text{M}) - \rho \vec{\gamma}_c(\text{M})$ et des *forces ponctuelles d'inertie* $-m_i \vec{\gamma}_e(\text{M}_i) - m_i \vec{\gamma}_c(\text{M}_i)$.

3.3.2 Loi d'évolution de l'énergie cinétique

Nous supposons aussi la validité générale de la *loi d'évolution de l'énergie cinétique* (3.19) :

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P^{ext} + P^{int}} \quad (3.34)$$

la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique totale du système est égale à la puissance des efforts extérieurs et intérieurs appliqués.

Avec la description standard que nous avons donnée des efforts extérieurs,

$$\boxed{P^{ext} = \iiint_V \vec{\mathbf{f}}_{vol} \cdot \vec{\mathbf{v}} d^3V + \iint_{\partial V} \vec{\mathbf{T}} \cdot \vec{\mathbf{v}} d^2S + \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}(M_i)} \quad (3.35)$$

Dans le *cas d'un solide indéformable*, il vient d'après la structure de champ de moments du champ de vitesse, étant choisi un point particulier A de ce solide :

$$P^{ext} = \iiint_V \vec{\mathbf{f}}_{vol} \cdot [\vec{\mathbf{v}}(A) + \vec{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \overline{\mathbf{AM}}] d^3V + \iint_{\partial V} \vec{\mathbf{T}} \cdot [\vec{\mathbf{v}}(A) + \vec{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \overline{\mathbf{AM}}] d^2S + \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i \cdot [\vec{\mathbf{v}}(A) + \vec{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \overline{\mathbf{AM}}_i]$$

soit en utilisant la possibilité de permutation circulaire des vecteurs dans un produit mixte, et en comparant avec (3.29) et (3.30) :

$$\boxed{P^{ext} = \vec{\mathbf{R}}^{ext} \cdot \vec{\mathbf{v}}(A) + \vec{\boldsymbol{\Gamma}}^{ext}(A) \cdot \vec{\boldsymbol{\Omega}}} \quad (3.36)$$

Cette équation est importante car elle montre, associée aux équation (3.27) et (3.28) que, dans le cas d'un solide indéformable, l'influence dynamique des efforts extérieurs est entièrement déterminée par les seuls force résultante $\vec{\mathbf{R}}^{ext}$ et « couple » résultant $\vec{\boldsymbol{\Gamma}}^{ext}(A)$.

Par contre l'écriture de la puissance des efforts intérieurs suppose une description des efforts intérieurs. Dans le *cas d'un seul solide indéformable*, on verra dans le cours de Rahouadj (2006) que les efforts intérieurs liés à la cohésion du matériau et à sa résistance à la déformation sont décrits par un tenseur des contraintes $\vec{\boldsymbol{\sigma}}$, dont la connaissance détermine en général la puissance correspondante selon :

$$P^{int} = - \iiint_V \vec{\boldsymbol{\sigma}} : \vec{\mathbf{d}}(\vec{\mathbf{v}}) d^3V .$$

D'après l'hypothèse d'indéformabilité, l'équation (1.8),

$$\vec{\mathbf{d}}(\vec{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} (\overline{\nabla}(\vec{\mathbf{v}}) + {}^T \overline{\nabla}(\vec{\mathbf{v}})) \simeq \vec{\mathbf{0}} ,$$

on pourra négliger cette puissance :

$$P^{int} \simeq 0 , \quad (3.37)$$

et s'affranchir en fait complètement du calcul de ces efforts intérieurs (donc de $\vec{\boldsymbol{\sigma}}$).

Dans le *cas de plusieurs solides indéformables* couplés, la contribution à la puissance des efforts intérieurs des efforts liés à la cohésion interne de chaque solide sera, pour la même raison, encore nulle. On devra donc seulement comptabiliser dans P^{int} d'autres sources d'efforts intérieurs, par exemple des forces de frottements entre solides, etc... Dans beaucoup de cas, à cause du principe de l'action-réaction et d'hypothèses simplificatrices concernant les liaisons entre les parties solides, la puissance développée par de tels efforts est elle aussi nulle.

3.3.3 Forme intégrée par rapport au temps - Notion de travail

En intégrant les lois d'évolution de la résultante, du moment et de l'énergie cinétiques entre un instant initial t_1 et un instant final t_2 on obtient la forme intégrée de ces lois :

$$\Delta \vec{\mathbf{p}} := \vec{\mathbf{p}}(t_2) - \vec{\mathbf{p}}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{R}}^{ext} dt \quad (3.38)$$

$$\Delta \vec{\boldsymbol{\sigma}}(\text{O}) := \vec{\boldsymbol{\sigma}}(\text{O}, t_2) - \vec{\boldsymbol{\sigma}}(\text{O}, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{\Gamma}}^{ext}(\text{O}) dt \quad (3.39)$$

$$\Delta E_c := E_c(t_2) - E_c(t_1) = W^{ext} + W^{int} := \int_{t_1}^{t_2} P^{ext} dt + \int_{t_1}^{t_2} P^{int} dt \quad (3.40)$$

Sous cette forme il apparaît que pour un **système isolé** , c'est-à-dire qui n'est soumis à aucun effort extérieur, la résultante et le moment cinétique restent constants au cours du temps : ils sont « conservés ». Pour cette raison les lois d'évolution de la résultante et du moment cinétique sont souvent désignés comme des **lois de conservation** .

Dans la forme intégrée de la loi d'évolution de l'énergie cinétique équation (3.40), la quantité qui apparaît au membre de droite est appelée **travail** des efforts extérieurs et intérieurs.

Dans le cas d' **un seul solide indéformable** , d'après l'équation (3.36), il vient, O étant un point fixe du référentiel de travail, A étant un point lié au solide,

$$W^{ext} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{R}}^{ext} \cdot d\vec{\mathbf{OA}} + \int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{\Gamma}}^{ext}(\text{A}) \cdot (d\psi \vec{\mathbf{e}}_z + d\theta \vec{\mathbf{e}}_{x'} + d\phi \vec{\mathbf{e}}_z) \quad (3.41)$$

en utilisant les angles et les vecteurs d'Euler pour repérer la rotation du solide, cf équation (1.53).

Dans le cas remarquable de **forces volumiques et ponctuelles dérivant d'un potentiel** ¹⁰

$$\vec{\mathbf{f}}_{vol} = -\vec{\nabla}(U_{vol}), \quad \vec{\mathbf{F}}_i = -\vec{\nabla}(U_i), \quad (3.42)$$

par exemple pour le poids $\vec{\mathbf{f}}_{vol} = \rho \vec{\mathbf{g}} = -\rho g \vec{\mathbf{e}}_z$, $U_{vol} = \rho g z$, en supposant par ailleurs que l'on n'a pas de forces surfaciques, il vient

$$W^{ext} = -\Delta E_p := -[E_p(t_2) - E_p(t_1)] \quad \text{où} \quad E_p = \iiint_V U_{vol} d^3V + \sum_i U_i. \quad (3.43)$$

A la condition supplémentaire que les efforts intérieurs fournissent un travail nul, la loi d'évolution de l'énergie cinétique intégrée implique la **conservation de l'énergie totale du système** :

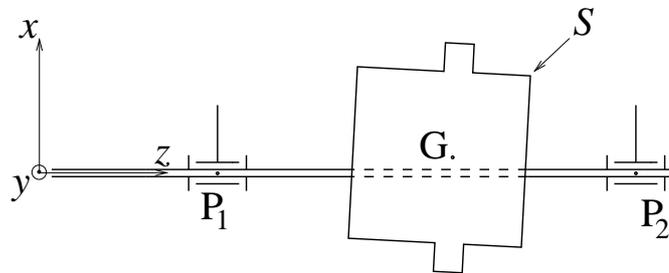
$$\Delta E = 0 \quad \text{où} \quad E = E_c + E_p. \quad (3.44)$$

Notons pour terminer que les formes intégrées (3.38), (3.39) et (3.40) sont indispensables à l'étude de mouvements présentant des **chocs** , lors desquels les fonctions $\vec{\mathbf{p}}$, $\vec{\boldsymbol{\sigma}}$ ou E_c sont en général discontinues et donc non dérivables. Dans de tels cas c'est la forme intégrée seule des lois qui a un sens, à condition bien sûr de donner un sens raisonnable aux termes sources des variations de résultante, moment et énergie cinétique - par exemple en considérant le système global isolé contenant tous les solides impliqués dans le choc.

¹⁰Le gradient étant bien sûr pris par rapport aux coordonnées du point d'application de la force considérée.

3.4 Introduction à la problématique de l'équilibrage des rotors

On abordera en amphi la problématique de l'équilibrage d'un rotor S dans le référentiel tournant lié à ce rotor. Les notations utilisées seront définies en amphi¹¹ ; rappelons juste que b est la norme du **vecteur** « balourd » $\vec{OG} = b\vec{e}_x$, et que O, P_1 et P_2 sont sur l'axe de rotation Oz , comme cela est montré sur la figure ci-contre :



Les équations de la mécanique newtonienne s'explicitent sous la forme :

$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_{env} - mb\dot{\omega}\vec{e}_y + mb\omega^2\vec{e}_x, \quad (3.45)$$

$$\vec{0} = \vec{OG} \wedge m\vec{g} + \vec{OP}_1 \wedge \vec{R}_1 + \vec{OP}_2 \wedge \vec{R}_2 + \vec{\Gamma}_{env} - \dot{\omega}\vec{I}(O) \cdot \vec{e}_z + \omega^2(I_{yz}\vec{e}_x - I_{xz}\vec{e}_y) \quad (3.46)$$

La composante suivant z de l'équation du moment cinétique (3.46) donne

$$I_{zz}\dot{\omega} = mbg_y + \vec{\Gamma}_{env} \cdot \vec{e}_z, \quad (3.47)$$

qui permettrait, si un modèle des couples dûs à l'environnement était connu, de déterminer la vitesse angulaire de rotation $\omega(t)$.

Supposons donc que l'on ait atteint un régime permanent dans lequel $\dot{\omega} = 0$. Les seuls termes inertiels qui subsistent alors dans (3.45) et (3.46) sont en conséquence les termes en ω^2 , qui peuvent devenir très grand si ω est grande (par exemple un rotor qui tourne à 10000 tours par minute possède une vitesse angulaire $\omega = 2\pi 10000/60 = 1047$ rad/s d'où $\omega^2 = 1.1 \cdot 10^6$ rad²/s²). Ils ne pourront alors être compensés que par les réactions de liaison \vec{R}_1 et \vec{R}_2 , qui risquent de devenir très grandes d'où **rupture des liaisons**.
« **Équilibrer** » le rotor c'est justement **annuler ces termes inertiels en ω^2** .

On a **équilibrage « statique »**¹² si les termes inertiels en ω^2 dans l'équation de la résultante cinétique (3.45) sont nuls i.e.

$$\begin{aligned} mb\omega^2\vec{e}_x = \vec{0} & \quad \text{i.e.} \quad b = 0 \\ & \quad \text{i.e.} \quad \underline{G \in \text{axe de rotation.}} \end{aligned} \quad (3.48)$$

On dit alors que l'on a **supprimé tout balourd**.

On a **équilibrage « dynamique »**¹³ si les termes inertiels en ω^2 dans l'équation du moment cinétique (3.46) sont nuls i.e.

$$\begin{aligned} \omega^2(I_{yz}\vec{e}_x - I_{xz}\vec{e}_y) = \vec{0} & \quad \text{i.e.} \quad I_{xz} = I_{yz} = 0 \\ & \quad \text{i.e.} \quad \underline{\text{l'axe de rotation } Oz \text{ est axe principal d'inertie de } S.} \end{aligned} \quad (3.49)$$

¹¹Voir aussi le problème 3.2.

¹²Le terme « statique » vient de ce que, si la condition (3.48) est assurée, alors le couple « statique » (présent même en l'absence de mouvement) dû au poids $\vec{OG} \wedge m\vec{g}$ dans (3.46) s'annule.

¹³Le terme « dynamique » vient de ce que les conditions (3.49) n'ont une signification que s'il y a mouvement (de rotation).

3.5 Exercices et problèmes

Bien que la plupart des exercices et problèmes qui suivent porte sur des systèmes présentant des *liaisons*, qui ne seront définies dans le détail qu'au début du chapitre suivant, nous avons choisi de les présenter dans ce chapitre. En effet la méthodologie de résolution adoptée est celle de la mécanique newtonienne, et non la mécanique analytique.

Problème 3.1 Étude des mouvements de rotation de solides - Introduction aux gyroscopes

1 On désire étudier dans ce problème la dynamique d'un solide S en rotation dans son référentiel de Koenig, c'est-à-dire supposant connu le mouvement de son centre d'inertie G dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_0 . Montrez que l'on a d'après les principes de la dynamique newtonienne l'équation du moment cinétique en référentiel de Koenig :

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_{\mathcal{R}_0}(G)}{dt}\Big|_{\mathcal{R}_0} = \frac{d\vec{\sigma}_{\mathcal{K}}(G)}{dt}\Big|_{\mathcal{K}} = \vec{\Gamma}^{ext}(G)} \quad (3.50)$$

Commentaire :

Ce résultat général est d'un intérêt qui dépasse le cadre de ce problème.

2 Dorénavant nous supposons le solide S *indéformable*. Afin de traduire l'équation précédente dans une base principale $\{G, \vec{e}_i\}$ liée à S , on note

$$\begin{aligned} I_i & \text{ les moments principaux d'inertie du solide dans cette base pour } i = 1, 2, 3, \\ \vec{\Omega} &= \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{S/\mathcal{K}} = \Omega_i \vec{e}_i \text{ le vecteur rotation du solide,} \\ \vec{\sigma} &= \vec{\sigma}_{\mathcal{R}_0}(G) = \vec{\sigma}_{\mathcal{K}}(G) = \sigma_i \vec{e}_i \text{ son vecteur moment cinétique,} \\ \vec{\Gamma}^{ext}(G) &= \Gamma_i \vec{e}_i \text{ le moment des efforts extérieurs en } G. \end{aligned}$$

Donnez les lois d'évolution des vecteurs de base \vec{e}_i , et montrez que l'évolution des vitesses angulaires Ω_i est régie par les *équations d'Euler* :

$$\begin{cases} I_1 \dot{\Omega}_1 &= (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3 + \Gamma_1 \\ I_2 \dot{\Omega}_2 &= (I_3 - I_1)\Omega_3\Omega_1 + \Gamma_2 \\ I_3 \dot{\Omega}_3 &= (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2 + \Gamma_3 \end{cases} \quad (3.50')$$

3 On considère les cas de mouvements de *rotation libre* suivants :

A. le solide S est en fait un vaisseau spatial circulant moteurs éteints, autour de la terre par exemple, et que l'on observe dans le référentiel de Copernic \mathcal{R}_c .

B. le solide S est en fait fixé en G par une articulation parfaite¹⁴ à un « véhicule » de mouvement connu

dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g .

3.a Montrez qu'alors les équations (3.50) et (3.50') avec $\vec{\Gamma}^{ext}(G) \simeq \vec{0}$ peuvent en fait être écrites dans \mathcal{R}_c pour le cas **A**, \mathcal{R}_g pour le cas **B**. Déduisez-en la conservation du moment cinétique $\vec{\sigma}$ puis l'existence d'une constante α , que l'on identifiera à une grandeur physique, telle que l'on ait à tout instant :

$$\sigma_i \sigma_i = \alpha. \quad (3.51)$$

3.b Pour un solide complètement dissymétrique vérifiant $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ décrivez tous les mouvements libres « réguliers » possibles, lors desquels toutes les vitesses angulaires $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ sont constantes au cours du temps.

¹⁴Ce type de liaison sera (re)défini section 4.1.7.

3.c Dans cette question on se focalise sur le cas **A**. Montrez que l'on a conservation de l'énergie cinétique dans le référentiel de Koenig, d'où

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\Omega} = \sigma_i^2 / I_i = \beta \text{ constante.} \quad (3.52)$$

Donnez une interprétation géométrique des équations (3.51) et (3.52) concernant le « mouvement » du point C de \mathbb{R}^3 de coordonnées $(\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t))$.

On suppose maintenant qu'à cause d'effets faiblement non conservatifs (par exemple des vibrations de flexion de bras ou d'antennes), la conservation du moment cinétique (3.51) reste dans un premier temps valable, mais par contre l'énergie cinétique du solide décroît lentement au cours du temps. Montrez qu'alors le solide va se mettre progressivement à tourner autour de l'axe principal pour lequel I_i est maximal¹⁵.

3.d On s'intéresse maintenant au cas **B** d'un solide à symétrie de révolution autour de \vec{e}_3 vérifiant $I_1 = I_2 \neq I_3$. Montrez que lors du mouvement de rotation libre, la vitesse de rotation angulaire Ω_3 est constante¹⁶, puis que $|\vec{\Omega}|$ est constant.

Déduisez-en que l'angle θ entre \vec{e}_3 et $\vec{\sigma}$ reste constant.

Dans le cas d'un *gyroscope* lancé (et entretenu en rotation) de sorte que Ω_3 soit beaucoup plus grande que Ω_1 et Ω_2 , montrez que l'axe de révolution et de rotation rapide \vec{e}_3 reste approximativement orienté dans une direction constante dans le référentiel géocentrique (principe simplifié d'un « *gyrocompas* »).

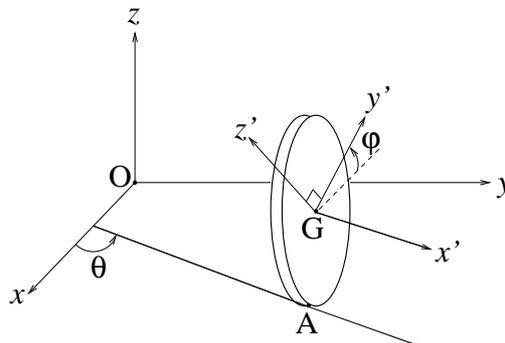
Exercice 3.1 Dynamique d'un disque en roulement-pivotement sur un plan horizontal

On veut étudier la dynamique d'un disque de masse m et de rayon a roulant sans glisser sur un plan horizontal Oxy , et pouvant aussi pivoter autour de l'axe Gz passant par son centre d'inertie, la liaison correspondant à ce pivotement étant parfaite. Cette étude sera faite dans le référentiel galiléen fixe \mathcal{R}_0 lié au plan.

1 Le repère $Gx'y'z'$ lié au disque se déduit du repère fixe $Oxyz$ par les opérations successives suivantes :

- une translation de vecteur $x_G \vec{e}_x + y_G \vec{e}_y + z_G \vec{e}_z$;
- une rotation d'axe Gz et d'angle θ , qui transforme \vec{e}_x en $\vec{e}_{x'}$ et \vec{e}_y en $\vec{e}_{y'}^0$;
- une rotation d'axe Gx' et d'angle φ , qui transforme $\vec{e}_{y'}^0$ en $\vec{e}_{y'}$, et \vec{e}_z en $\vec{e}_{z'}$.

Donnez les composantes des vecteurs $\vec{e}_{x'}$, $\vec{e}_{y'}$, $\vec{e}_{z'}$ dans la base fixe.



2 Calculez le vecteur rotation du disque $\vec{\Omega}$ lors d'un mouvement général. Identifiez la nature physique des différentes composantes de $\vec{\Omega}$.

3 Exprimez la condition de non-glissement en A. Comment peut-on qualifier cette liaison ? Existe-t'il un système de coordonnées généralisées pour ce système ?

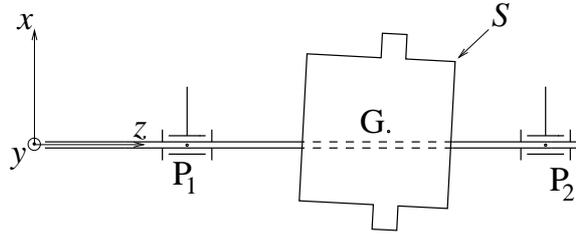
4 Réduisez la forme des efforts de liaison de « roulement-pivotement » en faisant l'hypothèse des liaisons parfaites ou idéales et en utilisant des mouvements virtuels comme dans le cours. En appliquant les théorèmes globaux de la dynamique au disque, décrivez alors tous les mouvements possibles.

¹⁵Cet effet a été effectivement observé sur des vaisseaux spatiaux.

¹⁶En pratique on ne peut éviter des couples dus aux frottements, qui doivent donc être compensés par des couples moteurs contrôlés par asservissement afin de maintenir cette condition cruciale pour le bon fonctionnement d'un gyroscope $\Omega_3 = \text{constante}$ et $\Gamma_3 = 0$.

