Chapitre 5 : Théorie et Gestion de Portefeuille

I. Notions de rentabilité et de risque

II. Diversification de portefeuille

III. Optimisation de Markowitz

- III.1. Portefeuilles composés d'actifs risqués
- III.2. Prise en compte de l'actif sans risque

IV. Modèle de marché

V. Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

I. Notions de rentabilité et de risque

La relation rentabilité - risque

Moyennes et écarts-type des rentabilités des actions et emprunts d'Etat entre 1900 et 2000

	Actions		Emprunts d'Etat	
	Rentabilité Moyenne (%)	Ecart-type (%)	Rentabilité Moyenne (%)	Ecart-type (%)
France	6,3	23,1	0,1	14,4
Allemagne	8,8	32,3	0,3	15,9
Royaume Uni	7,6	20	2,3	14,5
Etats-Unis	8,7	20,2	2,1	10,0

Rentabilité d’un portefeuille

Exemple:

Vous constituez un portefeuille d’une valeur totale de 15000 € composé de 100 actions Michelin au prix unitaire de 60 € et 200 actions Carrefour au prix unitaire de 45 €. Un mois plus tard, le prix de l’action Michelin est de 66 € et celui de l’action Carrefour est de 42,75 €.

1) **Quelle est la valeur finale du portefeuille ?**
2) **Calculez la rentabilité du portefeuille de deux manières.**
3) **Quelles sont les nouvelles pondérations des titres si vous décidez de garder la même composition ?**

Issu de l’ouvrage « Finance d’entreprise », J. Berk et P. DeMarzo

Volatilité d'un portefeuille

UNIVERSITÉ LUMIÈRE UNIVERSITÉ

- **La volatilité d'un portefeuille P composé de deux titres**

  - **Cas 1: $\rho_{1,2} = 1$**

$$\sigma_P = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2$$

Relation risque-rentabilité

$$\sigma_P = \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{E_1 - E_2}\right] \times E_P + \frac{E_1\sigma_2 - E_2\sigma_1}{E_1 - E_2}$$

Volatilité d'un portefeuille

UNIVERSITÉ LUMIÈRE UNIVERSITÉ

- **La volatilité d'un portefeuille P composé de deux titres**

  - **Cas 2: $\rho_{1,2} = -1$**

$$\sigma_P^{\ 2} = (x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2)^2 \Rightarrow \sigma_P = \left| x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2 \right|$$

Si $x_1 > \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \Rightarrow \sigma_P = x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2$

Relation risque-rentabilité

$$\sigma_P = \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{E_1 - E_2}\right] \times E_P - \frac{E_2\sigma_1 + E_1\sigma_2}{E_1 - E_2}$$

Si $x_1 < \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \Rightarrow \sigma_P = -x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2$

Relation risque-rentabilité

$$\sigma_P = -\left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{E_1 - E_2}\right] \times E_P + \frac{E_2\sigma_1 + E_1\sigma_2}{E_1 - E_2}$$

Volatilité d’un portefeuille

- **La volatilité d’un portefeuille P composé de deux titres**

  - **Cas 3: -1 < $\rho_{1,2}$ < 1**

$$\sigma_p^2 = x_1^2\,\sigma_1^2 + x_2^2\,\sigma_2^2 + 2\times x_1 x_2 \times \mathrm{cov}_{1,2}$$

Relation risque-rentabilité

$$\sigma_P^2 = \left[\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\,\mathrm{cov}_{1,2}}{(E_1 - E_2)^2}\right]\times E_P^2 + 2\times\frac{E_1\times(\mathrm{cov}_{1,2} - \sigma_2^2) + E_2\times(\mathrm{cov}_{1,2} - \sigma_1^2)}{(E_1 - E_2)^2}\times E_P$$

$$+\frac{E_2^2\times\sigma_1^2 + E_1^2\times\sigma_2^2 - 2\times E_1 E_2\times\mathrm{cov}_{1,2}}{(E_1 - E_2)^2}$$

Volatilité d'un portefeuille

UNIVERSITÉ LUMIÈRE UNIVERSITÉ

- **La volatilité d'un portefeuille P composé de deux titres**

Exemple:

On considère un portefeuille composé de deux actions dont les caractéristiques sont les suivantes :

Action	Rentabilité espérée	Volatilité
X	26%	50%
Y	6%	25%

1) **Représenter l'ensemble des portefeuilles possibles pour des corrélations égales à 1 et -1.**
2) **Déterminer la rentabilité et la volatilité des portefeuilles composés respectivement de 100%; 80%; 60%; 40%; 20% et 0% du titre X (pour une corrélation nulle).**
3) **Représenter ces portefeuilles dans l'espace (espérance-volatilité).**

