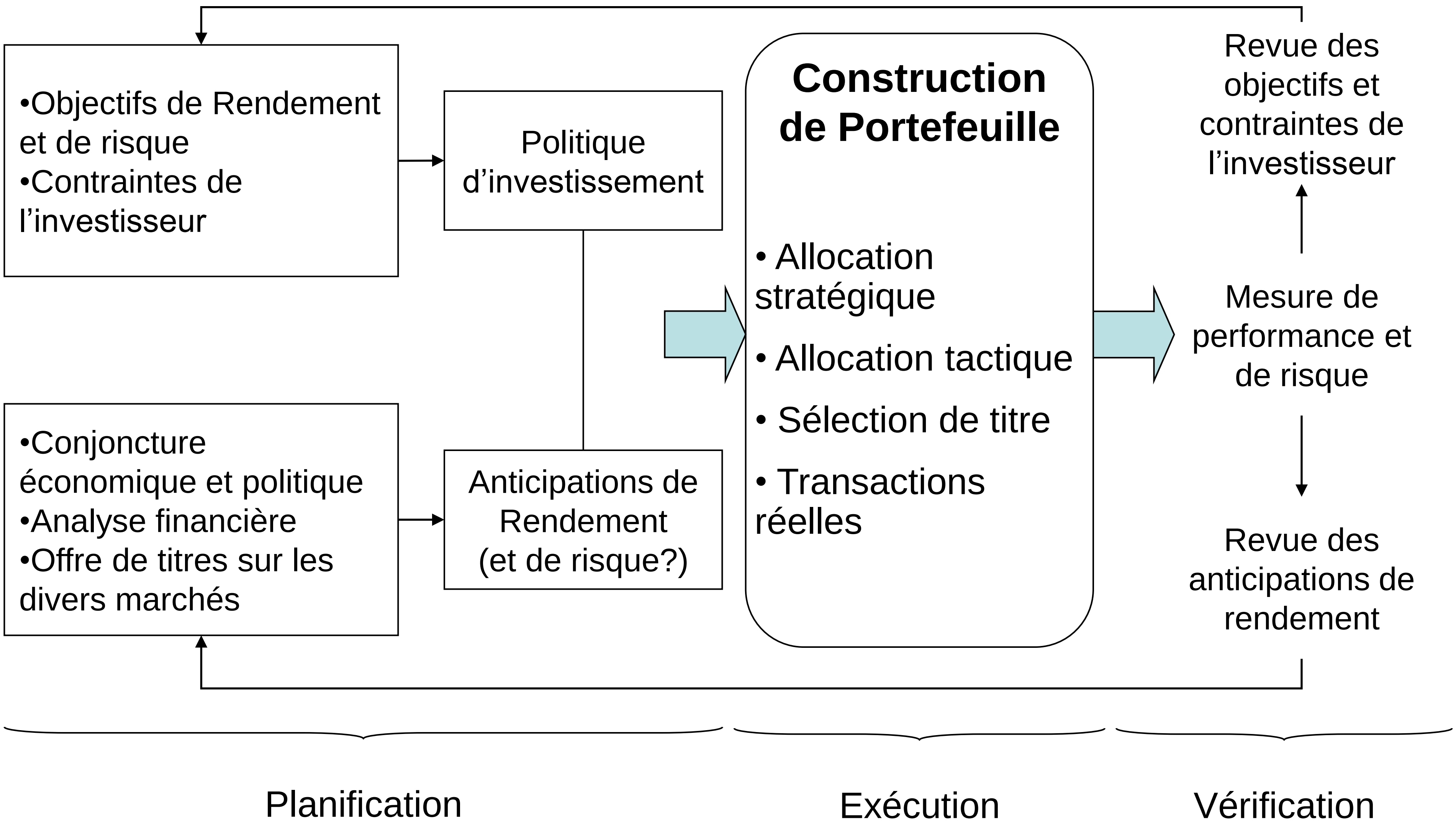
Gestion de Portefeuille

ENSAE 6 janvier 2006
Axel Cabrol

1. Présentation du processus d'investissement
2. L'optimisation de portefeuille
3. Au-delà de l'approche de Markowitz

Processus de gestion de portefeuille (1) : trois étapes



Processus de gestion de portefeuille (2.1) : la politique d’investissement

Différents types d’investisseurs

particulier, banque, fonds de retraite, assurance vie ou dommage

- Différents objectifs de rendements : fonction de la consommation future ou d’un passif (plus ou moins incertain)
- Objectif de risque dépend de ***l’aversion au risque*** : capacité à prendre du risque **et** volonté de prendre des risques
- « Contraintes » d’investissement : **horizon** de placement, régime d’**imposition**, niveau de **liquidité** nécessaire, exigences **règlementaires** et légales (banques, assurances, fonds de pension) et contraintes spécifiques

• Critères spécifiques de construction et de rebalancement du portefeuille

Processus de gestion de portefeuille (2.2) : Univers de gestion et allocation de référence

Anticipations de marché selon l'horizon d'investissement: **peut être très long !**

Contraintes de l'investisseur

Univers de gestion

ensemble des actifs susceptibles d'intégrer le portefeuille

Allocation Stratégique

- Composition de référence entre chaque classe d'actifs
- Niveau de risque tactique alloué à chaque classe
- Technique d'optimisation de portefeuille

Choix du type de gestion

- Active ou indicielle
- Benchmarkée (choix de l'indice) ou Immunisation d'un passif
- Mesures de risque et de performance pour chaque gérant

Processus de gestion de portefeuille (3.1) : Allocation tactique

Allocation tactique :

1. identification d’un opportunité de rendement qui n’est pas prise en compte dans l’allocation stratégique (horizon d’investissement différent)
2. Construction d’un nouveau portefeuille qui maximise le rendement risque compte tenu de cette nouvelle anticipation
3. Nouvelle contrainte : ne pas trop s’éloigner de l’allocation stratégique (limite de tracking error, de duration, etc..)

