Les Cours du CNED

Mathématiques

Terminale S

Corrigés des exercices

Rédaction :

Laurent Beroul
Isabelle Tenaud
Sébastien Cario

Coordination :

Sébastien Cario

Corrigé de la séquence 1

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 2

Exercice 1 ❶ On a : $e_1 = 1$, $e_2 = 1+2 = 3$, $e_3 = 1+2+3 = 6$, $e_4 = 1+2+3+4 = 10$ et

$c_1 = 1^3 = 1$, $c_2 = 1^3 + 2^3 = 9$,

$c_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$, $c_4 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100.$

Il semble donc que $c_n = e_n^2$.

❷ On a $c_1 = 1$ et $\dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$ donc la proposition « $c_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ » est vraie pour $n = 1$.

Supposons qu'elle le soit pour un rang $n = k$ et montrons qu'elle l'est alors au rang suivant $n = k+1$. Autrement dit, supposons que $c_k = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$ et montrons sous cette hypothèse que $c_{k+1} = \dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$. On a :

$$c_{k+1} = c_k + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

d'où l'hérédité de la proposition. Finalement, pour tout $n \geq 1$, on a $c_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

On sait par ailleurs que, pour tout $n \geq 1$, on a $e_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ donc on a bien, pour tout $n \geq 1$, $c_n = e_n^2$.

Exercice 2 On conjecture l'expression de u_n en calculant les premiers termes de la suite.

On a : $u_1 = \dfrac{u_0}{1+u_0} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}$ ainsi il semble que $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Le calcul de u_3 nous conforte dans cette idée. En effet $u_3 = \dfrac{u_2}{1+u_2} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{4}$.

La proposition « $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ » est donc vraie pour les premiers rangs ($n=0$ à $n=4$). Supposons qu'elle le soit pour un rang $n=k$ autrement dit, supposons que $u_k = \dfrac{1}{k+1}$.

Sous cette hypothèse, on a $u_{k+1} = \dfrac{u_k}{1+u_k} = \dfrac{\dfrac{1}{k+1}}{1+\dfrac{1}{k+1}} = \dfrac{\dfrac{1}{k+1}}{\dfrac{k+2}{k+1}} = \dfrac{1}{k+2}$ et la proposition est héréditaire.

Finalement, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 3 Vérifions que la proposition est vraie pour les premières valeurs de n :

N	$3^{2n} - 2^n$	$\dfrac{3^{2n} - 2^n}{7}$
0	0	0
1	7	1
2	77	11
3	721	103

On suppose que pour un entier k quelconque $3^{2k} - 2^k$ est un multiple de 7 autrement dit $3^{2k} - 2^k = 7A$ où A est un entier.

Montrons sous cette hypothèse que $3^{2(k+1)} - 2^{k+1}$ est lui aussi un multiple de 7. Comme $3^{2k} - 2^k = 7A$, on obtient $3^{2k} = 2^k + 7A$ ce qui donne

$$3^{2(k+1)} - 2^{k+1} = (2^k + 7A) \times 9 - 2^k \times 2 = 2^k(9-2) + 7A \times 9 = 7(2^k + 9A)$$

et l'hérédité est bien démontrée puisque $7(2^k + 9A)$ est bien un multiple de 7.

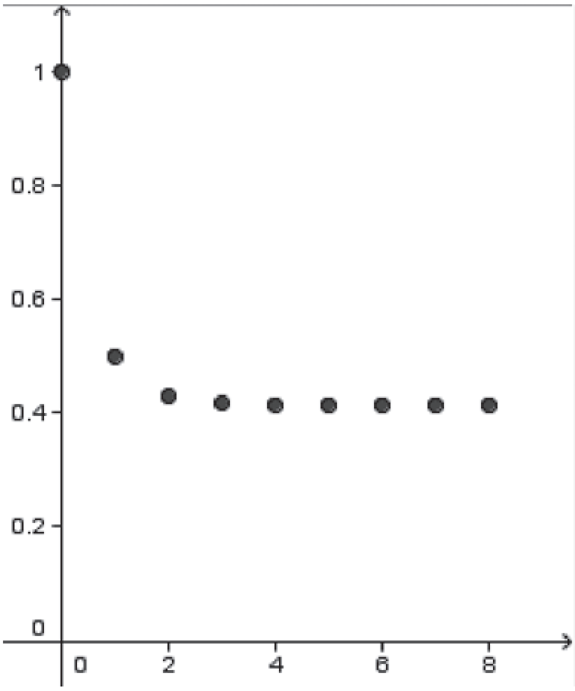
Finalement, pour tout entier naturel n, l'entier $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.

Exercice 4 Tout d'abord, $u_0 = 1$ donc $0 \leq u_0 \leq 2$ et la proposition « $0 \leq u_n \leq 2$ » est vraie au rang $n = 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq u_k \leq 2$ alors $2 \leq 2 + u_k \leq 4$ puis $\sqrt{2} \leq \sqrt{2+u_k} \leq 2$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur [2 ; 4], et, a fortiori, $0 \leq u_{k+1} \leq 2$. On peut donc conclure : pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 2$.

Exercice 5 ❶ À l'aide du tableur de GeoGebra par exemple, on obtient une représentation graphique et un tableau de valeurs en même temps.

Pour cela, on fait apparaître le tableur (dans le menu Affichage), on travaille comme à l'aide du tableur d'OpenOffice pour faire apparaître les calculs puis, après avoir sélectionné la plage A2 :B12 (par exemple), on clique droit et on choisit « Créer une liste de points ».



	A	B
1	n	Un
2	0	1
3	1	0.5
4	2	0.42857
5	3	0.41667
6	4	0.41463
7	5	0.41429
8	6	0.41423
9	7	0.41422
10	8	0.41421
11	9	0.41421
12	10	0.41421
13		
14		

Il semble que la suite soit décroissante. On peut par ailleurs remarquer que la suite semble avoir une limite (la notion de limite sera étudiée au chapitre suivant).

❷ **a)** La fonction *f* est une fonction rationnelle définie sur [0 ; 1], elle est donc dérivable sur cet intervalle et,

pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $f'(x) = \dfrac{(x+3)\times 1 - 1\times(x+1)}{(x+3)^2} = \dfrac{2}{(x+3)^2}$. Par suite, pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $f'(x) \geq 0$ et *f* est croissante sur [0 ; 1].

b) On traduit la question posée. On est donc amené à démontrer que pour tout *n*, $0 \leq u_n \leq 1$ et $u_{n+1} \leq u_n$. On peut démontrer par récurrence chacune de ces deux propriétés ou bien ne faire qu'un seul raisonnement par récurrence en montrant que pour tout *n*, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$. Prenons ce deuxième point de vue.

On a $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{u_0+1}{u_0+3} = \dfrac{1+1}{1+3} = \dfrac{1}{2}$ donc on a $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$.

Supposons que pour $k \in \mathbb{N}$ on ait $0 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 1$

alors $f(0) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \leq f(1)$ car *f* est croissante sur [0 ; 1]

d'où $\dfrac{1}{3} \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq \dfrac{1}{2}$ ce qui implique $0 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 1$

car $\left[\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right] \subset [0\ ;\ 1]$.

Ainsi, pour tout entier $n \geq 0$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$. La suite (u_n) est donc suite décroissante à valeurs dans l'intervalle [0 ; 1].

Exercice 6 **a)** On a $1!=1$ et $2^{1-1}=2^0=1$ donc la proposition « $n!\geq 2^{n-1}$ » est vraie pour $n=1$.

Supposons que pour $k\geq 1$, on ait $k\,!\geq 2^{k-1}$. Il faut alors démontrer, sous cette hypothèse, que $(k+1)\,!\geq 2^k$.

On sait que $(k+1)\,!=(k+1)\times k\,!$ ainsi, en multipliant chaque membre de l'hypothèse de récurrence par $k+1$ qui est positif, on obtient

$$(k+1)\times k\,!\geq (k+1)\times 2^{k-1} \text{ c'est-à-dire } (k+1)\,!\geq (k+1)\times 2^{k-1} \quad (1)$$

or, pour tout $k\geq 1$,

$$k+1\geq 2 \text{ donc } (k+1)\times 2^{k-1}\geq 2^k \quad (2)$$

et les inégalités (1) et (2) conduisent à $(k+1)\,!\geq 2^k$.

Finalement, pour tout entier naturel $n\geq 1$, on a : $n\,!\geq 2^{n-1}$.

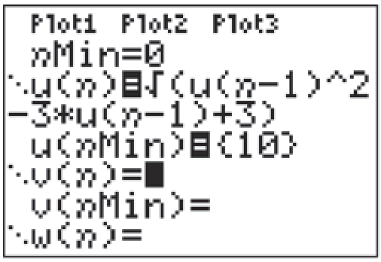
b)

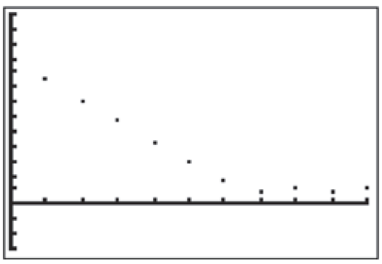
n	1	2	3	4
$n\,!$	1	2	6	24
2^n	2	4	8	16

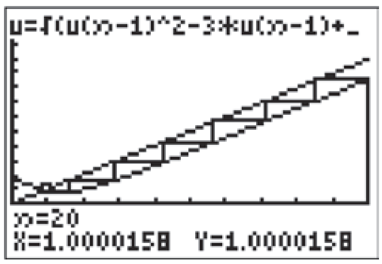
À l'aide de ce tableau, on constate que la proposition « $n\,!\geq 2^n$ » n'est pas vraie pour les rangs n = 1, n = 2 et $n=3$ mais qu'elle l'est pour le rang n = 4. En supposant alors que pour $k\geq 4$, on ait $k\,!\geq 2^k$, on est amené à démontrer que $(k+1)\,!\geq 2^{k+1}$ ce qui se fait en suivant exactement la même démarche qu'au a). Ainsi, pour tout entier naturel $n\geq 4$, on a $n\,!\geq 2^n$.

Corrigé des activités du chapitre 3

■ **Activité 1** **a)** À l'aide de la calculatrice (par exemple), on définit la suite et l'on obtient les deux types de représentations graphiques.

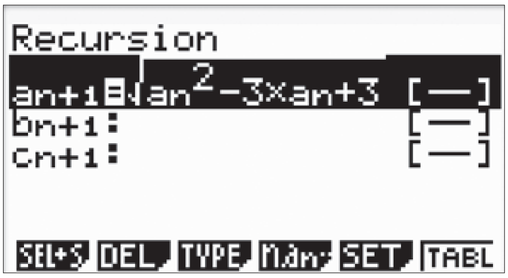


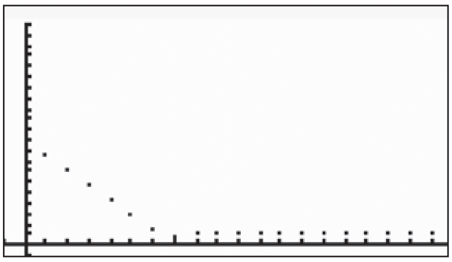


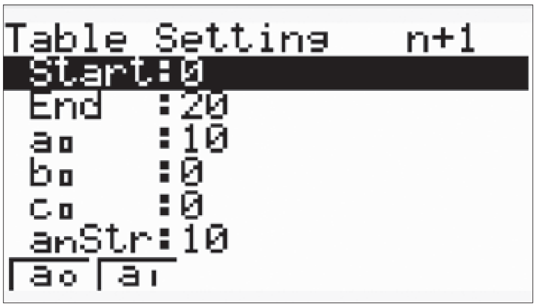


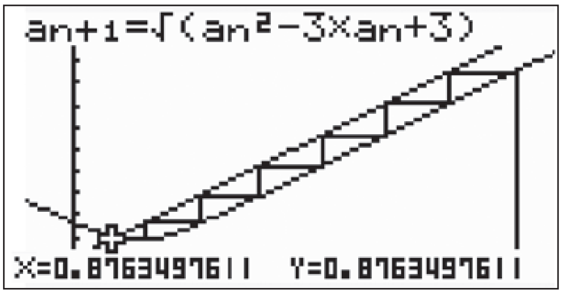
TI82 Stats.fr (ou TI83, TI84)

Casio Graph 35+



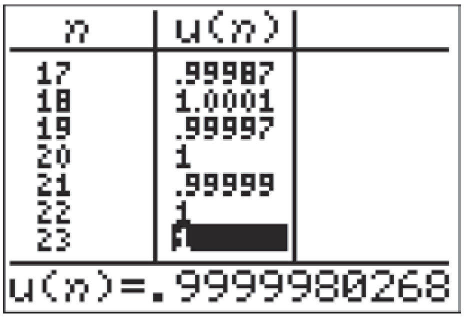


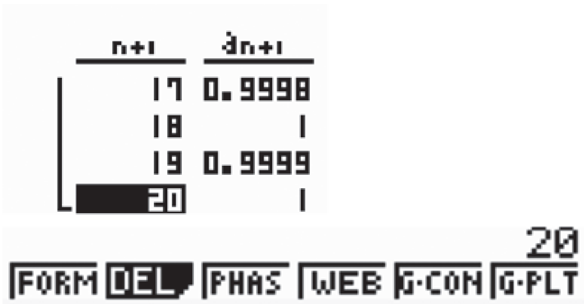




Au vu de ces graphiques, il semble que les valeurs de u_n tendent à se stabiliser autour d'un certain nombre. On dira que la suite (u_n) semble converger vers ce nombre.

b) À l'aide du tableau de valeurs ci-dessous, il semble que la suite (u_n) admette pour limite 1 lorsque n devient grand.





c) Pour répondre à cette question, on travaille à l'aide du tableau de valeurs obtenu précédemment.

Il semble alors que $|u_n - 1| < 10^{-2}$ pour $n \geq 11$ puis $|u_n - 1| < 10^{-5}$ pour $n \geq 21$ et enfin $|u_n - 1| < 10^{-8}$ pour $n \geq 31$.

Pour plus de clarté, on peut utiliser un tableur et compléter le travail en créant une suite (v_n) définie par $v_n = |u_n - 1|$. Les fonctions utilisées sur tableur sont les fonctions RACINE pour la racine carrée et ABS pour la valeur absolue.

C2		=	=ABS(B2-1)
	A	B	C
1	n	u_n	$\lvert u_n -1 \rvert$
2	0	10	9
3	1	8,544003745	7,544003745
10	⋮		
11	9	0,968145751	0,031854249
12	10	1,0163016	0,0163016
13	**11**	**0,991949667**	**0,008050333**
14	12	1,004049372	0,004049372
	⋮		
21	19	0,999968429	3,15706E-05
22	20	1,000015786	1,57857E-05
23	**21**	**0,999992107**	**7,89276E-06**
24	22	1,000003946	3,9464E-06
	⋮		
31	29	0,999999969	3,08312E-08
32	30	1,000000015	1,54156E-08
33	**31**	**0,999999992**	**7,7078E-09**
34	32	1,000000004	3,8539E-09

■ **Activité 2** **a)**

n	100	1000	10^6	10^{10}
$\frac{1}{\sqrt{n}}$	10^{-1}	$\frac{\sqrt{10}}{100} \approx 0{,}032$	10^{-3}	10^{-5}
$\frac{1}{n}$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-10}
$\frac{1}{n^2}$	10^{-4}	10^{-6}	10^{-12}	10^{-20}
$\frac{1}{n^3}$	10^{-6}	10^{-9}	10^{-18}	10^{-30}

b) Il semble que toutes ces suites admettent pour limite 0, seule diffère la vitesse à laquelle ces suites tendent vers 0.

c) Comme précédemment, on constate que l'on peut rendre u_n aussi proche de sa limite pourvu que n soit suffisamment grand.

En effet, on a : $0 \le \frac{1}{\sqrt{n}} \le 10^{-2} \Leftrightarrow \sqrt{n} \ge 10^{2} \Leftrightarrow n \ge 10^{4}$ et $0 \le \frac{1}{\sqrt{n}} \le 10^{-2}$ pour tout n supérieur au rang $N = 10^4$. De façon analogue, on a $0 \le \frac{1}{\sqrt{n}} \le 10^{-18}$ pour tout n supérieur au rang $N = 10^{36}$ et $0 \le \frac{1}{\sqrt{n}} \le 10^{-30}$ pour tout n supérieur au rang $N = 10^{60}$.

d) On a : $0 \le \frac{1}{n^3} \le 10^{-2} \Leftrightarrow n^3 \ge 100$ or la suite de terme général n^3 est croissante et on observe que $4^3 < 100$ alors que $5^3 > 100$ donc $0 \le \frac{1}{n^3} \le 10^{-2}$ pour tout n supérieur au rang $N = 5$.

Pour les autres résultats, la démarche est la même que pour la question c). On résume les résultats dans un tableau.

Valeurs de r	10^{-2}	10^{-18}	10^{-30}
$0 \le \frac{1}{n} \le r$ pour $n \ge N$	$N = 100$	$N = 10^{18}$	$N = 10^{30}$
$0 \le \frac{1}{n^2} \le r$ pour $n \ge N$	$N = 10$	$N = 10^{9}$	$N = 10^{15}$
$0 \le \frac{1}{n^3} \le r$ pour $n \ge N$	$N = 5$	$N = 10^{6}$	$N = 10^{10}$