Volatilité d'un portefeuille

UNIVERSITÉ LUMIÈRE UNIVERSITÉ

- **La volatilité d'un portefeuille P composé de deux titres**

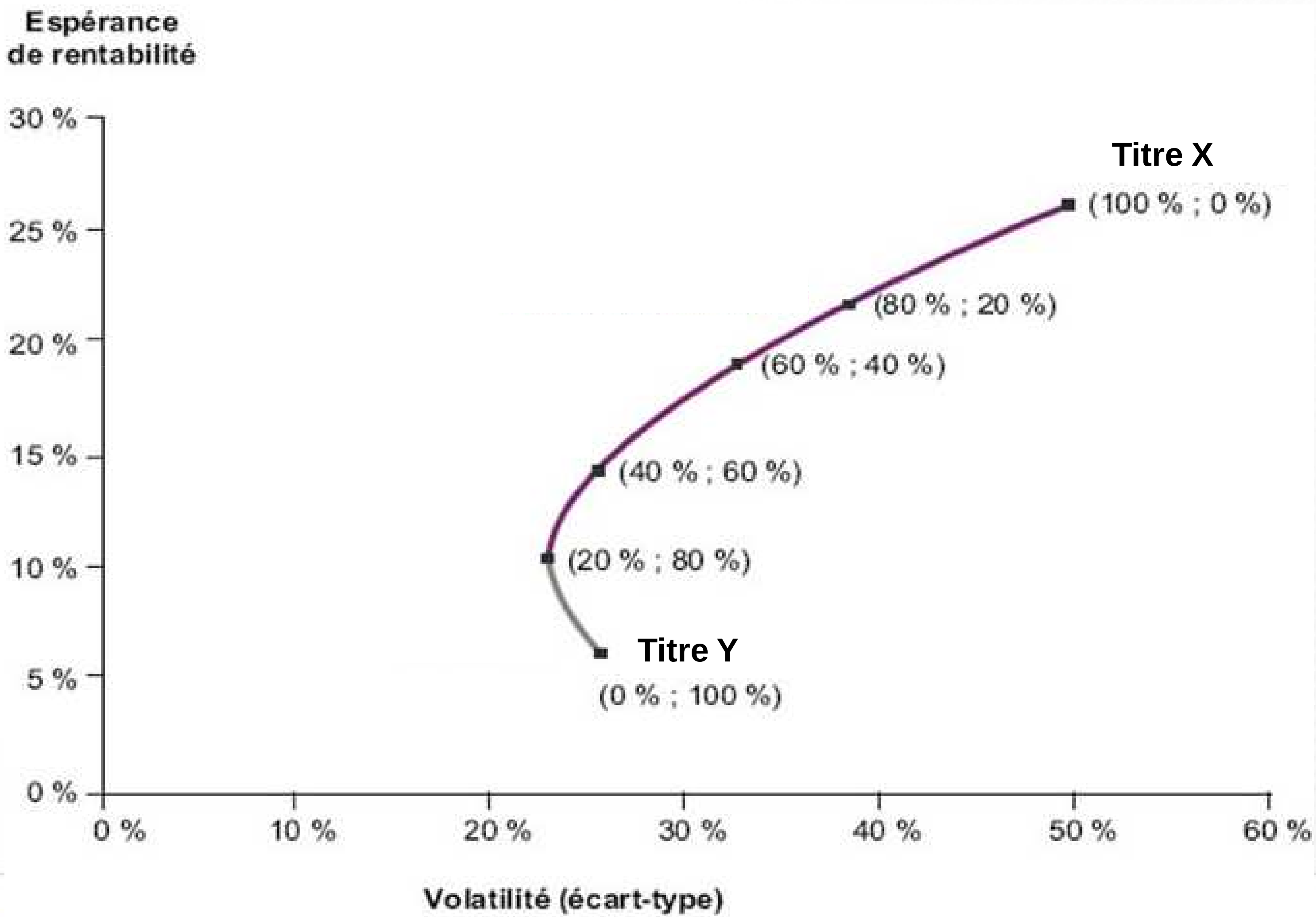
TABLEAU 11.4 — **Rentabilités espérées et volatilités de plusieurs portefeuilles obtenus en faisant varier les pondérations**

Pondérations		Rentabilité espérée (%)	Volatilité (%)
Titre X	Titre Y	$E[R]$	σ_R
100 %	0 %	26 %	50,0 %
80 %	20 %	22 %	40,3 %
60 %	40 %	18 %	31,6 %
40 %	60 %	14 %	25,0 %
20 %	80 %	10 %	22,4 %
0 %	100 %	6 %	25,0 %

Issu de l'ouvrage « Finance d'entreprise », J. Berk et P. DeMarzo

Volatilité d'un portefeuille

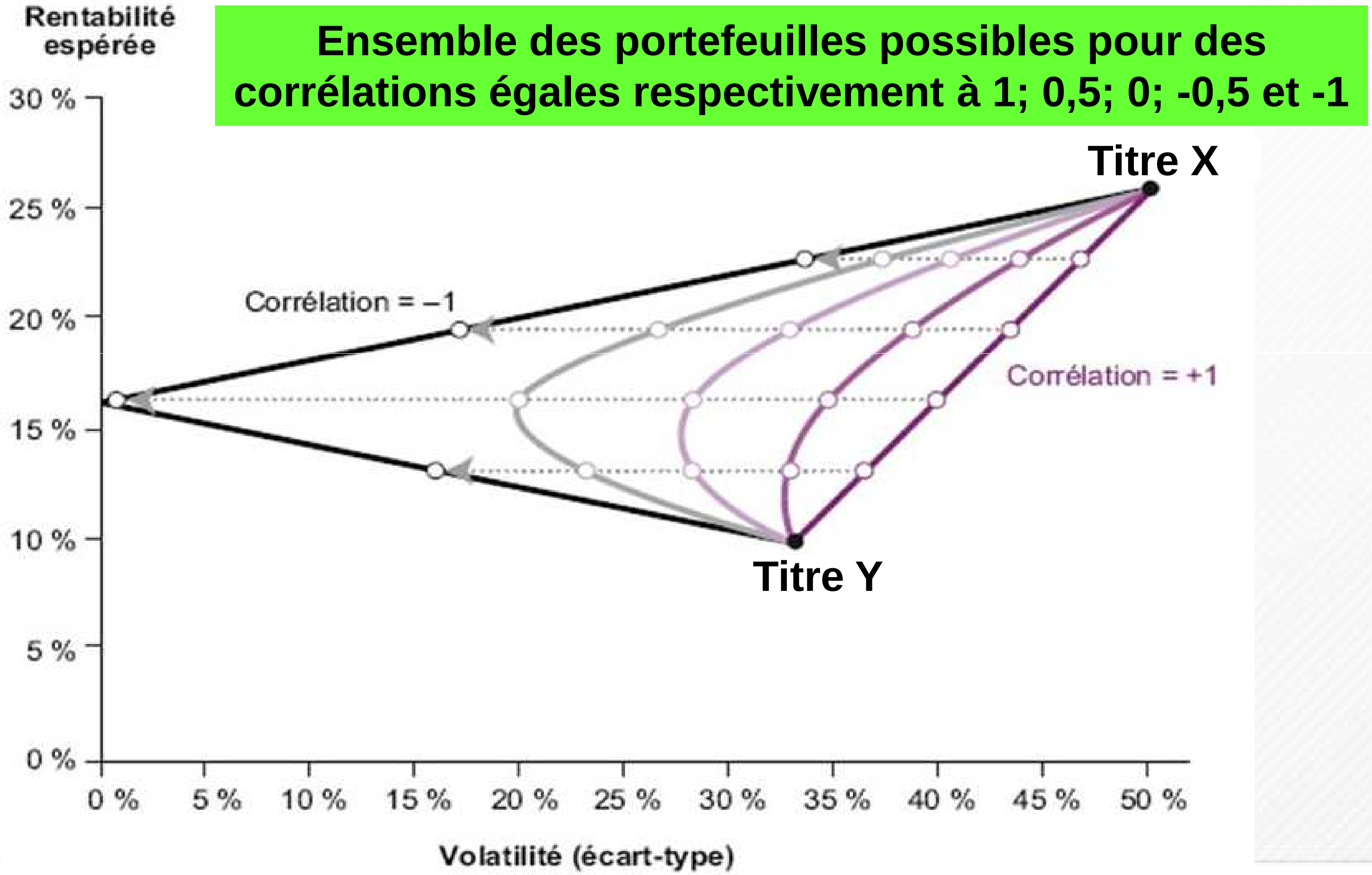
- **La volatilité d'un portefeuille P composé de deux titres**