Problème 3.2 Équilibrage d'un rotor quelconque

On considère un rotor S , de masse totale m , comprenant un axe Oz en rotation grâce à des liaisons pivots¹⁷ situées aux points P_1 et P_2 :



On choisit un repère de travail $Oxyz$ lié au solide S , d'origine $O = P_1$. On a alors $\overrightarrow{OP_2} = l\vec{e}_z$. D'autre part le centre de gravité G de S est repéré par $\overrightarrow{OG} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z$.

On s'intéresse au régime de rotation où la vitesse angulaire ω de S dans le référentiel absolu du laboratoire \mathcal{R}_0 est constante. On veut étudier la seule influence des forces d'inertie dues au déséquilibre du rotor sur les réactions de liaisons \overrightarrow{R}_1 et \overrightarrow{R}_2 , ou « réactions de palier », exercées sur l'axe au niveau des liaisons pivots P_1 et P_2 . En raisonnant par superposition, on supposera donc tous les autres efforts extérieurs nuls; en particulier, dans ce qui suit, les liaisons pivots pourront être considérées comme parfaites, et mieux que cela on supposera les couples de liaison correspondants nuls.

1.a Sous ces hypothèses, explicitez dans \mathcal{R}_0 les deux équations vectorielles qui déterminent les réactions de liaison « dynamiques » \overrightarrow{R}_1 et \overrightarrow{R}_2 . Vous introduirez le tenseur d'inertie $\overrightarrow{I}(O)$ de S , et noterez I_{xz} et I_{yz} ses composantes xz et yz . Interprétez les termes sources d'« inertie ».

Indication : vous noterez qu'il apparaît de nombreux vecteurs « tournants », dont la dérivée par rapport au temps est donnée par des formules du type (1.59).

1.b Déduisez de ces équations une équation sur la réaction de liaison \overrightarrow{R}_2 seule. Peut-on déterminer complètement \overrightarrow{R}_2 ? Montrez que

$$R_{1x} = -m\omega^2 a - R_{2x}, \quad R_{1y} = -m\omega^2 b - R_{2y}, \quad R_{2x} = \omega^2 \frac{I_{xz}}{l}, \quad R_{2y} = \omega^2 \frac{I_{yz}}{l}.$$

1.c Expliquez à partir de ces équations la problématique de l'équilibrage « statique » et « dynamique » des rotors.

2 On désire équilibrer le rotor en disposant sur S une masse ponctuelle m_α au point A repéré par $\overrightarrow{OA} = x_\alpha \vec{e}_x + y_\alpha \vec{e}_y + z_\alpha \vec{e}_z$ et une autre masse ponctuelle m_β au point B repéré par $\overrightarrow{OB} = x_\beta \vec{e}_x + y_\beta \vec{e}_y + z_\beta \vec{e}_z$.

2.a Calculez les coordonnées a' , b' et c' du centre de gravité G' du système $S' = S$ ainsi modifié. Quelle est la première condition à réaliser pour équilibrer le rotor ?

2.b Calculez les produits d'inertie en O, I'_{xz} et I'_{yz} , du système S' . Quelle est la deuxième condition à réaliser pour équilibrer le rotor ?

2.c Pourquoi ne doit-on pas en général disposer les masses m_α et m_β dans un même plan perpendiculaire à l'axe de rotation (plan $z = \text{constante}$) ?

3 D'un point de vue *pratique*¹⁸, on utilise en général la *méthode des coefficients d'influence* pour équilibrer le rotor. Pour cela on caractérise quantitativement le déséquilibre du rotor, en régime de rotation

¹⁷Ce type de liaison sera (re)défini section 4.1.4.

¹⁸Cette méthode est utilisée dans l'industrie... et dans le TP de première année d'équilibrage d'un rotor que certains d'entre vous ont eu ou vont avoir la chance de faire.

à vitesse angulaire constante ω , en mesurant dans le référentiel \mathcal{R}_0 une des composantes de $\vec{\mathbf{R}}_1$ et $\vec{\mathbf{R}}_2$ grâce à deux capteurs de forces, placés en P_1 et P_2 , et orientés perpendiculairement à l'axe de rotation. Si on appelle $\vec{\mathbf{e}}_X$ la direction de mesure de ces capteurs, on peut former une base fixe dans \mathcal{R}_0 à l'aide des vecteurs

$$\{\vec{\mathbf{e}}_X, \vec{\mathbf{e}}_Y, \vec{\mathbf{e}}_Z\} = \{\vec{\mathbf{e}}_X, \vec{\mathbf{e}}_z \wedge \vec{\mathbf{e}}_X, \vec{\mathbf{e}}_z\}.$$

Dans cette base fixe la base liée au rotor $\{\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z\}$ est tournante, avec un angle de rotation

$$\phi(t) := \widehat{(\vec{\mathbf{e}}_X, \vec{\mathbf{e}}_x(t))} = \omega t,$$

et on mesure donc

$$s_1(t) = \vec{\mathbf{R}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_X \text{ grâce au capteur 1,} \quad s_2(t) = \vec{\mathbf{R}}_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}_X \text{ grâce au capteur 2.}$$

3.a En utilisant les résultats de **1.b**, donnez l'expression générale de s_1 et s_2 . Montrez que l'on peut associer naturellement à ces signaux temporels oscillants des affixes complexes z_1 et z_2 dont on donnera l'expression.

Indication-commentaire : vous constaterez que la règle utilisée en traitement du signal pour cette association,

$$s(t) = s_x \cos(\omega t) - s_y \sin(\omega t) = \operatorname{Re}[z \exp(i\omega t)] \iff z = s_x + is_y,$$

se marie harmonieusement, ici, avec la règle utilisée en analyse complexe pour associer un complexe à un vecteur.

3.b Quelles conditions doit-on réaliser pour équilibrer le rotor ?

3.c La stratégie proposée par la méthode des coefficients d'influence consiste à équilibrer le système en positionnant des masses à la périphérie de deux disques faisant partie de S , situés l'un en $z = z_\alpha$, l'autre en $z = z_\beta \neq z_\alpha$. On repère la valeur de ces masses et leur position dans les plans de ces disques par les « balourds »

$$b_\alpha = m_\alpha(x_\alpha + iy_\alpha), \quad b_\beta = m_\beta(x_\beta + iy_\beta) \text{ en notations complexes.}$$

On commence par mesurer les amplitudes complexes z_1 et z_2 sur S tournant seul; on note les valeurs correspondantes z_1^0 et z_2^0 .

On arrête alors S , et on place m_α en un point A du premier disque de S . On mesure - après retour au régime de rotation permanent - les nouvelles valeurs $z_{1\alpha}$ et $z_{2\alpha}$ des amplitudes complexes des signaux s_1 et s_2 . Montrez que l'on a alors

$$z_{1\alpha} = z_1^0 + c_{1\alpha}b_\alpha, \quad z_{2\alpha} = z_2^0 + c_{2\alpha}b_\alpha$$

où l'on peut faire apparaître des coefficients d'influence $c_{1\alpha}$ et $c_{2\alpha}$ dont on donnera la valeur théorique.

On arrête à nouveau le système, on enlève m_α , et on dispose m_β en un point B du deuxième disque de S . On mesure ensuite les nouvelles valeurs $z_{1\beta}$ et $z_{2\beta}$ des amplitudes complexes des signaux s_1 et s_2 . Montrez que l'on peut introduire des coefficients d'influence $c_{1\beta}$ et $c_{2\beta}$ de sorte que

$$z_{1\beta} = z_1^0 + c_{1\beta}b_\beta, \quad z_{2\beta} = z_2^0 + c_{2\beta}b_\beta.$$

Dans le cas général où on dispose m_α en A point du premier disque et m_β en B point du deuxième disque, montrez que les amplitudes vibratoires de s_1 et s_2 sont données par :

$$z_{1\alpha\beta} = z_1^0 + c_{1\alpha}b_\alpha + c_{1\beta}b_\beta, \quad z_{2\alpha\beta} = z_2^0 + c_{2\alpha}b_\alpha + c_{2\beta}b_\beta.$$

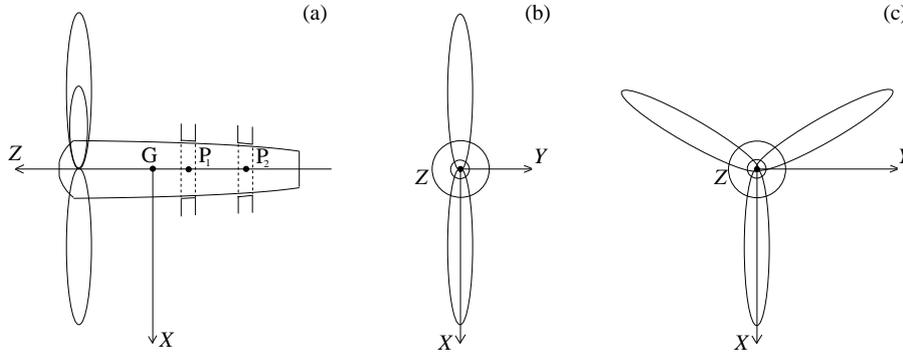
Décrivez à partir de ces résultats une méthode pratique d'équilibrage.

4 En prenant un peu de recul par rapport à ce problème, on peut remarquer que l'on a privilégié un point particulier O de l'axe de rotation dans tout le traitement. Montrez donc que si le rotor S est équilibré vis à vis de O, alors il est équilibré vis à vis de tout autre point O' de l'axe de rotation.

Problème 3.3 Étude d'un avion à hélice(s) bipale(s) ou tripale(s) [examen 2005 – 2006]

On se propose d'aborder dans ce problème quelques aspects de la dynamique d'un avion à hélice(s). On se focalise sur une seule hélice, mais ce qui suit pourrait très bien s'appliquer à un avion muni de plusieurs hélices.

On note S le système formé par l'hélice et l'arbre porte-hélice, ce dernier arbre étant lié en deux paliers P_1 et P_2 au corps de l'avion. Ci-dessous on représente en (a) une vue de profil de S , et deux vues de face présentant **deux types d'hélice possibles, bipale** (b) ou **tripale** (c) :



On précise qu'en (a) selon les cas on aperçoit au-dessus de l'arbre porte-hélice une pale ou deux, et que le repère $GXYZ$, où G désigne le centre d'inertie de S , GZ l'axe de rotation de S , est lié à S .

I.1.a Dans le cas d'une **hélice bipale**, explicitez deux hypothèses de symétrie raisonnables concernant S qui permettent, d'après un raisonnement que vous rappellerez, de pouvoir écrire son tenseur d'inertie sous la forme

$$\vec{\mathbf{I}}(G) = A \vec{\mathbf{e}}_X \otimes \vec{\mathbf{e}}_X + B \vec{\mathbf{e}}_Y \otimes \vec{\mathbf{e}}_Y + C \vec{\mathbf{e}}_Z \otimes \vec{\mathbf{e}}_Z. \quad (\text{TIHB})$$

I.1.b Expliquez pourquoi $A \neq B$, et donnez même, en argumentant, une inégalité stricte entre A et B .

I.2.a Dans le cas d'une **hélice tripale**, explicitez une hypothèse de symétrie raisonnable qu'il faut poser concernant S afin de pouvoir négliger les composantes I_{XY} et I_{YZ} de son tenseur d'inertie $\vec{\mathbf{I}}(G)$.

I.2.b En faisant dans certaines intégrales bien choisies le changement de variables correspondant à la rotation d'angle $2\pi/3$ autour de GZ , et en posant une hypothèse de symétrie adéquate, établissez que le tenseur d'inertie de S est de la forme

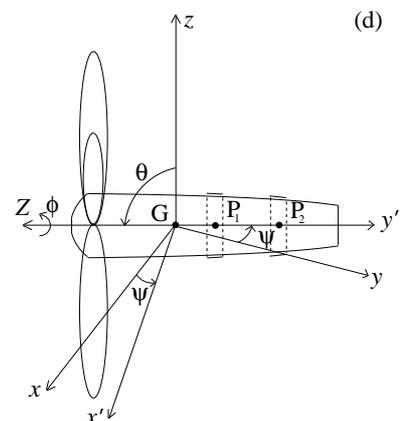
$$\vec{\mathbf{I}}(G) = A (\vec{\mathbf{e}}_X \otimes \vec{\mathbf{e}}_X + \vec{\mathbf{e}}_Y \otimes \vec{\mathbf{e}}_Y) + C \vec{\mathbf{e}}_Z \otimes \vec{\mathbf{e}}_Z. \quad (\text{TIHT})$$

I.3 Que peut on dire concernant les propriétés d'équilibrage statique et dynamique du rotor S ?

II Dans cette partie on considère l'avion en régime moteur constant, en vol horizontal, d'abord rectiligne, puis amorçant un virage.

On désigne par \mathcal{R}_0 le référentiel galiléen lié au sol. Dans ce référentiel une base fixe $\{\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z\}$ est choisie de sorte que la direction initiale de vol soit $-\vec{\mathbf{e}}_y$, et $\vec{\mathbf{e}}_z$ pointe vers le haut. On repère l'orientation de S dans cette base par ses angles d'Euler ψ , θ et ϕ , avec $\theta = \pi/2$ (condition de vol horizontal), $\psi = 0$ au début (condition de vol rectiligne), $\phi = \omega t$ (condition de régime moteur constant). La figure d ci-contre représente la configuration de S au début d'un virage à gauche, i.e. lorsque ψ augmente en partant de 0 ; on a aussi représenté tous les angles d'Euler et quelques vecteurs des bases entrant en jeu.

On désigne par \mathcal{R} le référentiel lié à S .



Dans ce qui suit, sauf précision ultérieure, vous traiterez le cas d'un mouvement « général » avec virage possible

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \pi/2, \quad \phi = \omega t \quad \text{avec} \quad \omega = \text{constante strictement positive.} \quad (\text{Mgénéral})$$

Notez aussi que la direction de vol de l'avion est toujours donnée par le vecteur $\vec{\mathbf{e}}_Z = -\vec{\mathbf{e}}_{y'}$.

II.1 Calculez le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}_0}$ dans la base tournante $\{\vec{\mathbf{e}}_X, \vec{\mathbf{e}}_Y, \vec{\mathbf{e}}_Z\}$, liée à S , utilisée dans la partie I.

II.2 Calculez le moment cinétique propre de S , $\vec{\sigma}_{\mathcal{K}}(G)$, au sens du lemme de la partie I. Vous explicitez ce vecteur dans la base tournante $\{\vec{\mathbf{e}}_X, \vec{\mathbf{e}}_Y, \vec{\mathbf{e}}_Z\}$, en utilisant pour $\vec{\Gamma}(G)$ la forme générale (TIHB) - remarquant que le cas d'une hélice tripale (TIHT) correspond à la condition particulière $A = B$.

II.3.a Explicitez l'équation du moment cinétique en référentiel de Koenig (3.50), en désignant par $\vec{\Gamma}$ la somme des couples $\vec{\Gamma}^{air}$ exercé par l'air sur l'hélice et des couples de liaison $\vec{\Gamma}^l$ exercés au niveau des paliers par l'avion (dont le moteur correspondant) sur S . On vous suggère de calculer

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_{\mathcal{K}}(G)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}$$

en utilisant la formule de composition des dérivées temporelles de vecteurs entre les référentiels \mathcal{R}_0 et \mathcal{R} , et on vous demande de donner les composantes Γ_X , Γ_Y et Γ_Z de $\vec{\Gamma}$ dans la base $\{\vec{\mathbf{e}}_X, \vec{\mathbf{e}}_Y, \vec{\mathbf{e}}_Z\}$.

II.3.b Dans un deuxième temps, donnez l'expression des composantes $\Gamma_{x''}$, $\Gamma_{y''}$ et $\Gamma_{z''}$ de $\vec{\Gamma}$ dans la base liée au corps de l'avion $\{\vec{\mathbf{e}}_{x''}, \vec{\mathbf{e}}_{y''}, \vec{\mathbf{e}}_{z''}\}$. En faisant usage de formules trigonométriques, vous exprimerez la dépendance temporelle de $\Gamma_{x''}$, $\Gamma_{y''}$ et $\Gamma_{z''}$ via les fonctions $\dot{\psi}(t)$, $\ddot{\psi}(t)$, $\cos(2\omega t)$ et $\sin(2\omega t)$ exclusivement.

II.4 En condition de vol rectiligne $\psi = 0$, que vaut le couple total $\vec{\Gamma}$? De quelle propriété remarquable de S découle cette valeur remarquable?

II.5.a Partant des conditions précédentes, et supposant pour simplifier que les couples $\vec{\Gamma}^{air}$ gardent une valeur constante, montrez que, si l'avion amorce un virage, i.e. $\psi(t)$ devient non nul, le couple de liaison $\vec{\Gamma}^l$ doit varier d'une quantité $\delta\vec{\Gamma}^l$ bien définie. En utilisant le principe de l'action-réaction, montrez que S exerce alors un couple $\vec{\Gamma}^h$ sur le corps de l'avion.

II.5.b Dans le cas d'une *hélice tripale*, simplifiez l'expression générale de $\Gamma_{x''}^h = \Gamma_{x'}^h$, et montrez l'apparition d'un *couple cabreur* (resp. *piqueur*) lorsque l'avion amorce un virage à gauche (resp. droite).

II.5.c Toujours dans le cas d'une *hélice tripale*, simplifiez l'expression générale de $\Gamma_{y''}^h = \Gamma_z^h$, et montrez que ce couple est un *couple résistant* à la rotation de l'avion.

II.5.d Expliquez pourquoi les avionneurs préfèrent les *hélices tripales* aux *hélices bipales*.

II.6. Application numérique : pour une *hélice tripale* tournant à 2000 tours/min, S ayant pour moments d'inertie $A = B = 25 \text{ m}^2 \text{ kg}$, $C = 35 \text{ m}^2 \text{ kg}$, et un virage à gauche caractérisé par $\dot{\psi} = 0,5 \text{ rad/s}$, $\ddot{\psi} = 1 \text{ rad/s}^2$, calculez les *couples cabreur* $\Gamma_{x'}^h$ et *résistant* Γ_z^h . Commentez ces résultats.

Chapitre 4

Liaisons - Formalisme lagrangien

Nous allons maintenant développer un formalisme très utile pour étudier la dynamique de systèmes constitués de particules matérielles et/ou de solides indéformables éventuellement liés. La puissance de ce formalisme réside d'une part dans le fait qu'il traite sur un pied d'égalité tous les degrés de liberté d'un système, qu'ils soient de translation ou de rotation, d'autre part dans sa capacité à décrire simplement d'éventuelles *liaisons*. La modélisation de ces liaisons est présentée dans la première section, qui nous permet entre autres d'introduire la notion importante de *mouvements virtuels*. Nous établissons ensuite les *équations de Lagrange* en passant par les théorèmes des puissances virtuelles et de d'Alembert. Nous terminons en introduisant des notions de *stabilité*, ainsi qu'un complément indiquant une façon possible de tenir compte de forces *dissipatives*.

4.1 Liaisons

4.1.1 Paramétrage d'un système - Liaisons

Les variables q_1, \dots, q_m définissent un *paramétrage* du système S si, à chaque instant t , on connaît la position de tout point matériel M du système, en M_0 dans la configuration de référence, lorsqu'on se donne les valeurs de q_1, \dots, q_m, t . En d'autres termes, étant donné un point fixe O du référentiel de travail, on connaît \overrightarrow{OM} comme une fonction de M_0, q_1, \dots, q_m, t :

$$\forall M \in S, \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(M_0, q_1, \dots, q_m, t) \quad (4.1a)$$

noté souvent, abusivement,

$$\forall M \in S, \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(q_1, \dots, q_m, t) \quad (4.1b)$$

en ne rappelant pas la dépendance vis-à-vis de M_0 . Par exemple, dès que le système contient un solide indéformable, on doit a priori introduire trois coordonnées pour définir la position d'un point particulier du solide et trois coordonnées (typiquement les angles d'Euler) pour définir l'orientation de ce même solide.

Une *liaison*, imposée mécaniquement par l'application de certains *efforts de liaison*, correspond mathématiquement à des contraintes qui portent

- soit sur les coordonnées q_1, \dots, q_m , on parle alors de liaisons *holonomes* ;
- soit à la fois sur les coordonnées q_1, \dots, q_m et sur les « vitesses » $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$, on parle alors de liaisons *non holonomes*.