Remarque

On pourrait écrire un algorithme assez simple comportant une boucle « tant que » permettant d'obtenir le résultat des questions c) et d).
On trouve ci-contre un tel algorithme implémenté sous Algobox.
Il suffit alors de choisir la valeur de r à savoir 10^{-2} puis 10^{-18} et enfin 10^{-30} dans l'exemple choisi pour obtenir le rang cherché. Cependant, l'algorithme est très lent et nécessite un grand nombre de boucles. On est dès lors très vite limité d'autant plus que sous Algobox, le nombre de boucles ne peut dépasser 200000.

```
VARIABLES
  r EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE r
  n PREND_LA_VALEUR 1
  TANT_QUE (1/sqrt(n)>r) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

■ Activité 3

a)

n	100	1000	10^6	10^{10}
$\sqrt{n}$	10	$10\sqrt{10} \approx 31{,}6$	10^3	10^5
n^2	10^4	10^6	10^{12}	10^{20}
n^3	10^6	10^9	10^{18}	10^{30}

b) Il semble que toutes ces suites admettent pour limite $+\infty$, seule diffère la vitesse à laquelle ces suites tendent vers $+\infty$.

c) On a :

$\sqrt{n} \geq 10^3 \Leftrightarrow n \geq 10^6$ donc $\sqrt{n} \geq 10^3$ pour tout n supérieur au rang $N = 10^3$;

$\sqrt{n} \geq 10^{10} \Leftrightarrow n \geq 10^{20}$ donc $\sqrt{n} \geq 10^{10}$ pour tout n supérieur au rang $N = 10^{20}$;

$\sqrt{n} \geq 10^{30} \Leftrightarrow n \geq 10^{60}$ donc $\sqrt{n} \geq 10^{30}$ pour tout n supérieur au rang $N = 10^{60}$.

d) Comme $n \geq 0$, $n^2 \geq 10^3 \Leftrightarrow n \geq \sqrt{1000}$ or $\sqrt{1000} \approx 31{,}6$ et $n \in \mathbb{N}$ donc $n^2 \geq 10^3$ pour tout n supérieur au rang $N = 32$.

La suite de terme général n^3 est croissante or $2154^3 < 10^{10}$ et $2155^3 > 10^{10}$ donc $n^3 \geq 10^{10}$ pour tout n supérieur au rang $N = 2155$.

Les autres inéquations peuvent être aisément résolues et les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Valeurs de A	10^3	10^{10}	10^{30}
$n^2 \geq A$ pour $n \geq N$	$N = 32$	$N = 10^5$	$N = 10^{15}$
$n^3 \geq A$ pour $n \geq N$	$N = 10$	$N = 2155$	$N = 10^{10}$

■ Activité 4

a) Compte tenu de la construction du flocon, il semble clair que les suites (C_n), (P_n) et (A_n) soient croissantes et la suite (L_n) décroissante.

Par ailleurs, il semble intuitif de conjecturer que pour des grandes valeurs de n, la suite (C_n) tende vers $+\infty$, la suite (L_n) tende vers 0. En revanche, il semble difficile de conjecturer intuitivement le comportement des suites (P_n) et (A_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

b)

E3 = =E2+B2*C3^2*RACINE(3)/4

	A	B	C	D	E
1	n	C_n	L_n	P_n	A_n
2	0	3	10	30	43,30127019
3	1	12	3,333333333	40	57,73502692
4	2	48	1,111111111	53,33333333	64,15002991
5	3	192	0,37037037	71,11111111	67,00114235
6	4	768	0,12345679	94,81481481	68,26830344
27	25	3,3777E+15	1,18024E-11	39864,80737	69,28203226
28	26	1,35108E+16	3,93412E-12	53153,0765	69,28203228
29	27	5,40432E+16	1,31137E-12	70870,76866	69,28203229
30	28	2,16173E+17	4,37124E-13	94494,35822	69,2820323
31	29	8,64691E+17	1,45708E-13	125992,4776	69,2820323
32	30	3,45876E+18	4,85694E-14	167989,9702	69,2820323

On peut alors confirmer les conjectures précédentes et préciser que (P_n) semble tendre vers $+\infty$ alors que (A_n) semble tendre vers un nombre limite proche de 69,28.

c) Puisque la suite (P_n) semble tendre vers $+\infty$, il est possible que le périmètre dépasse un kilomètre. L'unité est le centimètre or $1\text{ km} = 100000\text{ cm}$, on cherche donc n tel que $P_n \geq 100000$ et à l'aide du tableur, il semble que ce soit le cas à partir du rang $n = 29$. L'aire du flocon vaut alors environ $69{,}28\text{ cm}^2$.

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 3

Exercice 7 ▸ On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3n^2-n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}3n^2\left(1-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{n}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2=+\infty$ donc, par somme,

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty.$$

▸ On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-3n)=-\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+n-2\right)=+\infty$ (par somme car $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-2\right)=+\infty$) ainsi, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=-\infty$.

▶ Pour $n>2$, $c_n=\dfrac{1-3n^2}{(n+1)(n-2)}=\dfrac{1-3n^2}{n^2-n-2}=\dfrac{n^2(\frac{1}{n^2}-3)}{n^2(1-\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2})}=\dfrac{\frac{1}{n^2}-3}{1-\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}-3\right)=-3$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}\right)=1$ d'où par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=-3$.

▶ Pour $n\in\mathbb{N}$, $d_n=1+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7^2}+\ldots+\dfrac{1}{7^n}=\dfrac{1-\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{7}}=\dfrac{7}{6}\left(1-\left(\dfrac{1}{7}\right)^{n+1}\right)$

or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{7}\right)^{n+1}=0$ car $-1<\dfrac{1}{7}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}d_n=\dfrac{7}{6}$.

▶ On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=0$ car $-1<-\dfrac{1}{2}<1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}e_n=3$.

▶ On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}5^n=+\infty$ (car $5>1$) donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n+5^n\right)=+\infty$ puis par inversion $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n=0$.

▶ Pour $n\in\mathbb{N}$, $g_n=2^n+2^{n+2}-2^{n+3}=2^n(1+2^2-2^3)=-3\times 2^n$

or $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ (car $2>1$) donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty}g_n=-\infty$.

▶ Pour $n\in\mathbb{N}$, $h_n=3^n-7^n=7^n(\left(\dfrac{3}{7}\right)^n-1)$ or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{7}\right)^n=0$ (car $-1<\dfrac{3}{7}<1$) donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\dfrac{3}{7}\right)^n-1\right]=-1$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}7^n=+\infty$ (car $7>1$) donc par produit

$$\lim_{n\to+\infty}h_n=-\infty.$$

On peut remarquer que la transformation d'écriture $h_n=3^n-7^n=3^n(1-\left(\dfrac{7}{3}\right)^n)$ permet d'obtenir le résultat tout aussi rapidement.

Exercice 8 ❶ On a : $u_n=\dfrac{n\sqrt{n}-1000}{n}=\sqrt{n}-\dfrac{1000}{n}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1000}{n}\right)=0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

❷ **a)** On a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ donc, par définition de la limite, A étant un réel quelconque, on peut trouver un rang au-delà duquel $u_n\geq A$.

b) Soit $n \geq 1$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - \frac{1000}{n+1} - \sqrt{n} + \frac{1000}{n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} + \frac{1000}{n} - \frac{1000}{n+1}$$

puis

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} + 1000\frac{n+1-n}{(n+1)n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} + \frac{1000}{(n+1)n}$$

or $\dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > 0$ car l'inverse d'une somme de deux nombres strictement positifs et $\dfrac{1000}{(n+1)n} > 0$ car $n > 0$ et $n+1 > 0$ ainsi, par somme, $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.

c) La suite (u_n) étant croissante, pour obtenir le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à l'intervalle $\left]A\,;+\infty\right[$ où A est un réel quelconque, il suffit de calculer les termes successifs de la suite tant que $u_n \leq A$.

L'implémentation sous Algobox est alors la suivante :

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE A
  n PREND_LA_VALEUR 1
  TANT_QUE ((n*sqrt(n)-1000)/n<=A) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "La valeur N cherchée est N = "
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

On peut remarquer que (u_n) tend lentement vers $+\infty$ et sous Algobox, on est très vite limité par le grand nombre de boucles nécessaires pour obtenir le résultat.

▶ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $-1 \leq -(-1)^n \leq 1$ puis $2n^2 - 1 \leq a_n \leq 2n^2 + 1$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2n^2 - 1\right) = +\infty$ donc, par comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

▶ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin\left(\sqrt{n}\right) \leq 1$ donc $-1 - n^3 \leq b_n \leq 1 - n^3$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - n^3\right) = -\infty$ donc, par comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = -\infty$.

▶ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sin n| \leq 1$ donc $0 \leq |c_n| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ (car $\left(\frac{3}{4}\right)^n \geq 0$)

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{3}{4} < 1$) d'où par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} |c_n| = 0$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 0$.

▶ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos n \leq 1$ donc $n-1 \leq n + \cos n \leq n+1$. De plus, pour tout $n \geq 2$, $3-2n < 0$

donc $\frac{1}{3-2n} < 0$ ainsi par produit, pour tout $n \geq 2$, $\frac{n+1}{3-2n} \leq \frac{n+\cos n}{3-2n} \leq \frac{n-1}{3-2n}$.

Pour $n \geq 2$, $\frac{n+1}{3-2n} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{3}{n}-2\right)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}-2}$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{n} - 2 = -2$ puis par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{3-2n} = -\frac{1}{2}$. De façon analogue, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n-1}{3-2n} = -\frac{1}{2}$ (on remarquera à cet endroit qu'il n'est pas nécessaire de réécrire le détail de la démonstration dans la mesure où on utilise exactement la même démarche). Finalement, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = -\infty$.

Exercice 10 Pour tout $n \geq 2$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $n-1 \leq n+(-1)^n \leq n+1$ puis par inversion $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+(-1)^n} \leq \frac{1}{n-1}$ et, par produit par $\sqrt{n}$ qui est positif, on a

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq u_n - 3 \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1}.$$

Puis pour $n \geq 2$, $\frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$ puis par inversion $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$. De façon analogue, on montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1} = 0$.

Ainsi, par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - 3) = 0$ ce qui conduit à $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

Exercice 11 On a $u_{n+1}=\dfrac{1}{n+1+1}+\dfrac{1}{n+1+2}+\ldots+\dfrac{1}{2(n+1)}$

donc $u_{n+1}=\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\ldots+\dfrac{1}{2n+2}$ ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\ldots-\frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1} \\ &= \frac{2n+1+2(n+1)-2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)}=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}. \end{aligned}$$

Comme $n\geq 0$, on a $2(n+1)(2n+1)>0$ et pour tout $n\geq 0$, $u_{n+1}-u_n\geq 0$ donc (u_n) est croissante.

Pour tout $1\leq k\leq n$, $n+1\leq n+k\leq 2n$ donc $\dfrac{1}{2n}\leq\dfrac{1}{n+k}\leq\dfrac{1}{n+1}$ ainsi u_n est la somme de n termes tous inférieurs à $\dfrac{1}{n+1}$ donc $u_n\leq\dfrac{n}{n+1}$ d'où $u_n\leq 1$.

Finalement, (u_n) est croissante et majorée par 1 donc (u_n) est convergente (théorème de la convergence monotone). On remarquera que l'on n'obtient pas la valeur de la limite. La seule information dont on dispose parce que l'on a prouvé, c'est que la limite est inférieure à 1.

Corrigé des exercices de synthèse du chapitre 4

Exercice I ❶ La fonction f est une fonction rationnelle définie sur $]-\infty\,;6[$ donc f est dérivable sur $]-\infty\,;6[$. Pour $x<6$, on a $f'(x)=9\dfrac{-(-1)}{(6-x)^2}=\dfrac{9}{(6-x)^2}$ donc $f'(x)>0$ sur $]-\infty\,;6[$ et f est strictement croissante sur $]-\infty\,;6[$.

❷ **a)** On souhaite démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n<3$ et $u_n\leq u_{n+1}$. On peut donc montrer en une seule étape que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq u_{n+1}<3$. On raisonne par récurrence.

On a $u_0=-3$ et $u_1=f(u_0)=\dfrac{9}{6-u_0}=1$ donc $u_0\leq u_1<3$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \leq u_{k+1} < 3$. alors $f(u_k) \leq f(u_{k+1}) < f(3)$ car f est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 6[$.

On obtient $u_{k+1} \leq u_{k+2} < 3$.

Finalement, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \leq u_{n+1} < 3$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 3 donc, par le théorème de la convergence monotone, on peut en déduire que (u_n) est convergente. Par ailleurs, pour tout $n \geq 0$, $u_n < 3$ donc la limite ℓ de (u_n) vérifie $\ell \leq 3$ comme conséquence de la compatibilité avec l'ordre.

❸ **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\dfrac{9}{6-u_n} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{6-u_n}{3u_n - 9} - \frac{1}{u_n - 3}$$

$$= \frac{6-u_n-3}{3(u_n-3)} = \frac{3-u_n}{3(u_n-3)} = -\frac{1}{3}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - \dfrac{1}{3}$ et la suite (v_n) est arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$ et de terme initial $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 3} = -\dfrac{1}{6}$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$ donc $u_n - 3 = \dfrac{1}{v_n}$ ou encore $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 3$.

La suite (v_n) étant arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$ et de terme initial $v_0 = -\dfrac{1}{6}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{n}{3}$ et on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

Par inversion, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{v_n} = 0$ puis par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{v_n} + 3\right) = 3$.

Finalement, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

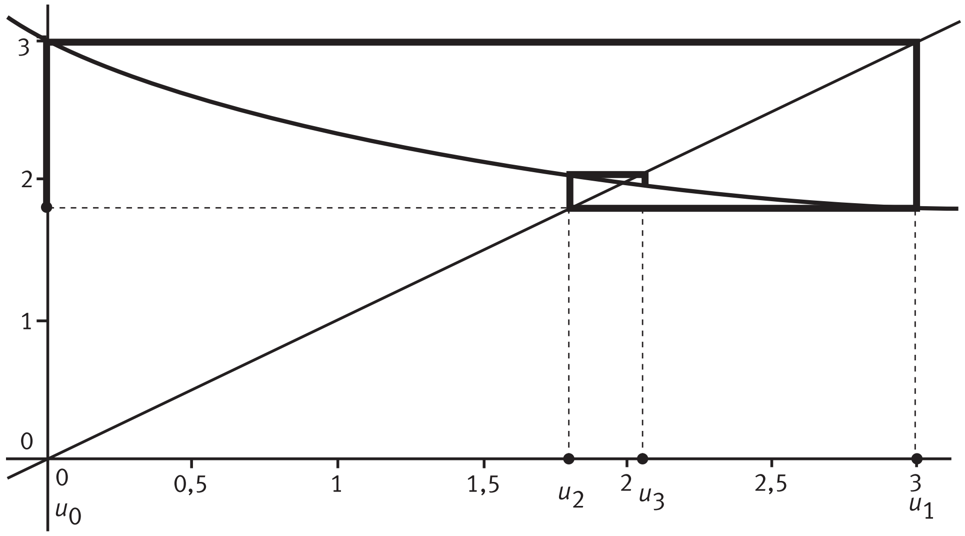
Exercice II

❶ La suite (u_n) est constante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$ soit $\dfrac{u_n + 6}{u_n + 2} = u_n$, $u_n + 6 = u_n(u_n + 2)$ ou encore $u_n^2 + u_n - 6 = 0$

or l'équation $x^2 + x - 6 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 25 = 5^2$ et pour solutions $a = 2$ et $b = -3$. Donc, en choisissant $u_0 = 2$ ou $u_0 = -3$, (u_n) est constante.

❷ **a)** La fonction f est une fonction rationnelle définie sur $E = \left]-\infty\ ;\ -2\right[\cup \left]-2\ ;\ +\infty\right[$ donc f est dérivable sur tout intervalle inclus dans E et, pour $x \neq -2$, on a $f'(x) = \dfrac{(x+2)\times 1 - 1\times(x+6)}{(x+2)^2} = \dfrac{-4}{(x+2)^2}$. Par suite,

$f'(x) < 0$ sur E et f est décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ -2\right[$ et sur $\left]-2\ ;\ +\infty\right[$.

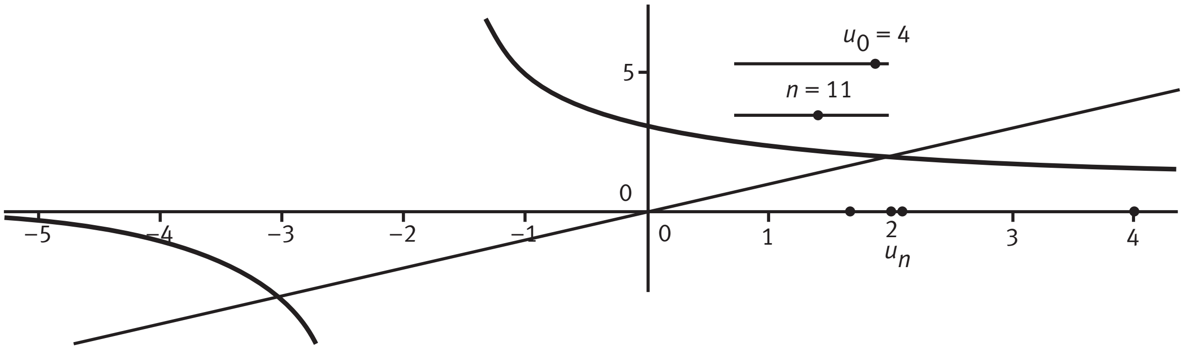


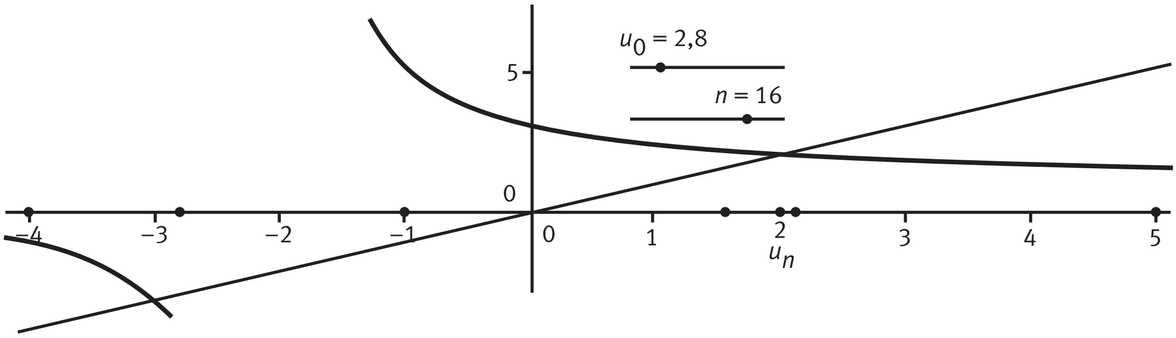
b) Au vu du graphique, il semble que (u_n) ne soit pas monotone et qu'elle soit convergente vers 2.

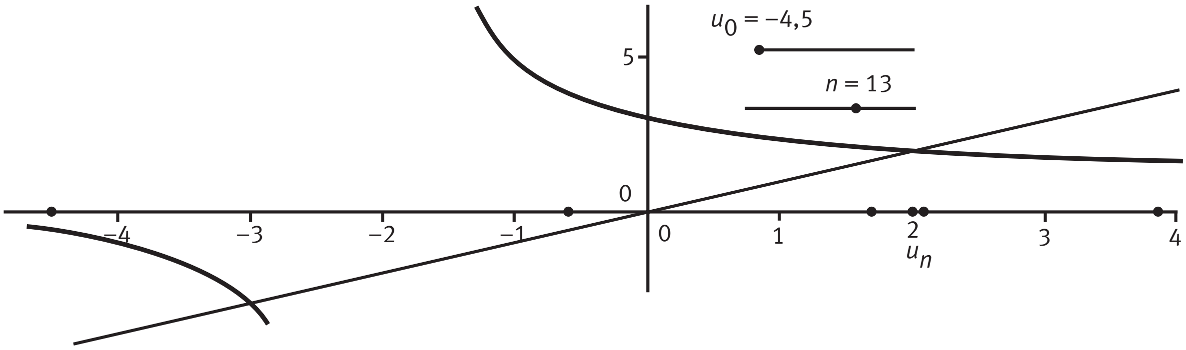
c) À l'aide du logiciel Geogebra, après avoir créé la fonction f, on crée un curseur représentant u_0 que l'on peut nommer u_0 et qui prend des valeurs entre -10 et 10 par exemple. On crée un deuxième curseur n prenant des valeurs entières entre 0 et 20 par exemple. Enfin, on sait que l'on peut obtenir u_n par la fonction **Itération[f,u_0,n]**. Pour cela, on entre dans la barre de saisie **u_n= Itération[f,u_0,n]**. On peut alors visualiser le problème en représentant en abscisse le point de coordonnées (u_n,0) .

Il reste alors à choisir différentes valeurs pour u_0 et, dans chaque cas, à faire varier n pour observer le comportement de u_n.

On obtient par exemple :







À l'aide d'un tableur, on entre les valeurs de n dans la colonne A et en B3, on entre la formule =(B2+6)/(B2+2). Il suffit alors de choisir différentes valeurs de u_0 en B2 pour obtenir des conjectures. On obtient par exemple :

	A	B
1	n	u_n
2	0	4
3	1	1,66666667
4	2	2,09090909
5	3	1,97777778
6	4	2,00558659
7	5	1,9986053
8	6	2,0003488
9	7	1,99991281

	A	B
1	n	u_n
2	0	-2,8
3	1	-4
4	2	-1
5	3	5
6	4	1,57142857
7	5	2,12
8	6	1,97087379
9	7	2,00733496

	A	B
1	n	u_n
2	0	-4,5
3	1	-0,6
4	2	3,85714286
5	3	1,68292683
6	4	2,08609272
7	5	1,97893031
8	6	2,00529532
9	7	1,99867792

Ces résultats permettent de retrouver le fait que dans les cas où $u_0 = 2$ ou $u_0 = -3,$ la suite est constante. Dans le cas où $u_0 = -3$, elle est donc convergente vers -3 alors que dans tous les autres cas, elle semble convergente vers 2.

❸

On rappelle que $b = -3.$

Pour qu'il existe un rang n tel que $u_{n+1} = -3$ alors $\dfrac{u_n + 6}{u_n + 2} = -3$ d'où $u_n + 6 = -3(u_n + 2)$ ce qui conduit à $u_n = -3.$ Autrement dit, pour qu'un terme de la suite soit égale à $-3,$ il faut que le précédent soit $-3.$ En supposant $u_0 \neq -3,$ on ne peut donc pas trouver de valeur de n pour laquelle $u_n = -3.$

❹ En choisissant $u_0 \neq -3$, la suite (v_n) est donc bien définie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-a}{u_{n+1}-b} = \frac{\dfrac{u_n+6}{u_n+2}-2}{\dfrac{u_n+6}{u_n+2}+3} = \frac{-u_n+2}{4u_n+12} = \frac{-(u_n-2)}{4(u_n+3)} = -\frac{1}{4}\frac{u_n-a}{u_n-b} = -\frac{1}{4}v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $-\frac{1}{4}$ et de terme initiale

$$v_0 = \frac{u_0-a}{u_0-b} \text{ donc } v_n = v_0\left(-\frac{1}{4}\right)^n.$$

On remarque que $a \neq b$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 1$ puis de $v_n = \dfrac{u_n-a}{u_n-b}$, on en déduit successivement que

$$v_n(u_n-b) = u_n - a,\ u_n(v_n-1) = bv_n - a$$

et enfin $u_n = \dfrac{bv_n-a}{v_n-1}$.

On rappelle que $a=2$ et $b=-3$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{-3\dfrac{u_0-2}{u_0+3}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n-2}{\dfrac{u_0-2}{u_0+3}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n-1}.$$

Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2.$

On peut remarquer que ce raisonnement convient pour toute valeur de u_0 différente de -2 et de -3. Dans le cas où $u_0 = -2$, la suite (u_n) n'est pas définie et, dans le cas où $u_0 = -3$, la suite (u_n) est constante et donc, convergente vers -3. Les résultats démontrés confirment donc les conjectures émises précédemment.

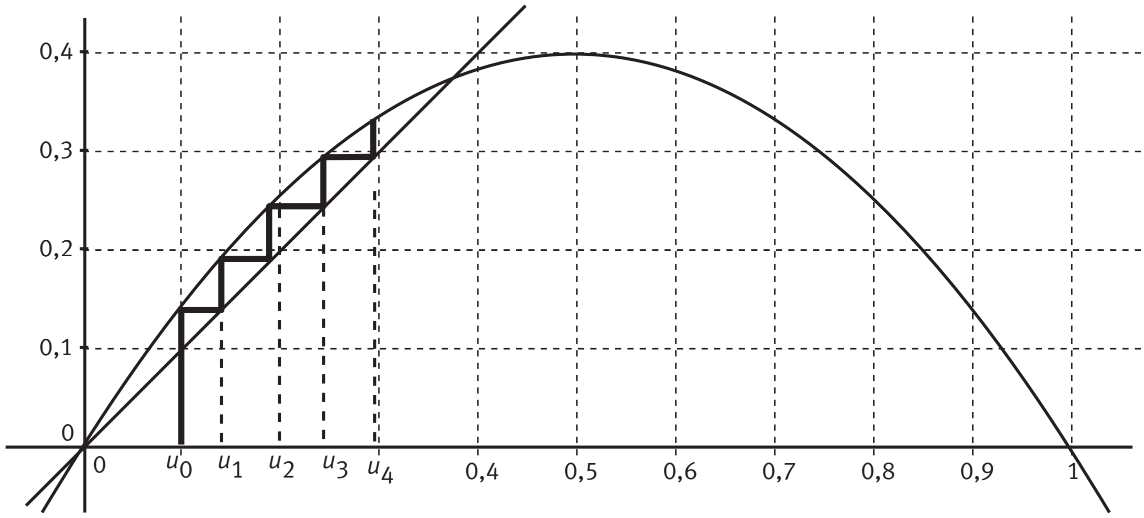
Exercice III ❶ La fonction f est un polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

on a $f'(x) = 1{,}6 - 1{,}6 \times 2x = 1{,}6(1-2x)$. Par suite, $f'(x)$ est du signe de $1-2x$

d'où $f'(x) \geq 0$ sur $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$. La fonction f est donc

croissante sur $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

❷



Il semble alors que la suite (u_n) soit croissante et convergente vers l'abscisse non nulle du point d'intersection de la courbe représentant f et de la droite d'équation $y = x$. On peut préciser la conjecture en résolvant l'équation $f(x) = x$.

On a : $f(x)=x \Leftrightarrow 1{,}6x-1{,}6x^2=x \Leftrightarrow 0{,}6x-1{,}6x^2=0 \Leftrightarrow 0{,}2x(3-8x)=0$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\frac{3}{8}.$$

Ainsi, il semble que (u_n) soit convergente vers $\frac{3}{8}$.

❸ **a)** On a $u_0=0{,}1$ puis $u_1=1{,}6u_0(1-u_0)=f(u_0)=0{,}144$ donc $0 \le u_0 \le u_1 \le \frac{3}{8}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \le u_k \le u_{k+1} \le \frac{3}{8}$ alors $f(0) \le f(u_k) \le f(u_{k+1}) \le f(\frac{3}{8})$ car f est croissante sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$ donc sur $\left[0\,;\,\frac{3}{8}\right]$. Comme $f(0) = 0$, $f(u_k)=u_{k+1}$, $f(u_{k+1})=u_{k+2}$ et $f\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{3}{8}$, on a donc $0 \le u_{k+1} \le u_{k+2} \le \frac{3}{8}$.

Ainsi, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \frac{3}{8}$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{8}$ donc elle est convergente par le théorème de la convergence monotone. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \le u_n \le \frac{3}{8}$ donc la limite ℓ de (u_n) vérifie $0 \le \ell \le \frac{3}{8}$.

❹ **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\frac{3}{8}-u_{n+1}=\frac{3}{8}-1{,}6u_n(1-u_n)=\frac{3}{8}-\frac{8}{5}u_n(1-u_n)=\frac{3}{8}-\frac{8}{5}u_n+\frac{8}{5}u_n^2$$

$$\text{or } 1{,}6\left(\frac{5}{8}-u_n\right)\left(\frac{3}{8}-u_n\right)=\frac{8}{5}\left(\frac{5}{8}-u_n\right)\left(\frac{3}{8}-u_n\right)=\left(1-\frac{8}{5}u_n\right)\left(\frac{3}{8}-u_n\right)$$
$$=\frac{3}{8}-\frac{8}{5}u_n+\frac{8}{5}u_n^2$$

donc $\frac{3}{8}-u_{n+1}=1{,}6\left(\frac{5}{8}-u_n\right)\left(\frac{3}{8}-u_n\right)$.

La suite (u_n) est croissante de terme initial $u_0=0{,}1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0{,}1$ puis $1{,}6\left(\frac{5}{8}-u_n\right)\leq 1{,}6\left(\frac{5}{8}-0{,}1\right)$, c'est-à-dire $1{,}6\left(\frac{5}{8}-u_n\right)\leq 0{,}84$. De plus, $\frac{3}{8}-u_n \geq 0$ donc $1{,}6\left(\frac{5}{8}-u_n\right)\left(\frac{3}{8}-u_n\right)\leq 0{,}84\left(\frac{3}{8}-u_n\right)$ ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{8}-u_{n+1}\leq 0{,}84\left(\frac{3}{8}-u_n\right)$.

b) On raisonne par récurrence. On a $\frac{3}{8}-u_0=\frac{3}{8}-0{,}1=0{,}275$ et $0{,}84^0=1$ donc la proposition est vraie au rang $n = 0$. Supposons qu'elle le soit pour un certain rang k ; c'est-à-dire supposons que pour $k \in \mathbb{N}$, on ait $\frac{3}{8}-u_k \leq 0{,}84^k$.

Sous cette hypothèse, on a alors $0{,}84\left(\frac{3}{8}-u_k\right)\leq 0{,}84^{k+1}$ or $\frac{3}{8}-u_{k+1}\leq 0{,}84\left(\frac{3}{8}-u_k\right)$ d'où $\frac{3}{8}-u_{k+1}\leq 0{,}84^{k+1}$ et la proposition est héréditaire. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{3}{8}-u_n \leq 0{,}84^n$.

c) Des questions 3.a et 4.b, on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{3}{8}-u_n \leq 0{,}84^n$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}84^n=0$ car $-1<0{,}84<1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{8}-u_n\right)=0$ par le théorème des gendarmes. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{3}{8}$.

Exercice IV

❶

Vrai En effet, toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

❷

Faux Toute suite décroissante et minorée est bien convergente par le théorème de la convergence monotone. Si elle est minorée par 0, on peut en déduire que sa limite ℓ vérifie $\ell \geq 0$ mais rien ne permet d'affirmer que la limite est nulle. Prenons la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{n}$. Cette suite est décroissante, elle est minorée par 0 mais elle admet pour limite 1.

❸

Vrai Toute suite croissante est minorée par son premier terme. Si la suite est de plus majorée, elle est donc bornée.

❹

Vrai En effet, dire qu'une suite qui admet pour limite $+\infty$ signifie que, quel que soit le réel M, on peut trouver un certain rang au delà duquel tous les termes de la suite dépasse M. Ainsi, aucun réel ne peut être un majorant d'une telle suite.

❺

Faux Prenons $u_n = -\frac{1}{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{n+1}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$. En revanche, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc, dans ce cas, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

On peut remarquer que par la compatibité avec l'ordre, lorsque (u_n) et (v_n) sont des suites convergentes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$ alors, la seule affirmation que l'on puisse en déduire est que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice V

❶ La fonction f est une fonction homographique donc (u_n) est définie par $u_n = f(n) = \frac{an+b}{cn+d}$

puis $u_n = \frac{an+b}{cn+d} = \frac{n\left(a+\frac{b}{n}\right)}{n\left(c+\frac{d}{n}\right)} = \frac{a+\frac{b}{n}}{c+\frac{d}{n}}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} a + \frac{b}{n} = a$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} c + \frac{d}{n} = c$. Par quotient, on obtient donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{a}{c}$ ainsi il suffit de choisir f telle que $\frac{a}{c} = 2012$. Par exemple, en prenant $a = 2012$ et $c = 1$, la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2012n+1}{n-3}$ convient.

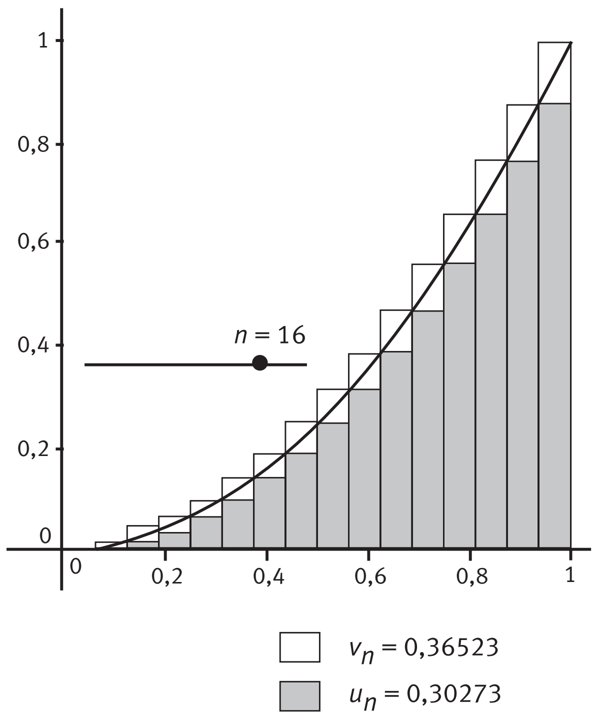
2. Si (u_n) est une suite géométrique convergente alors sa raison q est telle que $-1 < q \leq 1$. Mais si $q = 1$ la suite est contante et si $-1 < q < 1$, celle-ci converge vers 0. On ne peut donc pas trouver de suite géométrique non constante convergente vers 2012.

3. La suite (u_n) est définie par une expression de la forme $u_n = \alpha \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$ où α est un réel et q un réel différent de 1. Pour que (u_n) converge, on choisit $-1 < q < 1$ de sorte que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{1}{1-q}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{\alpha}{1-q}$.

On obtient le résultat en choisissant par exemple $\alpha = 1006$ et $q = \dfrac{1}{2}$.

4. La suite (u_n) est définie par une expression de la forme $u_n = \alpha n + \beta$. Elle est donc convergente si et seulement si $\alpha = 0$ autrement dit, si et seulement si (u_n) est constante. Par suite, on ne peut pas trouver de suite arithmétique non constante convergente vers 2012.

Exercice VI **1.** À l'aide de Geogebra, on obtient l'illustration ci-contre.



Il semble que les suites (u_n) et (v_n) soient convergentes vers une même limite comprise entre 0,3 et 0,4. L'aire A semble donc être égale à cette limite.

2. a) En s'appuyant sur le graphique, on remarque que les rectangles considérés pour calculer u_n ont tous un côté de longueur $\dfrac{1}{n}$ et la hauteur vaut $\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$ pour k allant de 0 à $n-1$.

Ainsi

$$u_n = \frac{1}{n} \times \frac{0^2}{n^2} + \frac{1}{n} \times \frac{1^2}{n^2} + \frac{1}{n} \times \frac{2^2}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n} \times \frac{(n-1)^2}{n^2}$$
$$= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2.$$

De façon analogue, on remarque que les rectangles considérés pour calculer v_n ont tous un côté de longueur $\dfrac{1}{n}$ et la hauteur vaut $\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$ pour k allant de 1 à n.

Ainsi $v_n=\frac{1}{n}\times\frac{1^2}{n^2}+\frac{1}{n}\times\frac{2^2}{n^2}+...++\frac{1}{n}\times\frac{n^2}{n^2}=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2.$

b)

Pour $n = 1$, on a $\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{1}k^2=1^2=1$ et $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1\times2\times3}{6}=1$ donc la proposition « $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ » est vérifiée au rang $n = 1$.

On suppose que pour $p\in\mathbb{N}^*$, on ait $\sum_{k=1}^{p}k^2=\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$ et, sous cette hypothèse, on montre que $\sum_{k=1}^{p+1}k^2=\frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$.

On a

$$\sum_{k=1}^{p+1}k^2=\sum_{k=1}^{p}k^2+(p+1)^2=\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}+(p+1)^2=\frac{p(p+1)(2p+1)+6(p+1)^2}{6}$$

$$=\frac{(p+1)(2p^2+7p+6)}{6}$$

or $(p+2)(2p+3)=2p^2+7p+6$ d'où $\sum_{k=1}^{p+1}k^2=\frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$ et la proposition est bien héréditaire.

Finalement pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On en déduit que $\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ d'où

$$u_n=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}\text{ alors que }v_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

c) Démontrons que la suite (u_n) est convergente. On a $(n-1)n(2n-1)=2n^3-3n^2+n$ donc, pour $n\geq1$,

$$u_n=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}=\frac{n^3\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{6n^3}=\frac{1}{6}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

or $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}=2$ puis par produit $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. En procédant de façon analogue, on obtient $\lim_{n\to+\infty}v_n=\frac{1}{3}$.

Comme on sait que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \leq A \leq v_n$, on obtient par passage à la limite (conséquence de la compatibilité avec l'ordre) que $A = \frac{1}{3}$. Finalement, l'aire cherchée vaut $\frac{1}{3}$ en unité d'aire (l'unité d'aire étant l'aire du rectangle formé par les vecteurs de base).

Exercice VII

❶ On a : $u_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $u_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2+1} + \frac{2}{2\times 2+1} = \frac{11}{15}$

et $u_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{k}{3k+1} = \frac{1}{3+1} + \frac{2}{3\times 2+1} + \frac{3}{3\times 3+1} = \frac{117}{140}$.

❷

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k tels que $1 \leq k \leq n$. On a $\frac{k}{nk+1} = \frac{1}{n+\frac{1}{k}}$ or, de $1 \leq k \leq n$ on déduit que $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} \leq 1$ puis $n+\frac{1}{n} \leq n+\frac{1}{k} \leq n+1$ d'où $n \leq n+\frac{1}{k} \leq n+1$ car $\frac{1}{n} > 0$. Alors par inversion $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{n}$, c'est-à-dire $\frac{1}{n+1} \leq \frac{k}{nk+1} \leq \frac{1}{n}$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n+1} \leq \frac{k}{nk+1} \leq \frac{1}{n}$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{nk+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$ or $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} = n \times \frac{1}{n+1}$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n}$ car dans chaque cas on considère la somme de n termes identiques d'où $\frac{n}{n+1} \leq u_n \leq 1$.

c) On a $\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$ et par inversion $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

❸ **a)** On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ donc, par définition, on peut trouver un un entier p strictement positif tel que, pour tout entier $n \geq p$, on a $|u_n - 1| < 10^{-2}$.

De $\dfrac{n}{n+1} \leq u_n \leq 1$, on déduit que $\dfrac{-1}{n+1} \leq u_n - 1 \leq 0$ d'où $|u_n - 1| \leq \dfrac{1}{n+1}$. Ainsi, pour que $|u_n - 1| < 10^{-2}$, il suffit que $\dfrac{1}{n+1} < 10^{-2}$, $n+1 > 100$ puis $n > 99$ c'est-à-dire $n \geq 100$. En choisissant $p = 100$, on est assuré que pour tout entier $n \geq p$, on a $|u_n - 1| < 10^{-2}$.

b) À l'aide de l'algorithme ci-dessous implémenté sous Algobox, on obtient $u_{100} \approx 0{,}99948289$

```
VARIABLES
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  u PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A 100
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR u+k/(100*k+1)
    FIN_POUR
  AFFICHER u
FIN_ALGORITHME
```

c) Compte tenu de la question précédente, l'entier p cherché dans cette question est nécessairement inférieur ou égal à 100. Pour répondre à la question, on peut procéder de l'une des deux façons suivantes.

▶ Calculer toutes les valeurs de u_n pour n allant de 1 à 100 et garder la plus petite valeur de n pour laquelle $|u_n - 1| < 10^{-2}$. On remarquera qu'en travaillant dans ces sens, on ne peut pas s'arrêter dès que la condition $|u_n - 1| < 10^{-2}$ est vérifiée pour un certain entier p car on n'a aucune information sur le comportement de la suite (u_n) pour $n \geq p$. On obtient par exemple l'algorithme de gauche.

▶ Raisonner dans l'autre sens en calculant les termes de la suite à partir de $n = 100$ et s'arrêter dès que la condition $|u_n - 1| \geq 10^{-2}$ est vérifiée. On obtient par exemple l'algorithme de droite.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  p PREND_LA_VALEUR 0
  POUR n ALLANT_DE 1 A 100
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR 0
    POUR k ALLANT_DE 1 A n
      DEBUT_POUR
      u PREND_LA_VALEUR u+k/(n*k+1)
      FIN_POUR
    SI (abs(u-1)>=0.01) ALORS
      DEBUT_SI
      p PREND_LA_VALEUR n+1
      FIN_SI
    FIN_POUR
  u PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A p
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR u+k/(p*k+1)
    FIN_POUR
  AFFICHER "p= "
  AFFICHER p
  AFFICHER " et u(p)= "
  AFFICHER u
FIN_ALGORITHME
```

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  p PREND_LA_VALEUR 100
  n PREND_LA_VALEUR 100
  u PREND_LA_VALEUR 1
  TANT_QUE (abs(u-1)<0.01) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n-1
    u PREND_LA_VALEUR 0
    POUR k ALLANT_DE 1 A n
      DEBUT_POUR
      u PREND_LA_VALEUR u+k/(n*k+1)
      FIN_POUR
    FIN_TANT_QUE
  p PREND_LA_VALEUR n+1
  u PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A p
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR u+k/(p*k+1)
    FIN_POUR
  AFFICHER "p= "
  AFFICHER p
  AFFICHER " et u(p)= "
  AFFICHER u
FIN_ALGORITHME
```

À l'aide de l'un ou l'autre de ces algorithmes implémentés sous Algobox, on obtient $p = 19$ et $u_{19} \approx 0{,}99039602$

d) Une condition suffisante sur p pour que $|u_n - 1| < 10^{-2}$ soit vérifiée pour tout entier $n \geq p$ conduit à $p = 100$ alors que la condition est vérifiée dès que $p = 19$. Ceci s'explique par le fait que l'encadrement obtenu à la question 3.b est très large. Il est suffisant pour obtenir la convergence de (u_n), en revanche il est trop large pour obtenir des informations intéressantes quant à la vitesse de convergence de la suite.

Exercice VIII ❶ On a

$$u_1=1,\ u_2=\frac{2!}{2^2}=\frac{1}{2},\ u_3=\frac{3!}{3^3}=\frac{2}{9}\approx 0{,}22,\ u_{10}=\frac{10!}{10^{10}}\approx 0{,}00037$$
$$\text{et } u_{100}=\frac{100!}{100^{100}}\approx 9{,}3\cdot 10^{-43}.$$

Il semble que (u_n) soit convergente vers 0 donc que n^n tende vers $+\infty$ beaucoup plus vite que $n!$.

❷ On remarque que, u_n ne s'annulant pas, on peut considérer le quotient $\frac{u_n}{u_{n+1}}$.
Alors, pour $n\geq 1$,
on a $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n!}{n^n}\times\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{n!\times(n+1)\times(n+1)^n}{n^n\times n!\times(n+1)}=\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ or, en appliquant l'inégalité de Bernoulli avec $x=\frac{1}{n}$, on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq 1+n\times\frac{1}{n}$ d'où pour $n\geq 1$, $\frac{u_n}{u_{n+1}}\geq 2$.

Démontrons par récurrence que pour tout $n\geq 1$, $u_n\leq\frac{1}{2^{n-1}}$.

On a $u_1=1$ et $\frac{1}{2^{1-1}}=1$ donc la proposition « $u_n\leq\frac{1}{2^{n-1}}$ » est vraie pour $n=1$.

Supposons que pour $k\in\mathbb{N}$, on ait $u_k\leq\frac{1}{2^{k-1}}$. De $\frac{u_k}{u_{k+1}}\geq 2$, on déduit par inversion que $\frac{u_{k+1}}{u_k}\leq\frac{1}{2}$ puis par produit (car $u_k>0$) que $u_{k+1}\leq\frac{1}{2}u_k$.

L'hypothèse de récurrence permet alors d'écrire $u_{k+1}\leq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{k-1}}$ ou encore $u_{k+1}\leq\frac{1}{2^k}$ et la proposition est héréditaire.

Finalement, pour tout $n\geq 1$, $u_n\leq\frac{1}{2^{n-1}}$.

❸ On sait que pour tout $n\geq 1$, $u_n\leq\frac{1}{2^{n-1}}$ or (u_n) est une suite à termes positifs donc, pour tout $n\geq 1$, $0\leq u_n\leq\frac{1}{2^{n-1}}$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$ donc par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ La conjecture est bien vérifiée et n^n tend vers $+\infty$ beaucoup plus vite que $n!$.

Exercice IX ❶

a)