Issu de l'ouvrage « Finance d'entreprise », J. Berk et P. DeMarzo

Volatilité d'un portefeuille

- **La volatilité d'un portefeuille P composé de deux titres**



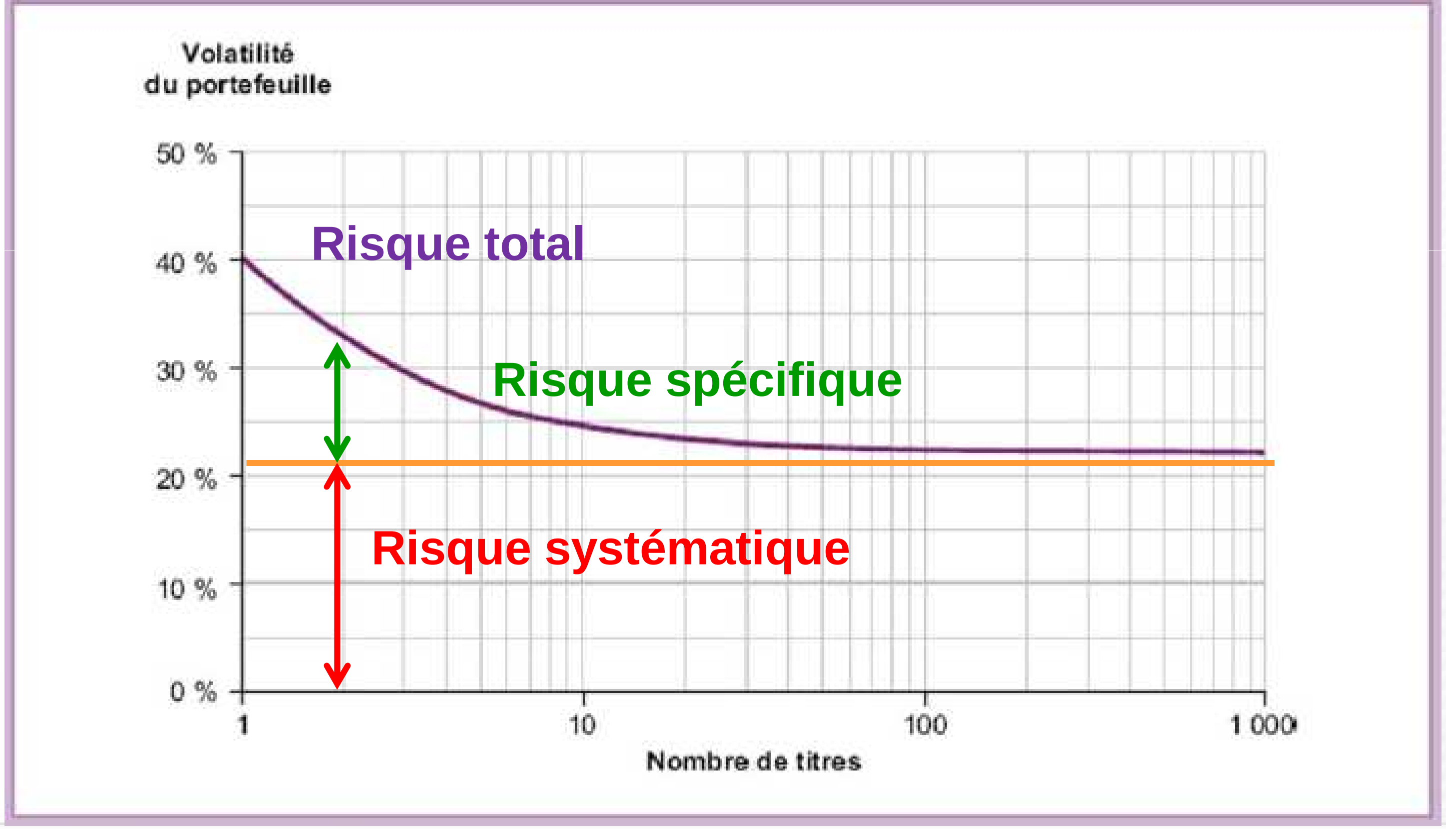
Issu de l'ouvrage « Finance d'entreprise », J. Berk et P. DeMarzo

II. Diversification de portefeuille

Diversification de portefeuille

- **Diversification d'un portefeuille *équipondéré* composé de N titres**

Figure 11.2 – Volatilité d'un portefeuille équipondéré en fonction de sa taille.



