Devoir sur les vecteurs

Correction du 26 avril 2011

Exercice 1 :

n°36 page 206 du livre

a) On a la relation :

$$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$$

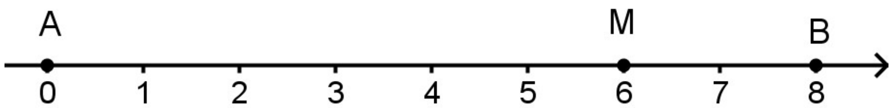
Par la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0}\\ 4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

b) On a alors :

$$4\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

On a alors le schéma :



Exercice 2 :

n°44 page 207 du livre

Utilisons les propriétés de l'addition de deux vecteurs :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$$

Exercice 3 :

n°69 page 210 du livre

a) E est sur le cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si ABE est rectangle en E.

On calcule alors les distances au carré suivantes :

$$\begin{aligned}AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2\\ AB^2 &= (7+1)^2 + (-8-2)^2\\ AB^2 &= 64 + 100\\ AB^2 &= 164\end{aligned}$$

$$AE^2 + BE^2 = (x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2 + (x_E - x_B)^2 + (y_E - y_B)^2$$
$$AE^2 + BE^2 = (7+1)^2 + (2-2)^2 + (7-7)^2 + (2+8)^2$$
$$AE^2 + BE^2 = 64 + 0 + 0 + 100$$
$$AE^2 + BE^2 = 164$$

On a donc $AB^2 = AE^2 + BE^2$ donc le triangle ABE est rectangle en E et donc E est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

b) Si F est le symétrique de E par rapport au milieu I de $[AB]$, alors $[EF]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.

On calcule les coordonnées de $I = m[AB]$

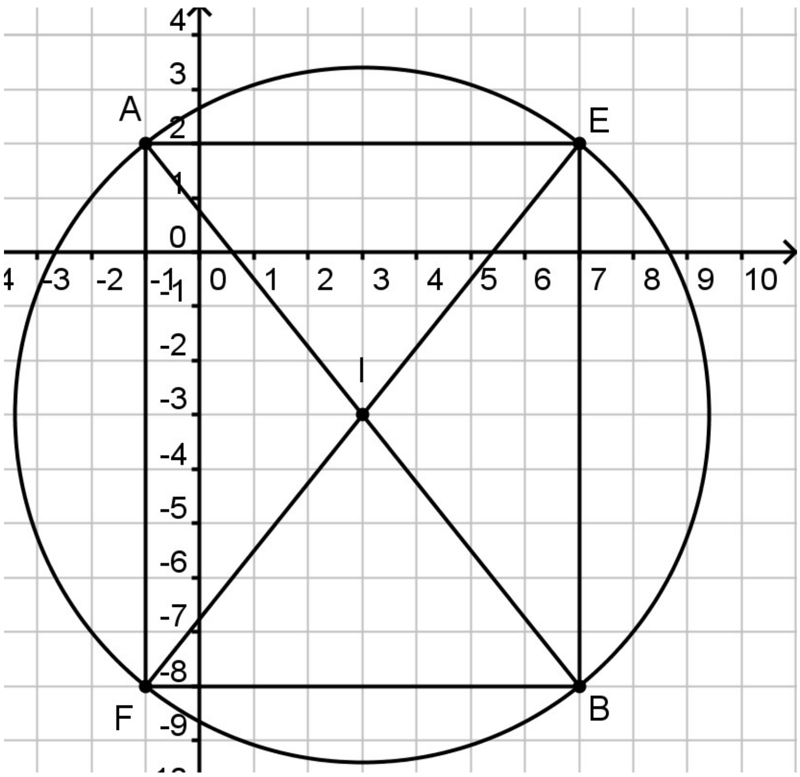
$$I = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{-1+7}{2}; \frac{-8+2}{2}\right) = (3; -3)$$

On pose $F(x; y)$, on doit avoir $\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{EI}$, on obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} x - 3 = 3 - 7 \\ y + 3 = -3 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -8 \end{cases}$$

c) $AEBF$ est un rectangle car les diagonales $[AB]$ et $[EF]$ se coupent en leur milieu I (parallélogramme) et le quadrilatère possède un angle droit car le triangle ABE est rectangle en E.