```
Lire N
U ← 0
Pour k = 1 à N faire
    U ← U + 1/√k
Fin Pour
Afficher U
```

Implémentation sur TI

```
:Prompt N
:0→U
:For(K,1,N)
:U+1/√(K)→U
:End
:Disp U
```

Implémentation sur Casio

```
?→N↵
0→U↵
For 1→K To N↵
U+1÷√K→U↵
Next↵
U◢
```

Implémentation sous ALGOBOX

```
VARIABLES
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE N
  U PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A N
    DEBUT_POUR
    U PREND_LA_VALEUR U+1/sqrt(k)
    FIN_POUR
  AFFICHER U
FIN_ALGORITHME
```

b) En testant l'algorithme pour de grandes valeurs de n, il semble que (u_n) tende vers $+\infty$

❷ **a)** Soit $k \geq 1$. On a $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\dfrac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

or $\sqrt{k} \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{k+1}$ et $\sqrt{k} \leq \sqrt{k+1} \leq \sqrt{k+1}$ donc par somme

$2\sqrt{k} \leq \sqrt{k}+\sqrt{k+1} \leq 2\sqrt{k+1}$ et par inversion $\dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$

ainsi pour tout $k \geq 1$, $\dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1}-\sqrt{k} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.

b) En sommant les inégalités $\sqrt{k+1}-\sqrt{k} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$ pour k allant de 1 à n, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1}-\sqrt{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} \quad \text{or}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1}-\sqrt{k} = \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$=\sqrt{n+1}-1$$

et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{1}{2}u_n$ d'où $\sqrt{n+1}-1 \leq \dfrac{1}{2}u_n$ ce qui donne

$2\sqrt{n+1}-2\leq u_n$. Comme $\sqrt{n}\leq\sqrt{n+1}$, on en déduit finalement que $2\sqrt{n}-2\leq u_n$ (1).

En sommant les inégalités $\dfrac{1}{2\sqrt{k+1}}\leq\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ pour k allant de 1 à $n-1$,

on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2\sqrt{k+1}}\leq\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2\sqrt{k+1}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}})=\frac{1}{2}(u_n-1)=\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{2}$

et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\ldots+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\sqrt{n}-1$ d'où $\dfrac{1}{2}u_n-\dfrac{1}{2}\leq\sqrt{n}-1$

ce qui donne $\dfrac{1}{2}u_n\leq\sqrt{n}-\dfrac{1}{2}$ puis $u_n\leq 2\sqrt{n}-1$ (2).

Des inégalités (1) et (2), on déduit que pour tout $n\geq 1$, $2\sqrt{n}-2\leq u_n\leq 2\sqrt{n}+1$.

❸ **a)** On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}2\sqrt{n}-2=+\infty$ or pour $n\geq 1$, $2\sqrt{n}-2\leq u_n$

donc par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

b) On sait que pour $n\geq 1$, on a $2\sqrt{n}-2\leq u_n\leq 2\sqrt{n}-1$ or $\sqrt{n}>0$

donc $\dfrac{2\sqrt{n}-2}{2\sqrt{n}}\leq\dfrac{u_n}{2\sqrt{n}}\leq\dfrac{2\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}}$, c'est-à-dire $1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leq\dfrac{u_n}{2\sqrt{n}}\leq 1-\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ or

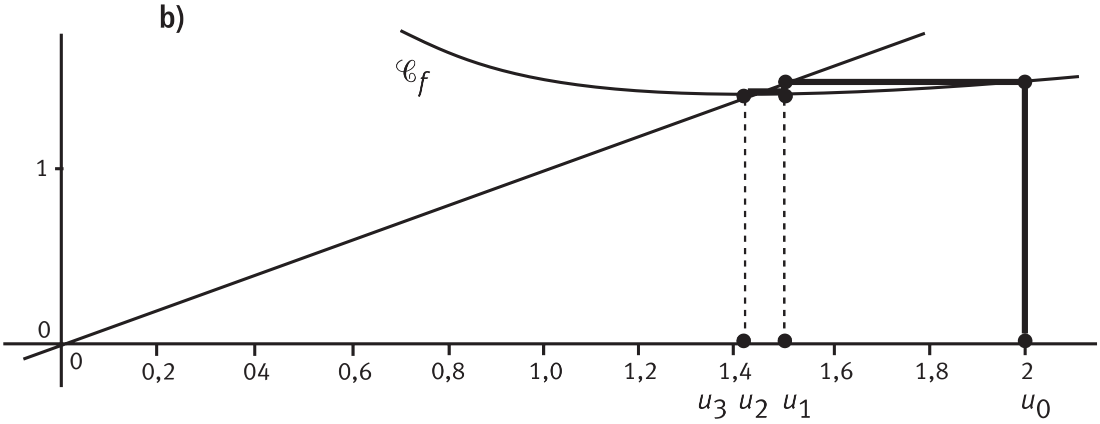
$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}1-\dfrac{1}{2\sqrt{n}}=1$ puis, par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{2\sqrt{n}}=1$. Finalement $2\sqrt{n}$ est un équivalent de u_n. On a ainsi démontré que (u_n) est divergente et qu'elle tend vers $+\infty$ à la même vitesse que $2\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$.

Exercice X ❶ **a)** La fonction f est une fonction rationnelle définie sur $]0\,;+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x>0$, on a

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{A}{x^2}\right)=\frac{x^2-A}{2x^2}=\frac{\left(x-\sqrt{A}\right)\left(x+\sqrt{A}\right)}{2x^2}$$ or $x+\sqrt{A}>0$ sur $]0\,;\,+\infty[$

donc $f'(x)$ est du signe de $x-\sqrt{A}$ à savoir négatif sur $\left]0\,;\,\sqrt{A}\right]$ et positif sur $\left[\sqrt{A}\,;\,+\infty\right[$. Par suite, f est décroissante sur $\left]0\,;\,\sqrt{A}\right]$ et croissante sur $\left[\sqrt{A}\,;\,+\infty\right[$.

b)



❷

a) En s'appuyant sur la représentation des premiers termes de (u_n), il semble que la suite soit décroissante et très rapidement convergente vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y = x$. Dans le cas où $A = 2$, il semblerait donc que (u_n) soit convergente vers $\sqrt{2}$.

b) Montrons que $u_1 \le u_0$.

Pour cela, on remarque que :

$$u_1 \le u_0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(u_0+\frac{A}{u_0}\right)\le u_0 \Leftrightarrow u_0^2+A\le 2u_0^2 \Leftrightarrow A\le u_0^2$$

or $u_0=\mathrm{E}(\sqrt{A})+1$ donc $u_0\ge\sqrt{A}$ d'où $u_0^2\ge A$ de sorte que l'on a bien $u_1\le u_0$.

De plus, comme $u_0\ge\sqrt{A}$ et f est croissante sur $\left[\sqrt{A};+\infty\right[$, on a

$$u_1=f(u_0)\ge f(\sqrt{A})=\frac{1}{2}\left(\sqrt{A}+\frac{A}{\sqrt{A}}\right)=\sqrt{A}.$$

On suppose que pour $k\in\mathbb{N}$, $\sqrt{A}\le u_{k+1}\le u_k\le u_0$ alors

$f(\sqrt{A})\le f(u_{k+1})\le f(u_k)\le f(u_0)$ car f est croissante sur $\left[\sqrt{A}\,;\,+\infty\right[$ d'où

$f(\sqrt{a})\le u_{k+2}\le u_{k+1}\le f(u_0)$

d'où $\sqrt{A} \le u_{k+2} \le u_{k+1} \le u_0$ et la proposition est héréditaire. Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{A} \le u_{n+1} \le u_n \le u_0$.

c) De ce qui précède, on déduit que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \le u_n$ donc (u_n) est décroissante et pour $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{A} \le u_n$ donc (u_n) est minorée par $\sqrt{A}$ ainsi, par le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{A} \le u_n \le u_0$ donc la limite ℓ de (u_n) vérifie $\sqrt{A} \le \ell \le u_0$.

❸ **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$u_{n+1} - \sqrt{A} = f(u_n) - \sqrt{A} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{A}{u_n}\right) - \sqrt{A} = \frac{u_n^2 + A - 2\sqrt{A}u_n}{2u_n} = \frac{\left(u_n - \sqrt{A}\right)^2}{2u_n}$$

or $\dfrac{u_n - \sqrt{A}}{2u_n} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{A}}{2u_n} \le \dfrac{1}{2}$ car $\sqrt{A} > 0$ et $2u_n > 0$ par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \sqrt{A} \le \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{A}) \text{ .}$$

b) Pour $n = 0$, on a $\dfrac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{A}) = u_0 - \sqrt{A}$ donc la proposition « $u_n - \sqrt{A} \le \dfrac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{A})$ » est bien vérifiée au rang $n = 0$.

On suppose que pour $k \in \mathbb{N}$, $u_k - \sqrt{A} \le \dfrac{1}{2^k}\left(u_0 - \sqrt{A}\right)$.

D'après la relation obtenue au 3.a, on sait que $u_{k+1} - \sqrt{A} \le \dfrac{1}{2}(u_k - \sqrt{A})$ d'où $u_{k+1} - \sqrt{A} \le \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^k}(u_0 - \sqrt{A})$ soit $u_{k+1} - \sqrt{A} \le \dfrac{1}{2^{k+1}}(u_0 - \sqrt{A})$ et la proposition est bien héréditaire.

Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \sqrt{A} \le \dfrac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{A})$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n - \sqrt{A} \le \dfrac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{A})$ d'après le 2.b et le 3.b or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ d'où, par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(u_n - \sqrt{A}\right) = 0$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{A}$.

❹ On sait que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \sqrt{A} \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{A})$ or dans le cas où $A = 2$, on a $u_0 = 2$ d'où $u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}(2 - \sqrt{2})$ or $2 - \sqrt{2} \leq 1$ donc pour que $u_n - \sqrt{2} \leq 10^{-10}$, il suffit que $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-10}$ ou encore que $2^n \geq 10^{10}$. La suite de terme général 2^n étant croissante, $2^{33} < 10^{10}$ et $2^{34} > 10^{10}$, la condition $2^n \geq 10^{10}$ est vérifiée dès que $n \geq 34$.

Par balayage à l'aide de la calculatrice, on trouve que le plus petit n au-delà duquel $u_n - \sqrt{2} \leq 10^{-10}$ est $n = 4$. La différence avec le résultat précédent s'explique par le fait que les majorations considérées dans les questions 3.a et 3.b sont très fortes.

On note que la convergence de la suite vers sa limite est très rapide puisque u_4 fournit déjà une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près.

❺