Issu de l'ouvrage « Finance d'entreprise », J. Berk et P. DeMarzo

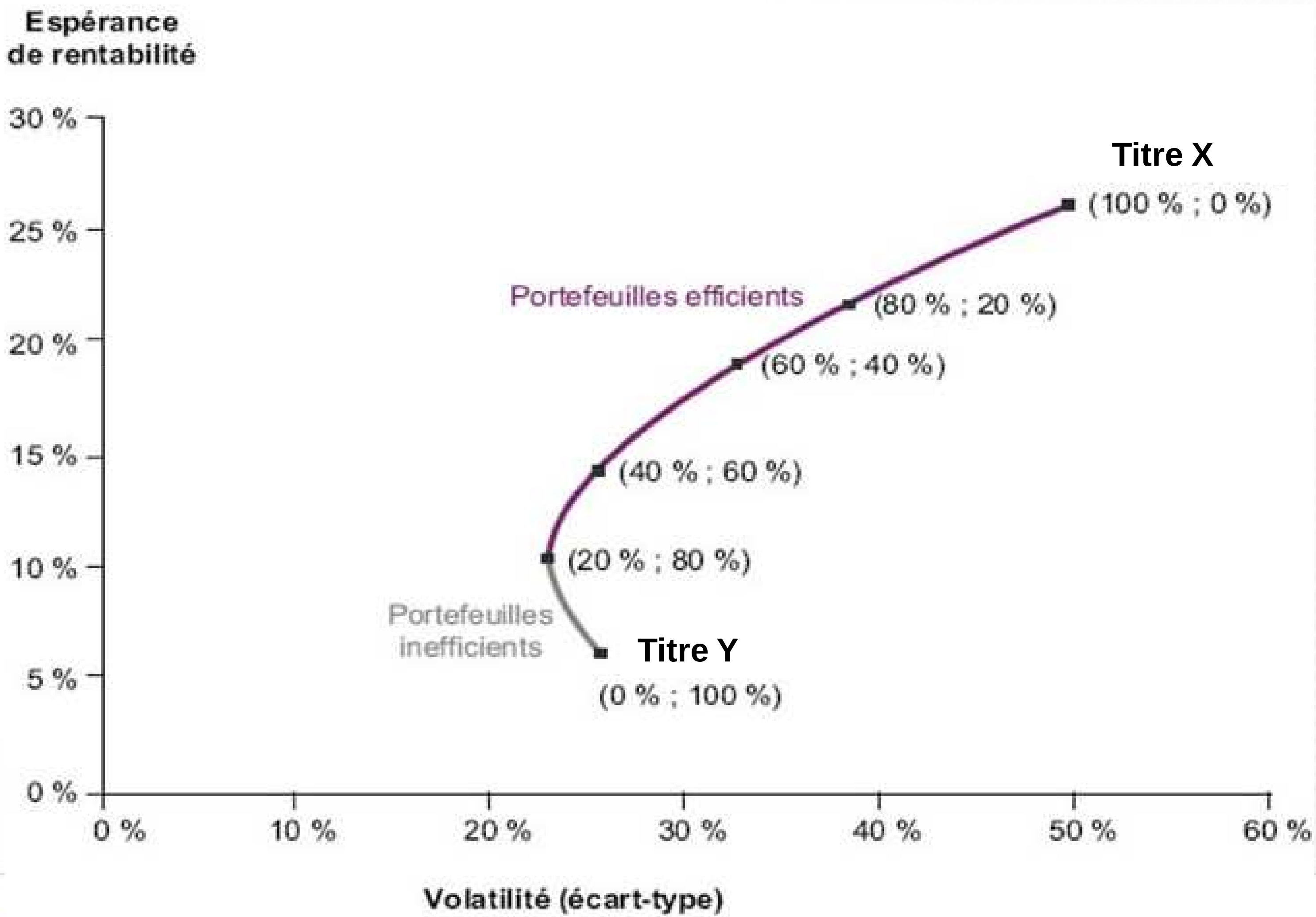
III. Optimisation de Markowitz

III.1. Portefeuilles composés d'actifs risqués

III.2. Prise en compte de l'actif sans risque

Portefeuilles efficients

- **Portefeuilles efficients composés de deux titres**



Issu de l'ouvrage « Finance d'entreprise », J. Berk et P. DeMarzo

Frontière efficiente

UNIVERSITÉ LUMIÈRE LYON 2
UNIVERSITÉ DE LYON

- **Formulation 2:**
- Les conditions de premier ordre sont :
- **Condition 1 (N équations)**

$$\begin{cases} \dfrac{\delta L}{\delta x_1} = 2x_1\sigma_1^2 + 2x_2\sigma_{12} + \ldots + 2x_N\sigma_{1N} + \lambda_1 E(R_1) + \lambda_2 = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\delta L}{\delta x_N} = 2x_1\sigma_{N1} + 2x_2\sigma_{N2} + \ldots + 2x_N\sigma_N^2 + \lambda_1 E(R_N) + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

- **Condition 2 (1 équation)**

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda_1} = x_1 E(R_1) + x_2 E(R_2) + \ldots + x_N E(R_N) - E(R_P)^* = 0$$

- **Condition 3 (1 équation)**

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda_2} = x_1 + x_2 + \ldots + x_N - 1 = 0$$

Frontière efficiente

- **Formulation 2:**

- Formulation matricielle du système :

$$
\begin{array}{ccccc}
C & & X & & K \\
\begin{bmatrix}
2\sigma_1^2 & 2\sigma_{12} & \ldots & 2\sigma_{1N} & E(R_1) & 1 \\
2\sigma_{21} & 2\sigma_2^2 & \ldots & 2\sigma_{2N} & E(R_2) & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
2\sigma_{N1} & 2\sigma_{N2} & \ldots & 2\sigma_N^2 & E(R_N) & 1 \\
E(R_1) & E(R_2) & \ldots & E(R_N) & 0 & 0 \\
1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
& \times &
\begin{bmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \\ \lambda_1 \\ \lambda_2
\end{bmatrix}
& = &
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ E(R_P)^* \\ 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