Parmi les premières on distingue les liaisons *holonomes unilatérales* définies par des inégalités¹

$$g_j(q_1, \dots, q_m, t) \geq 0, \quad j = 1 \dots r, \quad (4.2)$$

¹Exemple : une boule de billard est astreinte à se déplacer au dessus du plan de jeu :

z (coordonnée du centre de la boule) $\geq R$ (rayon de la boule).

des liaisons *holonomes bilatérales* définies par des égalités²³

$$f_j(q_1, \dots, q_m, t) = 0, \quad j = 1 \dots k. \quad (4.3)$$

Dans ce dernier cas il est clair que les coordonnées q_1, \dots, q_m varient dans un sous-ensemble *fermé* de \mathbb{R}^m , et qu'elles ne sont pas indépendantes. Intuitivement on doit pouvoir éliminer k coordonnées « dépendantes » en fonction des autres, qui seront elles réellement indépendantes. Ceci peut se faire mathématiquement à l'aide du théorème des fonctions implicites, en faisant l'hypothèse que la matrice des $\partial f_j / \partial q_i$ est toujours de rang maximal c'est-à-dire k , hypothèse qui signifie que les contraintes sont indépendantes entre elles. On est alors assuré (éventuellement après renumérotation des coordonnées) de pouvoir éliminer au voisinage de toute configuration possible q_1, \dots, q_m les k dernières coordonnées dépendantes q_{m-k+1}, \dots, q_m en fonction des $m - k$ premières coordonnées indépendantes q_1, \dots, q_{m-k} . On note alors $n := m - k$ que l'on appelle le **nombre de degrés de liberté** du système. On a ainsi, au moins sur un voisinage de toute configuration possible

$$\forall M \in S, \quad \overrightarrow{\text{OM}} = \overrightarrow{\text{OM}}(q_1, \dots, q_n, t). \quad (4.4)$$

Un tel paramétrage, qui satisfait par construction les contraintes imposées par les liaisons holonomes bilatérales, constitue un ensemble de **coordonnées généralisées** du système. Le point important faisant la différence entre (4.1) et (4.4) est que les coordonnées q_1, \dots, q_n varient maintenant dans un sous-ensemble *ouvert* de \mathbb{R}^n . La possibilité très utile de faire varier (infinitésimalement) q_1, \dots, q_n *sans aucune contrainte* sera très utilisée, cf. les équations (4.8) et suivantes.

D'une certaine manière, imposer qu'une partie du système soit solide indéformable revient à imposer une liaison interne holonome bilatérale, puisque tous les vecteurs reliant deux points matériels M et M' de cette partie doivent vérifier

$$\left| \overrightarrow{\text{MM}'} \right| = \text{constante}.$$

Les coordonnées généralisées correspondant à cette partie du système (en l'absence d'autres liaisons « externes ») sont bien connues et ont été réintroduites plus haut, cf. la discussion après l'équation (4.1).

4.1.2 Mouvements virtuels (compatibles)

On appelle **mouvement virtuel**⁴ du système S la donnée d'un champ de **vitesse virtuelle** sur S ,

$$M \in S \longmapsto \vec{v}'(M) \in \mathbb{R}^3, \quad (4.5)$$

qui est **compatible avec les liaisons imposées** - le $'$ rappelle le caractère virtuel du mouvement. Cette compatibilité doit avoir lieu vis-à-vis des liaisons internes d'indéformabilité d'une part, c'est-à-dire que le champ de vitesse virtuel d'une sous-partie solide indéformable de S doit être un champ de moments de la forme (1.25). D'autre part, cette compatibilité doit avoir lieu vis-à-vis des liaisons « classiques » internes ou externes, assurées en général par des actions de contact. On doit donc associer par la pensée à ce mouvement virtuel un **déplacement virtuel** de tous les points de S selon

$$M \longmapsto M' = M + \vec{v}'(M) dt' \quad (4.6)$$

où dt' est un infiniment petit quelconque - qui peut être vu comme un intervalle infinitésimal de « temps virtuel » -, et exiger que le système dans la configuration $'$ satisfasse aussi les liaisons « classiques » internes ou externes. Il importe de noter que, d'après (4.6), la norme de $\vec{v}'(M)$ n'a pas de signification physique :

²**Exemple** : un point d'un solide est fixe.

³Il existe aussi d'autres types de liaison plus compliquées ne pouvant être décrites par des contraintes **globales** du type de (4.2) ou (4.3), même en incluant les \dot{q}_i dans l'écriture de ces contraintes. On pourra réfléchir à ce sujet à l'exemple de la section 4.1.9.

⁴Certains auteurs n'introduisent pas forcément la compatibilité avec les liaisons dans la définition des mouvements virtuels. C'est pourquoi nous rappelons de temps en temps entre parenthèses que les seuls mouvements virtuels que nous considérons sont compatibles.

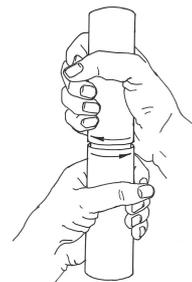
seule la direction de $\vec{v}'(M)$ importe.

En utilisant un paramétrage du système, le déplacement virtuel est donc donné par

$$q_i \mapsto q_i + dq'_i \text{ pour } i = 1 \dots m, \quad (4.7)$$

où les nouvelles coordonnées $q_i + dq'_i$ doivent satisfaire les contraintes mathématiques exprimant les liaisons. Les valeurs possibles des dq'_i , qui doivent être considérés comme les « variations » infinitésimales des q_i , sont donc restreintes par les contraintes de liaison. Ici encore seule la direction du vecteur (dq'_1, \dots, dq'_m) importe, sa norme étant supposée infinitésimale, proportionnelle à dt' en reprenant la notation de (4.6), mais quelconque. Expliciter une liaison en décrivant les mouvements virtuels (compatibles) revient donc à donner une formulation différentielle, essentiellement locale et variationnelle, des contraintes de liaison.

En termes plus physiques, les mouvements virtuels (compatibles) correspondent aux **petits déplacements autorisés entre les solides impliqués par la liaison**. Par exemple, pour vérifier qu'une liaison pivot (cf. section 4.1.4) est la plus parfaite possible, un ouvrier va tout simplement essayer de faire tourner un élément par rapport à l'autre, et voir si cela se fait effectivement sans effort, comme cela est représenté sur la figure ci-contre. La notion de mouvements virtuels est donc naturelle, et elle sera d'ailleurs essentielle à l'établissement des équations de Lagrange. Mentionnons enfin que, évidemment, le champ de vitesse réel d'un système fait partie de ses champs de vitesse virtuels!...



On ne peut donner a priori la forme générale des mouvements virtuels que dans le **cas de liaisons holonomes bilatérales**. En effet on est alors assuré de l'existence de coordonnées généralisées q_1, \dots, q_n , ce qui signifie qu'un mouvement virtuel est donné par une variation *quelconque* des coordonnées généralisées,

$$q_i \mapsto q_i + dq'_i \text{ pour } i = 1 \dots n. \quad (4.8)$$

Les déplacements virtuels correspondants sont donnés par

$$M \mapsto M' = M + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} dq'_i, \quad (4.9)$$

et le champ de vitesse virtuel correspondant par

$$\forall M \in S, \quad \vec{v}'(M) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \frac{dq'_i}{dt'}. \quad (4.10)$$

4.1.3 Liaisons parfaites

La difficulté dans l'étude des systèmes présentant des liaisons est, entre autres, le calcul des efforts de liaisons a priori inconnus. Cependant les liaisons mécaniques que l'on introduit dans les systèmes sont en général conçues, via l'usage de lubrifiants et de dispositifs mécaniques adéquats (roulements à billes, etc...), de façon à dissiper le minimum d'énergie. On fera donc très souvent l'**hypothèse des liaisons parfaites ou idéales**, consistant à supposer que

dans tout mouvement virtuel du système la puissance virtuelle des efforts de liaison $P^{i'}$ est nulle.

Dans le cas commun où la liaison concerne **deux solides indéformables** S_0 et S , en se plaçant par convention dans le référentiel lié à S_0 , et en reprenant le calcul qui a mené à l'équation (3.36), on voit que l'on doit exiger, pour O point quelconque de S :

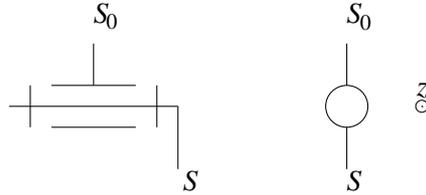
$$\begin{aligned} & \forall \text{ mouvement virtuel de } S \text{ par rapport à } S_0, \\ & \text{défini par les vecteurs vitesse } \vec{v}'(O) \text{ et rotation instantanée } \vec{\Omega}' \text{ contraints par la liaison,} \\ & P^{i'} = \vec{R}^l \cdot \vec{v}'(O) + \vec{\Gamma}^l(O) \cdot \vec{\Omega}' = 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

où \vec{R}^l et $\vec{\Gamma}^l(O)$ désignent la résultante et le moment des efforts de liaisons exercés par S_0 sur S .

Nous allons maintenant passer en revue les principales liaisons entre deux solides indéformables réalisées dans des systèmes mécaniques, en écrivant explicitement pour chacune d'elles les conséquences de l'hypothèse de liaison parfaite (4.11).

4.1.4 Liaison pivot

Cette liaison est symbolisée dans la norme AFNOR⁵ en vue de face et de profil, comme suit :



Elle consiste à bloquer tous les degrés de liberté de translation des deux solides, en ne permettant qu'une rotation relative autour de l'axe commun aux deux solides. Dans le référentiel lié à \$S_0\$ cet axe est fixe, et nous pouvons le désigner par \$\vec{e}_z\$. Si \$x, y, z\$ désignent les coordonnées d'un point \$O\$ de \$S\$ sur l'axe commun, et \$\psi, \theta, \phi\$ désignent les angles d'Euler repérant l'orientation de \$S\$ par rapport à celle de \$S_0\$ (cf. la section 1.1.6), cette liaison est définie par

$$x = y = z = 0 \quad \text{et} \quad \psi = \theta = 0 .$$

Cette liaison est donc holonome bilatérale. La coordonnée généralisée à utiliser est l'angle de rotation propre \$\phi\$, qui définit le vecteur rotation instantanée \$\vec{\Omega} = \dot{\phi} \vec{e}_z\$. Les mouvements virtuels de \$S\$ sont donc donnés par

$$\vec{v}'(O) = \vec{0} , \quad \vec{\Omega}' = \Omega' \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \Omega' \text{ quelconque.}$$

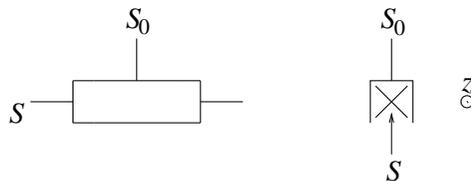
L'hypothèse de liaison parfaite (4.11) se traduit donc par

$$\forall \Omega' , \quad \Gamma_z^l(O) \Omega' = 0 \quad \text{i.e.} \quad \Gamma_z^l(O) = 0 . \quad (4.12)$$

Ainsi seules 5 inconnues de liaisons subsistent, les composantes de \$\vec{R}^l\$ ainsi que les composantes \$x\$ et \$y\$ de \$\vec{\Gamma}^l(O)\$.

4.1.5 Liaison glissière

Son symbole dans la norme AFNOR, en vue de face et de profil, est le suivant :



Dans cette liaison le seul degré de liberté de \$S\$ par rapport à \$S_0\$ est la translation par rapport à l'axe \$\vec{e}_z\$. Il s'agit aussi d'une liaison holonome bilatérale. Si elle est parfaite, alors la nullité de la puissance des efforts de liaison dans les mouvements virtuels, donnés par

$$\vec{v}'(O) = v' \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad v' \text{ quelconque,} \quad \vec{\Omega}' = \vec{0} ,$$

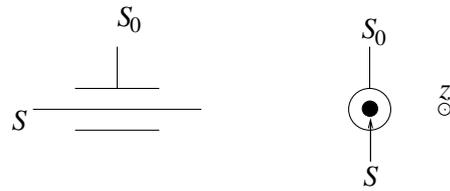
implique que

$$R_z^l = 0 . \quad (4.13)$$

⁵L'association française de normalisation, qui possède un site web et édite des normes. Un ouvrage de référence disponible au SCD de l'INPL est Fanchon (2004).

4.1.6 Liaison pivot glissant

Son symbole dans la norme AFNOR, en vue de face et de profil, est :



Dans cette liaison holonome bilatérale S peut à la fois tourner par rapport à l'axe \vec{e}_z et se translater le long de l'axe \vec{e}_z . Les mouvements virtuels correspondants sont donnés par

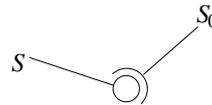
$$\vec{v}'(O) = v' \vec{e}_z \text{ avec } v' \text{ quelconque, } \vec{\Omega}' = \Omega' \vec{e}_z \text{ avec } \Omega' \text{ quelconque.}$$

L'hypothèse de liaison parfaite implique que

$$R_z^l = 0 \text{ et } \Gamma_z^l(O) = 0 . \quad (4.14)$$

4.1.7 Liaison rotule ou articulation

Son symbole dans la norme AFNOR est :



Dans cette liaison holonome bilatérale S peut tourner librement par rapport à S_0 , seul le point O commun doit être fixe. Les mouvements virtuels correspondants sont donnés par

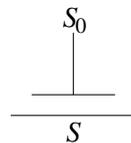
$$\vec{v}'(O) = \vec{0}, \vec{\Omega}' \text{ quelconque,}$$

d'où si la liaison est parfaite

$$\vec{\Gamma}^l(O) = 0 . \quad (4.15)$$

4.1.8 Liaison appui plan

Son symbole dans la norme AFNOR est :



Les mouvements virtuels autorisés par cette liaison holonome bilatérale sont toutes les translations dans le plan de contact, que nous désignerons comme le plan xy , ainsi que toutes les rotations autour de l'axe perpendiculaire \vec{e}_z :

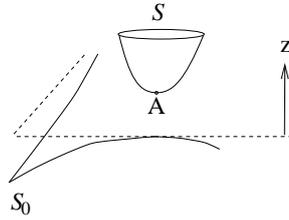
$$\vec{v}'(O) = v'_x \vec{e}_x + v'_y \vec{e}_y \text{ avec } v'_x \text{ et } v'_y \text{ quelconques, } \vec{\Omega}' = \Omega' \vec{e}_z \text{ avec } \Omega' \text{ quelconque.}$$

Si la liaison est parfaite on en déduit

$$R_x^l = R_y^l = 0 \text{ et } \Gamma_z^l(O) = 0 . \quad (4.16)$$

4.1.9 Liaisons de contact « ponctuel » parfaites

Nous nous intéressons ici au contact « ponctuel » entre deux solides indéformables, S_0 réputé fixe et S . Nous désignons par A le point de contact entre les deux solides, et par Axy le plan tangent à S_0 en A :



En réalité il existe une petite surface de contact entre les deux solides, et en toute rigueur il faudrait tenir compte de leur déformabilité au niveau de cette zone de contact. Nous ne le ferons pas, supposant que les efforts de liaison, distribués en réalité de façon compliquée sous la forme d'efforts surfaciques sur la zone de contact, sont encore bien caractérisés par leur résultante \vec{R}^l et leur moment résultant $\vec{\Gamma}^l(A)$.

Nous distinguons deux cas limites :

- si les surfaces de contact sont parfaitement lisses, on suppose qu'il y a **possibilité de glissement** entre S_0 et S . Les mouvements virtuels sont donc donnés par

$$\vec{v}'(A) = v'_x \vec{e}_x + v'_y \vec{e}_y \text{ avec } v'_x \text{ et } v'_y \text{ quelconques, } \vec{\Omega}' \text{ quelconque.}$$

La liaison étant supposée parfaite on en déduit

$$R_x^l = R_y^l = 0 \text{ et } \vec{\Gamma}^l(A) = \vec{0} . \quad (4.17)$$

- si les surfaces de contact sont infiniment rugueuses, le **glissement** devient **interdit**. Les mouvements virtuels se restreignent à

$$\vec{v}'(A) = \vec{0}, \vec{\Omega}' \text{ quelconque,}$$

d'où avec l'hypothèse de liaison parfaite

$$\vec{\Gamma}^l(A) = \vec{0} . \quad (4.18)$$

Remarquons que ces deux liaisons sont plus faciles à définir différentiellement à l'aide des mouvements virtuels qu'en donnant des contraintes globales du type de (4.3), spécialement si les solides S_0 et S ont des formes compliquées. Notons aussi que la condition de non glissement dans le cas rugueux, qui s'écrit dans un référentiel quelconque

$$\vec{v}'(A \in S_0) = \vec{v}'(A \in S) ,$$

est une contrainte non holonome puisqu'elle implique des vitesses c'est-à-dire la dérivée de certaines coordonnées.

4.1.10 Liaisons de contact « ponctuel » imparfaites avec frottement : lois de Coulomb

Reconsidérons la configuration géométrique de la section précédente, mais en essayant de prendre en compte le fait qu'en pratique les surfaces de contact ne sont ni parfaitement lisses, ni infiniment rugueuses. Ce problème a été étudié par Coulomb, qui a dégagé des lois de comportements phénoménologiques permettant dans la plupart des cas réels une bonne modélisation. Pour formuler ces lois, il faut distinguer dans les efforts de liaison exercés par S_0 (toujours supposé fixe) sur S la réaction normale

$$R_n^l = R_z^l$$

de la réaction tangentielle

$$\vec{\mathbf{R}}_t^l = \vec{\mathbf{R}}^l - R_n^l \vec{\mathbf{e}}_z ,$$

le couple normal

$$\Gamma_n^l = \Gamma_z^l(A)$$

du couple tangentiel

$$\vec{\mathbf{\Gamma}}_t^l = \vec{\mathbf{\Gamma}}^l(A) - \Gamma_n^l \vec{\mathbf{e}}_z .$$

Soient $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}(A \in S)$ et $\vec{\mathbf{\Omega}} = \vec{\mathbf{\Omega}}_{S/S_0}$ les vecteurs vitesse et rotation instantanée de S lors d'un mouvement réel. Nous distinguerons aussi la vitesse de rotation de pivotement

$$\Omega_n = \vec{\mathbf{\Omega}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_z ,$$

de la vitesse de rotation de roulement

$$\vec{\mathbf{\Omega}}_t = \vec{\mathbf{\Omega}} - \Omega_n \vec{\mathbf{e}}_z .$$

Les *lois du frottement de Coulomb* posent l'existence d'un coefficient de frottement au glissement $f \geq 0$, d'un coefficient de frottement au pivotement $h \geq 0$ et d'un coefficient de frottement au roulement $k \geq 0$, ne dépendant que de la nature et de l'état physique des surfaces en contact, tels que :

- – tant que $|\vec{\mathbf{R}}_t^l| < f|R_n^l|$, il n'y a pas de glissement, $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$.
- par contre $\vec{\mathbf{R}}_t^l = -f|R_n^l| \frac{\vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{v}}|}$ lorsque il y a glissement, $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$. (4.19)

- – tant que $|\Gamma_n^l| < h|R_n^l|$, il n'y a pas de pivotement, $\Omega_n = 0$.
- par contre $\Gamma_n^l = -h|R_n^l| \frac{\Omega_n}{|\Omega_n|}$ lorsque il y a pivotement, $\Omega_n \neq 0$. (4.20)

- – tant que $|\vec{\mathbf{\Gamma}}_t^l| < k|R_n^l|$, il n'y a pas de roulement, $\vec{\mathbf{\Omega}}_t = \vec{\mathbf{0}}$.
- par contre $\vec{\mathbf{\Gamma}}_t^l = -k|R_n^l| \frac{\vec{\mathbf{\Omega}}_t}{|\vec{\mathbf{\Omega}}_t|}$ lorsque il y a roulement, $\vec{\mathbf{\Omega}}_t \neq \vec{\mathbf{0}}$. (4.21)

Le coefficient f est sans dimension, alors que les coefficients h et k sont homogènes à une longueur.

Remarquons que la liaison parfaite avec glissement est décrite par le cas limite $f = h = k = 0$, tandis que la liaison parfaite sans glissement est décrite par le cas limite $f = \infty, h = k = 0$.

Notons enfin que dans le cas de contacts franchement non ponctuels, on essaie de se ramener à ces lois de Coulomb macroscopiques et globales, en choisissant pour A un point particulier remarquable de la zone de contact (par exemple un point de symétrie quand cela est possible). Si cela n'est pas possible, on écrit en tout cas la première loi de Coulomb (4.19) localement, c'est-à-dire, dans le cas typique de contacts surfaciques définis par la densité surfacique de forces $\vec{\mathbf{T}}$ de réaction de S_0 sur S , en remplaçant $\vec{\mathbf{R}}^l$ dans (4.19) par $\vec{\mathbf{T}}$.