```
Lire A
Lire P
N ← 0
U ← 1+E(A)
Tant que |U − √A| ≥ P faire
   | N ← N+1
   | U ← (1/2)(U + A/U)
Fin Tant que
Afficher U
```

On peut compléter cet algorithme en demandant d'afficher N en sortie obtenant alors le plus petit rang au-delà duquel $\left|u_n - \sqrt{A}\right| < P$.

Afin de le tester, on peut implémenter cet algorithme sous Algobox ou sur la calculatrice.

Exercice XI On remarque que $u_1=\dfrac{57}{100}$, $u_2=\dfrac{57}{100}+\dfrac{57}{100^2}=\dfrac{57}{100}\left(1+\dfrac{1}{100}\right)$ et $u_3=\dfrac{57}{100}+\dfrac{57}{100^2}+\dfrac{57}{100^3}=\dfrac{57}{100}\left(1+\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{100^2}\right)$, etc.

Ainsi, par construction $u_n=\dfrac{57}{100}\left(1+\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{100^2}+\ldots+\dfrac{1}{100^{n-1}}\right)$ d'où

$$u_n=\frac{57}{100}\times\frac{1-\left(\dfrac{1}{100}\right)^n}{1-\dfrac{1}{100}}=\frac{57}{99}\left(1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right).$$

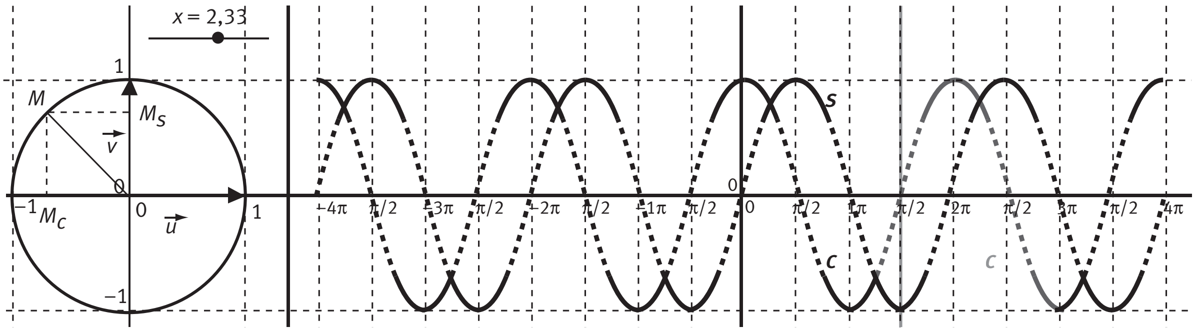
On a $-1<\dfrac{1}{100}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{100}\right)^n=0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\dfrac{1}{100}\right)^n\right)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{57}{99}=\dfrac{19}{33}$.

Corrigé de la séquence 2

Corrigé de l'activité du chapitre 2

■ **Activité 1** ▸ Pour les questions 1 à 3, il suffit de suivre les instructions données au cours de l'énoncé.

Les courbes obtenues par cette construction sont les suivantes :



▸ Conjectures attendues à la question 4

Il semble que la fonction sinus soit croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$.

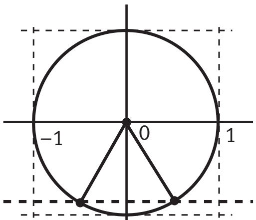
x	0	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
Variations de la fonction sinus	0 ↗	1 ↘	-1 ↗	0

Il semble que la fonction cosinus soit décroissante sur $[0\,;\,\pi]$ et croissante sur $[\pi\,;\,2\pi]$.

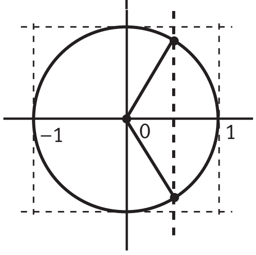
x	0	π	2π
Variations de la fonction cosinus	1 ↘	-1 ↗	1

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 2

Exercice 1 ❶ **a)** En s'appuyant sur le cercle trigonométrique, $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solutions $-\dfrac{2\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$ sur $\left]-\pi\,;\,\pi\right]$ alors que les solutions sur $\left[0\,;\,2\pi\right[$ sont $\dfrac{4\pi}{3}$ et $\dfrac{5\pi}{3}$.



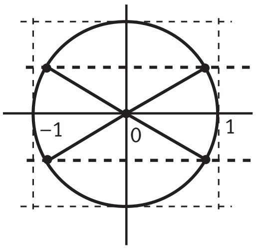
b) En s'appuyant sur le cercle trigonométrique, sur $\mathbb{R}$ on a



$\cos 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ ou $2x = \dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi$ où $k' \in \mathbb{Z}$,

c'est-à-dire

$\cos 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \dfrac{\pi}{6} + k'\pi$ où $k' \in \mathbb{Z}$.



Ainsi, $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ a quatre solutions sur $\left]-\pi\,;\,\pi\right]$ qui sont $-\dfrac{5\pi}{6}$, $-\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$ que l'on obtient respectivement pour $k' = -1$, $k = 0$, $k' = 0$ et $k = 1$.

Sur $\left[0\,;\,2\pi\right[$ $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ a quatre solutions qui sont $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$, $\dfrac{7\pi}{6}$ et $\dfrac{11\pi}{6}$ que l'on obtient respectivement pour $k' = 0$, $k = 1$, $k' = 1$ et $k = 2$.

❷ **a)** Sur $\mathbb{R}$, $\sin x = \sin(2x + \dfrac{\pi}{2}) \Leftrightarrow x = 2x + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

ou $x = \pi - (2x + \dfrac{\pi}{2}) + 2k'\pi$ où $k' \in \mathbb{Z}$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$, $x = 2x + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow -x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} - 2k\pi$ (on peut remarquer que pour cette dernière équation, on peut tout autant écrire $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ puisque k peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{Z}$ de sorte que $-2k\pi$ et $2k\pi$ décrivent le même ensemble de nombres).

Pour $k' \in \mathbb{Z}$, $x = \pi - (2x + \dfrac{\pi}{2}) + 2k'\pi \Leftrightarrow 3x = \dfrac{\pi}{2} + 2k'\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k'\pi}{3}$.

Finalement, l'équation $\sin x = \sin(2x + \dfrac{\pi}{2})$ admet comme solutions sur $\mathbb{R}$ les nombres de la forme $-\dfrac{\pi}{2} - 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou bien $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k'\pi}{3}$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.

b) On rappelle que pour tout réel a, $\sin a = \cos(\frac{\pi}{2} - a)$.

Sur $\mathbb{R}$, $\sin 2x = \cos 3x \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = \cos 3x$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = 3x + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \frac{\pi}{2} - 2x$$
$$= -3x + 2k'\pi \text{ où } k' \in \mathbb{Z}$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{\pi}{2} - 2x = 3x + 2k\pi \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5}$ (en précisant que cette dernière équation peut tout autant s'écrire $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$).

Pour $k' \in \mathbb{Z}$, $\frac{\pi}{2} - 2x = -3x + 2k'\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi$.

Finalement, l'équation $\sin 2x = \cos 3x$ admet comme solutions sur $\mathbb{R}$ les nombres de la forme $\frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et ceux de la forme $-\frac{\pi}{2} + 2k'\pi$ avec $k' \in \mathbb{Z}$. On remarquera que selon la démarche utilisée, on peut rencontrer les solutions écrites sous une autre forme.

c) On rappelle que pour tout réel a, $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$.

Sur $\mathbb{R}$, $3\sin x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow 3\sin x = 2 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

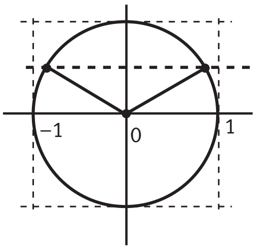
$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \sin x \\ 2X^2 + 3X - 2 = 0 \end{cases}$$

Le trinôme $2X^2 + 3X - 2$ a pour discriminant $\Delta = 25 = 5^2$ donc

$$2X^2 + 3X - 2 = 0 \Leftrightarrow X = -2 \text{ ou } X = \frac{1}{2}.$$

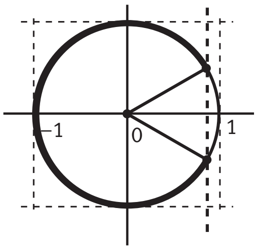
On en déduit que $3\sin x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow \sin x = -2$ ou $\sin x = \frac{1}{2}$.

L'équation $\sin x = -2$ n'a pas de solution réelle car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \geq -1$.



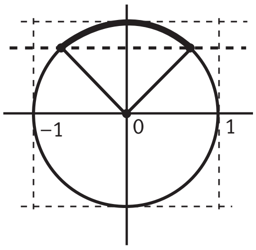
Puis sur $\mathbb{R}$, $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k'\pi$ où $k' \in \mathbb{Z}$.

Finalement, $3\sin x = 2\cos^2 x$ admet comme solutions sur $\mathbb{R}$ les nombres de la forme $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et ceux de la forme $\frac{5\pi}{6} + 2k'\pi$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.



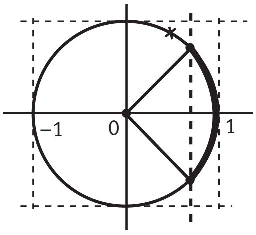
❷ **a)** On s'appuie sur le cercle trigonométrique pour conclure directement.

L'inéquation $\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ admet comme ensemble de solutions sur $\left]-\pi\,;\,\pi\right]$ la réunion $\left]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}\,;\,\pi\right]$.



b) En s'appuyant sur le cercle trigonométrique, l'inéquation $\sin x \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$ admet comme ensemble de solutions sur $\left]-\pi\,;\,\pi\right]$ l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right]$.

c) On a $0 \le x \le \pi \Leftrightarrow 0 \le 2x \le 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \le 2x + \frac{\pi}{3} \le 2\pi + \frac{\pi}{3}$ ainsi en posant $X = 2x + \frac{\pi}{3}$, résoudre $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) > \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $\left[0\,;\,\pi\right]$ se ramène à résoudre $\cos X > \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $\frac{\pi}{3} \le X \le 2\pi + \frac{\pi}{3}$.



En s'appuyant sur le cercle trigonométrique, on a sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;\,2\pi + \frac{\pi}{3}\right]$, $\cos X > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{7\pi}{4} < X < \frac{9\pi}{4}$.

Puis $\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{3} < 2x < \frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{17\pi}{12} < 2x < \frac{23\pi}{12} \Leftrightarrow \frac{17\pi}{24} < x < \frac{23\pi}{24}$.

Finalement l'inéquation $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) > \frac{\sqrt{2}}{2}$ admet comme ensemble de solutions sur $\left[0\,;\,\pi\right]$ l'intervalle $\left]\frac{17\pi}{24}\,;\,\frac{23\pi}{24}\right[$.

d) On a $4\cos^2 x - 1 = (2\cos x - 1)(2\cos x + 1)$ ainsi, pour résoudre l'inéquation, il suffit de déterminer le signe de chacun des facteurs $2\cos x - 1$ et $2\cos x + 1$ sur $\left[0\,;\,2\pi\right[$ et de résumer le tout dans un tableau de signes pour obtenir le signe du produit.

En s'appuyant sur le cercle trigonométrique, on a sur $\left[0\,;\,2\pi\right[$,

$$2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3}$$

$$\text{et } 2\cos x - 1 < 0 \Leftrightarrow \cos x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}.$$

De façon analogue on a $2\cos x+1=0 \Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}$ ou $x=\frac{4\pi}{3}$

et $2\cos x+1<0 \Leftrightarrow \cos x<-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}<x<\frac{4\pi}{3}$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
Signe de $2\cos x-1$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $2\cos x+1$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $4\cos^2 x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Finalement, l'inéquation $4\cos^2 x-1\geq 0$ admet comme ensemble de solutions sur $\left[0\ ;\ 2\pi\right[$ la réunion $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{4\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{3}\ ;\ 2\pi\right[$.

e) Pour suivre une démarche analogue à celle adoptée à la question précédente, on commence par factoriser $2\sin^2 x-3\sin x+1$. On remarque que $2\sin^2 x-3\sin x+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=\sin x \\ 2X^2-3X+1=0 \end{cases}$. Le trinôme a pour discriminant $\Delta=1$ donc $2X^2-3X+1=0 \Leftrightarrow X=1$ ou $X=\frac{1}{2}$ et on a

$2X^2-3X+1=2(X-1)(X-\frac{1}{2})$.

Comme $X=\sin x$, on a donc $2\sin^2 x-3\sin x+1=2(\sin x-1)(\sin x-\frac{1}{2})$. Il reste à déterminer le signe de chacun des facteurs.

Sur $\left]-\pi\ ;\ \pi\right]$, $\sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$ et, pour tout $x\neq\frac{\pi}{2}$, $\sin x<1$ c'est-à-dire $\sin x-1<0$.

Sur $\left]-\pi\ ;\ \pi\right]$, $\sin x-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=\frac{5\pi}{6}$ et

$$\sin x-\frac{1}{2}>0 \Leftrightarrow \sin x>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}.$$

x	$-\pi$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
Signe de $\sin x - 1$		$-$		$-$	0	$-$		$-$	
Signe de $\sin x - \frac{1}{2}$		$+$	0	$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $2\sin^2 x - 3\sin x + 1$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Finalement, l'inéquation $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 < 0$ admet comme ensemble de solutions sur $\left]-\pi\,;\,\pi\right]$ la réunion $\left]\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{5\pi}{6}\right[$.

Exercice 2 ❶ **a)** Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = 2\cos^2(x+\pi) + \sin(2x+2\pi)$

or pour $a \in \mathbb{R}$, on a $\cos(a+\pi) = -\cos a$ et $\sin(a+2\pi) = \sin a$ d'où $f(x+\pi) = 2(-\cos x)^2 + \sin(2x) = f(x)$.

On peut donc restreindre l'étude de f à un intervalle de longueur π, l'étude sur $\mathbb{R}$ s'en déduisant à l'aide de la périodicité de f.
Graphiquement, $\mathscr{C}_f$ est donc invariante par translation de vecteur $\pi\vec{i}$.
Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_f$ se déduit de sa restriction à un intervalle de longueur π par translation de vecteurs $k\pi\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

b) Dire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{8}$ comme axe de symétrie signifie que deux points dont les abscisses sont situées symétriquement de part et d'autre de $\frac{\pi}{8}$ ont la même ordonnée. On est donc amené à comparer

$f(\frac{\pi}{8}+x)$ et $f(\frac{\pi}{8}-x)$ où x est un réel quelconque. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$f(\frac{\pi}{8}+x) = 2\cos^2(\frac{\pi}{8}+x) + \sin(\frac{\pi}{4}+2x)$ or pour $a \in \mathbb{R}$, $2\cos^2 a = 1 + \cos(2a)$

d'où $2\cos^2(\frac{\pi}{8}+x) = 1 + \cos(\frac{\pi}{4}+2x)$ puis

$$\begin{aligned} f(\frac{\pi}{8}+x) &= 1 + \cos(\frac{\pi}{4}+2x) + \sin(\frac{\pi}{4}+2x) \\ &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x) \end{aligned}$$

ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\frac{\pi}{8}+x)=1+\sqrt{2}\cos(2x)$.

En remplaçant x par $-x$ on obtient que $f(\frac{\pi}{8}-x)=1+\sqrt{2}\cos(-2x)$ or la fonction cosinus est paire et $f(\frac{\pi}{8}-x)=1+\sqrt{2}\cos(2x)$ de sorte que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(\frac{\pi}{8}+x)=f(\frac{\pi}{8}-x).$$

La droite d'équation $x=\frac{\pi}{8}$ est donc bien un axe de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

❷ **a)** Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)=2\cos^2 x+\sin(2x)=2\cos^2 x+2\cos x\sin x=2\cos x(\cos x+\sin x).$$

b) La fonction f est le produit de $x \mapsto 2\cos x$ par la somme des fonctions cosinus et sinus. Toutes ces fonctions étant dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Formules utilisées : $(u+v)'=u'+v'$ et $(uv)'=u'v+uv'$.

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(-\sin x)(\cos x+\sin x)+2\cos x(-\sin x+\cos x) \\ &= -4\sin x\cos x+2(\cos^2 x-\sin^2 x). \end{aligned}$$

Ainsi $f'(x)=-2\sin(2x)+2\cos(2x)$.

Par ailleurs, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)=2\cos 2x-2\sin 2x.$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-2x)$.

c) Comme $2\sqrt{2}>0$, $f'(x)$ est du signe de $\sin(\frac{\pi}{4}-2x)$. On a

$$\frac{\pi}{8}\le x\le\frac{5\pi}{8} \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{4}\le -2x\le -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\pi\le\frac{\pi}{4}-2x\le 0$$

ainsi, résoudre $\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=0$ sur $\mathrm{I}=\left[\frac{\pi}{8}\,;\,\frac{5\pi}{8}\right]$, se ramène à résoudre

$\sin X=0$ sur $\left[-\pi\,;\,0\right]$ en posant $X=\frac{\pi}{4}-2x$.

Sur $\left[-\pi\,;\,0\right]$, $\sin X=0 \Leftrightarrow X=-\pi$ ou $X=0$ donc sur $\mathrm{I}=\left[\frac{\pi}{8}\,;\,\frac{5\pi}{8}\right]$,

$$\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}-2x=-\pi \text{ ou } \frac{\pi}{4}-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{8} \text{ ou } x=\frac{\pi}{8}.$$

De plus, sur $\left[-\pi\ ;\ 0\right]$, $\sin X < 0 \Leftrightarrow -\pi < X < 0$ donc sur $I = \left[\frac{\pi}{8}\ ;\ \frac{5\pi}{8}\right]$,

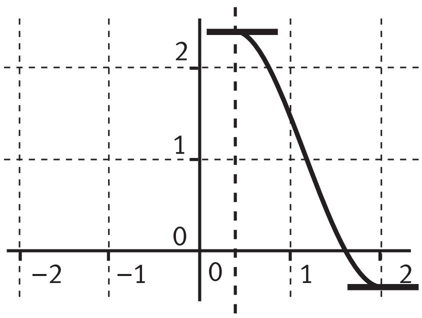
$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) < 0 \Leftrightarrow -\pi < \frac{\pi}{4} - 2x < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8}.$$

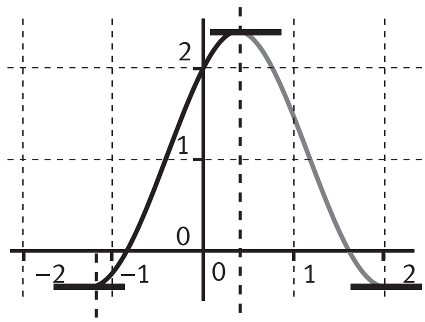
La fonction f est donc décroissante sur $\left[\frac{\pi}{8}\ ;\ \frac{5\pi}{8}\right]$.

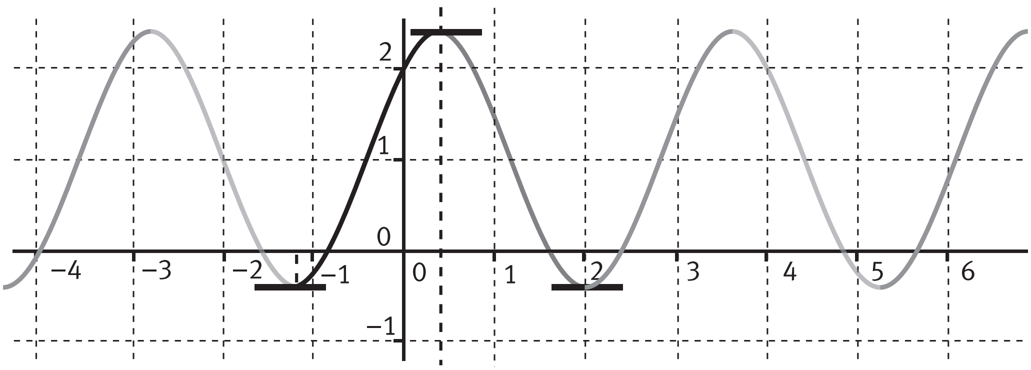
❸ **a)** On remarque que la courbe $\mathscr{C}_J$ admet des tangentes horizontales aux points d'abscisse $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{5\pi}{8}$.

b) En s'appuyant sur le résultat obtenu à la question 1.b, on construit la courbe $\mathscr{C}_J$ restriction de la courbe $\mathscr{C}_f$ à l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{8}\ ;\ \frac{\pi}{8}\right]$ comme symétrique de la courbe $\mathscr{C}_J$ par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{8}$. La réunion des courbes est donc la restriction de la courbe $\mathscr{C}_f$ à l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{8}\ ;\ \frac{5\pi}{8}\right]$.

En s'appuyant sur le résultat démontré à la question 1.a et en remarquant que l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{8}\ ;\ \frac{5\pi}{8}\right]$ a pour longueur π, on obtient la courbe $\mathscr{C}_f$ par translation de cette dernière de vecteurs $k\pi\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$.







Exercice 3 ❶ La fonction u est dérivable sur $[0\,;\pi]$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout $x\in[0\,;\pi]$, $u'(x)=\cos x-1$. Pour tout $x\in[0\,;\pi]$, $\cos x\le 1$ donc $u'(x)\le 0$. Par suite, la fonction u est décroissante sur $[0\,;\pi]$ or $u(0)=0$ donc, pour tout $x\in[0\,;\pi]$, $u(x)\le 0$, c'est-à-dire $\sin x - x\le 0$. On a donc bien démontré que pour tout $x\in[0\,;\pi]$, $\sin x\le x$.

❷ **a)** La fonction f est une somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\pi]$ donc f est dérivable sur $[0\,;\pi]$.

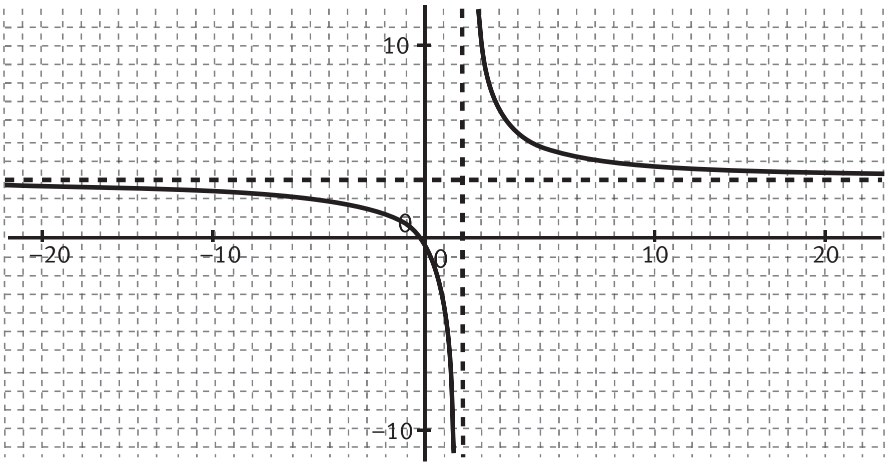
Pour $x\in[0\,;\pi]$, $f'(x)=-1+\dfrac{x^2}{2}+\cos x$. La fonction f' est elle-même dérivable sur $[0\,;\pi]$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et pour $x\in[0\,;\pi]$, $f''(x)=x-\sin x=-u(x)$. De la question 1, on déduit que $f''(x)\ge 0$ pour tout $x\in[0\,;\pi]$ donc f' est croissante sur $[0\,;\pi]$.

b) On remarque que $f'(0)=0$ or f' est croissante sur $[0\,;\pi]$ donc $f'\ge 0$ sur $[0\,;\pi]$. Par suite, on en déduit que f est croissante sur $[0\,;\pi]$. Enfin, en remarquant que $f(0)=0$, on obtient que f est positive sur $[0\,;\pi]$.

❸ Pour tout $x\in[0\,;\pi]$, $f(x)\ge 0$ c'est-à-dire $-x+\dfrac{x^3}{6}+\sin x\ge 0$ donc pour tout $x\in[0\,;\pi]$, $x-\dfrac{x^3}{6}\le \sin x\le x$.

Corrigé des activités du chapitre 3

■ **Activité 2** ❶ **a)** À l'aide de la représentation graphique de f, il semble que $f(x)$ tende vers 3 en $-\infty$ et en $+\infty$.



b) En établissant un tableau de valeurs (à l'aide d'un tableur par exemple), on peut confirmer les conjectures proposées à la question précédente.

	A	B	C	D	E
1	x	$f(x)$		x	$f(x)$
2	0	-0,50		0	-0,50
3	1	-4,00		-1	0,67
4	2	#DIV/0!		-2	1,25
5	3	10,00		-3	1,60
6	4	6,50		-4	1,83
7	5	5,33		-5	2,00
198	196	3,04		-196	2,96
199	197	3,04		-197	2,96
200	198	3,04		-198	2,97
201	199	3,04		-199	2,97
202	200	3,04		-200	2,97

❷ En utilisant le raisonnement rencontré lors du calcul de limites de suites, on peut déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x+1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x-2 = +\infty$ et les propriétés rencontrées sur les limites de quotient de suites ne permettent pas de conclure ; on est en présence d'une indétermination. Pour lever cette indétermination, on transforme l'écriture de $f(x)$.

On écrit $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2} = \dfrac{x(3+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{2}{x})} = \dfrac{3+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}$. Puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} =$ donc, d'une part par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} 3+\dfrac{1}{x} = 3$ et d'autre part par produit par -2 puis par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} 1-\dfrac{2}{x} = 1$. Finalement par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$. Ce raisonnement est exactement celui utilisé pour les limites de suites.

Une suite étant une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$, il n'existe pas de limites de suites en $-\infty$. Ce qui suit ne peut donc pas être calqué sur ce qui a été fait sur les suites en revanche, on peut adapter la démarche. En effet, en reprenant l'expression $f(x) = \dfrac{3+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}$, il suffit de déterminer la limite du numérateur et du dénominateur or, lorsque x tend vers $-\infty$, son inverse tend intuitivement vers 0 autrement dit il semble que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et, en admettant ce dernier résultat, on obtient de la même façon que précédemment

$\lim\limits_{x \to -\infty} 3+\dfrac{1}{x}=3$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 1-\dfrac{2}{x}=1$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=3.$

■ **Activité 3** **a)**

x	-10^{-6}	-10^{-3}	10^{-3}	10^{-6}
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	impossible	impossible	$10\sqrt{10}$	1000
$\dfrac{1}{x}$	-10^6	-10^3	10^3	10^6
$\dfrac{1}{x^2}$	10^{12}	10^6	10^6	10^{12}
$\dfrac{1}{x^3}$	-10^{18}	-10^9	10^9	10^{18}

b) A la lecture du tableau précédent :

▸ il semble que $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tende vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 mais on remarquera qu'il est nécessaire que les valeurs de x soient strictement positives pour que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ soit définie ;

▸ il semble que $\dfrac{1}{x}$ tende vers $-\infty$ ou vers $+\infty$ selon que x tend vers 0 en étant strictement inférieur à 0 ou strictement supérieur à 0 ;

▸ il semble que $\dfrac{1}{x^2}$ tende vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 ;

▸ il semble que $\dfrac{1}{x^3}$ tende vers $-\infty$ ou vers $+\infty$ selon que x tend vers 0 en étant strictement inférieur à 0 ou strictement supérieur à 0.

c) Sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}>10^6 \Leftrightarrow \sqrt{x}<10^{-6} \Leftrightarrow 0<x<10^{-12}$ ainsi, pour que $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ dépasse 10^6, il faut et il suffit de choisir x dans $]0\,;10^{-12}[$.

Sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}>10^{12} \Leftrightarrow \sqrt{x}<10^{-12} \Leftrightarrow 0<x<10^{-24}$ ainsi, pour que $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ dépasse 10^{12}, il faut et il suffit de choisir x dans $]0\,;10^{-24}[$.

En suivant ce raisonnement, on pourrait démontrer que $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ peut devenir aussi grand que l'on veut pourvu que l'on choisisse des valeurs de x suffisamment proche de 0. On dira que $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 et on notera $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.

d) Sur $\left]0\ ;\ +\infty\right[$, $\dfrac{1}{x}>10^6 \Leftrightarrow 0<x<10^{-6}$ et pour que $\dfrac{1}{x}$ dépasse 10^6, il faut et il suffit de choisir x dans $\left]0\ ;\ 10^{-6}\right[$.

Sur $\left]0\ ;\ +\infty\right[$, $\dfrac{1}{x}>10^{12} \Leftrightarrow 0<x<10^{-12}$ et pour que $\dfrac{1}{x}$ dépasse 10^{12}, il faut et il suffit de choisir x dans $\left]0\ ;\ 10^{-12}\right[$.

En suivant ce raisonnement, on pourrait démontrer que $\dfrac{1}{x}$ peut devenir aussi grand que l'on veut pourvu que l'on choisisse des valeurs de x strictement positive et suffisamment proche de 0. On dira que $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement supérieures à 0 et on notera $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$.

Sur $\left]-\infty ;\ 0\right[$, $\dfrac{1}{x}<-10^6 \Leftrightarrow -10^{-6}<x<0$ et pour que $\dfrac{1}{x}<-10^6$, il faut et il suffit de choisir x dans $\left]-10^{-6}\ ;\ 0\right[$.

Sur $\left]-\infty ;\ 0\right[$, $\dfrac{1}{x}<-10^{12} \Leftrightarrow -10^{-12}<x<0$ et pour que $\dfrac{1}{x}<-10^{12}$, il faut et il suffit de choisir x dans $\left]-10^{-12}\ ;\ 0\right[$.

En suivant ce raisonnement, on pourrait démontrer que $\dfrac{1}{x}$ peut devenir inférieur à n'importe quel nombre (négatif et grand en valeur absolue) pourvu que l'on choisisse des valeurs de x strictement négative et suffisamment proche de 0. On dira que $\dfrac{1}{x}$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement inférieures à 0 et on notera $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{1}{x}=-\infty$.

e) Sur $\mathbb{R}^*$,

$$\frac{1}{x^2}>10^6 \Leftrightarrow x^2<10^{-6} \Leftrightarrow 0<|x|<10^{-3} \Leftrightarrow -10^{-3}<x<0 \text{ ou } 0<x<10^{-3}.$$

Sur $\mathbb{R}^*$,

$$\frac{1}{x^2}>10^{12} \Leftrightarrow x^2<10^{-12} \Leftrightarrow 0<|x|<10^{-6} \Leftrightarrow 10^{-6}<x<0 \text{ ou } 0<x<10^{-6}.$$

En suivant ce raisonnement, on pourrait démontrer que $\dfrac{1}{x^2}$ peut devenir aussi grand que l'on veut pourvu que l'on choisisse des valeurs de x dans un voisinage suffisamment proche de 0 (par valeurs strictement inférieures à 0 ou par valeurs strictement supérieures à 0). On dira que $\dfrac{1}{x^2}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement supérieures à 0 ou par valeurs strictement supérieures à 0. On notera $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et, les limites à gauche de 0 et à droite de 0 étant les mêmes, on notera plus simplement

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

■ **Activité 4** ❶ À l'aide de la représentation de f obtenue dans **l'activité 2**, $f(x)$ semble tendre vers $-\infty$ lorsque x tend vers 2 avec $x<2$ et vers $+\infty$ lorsque x tend vers 2 avec $x>2$.

Pour plus de précision, on établit un tableau de valeurs de $f(x)$ au voisinage de 2 en prenant soin de choisir un pas petit. Il faut penser à choisir des valeurs de x inférieures et des valeurs de x supérieures à 2.

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)		x	f(x)
2	2	#DIV/0!		2	#DIV/0!
3	1,999	-6997,00		2,001	7003,00
4	1,998	-3497,00		2,002	3503,00
5	1,997	-2330,33		2,003	2336,33
6	1,996	-1747,00		2,004	1753,00
7	1,995	-1397,00		2,005	1403,00
997	1,005	-4,04		2,995	10,04
998	1,004	-4,03		2,996	10,03
999	1,003	-4,02		2,997	10,02
1000	1,002	-4,01		2,998	10,01
1001	1,001	-4,01		2,999	10,01
1002	1	-4,00		3	10,00

Il apparaît à la lecture du tableau de valeurs que les conjectures émises précédemment peuvent être confirmées, c'est-à-dire qu'il semble que $f(x)$ tende vers $-\infty$ à gauche de 2 et vers $+\infty$ à droite de 2.

❷

a) Soient A un réel aussi grand que l'on veut (pour la démonstration, on pourra choisir $A>3$) et x un réel tel que $x>2$.

$f(x) > A \Leftrightarrow \dfrac{3x+1}{x-2} > A \Leftrightarrow 3x+1 > A(x-2)$ car $x-2>0$ puis

$f(x) > A \Leftrightarrow x(3-A) > -2A-1 \Leftrightarrow x < \dfrac{-2A-1}{3-A}$ car $A>3$ d'où $3-A<0$.

Finalement, pour A aussi grand que l'on veut, on sait trouver un réel $x_0 = \dfrac{-2A-1}{3-A}$ tel que pour $2 < x < x_0$ on ait $f(x) > A$. Cela signifie que $f(x)$ pourra être plus grand que n'importe quel réel A pourvu que x soit suffisamment proche de 2. On peut donc confirmer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 2 en étant supérieur à 2.

b) Selon les conjectures émises précédemment, il semble que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 2 par valeurs inférieures à 2.

On choisit donc un réel A, négatif, aussi grand que l'on veut en valeur absolue et on cherche les valeurs de x telles que $x<2$ pour lesquelles $f(x) < A.$ On adapte alors le travail précédent.

$f(x) < A \Leftrightarrow \dfrac{3x+1}{x-2} < A \Leftrightarrow 3x+1 > A(x-2)$ car $x-2<0$ puis

$f(x) < A \Leftrightarrow x(3-A) > -2A-1 \Leftrightarrow x > \dfrac{-2A-1}{3-A}$ car on peut choisir $A \leq 0$ d'où $3-A>0$.

Il apparaît donc que, pour A négatif, aussi grand que l'on veut en valeur absolue, on sait trouver un réel $x_0 = \dfrac{-2A-1}{3-A}$ tel que pour $x_0 < x < 2$ on ait $f(x) < A$ c'est-à-dire que $f(x)$ pourra être plus inférieur à n'importe quel réel A négatif pourvu que x soit suffisamment proche de 2 en étant inférieur à 2 et on peut donc confirmer que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 2 par valeurs inférieures à 2.

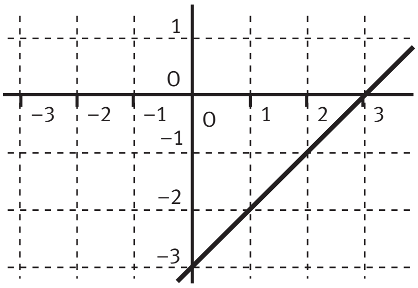
■ **Activité 5** **a)** On établit par exemple un tableau de valeurs de $f(x)$ au voisinage de 1, à gauche et à droite, en prenant soin de choisir un pas petit.

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)		x	f(x)
2	1	#DIV/0!		1	#DIV/0!
3	0,999	-2,001		1,001	-1,999
4	0,998	-2,002		1,002	-1,998
5	0,997	-2,003		1,003	-1,997
6	0,996	-2,004		1,004	-1,996
7	0,995	-2,005		1,005	-1,995
997	0,005	-2,995		1,995	-1,005
998	0,004	-2,996		1,996	-1,004
999	0,003	-2,997		1,997	-1,003
1000	0,002	-2,998		1,998	-1,002
1001	0,001	-2,999		1,999	-1,001
1002	0	-3,000		2	-1,000

Il apparaît à la lecture du tableau de valeurs que $f(x)$ semble tendre vers -2 à gauche de 1 comme à droite de 1.

Cette conjecture peut être confirmée en traçant la courbe représentative de f.

b) La courbe représentative de f semble être la droite d'équation $y = x-3$ autrement dit, il semble que pour tout $x \neq 1$, $f(x) = x-3$.



Pour $x \neq 1$, on a

$$(x-1)(x-3) = x^2 - 3x - x - 3 = x^2 - 4x - 3$$

donc, pour $x \neq 1$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = x - 3.$$

Puis, intuitivement, $\lim\limits_{x \to 1} \left(x - 3\right) = -2$ d'où

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -2.$$

La fonction f n'est donc pas définie en 1 mais elle admet une limite finie en 1. Graphiquement, on remarquera que le point de coordonnées (1 ; –2) n'appartient pas à la courbe représentant f bien que l'on puisse penser le contraire.

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 3

Exercice 4 **a)** L'expression $\dfrac{x+1}{4-x^2}$ est un quotient donc on est amené à déterminer la limite du numérateur et du dénominateur. On a $\lim\limits_{x \to 2} x + 1 = 3 > 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} 4 - x^2 = 0_-$ car pour $x > 2$, on a $x^2 > 4$ donc $4 - x^2 < 0$.