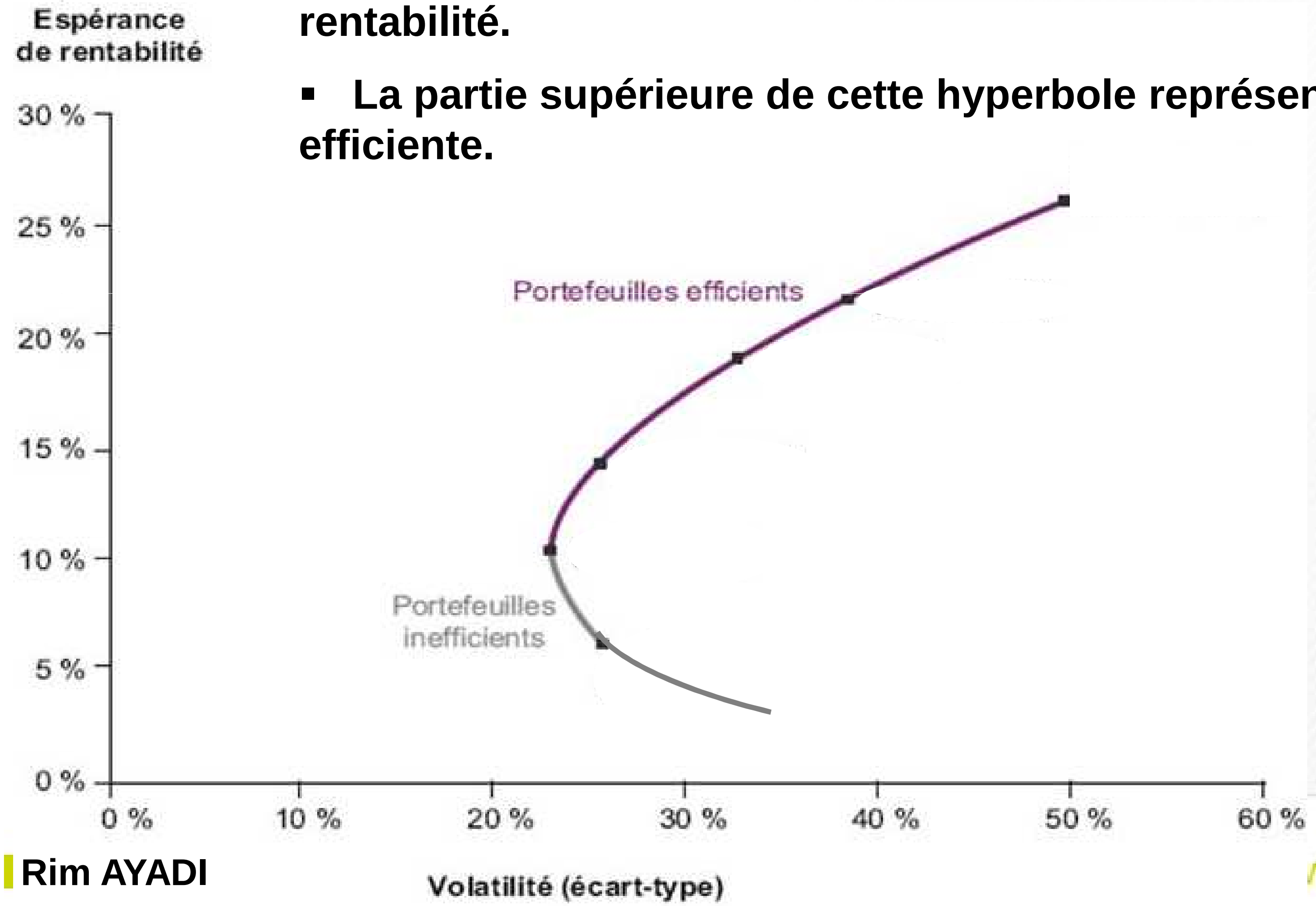
$\Rightarrow$ $\mathbf{X = C^{-1} K}$

Frontière efficiente

UNIVERSITÉ LUMIÈRE UNIVERSITÉ

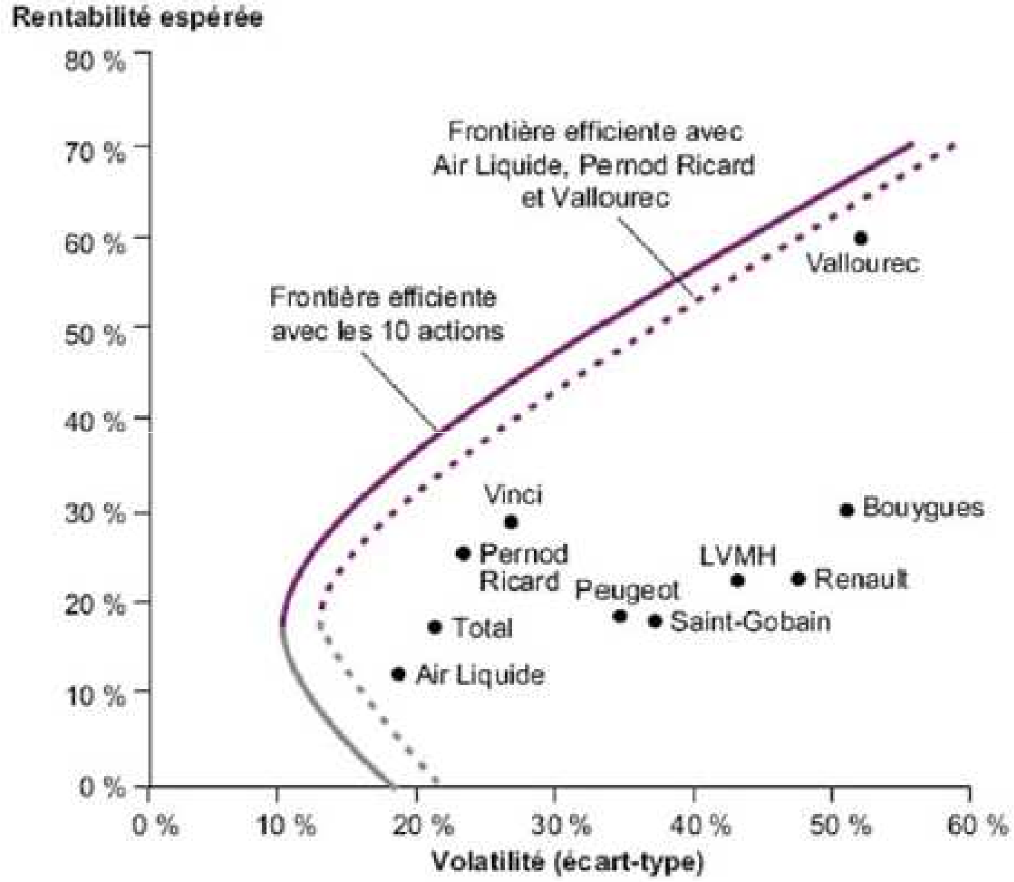
- **Représentation graphique**

  - **Solution du problème : hyperbole dans l'espace risque-rentabilité.**
  - **La partie supérieure de cette hyperbole représente la frontière efficiente.**



Frontière efficiente

Figure 11.8 – Frontières efficientes avec trois et dix actions.