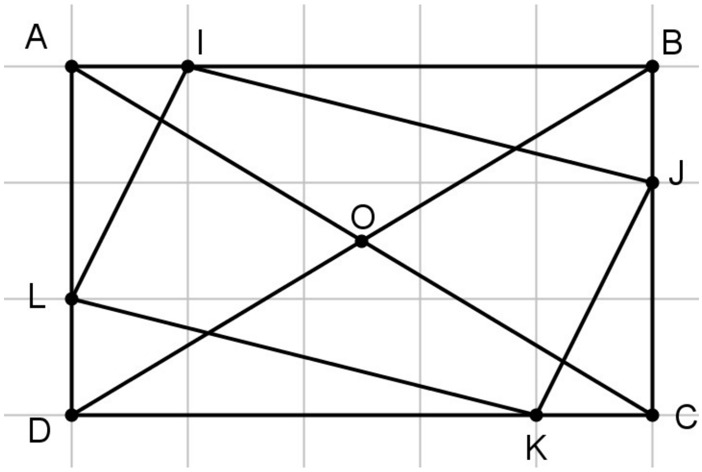
On a alors le schéma :



Exercice 4 :

n˚70 page 210 du livre

a) On obtient la figure suivante :



b) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$, on a les coordonnées des points suivants :

$$I\left(0; \frac{1}{5}\right) \quad J\left(\frac{1}{3}; 1\right) \quad K\left(1; \frac{4}{5}\right) \quad L\left(\frac{2}{3}; 0\right)$$

On obtient alors les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$

$$\overrightarrow{IJ} = \left(\frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{5}\right) \quad \overrightarrow{LK} = \left(1 - \frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{5}\right)$$

c) On a $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$, le quadrilatère $IJKL$ est donc un parallélogramme (on pourrait montrer qu'il n'est pas rectangle).

d) On appelle O le centre du rectangle, il a donc comme coordonnées $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Appelons O' le milieu de $[IK]$.Il a donc pour coordonnées :

$$O' = \left(\frac{0+1}{2}; \frac{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

On constate que $O = O'$

Exercice 5 :

n°72 page 210 du livre

1) On pose : $A'(x_{A'}; y_{A'})$, $B'(x_{B'}; y_{B'})$ et $A'(x_{C'}; y_{C'})$.

   On traduit alors les égalités vectorielles par les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x_{A'} - 6 = \dfrac{5}{4}(-3-6) \\ y_{A'} - 2 = \dfrac{5}{4}(3-2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{B'} - 6 = \dfrac{5}{4}(10-6) \\ y_{B'} - 2 = \dfrac{5}{4}(-3-2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{C'} - 6 = \dfrac{5}{4}(7-6) \\ y_{C'} - 2 = \dfrac{5}{4}(7-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{A'} = \dfrac{-45}{4} + 6 \\ y_{A'} = \dfrac{5}{4} + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{B'} = 5 + 6 \\ y_{B'} = \dfrac{-25}{4} + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{C'} = \dfrac{5}{4} + 6 \\ y_{C'} = \dfrac{25}{4} + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{A'} = \dfrac{-21}{4} \\ y_{A'} = \dfrac{13}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{B'} = 11 \\ y_{B'} = \dfrac{-17}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{C'} = \dfrac{29}{4} \\ y_{C'} = \dfrac{33}{4} \end{cases}$$

2) a) Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont :

$$\overrightarrow{AB} = (13; -6) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'B'} = \left(\frac{65}{4}; \frac{-15}{2}\right)$$

   b) Calculons le déterminant de ces deux vecteurs :