Par quotient, on obtient $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{x+1}{4-x^2} = -\infty$.

b) La fonction $x \mapsto \cos\left(\dfrac{2x+1}{3x^2 - x + 1}\right)$ est la composée de la fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{2x+1}{3x^2 - x + 1}$ par la fonction $x \mapsto \cos x$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{3x^2 - x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{3x} = 0$ donc, par composition avec $X = \dfrac{2x+1}{3x^2 - x + 1}$, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{2x+1}{3x^2 - x + 1}\right) = \lim\limits_{X \to 0} \cos X = 1$.

c) L'expression $\dfrac{x^2 + x - 2}{1 - x^2}$ est un quotient dont le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 lorsque x tend vers 1. On est donc amené à transformer l'expression du quotient pour lever l'indétermination. Les trinômes de degré 2, $x \mapsto x^2 + x - 2$ et $x \mapsto 1 - x^2$ admettent tous les deux 1 pour racine, ils sont factorisables par $x - 1$.

D'une part $x^2 + x - 2$ a pour discriminant $\Delta = 9$ et pour racines 1 et -2 d'où $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$.

D'autre part $1 - x^2 = (1-x)(1+x) = -(x-1)(1+x)$.

Finalement $\dfrac{x^2 + x - 2}{1 - x^2} = \dfrac{(x-1)(x+2)}{-(x-1)(1+x)} = \dfrac{x+2}{-1-x}$ or $\lim\limits_{x \to 1} x + 2 = 3$ et

$\lim\limits_{x \to 1} -1 - x = -2$ donc par quotient $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+2}{-1-x} = -\dfrac{3}{2}$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{1 - x^2} = -\dfrac{3}{2}$.

d) On cherche la limite en $-\infty$ du quotient $\dfrac{3x^2 + \sin x}{x^2 + 3}$. L'idée est d'encadrer $\sin x$ et de travailler par comparaison après s'être ramené à déterminer des limites de fonctions rationnelles.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $-1 \le \sin x \le 1$ puis $3x^2 - 1 \le 3x^2 + \sin x \le 3x^2 + 1$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 3 > 0$ donc $\dfrac{3x^2 - 1}{x^2 + 3} \le \dfrac{3x^2 + \sin x}{x^2 + 3} \le \dfrac{3x^2 + 1}{x^2 + 3}$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 + 3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2}{x^2} = 3$ et, de façon analogue, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 + 1}{x^2 + 3} = 3$

donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 + \sin x}{x^2 + 3} = 3$.

e) Pour $x \neq 1$ et $x > -\dfrac{1}{3}$,

$$\frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x - 1} = \frac{(\sqrt{3x+1} - 2)(\sqrt{3x+1} + 2)}{(x-1)(\sqrt{3x+1} + 2)} = \frac{3x + 1 - 4}{(x-1)(\sqrt{3x+1} + 2)}$$

$$= \frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1} + 2)} = \frac{3}{\sqrt{3x+1} + 2}.$$

On a $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{3x+1} + 2 = 4$ d'où par quotient $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3}{\sqrt{3x+1} + 2} = \dfrac{3}{4}$ c'est-à-dire

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x - 1} = \frac{3}{4}.$$

f) L'expression $\dfrac{1-\cos^2(3x)}{x^2}$ est un quotient dont on cherche la limite en 0. Le numérateur et le dénominateur tendant vers 0 en 0, on est amené à transformer l'expression. On sait que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $1-\cos^2 a = \sin^2 a$ donc $1-\cos^2(3x) = \sin^2(3x)$ et $\dfrac{1-\cos^2(3x)}{x^2} = \dfrac{\sin^2(3x)}{x^2}$. Le calcul des limites du numérateur et du dénominateur de cette nouvelle forme conduit à nouveau à une indétermination mais on sait que $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$ et l'idée est d'utiliser ce dernier résultat.

On remarque que $\dfrac{\sin^2(3x)}{x^2} = \left(\dfrac{\sin(3x)}{x}\right)^2 = 9\left(\dfrac{\sin(3x)}{3x}\right)^2$.

On a $\lim\limits_{x \to 0} 3x = 0$ donc, par composition avec $X = 3x$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = \lim_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$$

puis, par composition avec $Y = \dfrac{\sin(3x)}{3x}$, on a $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin(3x)}{3x}\right)^2 = \lim\limits_{Y \to 1} Y^2 = 1.$

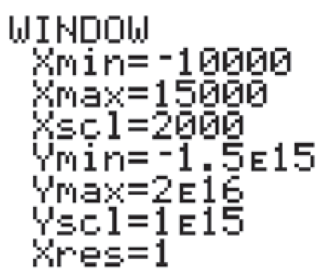
Finalement, par produit par 9, on obtient $\lim\limits_{x \to 0} 9\left(\dfrac{\sin(3x)}{3x}\right)^2 = 9$ c'est-à-dire

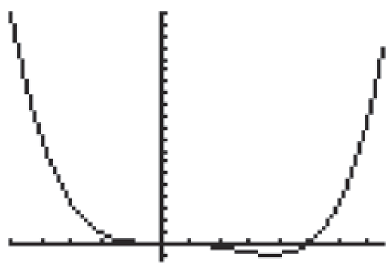
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2(3x)}{x^2} = 9$ ou encore

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos^2(3x)}{x^2} = 9.$

Exercice 5 La fonction f est une fonction polynomiale donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty.$

La recherche d'une fenêtre peut être facilitée dans un premier temps par l'utilisation de GeoGebra. Une fois cette recherche effectuée, on peut proposer par exemple la fenêtre ci-dessous avec le graphique correspondant.





Exercice 6 ❶ **Réponse C**

En effet, $\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\dfrac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\dfrac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}$ or

$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+1}+1=2$ donc par inversion, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$. On remarquera qu'il s'agit ici d'une preuve mais, s'il n'y a pas de démonstration du résultat demandée, on peut s'appuyer sur une conjecture du résultat obtenue par exemple à la calculatrice ce qui peut permettre aussi de conclure.

❷ **Réponse B**

En effet, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-1\le \sin x\le 1$ donc $-1000\le -1000\sin x\le 1000$ et $x-1000\le f(x)\le x+1000$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1000=+\infty$ donc par comparaison en $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. On remarquera ici qu'une conjecture du résultat à l'aide de la calculatrice nécessite de prendre des valeurs de x suffisamment grande pour ne pas proposer une conclusion erronée.

❸ **Réponse C**

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$ et, de la même façon,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x^2-1}=2$ donc la droite d'équation $y=2$ est asymptote à la courbe

$\mathscr{C}$ d'équation $y=\dfrac{2x^2-x+1}{x^2-1}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Le dénominateur x^2-1 s'annule en -1 et en 1 alors qu'en ces deux valeurs, le numérateur ne s'annule pas. Il existe donc deux asymptotes verticales d'équation $x=-1$ et $x=1$.

❹ **Réponse D**

S'il n'y a pas de démonstration du résultat demandé, on peut conjecturer le résultat à l'aide de la calculatrice. Pour une preuve, on remarque que

$$f(x)=\frac{x+\sin x}{x}=1+\frac{\sin x}{x} \text{ or } \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

d'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$ et en choisissant $f(0) = 2$ on prolonge la définition de f à $\mathbb{R}$ en construisant une fonction continue en 0 ainsi qu'on le verra dans le chapitre suivant.

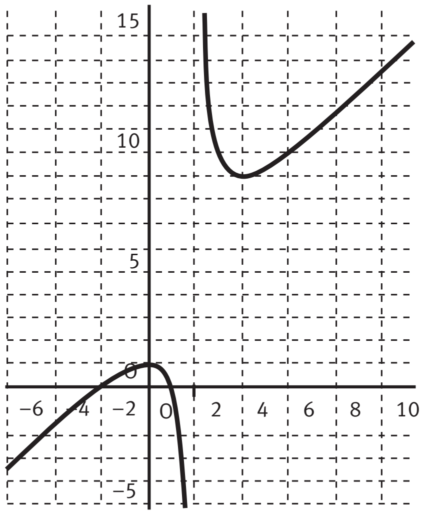
❺ **Réponse C**

La fonction g est la composée de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ par f or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0_+$ donc, par composition avec $X = \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X > 0}} f(X) = +\infty.$

❻ **Réponse B**

La fonction g est la composée de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ par f or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc, par composition avec $X = \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{X \to +\infty} f(X) = 1.$

Exercice 7 ❶ **a)** En s'appuyant sur la représentation graphique de f, il semble que :



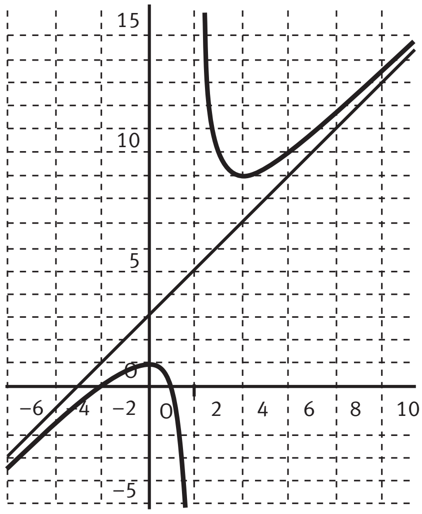
▸ f soit définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$;

▸ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

▸ $\mathscr{C}_f$ admette une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

On peut éventuellement conjecturer la présence d'une autre asymptote, une asymptote oblique.

b) En complétant la graphique par le tracé de la droite Δ la droite d'équation $y = x + 3$, il apparaît que $\mathscr{C}_f$ semble en effet avoir une autre asymptote, à savoir la droite Δ. En effet, la courbe $\mathscr{C}_f$ semble se rapprocher de la droite Δ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.



❷ La fonction f est une fonction rationnelle définie par

$$f(x)=\frac{(2x-5)(x^2+x-2)}{2x^2-9x+10}.$$

Le dénominateur $2x^2-9x+10$ a pour discriminant $\Delta=1$ et pour racines 2 et $\frac{5}{2}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$ privé de ces deux valeurs. La fonction f est donc définie sur $D=\left]-\infty;\, 2\right[\cup\left]2\,;\,\frac{5}{2}\right[\cup\left]\frac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$. On note que la conjecture émise à la question 1 était fausse.

Pour déterminer les limites en $-\infty$ et de $+\infty$, on remarque que pour tout $x\in D$, $f(x)=\dfrac{2x^3-3x^2-9x+10}{2x^2-9x+10}$. On a alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ et, de façon analogue on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.

Pour déterminer les limites en les zéros du dénominateur, on travaille par quotient en déterminant les limites du numérateur et du dénominateur.

On a $\lim\limits_{x\to2} 2x^3-3x^2-9x+10=-4<0$ et $\lim\limits_{x\to2} 2x^2-9x+10=0$ ainsi, pour conclure par quotient, il est nécessaire de préciser le signe du dénominateur au voisinage de 2.

x	$-\infty$ 2 $\frac{5}{2}$ $+\infty$
Signe de $2x^2-9x+10$	+ 0 − 0 +

On peut donc préciser la limite du dénominateur en 2, à savoir

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} 2x^2 - 9x + 10 = 0_+$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} 2x^2 - 9x + 10 = 0_-$

puis on obtient par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

On a $f(x) = \dfrac{(2x-5)(x^2+x-2)}{2x^2-9x+10}$ donc le numérateur et le dénominateur s'annulent en $\dfrac{5}{2}$. Le calcul des limites par quotient conduit donc à une indétermination que l'on va lever en transformant l'expression de *f*.

En remarquant que $2x^2 - 9x + 10 = 2(x-2)(x-\frac{5}{2}) = (x-2)(2x-5)$, on a pour

$x \in D$, $f(x) = \dfrac{(2x-5)(x^2+x-2)}{(x-2)(2x-5)} = \dfrac{x^2+x-2}{x-2}$. Comme $\lim\limits_{x \to \frac{5}{2}} x^2 + x - 2 = \dfrac{27}{4}$

et $\lim\limits_{x \to \frac{5}{2}} x - 2 = \dfrac{1}{2}$, on obtient par quotient $\lim\limits_{x \to \frac{5}{2}} f(x) = \dfrac{27}{2}$.

❸ **a)** Pour tout $x \in D$,

$$f(x) - (x+3) = \frac{x^2+x-2}{x-2} - (x+3) = \frac{x^2+x-2-(x+3)(x-2)}{x-2} = \frac{4}{x-2}.$$

b) On a $\lim\limits_{x \to -\infty} x - 2 = -\infty$ donc par inversion $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$ puis par produit par 4, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x+3) = 0$. De la même façon, on obtient

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x+3) = 0.$$

Le nombre $f(x) - (x+3)$ représente l'écart algébrique mesuré sur une verticale entre les points de coordonnées $(x\,;\, f(x))$ et $(x\,;\, x+3)$ autrement dit l'écart entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ. Du calcul des limites en $-\infty$ et en $+\infty$, on déduit que cet écart algébrique tend vers 0 en $-\infty$ et en $-\infty$ ce qui est cohérent avec les constations effectuées précédemment. C'est même une preuve du résultat. On peut donc affirmer que la droite Δ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite Δ sont données par le signe de $f(x)-(x+3)$. En effet, $\mathscr{C}_f$ et Δ seront sécantes lorsque $f(x)=(x+3)$ c'est-à-dire $f(x)-(x+3)=0$, $\mathscr{C}_f$ sera strictement au-dessus de Δ lorsque $f(x)>(x+3)$ c'est-à-dire $f(x)-(x+3)>0$ et $\mathscr{C}_f$ sera strictement au-dessous de Δ lorsque $f(x)<(x+3)$ c'est-à-dire $f(x)-(x+3)<0$.

On sait que $x-2<0$ sur $]-\infty ; 2[$ et $x-2>0$ sur $]2 ; +\infty[$ donc par inversion et produit par 4, on en déduit que $f(x)-(x+3)<0$ sur $]-\infty ; 2[$ et $f(x)-(x+3)>0$ sur $]2 ; +\infty[$. Par suite, $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessous de Δ sur $]-\infty ; 2[$ et $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de Δ sur $]2 ; +\infty[$, les deux courbes ne se coupant pas.

Exercice 8 ❶ On a $\lim\limits_{x\to 2} 2x^3-6x^2+9=1>0$ et $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2=0_+$ donc par quotient, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$ et, graphiquement, on peut en déduire la présence d'une asymptote verticale d'équation $x=2$.

Pour déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$, on remarque que f est une fonction rationnelle que l'on peut écrire sous la forme $f(x)=\dfrac{2x^3-6x^2+9}{2(x^2-4x+4)}=\dfrac{2x^3-6x^2+9}{2x^2-8x+8}$.

On a alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$. De ces deux derniers résultats, on ne peut pas en déduire l'existence d'asymptote sans raisonnement supplémentaire.

❷ **a)** Pour $x\neq 2$,

$$d(x)=f(x)-(x+1)=\frac{2x^3-6x^2+9}{2(x-2)^2}-(x+1)$$

$$=\frac{2x^3-6x^2+9-(x+1)(2x^2-8x+8)}{2(x-2)^2}=\frac{1}{2(x-2)^2}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x-2=-\infty$, on obtient par composition avec $X=x-2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2(x-2)^2=\lim\limits_{X\to-\infty} 2X^2=+\infty$ puis par inversion $\lim\limits_{x\to-\infty} d(x)=0$. On remarque que l'on aurait pu raisonner en écrivant

$$\lim_{x\to-\infty} d(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2(x-2)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x^2-8x+8}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x^2}=0.$$

De façon analogue, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} d(x)=0$.

L'écart algébrique entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ tend vers 0 en $-\infty$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ tend à se rapprocher de la droite Δ au voisinage de $-\infty$. On en déduit que la droite Δ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$. De la même façon, la droite Δ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

b) Sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $|d(x)|\le 1 \Leftrightarrow 0\le\dfrac{1}{2(x-2)^2}\le 1\Leftrightarrow 1\le 2(x-2)^2$ car $2(x-2)^2>0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Puis, sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $|d(x)|\le 1\Leftrightarrow 1\le 2(x-2)^2\Leftrightarrow 2x^2-8x+7\ge 0$.

Le trinôme $2x^2-8x+7$ a pour discriminant $\Delta=8=(2\sqrt{2})^2$ et pour racines $\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$ puis, $2x^2-8x+7$ étant positif à l'extérieur des racines on obtient comme ensemble de solution de $2x^2-8x+7\ge 0$:

$$S_1=\left]-\infty;\ \frac{4-\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{4+\sqrt{2}}{2}\ ;\ +\infty\right[.$$

Finalement, $|d(x)|\le 1$ a pour ensemble de solution sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$,

$$S=S_1\cap\mathbb{R}\setminus\{2\}=\left]-\infty;\ \frac{4-\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{4+\sqrt{2}}{2}\ ;+\infty\right[.$$

Graphiquement, $|d(x)|$ représentant l'écart géométrique entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ, il apparaît que la distance mesurée verticalement entre les deux courbes est inférieure à une unité de longueur sur l'ensemble S. On peut remarquer que, comme la droite Δ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$, il est logique de retrouver une distance entre les deux courbes inférieure à 1 au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

c) Pour $x\ne 2$, $d(x)=\dfrac{1}{2(x-2)^2}$ or $2(x-2)^2>0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ donc $d(x)>0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Graphiquement, le signe de $d(x)$ nous donne les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite Δ donc $\mathscr{C}_f$ et Δ ne se coupent pas et $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de Δ sur $\left]-\infty ; 2\right[$ et sur $\left]2 ;\ +\infty\right]$.

❸ La fonction f est une fonction rationnelle donc f est dérivable sur son ensemble de définition.

Formule utilisée : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu'-uv'}{v^2}$.

Pour $x \neq 2$,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(x-2)^2 \times \left(6x^2-12x\right) - \left(2x^3-6x^2+9\right) \times (2x-4)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{(x-2) \times \left((x-2)\left(3x^2-6x\right) - \left(2x^3-6x^2+9\right)\right)}{(x-2)^4}$$

d'où $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x^3-6x^2+12x-9)}{(x-2)^4} = \dfrac{x^3-6x^2+12x-9}{(x+1)^3}$.

Comme $(x-3)(x^2-3x+3) = x^3-6x^2+12x-9$, on en déduit que

$$f'(x) = \frac{(x-3)(x^2-3x+3)}{(x-2)^3}.$$

Le trinôme x^2-3x+3 a un discriminant strictement négatif donc il ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, x^2-3x+3 est du signe de x^2. Par suite, $x^2-3x+3 > 0$ sur $\mathbb{R}$.

On a donc le tableau de signe suivant :

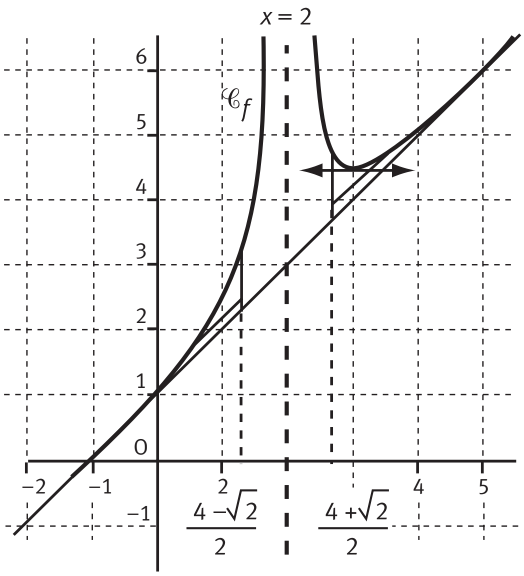
x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
Signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	

La fonction f est donc strictement croissante sur $\left]-\infty ; 2\right[$, strictement décroissante sur]2 ; 3] et strictement croissante sur $\left[3 ;\ +\infty\right[$.

En résumé, on a :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$ ↗		$+\infty$	$+\infty$ ↘	$\frac{9}{2}$	↗	$+\infty$

❹



Corrigé des activités du chapitre 4

■ **Activité 6** ❶ On a $2 \times (AB + BC) = 12$ donc $BC = 6 - AB$ ainsi, pour obtenir le rectangle ABCD sous GeoGebra, on peut créer un curseur a donnant la longueur AB et prenant des valeurs de 0 à 6 puis définir les points A, B, C et D par leurs coordonnées. On peut choisir A(0 ; 0) pour obtenir B(a ; 0), $C(a\ ;\ 6-a)$ et $D(0\ ;6-a)$.

❷

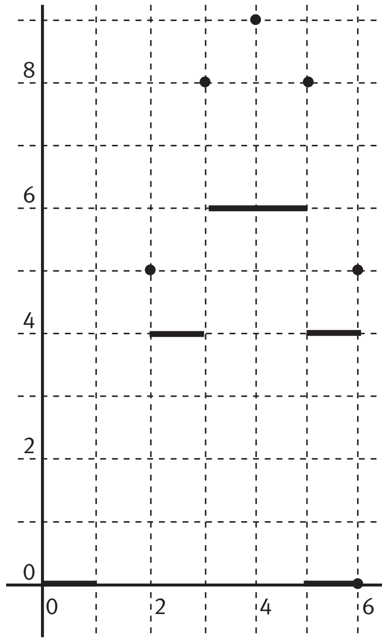
x Longueur AB	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$f(x)$ Nombre de carrés dans ABCD	0	0	5	4	8	6	9	6	8	4	5	0	0

❸ En s'appuyant sur la figure obtenue sous GeoGebra, on observe aisément que $f(3{,}9) = 6$, $f(3{,}99) = 6$ et il apparaît que $f(a) = 6$ pour tout réel a aussi proche que l'on veut de 4 pourvu que $a < 4$.

Algébriquement, comme $BC = 6 - AB$, on observe que lorsque $AB < 4$ on a $BC > 2$ et il apparaît que si AB est proche de 4 en restant strictement inférieur à 4, on peut placer trois petits carrés portés par [AB], multiplié par deux petits carrés portés par [BC]. On place donc six petits carrés à l'intérieur de ABCD.

Finalement $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = 6$.

En adaptant la démarche ci-dessus, on obtient que $f(4{,}1) = 4$, $f(4{,}01) = 4$ puis $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x>4}} f(x) = 4$.



❹ **a)** En s'appuyant sur la figure obtenue sous GeoGebra et lorsque AB parcourt l'intervalle [0 ; 6], on note que :

pour $x \in [0\ ;\ 1[$, on a $f(x) = 0$; $f(1) = 5$;

pour $x \in]1\ ;\ 2[$, on a $f(x) = 4$; $f(2) = 8$;

pour $x \in]2\ ;\ 3[$, on a $f(x) = 6$; $f(3) = 9$;

pour $x \in]3\ ;\ 4[$, on a $f(x) = 6$; $f(4) = 8$

pour $x \in]4\ ;\ 5[$, on a $f(x) = 4$; $f(5) = 5$;

et pour $x \in]5\ ;\ 6]$, on a $f(x) = 0$.

On peut alors construire la représentation graphique de f.

On remarquera que bien que cela ne se voit pas sur le graphique ci-dessus, le trait n'est pas continu sur l'intervalle $]2\ ;\ 4[$ puisque l'image de 3 par f est 9.

b) On remarque que la courbe $\mathscr{C}_f$ présente des discontinuités. Elle ne peut pas être obtenue sans lever le crayon. En terme de fonctions, on dira que la fonction f n'est pas continue sur l'intervalle [0 ; 6]. On dira que la fonction f n'est continue ni en 1, ni en 2, ni en 3, ni en 4, ni en 5.

Pour poursuivre avec l'activité 7, on retiendra que graphiquement, une fonction est dite continue sur un intervalle I lorsque sa représentation graphique s'obtient sans lever le crayon. Dans le cas contraire, la fonction n'est pas continue sur I.

Complément — Création de la courbe sous GeoGebra

On reprend et on poursuit la figure obtenue dans le 1.

On crée un curseur a donnant la longueur AB et prenant des valeurs de 0 à 6 puis on définit les points A, B, C et D où A(0 ; 0), B(a ; 0), $C(a\,;6-a)$ et $D(0\,;6-a)$. On crée alors le rectangle ABCD avec l'outil polygone.

a) On remarque que le plus grand nombre de petits carrés portés par le segment [AB] est le plus grand entier inférieur ou égal à la longueur AB. Ce nombre est donc la partie entière du réel a. On crée ainsi la variable b qui donnera le nombre de petits carrés portés par le segment [AB] en entrant b = floor(a) dans la barre de saisie de GeoGebra.

De même, le plus grand nombre de petits carrés portés par le segment [BC] est la partie entière de la longueur BC ainsi, on crée la variable c = floor(6–a) qui donnera le nombre de petits carrés portés par le segment [BC].

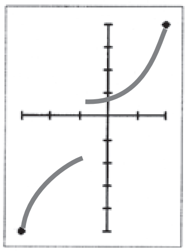
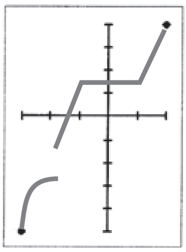
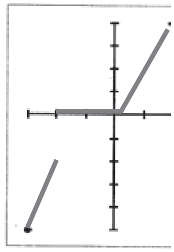
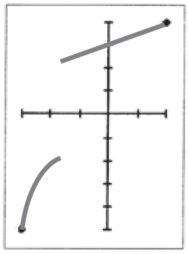
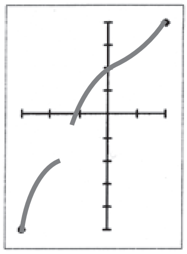
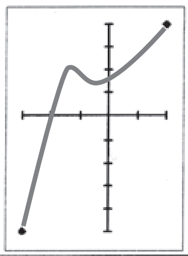
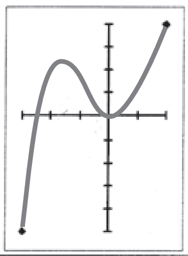
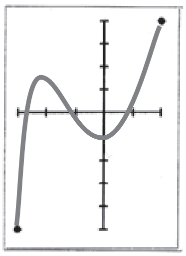
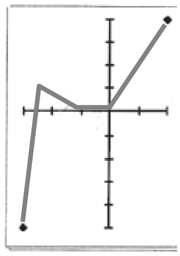
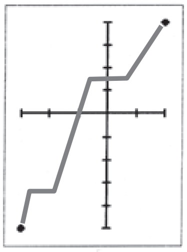
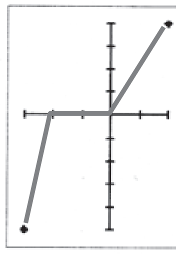
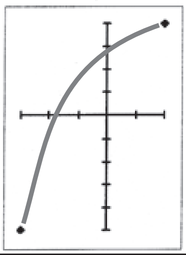
On définit alors les points M, N et P par M(b ; 0), N(b ; c) et D(0 ; c) puis, à l'aide de l'outil polygone, on crée le rectangle AMNP qui est le plus grand rectangle possible constitué de petits carrés contenu dans ABCD.

En mettant de la couleur, on peut alors visualiser un peu plus précisément le problème.

b) Pour obtenir la courbe représentant f, il suffit de se placer sur une deuxième fenêtre graphique et d'y placer le point de coordonnées (a,poly2) en supposant que poly2 est le nom donné au rectangle AMNP.

c) En activant la trace de ce dernier point construit et en faisant varier le curseur a, on obtient la courbe représentant f.

■ Activité 7 ❶

	S est vide	*S* contient exactement une unique solution	*S* contient exactement deux solutions	*S* contient exactement trois solutions	*S* contient une infinité de solutior
f est croissante sur *I*			impossible	impossible	
f est strictement croissante sur *I*			impossible	impossible	impossible
f est continue sur *I*	impossible				
f est continue et croissante sur *I*	impossible		impossible	impossible	
f est continue et strictement croissante sur *I*	impossible		impossible	impossible	impossible

❷ Outre l'hypothèse émise en début d'activité, il apparaît au regard du tableau précédent que pour que l'équation $f(x)=0$ admette des solutions sur I (autrement dit pour qu'il soit impossible d'avoir S vide), il suffit que f soit continue sur l'intervalle I .

Dans ce cas, l'équation $f(x)=0$ peut admettre une, deux, trois, etc ou une infinité de solutions.

❸ Outre l'hypothèse émise en début d'activité, il apparaît que pour que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur I , il suffit que f soit continue sur l'intervalle I et que f soit strictement croissante sur I .

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 4

Exercice 9 Dire que la fonction f est continue en 2 signifie par définition que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$.
Ainsi, pour trouver m, il suffit d'étudier la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 2. On se contente de travailler à gauche de 2, f n'étant pas définie à droite de 2.

Pour $x<2$, $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{x-2}{\sqrt{(2-x)(2+x)}}$

or, pour $x<2$, $2-x>0$ et $2+x>0$ donc $\sqrt{(2-x)(2+x)}=\sqrt{2-x}\sqrt{2+x}$ puis

$f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{2-x}\sqrt{2+x}}=\dfrac{-(2-x)}{\sqrt{2-x}\sqrt{2+x}}=\dfrac{-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} 2-x=0_+$ donc, par composition avec $X=2-x$,

$\lim\limits_{\substack{x\to 12\\ x<2}} \sqrt{2-x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{X}=0.$

De façon analogue, $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+2}=\sqrt{4}=2$ donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=0.$ Pour que f soit continue en 2, on choisit donc $m=0$.

Exercice 10 ❶ Vrai car les flèches obliques traduisent la continuité sur chaque intervalle. Par ailleurs, f étant supposée dérivable sur $\left]-\infty;\ 7\right]$, on obtient une autre façon de justifier sa continuité sur cet intervalle.

❷ Vrai car f est strictement croissante sur $\left[-1\,;\,5\right]$.

❸ Faux car $-4 < f(-5) < 1$ et $f(7) = -5$ ainsi on a $f\left(-5\right) > f\left(7\right)$.

❹ Vrai car f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;\,-1\right]$.

❺ Faux car l'équation $f\left(x\right) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $\left]-\infty\,;\,7\right]$. En effet, comme application du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur chacun des intervalles $\left[-1\,;\,5\right]$ et $[5\,;\,7]$, on obtient que l'équation $f\left(x\right) = 1$ admet une unique solution sur chacun de ces deux intervalles. Puis, par lecture du tableau, il apparaît que l'intervalle image de $\left]-\infty\,;\,-1\right]$ par f est l'intervalle $\left[-4\,;\,1\right[$ auquel n'appartient pas le réel 1. L'équation $f\left(x\right) = 1$ n'a donc pas de solution sur $\left]-\infty\,;\,-1\right]$.

❻ On ne peut pas le dire. Les flèches obliques traduisant la stricte monotonie sur chaque intervalle, on peut affirmer que f est strictement croissante sur $\left]-1\,;\,5\right[$ ou sur $\left[-1\,;\,5\right]$. En revanche, une fonction est strictement croissante sur un intervalle lorsque sa dérivée est strictement positive sauf éventuellement en des réels isolés où elle s'annule. Ainsi, f' peut s'annuler sur $\left]-1\,;\,5\right[$.

❼ Vrai. La justification est donnée à l'assertion 6.

❽ Faux car $f'(5) = 0$. En effet, la fonction f est supposée dérivable sur $\left]-\infty\,;\,7\right]$ donc elle est dérivable en 5 or il y a un changement des variations en 5, ce qui signifie que la dérivée change de signe en s'annulant en 5.

❾ Vrai. La justification a été abordée dans l'assertion 6. La fonction f est strictement croissante sur $\left[-1\,;\,5\right]$ donc f' est strictement positive sur cet intervalle sauf éventuellement en des réels isolés où elle s'annule. La fonction f' peut donc s'annuler en 0.

❿ Vrai. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet des tangentes horizontales lorsque la dérivée s'annule ce qui est le cas au moins en -1 et en 5.

Exercice 11 Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos x - x + 1$. Cette fonction est la somme de la fonction cosinus et de la fonction affine $x \mapsto -x + 1$. Ces deux fonctions étant définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x - 1$.

On a $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ et, pour $x \neq -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, on a $\sin x > -1$ donc $f'(x) < 0$. Ainsi, f' est strictement négative sur $\mathbb{R}$ sauf en les réels isolés de la forme $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ où elle s'annule. On en déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $-x \leq \cos x - x + 1 \leq -x + 2$ or

$\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ donc par comparaison en $-\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} -x + 2 = -\infty$ donc par comparaison en $+\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ (car on a montré qu'elle était dérivable sur $\mathbb{R}$), strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et f change de signe sur $\mathbb{R}$ donc, par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α, autrement dit l'équation $\cos x = x - 1$ admet une unique solution réelle α.

Par balayage, on a $f(1{,}283) \approx 8.10^{-4} > 0$ et $f(1{,}284) \approx -0{,}001 < 0$ donc $f(1{,}284) < 0 < f(1{,}283)$ or $f(\alpha) = 0$ et f strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ d'où

$$1{,}283 < \alpha < 1{,}284.$$

Exercice 12 La fonction f est le produit de $x \mapsto x$ par la fonction $x \mapsto \cos^2 x - 0{,}99$.
La fonction affine $x \mapsto x$ est définie, continue et dérivable sur $\left[-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

La fonction $x \mapsto \cos^2 x$ est le produit de $x \mapsto \cos x$, définie, continue et dérivable sur $\left[-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{4}\right]$, par elle-même donc $x \mapsto \cos^2 x$ est définie, continue et dérivable sur $\left[-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{4}\right]$. La fonction $x \mapsto \cos^2 x - 0{,}99$ étant la somme de cette dernière et de la fonction constante $x \mapsto -0{,}99$, on en déduit qu'elle est définie, continue et dérivable sur $\left[-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Finalement, f est définie, continue et dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$.

Formules utilisées : $(u+v)'=u'+v'$, $(uv)'=u'v+uv'$ et le cas particulier où $u=v$: $\left(u^2\right)'=2u'u$.

Pour $\left[-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$,

$f'(x)=1\times(\cos^2 x-0{,}99)+x\times 2\times(-\sin x)\times\cos x=\cos^2 x-0{,}99-2x\sin x\cos x$.