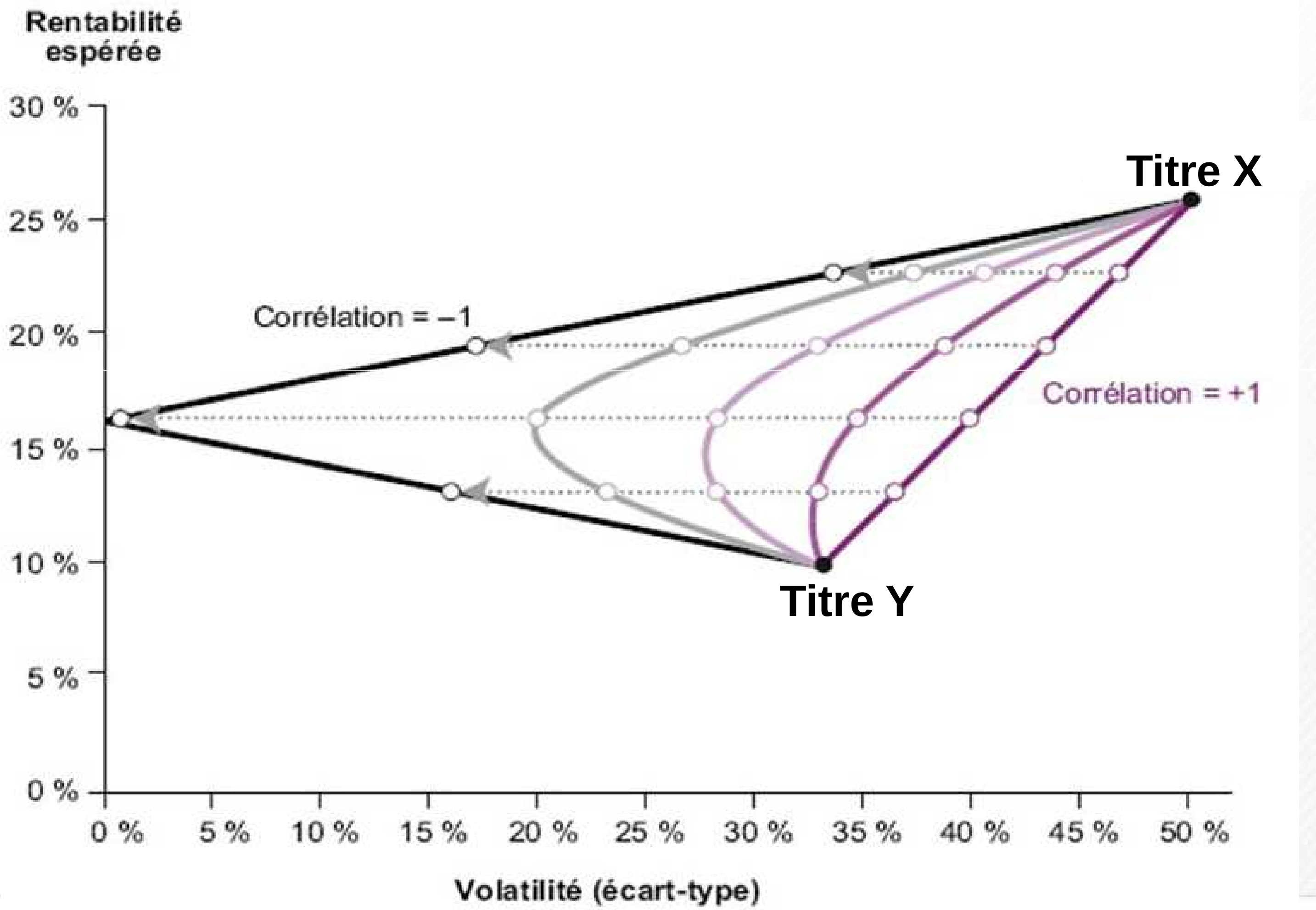


La frontière efficiente se déplace vers la gauche à mesure que de nouveaux titres sont ajoutés au portefeuille, ce qui améliore la diversification du portefeuille. Les calculs sont fondés sur les données historiques mensuelles de 1999 à 2007.

Issu de l'ouvrage « Finance d'entreprise », J. Berk et P. DeMarzo

Frontière efficiente

- **Portefeuilles efficients composés de deux titres**

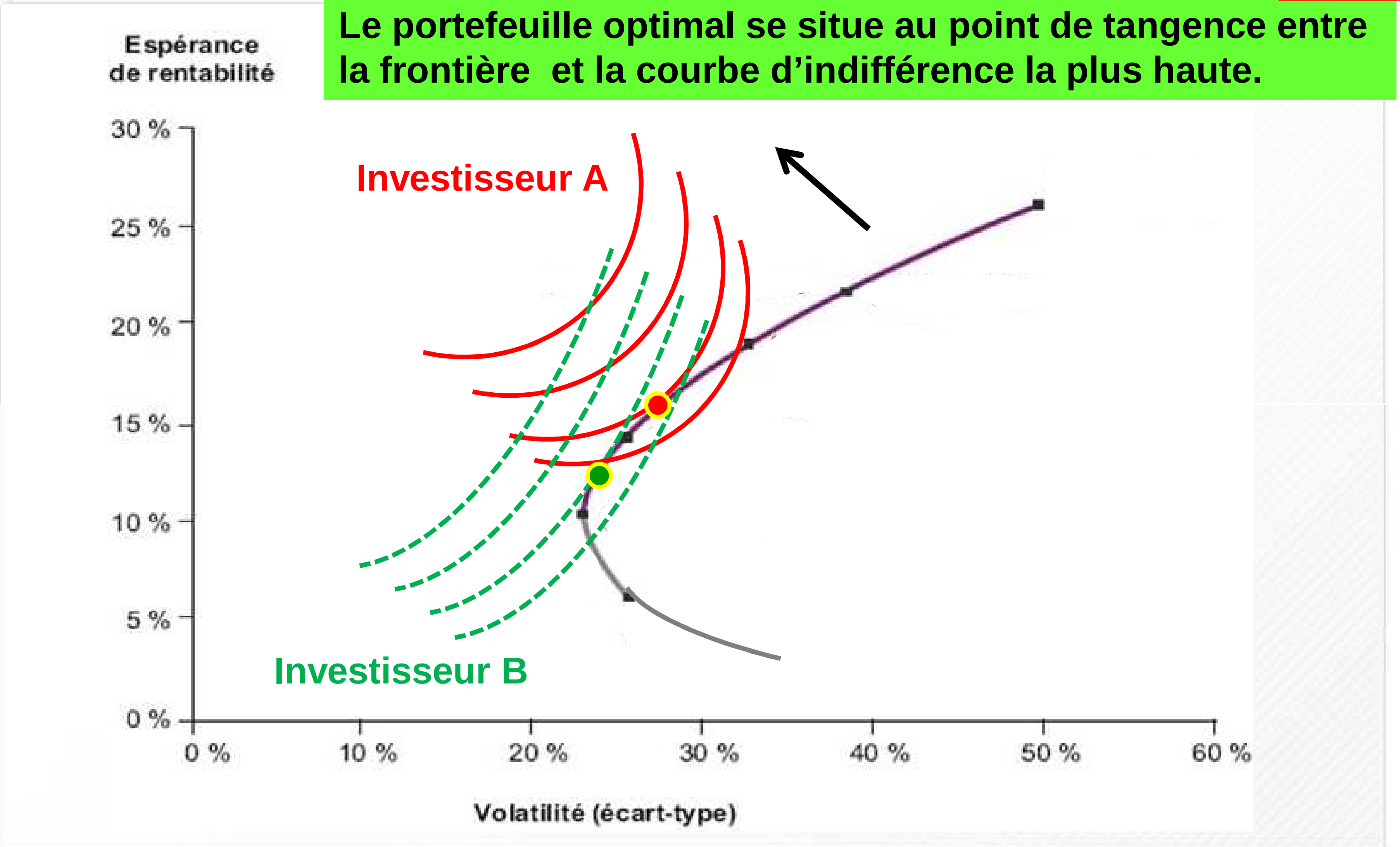


Issu de l'ouvrage « Finance d'entreprise », J. Berk et P. DeMarzo

Portefeuille optimal

UNIVERSITÉ LUMIÈRE

Le portefeuille optimal se situe au point de tangence entre la frontière et la courbe d'indifférence la plus haute.