CL°: nouvelle répartition des classes d’actifs dans le portefeuille

Processus de gestion de portefeuille (3.2) : Sélection de titres

Sélection des titres :

1. Le gérant détermine les critères qui distinguent le rendement/risque de chaque titre de son univers, par exemple:
   1. Secteur économique/pays et devise/émetteur pour les actions cotées
   2. Maturité/pays et devise/Notation de l'émetteur pour la dette souveraine
2. Formule des anticipations de rendement pour chaque groupe et en déduit une allocation entre chaque groupe (qui doit respecter les contraintes de l'AS et de l'AT)
3. Sélectionne les quelques titres les **meilleurs** dans chaque groupe (relative value) et s'assure que les tailles cibles sont implémentables sans risque de liquidité particulier

CL°: un portefeuille virtuel, mais implémentable. L'étude du coût de transaction de ce portefeuille (amendé si besoin) permet de conclure.

Processus de gestion de portefeuille (4) : Conclusion

Dans le processus on distingue deux types d'analyse cruciales lors de l'AS, l'AT et la ST :

- Formulation des anticipations de marché : nécessite un méthode rigoureuse et parfois un analyse statistique poussée (série temporelles et économétrie, filtrage des données)
- Optimisation de portefeuille : technique fondée sur la théorie moderne du portefeuille de Markowitz (1950's) et qui a évoluée pour s'adapter aux spécificités de chacune des 3 étapes

Gestion de Portefeuille

ENSAE janvier 2006

1. Présentation du processus d'investissement
2. L'optimisation de portefeuille
3. Au-delà de l'approche de Markowitz

L’optimisation de portefeuille : La théorie moderne du portefeuille

- Modélisation vient de la microéconomie
- les articles fondateurs de Harry M. Markowitz, Prix Nobel 1990 : ‘Portfolio Selection’ (1952), ‘Fast Computation of Efficient Frontier’ (1956) et ’*Portfolio Selection: Efficient Diversification’* (1959)
- =>Présentation synthétique selon trois points:
  - Aversion au risque et modélisation du problème de ‘choix de portefeuille’
  - L’optimisation Moyenne-Variance : présentation et algorithme
  - En pratique : les vertus et les défauts de l’OMV