On dérive à nouveau en remarquant que f' est la somme de $x\mapsto\cos^2 x-0{,}99$ et du produit de $x\mapsto 2x$ par le produit $x\mapsto\sin x\cos x$. Pour ne pas alourdir la rédaction, on admettra la continuité et la dérivabilité des fonctions sur l'ensemble sur lequel on travaille.

Pour $x\in\mathbb{R}$,

$$f''(x)=-2\sin x\cos x-2\sin x\cos x-2x(-\sin^2 x+\cos^2 x)$$

$$=-4\sin x\cos x-2x\cos(2x)=-2\sin(2x)-2x\cos(2x).$$

Soit $x\in\left[-\frac{\pi}{4}\ ;0\right[$. On a $2x\in\left[-\frac{\pi}{2}\ ;0\right[$ donc, d'une part $\sin(2x)<0$ ce qui implique $-2\sin(2x)>0$ et d'autre part $\cos(2x)>0$ or $x<0$ donc $-2x\cos\left(2x\right)>0$. Par somme, on obtient $f''(x)>0$ sur $x\in\left[-\frac{\pi}{4}\ ;0\right[$.

En adaptant ce raisonnement sur $\left]0\ ;\frac{\pi}{4}\right]$, on montre que $f''(x)<0$ sur $\left]0\ ;\frac{\pi}{4}\right]$.

Du signe de f'', on déduit les variations de f' à savoir, f' est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}\ ;0\right]$ et strictement décroissante sur $\left[0\ ;\frac{\pi}{4}\right]$.

x	$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$
Variations de f'	$-\frac{\pi}{4}-0{,}49$	$\nearrow$	$0{,}01$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{4}-0{,}49$

On a $0 \in \left[-\frac{\pi}{4} - 0{,}49 \,;\, 0{,}01\right]$ et f' étant continue sur $\left[-\frac{\pi}{4} \,;\, \frac{\pi}{4}\right]$, on déduit du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions sur $\left[-\frac{\pi}{4} \,;\, \frac{\pi}{4}\right]$, l'une α dans $\left[-\frac{\pi}{4} \,;\, 0\right]$ et l'autre β dans $\left[0 \,;\, \frac{\pi}{4}\right]$.

On pourra remarquer que, la fonction f étant impaire puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$, on obtient que $\beta = -\alpha$.

Par balayage, on a $f'(-0{,}06) \approx -8.10^{-4} < 0$ et $f'(-0{,}05) \approx 3.10^{-3} > 0$ donc $\alpha \approx -0{,}06$.

Par la remarque ci-dessus, on a donc $\beta = -\alpha \approx 0{,}06$.

Par suite, en s'appuyant sur le tableau ci-dessus, on obtient le signe de f' à savoir, strictement négatif sur $\left[-\frac{\pi}{4} \,;\, \alpha\right[$, strictement positif sur $\left]\alpha \,;\, \beta\right[$ et strictement négatif sur $\left]\beta \,;\, \frac{\pi}{4}\right]$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{4} \,;\, \alpha\right]$, strictement croissante sur $\left[\alpha \,;\, \beta\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\beta \,;\, \frac{\pi}{4}\right]$.

x	$-\frac{\pi}{4}$	α	β	$\frac{\pi}{4}$
Variations de f	$0{,}1225\pi$ ↘	$f(\alpha)$ ↗	$f(\beta)$ ↘	$-0{,}1225\pi$

On a $\alpha \approx -0{,}06$ puis $f(\alpha) \approx -4.10^{-4} < 0$ et $\beta \approx 0{,}06$ puis $f(\beta) \approx 4.10^{-4} > 0$.

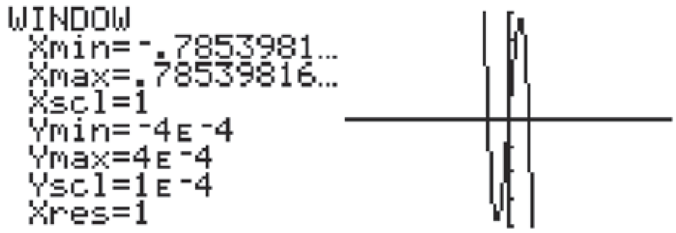
Comme conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans chacun des trois intervalles $\left[-\frac{\pi}{4} \,;\, \alpha\right]$, $\left[\alpha \,;\, \beta\right]$ et $\left[\beta \,;\, \frac{\pi}{4}\right]$. Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions sur $\left[-\frac{\pi}{4} \,;\, \frac{\pi}{4}\right]$.

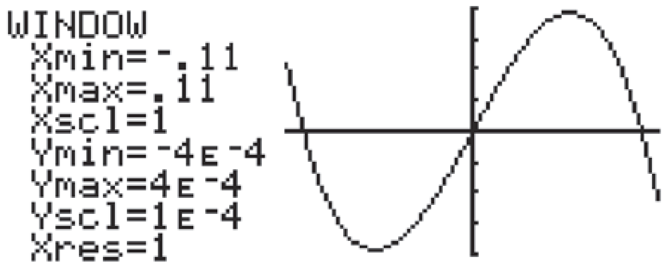
On peut visualiser la situation en choisissant, par exemple, ces fenêtres graphiques, la première donnant la situation sur tout l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ et la deuxième permettant de voir un peu mieux ce qui se passe.

Remarque

▶ La fonction f est impaire car pour tout $\left[-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$, $f(-x)=-f(x)$ ainsi l'étude faite précédemment aurait pu être faite sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$ avant de conclure par symétrie.

▶ On note que $f(0)=0$ donc 0 est la solution de $f(x)=0$ appartenant à l'intervalle $\left[\alpha\ ;\ \beta\right]$.





Exercice 13 ❶ On remarque que, pour tout $x\in D$, $\sin x\neq 0$ donc sur l'ensemble D, on a

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}=8 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+1=8\sin x \Leftrightarrow \tan x+1=8\sin x \Leftrightarrow 8\sin x-\tan x=1.$$

❷ **a)** La fonction f est dérivable sur D comme somme de fonctions dérivables sur D et on a, pour tout $x\in D$, $f'(x)=8\cos x-\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{8\cos^3 x-1}{\cos^2 x}$
or $\cos^2 x>0$ sur D donc $f'(x)$ est bien du signe de $8\cos^3 x-1$ sur cet ensemble.

b) En s'appuyant sur le cercle trigonométrique, on obtient que sur l'ensemble D,

$$\cos x>\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\in\left]0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right[.$$

Ainsi, la fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a sur $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right[$,

$$\cos x>\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos^3 x>\frac{1}{8}\Leftrightarrow 8\cos^3 x-1>0\Leftrightarrow f'(x)>0.$$

En remarquant que sur l'ensemble D, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$, on en déduit que f est strictement croissante sur $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right[$.

c) On rappelle les limites de $\tan x$ à gauche et à droite de $\dfrac{\pi}{2}$.

On a $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ or $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ donc, par quotient, il apparaît nécessaire de déterminer le signe de $\cos x$ en se plaçant à gauche et à droite de $\dfrac{\pi}{2}$. Au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$, $\cos x > 0$ à gauche de $\dfrac{\pi}{2}$ et $\cos x < 0$ à droite de $\dfrac{\pi}{2}$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \cos x = 0_+$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \cos x = 0\_$ d'où finalement par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \tan x = -\infty$.

De ces résultats et de $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, on déduit que $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) = +\infty$.

De $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \tan x = 0$, on déduit que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et de $\lim\limits_{x \to \pi} \sin x = 0$ et $\lim\limits_{x \to \pi} \tan x = 0$, on déduit que $\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = 0$.

En résumé, on a :

x	0		$\dfrac{\pi}{3}$		$\dfrac{\pi}{2}$		π
Variations de f	0	↗	$3\sqrt{3}$	↘ $-\infty$	‖	↘	0

❸ Résoudre sur D l'équation (E) revient à résoudre sur D l'équation $f(x) = 1$.

Ainsi, la réponse à cette question s'obtient par application du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur chacun des trois intervalles $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right]$, $\left[\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$ en remarquant que la fonction f y est continue.

Par lecture du tableau, il apparaît que l'équation $f(x)=1$ admet trois solutions, l'une dans chacun des trois intervalles précédents. Par suite, l'équation (E) admet trois solutions sur D situées dans chacun des trois intervalles précédents.

Exercice 14 Raisonnons par récurrence

On a $u_0 \in \left]0\ ;\ 1\right[$ donc la proposition « $u_n \in \left]0\ ;\ 1\right[$ » est vraie au rang $n=0$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_k < 1$. On a $u_{k+1} = u_k(1-u_k)$ or $0 < u_k$ et $1-u_k > 0$ donc par produit $u_{k+1} > 0$.

Par ailleurs, $u_{k+1} = u_k - u_k^2 \le u_k < 1$ ainsi on a $0 < u_{k+1} < 1$.

Finalement par récurrence, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]0\ ;\ 1\right[$.

La suite (u_n) est bornée donc, pour qu'elle converge, il suffit qu'elle soit monotone (par le théorème de la convergence monotone) or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2 \le u_n$ donc (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée, elle converge vers un réel ℓ. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$, on en déduit par passage à la limite que $0 \le \ell \le 1$.

Par composition avec $x = u_n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(1+u_n) = \lim\limits_{x\to\ell} x(1+x) = \ell(1+\ell)$ car la fonction polynomiale $x \mapsto x(1+x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (donc en ℓ).

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. De l'unicité de la limite, on déduit que $\ell(1+\ell) = \ell$.

Comme $x(1+x) = x \Leftrightarrow x(1+x) - x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, on obtient $\ell = 0$.

Exercice 15 ❶ La fonction f est la somme des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sin x$ toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + \cos x$.

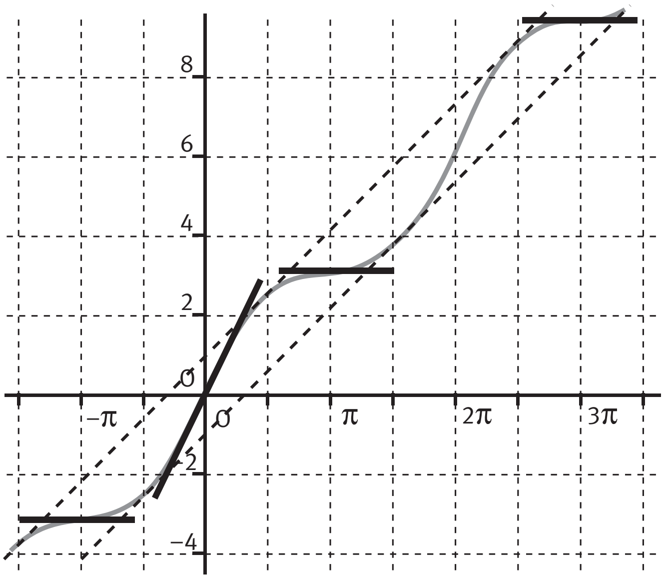
On a $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \cos x + 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x > -1 \Leftrightarrow x \ne \pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f'(\pi + 2k\pi) = \cos(\pi + 2k\pi) + 1 = 0$ donc f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ sauf en les réels isolés $\pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \le \sin x \le 1$ donc $x - 1 \le f(x) \le x + 1$.

Puis $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 = -\infty$ donc par comparaison en $-\infty$ on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

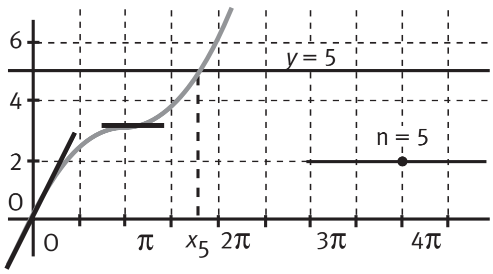
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ donc par comparaison en $+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Pour tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, on peut remarquer que, comme pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x-1\le f(x)\le x+1$, $\mathscr{C}_f$, se situe entre les deux droites d'équations $y=x-1$ et $y=x+1$. Par ailleurs, on peut tracer la tangente à l'origine du repère, cette tangente ayant pour coefficient directeur le nombre $f'(0)=2$.



❷ **a)** La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$ (comme somme des fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto \sin x$ toutes deux continues sur $\mathbb{R}$) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Pour tout n entier naturel, on a $n\in f(\mathbb{R})$ donc l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution réelle notée x_n. On peut visualiser la situation sous GeoGebra en traçant la courbe, en créant un curseur n prenant des valeurs entières et en ajoutant la droite d'équation $y=n$.

b) On sait que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x-1\le f(x)\le x+1$ donc on a $x_n-1\le f(x_n)\le x_n+1$ or $f(x_n)=n$ donc $x_n-1\le n\le x_n+1$.



De $n\le x_n+1$, on déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n-1\le x_n$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$.

En poursuivant sur les encadrements, de $x_n-1\le n$, on déduit que $x_n\le n+1$ pour finalement obtenir que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n-1\le x_n\le n+1$ puis, pour tout $n>0$, $\frac{n-1}{n}\le\frac{x_n}{n}\le\frac{n+1}{n}$ ou encore $1-\frac{1}{n}\le\frac{x_n}{n}\le 1+\frac{1}{n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}1-\dfrac{1}{n}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}1+\dfrac{1}{n}=1$ donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{n}=1.$

En résumé, la suite (x_n) des solutions de l'équation E_n est divergente, elle tend vers $+\infty$ à la même vitesse que n tend vers $+\infty$.

Exercice 16 ❶ On remarque que les longueurs étant en mètres, on exprime les vitesses en m.s^{-1} pour obtenir les temps t_1 et t_2 en seconde. La vitesse du lapin est de $30\ \text{km.h}^{-1}$ soit $\dfrac{30}{3{,}6}\ \text{m.s}^{-1}$ et celle du camion est du double à savoir, $60\ \text{km.h}^{-1}$ ou encore $\dfrac{60}{3{,}6}\ \text{m.s}^{-1}$.

Dans le triangle ABD rectangle en B, on a $\dfrac{AB}{AD}=\cos\theta$ donc $AD=\dfrac{AB}{\cos\theta}=\dfrac{4}{\cos\theta}$.

Par suite, on a $t_1=\dfrac{AD}{\textit{vitesse lapin}}=\dfrac{4}{\textit{vitesse lapin}\times\cos\theta}=\dfrac{4\times3{,}6}{30\times\cos\theta}$.

Dans le triangle ABD rectangle en B, on a $\dfrac{BD}{AB}=\tan\theta$ donc $BD=AB\tan\theta=4\tan\theta$.

Comme $B\in[CD]$, on en déduit que $CD=CB+BD=7+4\tan\theta$. Par suite, on a

$$t_2=\frac{CD}{\textit{vitesse camion}}=\frac{7+4\tan\theta}{\textit{vitesse camion}}=\frac{3{,}6\times(7+4\tan\theta)}{60}.$$

❷ Pour que le lapin puisse traverser la route avant le passage du camion, il faut et il suffit que $t_2>t_1$ ce qui équivaut à $\dfrac{3{,}6\times(7+4\tan\theta)}{60}>\dfrac{4\times3{,}6}{30\times\cos\theta}$.

On obtient $t_2>t_1\Leftrightarrow\dfrac{7+4\tan\theta}{2}>\dfrac{4}{\cos\theta}\Leftrightarrow\dfrac{7}{2}+2\tan\theta-\dfrac{4}{\cos\theta}>0\Leftrightarrow f(\theta)>0$ où $f(\theta)=\dfrac{7}{2}+2\tan\theta-\dfrac{4}{\cos\theta}$.

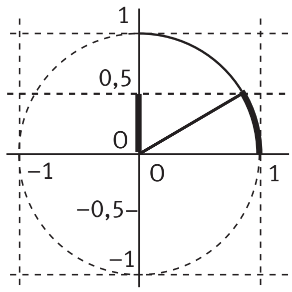
❸ Pour déterminer le signe de $f(\theta)$, on étudie les variations de f sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

La fonction f est la somme des fonctions $\theta \mapsto \frac{7}{2}$, $\theta \mapsto 2\tan\theta$ et $\theta \mapsto -\frac{4}{\cos\theta}$ toutes les trois dérivables sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. En effet, la fonction constante $\theta \mapsto \frac{7}{2}$ est dérivable sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, la fonction $\theta \mapsto \tan\theta$ est dérivable sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et la fonction $\theta \mapsto -\frac{4}{\cos\theta}$ est le produit par -4 de l'inverse de $\theta \mapsto \cos\theta$, dérivable et ne s'annule pas sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. La fonction f est donc dérivable sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

Formule utilisée : $(u+v)' = u'+v'$ et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

Pour $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(\theta) = 2\times\frac{1}{\cos^2\theta} - 4\times(-\frac{-\sin\theta}{\cos^2\theta}) = 2\frac{1-2\sin\theta}{\cos^2\theta}$.

Pour $\theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos^2\theta > 0$ et $2 > 0$ donc $f'(\theta)$ est du signe de $1-2\sin\theta$.



En s'appuyant sur le cercle trigonométrique, on observe que sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$,

$$1-2\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

et sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, $1-2\sin\theta > 0 \Leftrightarrow \sin\theta < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta < \frac{\pi}{6}$.

Finalement, $f'(\theta) > 0$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{6}\right[$ et $f'(\theta) < 0$ sur $\left]\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{6}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. Elle admet un maximum en $\frac{\pi}{6}$ égale $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{7}{2} + 2\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{8}{\sqrt{3}} \approx 0{,}04$.

On a $f(0) = -0{,}5 < 0$ et, pour compléter l'étude de f, on détermine la limite de f à gauche de $\frac{\pi}{2}$.

On a $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2\tan\theta - \frac{4}{\cos\theta} = \frac{7}{2} + 2\frac{\sin\theta - 2}{\cos\theta}$ or $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \sin\theta - 2 = -1$ et

$\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} \cos\theta = 0_+$ donc par quotient $\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} \dfrac{\sin\theta - 2}{\cos\theta} = -\infty$ et, par produit par 2 puis par somme, on obtient $\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} f(\theta) = -\infty$.

En résumé :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
Variations de f	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{7}{2} - 2\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Après avoir précisé la continuité de f sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ et en appliquant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur chacun des intervalles $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{6}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, on observe que f s'annule exactement une fois sur chacun de ces intervalles et, en s'appuyant sur les variations de f, on obtient que $f(\theta) > 0$ entre ces deux zéros α et β de f.

Pour plus de précisions, on peut déterminer les zéros de f par balayage.

On a $f(0,3) \approx -0,07 < 0$ et $f(0,4) \approx 0,003 > 0$ d'où $0,3 < \alpha < 0,4$ et on peut retenir $\alpha \approx 0,4$ puis $f(0,6) \approx 0,02 > 0$

et $f(0,7) \approx -0,04 < 0$ d'où $0,6 < \beta < 0,7$ et on peut retenir $\beta \approx 0,6$.

Pour réussir à échapper à la collision avec le camion, le lapin devra donc traverser avec un angle compris entre 0,4 et 0,6 radians.

Corrigé de l'activité du chapitre 5

■ **Activité 8** ❶ **a)** On cherche la dérivée de la fonction g définie sur $\left[-\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$ par $g(x)=\sqrt{3x+1}$.

On cherche la limite du taux d'accroissement $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

Soit $x\geq -\frac{1}{3}$ et h tel que $x+h\geq -\frac{1}{3}$. On a

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{\sqrt{3(x+h)+1}-\sqrt{3x+1}}{h}=\frac{\sqrt{3x+3h+1}-\sqrt{3x+1}}{h}.$$

La démarche pour déterminer la limite de cette expression est alors de multiplier numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée du numérateur, à savoir $\sqrt{3x+3h+1}+\sqrt{3x+1}$. Pour ce faire, on s'assure que cette expression ne puisse pas être nulle pour tout $h\neq 0$ et pour cela, il faut supposer $3x+1>0$ c'est-à-dire $x>-\frac{1}{3}$.

On a alors $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{(\sqrt{3x+3h+1}-\sqrt{3x+1})(\sqrt{3x+3h+1}+\sqrt{3x+1})}{h(\sqrt{3x+3h+1}+\sqrt{3x+1})}$.

D'où

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{3x+3h+1-(3x+1)}{h(\sqrt{3x+3h+1}+\sqrt{3x+1})}=\frac{3h}{h(\sqrt{3x+3h+1}+\sqrt{3x+1})}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{3x+3h+1}+\sqrt{3x+1}}$$

or $\lim\limits_{h\to 0} 3x+3h+1=3x+1$ donc, par composition $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{3x+3h+1}=\sqrt{3x+1}$

puis $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{3x+3h+1}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{3x+1}.$

Finalement $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$.

Ainsi, la fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$ et, pour tout $x>-\frac{1}{3}$,

$$g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}.$$

On peut remarquer que la démonstration ci-dessus permet de justifier la dérivabilité de g sur $\left]-\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$ mais ne fournit aucune information quant à la dérivabilité de g en $-\frac{1}{3}$. Pour étudier la dérivabilité de g en $-\frac{1}{3}$, on revient à la définition de la dérivabilité et on étudie la limite du taux d'accroissement $\dfrac{g(-\frac{1}{3}+h)-g(-\frac{1}{3})}{h}$ lorsque h tend vers 0.

Pour $h>0$, $\dfrac{g(-\frac{1}{3}+h)-g(-\frac{1}{3})}{h}=\dfrac{\sqrt{3(-\frac{1}{3}+h)+1}-0}{h}=\dfrac{\sqrt{3h}}{h}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{h}}$ or

$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\sqrt{h}=0_+$ donc par inversion $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\dfrac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$ puis par produit par $\sqrt{3}$ on obtient $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\dfrac{g(-\frac{1}{3}+h)-g(-\frac{1}{3})}{h}=+\infty$. La fonction g n'est donc pas dérivable en $-\frac{1}{3}$.

b) On adapte tout simplement ce qui précède au cas où $g(x)=\sqrt{ax+b}$ avec $ax+b\geq 0$, c'est à dire $x\geq -\frac{b}{a}(a>0)$.

On cherche la limite du taux d'accroissement $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

Soit $x\geq -\frac{b}{a}$ et h tel que $x+h\geq -\frac{b}{a}$. On a

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b}}{h}=\frac{\sqrt{ax+ah+b}-\sqrt{ax+b}}{h}.$$

La démarche pour déterminer la limite de cette expression est alors de multiplier numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée du numérateur, à savoir $\sqrt{ax+ah+b}+\sqrt{ax+b}$. Pour ce faire, on s'assure que cette expression ne puisse pas être nulle pour tout $h\neq 0$ et pour cela, il faut supposer $ax+b>0$ c'est à dire $x>-\frac{b}{a}$.

On a alors $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=\dfrac{\left(\sqrt{ax+ah+b}-\sqrt{ax+b}\right)\left(\sqrt{ax+ah+b}+\sqrt{ax+b}\right)}{h\left(\sqrt{ax+ah+b}+\sqrt{ax+b}\right)}$.

D'où

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{ax+ah+b-(ax+b)}{h(\sqrt{ax+ah+b}+\sqrt{ax+b})}=\frac{ah}{h(\sqrt{ax+ah+b}+\sqrt{ax+b})}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{ax+ah+b}+\sqrt{ax+b}}$$

or $\lim\limits_{h\to 0} ax+ah+b=ax+b$ donc, par composition $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{ax+ah+b}=\sqrt{ax+b}$

puis $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{ax+ah+b}+\sqrt{ax+b}=2\sqrt{ax+b}.$

Finalement $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

Ainsi, la fonction f est dérivable sur $\left]-\dfrac{b}{a}\ ;\ +\infty\right[$ et, pour tout $x>-\dfrac{b}{a}$,

$$g'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}.$$

Comme on l'a fait précédemment, on peut compléter l'étude en s'interrogeant sur la dérivabilité de g en $-\dfrac{b}{a}$. Pour ce faire, on étudie la limite du taux d'accroissement $\dfrac{g(-\frac{b}{a}+h)-g(-\frac{b}{a})}{h}$ lorsque h tend vers 0. On a pour $h>0$,

$$\frac{g(-\frac{b}{a}+h)-g(-\frac{b}{a})}{h}=\frac{\sqrt{a(-\frac{b}{a}+h)+b}-0}{h}=\frac{\sqrt{ah}}{h}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$$

or $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\sqrt{h}=0_+$ donc par inversion $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\dfrac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$ puis par produit par $\sqrt{a}$ on obtient $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\dfrac{g(-\frac{b}{a}+h)-g(-\frac{b}{a})}{h}=+\infty.$

La fonction g n'est donc pas dérivable en $-\dfrac{b}{a}$.

❷ **a)** L'objectif étant de déterminer la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(ax+b)^3$, on cherche la limite du taux d'accroissement $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

Après avoir défini la fonction g en affectant à $g(x)$ la valeur $(ax+b)^3$ (étape 1 de la copie d'écran), on calcule le taux d'accroissement de g entre x et $x+h$ (étape 2 de la copie d'écran) puis on développe le numérateur et on simplifie (étape 3 de la copie d'écran).

Le détail des calculs est fastidieux d'où l'intérêt d'utiliser un logiciel de calcul formel même s'il reste possible de faire « à la main » les calculs afin de se convaincre de la validité des résultats.

Il reste à déterminer la limite de $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ lorsque h tend vers 0 (étape 4 de la copie d'écran) puis à l'exprimer sous une forme un peu plus simple (étape 5 de la copie d'écran).

On a obtenu $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=3a(ax+b)^2$.

b) De la démarche précédente, on en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=3a(ax+b)^2$ or f est définie par $f(x)=x^3$ donc $f'(x)=3x^2$ et on obtient $g'(x)=a\times f'(ax+b)$.

❸ Dans le cas général où g est la composée de la fonction affine u définie par $u(x)=ax+b$ et d'une fonction f dérivable, on peut suivre les étapes qui conduisent à déterminer le nombre dérivé de g en x autrement dit $g'(x)$. A l'étape 1, on définie $g(x)=f(ax+b)$. A l'étape 2 puis à l'étape 3, on détermine comme précédemment le nombre $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ puis sa limite lorsque h tend vers 0. Le nombre déterminé à l'étape 3 est alors $g'(x)$.

Il semble donc que $g'(x)=a\times f'(ax+b)$ ce qui est cohérent avec la relation obtenue au 2.

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 5

Exercice 17 **a)** La fonction f est la composée de $x\mapsto 4-x$ par $x\mapsto\sqrt{x}$.

La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et la fonction $x\mapsto 4-x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs strictement positives sur $]-\infty\,;4[$ donc f est dérivable sur $I =]-\infty\ ;\ 4[$.

Formule utilisée : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour $x \in]-\infty\ ;\ 4[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}}$.

b) La fonction f est le produit de $x \mapsto x^2$ et de la composée de $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ par $x \mapsto \cos x$

La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis, la fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc, f est dérivable sur $I = \mathbb{R}$.

Formules utilisées : $(uv)' = u'v + uv'$ et $(\cos u)' = -a \sin u$ où u est la fonction affine définie par $u(x) = ax + b$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x\cos(\dfrac{x}{2}) + x^2(-\dfrac{1}{2}\sin(\dfrac{x}{2})) = 2x\cos(\dfrac{x}{2}) - \dfrac{x^2}{2}\sin(\dfrac{x}{2})$ que l'on peut aussi écrire par exemple sous la forme $f'(x) = \dfrac{x}{2}(4\cos(\dfrac{x}{2}) - x\sin(\dfrac{x}{2}))$ si on prend l'habitude de factoriser autant que possible les dérivées dans le but d'une éventuelle étude de signe permettant d'obtenir les variations de la fonction. On peut noter que dans le cas présent, l'étude du signe de nécessiterait l'étude de la fonction auxiliaire $x \mapsto 4\cos(\dfrac{x}{2}) - x\sin(\dfrac{x}{2})$.

c) La fonction f est le quotient de $x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$ par $x \mapsto x-1$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$ est la composée de $x \mapsto 1+\sin x$ par $x \mapsto \sqrt{x}$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, la composée $x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$ est dérivable lorsque la fonction $x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$ est dérivable et strictement positive or $1+\sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x > -1 \Leftrightarrow \sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ donc $x \mapsto 1+\sin x$ est à valeurs strictement positive sur tout intervalle ne contenant pas de réel de la forme $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Finalement, la composée $x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$ est dérivable sur tout intervalle ne contenant pas de réel de la forme $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Par ailleurs, la fonction $x \mapsto x-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 1 de sorte que la fonction f soit dérivable sur tout intervalle ne contenant ni 1, ni les réels de la forme $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathrm{I} = [0 ; 1[$.

Formules utilisées : $(\frac{u}{v})' = \frac{vu'-uv'}{v^2}$ et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour $x \in \left[0 ; 1\right[$,

$$f'(x) = \frac{(x-1)\times\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}} - 1\times\sqrt{1+\sin x}}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)\cos x - 2(1+\sin x)}{2\sqrt{1+\sin x}\,(x-1)^2}.$$

Exercice 18 ❶ D'une part, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2-3 = -2$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x-1 = 0_+$ donc, par composition avec $X = x-1$ on a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt{x-1} = \lim\limits_{\substack{X\to 0\\ X>0}} \sqrt{X} = 0$ puis $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -2.$

Finalement, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = f(1)$ donc la fonction f est continue en 1.

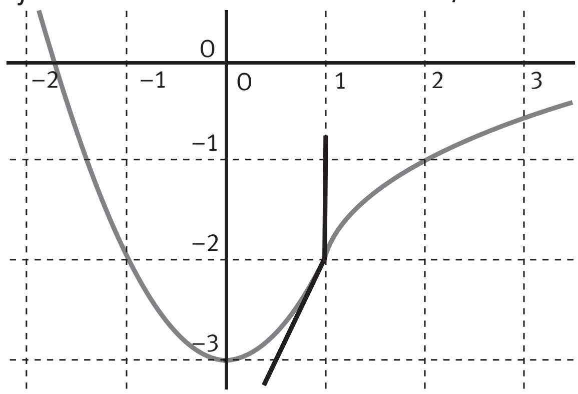
❷ On étudie la dérivabilité à gauche et à droite de 1.

Pour $h<0$, $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-3-(-2)}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = 2+h$

or $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} h+2 = 2$ d'où $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$. La fonction f est donc dérivable à gauche de 1 et admet 2 pour nombre dérivé à gauche.

Pour $h>0$, $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{h}-2-(-2)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ or $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \sqrt{h} = 0_+$ donc par inversion $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = +\infty$ et f n'est pas dérivable à droite de 1. Finalement, f n'est pas dérivable en 1.

❸ On peut déduire de la continuité de f en 1 que la courbe $\mathscr{C}_f$ ne présente pas de discontinuité au voisinage du point d'abscisse 1, c'est-à-dire que la courbe peut être tracée sans lever le crayon. De l'étude de la dérivabilité en 1, on déduit que $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente de coefficient directeur 2 à gauche de 1 alors qu'elle admet une demi-tangente verticale à droite de 1. Ainsi, on peut observer un point anguleux au point d'abscisse 1.



Exercice 19 ❶ **a)** Par lecture graphique, $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse -1 donc f ne semble pas dérivable en -1 puis $\mathscr{C}_f$ admet, à l'origine, deux demi-tangentes de coefficients directeurs différents (-1 à gauche et 1 à droite) donc f ne semble pas dérivable en 0 bien qu'elle semble l'être à gauche et à droite de 0.

b) ▸ Pour $h > 0$,

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{\sqrt{(-1+h)^2 h}}{h} = \sqrt{\frac{(-1+h)^2 h}{h^2}} = \sqrt{\frac{(-1+h)^2}{h}} = \sqrt{\frac{1}{h}-2+h}$$