III. Optimisation de Markowitz

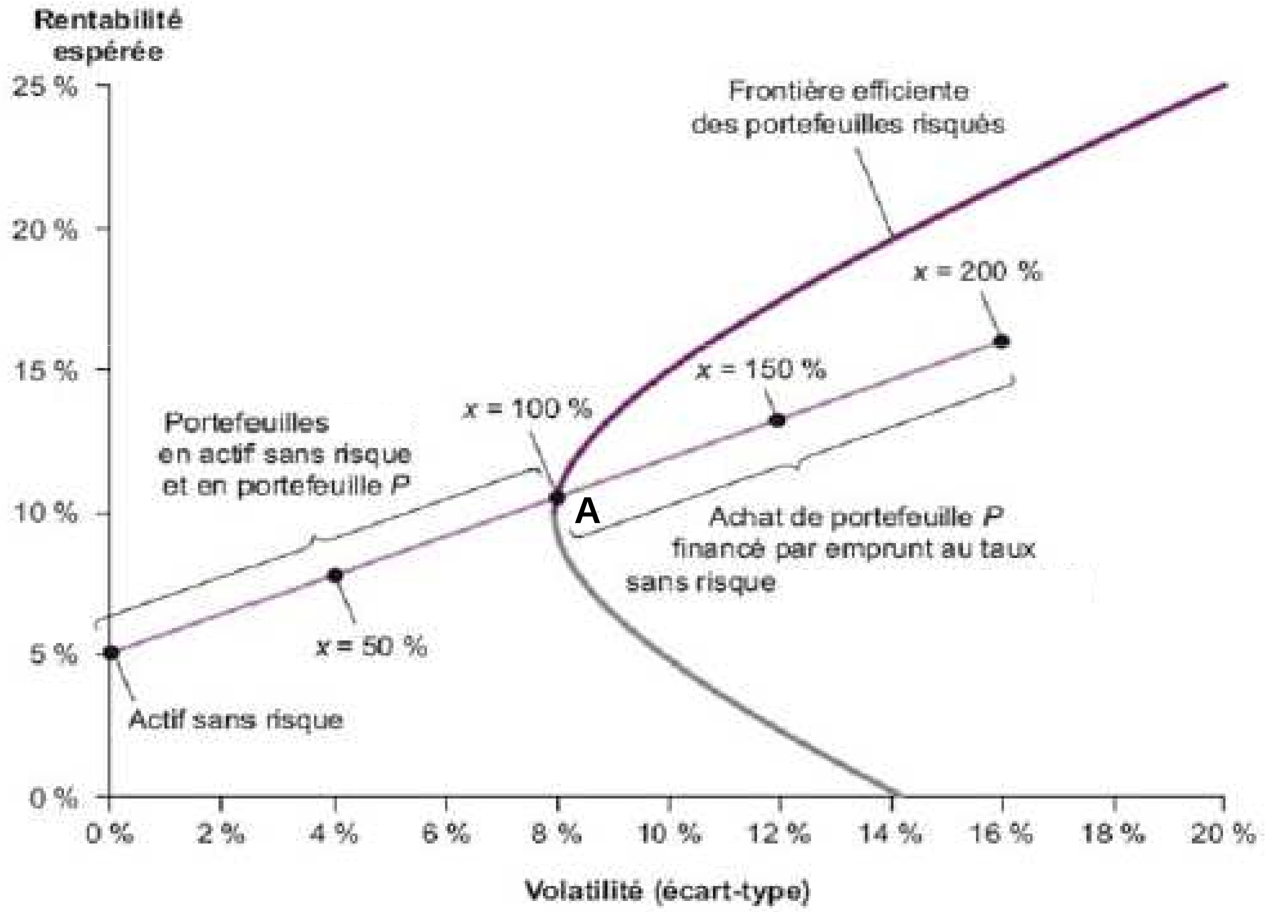
III.1. Portefeuilles composés d'actifs risqués

III.2. Prise en compte de l'actif sans risque

Rentabilité - risque (3)

UNIVERSITÉ LUMIÈRE
UNIVERSITÉ

Figure 11.9 – Couples rentabilité-risque des portefeuilles composés d'actif sans risque et d'un portefeuille risqué.



Rentabilité - risque (5)

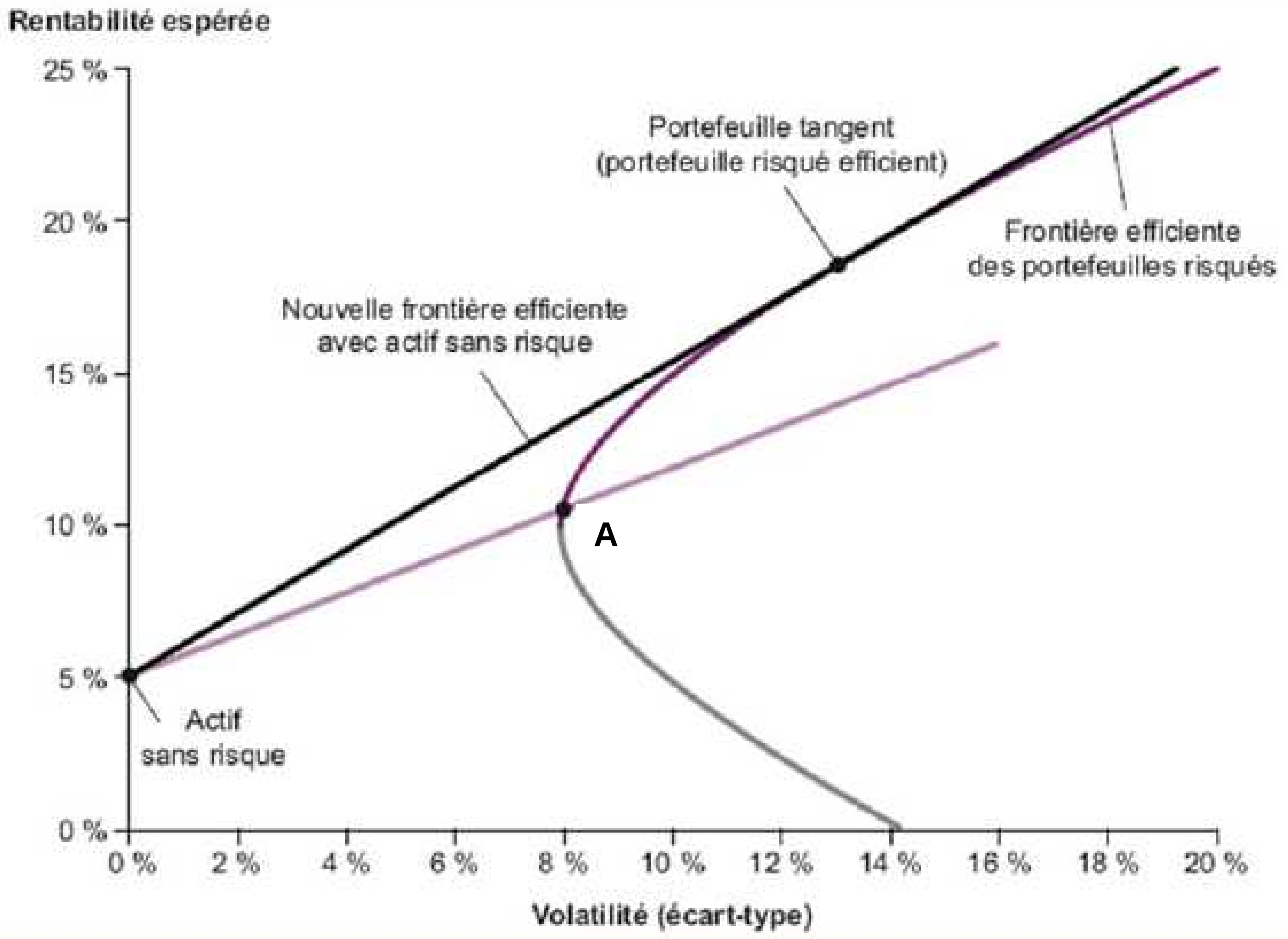
Exemple:

Jean dispose de 10 000 € et décide d'emprunter la même somme au taux 5%. Il place les 20 000 € dans le PF Q, dont la rentabilité espérée est de 10% et la volatilité est de 20%. Quelles sont l'espérance de rentabilité et la volatilité de son PF ?
Quelle est la rentabilité effective du PF si Q augmente de 30% à la fin de l'année ? Si Q diminue de 10% dans l'année ?