Optimisation de portefeuille (1) : le cadre microéconomique

•Les agents sont averses au risque : modélisé par une fonction d'utilité associée à une trajectoire aléatoire de leur richesse

•L'utilité s'écrit comme l'espérance de l'utilité associée à chaque trajectoire de richesse (et de consommation) : $U=E[u(W_0.(1+R_t))]$

• u(.) est strictement concave : inégalité de Jensen => $u(E(W_t))>U(W)$: à même rdt on préfère un actif certain

•On définit deux coéfficients d'aversion au risque :

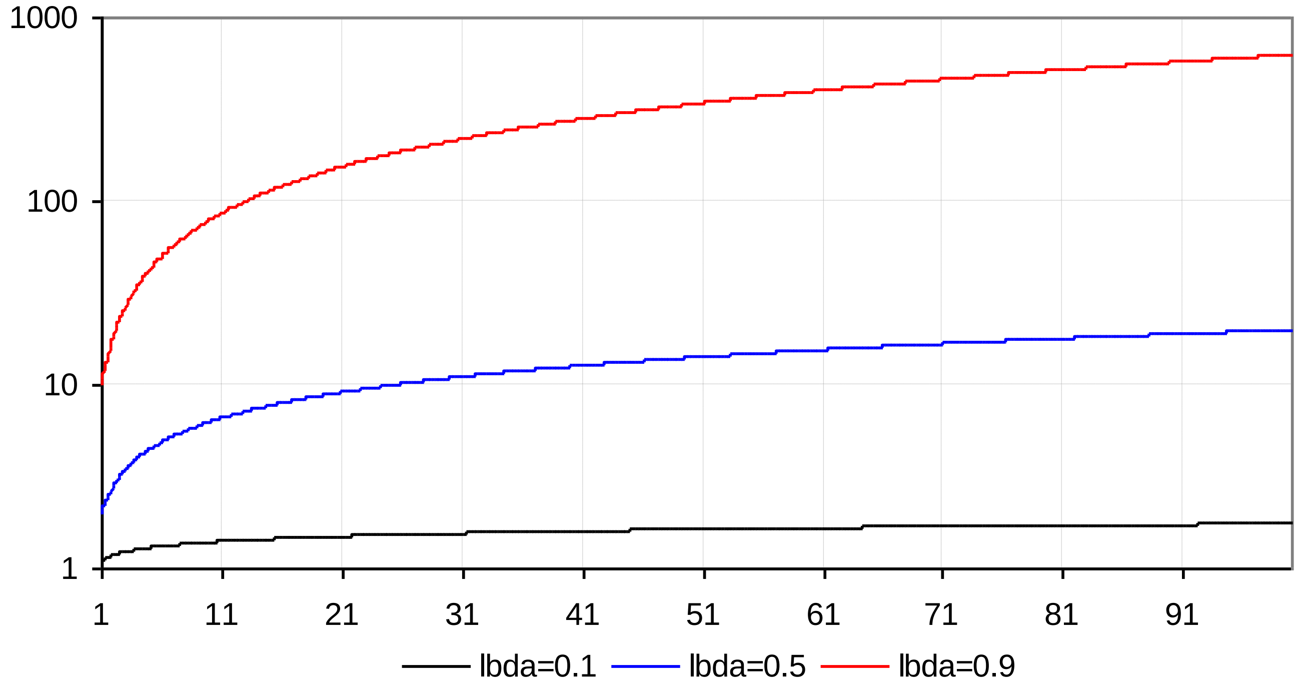
- Aversion absolue: -u'/u''
  -> plus on est riche plus on peut prendre du risque
- Aversion relative: -w.u'(w)/u''(w)
  -> le niveau de risque acceptable est proportionnel à w