or $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h} = +\infty$ et $\lim\limits_{h\to 0} -2+h = -2$ donc par somme $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}-2+h = +\infty$ puis

par composition $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \sqrt{\frac{1}{h}-2+h} = \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty.$

On a finalement $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en -1 mais on retrouve bien le fait que $\mathscr{C}_f$ admette une demi-tangente verticale au point d'abscisse -1 .

▸ Pour $h \neq 0$, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2(h+1)}}{h} = \frac{\sqrt{h^2}\sqrt{h+1}}{h} = \frac{|h|\sqrt{h+1}}{h}$ donc, pour $h > 0$, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \sqrt{h+1}$ et pour $h < 0$, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -\sqrt{h+1}.$

Comme $\lim\limits_{h \to 0} h+1=1$, on a par composition $\lim\limits_{h \to 0} \sqrt{h+1} = \lim\limits_{X \to 1} \sqrt{X} = 1$

puis $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$ alors que $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$. La fonction *f* est donc dérivable à droite de 0 et à gauche de 0 mais les nombres dérivées à droite et à gauche étant différents, *f* n'est pas dérivable en 0.

❷ **a)** La fonction *f* est la composée de la fonction polynomiale $x \mapsto x^2(x+1) = x^3 + x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positive lorsque $x \in \left]-1\,;\,0\right[\cup \left]0\,;\,+\infty\right[$ par la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $\left]0\,;\,+\infty\right[$ ainsi *f* est dérivable sur $\left]-1\,;\,0\right[\cup \left]0\,;\,+\infty\right[$. On peut remarquer que le démonstration que l'on vient de suivre permet de prouver la dérivabilité de *f* sur $\left]-1\,;\,0\right[\cup \left]0\,;\,+\infty\right[$ mais elle ne permet pas d'affirmer que *f* n'est pas dérivable ailleurs. Pour l'affirmer, il était nécessaire de procéder comme on l'a vu au 1.

Formule utilisée : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour $x \in \left]-1\,;\,0\right[\cup \left]0\,;\,+\infty\right[$, $f'(x) = \dfrac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2}}$ or $2\sqrt{x^3+x^2} > 0$ sur $\left]-1\,;\,0\right[\cup \left]0\,;\,+\infty\right[$ donc sur cette réunion $f'(x)$ est bien du signe de $3x^2+2x$.

On a $3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(3x+2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-\dfrac{2}{3}$ or le coefficient de x^2 est positif d'où le signe de $3x^2+2x$ puis de $f'(x)$.

x	-1		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
Signe de $3x^2+2x$		+	0	−	0	+	
Signe de $f'(x)$		+	0	−	‖	+	

La fonction *f* est donc strictement croissante sur $\left[-1\,;\,-\dfrac{2}{3}\right]$, strictement décroissante sur $\left[-\dfrac{2}{3}\,;\,0\right]$ et strictement croissante sur $\left[0\,;\,+\infty\right[$.

b) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2(x+1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + x^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ (on peut aussi tout simplement raisonner par produit à partir de l'expression $x^2(x+1)$) donc, par composition avec $X = x^2(x+1)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$.

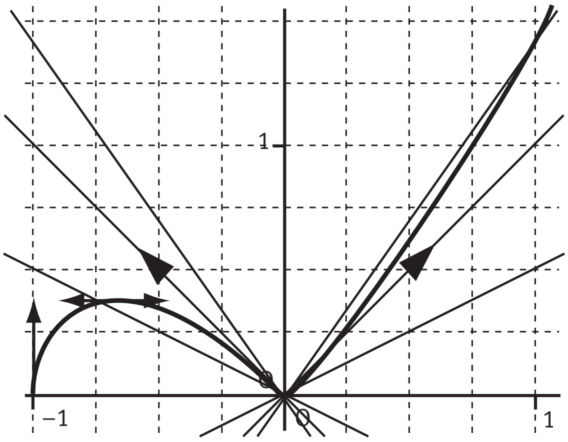
En remarquant que $f(-\frac{2}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, on dispose de tous les éléments pour dresser le tableau des variations de *f*.

X	-1		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

❸ **a)** Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = k$ où k est réel découle du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'on applique sur chacun des intervalles où *f* est strictement monotone $\left[-1\,;\,-\frac{2}{3}\right]$, $\left[-\frac{2}{3}\,;\,0\right]$ et $\left[0\,;\,+\infty\right[$. La fonction *f* étant continue sur son ensemble de définition, il suffit de considérer les cas où le réel k appartient aux intervalles images par *f* de ces trois intervalles. Par lecture du tableau, on obtient :

- si $k < 0$ alors l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution sur $\left[-1\,;\,+\infty\right[$;
- si $k = 0$ alors l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions sur $\left[-1\,;\,+\infty\right[$ qui sont -1 et 0 ;
- si $0 < k < \frac{2\sqrt{3}}{9}$ alors l'équation $f(x) = k$ admet trois solutions sur $\left[-1\,;\,+\infty\right[$ situées dans chacun des trois intervalles ci-dessus ;
- si $k = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ alors l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions sur $\left[-1\,;\,+\infty\right[$, l'une égale à $-\frac{2}{3}$ et l'autre dans $\left[0\,;\,+\infty\right[$;
- si $k > \frac{2\sqrt{3}}{9}$ alors l'équation $f(x) = k$ admet une solution sur $\left[-1\,;\,+\infty\right[$ située dans $\left[0\,;\,+\infty\right[$.

b) Déterminer le nombre de solutions sur $[-1\,;\,1]$ de l'équation $f(x)=mx$ revient à déterminer le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y=mx$ selon les valeurs de son coefficient directeur *m*.



On remarque que les droites d'équation $y=mx$ passent toutes par l'origine donc l'équation $f(x)=mx$ admet au moins 0 comme solution, quelle que soit la valeur du réel *m*.

Si $m\le -1$ alors $f(x)=mx$ admet 0 comme unique solution sur $[-1\,;\,1]$.

Si $-1<m\le 0$ alors $f(x)=mx$ admet deux solutions sur $[-1\,;\,1]$, l'une égale à 0 et l'autre appartenant à $]-1\,;\,0[$ lorsque $m<0$ et égale à -1 si $m=0$.

Si $0<m\le 1$ alors $f(x)=mx$ admet 0 comme unique solution sur $[-1\,;\,1]$.

On remarque que, parmi les droites d'équation $y=mx$ coupant deux fois la courbe $\mathscr{C}_f$, celle dont le coefficient directeur est le plus grand la coupe au point de coordonnées $\big(1\,;\,f(1)\big)$, c'est-à-dire au point de coordonnées $\big(1\,;\,\sqrt{2}\big)$. Par suite, cette droite à donc pour coefficient directeur $\sqrt{2}$ ce qui permet d'en déduire le cas suivant.

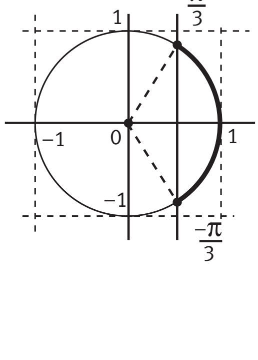
Si $1<m\le\sqrt{2}$ alors $f(x)=mx$ admet deux solutions sur $[-1\,;\,1]$, l'une égale à 0 et l'autre appartenant à $]0\,;\,1[$ lorsque $m>1$ et égale à 1 si $m=\sqrt{2}$.

Si $m>\sqrt{2}$ alors $f(x)=mx$ admet 0 comme unique solution sur $[-1\,;\,1]$.

Exercice 20 ■ **Domaine de définition, domaine de dérivabilité**

La fonction *f* est la composée de la fonction $x\mapsto 2\cos x-1$ par la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ or cette dernière est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ donc, par composition, *f* est définie lorsque $2\cos x-1\ge 0$ et elle est dérivable sur tout intervalle sur lequel $2\cos x-1>0$.

D'après l'énoncé, *f* est définie sur un intervalle inclus dans $[-\pi\,;\,\pi]$.



En s'appuyant sur le cercle trigonométrique, on a sur $[-\pi\,;\,\pi]$:

$$2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{et } 2\cos x - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}\ .$$

Par suite, la fonction f est définie sur $\left[-\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{3}\right]$ et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{3}\right[$.

On peut noter que f étant définie sur un intervalle centré en 0 et la fonction cosinus étant paire, la fonction f est elle même paire. Cette remarque permet de restreindre l'étude sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right]$ par exemple et d'en déduire le comportement de f sur $\left[-\frac{\pi}{3}\ ;\ 0\right]$ grâce à la parité.

De plus, on peut noter que, jusqu'à présent, on n'a aucune information concernant l'éventuelle dérivabilité en $\frac{\pi}{3}$ et en $-\frac{\pi}{3}$.

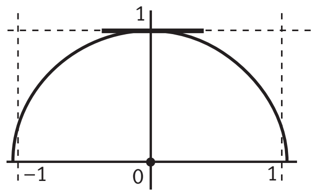
■ Dérivée et variations

Formule utilisée : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{3}\right[$, $f'(x) = \frac{-2\sin x}{2\sqrt{2\cos x - 1}} = \frac{-\sin x}{\sqrt{2\cos x - 1}}$.

Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{3}\right[$, $\sqrt{2\cos x - 1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe opposé à celui de $\sin x$ d'où $f'(x) > 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{3}\ ;\ 0\right[$, $f'(x) < 0$ sur $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right[$ et $f'(0) = 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{3}\ ;\ 0\right]$ et strictement décroissante sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right]$.

■ Courbe



Comme la dérivée f' de f s'annule à l'origine, la représentation graphique de f admet une tangente horizontale au point de coordonnées $\big(0\ ;\ f(0)\big)$, c'est-à-dire au point de coordonnées (0 ; 1).

■ Complément

Pour plus de précision, en complément, on peut démontrer l'existence d'une tangente verticale au point d'abscisse $\frac{\pi}{3}$ en étudiant la dérivabilité de f à gauche de $\frac{\pi}{3}$. On remarquera alors que la symétrie de la courbe que l'on déduit de la parité de f permet d'affirmer l'existence d'une demi-tangente verticale au point d'abscisse $-\frac{\pi}{3}$.

Soit h un réel non nul tel que $\frac{\pi}{3}+h \in \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right]$ (on a donc $h<0$). On a

$$\frac{f(\frac{\pi}{3}+h)-f(\frac{\pi}{3})}{h}=\frac{1}{h}\sqrt{2\cos(\frac{\pi}{3}+h)-1}$$

or $\cos(\frac{\pi}{3}+h)=\cos\frac{\pi}{3}\cos h-\sin\frac{\pi}{3}\sin h=\frac{\cos h}{2}-\frac{\sqrt{3}\sin h}{2}$

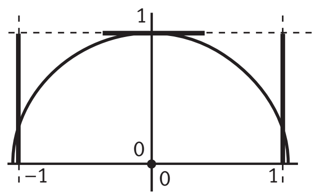
et $\frac{1}{h}\sqrt{2\cos(\frac{\pi}{3}+h)-1}=\frac{1}{h}\sqrt{\cos h-\sqrt{3}\sin h-1}$. De plus, comme $h<0$, on a $h=-\sqrt{-h}\sqrt{-h}$ d'où

$$\frac{1}{h}\sqrt{2\cos(\frac{\pi}{3}+h)-1}=\frac{1}{-\sqrt{-h}}\sqrt{\frac{\cos h-\sqrt{3}\sin h-1}{-h}}=\frac{1}{-\sqrt{-h}}\sqrt{\sqrt{3}\frac{\sin h}{h}-\frac{\cos h-1}{h}}$$

On sait que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$ et $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0$

donc $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{3}\frac{\sin h}{h}-\frac{\cos h-1}{h}=\sqrt{3}$ puis, par composition on obtient

$$\lim_{h\to 0}\sqrt{\sqrt{3}\frac{\sin h}{h}-\frac{\cos h-1}{h}}=\lim_{X\to\sqrt{3}}\sqrt{X}=\sqrt{\sqrt{3}}.$$



Par ailleurs, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}-\sqrt{-h}=0_-$ donc par quotient $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{f(\frac{\pi}{3}+h)-f(\frac{\pi}{3})}{h}=-\infty$.

La fonction f n'est donc pas dérivable à gauche de $\frac{\pi}{3}$ mais graphiquement, on peut tout de même en déduire l'existence d'une demi-tangente verticale.

Exercice 21 On commence par vérifier que la proposition « $f^{(n)}(x)=-2^{n-1}\cos(2x+\frac{n\pi}{2})$ » est vraie pour $n=1$.

La fonction f est la composée de $x \mapsto \sin x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles par la fonction $x \mapsto x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Formule utilisée : $\left(u^2\right)' = 2uu'$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\cos x \sin x$ or on sait que pour tout réel x, $2\sin x \cos x = \sin(2x)$ et pour tout réel a, $\cos(a+\frac{\pi}{2}) = -\sin a$ donc, on obtient que pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\cos(2x+\frac{\pi}{2})$. Par ailleurs, pour $n=1$, $-2^{n-1}\cos(2x+\frac{n\pi}{2}) = -\cos(2x+\frac{\pi}{2})$.

La proposition $f^{(n)}(x) = -2^{n-1}\cos(2x+\frac{n\pi}{2})$ est donc vraie pour $n=1$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(k)}(x) = -2^{k-1}\cos(2x+\frac{k\pi}{2})$. La fonction $f^{(k)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est le produit d'une constante réelle par la composée de la fonction affine $x \mapsto 2x+\frac{k\pi}{2}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles par la fonction cosinus dérivable sur $\mathbb{R}$.

Formule utilisée : $g'(x) = -a\sin(ax+b)$ lorsque $g(x) = \cos(ax+b)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) = -2^{k-1} \times (-2) \times \sin(2x+\frac{k\pi}{2}) = 2^k \sin(2x+\frac{k\pi}{2})$$

or pour tout réel a, $\cos(a+\frac{\pi}{2}) = -\sin a$

donc $\sin(2x+\frac{k\pi}{2}) = -\cos(2x+\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = -\cos(2x+\frac{(k+1)\pi}{2})$

d'où $f^{(k+1)}(x) = -2^k \cos(2x+\frac{(k+1)\pi}{2})$ et la propriété est héréditaire.

Finalement, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f^{(n)}(x) = -2^{n-1}\cos(2x+\frac{n\pi}{2})$.

Corrigé des exercices du chapitre 6

Exercice I

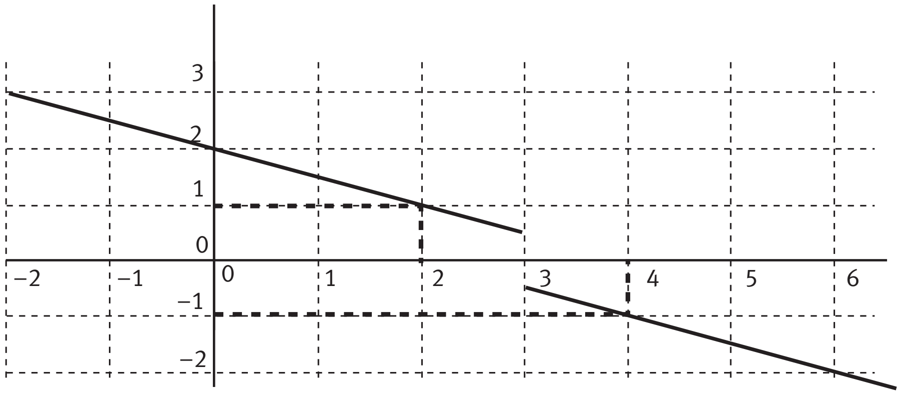
❶

Vrai D'après le cours, on sait que : « si une fonction est dérivable sur un intervalle I alors elle est continue sur I. » L'assertion proposée est la contraposée de cette propriété or, si une proposition est vraie, sa contraposée l'est aussi.

❷

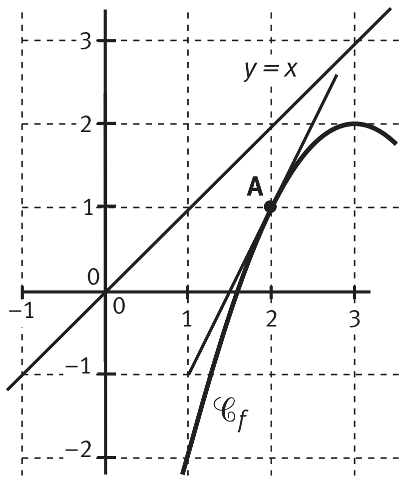
Faux Pour démontrer que cette proposition est fausse, il suffit d'exhiber un contre-exemple. L'assertion proposée faisant référence au théorème des valeurs intermédiaires, il suffit de donner un exemple de fonction vérifiant les hypothèses de la proposition mais ne vérifiant pas celles du théorème des valeurs intermédiaires autrement dit, il suffit de choisir une fonction qui ne soit pas continue en un réel compris entre *a* et *b*. Un dessin peut suffire pour illustrer le problème ou bien on peut expliciter l'expression de la fonction.

Par exemple, la fonction *f* définie par $f(x)=\begin{cases} -0{,}5x+2 \text{ si } x\le 3 \\ -0{,}5x+0{,}5 \text{ si } x>3 \end{cases}$ est définie sur $\mathbb{R}$, on a $f(2)\times f(4)\le 0$ pourtant, *f* ne s'annule pas entre 2 et 4.



❸

Faux En s'appuyant sur le dessin ci-contre, on a pour tout $x\in[1\,;\,3]$, $f(x)\le x$ or la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A a pour coefficient directeur 2, c'est à dire $f'(2)=2$ donc $f'(2)>1$. Cet exemple prouve que la proposition est faussse.



❹

Vrai Pour $h\neq 0$,

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{h^2\mathrm{E}(h)-0^2\mathrm{E}(0)}{h}=h\,\mathrm{E}(h).$$

Puis pour $-1 \leq h < 0$, $\mathrm{E}(h) = -1$ et $\lim\limits_{h \to 0} h = 0$ donc par produit $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$ et pour $0 < h < 1$, $\mathrm{E}(h) = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} h = 0$ donc par produit $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$ et f est dérivable en 0 (et $f'(0) = 0$).

❺

Faux Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant une fonction f au point d'abscisse a est égal au nombre dérivé de cette fonction en a. On est donc amené à chercher le nombre dérivé de $x \mapsto (2x+1)^3 - x$ en 0.

On note f la fonction polynomiale définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(2x+1\right)^3 - x$.

La fonction f est la somme de la composée de $x \mapsto 2x+1$ par la fonction $x \mapsto x^3$ et de la fonction $x \mapsto -x$.
Formules utilisées : $(u+v)' = u' + v'$ et $(u^3)' = 3u'u^2$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 \times 2 \times (2x+1)^2 - 1$ d'où $f'(0) = 5$ et la proposition est fausse.

On peut remarquer que, pour calculer le nombre dérivée de f en 0, on pouvait aussi déterminer la limite en 0 du taux d'accroissement $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$. En effet, pour $h \neq 0$, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 8h^2 + 12h + 5$ or $\lim\limits_{h \to 0} 8h^2 + 12h = 0$ d'où $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 5$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 5$.

❻

Faux On peut conjecturer la réponse à l'aide d'une représentation graphique pour constater que la courbe d'équation $y = x\sqrt{x(2-x)}$ semble admettre une demi-tangente horizontale au point de coordonnées (0 ; 0).

On note f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{x(2-x)}$. Pour $h \neq 0$, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \sqrt{h(2-h)}$ or $\lim\limits_{h \to 0} h(2-h) = 0$ puis, par composition avec

$X = h(2-h)$, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \sqrt{h(2-h)} = \lim\limits_{X \to 0} \sqrt{X} = 0$. La fonction f est donc dérivable en 0, $f'(0)=0$ et la courbe d'équation $y = x\sqrt{x(2-x)}$ admet une demi-tangente horizontale au point de coordonnées (0 ; 0).

❼

Faux Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\left[0\ ;\ +\infty\right[$, on sait d'après le cours que si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ alors ℓ est nécessairement solution de l'équation $x = \sqrt{x}$ or

$$\begin{aligned} x = \sqrt{x} &\Leftrightarrow x^2 = x \text{ et } x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \text{ et } x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1) = 0 \text{ et } x \geq 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

donc (u_n) ne peut pas être convergente vers 2.

Exercice II On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 3}{x^2 + 1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

❶ **a)** La fonction g est une fonction polynomiale donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 + 3$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ donc $g'(x) > 0$ et g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$**.**

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

Enfin, g étant continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynomiale), g est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α réelle (par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires).

Par balayage, on a $g(-1{,}52) \approx -0{,}07 < 0$ et $g(-1{,}51) \approx 0{,}03 > 0$ donc $-1{,}52 < \alpha < -1{,}51$.

b) La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $g(\alpha) = 0$ donc pour tout $x < \alpha$, $g(x) < g(\alpha)$ c'est-à-dire $g(x) < 0$ et pour tout $x > \alpha$, $g(x) > g(\alpha)$ c'est-à-dire $g(x) > 0$.

❷ **a)** La fonction f est une fonction rationnelle donc f est dérivable sur son ensemble de définition.

Formule utilisée : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu'-uv'}{v^2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)\times(3x^2+2x)-2x\times(x^3+x^2-3)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2+8x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x(x^3+3x+8)}{(x^2+1)^2} = \frac{x\,g(x)}{(x^2+1)^2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x^2+1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x\,g(x)$.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction f est donc croissante sur $]-\infty ; \alpha]$, décroissante sur $[\alpha ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.

b) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

c) On a

$$f(\alpha)-(1+\frac{3}{2}\alpha)=\frac{\alpha^3+\alpha^2-3}{\alpha^2+1}-\frac{2+3\alpha}{2}=\frac{2\alpha^3+2\alpha^2-6-2\alpha^2-2-3\alpha^3-3\alpha}{2(\alpha^2+1)}$$

$$=\frac{-\alpha^3-3\alpha-8}{2(\alpha^2+1)}=-\frac{g(\alpha)}{2(\alpha^2+1)}=0$$

d'où $f(\alpha)=1+\frac{3}{2}\alpha.$

De $-1,52<\alpha<-1,51,$ on déduit $-1,52\times\frac{3}{2}<\frac{3}{2}\alpha<-1,51\times\frac{3}{2}$ puis $1-1,52\times\frac{3}{2}<f(\alpha)<1-1,51\times\frac{3}{2}$ ce qui conduit à $-1,28<f(\alpha)<-1,265.$

❸ **a)** Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\varphi(x)=f(x)-(x+1)=\frac{x^3+x^2-3-(x+1)(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^3+x^2-3-(x^3+x+x^2+1)}{x^2+1}=\frac{-x-4}{x^2+1}.$$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}=0$ et, de façon analogue,

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0\,.$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(x^2+1)^2>0$ donc $\varphi(x)$ est du signe de $-x-4$, à savoir $\varphi(x)>0$ sur $]-\infty;\,-4[$, $\varphi(-4)=0$ et $\varphi(x)<0$ sur $]-4\,;\,+\infty[$.

Le réel $\varphi(x)$ représente graphiquement l'écart algébrique entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ d'équation donc, des résultats sur les limites, on déduit que cet écart tend vers 0 au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$, autrement dit la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

Le signe de $\varphi(x)$ permet de déduire les positions relatives de la courbe et de son asymptote.

En effet, sur $]-\infty\,;\,-4[$, $\varphi(x)>0$ c'est-à-dire $f(x)>x+1$ et $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de Δ. De la même façon, on observe que les deux courbes se coupent au point d'abscisse -4 et que, sur $]-4\,;\,+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessous de Δ.

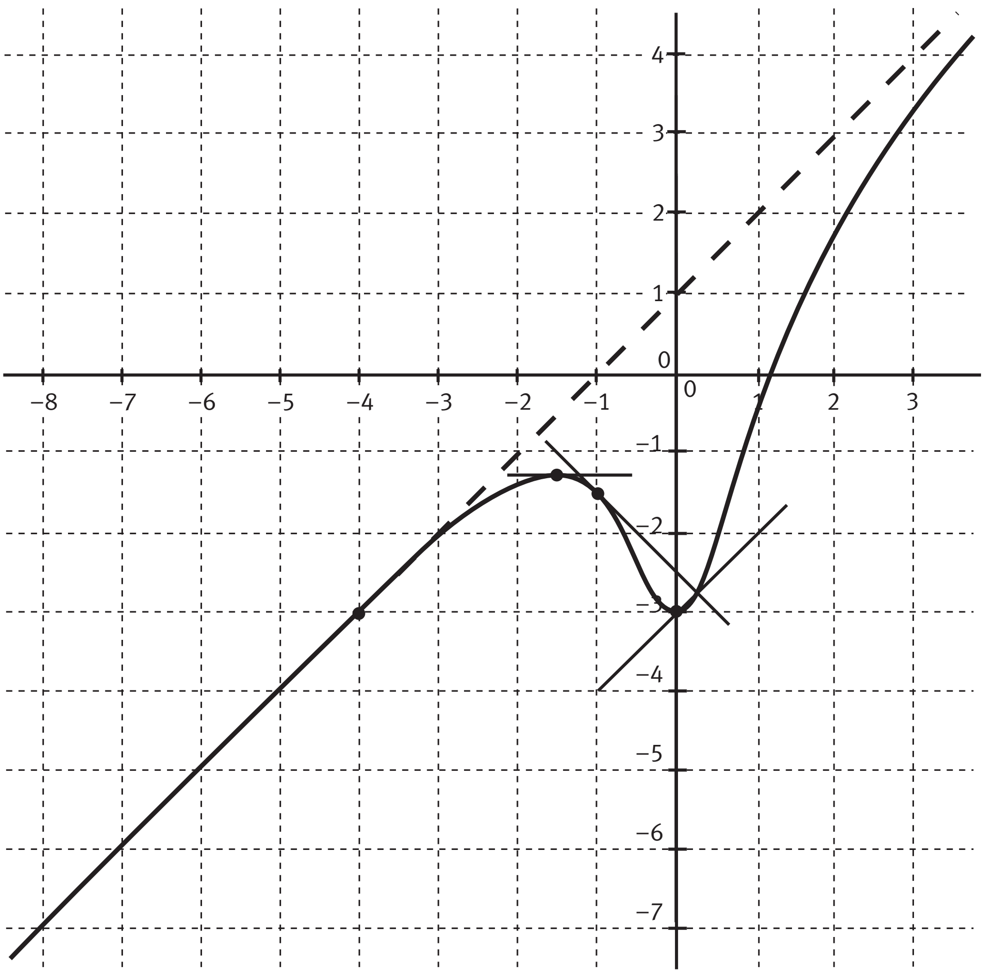
b) On est amené à déterminer les réels x tels que $f'(x) = 1$.

$$f'(x)=1 \Leftrightarrow \frac{x(x^3+3x+8)}{(x^2+1)^2}=1 \Leftrightarrow x^4+3x^2+8x=x^4+2x^2+1 \Leftrightarrow x^2+8x-1=0.$$

Le trinôme x^2+8x-1 a pour discriminant $\Delta=68=(2\sqrt{17})^2$ et pour racines $-4-\sqrt{17}$ et $-4+\sqrt{17}$. Par suite, $\mathscr{C}_f$ admet des tangentes parallèles à Δ en les points d'abscisses $-4-\sqrt{17}$ et $-4+\sqrt{17}$.

c) La droite T a pour équation $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ or $f'(-1)=-1$ et $f(-1)=-\frac{3}{2}$ donc T a pour équation $y=-x-\frac{5}{2}$.

On note que le produit des coefficients directeurs de T et de Δ vaut -1 donc ces deux droites sont perpendiculaires.



Exercice III ❶ **a)** Pour $x \neq 0$,

$$f(x)=\frac{x^2+6x+4\sin(3x)}{2x}=\frac{x}{2}+3+2\frac{\sin(3x)}{x}=\frac{x}{2}+3+6\frac{\sin(3x)}{3x}.$$

D'une part, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2}+3=3$ et, d'autre part, $\lim\limits_{x\to 0}3x=0$ donc, par composition avec $X=3x$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1$. Ainsi, on obtient $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=9$.

b) Dire que *f* est continue en 0 signifie que $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ donc la fonction *f* prolongée en 0 sera continue en 0 si on pose $\lambda=f(0)=9$.

❷ **a)** Pour $x\neq 0$, $f(x)-(\frac{1}{2}x+3)=\frac{2\sin(3x)}{x}$ or, pour tout réel *x*, $0\leq|\sin(3x)|\leq 1$ donc $0\leq|2\sin(3x)|\leq 2$ puis, pour tout $x\neq 0$, $0\leq\left|\frac{2\sin(3x)}{x}\right|\leq\frac{2}{|x|}$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}|x|=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{|x|}=0$ (par inversion et produit par 2) d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(\frac{1}{2}x+3)=0$ par le théorème des gendarmes. De la même façon, en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(\frac{1}{2}x+3)=0$. On peut remarquer que le raisonnement pouvait être fait sans utiliser la valeur absolue pour obtenir les encadrements $-\frac{2}{x}\leq\frac{2\sin(3x)}{x}\leq\frac{2}{x}$ au voisinage de $+\infty$ et $\frac{2}{x}\leq\frac{2\sin(3x)}{x}\leq-\frac{2}{x}$ au voisinage de $-\infty$.

b) Pour $x\neq 0$, $\left|f(x)-(\frac{1}{2}x+3)\right|=\left|\frac{2\sin(3x)}{x}\right|\leq\frac{2}{|x|}$ donc, pour que $\left|f(x)-(\frac{1}{2}x+3)\right|<0{,}01$, il suffit que $\frac{2}{|x|}<0{,}01$ soit $|x|>\frac{2}{0{,}01}$ c'est-à-dire $|x|>200$ ou encore $x>200$ ou $x<-200$.

c) Le nombre $\varphi(x)=f(x)-(\frac{1}{2}x+3)$ représente l'écart algébrique mesuré sur la verticale d'abscisse *x* entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ d'équation $y=\frac{1}{2}x+3$. Du calcul des limites, on en déduit que cet écart tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ se rapproche de la droite Δ en $+\infty$ et en $-\infty$. La droite Δ est donc asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Le nombre $\left|\varphi(x)\right| = \left|f(x) - (\frac{1}{2}x + 3)\right|$ représente l'écart géométrique mesuré sur la verticale d'abscisse x entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ. De la question 2.b on peut déduire que pour que l'écart entre les deux courbes soit strictement inférieur à un centième d'unité de longueur, il suffit que $x > 200$ ou $x < -200$.

❸ Le point A est l'unique point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et Γ_1 sur $\left[0\,;\,\pi\right]$ or, pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = g_1(x) \Leftrightarrow \frac{x^2 + 6x + 4\sin(3x)}{2x} = \frac{x^2 + 6x - 4}{2x}$$

$$\Leftrightarrow \sin(3x) = -1 \Leftrightarrow 3x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

donc, l'équation $f(x) = g_1(x)$ a une unique solution sur $\left[0\,;\,\pi\right]$ qui est $\frac{\pi}{2}$. Le point A a donc pour abscisse $\frac{\pi}{2}$.

Les points B et C sont les deuxième et troisième points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et Γ_2 sur $\left[0\,;\,\pi\right]$ or, pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = g_2(x) \Leftrightarrow \frac{x^2 + 6x + 4\sin(3x)}{2x} = \frac{x^2 + 6x + 2}{2x} \Leftrightarrow \sin(3x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k'\pi \text{ où } k' \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = g_2(x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \textit{ ou } x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k'\pi}{3} \text{ où } k' \in \mathbb{Z}$$

Sur $\left[0\,;\,\pi\right]$ l'équation $f(x) = g_2(x)$ admet comme solution $\frac{\pi}{18}$, $\frac{5\pi}{18}$ et $\frac{13\pi}{18}$ que l'on obtient respectivement en choisissant $k = 0$, $k' = 0$ et $k = 1$. Les autres réels solutions de $f(x) = g_2(x)$ n'appartiennent pas à $\left[0\,;\,\pi\right]$. Finalement, les points B et C ont respectivement pour abscisse $\frac{5\pi}{18}$ et $\frac{13\pi}{18}$.

Exercice IV Dans un tel exercice pour lequel la démarche n'est pas indiquée, il faut laisser toutes les traces de recherche ou de prises d'initiative même si celles-ci n'aboutissent pas.

Il y a plusieurs méthodes qui conduisent au résultat. Nous allons en voir deux.

Première méthode

Notons θ une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}\right)$. Le point M appartenant au quart de cercle de centre O et de rayon 1, on a $\theta \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. L'aire du rectangle ONMP vaut $A(\theta) = OP \times ON = \sin\theta \times \cos\theta = \dfrac{1}{2}\sin(2\theta)$. On est donc amené à étudier la fonction A sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

La fonction $\theta \mapsto \sin(2\theta)$ est la composée de $\theta \mapsto 2\theta$ définie et dérivable sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ et à valeurs dans $\left[0\ ;\ \pi\right]$ par la fonction sinus définie et dérivable sur ce dernier intervalle donc $\theta \mapsto \sin(2\theta)$ est dérivable sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Formule utilisée : $(\sin u)' = a\cos u$ où u est la fonction affine définie par $u(x) = ax + b$.

Pour $\theta \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $A'(\theta) = \dfrac{1}{2} \times 2\cos(2\theta) = \cos(2\theta)$.

On a $\cos(2\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$

ainsi, sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos(2\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Puis $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \le 2\theta \le \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos(\dfrac{\pi}{2}) \le \cos(2\theta) \le \cos(0) \Leftrightarrow 0 \le \cos(2\theta) \le 1$ car la fonction cosinus est décroissante sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

On obtient $A' \ge 0$ sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ et $A' \le 0$ sur $\left[\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc A est croissante sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. La fonction A admet donc un maximum égal à $\dfrac{1}{2}$ atteint en $\dfrac{\pi}{4}$ donc le rectangle ONMP de plus grande aire est obtenu lorsque $\left(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}\right) = \dfrac{\pi}{4}$. On peut remarquer que le rectangle ONMP est alors un carré.

Deuxième méthode

Posons x l'abscisse du pont M autrement dit, $x = ON$ en remarquant que $x \in \left[0\ ;\ 1\right]$. On calcule OP par le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OPM et, en remarquant que $OM = 1$, on a $OP = \sqrt{1 - x^2}$. L'aire de ONMP s'écrit donc dans ce cas $A(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ où $x \in \left[0\ ;\ 1\right]$. On est donc amené à étudier la fonction A sur [0 ; 1].

La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est la composée de $x \mapsto 1-x^2$ dérivable sur [0 ; 1] et strictement positive sur [0 ; 1[par la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur [0 ; 1[. Par produit par $x \mapsto x$, A est alors dérivable sur [0 ; 1[.

Formules utilisées : $(uv)' = u'v + uv'$ et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour $x \in [0\ ;\ 1[$,

$$A'(x) = 1 \times \sqrt{1-x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Sur $[0\ ;\ 1[$, $\sqrt{1-x^2} > 0$ et $1+x\sqrt{2} > 0$ donc $A'(x)$ est du signe de $1-x\sqrt{2}$, à savoir positif sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et négatif sur $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ 1\right[$. La fonction A est donc croissante sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$, décroissante sur $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ 1\right]$ et admet un maximum égal à $\dfrac{1}{2}$ atteint en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Le rectangle ONMP de plus grande aire est obtenu l'abscisse de M est égale à $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice V ❶ Le point M appartient à $\mathscr{C}_f$ donc M a pour coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ puis P appartient à T donc P a pour coordonnées $(x\ ;\ f'(a)(x-a)+f(a))$. Par suite,