4.2 Établissement des équations de Lagrange

Nous considérons un système S typiquement constitué de *plusieurs éléments solides indéformables* repérés par un indice j . Grâce à la convention d'écriture (2.3), on traite avec les mêmes notations le cas d'éléments de dimension 3, 2, 1 ou 0 c'est-à-dire à distribution de masse volumique, surfacique, linéique ou ponctuelle. Nous nous plaçons dans un référentiel de travail où O est point fixe.

4.2.1 Théorème des puissances virtuelles

Ce théorème consiste à donner une formulation faible⁶ des lois d'évolution de la résultante et du moment cinétique appliqué à chaque élément mobile du système,

$$\dot{\vec{\mathbf{p}}}_j = \int_j \overrightarrow{\mathbf{OM}} \ddot{dm} = \vec{\mathbf{R}}_j \quad (4.22)$$

résultante des efforts appliqués par les mobiles $j' \neq j$ et par l'extérieur sur le mobile j ;

$$\dot{\vec{\sigma}}_j(\text{O}) = \int_j \overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}} \ddot{dm} = \vec{\Gamma}_j(\text{O}) \quad (4.23)$$

moment résultant au point O des efforts appliqués par les mobiles $j' \neq j$ et par l'extérieur sur le mobile j - ce dernier théorème ne devant être écrit que pour un élément j non ponctuel.

Considérons donc un mouvement virtuel du système S , au sens de la section 4.1.2. Si l'élément j est un solide indéformable étendu, le champ de vitesse virtuel dans ce solide est donné par

$$\vec{\mathbf{v}}'(\text{M}) = \vec{\mathbf{v}}'(\text{O} \in j) + \vec{\Omega}'_j \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}}$$

où $\vec{\Omega}'_j$ est le vecteur rotation virtuel du solide j . Dans le cas où l'élément j est une particule ponctuelle, $\vec{\Omega}'_j$ n'a pas à être introduit, mais on peut se ramener au cas précédent en supposant que $\vec{\Omega}'_j = \vec{\mathbf{0}}$. Afin de donner la formulation faible annoncée, formons la puissance virtuelle des quantités d'accélération de l'élément j :

$$P^{acc'}_j = \int_j \overrightarrow{\mathbf{OM}} \cdot \vec{\mathbf{v}}'(\text{M}) \ddot{dm} \quad (4.24)$$

En utilisant (4.22) complété dans le cas d'un élément j non ponctuel par (4.23), on obtient

$$P^{acc'}_j = \vec{\mathbf{R}}_j \cdot \vec{\mathbf{v}}'(\text{O} \in j) + \vec{\Gamma}_j(\text{O}) \cdot \vec{\Omega}'_j \quad (4.25)$$

puissance virtuelle des efforts exercés sur le mobile j , cf. l'équation (3.36).

En faisant la somme de ces équations pour tous les indices j , on obtient, à condition d'introduire la **puissance virtuelle des quantités d'accélération du système S** :

$$P^{acc'} = \sum_j P^{acc'}_j = \int \overrightarrow{\mathbf{OM}} \cdot \vec{\mathbf{v}}'(\text{M}) \ddot{dm} \quad (4.26)$$

⁶L'égalité entre deux champs de vecteurs $\vec{\mathbf{a}}$ et $\vec{\mathbf{b}}$ par exemple est typiquement définie par une formulation **forte** :

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}} \iff \forall \vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{r}}) .$$

On a cependant parfois intérêt à donner une formulation **faible** équivalente de cette égalité, en introduisant un « champ test » quelconque $\vec{\mathbf{c}}$:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}} \iff \forall \text{ champ test } \vec{\mathbf{c}}(\vec{\mathbf{r}}), \iiint \vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \vec{\mathbf{c}}(\vec{\mathbf{r}}) d^3V = \iiint \vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \vec{\mathbf{c}}(\vec{\mathbf{r}}) d^3V .$$

C'est par exemple la démarche suivie pour introduire les distributions. Nous allons voir que cette démarche est aussi très utile en mécanique, puisque l'on ne peut aboutir aux très pratiques équations de Lagrange (4.62) sans passer par le théorème de d'Alembert sous forme faible (4.31).

le *théorème des puissances virtuelles*⁷ :

$$\forall \text{ mouvement virtuel, } \boxed{P^{acc'} = P^{ext'} + P^{int'}} \quad (4.27)$$

Dans tout mouvement virtuel du système, la puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la puissance virtuelle développée par tous les efforts s'exerçant sur le système, tant extérieurs qu'intérieurs.

Le sens à donner aux puissances virtuelles des efforts extérieurs et intérieurs est clair d'après (4.25) :

$$P^{ext'} = \sum_j \left[\vec{\mathbf{R}}_j^{ext} \cdot \vec{\mathbf{v}}'(O \in j) + \vec{\mathbf{\Gamma}}_j^{ext}(O) \cdot \vec{\mathbf{\Omega}}_j' \right] \quad (4.28)$$

$$P^{int'} = \sum_j \left[\vec{\mathbf{R}}_j^{int} \cdot \vec{\mathbf{v}}'(O \in j) + \vec{\mathbf{\Gamma}}_j^{int}(O) \cdot \vec{\mathbf{\Omega}}_j' \right] \quad (4.29)$$

où $\vec{\mathbf{R}}_j^{ext}$ et $\vec{\mathbf{\Gamma}}_j^{ext}$ (resp. $\vec{\mathbf{R}}_j^{int}$ et $\vec{\mathbf{\Gamma}}_j^{int}$) désignent la force et le couple résultant des efforts extérieurs (resp. intérieurs) agissant sur l'élément j . On peut éviter la notation un peu lourde « $O \in j$ » en choisissant sur chaque élément mobile j un point particulier A_j . En combinant alors le caractère de champ de moment du champ de vitesse virtuel sur j ,

$$\vec{\mathbf{v}}'(O \in j) = \vec{\mathbf{v}}'(A_j) + \vec{\mathbf{\Omega}}_j' \wedge \overline{\mathbf{A}_j \mathbf{O}},$$

avec le caractère de champ de moment des efforts appliqués,

$$\vec{\mathbf{\Gamma}}_j^{ext}(O) = \vec{\mathbf{\Gamma}}_j^{ext}(A_j) + \vec{\mathbf{R}}_j^{ext} \wedge \overline{\mathbf{A}_j \mathbf{O}},$$

on montre que la puissance virtuelle des efforts extérieurs peut s'évaluer pour chaque élément j au point particulier A_j :

$$P^{ext'} = \sum_j \left[\vec{\mathbf{R}}_j^{ext} \cdot \vec{\mathbf{v}}'(A_j) + \vec{\mathbf{\Gamma}}_j^{ext}(A_j) \cdot \vec{\mathbf{\Omega}}_j' \right]. \quad (4.30)$$

La même formule existe bien sûr pour les efforts intérieurs.

4.2.2 Théorème de d'Alembert

Nous faisons maintenant l'hypothèse suivante :

- (H1) *parmi les efforts (intérieurs et extérieurs) appliqués au système S , on peut distinguer des efforts de liaison assurant des liaisons **parfaites** d'une part, d'autres efforts donnés d'autre part (notés d).*

Des exemples types d'efforts donnés seront passés en revue section 4.2.4.

La conséquence de cette hypothèse est que, les puissances virtuelles des efforts associés à des liaisons parfaites étant toujours nulles, le théorème des puissances virtuelles prend la forme simplifiée suivante :

$$\forall \text{ mouvement virtuel, } P^{acc'} = P^d \quad (4.31)$$

Dans tout mouvement virtuel (compatible) d'un système satisfaisant à l'hypothèse H1, la puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la puissance virtuelle développée par les efforts (intérieurs et extérieurs) donnés autres que les efforts de liaison.

⁷Ce théorème est bien une conséquence des lois de la mécanique de Newton. Sa validité est en fait très générale : on peut l'étendre en un certain sens au cas de mouvements virtuels non compatibles, ou au cas de solides déformables. Certains auteurs utilisent même ce théorème comme le principe fondamental de la mécanique, cf. par exemple le cours de Germain (1986).

Le progrès par rapport au théorème des puissances virtuelles sous la forme « générale » (4.27) est considérable, puisque tous les efforts de liaison ont disparu de la formulation (4.31).

Afin d'obtenir une forme forte de ce théorème de d'Alembert sous forme faible (cf. le « pour tout mouvement virtuel »), nous posons pour simplifier l'hypothèse supplémentaire :

(H2) toutes les liaisons parfaites impliquées sont **holonomes bilatérales**.

Nous pouvons alors choisir un système de **coordonnées généralisées** q_1, \dots, q_n prenant en compte toutes les liaisons. Les mouvements virtuels (compatibles) sont en conséquence donnés tout simplement par l'équation (4.10) :

$$\forall M \in S, \quad \vec{v}'(M) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \overrightarrow{\text{OM}}}{\partial q_i} \frac{dq'_i}{dt'} . \quad (4.32)$$

L'injection dans (4.26) montre que

$$P^{acc'} = \sum_{i=1}^n S_i \frac{dq'_i}{dt'} \quad (4.33a)$$

$$\text{avec} \quad S_i = \int \overrightarrow{\text{OM}} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\text{OM}}}{\partial q_i} dm \quad (4.33b)$$

qui peut être vue comme une **force d'inertie généralisée**. Pour expliciter le membre de droite de (4.31), nous partons de l'équation de définition analogue à (4.30),

$$P^{d'} = \sum_j \left[\vec{\mathbf{R}}_j^d \cdot \vec{v}'(A_j) + \vec{\mathbf{\Gamma}}_j^d(A_j) \cdot \vec{\Omega}'_j \right], \quad (4.34)$$

où $\vec{\mathbf{R}}_j^d$ et $\vec{\mathbf{\Gamma}}_j^d(A_j)$ sont la force et le moment résultants (en A_j point lié à l'élément j) des efforts (intérieurs et extérieurs) donnés (autres que les efforts de liaison) s'exerçant sur l'élément j du système. Nous supposons que l'orientation de l'élément j - lorsque il est étendu - est repérée par les angles d'Euler ψ_j, θ_j et ϕ_j . Dans un mouvement virtuel, l'équation (1.53) montre que

$$\vec{\Omega}'_j = \frac{d\psi_j}{dt'} \vec{\mathbf{e}}_z + \frac{d\theta_j}{dt'} \vec{\mathbf{e}}_{x'j} + \frac{d\phi_j}{dt'} \vec{\mathbf{e}}_{zj}$$

où les vecteurs $\vec{\mathbf{e}}_{x'j}$ et $\vec{\mathbf{e}}_{zj}$ sont définis par (1.44) et (1.40) pour l'élément j . Tous ces angles et vecteurs étant fonctions des coordonnées généralisées q_1, \dots, q_n , on a dans un mouvement virtuel :

$$\vec{\Omega}'_j = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial q_i} \vec{\mathbf{e}}_z + \frac{\partial \theta_j}{\partial q_i} \vec{\mathbf{e}}_{x'j} + \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \vec{\mathbf{e}}_{zj} \right] \frac{dq'_i}{dt'} .$$

En écrivant d'autre part (4.32) pour $M = A_j$, on obtient au bilan pour (4.34) :

$$P^{d'} = \sum_{i=1}^n Q_i \frac{dq'_i}{dt'} \quad (4.35a)$$

$$\text{avec} \quad Q_i = \sum_j Q_{ij} = \sum_j \left\{ \vec{\mathbf{R}}_j^d \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\text{OA}}_j}{\partial q_i} + \vec{\mathbf{\Gamma}}_j^d(A_j) \cdot \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial q_i} \vec{\mathbf{e}}_z + \frac{\partial \theta_j}{\partial q_i} \vec{\mathbf{e}}_{x'j} + \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \vec{\mathbf{e}}_{zj} \right] \right\} \quad (4.35b)$$

En rapprochant (4.35) de la formule classique (3.36), on désigne Q_i comme la **force généralisée** travaillant contre la coordonnée q_i . Lorsque q_i est une longueur, Q_i est homogène à une force ; lorsque q_i est un angle,

Q_i est homogène à un couple. Rappelons que si le mobile j est ponctuel, aucun terme angulaire n'a à être introduit : on peut considérer qu'alors $\vec{\Gamma}_j^d = \vec{\mathbf{0}}$.

Notons aussi la somme sur les sous-parties j de S dans (4.35) : même si la coordonnée q_i correspond à un degré de liberté d'une sous-partie particulière j_0 , du fait des liaisons entre sous-parties de S la force généralisée correspondante Q_i fait typiquement intervenir des forces extérieures $\vec{\mathbf{R}}_j^d$ agissant sur des sous-parties j différant de j_0 ... et éventuellement « éloignées » de j_0 ! On méditera à ce sujet l'exercice 4.2.

À l'aide de (4.33) et (4.35), le théorème de d'Alembert sous forme faible (4.31) se récrit :

$$\forall \text{ mouvement virtuel} \quad \sum_{i=1}^n S_i \frac{dq'_i}{dt'} = \sum_{i=1}^n Q_i \frac{dq'_i}{dt'}. \quad (4.36)$$

Comme dans un tel mouvement virtuel les « vitesses généralisées » dq'_i/dt' sont quelconques, la forme forte⁸ équivalente à (4.36) est :

$$\boxed{\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad S_i = Q_i} \quad (4.37)$$

Dans le mouvement réel d'un système satisfaisant aux hypothèses H1 et H2, les forces d'inertie généralisées sont égales aux forces généralisées.

C'est le **théorème de d'Alembert**. Notons que dans le cas où H2 n'est pas vérifiée parce que certaines liaisons parfaites sont *non holonomes* bilatérales, on peut écrire un principe analogue à condition d'introduire des **multiplieurs de Lagrange** correspondant en général à des inconnues de liaison (Germain 1986). Ceci enlève beaucoup d'intérêt au formalisme lagrangien, et pour cette raison nous ne traiterons pas ce cas ici.

Notons aussi que dans le cas d'un problème de **statique**, l'expression (4.33) où $\vec{\ddot{\mathbf{O}}\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{0}}$ montre que toutes les forces d'inertie généralisées S_i sont nulles. A l'équilibre d'un tel système toutes les forces généralisées Q_i doivent donc être nulles d'après le théorème de d'Alembert.

4.2.3 Calcul des forces d'inertie généralisées

Dans un problème dynamique général, les forces d'inertie généralisées S_i ne sont pas nulles, mais données par (4.33) comme l'intégrale pondérée par la densité de masse de

$$\vec{\ddot{\mathbf{O}}\mathbf{M}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{O}}\mathbf{M}}{\partial q_i} = \frac{d^2 \vec{\mathbf{O}}\mathbf{M}}{dt^2} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{O}}\mathbf{M}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d \vec{\mathbf{O}}\mathbf{M}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{O}}\mathbf{M}}{\partial q_i} \right) - \frac{d \vec{\mathbf{O}}\mathbf{M}}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{\mathbf{O}}\mathbf{M}}{\partial q_i}. \quad (4.38)$$

Or, par définition des coordonnées généralisées (4.4), on sait que lors d'un mouvement quelconque du système

$$d \vec{\mathbf{O}}\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{\mathbf{O}}\mathbf{M}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{\mathbf{O}}\mathbf{M}}{\partial t} dt.$$

On en déduit

$$\frac{d}{dt} \vec{\mathbf{O}}\mathbf{M} = \frac{d \vec{\mathbf{O}}\mathbf{M}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{\mathbf{O}}\mathbf{M}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \vec{\mathbf{O}}\mathbf{M}}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{\mathbf{O}}\mathbf{M}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{\mathbf{O}}\mathbf{M}}{\partial t} \quad (4.39)$$

qui doit être considérée comme une fonction des variables indépendantes $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ et t . En particulier

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{O}}\mathbf{M}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{\mathbf{O}}\mathbf{M}}{\partial q_i}.$$

⁸C'est-à-dire n'impliquant plus de référence à des mouvements virtuels.

Ainsi le premier terme de (4.38) peut s'écrire

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{dt} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{\mathbf{OM}} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\mathbf{OM}} \right)^2. \quad (4.40)$$

D'autre part, par définition de la dérivée totale par rapport à t ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial q_k \partial q_i} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial t \partial q_i}.$$

Or par dérivation de (4.39), écrite avec k comme indice muet, par rapport à q_i , on obtient

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial q_i \partial t}.$$

D'après le théorème de Schwarz (le paramétrage par les coordonnées généralisées et le temps étant supposé suffisamment régulier) on a donc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial q_i}.$$

Le deuxième terme de (4.38) s'écrit ainsi

$$-\frac{d\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial q_i} = -\overrightarrow{\mathbf{OM}} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial q_i} = -\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\mathbf{OM}} \right)^2. \quad (4.41)$$

On voit apparaître dans (4.40) et (4.41) des dérivées de la densité d'énergie cinétique du système, d'où la **formule de lagrange**

$$S_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} \quad (4.42)$$

où l'on rappelle l'équation (2.46) :

$$E_c = \int \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\mathbf{OM}} \right)^2 dm. \quad (4.43)$$

D'après l'équation (4.39), E_c est un polynôme de degré 2 en les \dot{q}_i , c'est-à-dire une somme de polynômes homogènes de degré 2, 1 et 0 en les \dot{q}_i :

$$E_c = K_2(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) + K_1(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) + K_0(q_1, \dots, q_n, t) \quad (4.44)$$

avec

$$K_2 = \int \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)^2 dm = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n M_{ik}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad (4.45)$$

$$K_1 = \int \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial t} dm = \sum_{i=1}^n N_i(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_i, \quad (4.46)$$

$$K_0 = \int \frac{1}{2} \rho(M) \left(\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial t} \right)^2 dm. \quad (4.47)$$

Il importe de noter que K_2 est une forme quadratique positive des \dot{q}_i ; ainsi

$$M_{ik} = \int \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial q_k} dm = M_{ki}. \quad (4.48)$$

Sauf cas exceptionnels où le paramétrage présente une singularité, i.e. une certaine dérivée $\overrightarrow{\partial \mathbf{OM}}/\partial q_{i_0}$ s'annule - dans un tel cas tous les coefficients $M_{i_0 k}$ correspondant s'annulent -, K_2 est même définie positive.

Si les *liaisons* sont *indépendantes du temps*, i.e.

$$\frac{\overrightarrow{\partial \mathbf{OM}}}{\partial t} = \vec{0}, \quad (4.49)$$

alors $K_1 = K_0 = 0$, et $E_c = K_2$.

4.2.4 Calcul des forces généralisées : efforts donnés potentiels - Exemples types

Afin d'obtenir pour les forces généralisées (4.35) des expressions simples et maniables nous faisons une dernière hypothèse :

- (H3) *tous les efforts (intérieurs et extérieurs) donnés dérivent d'une énergie potentielle E_p , fonction de q_1, \dots, q_n et t seulement, de sorte que les forces généralisées prennent la forme simple :*

$$Q_i = -\frac{\partial E_p}{\partial q_i} \quad (4.50)$$

Il est clair que la superposition d'efforts de ce type, dits *potentiels*, se décrit en construisant une énergie potentielle totale somme des énergies potentielles associées à chaque effort. D'autre part, il est commode de calculer séparément l'énergie potentielle associée aux efforts exercés sur chaque élément mobile j - voir l'équation (4.35) -, soit E_{pj} , selon

$$Q_{ij} = \vec{\mathbf{R}}_j^d \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{OA}}_j}{\partial q_i} + \vec{\Gamma}_j^d(A_j) \cdot \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial q_i} \vec{\mathbf{e}}_z + \frac{\partial \theta_j}{\partial q_i} \vec{\mathbf{e}}_{x'j} + \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \vec{\mathbf{e}}_{zj} \right] = -\frac{\partial E_{pj}}{\partial q_i}. \quad (4.51)$$

Alors l'énergie potentielle totale sera

$$E_p = \sum_j E_{pj}. \quad (4.52)$$

Nous passons maintenant en revue les cas les plus courants d'efforts donnés potentiels.