Nouvelle frontière efficiente

UNIVERSITÉ LUMIÈRE LYON 2
UNIVERSITÉ DE LYON

Figure 11.10 – Le portefeuille tangent ou portefeuille risqué efficient.



Nouvelle frontière efficiente

- Pour un niveau de risque donné, l'investisseur cherchant à obtenir la rentabilité espérée la plus élevée possible doit chercher ***la droite la plus pentue*** combinant l'actif sans risque et un PF appartenant à la frontière efficiente des actifs risqués. Cette pente pour un PF donné A correspond au ***ratio de Sharpe*** du PF.

$$\boxed{\text{Ratio de Sharpe} = \frac{E(R_A) - R_f}{\sigma_A}}$$

- Le ratio de Sharpe exprime la prime de risque offerte par le PF pour une unité de risque.

- La nouvelle frontière efficiente est la demi-droite passant par l'actif sans risque et tangente à la frontière efficiente des PF risqués.

Nouvelle frontière efficiente

- Le portefeuille tangent est le seul PF risqué efficient lorsqu'un actif sans risque existe.

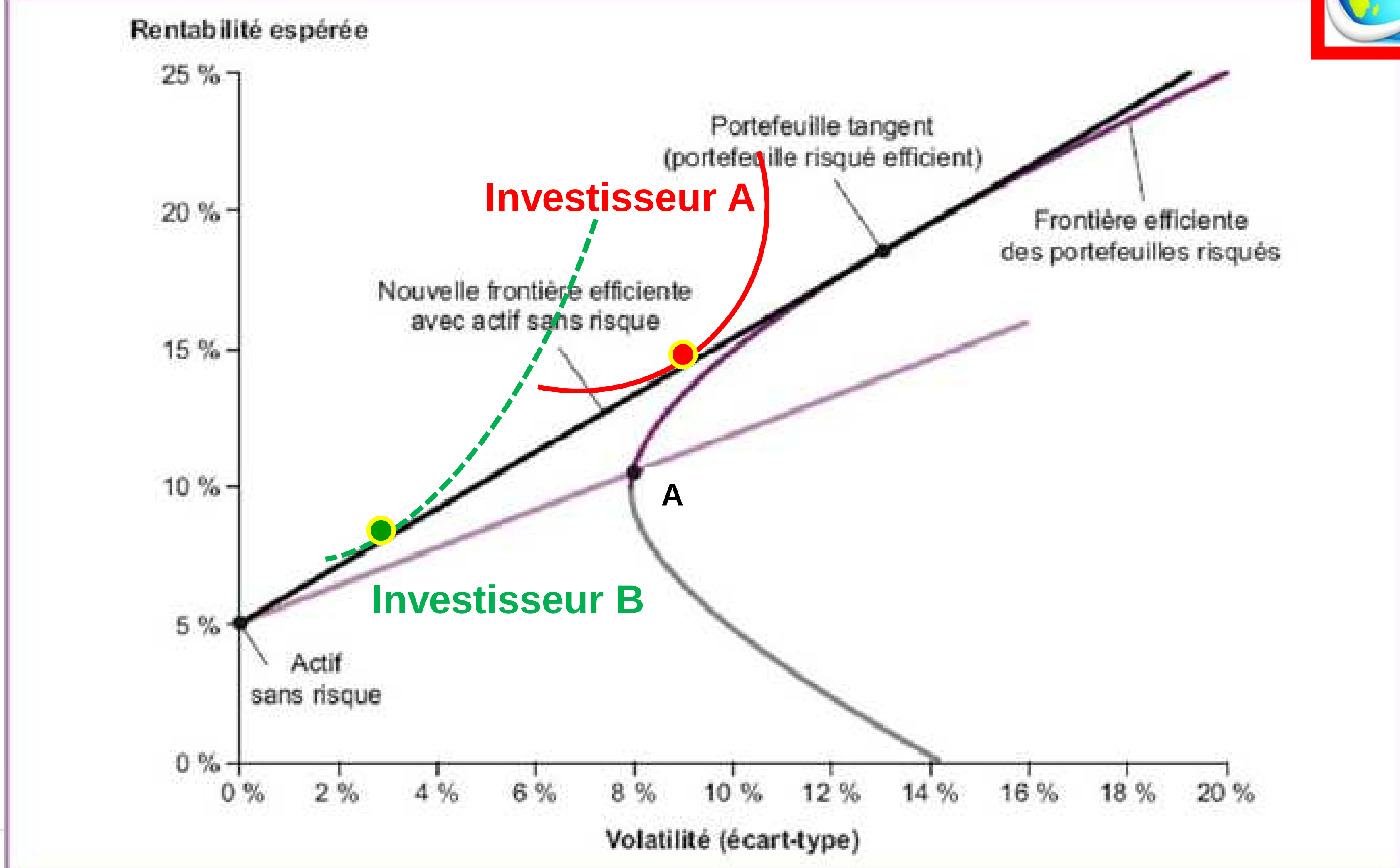
- ***Théorème de séparation:***

  Tous les investisseurs doivent détenir le même PF d'actifs risqués indépendamment de leur aversion pour le risque.

- L'aversion pour le risque d'un investisseur détermine exclusivement la proportion de sa richesse investie dans le PF tangent.

Nouvelle frontière efficiente

Figure 11.10 – Le portefeuille tangent ou portefeuille risqué efficient.



Nouvelle frontière efficiente

Exemple:

Jean dispose de 100 000 €, investis dans le PF A (figure 11.10). Ce portefeuille a une rentabilité espérée de 10,5% et une volatilité de 8%. Le taux sans risque est de 5%, le PF tangent a une espérance de rentabilité de 18,5% et une volatilité de 13%. Quel PF jean doit-il détenir pour maximiser la rentabilité espérée du PF sans augmenter sa volatilité ? Si elle préfère conserver la même espérance de rentabilité et minimiser son risque, quel PF Jean doit-il détenir ?