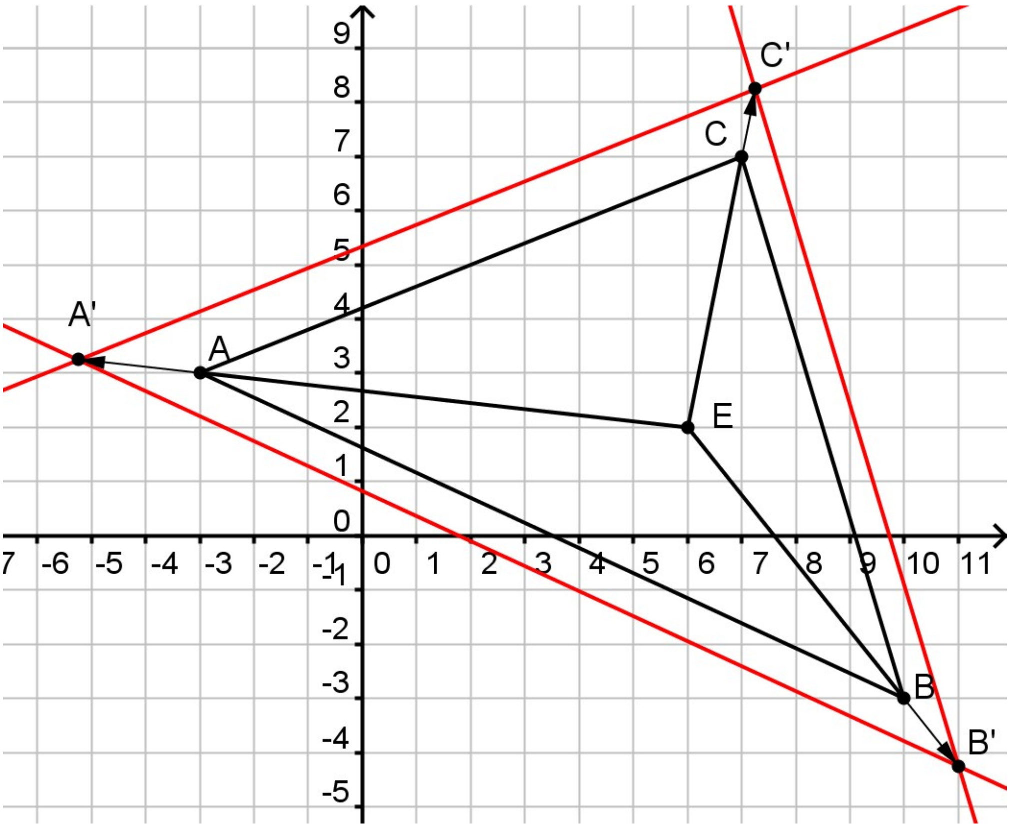
$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \begin{vmatrix} 13 & \dfrac{65}{4} \\ -6 & \dfrac{-15}{2} \end{vmatrix} = \frac{-195}{2} + \frac{195}{2} = 0$$

   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont donc colinéaires et donc les droite (AB) et $(A'B')$ sont donc parallèles.

3) On peut utiliser une autre méthode pour montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ sont colénéaires :

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'E} + \overrightarrow{EC'} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AE} + \frac{5}{4}\overrightarrow{EC} = \frac{5}{4}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}\right) = \frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$$

   Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ sont donc colinéaires et donc les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles. On procède de façon identique pour les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{B'C'}$.



Exercice 6 :

n°75 page 211 du livre

Le sens de déplacement est donné par le vecteur $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{C} + \overrightarrow{N}$ que l'on construit avec un parallélogramme.

Ensuite, on trace une droite de même direction que $\overrightarrow{R}$ qui passe par J. Elle coupe alors l'autre rive en L qui est le point de départ de Lise.