Optimisation de portefeuille (1.1) : le cadre microéconomique

- Une classe de fonctions particulières : Constant Relative Risk Aversion (CRRA)

- $U(w)=w^{\lambda}/(1-\lambda)$, où λ est l'aversion relative au risque

Fonctions d'utilités CRRA



Optimisation de portefeuille (1.3) : programme d'optimisation de portefeuille

•Le portefeuille est investi dans d actifs risqués (R est le vecteur des rendements)

•Il faut maximiser l'utilité selon les programme suivant (A et B représentent les contraintes de l'investisseurs, choix d'indices, etc…)

$$\underset{\alpha_1,\cdots;\alpha_d}{Max} \quad E\left\{u\left[W_0 .e^{\left(\sum_{i=1}^{d}\alpha^i \cdot R_t^i\right)}\right]\right\}$$

$$sc.\begin{cases}\sum_{i=1}^{d}\alpha^i = 100\% \\ A\cdot\alpha \geq B\end{cases}$$

Optimisation de portefeuille (2.1) : L'approche de Markowitz

•Sous certaines hypothèses, le programme se réécrit à partir des deux premiers moments de la distribution de R

•Le risque est défini comme la volatilité (écart type des rendements) du portefeuille -> la volatilité va rendre 'inutile' la connaissance de lambda

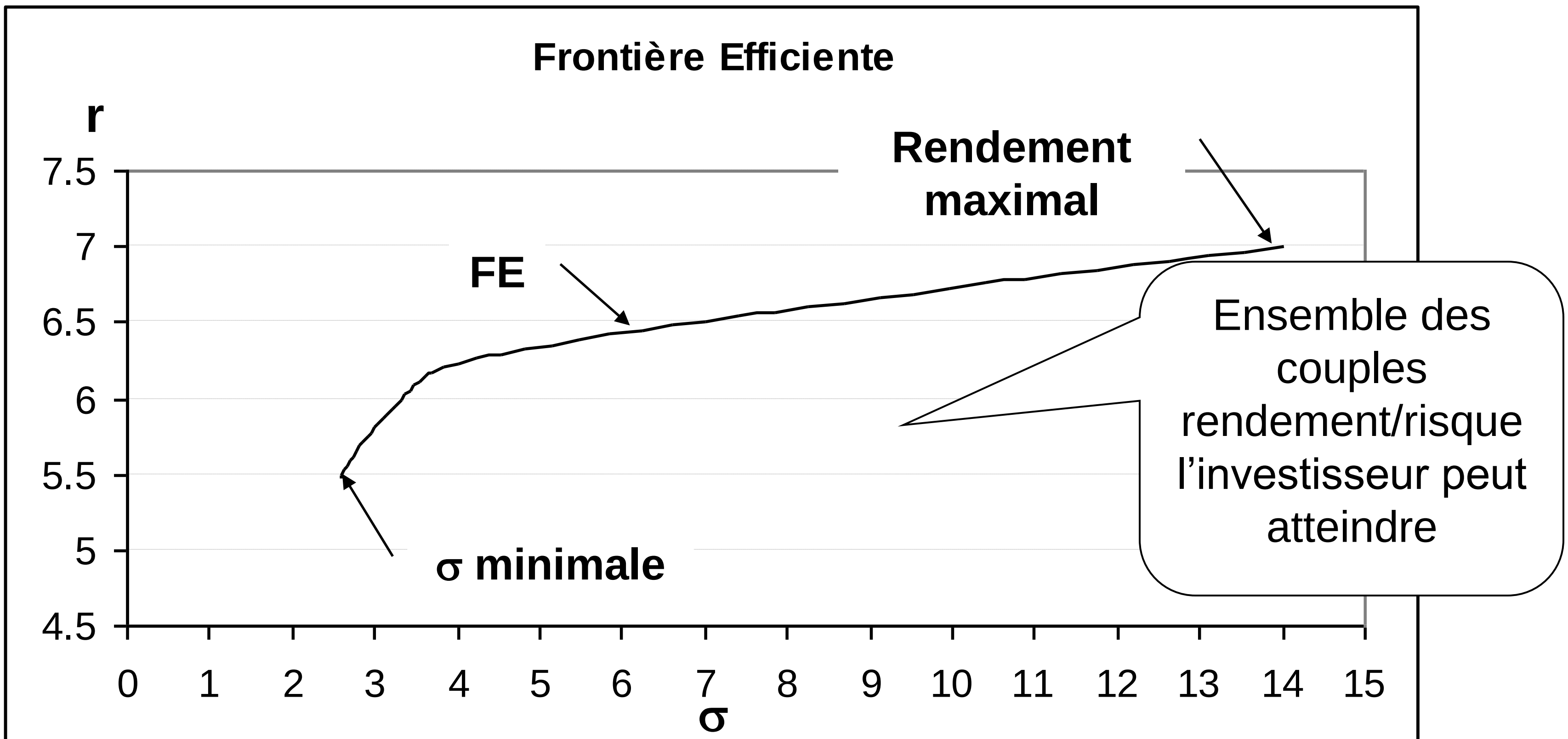
•Diversification ⇔ prise en compte des corrélations des rendements