Exemple 1 : efforts données par le *poids* :

Sur un élément mobile ponctuel j , de masse m_j , situé au point A_j , la force correspondante est

$$\vec{\mathbf{R}}_j^d = m_j \vec{\mathbf{g}}$$

où $\vec{\mathbf{g}}$ est le vecteur champ de gravité terrestre. La contribution correspondante à la force généralisée travaillant contre la coordonnée généralisée q_i est d'après (4.51) :

$$Q_{ij} = m_j \vec{\mathbf{g}} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{OA}}_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial}{\partial q_i} (-m_j \vec{\mathbf{g}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OA}}_j)$$

d'où une contribution à l'énergie potentielle totale

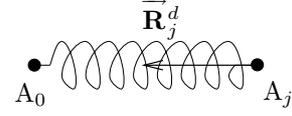
$$E_{pj} = -m_j \vec{\mathbf{g}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OA}}_j. \quad (4.53)$$

Si l'élément mobile j est étendu mais homogène, on a intérêt à évaluer (4.51) en $A_j = G_j$ centre de gravité de cette partie solide. Alors $\vec{\Gamma}_j^d(A_j) = \vec{0}$ d'où une contribution à l'énergie potentielle de la même forme que (4.53).

Exemple 2 : efforts donnés par une « *liaison ressort élastique* » :

Supposons qu'un élément mobile ponctuel j situé au point A_j est fixé à l'extrémité d'un « ressort » élastique, l'autre extrémité de ce « ressort », dont on suppose qu'il reste rectiligne⁹, étant un point fixe A_0 .

On schématise cette situation sur la figure ci-contre. Il faut bien voir que le « ressort » peut tout aussi bien être un vrai ressort qu'une poutre déformable. Une hypothèse supplémentaire cruciale est que le « ressort » travaille en *régime élastique linéaire*, donc d'après la loi de Hooke que la force exercée sur A_j est de la forme



$$\vec{\mathbf{R}}_j^d = -k \left(|\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j}| - l_0 \right) \frac{\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j}}{|\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j}|} \quad (4.54)$$

où l_0 est la longueur « au repos » (sans chargement) du « ressort » et k sa constante de raideur. Un calcul simple montre que la force généralisée associée travaillant contre la coordonnées généralisée q_i s'écrit

$$Q_{ij} = \vec{\mathbf{R}}_j^d \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{O}\mathbf{A}_j}}{\partial q_i} = -k \left(|\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j}| - l_0 \right) \frac{\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j}}{|\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j}|} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{1}{2} k \left(|\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j}| - l_0 \right)^2 \right]$$

où on a utilisé le fait que les points O et A_0 sont fixes. On en déduit

$$E_{pj} = \frac{1}{2} k \left(|\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j}| - l_0 \right)^2. \quad (4.55)$$

X Détaillons ce calcul. Il suffit de partir de

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{1}{2} \left(|\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j}| - l_0 \right)^2 = \left(|\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j}| - l_0 \right) \frac{\partial}{\partial q_i} |\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j}|,$$

et de constater que

$$\frac{\partial}{\partial q_i} |\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j}| = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(|\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j}|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \left(|\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j}|^2 \right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial q_i} |\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j}|^2 = \frac{1}{|\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j}|} \overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j}}{\partial q_i}.$$

X

Dans le cas où le « ressort » relie deux éléments ponctuels mobiles A_j et A_l , la force exercée sur l'élément A_j prend toujours la forme (4.54) mais en remplaçant A_0 par A_l . La force opposée s'exerce bien sûr sur l'élément A_l . Au bilan il apparaît dans la force généralisée associée travaillant contre la coordonnées généralisée q_i les deux contributions

$$\begin{aligned} Q_{ij} + Q_{il} &= \vec{\mathbf{R}}_j^d \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{O}\mathbf{A}_j}}{\partial q_i} + \vec{\mathbf{R}}_l^d \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{O}\mathbf{A}_l}}{\partial q_i} \\ &= \vec{\mathbf{R}}_j^d \cdot \left(\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{O}\mathbf{A}_j}}{\partial q_i} - \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{O}\mathbf{A}_l}}{\partial q_i} \right) \\ &= -k \left(|\overrightarrow{\mathbf{A}_l\mathbf{A}_j}| - l_0 \right) \frac{\overrightarrow{\mathbf{A}_l\mathbf{A}_j}}{|\overrightarrow{\mathbf{A}_l\mathbf{A}_j}|} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{A}_l\mathbf{A}_j}}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

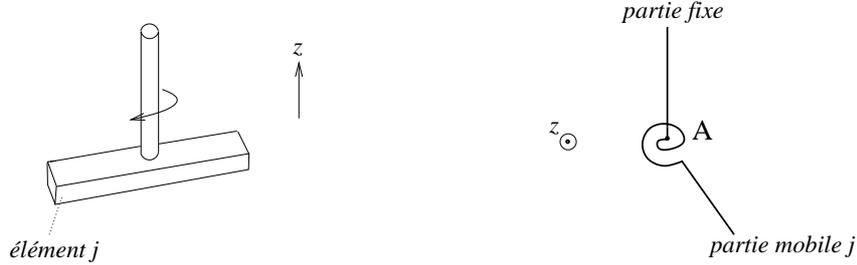
Le même calcul que dans le cas à une extrémité fixe est valable, et on obtient qu'il faut ajouter à l'énergie potentielle totale une contribution analogue à (4.55) :

$$E_{pj} + E_{pl} = \frac{1}{2} k \left(|\overrightarrow{\mathbf{A}_l\mathbf{A}_j}| - l_0 \right)^2. \quad (4.56)$$

⁹Ceci est typiquement assuré par l'existence d'une tige rigide sur laquelle le ressort et les masses coulissent.

Exemple 3 : efforts donnés par une « *liaison ressort de torsion élastique* » :

Supposons qu'un élément mobile étendu j est fixé à un axe Az par un « ressort de torsion élastique », comme cela est représenté ci-dessous (à gauche figure 3D représentant le cas d'une « poutre » en torsion, à droite vue de dessus schématique inspirée par le cas fréquemment rencontré d'un ressort de torsion « spiral ») :



Plus précisément on suppose que le seul degré de liberté de rotation de l'élément j consiste en une rotation propre d'angle ϕ_j autour de $\vec{e}_{Zj} = \vec{e}_z$, et que le couple de rappel de torsion élastique exercé par le ressort est¹⁰

$$\vec{\Gamma}_j^d(A) = -C\phi_j\vec{e}_z \quad (4.57)$$

où C est la constante de raideur de torsion élastique du « ressort » (qui travaille toujours en régime élastique linéaire). La force généralisée correspondante est selon (4.51) :

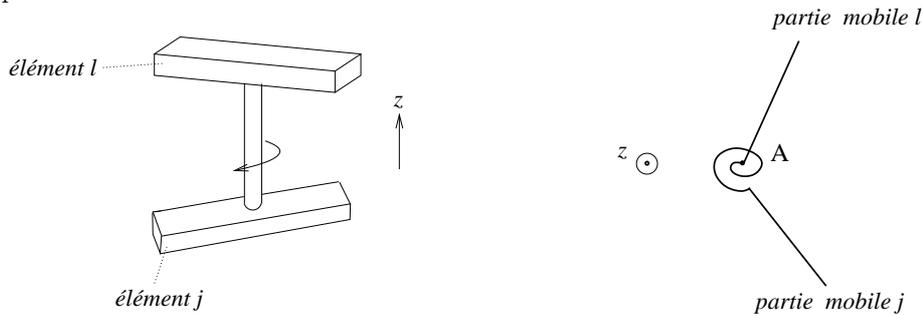
$$Q_{ij} = \vec{\Gamma}_j^d(A) \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \vec{e}_z = -C\phi_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial E_{pj}}{\partial q_i}$$

à condition d'introduire la contribution à l'énergie potentielle

$$E_{pj} = \frac{1}{2}C\phi_j^2, \quad (4.58)$$

dont on remarquera qu'elle présente une structure analogue à (4.55).

On peut aussi envisager le cas où deux éléments j et l , ne possédant chacun qu'un seul degré de liberté de rotation propre autour de Az , repéré par les angles respectifs ϕ_j et ϕ_l , sont reliés par un « ressort de torsion élastique » :



Alors les couples exercés par le « ressort de torsion » sont¹¹

$$\vec{\Gamma}_j^d(A) = -C(\phi_j - \phi_l)\vec{e}_z = -\vec{\Gamma}_l^d(A),$$

d'où pour la force généralisée Q_i deux contributions

$$Q_{ij} + Q_{il} = \vec{\Gamma}_j^d(A) \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \vec{e}_z + \vec{\Gamma}_l^d(A) \cdot \frac{\partial \phi_l}{\partial q_i} \vec{e}_z = -C(\phi_j - \phi_l) \frac{\partial (\phi_j - \phi_l)}{\partial q_i} = -\frac{\partial (E_{pj} + E_{pl})}{\partial q_i}$$

avec

$$E_{pj} + E_{pl} = \frac{1}{2}C(\phi_j - \phi_l)^2. \quad (4.59)$$

¹⁰Le couple est donc nul pour l'orientation de référence $\phi_j = 0$ correspondant au ressort « au repos » i.e. sans torsion.

¹¹Là encore ceci suppose une définition des angles ϕ_j et ϕ_l telle que $\phi_j = \phi_l$ corresponde bien à la position de « repos » du ressort.

4.2.5 Équations de Lagrange

Le théorème de d'Alembert (4.37) donne, pour un système satisfaisant H1, H2, H3, ses équations de la dynamique sous la forme

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} = - \frac{\partial E_p}{\partial q_i}} \quad (4.60)$$

En introduisant le *lagrangien du système*

$$\boxed{L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = E_c(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) - E_p(q_1, \dots, q_n, t)} \quad (4.61)$$

on aboutit à une forme équivalente à (4.60) qui porte le nom d'*équations de Lagrange* du système :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0} \quad (4.62)$$

Le formalisme lagrangien permet ainsi d'obtenir les équations de la dynamique du système sous forme scalaire, sans avoir besoin de calculer les efforts associés aux liaisons parfaites prises en compte par le paramétrage (4.4). C'est là tout son intérêt, par rapport à une étude de dynamique newtonienne où l'élimination des efforts de liaisons requiert souvent des calculs vectoriels très lourds.

Au niveau structurel, les équations de la dynamique obtenues (4.60) ou (4.62) sont des équations différentielles ordinaires dont le terme d'ordre différentiel le plus élevé provient de

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K_2}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

d'après (4.44). Le terme d'ordre différentiel le plus élevé est donc d'après (4.45) un terme en

$$\sum_{k=1}^n M_{ik}(q_1, \dots, q_n, t) \ddot{q}_k .$$

On a donc affaire à un système de n équations différentielles d'ordre 2 sur q_1, \dots, q_n , que l'on saura en général résoudre si l'on se donne des conditions initiales sur q_1, \dots, q_n et $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$. Très souvent, certaines des coordonnées q_i sont des angles, d'où l'intervention de fonctions trigonométriques dans les équations de Lagrange, qui sont ainsi *non linéaires*. En conséquence elles n'ont en général pas de solutions que l'on peut exprimer explicitement comme des fonctions connues du temps, d'où la nécessité de recourir à une résolution numérique, ou à des méthodes d'approximations, ce pour décrire le comportement du système au voisinage de solutions « simples », par exemple des solutions d'équilibre ; c'est ce que nous allons faire dans la section suivante. D'autre part le caractère *non linéaire* des équations conduit à des comportements complexes et intéressants (multiplicité des solutions d'équilibre, instabilités, bifurcations, chaos, etc...), dont certains seront abordés lors d'exercices¹².

Terminons en mentionnant que l'on peut montrer, grâce à la théorie des variations développée par Euler¹³, que les équations de Lagrange (4.62) expriment en fait un *principe de moindre action*. En l'occurrence la trajectoire effectivement suivie par le système entre l'instant initial t_1 et l'instant final t_2 rend extrémale l'intégrale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t), t) dt$$

¹²Ainsi l'exercice 4.2, et le TP correspondant, donnent un exemple de système chaotique, tandis que l'exercice 4.3 exhibe une bifurcation d'une grande importance pratique.

¹³Voir par exemple Vinsard (2005) ou l'an prochain la partie correspondante du cours d'Antoine (2007).

vis à vis de petites variations de trajectoires, les valeurs initiales et finales des q_i étant fixées. Pour cette raison les équations de Lagrange (4.62) sont souvent désignées plutôt comme les *équations d'Euler-Lagrange*. Cette propriété est unificatrice, car elle montre que les systèmes que nous étudions ici représentent en fait une sous-classe des systèmes obéissant à un principe de moindre action¹⁴.

4.3 Application : étude des petits mouvements autour d'une position d'équilibre

Considérons un système du type précédent, tel que, de plus, l'énergie potentielle E_p ne dépende pas du temps. Alors seulement pourront exister des positions d'*équilibre* du système q_1^0, \dots, q_n^0 , telles que, si le système se trouve dans cette position à l'instant t_0 , et sans vitesse initiale, $\dot{q}_1 = \dots = \dot{q}_n = 0$, il y reste toujours. D'après le théorème de d'Alembert (4.37) ceci s'écrit

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad Q_i = -\left. \frac{\partial E_p}{\partial q_i} \right|_{q_1^0, \dots, q_n^0} = 0.$$

Une telle position d'équilibre doit donc correspondre à un *point singulier de la fonction énergie potentielle* du système $E_p(q_1, \dots, q_n)$.

Cependant, en réalité, il existe toujours du « bruit » c'est-à-dire des petites sources de forces « aléatoires » s'exerçant sur tout système mobile. En conséquence une position d'équilibre ne sera physiquement observable que si, lorsque l'on écarte légèrement le système de cette position d'équilibre - exactement sous l'effet du « bruit » -, le système reste néanmoins dans le voisinage de cette position. Une telle position d'équilibre est dite *stable*. Afin d'étudier ce problème de la *stabilité* d'une position d'équilibre et plus précisément la *nature des petits mouvements possibles* autour de cette position, il est utile d'introduire les « vecteurs »¹⁵ de coordonnées

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n), \quad \mathbf{q}^0 = (q_1^0, \dots, q_n^0). \quad (4.63)$$

La définition mathématique de la stabilité de la position d'équilibre \mathbf{q}^0 est alors :

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe α et $\dot{\alpha} > 0$ tels que, pour tout mouvement du système défini par des conditions initiales vérifiant

$$|\mathbf{q}(t_0) - \mathbf{q}^0| < \alpha \quad \text{et} \quad |\dot{\mathbf{q}}(t_0)| < \dot{\alpha},$$

alors

$$\forall t > t_0, \quad |\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^0| < \epsilon.$$

On peut faire une étude systématique des petits mouvements possibles autour de la position d'équilibre \mathbf{q}^0 dans le cas d'un système à *liaisons indépendantes du temps* (4.49), pour lequel les équations de Lagrange s'écrivent sous la forme¹⁶

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{k=1}^n M_{ik}(\mathbf{q}) \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{f=1}^n \left(\frac{\partial M_{ik}}{\partial q_f} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{kf}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_f = -\frac{\partial E_p(\mathbf{q})}{\partial q_i}. \quad (4.64)$$

En supposant donc que $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ est pour t proche de t_0 proche de \mathbf{q}^0 ,

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^0 + \delta \mathbf{q}(t) \quad \text{avec} \quad \delta \mathbf{q}(t) \quad \text{et} \quad \delta \dot{\mathbf{q}}(t) \quad \text{petits}, \quad (4.65)$$

¹⁴Par exemple, la propagation de rayons lumineux en milieu inhomogène, mais dans l'approximation de l'optique géométrique, satisfait aussi un principe de moindre action. On peut donc faire un rapprochement formel entre la trajectoire de tels rayons lumineux et la trajectoire de nos systèmes mécaniques dans leur « espace des phases lagrangien » $\{q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n\}$.

¹⁵Il ne s'agit pas de « vecteurs » au sens tensoriel du terme, d'où la notation par des caractères gras sans flèche.

¹⁶En théorie des systèmes dynamiques on dit que le système (4.64), dans lequel le temps n'intervient pas explicitement, est « *autonome* ».

procédons à une *linéarisation* de ce système¹⁷. Il vient, en négligeant des termes d'ordre $\delta\mathbf{q}^2$ ou $\delta\dot{\mathbf{q}}^2$,

$$\boxed{\mathbf{M} \cdot \delta\ddot{\mathbf{q}}(t) = -\mathbf{E}_2 \cdot \delta\mathbf{q}(t)} \quad (4.66)$$

où l'on a introduit la matrice \mathbf{M} des $M_{ik}(\mathbf{q}^0)$, ainsi que la matrice hessienne \mathbf{E}_2 des $\partial^2 E_p / \partial q_i \partial q_k(\mathbf{q}^0)$. Rappelons que cette matrice hessienne définit les variations de E_p au voisinage de la position \mathbf{q}^0 en vertu de la formule de Taylor-Young :

$$E_p(\mathbf{q}^0 + \delta\mathbf{q}) - E_p(\mathbf{q}^0) = \frac{1}{2} \delta\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \delta\mathbf{q} + O(\delta\mathbf{q}^3), \quad (4.67)$$

dans laquelle nous notons

$$\delta\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \delta\mathbf{q} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta q_i E_{2ik} \delta q_k.$$

Le système linéaire (4.66) peut être résolu généralement en recherchant une base de *modes propres* solutions de la forme

$$\delta\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_\lambda \exp[\lambda(t - t_0)]. \quad (4.68)$$

L'équation caractéristique correspondante est

$$\lambda^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{q}_\lambda = -\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{q}_\lambda. \quad (4.69)$$

Or \mathbf{M} est définie positive d'après la positivité de l'énergie cinétique, cf. (4.45) ; on exclut ici le cas de points \mathbf{q}^0 singuliers du paramétrage, cf. la remarque de la fin de la section 4.2.3. Cette propriété de la matrice \mathbf{M} permet de lui associer une matrice racine carrée symétrique définie positive \mathbf{N} telle que $\mathbf{M} = \mathbf{N}^2$. Un calcul simple montre alors que

$$\lambda^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{q}_\lambda = -\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{q}_\lambda \iff \mathbf{p}_\lambda = \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}_\lambda \text{ vérifie } \lambda^2 \mathbf{p}_\lambda = -\mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{p}_\lambda. \quad (4.70)$$

La matrice $-\mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{N}^{-1}$ étant symétrique, elle se diagonalise dans \mathbb{R}^n sur une base de vecteurs propres $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ correspondant à des valeurs propres $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ réelles. En posant

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \mathbf{q}_k = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{p}_k, \quad (4.71)$$

on obtient la solution générale du problème (4.65) sous la forme¹⁸

$$\delta\mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^n \delta\mathbf{q}_k(t) = \sum_{k=1}^n \{a_k^+ \exp[\lambda_k(t - t_0)] + a_k^- \exp[-\lambda_k(t - t_0)]\} \mathbf{q}_k, \quad (4.72)$$

les conditions initiales portant sur $\delta\mathbf{q}(t = t_0)$ et $\delta\dot{\mathbf{q}}(t = t_0)$ permettant de déterminer les valeurs des coefficients a_k^\pm . Dans cette équation on voit clairement apparaître n *modes propres* de nature fondamentalement différente selon le signe de λ_k^2 .

- Si $\lambda_k^2 < 0$, on note $\lambda_k^2 = -\omega_k^2$ avec $\omega_k > 0$, d'où $\lambda_k = i\omega_k$ et $-\lambda_k = -i\omega_k$: la contribution correspondante à (4.72),

$$\delta\mathbf{q}_k(t) = A_k \cos(\omega_k t + \Phi_k) \mathbf{q}_k \quad (4.73)$$

décrit des petites *oscillations* autour de \mathbf{q}^0 . On dit qu'il s'agit d'un *mode propre vibrationnel* du système, et ω_k est désignée comme l'une des *pulsations propres* du système¹⁹.

¹⁷On parle aussi pour qualifier la démarche que nous allons suivre d'une *analyse linéaire de stabilité*.

¹⁸On écarte ici le cas exceptionnel où il existe une valeur propre nulle, $\lambda_k^2 = 0$, d'où une contribution différente à $\delta\mathbf{q}(t)$,

$$\delta\mathbf{q}_k(t) = (a_k + b_k t) \mathbf{q}_k.$$

¹⁹Ces oscillations seront étudiées systématiquement dans les cours de deuxième année de *dynamique des structures* de Schmitt (2002) et Rahouadj (2002).

- Si $\lambda_k^2 > 0$, auquel cas on peut choisir $\lambda_k > 0$, la contribution correspondante à (4.72), qui diverge exponentiellement avec le temps²⁰, indique une *instabilité* du système.

$$\begin{aligned}
\text{On obtient finalement que } \mathbf{q}^0 \text{ est stable} &\iff \text{tous les } \lambda_k^2 \text{ sont négatifs} \\
&\iff \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{N}^{-1} \text{ est définie positive} \\
&\iff \forall \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} \cdot (\mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{N}^{-1}) \cdot \mathbf{p} > 0 \\
&\iff \forall \mathbf{p}, \quad (\mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{p}) \cdot \mathbf{E}_2 \cdot (\mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{p}) > 0 \\
&\iff \forall \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{q} > 0 \\
&\iff \mathbf{E}_2 \text{ est définie positive}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{q}^0 \text{ est stable} \iff \mathbf{q}^0 \text{ est un minimum strict de } E_p}. \quad (4.74)$$

4.4 Extension : fonction de dissipation de Rayleigh

Pour un système à énergie potentielle et liaisons indépendantes du temps du type de ceux étudiés dans la section précédente, et dans le cadre de l'*approximation des petits mouvements* (4.65) autour d'une configuration d'équilibre $\mathbf{q} = \mathbf{q}^0$, il est possible d'introduire des *efforts donnés supplémentaires d'origine visqueuse*. Ces efforts sont créés par le frottement d'un élément solide j du système avec un fluide visqueux, l'écoulement correspondant possédant un très faible nombre de Reynolds d'après l'hypothèse des petits mouvements. On sait que, dans le cas d'un mouvement de translation pure, la force de traînée engendrée est de la forme

$$\vec{\mathbf{F}}_j^{visq} = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{G}_j) \quad (4.75)$$

où $\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{G}_j)$ désigne la vitesse du centre d'inertie de l'élément j , et $\vec{\mathbf{A}}$ un *tenseur* symétrique de *mobilité* proportionnel à la viscosité du fluide, ne dépendant à part cela que de la géométrie du problème (position d'équilibre du solide et forme du réservoir de fluide), cf. Brancher (1999) section VI.4 ou Mofatt (1994). La force généralisée correspondante sera

$$Q_i^{visq} = \frac{\partial \vec{\mathbf{O}}\mathbf{G}_j}{\partial q_i} \cdot \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{G}_j) = \frac{\partial \vec{\mathbf{O}}\mathbf{G}_j}{\partial q_i} \cdot \vec{\mathbf{A}} \cdot \sum_k \frac{\partial \vec{\mathbf{O}}\mathbf{G}_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (4.76)$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$Q_i^{visq} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\sum_k R_{ik} \dot{q}_k \quad (4.77)$$

en posant

$$\boxed{R = R(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l} \quad (4.78)$$

avec

$$R_{kl} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{O}}\mathbf{G}_j}{\partial q_k} \cdot \vec{\mathbf{A}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{O}}\mathbf{G}_j}{\partial q_l}, \quad (4.79)$$

²⁰En dehors de conditions initiales très particulières qui annuleraient le coefficient a_k^+ , ce qui est en pratique quasiment impossible à cause de l'existence de sources de « bruit » mécanique. Notons aussi que le comportement en $\exp[\lambda_k(t - t_0)]$ n'est valable qu'aux temps courts, et qu'aux temps longs des effets non linéaires, non pris en compte dans la version linéarisée des équations correspondant à (4.66), vont forcément jouer : en d'autres termes on a alors affaire à un petit mouvement qui est en train de devenir un grand mouvement ! Ce type de comportement avec amplification exponentielle aux temps courts est une caractéristique complètement générale des instabilités, qui se retrouve dans de nombreux autres contextes (instabilités hydrodynamiques, thermohydrodynamiques, etc...). Pour en savoir plus sur les *analyses linéaires* et mieux *faiblement non linéaires* - lorsque les mouvements ne sont plus vraiment « petits » mais ne sont pas encore très « grands » - *de stabilité*, il faudra envisager de suivre le Master 2 recherche de mécanique-énergétique, et les cours correspondants Angilella (2006) et Plaut (2006).

les dérivées étant bien sûr évaluées dans la configuration d'équilibre $\mathbf{q} = \mathbf{q}^0$.

Puisque le tenseur de mobilité $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ est symétrique, la **fonction de dissipation de Rayleigh** R ainsi introduite correspond à une matrice associée R_{kl} symétrique. D'autre part, la puissance développée par des forces de trainée visqueuses étant toujours négative,

$$P^{visq} = \overrightarrow{\mathbf{F}}_j^{visq} \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}(G_j) = \overrightarrow{\mathbf{v}}(G_j) \cdot \overrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}(G_j) = - \sum_{k,l} R_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \leq 0 \quad \forall \dot{q}_k ,$$

R est une forme quadratique positive.

D'une manière plus générale, des forces et couples visqueux sont créés par les petits mouvements de translation-rotation d'un solide dans un fluide, ces forces et couples s'exprimant par des relations linéaires à partir des vecteurs vitesse de translation et vitesse de rotation du solide (Mofatt 1994). On peut alors montrer l'existence d'une fonction de dissipation de Rayleigh de la forme (4.78), mais avec des coefficients R_{kl} d'expression plus compliquée que (4.79). Le point important est que la forme quadratique associée reste positive. Si on reprend alors le théorème de d'Alembert (4.37), compte tenu de ce que les forces d'inertie généralisées prennent la forme (4.42), et les efforts donnés classiques la forme (4.50), les termes supplémentaires (4.76) conduisent finalement aux équations de Lagrange modifiées :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} = - \frac{\partial E_p}{\partial q_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}} \quad (4.80)$$

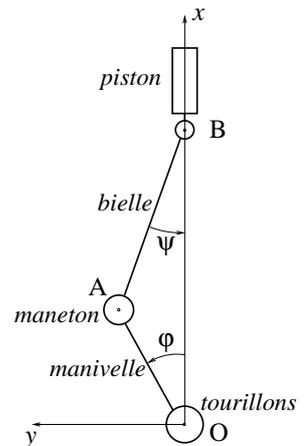
Les termes nouveaux liés à R correspondent à des effets d'**amortissement** qui sont souvent introduits a priori dans les modèles, dans une optique phénoménologique où l'on ne se préoccupe pas forcément de l'origine physique de cet amortissement. Ainsi les coefficients correspondants peuvent par exemple être obtenus par ajustement à partir de données expérimentales ; voir les cours de dynamique des structures de deuxième année (Schmitt 2002, Rahouadj 2002).

4.5 Exercices et problèmes

Exercice 4.1 Étude introductive de la dynamique d'un moteur monocylindre

La figure ci-dessous présente une coupe schématique d'un moteur monocylindre dont on désire modéliser le fonctionnement (voir aussi l'exemple concret de la figure 4.1). On suppose que le référentiel de travail dans lequel le repère $Oxyz$ est fixe est galiléen ; l'axe Ox est supposé vertical c'est-à-dire orienté dans la direction opposée à celle du champ de gravité terrestre $\overrightarrow{\mathbf{g}}$.

L'axe Oz perpendiculaire au plan de la figure est l'axe de l'arbre principal du moteur ; c'est aussi l'axe de rotation du vilebrequin constitué de deux tourillons d'axe Oz , d'une manivelle et d'un maneton de centre A . L'angle de rotation du vilebrequin est $\varphi = (\overrightarrow{\mathbf{e}_x}, \overrightarrow{\mathbf{OA}})$. La longueur de la manivelle est $|\overrightarrow{\mathbf{OA}}| = a$ fixé. Au niveau du maneton existe une liaison pivot d'axe Az entre entre le vilebrequin et la bielle, qui est liée par une autre liaison pivot, d'axe Bz , à un point inférieur B du piston. La longueur de la bielle est $|\overrightarrow{\mathbf{AB}}| = b$ fixé avec $b > a$. L'angle de rotation de celle-ci par rapport à l'axe Ox est $\psi = (\overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{e}_x})$. Le piston de masse m_p est enfin lié par une liaison pivot glissant d'axe Bx au cylindre (non représenté) contenant les gaz comburants, avec lesquels sa face supérieure est en contact.



1 Exprimez les deux relations de liaison qui existent entre les paramètres φ , ψ et $x_B = \overrightarrow{\mathbf{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}_x}$. Comment qualifier toutes les liaisons mises en jeu ? Que doit-on supposer à propos de ces liaisons pour pouvoir appliquer

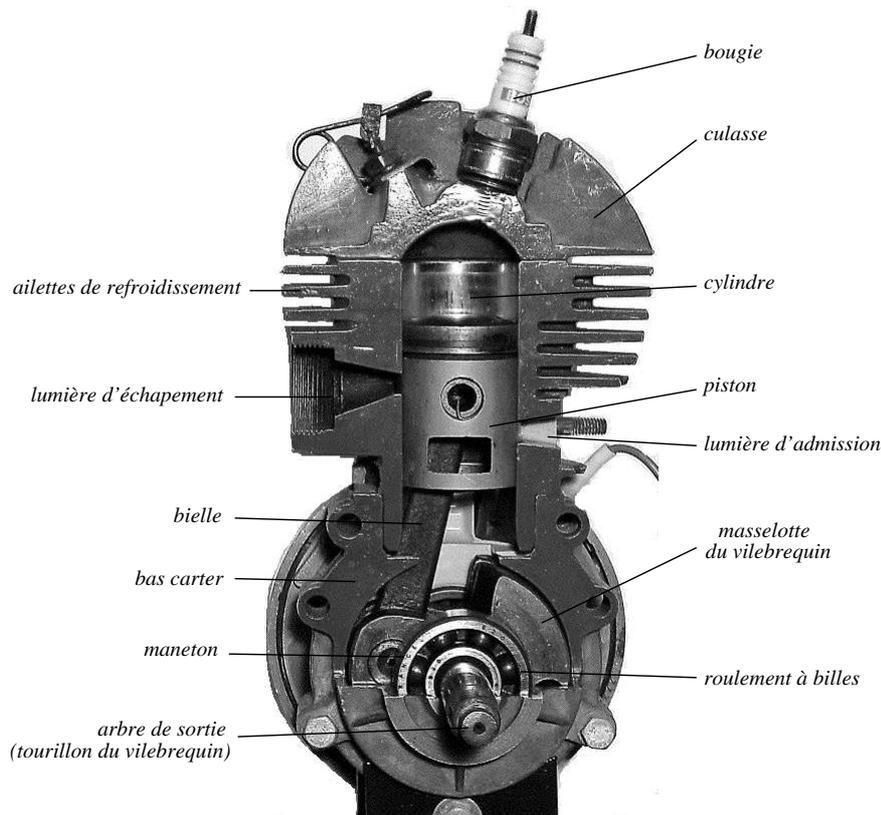


Fig. 4.1 – Éclaté d'un moteur monocylindre deux temps (de mobylette) réalisé par un élève de troisième année filière mécanique (option Mécanique et Ingénierie des Solides et des Structures) sous la direction de Pascal Fontaine dans le cadre du cours « Moteurs ». Notez que la manivelle, très courte, n'est pas visible sur cette photographie.

le théorème de d'Alembert ? Montrez que parmi les trois paramètres φ , ψ et x_B un seul choix de coordonnée généralisée q_1 est possible.

2.a Calculez l'énergie cinétique du système complet vilebrequin + bielle + piston. Pour simplifier on considèrera que la bielle est de masse négligeable par rapport aux autres pièces, on désignera par $\vec{\mathbf{I}}_v(O)$ le tenseur d'inertie du vilebrequin, par I_v la double contraction $\vec{\mathbf{e}}_z \cdot \vec{\mathbf{I}}_v(O) \cdot \vec{\mathbf{e}}_z$, et par I_p la quantité $m_p a^2$.

2.b Calculez la force d'inertie généralisée correspondante $S_1 = S_1(q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1)$.

3 Calculez les forces généralisées

3.a Q_1^{poids} associée au poids des pièces. Pour simplifier on supposera que le centre d'inertie G du vilebrequin est approximativement localisé en O .

3.b Q_1^{gaz} associée à la surpression p_g exercée par les gaz dans le cylindre sur le piston. On notera F le produit de p_g par la section horizontale du piston.

3.c Q_1^{ext} associée au couple extérieur $\Gamma \vec{\mathbf{e}}_z$ exercé par l'« environnement » (par exemple par les roues !) sur l'axe Oz du vilebrequin.

4 Déduisez du théorème de d'Alembert l'équation d'évolution de q_1 . Identifiez la nature de cette équation comme l'une des lois fondamentales de la dynamique newtonienne.

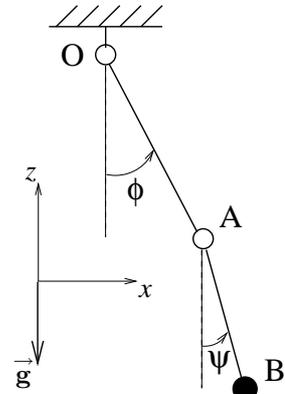
5.a Déterminez les positions d'équilibre du système en l'absence de surpression exercée par les gaz, c'est-à-dire $F = 0$, et de couple extérieur, c'est-à-dire $\Gamma = 0$. Identifiez en particulier le « *point mort haut* » et le « *point mort bas* ».

5.b Étudiez la stabilité de ces positions d'équilibre toujours dans le cas où F et Γ s'annulent.

6 En partant de la position d'équilibre stable, est-il possible de faire démarrer le moteur en agissant seulement sur la pression des gaz dans le cylindre, c'est-à-dire en passant plus ou moins brutalement de $F = 0$ à $F > 0$ à $\Gamma = 0$ constant ? Élaborez à partir de la réponse à cette question une justification de l'importance de l'utilisation d'un « démarreur ».

Exercice 4.2 Modélisation d'un pendule double

Un pendule double est constitué de deux masses ponctuelles m en A et M en B reliées par des tiges rigides, de longueur $|\overrightarrow{OA}| = a$ et $|\overrightarrow{AB}| = b$, à un point origine O. Ces tiges, que l'on considèrera sans masse, sont reliées par des liaisons pivots en O et A comme représenté sur le schéma ci-contre, qui précise aussi la position du système dans le champ de gravité \vec{g} de la Terre.



1 En revenant à la définition des coordonnées généralisées d'un système, montrez que l'on peut choisir ici les angles $\phi = \overrightarrow{(\vec{g}, \overrightarrow{OA})}$ et $\psi = \overrightarrow{(\vec{g}, \overrightarrow{AB})}$ comme coordonnées généralisées de ce système.

2 Posez la ou les hypothèse(s) permettant l'utilisation du formalisme lagrangien (ou du théorème de d'Alembert) pour d'obtenir les équations de la dynamique de ϕ et ψ .

3 Calculez l'énergie cinétique du système dans le référentiel du laboratoire. Déduisez-en, grâce à la formule de Lagrange, les forces d'inertie généralisées S_ϕ et S_ψ .

4 En utilisant par exemple une énergie potentielle de pesanteur, montrez que les forces généralisées travaillant contre ϕ et ψ du fait de l'action de la pesanteur terrestre sont $Q_\phi = -(m + M)ga \sin \phi$ et $Q_\psi = -Mgb \sin \psi$.

Commentaire : notez que la force généralisée agissant contre l'angle ϕ repérant la masse m fait intervenir le poids de M , et relisez à ce sujet la remarque suivant l'équation (4.35).

5 Calculez effectivement ces équations de la dynamique.

6 Question subsidiaire traitée dans les groupes A, B, C et D :

retrouvez ces équations de la dynamique grâce à la mécanique newtonienne... et commentez ce calcul...

7 Question subsidiaire traitée dans les groupes E, F et G :

retrouvez ces équations de la dynamique grâce au théorème de d'Alembert... et commentez ce calcul...

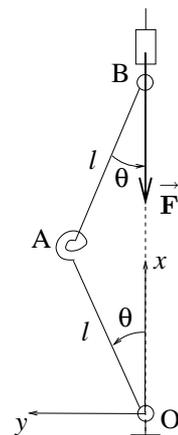
Vous aurez remarqué que les calculs formels nécessaires pour obtenir ces équations de la dynamique sont lourds... et que l'on ne sait pas résoudre analytiquement ces équations ! Tout ceci suggère l'usage d'un outil de calcul formel et numérique pour reprendre et prolonger cet exercice. Ceci sera fait dans le **TP Mathematica** dont le sujet figure en *annexe A*.

Φ Certains « grands mouvements » de ce système peuvent être surprenants. En effet le système d'équations différentielles ordinaires obtenu en 5 est d'ordre 1 en $(\phi, \dot{\phi}, \psi, \dot{\psi})$; les mathématiciens disent que ce système possède un *espace des phases* de dimension 4. Ces mêmes mathématiciens ont montré qu'un système dynamique possédant un espace des phases de dimension supérieure ou égale à 3 et gouverné par des équations *non linéaires*, ce qui est le cas ici à cause de l'intervention de fonctions trigonométriques, peut présenter le phénomène de **chaos temporel**. Ce phénomène, qui impose des limites sévères à la *prédictibilité* de ces systèmes, sera mis en évidence lors du TP Mathematica évoqué plus haut. Il faut bien distinguer ce « **chaos déterministe** » du chaos produit par des phénomènes aléatoires, voir par exemple Bergé *et al.* (1988) ou Angilella (2006)...

Φ

Exercice 4.3 Modélisation du flambement d'une poutre par un système à 1 d.d.l.

On modélise une poutre droite pouvant pivoter à ses deux extrémités, mise éventuellement en flambement par l'application d'une force verticale \vec{F} , par le système équivalent à un degré de liberté représenté ci-contre. On imagine que la poutre est constituée de deux parties égales, de longueur l , jointes par un ressort de torsion (cf. l'exemple 3 de la section 4.2.4) de raideur C s'opposant à la rotation relative de ces deux sous-parties; les couples correspondants sont nuls lorsque l'angle $\theta = 0$. Le point B peut, grâce à une liaison glissière, se déplacer librement sur un axe vertical qui correspond à la position de la poutre en l'absence de force verticale appliquée, $\vec{F} = \vec{0}$.



1 Comment qualifier les liaisons présentes dans ce système? Que doit-on supposer à propos de ces liaisons pour pouvoir appliquer le formalisme lagrangien? Montrez que l'angle θ peut être choisi comme la coordonnée généralisée du système.

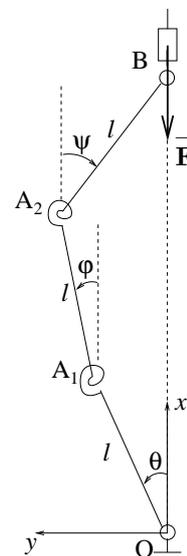
2 Après avoir fait un bilan détaillé des efforts donnés (une force et deux couples), calculez la force généralisée Q_θ correspondant à la coordonnée généralisée θ , ainsi que l'énergie potentielle (généralisée) E_p associée.

3 Montrez que, quand $F = |\vec{F}|$ croît à partir de zéro, la position d'équilibre $\theta = 0$, initialement **stable**, devient **instable** lorsque F dépasse une valeur critique F_c .

4 Que faudrait-il faire de plus pour proposer un modèle de la **dynamique** de ce système? Proposez un tel modèle, le plus simple et le plus raisonnable possible. Explicitez alors la dynamique du système lorsqu'on le perturbe à partir de la position $\theta = 0$, aux temps courts et aux temps longs (on se placera toujours dans l'hypothèse $F \simeq F_c$).

Exercice 4.4 Modélisation du flambement d'une poutre par un système à 2 d.d.l.

On modélise une poutre droite pouvant pivoter à ses deux extrémités par un système équivalent à deux degrés de liberté, en imaginant que la poutre est constituée de trois parties égales, de longueur l , jointes par deux ressorts de torsion de raideur C s'opposant à la rotation relative des sous-parties. Le point B peut, grâce à une liaison glissière, se déplacer librement sur un axe vertical qui correspond à la position de la poutre en l'absence de force verticale appliquée, $\vec{F} = \vec{0}$.



1 Montrez que l'on peut choisir les ordonnées y_1 et y_2 de A_1 et A_2 comme coordonnées généralisées de ce système. *Nota bene* : dans la configuration représentée $\theta > 0$, $\varphi > 0$, $\psi < 0$.

2 Après avoir rappelé les hypothèses de travail correspondantes, montrez que l'on peut introduire a priori une énergie potentielle E_p pour décrire les efforts donnés appliqués au système. Donnez l'expression de E_p comme fonction implicite de y_1 et y_2 .

3 Déduisez-en les forces généralisées Q_1 et Q_2 , ainsi que les équations générales définissant les positions d'équilibre possibles du système.