$$\underset{\alpha_1,\cdots;\alpha_d}{Max} \sum_{i=1}^{d} \alpha^i \cdot R_t^i \qquad \underset{\alpha_1,\cdots;\alpha_d}{Min} \tfrac{1}{2}\alpha' V(R).\alpha$$

$$sc. \begin{cases} \alpha' V(R).\alpha \leq \sigma \\ \sum_{i=1}^{d} \alpha^i = 100\% \\ A \cdot \alpha \geq B \end{cases} \qquad sc. \begin{cases} \alpha' .R \geq r \\ \sum_{i=1}^{d} \alpha^i = 100\% \\ A \cdot \alpha \geq B \end{cases}$$

Optimisation de portefeuille (2.2) : L’approche de Markowitz

Notion de frontière efficiente : à chaque niveau de rendement est associé un unique portefeuille de risque minimal. L’ensemble des couples (s,r) forme la frontière efficiente.



Optimisation de portefeuille (3.1) : L'algorithme

•L'approche la plus simple est de minimiser la variance sous contraintes de rendement : la contrainte est linéaire !

•On fait l'hypothèse qu'à l'optimum les contraintes actives sont 'libres'

•C'est un programme quadratique convexe (V n'est pas dégénérée), dont on peut écrire les CN de KKT:

$$\exists(x,\lambda) / V.x + R - \underbrace{A'.\lambda}_{\text{ctes actives uniqut}} = 0$$

$$A.x = B$$

$$\text{pour les ctes inactives, } Ai.x \geq Bi$$

$$\text{pour les contraintes actives, } \lambda a \geq 0$$

Optimisation de portefeuille (3.2) : première méthode Active Set

•on se ramène au cas où il n'y a que des contraintes à l'égalité

•On suppose que x1 est admissible et qu'on connaît l'ensemble des ctes actives (Cact)

•On cherche alors x2=x1+p optimal sous Cact : la résolution est alors immédiate par résolution d'un système linéaire

•On cherche s'il y manque des contraintes : peut-on se déplacer de p sans franchir une barrière ? La première contrainte rencontrée est ajoutée à Cact, et on recommence…

•Si p est nul (x1 était déjà optimal), on cherche à enlever les contraintes dont le multiplicateur de langrange (λ) est le plus négatif => on recommence, sauf s'il n'y en a aucune <u>on a trouvé!</u>

Optimisation de portefeuille (3.3) : première méthode Active Set

•A chaque étape on résout en p et lambda le système suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V & -A' \\ -A & 0 \end{bmatrix}}_{symétrique} \cdot \begin{bmatrix} p \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V.x1 + R \\ 0 \end{bmatrix}$$

•on cherche *a* dans (0,1] tel que x1+*a*.p est admissible : il suffit de chercher dans les contraintes extérieures à Cact, car Aact.p=0

$$a = \min\left(1, \min_{i \notin Cact, (A.p)_i < 0} \frac{b_i - (A.x)_i}{(A.p)_i}\right)$$

Optimisation de portefeuille (3.4) : deuxième méthode primal-dual

•On introduit des variables temporaires y=A.x-B, pour tenir comptes des inégalités

•On initialise les itérations avec x quelconque, y et l strictement positifs (peu importe qu'au départ y != Ax-B)

•On est ramené à trouver le zéros d'une fonction (les dérivées du Lagrangien) en dimension n => méthode de Newton

•On parvient à un système linéaire légèrement différent :

$$\begin{bmatrix} V & -A' & 0 \\ -A & 0 & I \\ 0 & Y & \Lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ d\lambda \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Vx + A'\lambda + R \\ y + B - Ax \\ -\Lambda Ye + \tau e \end{bmatrix}$$

Optimisation de portefeuille (3.5) : deuxième méthode primal-dual

τ sert à 'rester' à l'intérieur des paramètres admissibles relativement à la contrainte (non linéaire) : $y.\lambda>0$

1. On utilise l'algorithme de Mehrota pour fixer τ : il dépend de la réduction obtenue par le pas de Newton simple ($\tau=0$) sur le facteur $y'.\lambda$ ($\tau=(\mu/\mu_{old})3.\mu_{old}$)
2. On calcule le réel *a* qui permet de rester à l'intérieur des contraintes : y et λ strictement positifs.
3. On incrémente x, y et λ de a.d(x,y,λ) ainsi calculé jusqu'à ce que le vecteur de droite soit suffisamment proche de zéros.

$$\begin{bmatrix} V & -A' & 0 \\ -A & 0 & I \\ 0 & Y & \Lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ d\lambda \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Vx + A'\lambda + R \\ y + B - Ax \\ -\Lambda Y e + \tau e \end{bmatrix}$$

Optimisation de portefeuille (4.2) :
Mise en pratique cf. Markowitz.py

- La résolution d’un programme permet de trouver un point de la frontière efficiente => il faut en calculer suffisamment pour s’adapter au niveau de risque/rendement souhaité

- Il faut pouvoir calculer le rdt max et la variance minimale => facile V=0 dans le premier cas et R=0 dans le second

- On utilise plutôt ActiveSet (plus rapide) quand on connaît un point admissible => c’est le cas pour la boucle de la fonction frontière efficiente.

- Utilisation du package pyExcelerator pour communiquer avec Excel : exemple simple à trois actifs pour illustrer le calcul

Optimisation de portefeuille (4.1) : Vertus et Défauts

- L'optimisation moyenne variance est :
  - rapide à calculer
  - Facile à interpréter
  - Liée à des théories plus globales (CAPM, Merton)
- Mais aussi, malheureusement:
  - (Très) Peu robuste (notamment au choix de E(R) et de E(A))
  - Statique (myopie) : que deux période t_0 et t_1
  - Utilise l'hypothèse de normalité des rendements : n'est pas vérifié à court terme => rate les risques extrêmes

Optimisation de portefeuille (4.2) : Exemple d’une Allocation Stratégique

- Tom et sa femme cherchent un conseil de gestion de leur patrimoine:
  - Tom a 50 ans, fondateur de ‘more & more’ (PME qui fabrique des yachts) il y a 30 ans à Monaco, il a épargné 2M€ sur son PEA et a accumulé des droits à une retraite de 80K€/an (net d’impôts)
  - ‘more & more’ est maintenant une multinationale leader européen sur son segment des petits yachts luxueux (300M€ de CA)
  - Il vient de vendre sa PME pour 60M€ aujourd’hui + 30M€ si la PME atteint certains objectifs de croissance qu’il s’est en gagé à donner à une fondation pour la préservation de l’environnement
  - Ils ont besoin d’un revenu de 3M€/an pour leur consommation et veulent léguer tous les 10 ans 1M€ à chacun de leur trois enfants
  - L’inflation du coûts de leur vie est estimée à 2,5%