4 Afin de pouvoir poursuivre les calculs, on se place dans l'hypothèse des petits déplacements :

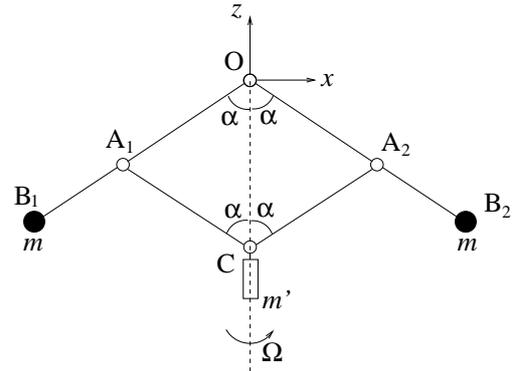
$$y_1 \ll l, \quad y_2 \ll l.$$

Donnez dans cette approximation les expressions de Q_1 et Q_2 . Apparaît-il, en plus de la position de « repos » $y_1 = y_2 = 0$, de nouvelles positions d'équilibre en petits déplacements? Montrez que cette approximation permet de prédire, en fonction des valeurs croissantes de $F = -\vec{F} \cdot \vec{e}_x$, la stabilité de la position de repos.

Exercice 4.5 Étude du fonctionnement d'un régulateur centrifuge à boules

On veut étudier dans cet exercice les positions d'équilibre, dans le référentiel tournant \mathcal{R} lié à l'axe vertical Oz , d'un régulateur centrifuge à boules constitué de 4 barres liées comme schématisé sur la figure ci-contre.

Les barres OB_1 et OB_2 , de longueur l , sont fixées par des liaisons pivot en O . Les barres A_1C et A_2C , de longueur a , sont fixées sur les barres précédentes à une distance fixe a de O par des liaisons pivot. En C elles sont aussi maintenues par des liaisons pivot. D'autre part C , grâce à une liaison glissière, peut se translater le long de l'axe Oz . Les masses du système sont essentiellement réparties en trois masses ponctuelles m, m' et m comme indiqué sur la figure.



1 Comment qualifier les liaisons présentes dans ce système? Que doit-on supposer à propos de ces liaisons pour pouvoir appliquer le théorème de d'Alembert?

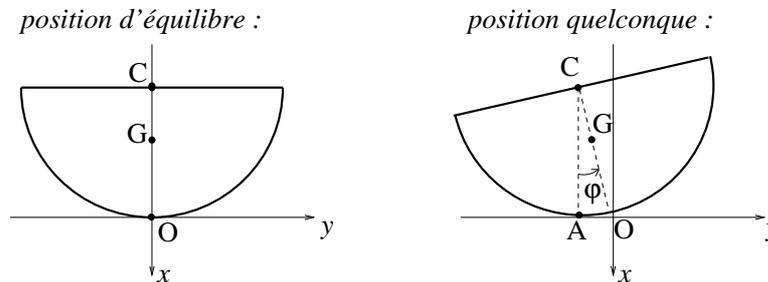
2 Dans le référentiel \mathcal{R} supposé tourner à la vitesse angulaire constante Ω dans le référentiel galiléen du laboratoire \mathcal{R}_0 , calculez la force généralisée Q_1 correspondant à la coordonnée généralisée α . Les forces d'inertie de Coriolis ont-elles une influence sur la dynamique du système? Écrivez le théorème de d'Alembert et déduisez-en les valeurs de α à l'équilibre.

3 Pour que ce système soit effectivement utilisable, il faut que sous l'effet des seules perturbations intrinsèques au système (bruit, vibrations, etc...) la position de repos $\alpha = 0$ soit spontanément abandonnée lorsque la vitesse de rotation atteint une valeur critique, bien que cette position soit *toujours* une position d'équilibre. Quel est le critère à appliquer pour donner la réponse du système à ces petites perturbations? Montrer que ce système est effectivement utilisable au sens précédent.

Indication : on pourra avoir intérêt à introduire une énergie potentielle (généralisée).

Exercice 4.6 Étude des petits mouvements d'un demi-disque sur une droite horizontale

On se propose d'utiliser le formalisme lagrangien pour étudier la dynamique d'un demi-disque S homogène pesant, mobile dans un plan vertical, roulant sans glisser sur une droite horizontale fixe Oy :



On désigne par a le rayon de S , C le centre du disque dont il est la moitié, G le centre d'inertie de S , A le point de contact entre S et la droite support, O la position d'équilibre de A . On suppose que le référentiel \mathcal{R}_0 dans lequel le repère orthonormé direct $Oxyz$ est fixe est galiléen.

1. Géométrie des masses et inertie

1.a Calculez la densité surfacique de masse ρ' de S en fonction de a et de sa masse totale m .

1.b Calculez la distance b entre le centre d'inertie G et le point C .

1.c Calculez le moment d'inertie I_{zz} de S par rapport à l'axe Gz .

2. Cinématique

2.a Montrez que l'on peut paramétrer a priori toute position de S par l'angle de rotation $\varphi = \widehat{(\vec{CA}, \vec{CG})}$ ainsi que par les coordonnées (x_G, y_G) de G . Donnez l'expression du vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}_0}$.

2.b Montrez que la condition de liaison de roulement sans glissement en A permet d'éliminer, lors d'un mouvement quelconque de S , x_G et y_G en fonction de φ , qui devient donc la coordonnée généralisée de S . Compte tenu de cette simplification, comment peut-on finalement qualifier la liaison de roulement sans glissement ?

3. Énergie cinétique

Donnez l'expression de l'énergie cinétique de S lors d'un mouvement quelconque.

4. Énergie potentielle de pesanteur

Donnez l'expression de l'énergie potentielle de S due à l'action de la pesanteur sur S .

5. Application du formalisme lagrangien

5.a Quelle hypothèse précise vous reste-t'il à poser pour pouvoir utiliser le formalisme lagrangien pour étudier la dynamique de S ?

5.b Étudiez a priori avec le minimum de calculs la *stabilité* de la position d'équilibre de S .

5.c Écrivez l'équation de Lagrange régissant la dynamique de S .

5.d En procédant à une linéarisation de cette équation recherchez tous les petits mouvements autour de la position d'équilibre de S de la forme

$$\varphi(t) = A \exp(\sigma t) .$$

Interprétez physiquement vos résultats.

1.c Explicitez ces relations de liaison à l'aide des hypothèses d'indéformabilité de S_0, S, S_1, S_2 .

1.d Au vu des résultats de la question précédente, comment peut-on finalement qualifier les liaisons de roulement sans glissement du système? Montrez que ce système est à un seul degré de liberté, et que l'on peut utiliser θ_1 comme seule coordonnée généralisée.

1.e En vous basant sur les résultats de la question précédente et sur le fait que S_1 est désigné comme arbre *moteur*, S_2 comme arbre *récepteur*, justifiez le terme de *réducteur* pour qualifier ce dispositif.

2. Hypothèse(s) permettant d'appliquer le théorème de d'Alembert à ce système :

Quelle(s) hypothèse(s) doit-on faire pour pouvoir écrire le théorème de d'Alembert sous la forme « $S_1 = Q_1$ » afin d'obtenir l'équation de la dynamique de θ_1 ?

3. Inertie

3.a. Question préliminaire calculez le moment d'inertie d'un disque homogène de densité ρ , de rayon R et d'épaisseur H par rapport à son axe de symétrie.

3.b On suppose pour simplifier que l'inertie de S_1 est équivalente à celle d'un disque homogène de densité ρ , d'axe Ox , de rayon a et d'épaisseur h . Déduisez-en la contribution de S_1 à l'énergie cinétique E_c du système.

3.c De même on suppose que l'inertie de S est équivalente à celle d'un disque homogène de densité ρ , d'axe Ax , de rayon b et d'épaisseur h . Déduisez-en la contribution de S à l'énergie cinétique E_c du système.

3.d En négligeant l'inertie de S_2 , calculez l'énergie cinétique totale du système réducteur complet. Vous introduirez un moment d'inertie effectif I en mettant cette énergie cinétique sous une forme permettant une application directe de la formule donnant la *force d'inertie généralisée* correspondante « S_1 » (le membre de gauche de l'équation de d'Alembert), formule que vous rappellerez et appliquerez.

4. Efforts donnés

4.a Une première source d'efforts extérieurs est l'action de la gravité terrestre dirigée suivant le vecteur $-\vec{e}_{y_0}$. En utilisant la même modélisation de la distribution des masses du système qu'au **3**, et en négligeant la masse de S_2 , calculez la force généralisée correspondante Q_1^{poids} travaillant contre la coordonnée θ_1 .

4.b Une deuxième source est constituée par un couple moteur $\Gamma_1 \vec{e}_x$ appliqué à S_1 au niveau de l'axe Ox et un couple résistant $-\Gamma_2 \vec{e}_x$ appliqué à S_2 au niveau de ce même axe. Calculez la force généralisée correspondante Q_1^c .

5. Étude sommaire de la dynamique du système

5.a Déduire de ce qui précède l'équation de la dynamique de θ_1 .

5.b Montrez qu'en régime permanent ce système agit comme un *multiplicateur de couple*.

Problème 4.2 Étude des mouvements d'un satellite éventuellement structuré

[examen 2003 – 2004, mis au point en coopération avec Jean-Régis Angilella]

Nous vous proposons d'étudier, dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, le mouvement d'un satellite en orbite autour de la Terre. Dans la partie III, ce satellite sera « structuré », comme l'est par exemple la station spatiale internationale²¹...



²¹La photographie présentée provient du site web de la NASA <http://spaceflight.nasa.gov>.

Nous vous rappelons que la force de gravitation exercée par la Terre sur une masse ponctuelle m située en M est

$$\vec{\mathbf{F}}(M) = -\vec{\nabla}_M U(M) \quad \text{avec} \quad U(M) = -\frac{km}{|\vec{\mathbf{OM}}|}, \quad (4.81)$$

O étant le centre de la Terre, k le produit de la constante de gravitation par la masse de la Terre.

I. Préliminaire : énergie potentielle généralisée de pesanteur

On considère un système constitué de masses ponctuelles M_j , j variant entre 1 et N , éventuellement liées, décrit par des coordonnées généralisées q_i , i variant entre 1 et n . Les liaisons impliquées sont indépendantes du temps.

I.1 Rappelez ce que signifie cette hypothèse en terme des vecteurs $\vec{\mathbf{OM}}_j$.

I.2 Calculez les forces généralisées Q_i , travaillant contre les coordonnées q_i , dues aux efforts de gravitation exercés par la Terre sur ces masses. Vous donnerez une expression scalaire des Q_i faisant intervenir la fonction U et les coordonnées x_j^α ($\alpha = 1, 2, 3$) de M_j dans un repère cartésien centré en O .

I.3 Montrez que l'énergie potentielle généralisée E_p dont dérivent ces forces généralisées est

$$E_p(q_1, \dots, q_n) = \sum_{j=1}^N U(M_j(q_1, \dots, q_n)). \quad (4.82)$$

II. Mouvements d'un satellite supposé ponctuel

Dans cette partie on assimile le satellite à une masse ponctuelle m située au point M . Le vecteur $\vec{\mathbf{OM}}$ est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) qui peuvent être considérées comme les coordonnées généralisées du système, les axes du repère étant toujours liés au référentiel géocentrique. Nous vous rappelons que les variations de $\vec{\mathbf{OM}}(r, \theta, \phi)$ sont données par

$$d\vec{\mathbf{OM}} = \vec{\mathbf{e}}_r dr + r \vec{\mathbf{e}}_\theta d\theta + r \sin \theta \vec{\mathbf{e}}_\phi d\phi, \quad (4.83)$$

$\{\vec{\mathbf{e}}_r, \vec{\mathbf{e}}_\theta, \vec{\mathbf{e}}_\phi\}$ désignant la base locale des coordonnées sphériques.

II.1 Calculez l'énergie cinétique du satellite dans son mouvement.

II.2 Calculez l'énergie potentielle du satellite dans son mouvement moteurs éteints.

II.3.a Montrez grâce à l'une des équations de Lagrange du système que la quantité

$$p_\phi = \partial E_c / \partial \dot{\phi},$$

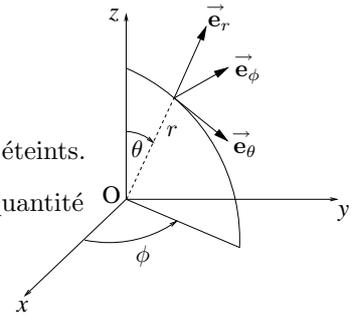
que vous calculerez, est une constante du mouvement.

II.3.b Par un choix judicieux des axes de référence du repère géocentrique, qui étaient jusqu'à maintenant non précisés, on peut supposer qu'initialement ϕ et $\dot{\phi}$ sont nuls. Montrez qu'alors le mouvement a lieu dans le plan $\phi = 0$.

II.4.a Explicitez l'équation de Lagrange permettant de prédire l'évolution de l'angle θ , vu maintenant comme un angle polaire repérant le satellite dans le plan de sa trajectoire. Montrez que cette équation implique l'existence d'une deuxième quantité conservée p_θ .

II.4.b Déduisez-en la *seconde loi de Kepler* : l'aire balayée par le vecteur $\vec{\mathbf{OM}}$ dans le mouvement croît linéairement avec le temps.

II.5.a Explicitez l'équation de Lagrange permettant de prédire l'évolution du rayon r .



II.5.b Montrez qu'une famille de solutions correspond à des trajectoires circulaires, et vérifiez alors la *troisième loi de Kepler*, stipulant que le rapport T^2/r^3 où T est la période de révolution du satellite, est une constante « universelle » c'est-à-dire indépendante du rayon r et de la masse m du satellite.

III. Mouvements plans d'un satellite structuré

Dans cette partie on assimile le satellite (ou la station orbitale!...) à une tige rigide AB de longueur $2a$ et de masse négligeable, aux extrémités de laquelle sont placées des masses supposées ponctuelles de valeur $m/2$ chacune. Le centre d'inertie du satellite, noté C, est ainsi au milieu du segment AB. On suppose que le mouvement de C a lieu dans un plan Oxz , les axes Ox et Oz étant fixes et orthogonaux dans le référentiel géocentrique. La position de C est donc repérée par des coordonnées polaires (r, θ) dans xOz avec $r = |\overrightarrow{OC}|$, $\theta = \widehat{(\vec{e}_z, \overrightarrow{OC})}$ pour garder des notations cohérentes avec celles de la partie II. On suppose aussi que la tige AB reste dans le plan Oxz , et on repère son orientation dans ce plan par l'angle $\psi = \widehat{(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CA})}$.

III.1 Faites un dessin explicitant le paramétrage du système par les coordonnées (r, θ, ψ) , et montrez mathématiquement que ce triplet définit bien les coordonnées généralisées du système. Il vous est suggéré d'utiliser pour cela la base locale $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta\}$ des coordonnées polaires liée à C.

III.2 Caractériser le mouvement du satellite et donnez son champ de vitesse.

III.3 Calculez par la méthode de votre choix l'énergie cinétique du satellite dans son mouvement.

III.4.a Calculez l'énergie potentielle du satellite dans son mouvement moteurs éteints.

III.4.b En remarquant que $a \ll r$ et en utilisant le développement limité valable quand X tend vers 0,

$$(1 + X)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}X + \frac{3}{8}X^2 + O(X^3), \quad (4.84)$$

mettez l'énergie potentielle sous la forme

$$E_p(r, \theta, \psi) = \frac{\alpha}{r} \left[1 + \beta \frac{a^2}{r^2} + \gamma \frac{a^2}{r^2} \cos^2 \psi + O\left(\frac{a^3}{r^3}\right) \right], \quad (4.85)$$

en précisant les valeurs des constantes α , β et γ .

III.5 Dans le cadre de l'approximation précédente, explicitez les équations d'Euler-Lagrange et déduisez-en les équations du mouvement.

Compléments :

Les équations obtenues pour ce satellite montrent que son orientation par rapport à la terre, i.e. l'angle ψ , peut varier au cours du temps, de façon plus ou moins régulière. Dans le cas d'une orbite circulaire on montre facilement que la position $\psi = 0$ est une position d'équilibre stable, dite position « radiale ». Pour des orbites plus allongées la stabilité des positions d'équilibre est plus délicate à établir. On montre aussi que $\psi(t)$ peut parfois évoluer de façon indésirable, voire devenir chaotique, pour certains jeux de paramètres. Les techniques utilisées pour prédire ces changements de comportement remontent à Henri Poincaré, et constituent une partie importante de la théorie des « systèmes dynamiques » (voir par exemple Angilella 2006).

Chapitre 5

Formalisme hamiltonien

Nous terminons ce cours en établissant à partir du formalisme lagrangien et de la transformation de Legendre le **formalisme hamiltonien**, formalisme d'importance considérable en histoire des sciences puisqu'il a par exemple permis, au prix de certaines généralisations - non triviales ! - l'écriture des équations de base de la mécanique quantique. Sans aller jusque là, nous montrerons que ce formalisme est aussi utile en mécanique classique, où il permet de montrer très simplement l'existence de lois de conservation. Dans tout ce chapitre nous considérons des systèmes satisfaisant aux hypothèses H1, H2 et H3 du chapitre 4, systèmes dont les équations de la dynamique sont donc données par (4.62).

5.1 Établissement des équations de Hamilton

5.1.1 Transformation de Legendre - Hamiltonien - Moments conjugués

Nous avons vu que les variables naturelles du formalisme lagrangien sont les coordonnées généralisées q_1, \dots, q_n et leurs dérivées temporelles $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$. En effet les équations de la dynamique correspondantes (4.62) sont des équations différentielles ordinaires d'ordre 2, que l'on peut en général mettre sous la forme

$$\ddot{q}_i = f_i(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t).$$

Cette forme est *non canonique* et peu pratique pour une résolution numérique par exemple, la plupart des méthodes numériques étant plutôt développées pour des systèmes différentiels ordinaires d'ordre 1, de la forme

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, \dots, x_m, t).$$

Une façon élégante et féconde à plus d'un titre (pas seulement celui de la résolution numérique!) d'opérer la mise sous forme *canonique* des équations de Lagrange consiste à *éliminer les variables* $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ par une **transformation de Legendre**. Nous introduisons donc la *transformée de Legendre* du lagrangien, appelée aussi **hamiltonien** du système,

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = \sup_{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n} \left[\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \right]. \quad (5.1)$$

La condition de stationnarité de la fonction entre crochets par rapport à des variations des \dot{q}_i indique que les nouvelles variables p_i , appelées **moments conjugués** des q_i , sont définies par

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \quad (5.2)$$

avec nos hypothèses de travail, cf l'équation (4.61). Plus précisément, à partir des équations (4.44), (4.45) et (4.46), on établit que

$$p_i = \sum_{k=1}^n M_{ik}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_k + N_i(q_1, \dots, q_n, t). \quad (5.3)$$

En général, ces relations peuvent s'inverser, c'est-à-dire que les p_i sont des fonctions bijectives des \dot{q}_i , les variables q_i et t étant vues comme des paramètres. En d'autres termes on peut considérer les \dot{q}_i comme des fonctions des q_i , p_i et t :

$$\dot{q}_i = g_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t). \quad (5.4)$$

En sous-entendant cette relation fonctionnelle, on peut « oublier » le sup dans (5.1), et écrire, compte tenu de (5.3) et (4.61), que

$$\begin{aligned} H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n M_{ik} \dot{q}_k \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n N_i \dot{q}_i - (K_2 + K_1 + K_0 - E_p) \\ H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) &= K_2 - K_0 + E_p. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Donnons maintenant deux exemples simples de calculs de moments conjugués, afin de montrer notamment que ceux-ci ont souvent une signification physique directe.

Si la coordonnée généralisée q_i correspond à une coordonnée de position d'une particule ponctuelle de masse m , la contribution correspondante à l'énergie cinétique est

$$\frac{1}{2} m \dot{q}_i^2.$$

Dans ce cas il vient, d'après (5.2),

$$p_i = m \dot{q}_i$$

qui correspond à une composante de la résultante cinétique, d'où la notation avec la lettre p .

Par contre si la coordonnée généralisée q_i correspond à une coordonnée angulaire d'un élément solide, mesurant la rotation autour d'un axe principal d'inertie de cet élément, la contribution correspondante à l'énergie cinétique est

$$\frac{1}{2} I \dot{q}_i^2,$$

où I est le moment d'inertie de l'élément par rapport à l'axe principal de rotation. Dans ce cas il vient

$$p_i = I \dot{q}_i$$

qui correspond à une composante du moment cinétique, d'où le nom donné à p_i .

5.1.2 Équations de Hamilton

Par différenciation de (5.1) il vient

$$dH = \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

soit, compte tenu de (5.2),

$$dH = \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Ceci montre que

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (5.6)$$

En remarquant de plus que les équations de Lagrange (4.62) prennent la forme

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (5.7)$$

on aboutit aux équations de la dynamique des q_i et p_i , dites *équations de Hamilton* :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (5.8)$$

Elles constituent un système de $2n$ équations différentielles *canoniques* d'ordre 1, que l'on saura résoudre si l'on se donne des conditions initiales sur q_1, \dots, q_n et p_1, \dots, p_n .