Optimisation de portefeuille (4.3) : Exemple d'une Allocation Stratégique

- Horizon de temps ? Profil de risque?
- Patrimoine actuel = 2+60 = 62M€
- Revenus acquis = 80 K€
- Dépenses annuelles nettes = 3 M€ +300K€ (dont linéarisé)-80K€
- => return avant impôt exigé = 3,22/62 = 5,2%
  taux d'imposition moyen de 10% => rendement réel exigé de 5,8%,
- Inflation du coût de la vie de 2,5% => objectif de rdt de 8,3% en nominal
- Classes d'actifs disponibles:

	Rendements	Volatilités	Corrélations						
Monétaire	2%	4.0%	1						
Obligations européennes	4%	4.0%	0.0787	1					
Actions €	8%	13.0%	0	0.5	1				
Actions ex-€	10%	16.0%	0	0.3	0.7	1			
Marchés Emergents	15%	23.0%	0.1	0.2	0.7	0.6	1		
Immobilier (hors résidentiel)	10%	15.0%	0.04	-0.26	0.2	0.11	0.05	1	
Private Equity	20%	45.0%	0	0.4	0.9	0.6	0.4	0.2	1

Gestion de Portefeuille

ENSAE janvier 2006

1. Présentation du processus d'investissement
2. L'optimisation de portefeuille
3. Au-delà de l'approche de Markowitz

Au-delà de l'approche de Markowitz : un exemple le bootstrap

- On conserve le cadre statique et gaussien
- On cherche à améliorer la robustesse de l'optimisation : le bootstrap est une technique classique lorsqu'on s'intéresse aux statistiques robustes
- Idée : on simule l'impact de l'erreur d'estimation des paramètres (R,Vol, Corrélations) sur le calcul des frontières efficientes.
- Comment ?
  - On fixe une taille d'échantillon n (en ligne avec celle que l'on a utilisée pour réaliser les estimations)
  - On simule R échantillons gaussiens de taille n de mêmes moyenne, volatilité et corrélations que nos hypothèses
  - On ré-estime R fois les moyennes et VCV => l'écart observé est approximativement distribué comme notre erreur d'estimation

Au-delà de l’approche de Markowitz : un exemple le bootstrap

- Exemple : fichier mise en forme, 2eme onglet
- Utilise le fichier BootstrapMarkov.py :
  - La simulation de lois normales se fait grace à la décomposition de cholesky
  - Les R frontières efficientes sont calculées en boucles avec des bornes imposées constantes => sinon celles-ci varient avec les inputs
- On obtient une estimation de la loi des couples (r,s), lorsqu’on sous la contrainte de rendement rc => utile pour savoir si le portefeuille retenu est loin de l’efficience ou pas!

Au-delà de l’approche de Markowitz : Autres développements

- S’affranchir de l’hypothèse gaussienne
- Modéliser le ‘passif’de l’investisseur cf. Leibowitz
- Mieux adapté à la gestion benchmarkée : Black-Litterman
- Projections dynamiques : permet de suivre les ‘chemins’ de rendements et de mieux appréhender les impôts payés, les optionalités cachées, les contraintes comptables

Quelques références

- Processus d’investissement : *‘Managing Investment Portfolios: A dynamic Process’, 3rd edition, CFA Institute*
- Optimisation de portefeuille :
  - *les articles et le livre de H. Markowitz :*‘Portfolio Selection’ (1952), ‘Fast Computation of Efficient Frontier’ (1956) et ’*Portfolio Selection: Efficient Diversification’* (1959)
  - L’article de Fisher Black et Robert Littermann : ’*Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium’* (Sep 1991), The Journal of Fixed Income.
  - Sur l’allocation stratégique : ‘*Strategic Asset Allocation Portfolio Choice for Long-Term Investors*’, John Y. Campbell, Luis M. Viceira, Oxford University Press, 2002
  - Sur l’optimisation en général : ‘Numerical Optimization’, Jorge Nocedal, Stephen J. Wright, Springer, 1999