5.2 Conservation du hamiltonien

Dans le cas d'un système où le *hamiltonien est indépendant du temps*, l'injection des équations de Hamilton dans

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)$$

montre qu'au cours du mouvement :

$$H = \text{constante} \quad (5.9)$$

Lors du mouvement d'un système à hamiltonien indépendant du temps, le hamiltonien de ce système est conservé.

C'est là la propriété fondamentale du hamiltonien, qui a inspiré de nombreux développements dont celui de la mécanique quantique.

Dans notre cadre restreint de mécanique classique, on obtient d'après (5.5) que¹

$$K_2 - K_0 + E_p = \text{constante} \quad (5.10)$$

On doit voir cette loi de conservation comme une « loi de conservation de l'énergie généralisée » ; en effet dans le cas de *liaisons indépendantes du temps* où $K_0 = 0$ et $E_c = K_2$, la conservation du hamiltonien exprime tout simplement la *conservation de l'énergie totale* :

$$H = E_c + E_p = \text{constante} \quad (5.11)$$

5.3 Loi de conservation associée à une coordonnée cyclique

Une coordonnée généralisée q_i d'un système est dite *cyclique* (ou *ignorable*) si elle n'apparaît ni dans le lagrangien ni dans le hamiltonien du système, ces deux conditions étant équivalentes d'après (5.6). Grâce à la deuxième équation de Hamilton (5.8), on obtient alors

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{constante} \quad (5.12)$$

Le moment conjugué associé à une coordonnée cyclique est conservé.

Notons que cette loi de conservation peut être obtenue en partant plutôt des équations de Lagrange écrites sous la forme (5.7). Cette facilité avec laquelle les formalismes lagrangien et hamiltonien permettent d'aboutir à des lois de conservation est aussi l'une des clés de leur succès².

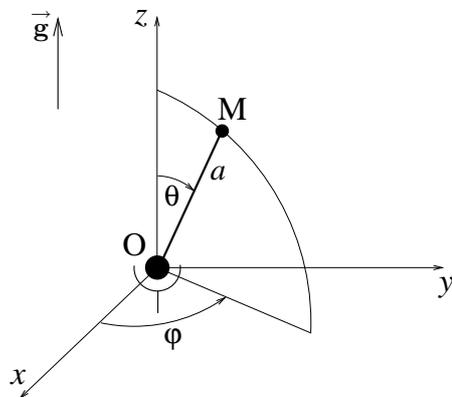
¹Le résultat (5.10) est souvent désigné comme le « théorème de Painlevé ».

²De manière très générale le puissant *théorème de Noether* (voir par exemple Germain 1986 ou Scheck 1990) montre qu'à toute propriété de symétrie du lagrangien on peut associer une loi de conservation.

5.4 Exercice

Exercice 5.1 Étude d'un pendule à deux degrés de liberté

Une masse ponctuelle m située en un point M est liée par une tige rigide, de longueur a et de masse négligeable, à une articulation située en O . On utilise pour repérer l'orientation de la tige les coordonnées sphériques angulaires θ et φ de M , le vecteur \vec{e}_z pointant dans la direction du champ de gravité terrestre \vec{g} , comme cela est représenté sur la figure ci-contre :



1.a Explicitez le paramétrage du point matériel M dans le repère fixe cartésien $Oxyz$. Quelles sont les coordonnées généralisées de ce système ?

1.b Dessinez sur un schéma les vecteurs de la base sphérique \vec{e}_r , \vec{e}_θ et \vec{e}_φ . Exprimez la vitesse $\vec{v}(M)$ dans cette base sphérique. Déduisez-en l'énergie cinétique de ce système.

2 Quelle hypothèse doit-on poser *précisément*, à propos de la liaison articulation, pour pouvoir utiliser le formalisme lagrangien ?

3 Calculez l'énergie potentielle de ce système. Précisez les positions d'équilibre de ce système et leurs propriétés de stabilité.

4 Calculez le lagrangien de ce système.

5 Calculez les moments conjugués p_θ et p_φ , puis le hamiltonien de ce système.

6 Explicitez sans faire aucun calcul supplémentaire deux quantités conservées lors de n'importe quel mouvement.

7.a Écrivez les équations de la dynamique de ce système dans le formalisme lagrangien.

7.b Écrivez les équations de la dynamique de ce système dans le formalisme hamiltonien.

7.c Existe-t'il un « problème mathématique » pour des mouvements lors desquels, à un instant quelconque, $\theta = 0$? Que pouvez-vous dire de tels mouvements ?

7.d Proposez une stratégie la plus efficace possible de simulation numérique de ce système ; on ne vous demande aucun détail d'analyse numérique, mais plutôt quelles équations il faudrait résoudre numériquement.

8 Montrez que si la masse est lancée avec une vitesse angulaire verticale, $\dot{\varphi}(t=0) \neq 0$, à un angle $\theta(t=0)$ non nul, alors elle ne passera jamais lors de son mouvement au point $\theta = 0$. Existe-t'il a priori d'autres points « interdits » lors de tels mouvements ?

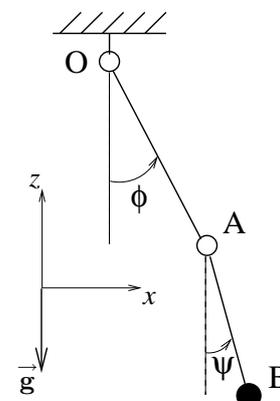
9 Calculez lors d'un mouvement quelconque la réaction de liaison exercée par la liaison rotule sur la tige en O .

Annexe A

TP Mathematica : étude d'un pendule double

On désire revenir ici à l'aide de Mathematica sur l'exercice 4.2 destiné à l'étude d'un pendule double constitué de deux masses ponctuelles m en A et M en B reliées par des tiges rigides, sans masse, de longueur $|\overrightarrow{OA}| = a$ et $|\overrightarrow{AB}| = b$, à un point origine O. Ces tiges sont reliées par des liaisons pivots parfaites en O et A comme représenté sur le schéma ci-contre, qui précise aussi la position du système dans le champ de gravité \vec{g} de la Terre.

Le but de ce TP est double. D'une part, grâce aux possibilités de *calcul formel* de Mathematica, on veut retrouver les équations de la dynamique de ce système calculées « à la main » en petite classe. D'autre part, grâce aux possibilités de *calcul numérique* de Mathematica, on veut résoudre ces équations et mettre en évidence le caractère chaotique de ce système.



Afin de **préparer ce TP** vous êtes prié de lire ce sujet chez vous et de réactiver à l'avance les neurones de votre cerveau qui ont travaillé lors du TP de rentrée Mathematica du cycle outil logiciel, par exemple en reprenant le 'Tutorial' de Mathematica ou mieux ce fameux TP de rentrée¹.

Ce TP fera l'objet d'une **évaluation en séance**, cf. les **étapes et les nombres de points indiqués en caractères gras** ci-dessous.

§

Première partie du TP : calcul formel :

1.1 Créez un **notebook** Mathematica calculant formellement les équations de Lagrange de la dynamique du pendule double,

$$S_\phi = Q_\phi, \quad (\text{A.1})$$

$$S_\psi = Q_\psi. \quad (\text{A.2})$$

Pour cela vous partirez du paramétrage du système par les angles $\phi = \widehat{(\vec{g}, \overrightarrow{OA})}$ et $\psi = \widehat{(\vec{g}, \overrightarrow{AB})}$, ferez calculer à l'ordinateur l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p , etc...

¹Au cas où vous auriez égaré le sujet, il se trouve sur

1.2 Comparez ces résultats à ceux trouvés en petite classe « à la main », par exemple pour S_ϕ noté `Sphi[t]` dans le programme Mathematica :

```
Sphimain[t_]= (m+M) a^2 phi''[t] + ...      (formule obtenue en petite classe)
testSphi= Simplify[Sphi[t]-Sphimain[t]]
If[testSphi==0,Print["Sphi OK !"]]
```

Lorsque votre notebook affiche

```
Sphi OK !
Qphi OK !
Spsi OK !
Qpsi OK !
```

montrez le à l'encadrant de TP, et si tout cela est correct **vous aurez gagné 5 points**.

1.3 Sauvegardez les équations de la dynamique

```
eqphi= Sphi[t] - Qphi[t];    eqpsi= Spsi[t] - Qpsi[t];
```

dans deux fichiers avec les commandes

```
Put[eqphi,"eqphi"];    Put[eqpsi,"eqpsi"];
```

§

Deuxième partie du TP : calcul numérique :

2.1.a Dans un nouveau notebook (et lors d'une nouvelle session Mathematica), lisez les équations de la dynamique précédente

```
eqphi= Get["eqphi"];    eqpsi= Get["eqpsi"];
```

et, grâce à la commande `NDSolve`, effectuez une simulation numérique de la dynamique de ce pendule pour un lâcher sans vitesse initiale, i.e. à partir des conditions

$$\phi(t=0) = \phi_0, \quad \dot{\phi}(t=0) = 0, \quad \psi(t=0) = \psi_0, \quad \dot{\psi}(t=0) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Votre encadrant de TP vous aura au préalable spécifié les valeurs numériques des paramètres m , M , a , b , ϕ_0 et ψ_0 , ainsi que la durée totale T durant laquelle vous devrez simuler.

2.1.b Tracez les angles ϕ et ψ de la solution ainsi obtenue en fonction du temps. Vous penserez à augmenter le nombre de points utilisés par la commande `Plot` grâce à l'option `PlotPoints`.

2.1.c Faites une *étude de convergence* vis-à-vis de la valeur des options principales `MaxSteps`, `AccuracyGoal` et `PrecisionGoal` de `NDSolve`.

Lorsque vous êtes sûr d'avoir convergé, montrez à votre encadrant de TP vos graphes et les valeurs finales $\phi(T)$ et $\psi(T)$. Si ces valeurs sont correctes **vous aurez gagné 7 points**.

2.2 Afin de concrétiser l'« expérience numérique » que vous venez d'effectuer, créez un film montrant toute cette expérience, en vous inspirant du programme Mathematica simulant un pendule simple donné ci-contre. Notez bien qu'une animation se fait à partir de graphiques et qu'il est inutile d'animer des graphiques erronés. Ainsi, commencez par vous assurer que l'état initial de votre pendule double est bien représenté par votre premier graphique, à l'aide d'une commande telle que

```
Show[li[[1]]]
```

avant de lancer la commande `ListAnimate[li]`.

Lorsque ce film est prêt, montrez le à votre encadrant de TP, et **vous gagnerez alors 3 points**.

2.3 Créez un programme mettant en évidence le phénomène de *sensibilité aux conditions initiales* ou « *chaos* »². Pour cela vous simulerez une deuxième expérience numérique dans laquelle on part des mêmes conditions initiales sauf ψ_0 qui est augmenté de 0,01 degré, et vous montrerez que $\phi(T)$ et $\psi(T)$ sont radicalement affectés par ce changement minime.

Lorsque vous aurez établi cette *sensibilité aux conditions initiales*, montrez votre programme à votre encadrant de TP, et s'il est correct vous gagnerez alors **3 points**.

Pour gagner **3 points supplémentaires**, créez un film montrant les deux systèmes (« initial » et « perturbé ») évoluer au court du temps l'un à côté de l'autre, afin que l'on puisse constater de visu qu'ils présentent des comportements divergents.

§

Programme-indications : simulation d'un pendule simple avec film :

```
(***** Paramètres *)

(* Longueur de la tige *) a= 0.2;
(* Accélération de la pesanteur *) g= 9.81;
(* Valeur initiale de phi *) phi0= 3.1;
(* Durée de la simulation *) T= 8;

(***** Simulation *)

nsol= NDSolve[{ (* EDO *) phi''[t] == -g/a Sin[phi[t]],
  (* Conditions initiales *) phi[0] == phi0, phi'[0] == 0},
  (* Fonction inconnue *) phi[t],
  (* Variable *) {t,0,T},
  (* Options *) MaxSteps -> 36000,AccuracyGoal -> 10,PrecisionGoal -> 10];

(* Récupérer la solution *) phi[t_]= phi[t]/.nsol[[1]];

Print["Valeur finale phi[T]= ",phi[T]];

(* Tracer phi[t] *) gphi= Plot[phi[t],{t,0,T},PlotPoints->100 T,
Frame->True,FrameLabel->{"t","phi"}]

(***** Film *)

(* Pas de temps entre deux images *) dt= .015;

(* Liste des images *) li= Table[Graphics[{
  (* Cercle-cadre extérieur *) Circle[{0,0},1.1 a],
  (* t *) Text["t= "<>ToString[PaddedForm[t,{6,2}]],{0,a}],
  (* Point O *) Disk[{0,0},.05 a],
  (* Tige OA *) Line[{0,0},a {Sin[phi[t]],-Cos[phi[t]}]},
  (* Masse A *) Disk[a {Sin[phi[t]],-Cos[phi[t]}],a/14}],
  {t,0,T,dt}];

ListAnimate[li]
```

²Certains auteurs parlent de l'« *effet papillon* », car cet effet s'applique aussi à la météorologie : ainsi un papillon perturbant par son vol l'écoulement de l'air autour du palmier de la Pépinière changera le cours du temps qu'il fera deux semaines plus tard à Paris...

Annexe B

Règles de notation et d'annotation de vos copies

En tant qu'enseignant, dans l'optique d'une démarche « qualité », notre devoir est d'évaluer votre taux d'assimilation de ce cours. Pour cela vous subirez au moins un test, après lequel nous nous engageons à rendre vos copies disponibles. La liste qui suit a donc un but double. D'une part elle vous permettra de comprendre les annotations portées sur votre copie. D'autre part, et c'est encore plus important, car *mieux vaut prévenir que guérir*, elle vous montrera avant tout examen ou test quels sont les points auxquels vous devrez être attentifs en rédigeant votre copie. En effet chaque réponse à une question qui se voit attribuer l'un des défauts types mentionnés ci-dessous ne peut que récolter un nombre de points strictement inférieur à ceux prévus dans le barème... Allons y donc pour notre inventaire des abréviations utilisées c'est-à-dire des fautes possibles rencontrées :

DR = Défaut de rédaction

Quand la réponse à une question est constituée uniquement de symboles mathématiques sans phrase de rédaction, ou quand la rédaction est déficiente. Il s'agit là d'un point *crucial* car la caractéristique fondamentale d'une démarche scientifique est d'être une démarche raisonnée, or le *raisonnement* ne peut se traduire que par un *discours*, qui se doit d'être *convaincant*¹.

Exemple : « $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ donc $E_p = mgz$ » ; il n'y a aucun lien de cause à effet entre ces deux équations donc le « donc » est inadéquat.

EL = Erreur logique

Quand par exemple on utilise dans une démonstration le résultat à démontrer pour le démontrer !

HS = Hors sujet

INHD = Inhomogénéité dimensionnelle

Exemple : « l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv$ ».

INHT = Inhomogénéité tensorielle

Quand on ajoute un vecteur à un scalaire, un tenseur d'ordre 2 à un vecteur, etc... En général cela va de pair avec une **INHD**, mais pas toujours.

Exemple : « l'énergie potentielle de pesanteur est $E_p = mg\overrightarrow{OM}$ ».

¹Ceci relève de la « communication-expression » !

KK = Késako ?

Quand apparaît une quantité non définie ni dans l'énoncé ni par le rédacteur de la copie ; en effet *un scientifique doit définir précisément tous les symboles qu'il manipule*.

Exemple : l'énoncé définit un système S et un repère de travail $Gxyz$, où G est le centre d'inertie de S . Aucun autre point particulier n'est défini. Un élève répond à la question « quels sont les plans de symétrie de S » par « Oxy et Oxz ». Alors chaque O méritera un **KK**.

N = Notations

Quand on ne respecte pas les notations de l'énoncé ou du cours.

PDM = Pattes de mouches

Quand l'écriture est illisible.

SE = Syntax error

Exemple : « $I_{xx} = \int y^2 + z^2 d^3m$ » ; les parenthèses c'est pas pour les chiens.

T = Terminologie

Quand on ne respecte pas la terminologie consacrée, ou que l'on appelle un chat un chien.

Exemple : « Le plan OXZ est un axe de symétrie ».

Index des unités

Les numéros de page renvoient aux discussions concernant la définition physique des unités. Les unités hors système international (SI) sont indiquées en italique.

<i>Cheval-vapeur</i> (unité de puissance; abréviation ch)	41
<i>Horse-Power</i> (unité de puissance; abréviation hp)	41
Joule (unité d'énergie; abréviation J)	32
Kilogramme (unité de masse; abréviation kg)	23
<i>KiloWatt-Heure</i> (unité d'énergie; abréviation kWh)	41
Mètre (unité de distance; abréviation m)	12
Mètre par seconde (unité de vitesse; abréviation m/s)	13
Mètre par seconde carrée (unité d'accélération; abréviation m/s ²)	18
Newton (unité de force; abréviation N)	37
Radian par seconde (unité de vitesse angulaire; abréviation rad/s)	15
Seconde (unité de temps; abréviation s)	12
<i>Tour par minute</i> (unité de vitesse angulaire; abréviation tr/mn)	15
Watt (unité de puissance; abréviation W)	41

Rappelons pour terminer les préfixes désignant les multiples et sous-multiples d'unités :

déca	:	da	=	10
hecto	:	h	=	10 ²
kilo	:	k	=	10 ³
méga	:	M	=	10 ⁶
giga	:	G	=	10 ⁹
téra	:	T	=	10 ¹²
déci	:	d	=	10 ⁻¹
centi	:	c	=	10 ⁻²
milli	:	m	=	10 ⁻³
micro	:	μ	=	10 ⁻⁶
nano	:	n	=	10 ⁻⁹
pico	:	p	=	10 ⁻¹²
femto	:	f	=	10 ⁻¹⁵

Bibliographie

- ANGILELLA, J.-R. 2006 *Caractérisation de phénomènes dynamiques*. Cours du Master 2 recherche de mécanique-énergétique de Nancy.
- ANTOINE, X. 2006 *Mathématiques pour l'Ingénieur - S1*. Cours ENSEM 1A.
- ANTOINE, X. 2007 *Mathématiques pour l'Ingénieur - S3*. Cours ENSEM 2A.
- BERGÉ, P., POMEAU, Y. & VIDAL, C. 1988 *L'ordre dans le chaos*. Hermann.
- BRANCHER, J.-P. 1999 *Mécanique des fluides fondamentale*. Cours ENSEM 1A.
- FANCHON, J. L. 2004 *Guide des sciences et technologies industrielles*. Nathan-AFNOR.
- GERMAIN, P. 1986 *Mécanique*. Cours de l'École Polytechnique, Tome I. Ellipses.
- GUEDJ, D. 2000 *Le Mètre du Monde*. Seuil.
- JEDRZEJEWSKI, F. 2002 *Histoire universelle de la mesure*. Ellipses.
- MOFATT, H. K. 1994 *Fluid Dynamics - Part I : Microhydrodynamics*. Cours de l'École Polytechnique.
- MOREAU, J. J. 1971 *Mécanique classique*. Masson.
- PLAUT, E. 2006 *Modélisation d'instabilités : méthodes non linéaires*. Cours du Master 2 recherche de mécanique-énergétique de Nancy, téléchargeable sur www.ensem.inpl-nancy.fr/Emmanuel.Plaut/modinst.
- RAHOUADJ, R. 2002 *Dynamique des structures 2*. Cours ENSEM 2A.
- RAHOUADJ, R. 2006 *Mécanique des milieux continus*. Cours ENSEM 1A.
- SCHECK, F. 1990 *Mechanics : From Newton's Laws to Deterministic Chaos*. Springer-Verlag.
- SCHMITT, J.-F. 2002 *Dynamique des structures 1*. Cours ENSEM 2A.
- TRUESDELL, C. 1991 *A first course in rational continuum mechanics*. Academic Press.
- VINSARD, G. 2005 *Calcul des variations*. Cours ENSEM 1A, téléchargeable sur www.ensem.inpl-nancy.fr/Gerard.Vinsard/enseignement_2006/doc/poly-variations.pdf.

Ce document vous a plu, au moins dans sa forme?...

Sachez que je l'ai composé à l'aide du *traitement de texte scientifique professionnel* L^AT_EX...

...que vous pouvez vous aussi utiliser, car il est *portable* et *gratuit*.

Pour en savoir plus reportez vous par exemple à

www.ensem.inpl-nancy.fr/Emmanuel.Plaut/latex