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = (x-x)\vec{i} + \big(f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)\big)\vec{j} \text{ soit } \overrightarrow{\mathrm{PM}} = d(x)\vec{j}.$$

❷ **a)** La fonction d est deux fois dérivable sur I (car f l'est) et, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $d'(x) = f'(x) - f'(a)$ puis $d''(x) = f''(x)$. Dans cette question, on suppose $f'' \geq 0$ sur I d'où $d'' \geq 0$ sur I et d' est croissante sur I. Comme $d'(a) = 0$, on obtient $d'(x) \leq 0$ pour $x \leq a$ et $d'(x) \geq 0$ pour $x \geq a$ ainsi, d est décroissante avant a et d est croissante après a.

b) On a $d(a) = 0$, d décroissante avant a et d croissante après a donc d admet un minimum égal à 0 en a ainsi $d \geq 0$ sur I. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ et $\vec{j}$ sont donc de même sens ce qui prouve que la courbe $\mathscr{C}_f$ est bien située au-dessus de ses tangentes.

❸ En suivant la même démarche qu'au 2., on obtient $d \le 0$ sur I. Les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\vec{j}$ sont donc de sens contraire ce qui prouve que la courbe $\mathscr{C}_f$ est bien située au-dessous de ses tangentes.

❹ On suit une démarche analogue à celle utilisée dans les questions 2 et 3.

On obtient alors que $d(x) \le 0$ si $x \in \mathrm{I}$ et $x \le a$ et que $d(x) \ge 0$ si $x \in \mathrm{I}$ et $x \ge a$. Les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\vec{j}$ sont donc de sens contraire à gauche de *a* et de même sens à droite de *a* ce qui prouve que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessous de ses tangentes à gauche de *a* et qu'elle au-dessus de ses tangentes à droite de *a* autrement dit, la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente au point d'abscisse *a*.

❺ **a)** Pour $x > -1$, $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{x+1} = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$ or $\lim\limits_{x\to -1} x^2 = 1$ et $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{x+1} = 0_+$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = +\infty$ et f n'est pas dérivable en -1. Graphiquement, on peut déduire de ce résultat que $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse -1.

b) La fonction *f* est le produit de $x \mapsto x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ par la composée de la fonction affine $x \mapsto x+1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs strictement positives sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ donc *f* est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$.

Formules utilisées : $(uv)' = u'v + uv'$ et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour $x > -1$,

$$f'(x) = 2x\sqrt{x+1} + x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{4x(x+1)+x^2}{2\sqrt{x+1}} = \frac{5x^2+4x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{x(5x+4)}{2\sqrt{x+1}}.$$

Pour $x > -1$, $2\sqrt{x+1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x(5x+4)$ à savoir positif sur $\left]-1\,;\,-\dfrac{4}{5}\right] \cup [0\,;\,+\infty[$ et négatif sur $\left[-\dfrac{4}{5}\,;\,0\right]$ donc *f* est croissante sur $\left[-1\,;\,-\dfrac{4}{5}\right]$ et sur $[0\,;\,+\infty[$ et décroissante sur $\left[-\dfrac{4}{5}\,;\,0\right]$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ donc, par composition avec $X = x+1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

x	-1		$-\frac{4}{5}$		0		$+\infty$
Variations de f	0	↗	$\frac{16\sqrt{5}}{125}$	↘	0	↗	$+\infty$

c) La fonction f' est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$ comme quotient de $x \mapsto 5x^2+4x$ dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$

par $x \mapsto 2\sqrt{x+1}$ dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$ et ne s'annulant pas sur cet intervalle.

Formules utilisées : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu'-uv'}{v^2}$ et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour $x > -1$, $f''(x) = \dfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}\right)^2} \times \left(\sqrt{x+1} \times (10x+4) - \left(5x^2+4x\right) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$

$$= \frac{15x^2+24x+8}{4(x+1)\sqrt{x+1}}.$$

Pour $x > -1$, $4(x+1)\sqrt{x+1} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $15x^2+24x+8$.

d) Le trinôme $15x^2+24x+8$ a pour discriminant $\Delta = 96$ et pour racines

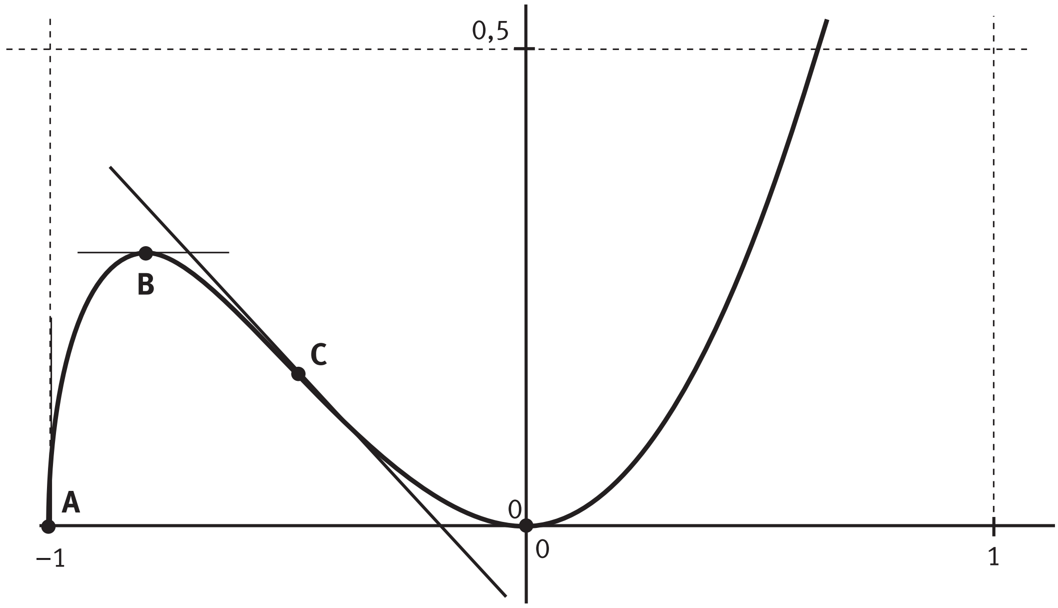
$$\frac{-12-2\sqrt{6}}{15} \text{ et } \frac{-12+2\sqrt{6}}{15}.$$

On a alors

Par suite, $f''(x) < 0$ sur $\left]-1\,;\,\dfrac{-12+2\sqrt{6}}{15}\right[$ donc f est concave sur cet intervalle,

$f''(x) > 0$ sur $\left]\dfrac{-12+2\sqrt{6}}{15}\,;\,+\infty\right[$ et f est convexe sur cet intervalle et le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $\dfrac{-12+2\sqrt{6}}{15}$ est un point d'inflexion (c'est-à-dire qu'en ce point, la courbe traverse la tangente).

e)



Exercice VI ❶ **a)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $-2 \leq 2\cos x \leq 2$ puis $-3x-2 \leq g(x) \leq -3x+2$ or $\lim\limits_{x \to -\infty} -3x-2 = +\infty$ donc par comparaison en $-\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x+2 = -\infty$ donc par comparaison en $+\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme des fonctions $x \mapsto -3x$ et $x \mapsto 2\cos x$ toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -3 - 2\sin x$ or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-2 \leq -2\sin x \leq 2$ puis $-5 \leq g'(x) \leq -1$. Comme $g' < 0$ sur $\mathbb{R}$, g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

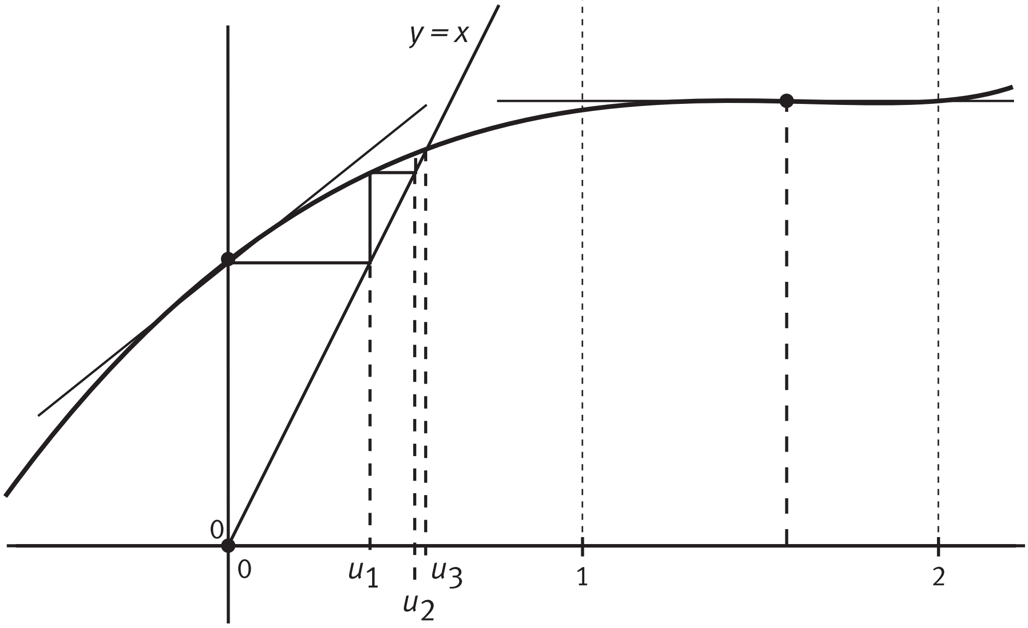
c) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable sur $\mathbb{R}$), elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et elle change de signe sur $\mathbb{R}$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Par balayage, on a $g(0{,}56) \approx 0{,}01 > 0$ et $g(0{,}57) \approx -0{,}03 < 0$ donc

$$0{,}56 < \alpha < 0{,}57.$$

❷ **a)** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2}{5}(1 - \sin x)$ or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \leq 1$ donc $1 - \sin x \geq 0$ et $f' \geq 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

b) La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0)+f(0)$ ce qui conduit à $y = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}$ et la tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ a pour équation $y = f'(\frac{\pi}{2})(x-\frac{\pi}{2})+f(\frac{\pi}{2})$ soit $y = \frac{\pi}{5}$ (cette tangente est horizontale).



c) On travaille par récurrence.

On a $u_0 = 0$ donc $0 \le u_0 \le 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \le u_k \le 1$ alors $f(0) \le f(u_k) \le f(1)$ car f est croissante sur [0 ; 1]. Puis $f(0) = \frac{2}{5} \ge 0$, $f(u_k) = u_{k+1}$ et $f(1) = \frac{2}{5}(1+\cos 1) \approx 0{,}6 \le 1$ donc $0 \le u_{k+1} \le 1$ et la proposition est héréditaire.

Ainsi par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le 1$.

d) Il faut ici penser à laisser toute trace de recherche. En effet, pour une telle question, on peut conjecturer le résultat à l'aide du graphique, on peut montrer la convergence de la suite ou encore on peut en déterminer la limite si on suppose la convergence. Certes, en ne répondant pas à toutes ces questions, on ne répond pas au problème posé mais il faut garder à l'esprit que toute prise d'initiative est prise en compte dans l'évaluation.

À l'aide du graphique, il semble que la suite (u_n) soit croissante et convergente vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y = x$.

Montrons par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

On a $u_0=0$ et $u_1=f(u_0)=f(0)=\dfrac{2}{5}\geq 0$ donc $u_0\leq u_1$. Soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $u_k\leq u_{k+1}$ alors $f(u_k)\leq f(u_{k+1})$ car $u_k\in[0\,;\,1]$, $u_{k+1}\in[0\,;\,1]$ et f est croissante sur [0 ; 1] ainsi $u_{k+1}\leq u_{k+2}$ et par récurrence, on obtient que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc, par le théorème de la convergence monotone elle converge vers un réel ℓ. On peut de plus ajouter que l'inégalité $0\leq u_n\leq 1$ valable pour tout $n\in\mathbb{N}$ conduit par passage à la limite à $0\leq \ell\leq 1$.

Enfin, ℓ est solution de l'équation $f(x)=x$.

En effet, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ donc, par composition avec $x=u_n$,
$\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=\lim\limits_{x\to\ell} f(x)=f(\ell)$ car f est continue en ℓ or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$ d'où, par unicité de la limite, $f(\ell)=\ell$. On a

$$f(x)=x\Leftrightarrow \frac{2}{5}(x+\cos x)=x\Leftrightarrow 2x+2\cos x=5x\Leftrightarrow g(x)=0\Leftrightarrow x=\alpha.$$

Finalement, la suite (u_n) est convergente vers α.

Exercice VII

1. a) Par lecture graphique on lit $f(0)=3$, $f(-4)=3$ et $f'(0)=1$ ($f'(0)$ étant le coefficient directeur de la droite Δ).

b) Pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=a\,x+b+c\sqrt{x^2+9}$ donc $f(0)=3$ et $f(-4)=3$ conduisent respectivement à $b+3c=3$ et $-4a+b+5c=3$.

Par ailleurs, la fonction f est la somme de la fonction affine $x\mapsto ax+b$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la composée de $x\mapsto x^2+9$ définie, dérivable et à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$ par la fonction $x\mapsto c\sqrt{x}$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Formules utilisées : $(u+v)' = u'+v'$, $(cu)'=cu'$ avec c une constante réel et $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=a+c\times\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}=a+\dfrac{c\,x}{\sqrt{x^2+9}}$.

Ainsi $f'(0)=1$ donne $a=1$.

On est donc amené à trouver les triplets $(a\,;\,b\,;\,c)$ tels que $\begin{cases} b+3c=3\\ -4a+b+5c=3\\ a=1\end{cases}$

or

$$\begin{cases} b+3c=3 \\ -4a+b+5c=3 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+3c=3 & (1) \\ b+5c=7 & (2) \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+3c=3 \\ 2c=4 & (2)-(1) \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3 \\ c=2 \\ a=1 \end{cases}$$

donc pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x-3+2\sqrt{x^2+9}$.

❷ **a)** La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -4 a pour équation $y = f'(-4)(x+4)+f(-4)$ or $f(-4)=3$ et $f'(-4) = 1+\dfrac{2\times(-4)}{\sqrt{(-4)^2+9}} = -\dfrac{3}{5}$ donc l'équation cherchée s'écrit $y = -\dfrac{3}{5}(x+4)+3$ ou encore $y = -\dfrac{3}{5}x+\dfrac{3}{5}$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)-(-x-3) = 2x+2\sqrt{x^2+9} = 2\frac{\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)\left(x-\sqrt{x^2+9}\right)}{x-\sqrt{x^2+9}} = \frac{-18}{x-\sqrt{x^2+9}}.$$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+9 = +\infty$ donc, par composition avec $X = x^2+9$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+9} = \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ puis par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{x^2+9} = -\infty$ or $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} x-\sqrt{x^2+9} = -\infty$. Le numérateur de $f(x)-(-x-3)$ étant constant égal à -18, on obtient par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-x-3) = 0$. L'écart algébrique entre la courbe $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $y = -x-3$ mesuré verticalement tend vers 0 en $-\infty$, la droite est donc bien asymptote à la courbe en $-\infty$.

c) On résout $f'(x)=0$. On a

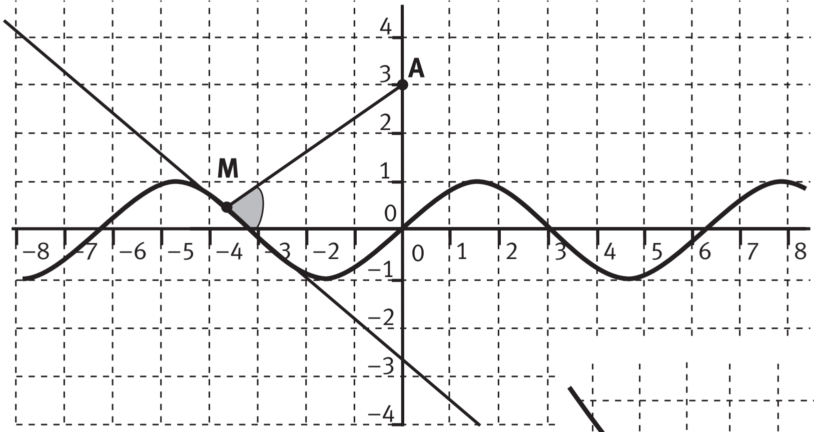
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1+\frac{2x}{\sqrt{x^2+9}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}} = -1 \Leftrightarrow -2x = \sqrt{x^2+9}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = x^2+9 \\ x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3} \\ x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}$$

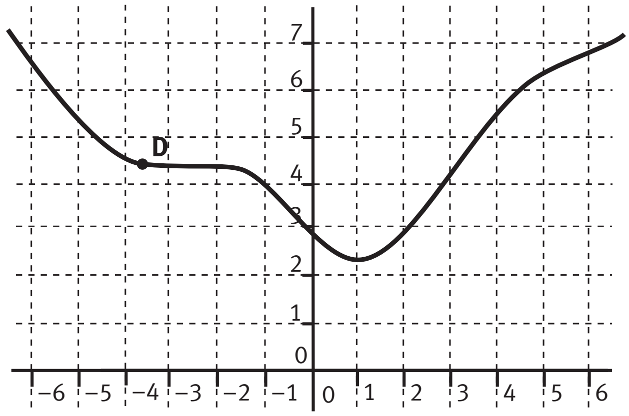
Ainsi, il existe un unique point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}$ est horizontale.

C'est le point de coordonnées $\left(-\sqrt{3}\ ;\ f\left(-\sqrt{3}\right)\right)$ ou encore $\left(-\sqrt{3}\ ;\ 3\sqrt{3}-3\right)$.

Exercice VIII ❶ On travaille à l'aide de deux fenêtres.



Sur la première, on construit la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction sinus, on place un point M sur $\mathscr{C}$, le point A de coordonnées (0 ; 3), la tangente à $\mathscr{C}$ en M ainsi que le segment [AM].



Sur la deuxième fenêtre, on place un point D ayant même abscisse que M et d'ordonnée la longueur AM.

Pour ce faire, on peut par exemple entrer dans la barre de saisie D=(x(M), Distance[A, M]).

En activant la trace de D et en déplaçant M sur $\mathscr{C}$, on peut obtenir les conjectures.

Il semble que la longueur AM soit minimale lorsque le point M a une abscisse proche de 1.

Il semble qu'il existe trois points M en lesquels la tangente à $\mathscr{C}$ est perpendiculaire à la droite (AM). Ces points ont des abscisses proches de -3, de -2 et de 1.

❷ **a)** La fonction f est la somme des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto -3\cos x$ et du produit $x \mapsto \sin x \cos x$ toutes les trois continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

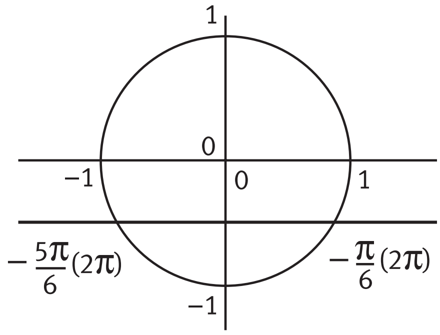
Formules utilisées : $(u+v)' = u' + v'$ et $(uv)' = u'v + uv'$.

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = 1 - 3(-\sin x) + \cos x \times \cos x + \sin x \times (-\sin x) = 1 + 3\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x$

or $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ d'où $f'(x) = 2 + 3\sin x - 2\sin^2 x$.

Le trinôme $-2X^2 + 3X + 2$ a pour discriminant $\Delta = 25$ et pour racine $-\dfrac{1}{2}$ et 2 donc $-2X^2 + 3X + 2 = -2(X + \dfrac{1}{2})(X - 2)$ et $f'(x) = -2(\sin x + \dfrac{1}{2})(\sin x - 2)$.



Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $\sin x - 2 < 0$ et, par suite, $f'(x)$ est du signe de $\sin x + \frac{1}{2}$.

En s'appuyant sur le cercle trigonométrique, on obtient que sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right]$, $f'(x)$ s'annule en $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$ puis $f'(x) < 0$ sur $\left]-\frac{5\pi}{6}\ ;-\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{6}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right]$ et $f'(x) > 0$ sur $\left[-\frac{3\pi}{2}\ ;-\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{7\pi}{6}\right[$ de sorte que f soit strictement décroissante sur $\left[-\frac{5\pi}{6}\ ;-\frac{\pi}{6}\right]$ et sur $\left[\frac{7\pi}{6}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right]$ alors qu'elle est strictement croissante sur $\left[-\frac{3\pi}{2}\ ;-\frac{5\pi}{6}\right]$ et sur $\left[-\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{7\pi}{6}\right]$.

On peut dresser le tableau des variations de f.

x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$
Variations de f			$\frac{7\sqrt{3}}{4}-\frac{5\pi}{6}$				$\frac{7\sqrt{3}}{4}+\frac{7\pi}{6}$		
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\frac{3\pi}{2}$				$-\frac{7\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}$				$\frac{3\pi}{2}$

La fonction f est continue sur $\left[-\frac{3\pi}{2}\ ;-\frac{5\pi}{6}\right]$, strictement croissante sur $\left[-\frac{3\pi}{2}\ ;-\frac{5\pi}{6}\right]$ et $0 \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{4}-\frac{5\pi}{6}\right]$ donc, par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $\left[-\frac{3\pi}{2}\ ;-\frac{5\pi}{6}\right]$.

Des raisonnements analogues (qu'il est inutile de détailler) sur $\left[-\frac{5\pi}{6}\,;-\frac{\pi}{6}\right]$ et sur $\left[-\frac{\pi}{6}\,;\frac{7\pi}{6}\right]$ permettent de déduire deux autres solutions β et γ à l'équation $f(x)=0$, la première dans $\left[-\frac{5\pi}{6}\,;-\frac{\pi}{6}\right]$ et la seconde dans $\left[-\frac{\pi}{6}\,;\frac{7\pi}{6}\right]$. Enfin, f admettant un minimum égal à $\frac{3\pi}{2}$ sur $\left[\frac{7\pi}{6}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$, l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur ce dernier intervalle. En résumé, l'équation $f(x)=0$ admet 3 solutions sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$.

Les encadrements s'obtiennent par balayage. On a $f(-3{,}07)\approx -0{,}006<0$ et $f(-3{,}06)\approx 0{,}01>0$ donc $-3{,}07<\alpha<-3{,}06$ puis $f(-2{,}18)\approx -0{,}006>0$ et $f(-2{,}17)\approx -0{,}01<0$ donc $-2{,}18<\beta<-2{,}17$ et enfin $f(1{,}05)\approx -0{,}01<0$ et $f(1{,}06)\approx 0{,}02>0$ donc $1{,}05<\gamma<1{,}06$.

b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x)$ donc $-\frac{1}{2}\le \sin x\cos x\le\frac{1}{2}$ puis $-3\le -3\cos x\le 3$ donc, par somme, $x-\frac{7}{2}\le f(x)\le x+\frac{7}{2}$. Pour $x\in\left[\frac{3\pi}{2}\,;+\infty\right[$, on a $x-\frac{7}{2}\ge\frac{3\pi-7}{2}>0$ donc $f(x)>0$ et pour $x\in\left]-\infty;-\frac{3\pi}{2}\right]$, on a $x+\frac{7}{2}\le\frac{-3\pi+7}{2}<0$ donc $f(x)<0$. L'équation $f(x)=0$ n'a donc pas de solution ailleurs que sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$ et α, β et γ sont les trois seules solutions réelles de l'équation $f(x)=0$.

c) En s'appuyant sur le tableau des variations de f ainsi que sur les résultats de la question 1.b), on obtient :

x	$-\infty$		α		β		γ		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

❸ **a)** On a A(0 ; 3) et M(x ; sin x) donc

$$d(x)=\text{AM}=\sqrt{(x-0)^2+(\sin x-3)^2}=\sqrt{x^2+(\sin x-3)^2}.$$

b) D 'une part, la fonction $x\mapsto x^2$ est définie, dérivable et positive sur $\mathbb{R}$. D'autre part, la fonction $x\mapsto(\sin x-3)^2$ est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme composée des fonctions $x\mapsto\sin x-3$ et $x\mapsto x^2$) et, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ puis $-4 \leq \sin x - 3 \leq -2$, on a $(\sin x - 3)^2 \geq 4$ de sorte que $x \mapsto (\sin x - 3)^2$ soit strictement positive sur $\mathbb{R}$. Finalement, par somme, $x \mapsto x^2 + (\sin x - 3)^2$ est définie, dérivable et à valeurs strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc, par composition avec $x \mapsto \sqrt{x}$, *d* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Formules utilisées : $(u+v)' = u' + v'$, $(u^2)' = 2u'u$ et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d'(x) = \dfrac{2x + 2\cos x(\sin x - 3)}{2\sqrt{x^2 + (\sin x - 3)^2}} = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2 + (\sin x - 3)^2}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2 + (\sin x - 3)^2} > 0$ donc $d'(x)$ est du signe de $f(x)$.

c) De la question ❶, on déduit le signe de $d'(x)$ puis les variations de *d*, le tout étant résumé dans le tableau suivant (sans limite).

La fonction d admet donc un minimum sur $\mathbb{R}$ égal au plus petit des deux nombres $d(\alpha)$ et $d(\gamma)$.

On a $d(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 + (\sin\alpha - 3)^2}$ or $f(\alpha) = 0$, c'est à dire $\alpha + (\sin\alpha - 3)\cos\alpha = 0$

x	$-\infty$		α		β		γ		$+\infty$
Signe de $d'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de d		↘	$d(\alpha)$	↗	$d(\beta)$	↘	$d(\gamma)$	↗	

d'où $\sin\alpha - 3 = -\dfrac{\alpha}{\cos\alpha}$ puis $d(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{\cos^2\alpha}}$.

Pour $-3{,}07 < \alpha < -3{,}06$, on a $0 < 3{,}06^2 < \alpha^2 < 3{,}07^2$ car $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\left[-3{,}07\ ;\ -3{,}06\right]$ et $\cos(-3{,}07) < \cos\alpha < \cos(-3{,}06) < 0$ car $x \mapsto \cos x$ est strictement croissante sur $\left[-3{,}07\ ;\ -3{,}06\right]$ donc $\cos^2(-3{,}06) < \cos^2\alpha < \cos^2(-3{,}07)$ car $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\left[\cos(-3{,}06)\ ;\ \cos(-3{,}07)\right]$ et par inversion

$$0 < \frac{1}{\cos^2(-3{,}07)} < \frac{1}{\cos^2\alpha} < \frac{1}{\cos^2(-3{,}06)} .$$

Par produit on a donc $\dfrac{3{,}06^2}{\cos^2(-3{,}07)} < \dfrac{\alpha^2}{\cos^2\alpha} < \dfrac{3{,}07^2}{\cos^2(-3{,}06)}$ puis par somme

$3{,}06^2 + \dfrac{3{,}06^2}{\cos^2(-3{,}07)} < \alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{\cos^2\alpha} < 3{,}07^2 + \dfrac{3{,}07^2}{\cos^2(-3{,}06)}$ et enfin, comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,

$$\sqrt{3{,}06^2 + \frac{3{,}06^2}{\cos^2(-3{,}07)}} < d(\alpha) < \sqrt{3{,}07^2 + \frac{3{,}07^2}{\cos^2(-3{,}06)}}.$$

On en déduit que $4{,}3 < d(\alpha) < 4{,}4$.

En adaptant le raisonnement ci-dessus, on obtient

$$\sqrt{1{,}05^2 + \frac{1{,}05^2}{\cos^2(1{,}05)}} < d(\gamma) < \sqrt{1{,}06^2 + \frac{1{,}06^2}{\cos^2(1{,}06)}} \text{ d'où } 2{,}3 < d(\gamma) < 2{,}5.$$

Il apparaît donc que d admet un minimum en γ égal à $d(\gamma) \approx 2{,}4$.

❹ **a)** Lorsque AM est minimale, on a $\mathrm{M}(\gamma\,;\,\sin\gamma)$ or A(0 ; 3) donc le coefficient directeur de la droite (AM) vaut $\dfrac{y_\mathrm{M} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{M} - x_\mathrm{A}} = \dfrac{\sin\gamma - 3}{\gamma}$ puis le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en M vaut $(\sin)'(\gamma) = \cos\gamma$. On sait que deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leur coefficient directeur vaut -1, on est donc amené à calculer le produit $\dfrac{\sin\gamma - 3}{\gamma} \times \cos\gamma = \dfrac{(\sin\gamma - 3)\cos\gamma}{\gamma}$

or $\gamma + (\sin\gamma - 3)\cos\gamma = 0$ d'où $\dfrac{\sin\gamma - 3}{\gamma} \times \cos\gamma = \dfrac{-\gamma}{\gamma} = -1$ d'où le résultat.

b) Plus généralement, pour $x \neq 0$, le coefficient directeur de la droite vaut, $\dfrac{y_\mathrm{M} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{M} - x_\mathrm{A}} = \dfrac{\sin x - 3}{x}$ et celui de la tangente à $\mathscr{C}$ en M vaut $(\sin)'(x) = \cos x$.

Les deux droites seront perpendiculaires si et seulement si

$\dfrac{\sin x - 3}{x} \times \cos x = -1 \Leftrightarrow (\sin x - 3)\cos x = -x \Leftrightarrow x + (\sin x - 3)\cos x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

or l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions réelles α, β et γ. Par ailleurs, on remarque que lorsqu'à l'origine, la tangente à $\mathscr{C}$ n'est clairement pas perpendiculaire à la droite (AO) donc il existe trois points M de $\mathscr{C}$ et trois points seulement en lesquels la tangente à $\mathscr{C}$ est perpendiculaire à la droite (AM), ce sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisse α, β et γ .

Exercice IX ❶ Notons p la fonction polynomiale définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $p(x)=1+3x-x^3$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $p'(x)=3-3x^2=3(1-x)(1+x)$.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
Signe de $1-x$	$+$	|	$+$	0	$-$
Signe de $1+x$	$-$	0	$+$	|	$+$
Signe de $p'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

La fonction p est donc strictement décroissante sur $]-\infty;\,-1]$, strictement croissante sur $[-1\,;\,1]$ et strictement décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3=-\infty$.

En résumé, on peut dresser le tableau des variations de p.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Variations de p	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Sur l'intervalle $]-\infty;\,-1]$, la fonction p est continue, strictement décroissante et à valeurs dans $[-1\,;\,+\infty[$ or $0\in[-1,+\infty[$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x)=0$ admet une unique solution α sur $]-\infty;\,-1]$.

En raisonnant de façon analogue sur chacun des intervalles $[-1\,;\,1]$ et $[1\,;\,+\infty[$, l'équation $p(x)=0$ admet finalement trois solutions réelles : α dans $]-\infty;\,-1]$, β dans $[-1\,;\,1]$ et γ dans $[1\,;\,+\infty[$.

Par balayage, on a $p(-1{,}533)\approx 0{,}004>0$ et $p(-1{,}532)\approx -0{,}0004<0$ donc $-1{,}533<\alpha<-1{,}532$ et on peut retenir $\alpha\approx -1{,}532$. Par une démarche analogue, on obtient $\beta\approx -0{,}347$ et $\gamma\approx 1{,}879$.

❷ **a)** La fonction f est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout $u\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $f'(u)=2\cos(2u)$.

Pour tout $u\in\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos u>0$ donc $f'>0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

Comme $f(-\frac{\pi}{2})=-2$ et $f(\frac{\pi}{2})=2$, on a bien le résultat attendu.

b) Pour tout réel u, $\sin(3u)=\sin(u+2u)=\sin u\cos(2u)+\cos u\sin(2u)$ or

$\cos(2u)=\cos^2 u-\sin^2 u=1-2\sin^2 u$ et $\sin(2u)=2\sin u\cos u$ donc

$$\begin{aligned}\sin(3u)&=\sin u(1-2\sin^2 u)+2\sin u\cos^2 u=\sin u(1-2\sin^2 u)+2\sin u(1-\sin^2 u)\\&=3\sin u-4\sin^3 u.\end{aligned}$$

c) On remarque tout d'abord que les solutions de (E) appartiennent à $[-2\,;\,2]$.
Ainsi, en posant $x=2\sin u$, on a :

$$(E)\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[-2\,;\,2]\\1+3x-x^3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]\\1+3(2\sin u)-(2\sin u)^3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]\\1+2\left(3\sin u-4\sin^3 u\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]\\1+2\sin(3u)=0\end{cases}.$$

❸ On a $1+2\sin(3u)=0\Leftrightarrow\sin(3u)=-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 3u=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \text{ ou } 3u=-\frac{5\pi}{6}+2k'\pi \text{ où } k'\in\mathbb{Z}$$

ce qui équivaut à $u=-\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}$ où $k\in\mathbb{Z}$ ou $u=-\frac{5\pi}{18}+\frac{2k'\pi}{3}$ où $k'\in\mathbb{Z}$.

Sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $1+2\sin(3u)=0$ a trois solutions qui sont $-\frac{5\pi}{18}$, $-\frac{\pi}{18}$ et $\frac{7\pi}{18}$ obtenues respectivement pour $k'=0$, $k=0$ et $k'=1$.

Par l'équivalence établie à la question 2.c, on obtient les solutions de (E) sur $\left[-2\ ;\ 2\right]$ (et donc sur $\mathbb{R}$) qui sont $2\sin(-\frac{5\pi}{18})$, $2\sin(-\frac{\pi}{18})$ et $2\sin(\frac{7\pi}{18})$ d'où $\alpha=2\sin(-\frac{5\pi}{18})$, $\beta=2\sin(-\frac{\pi}{18})$ et $\gamma=2\sin(\frac{7\pi}{18})$.

En calculant des valeurs approchées de ces trois réels, on obtient des résultats cohérents avec ceux obtenus à la question 1.

Exercice X ❶ La fonction f est le produit de $x\mapsto x$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par la composée $x\mapsto\sqrt{x+3}$ définie sur $\left[-3\ ;+\infty\right[$ et dérivable sur $\left]-3\ ;+\infty\right[$ donc f est dérivable sur $\left]-3\ ;+\infty\right[$.

Formules utilisées : $(uv)'=u'v+uv'$ et $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour tout $x>-3$, $f'(x)=1\times\sqrt{x+3}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}=\dfrac{2(x+3)+x}{2\sqrt{x+3}}=\dfrac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$.

Pour tout $x>-3$, $2\sqrt{x+3}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de l'expression affine $3x+6$ d'où $f'(x)<0$ sur $\left]-3\ ;-2\right[$ et $f'(x)>0$ sur $\left]-2\ ;+\infty\right[$ de sorte que f soit strictement décroissante sur $\left[-3\ ;-2\right]$ et strictement croissante sur $\left[-2\ ;+\infty\right[$.

Pour dresser le tableau des variations de f, on remarque que $f(-3)=0$ et $f(-2)=-2$ puis il reste à déterminer la limite en $+\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x+3=+\infty$ donc, par composition avec $X=x+3$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}=\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

x	-3		-2		$+\infty$
Variations de d	0	↘	-2	↗	$+\infty$

❷ **a)** Par simple lecture du tableau de variations de f, on obtient que l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution réelle lorsque $k=-2$ ou lorsque $k>0$.

b) Sur l'intervalle $[-3\,;-2]$, f admet un maximum égal à 0 donc l'équation $f(x)=1$ n'a pas de solution sur cet intervalle. Sur l'intervalle $[-2\,;+\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante de $[-2\,;+\infty[$ dans lui-même. Comme $1\in[-2\,;+\infty[$, l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α dans cet intervalle comme application du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Finalement, l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α sur $[-3\,;\,+\infty[$.

Un raisonnement analogue conduit à l'existence et l'unicité d'une unique solution β sur $[-3\,;\,+\infty[$ à l'équation $f(x)=3$.

Par balayage, on a $f(0{,}53)\approx 0{,}99<1$ et $f(0{,}54)\approx 1{,}02>1$ donc $0{,}53<\alpha<0{,}54$ puis $f(1{,}42)\approx 2{,}99<3$ et $f(1{,}43)\approx 3{,}0098>3$ donc $1{,}42<\beta<1{,}43$.

❸ L'équation n'a de sens que si $\lambda\in[-3\,;+\infty[$. Pour $\lambda\geq -3$, l'équation $x\sqrt{x+3}+\lambda\sqrt{\lambda+3}=1$ s'écrit $f(x)=1-\lambda\sqrt{\lambda+3}$.

Du 2.a) on déduit que cette équation admet une unique solution réelle si et seulement si $1-\lambda\sqrt{\lambda+3}=-2$ ou $1-\lambda\sqrt{\lambda+3}>0$ ce qui équivaut à $\lambda\sqrt{\lambda+3}=3$ ou $\lambda\sqrt{\lambda+3}<1$ ou encore $f(\lambda)=3$ ou $f(\lambda)<1$.

Ce qui suit peut être déduit du 2.b). D'une part, $f(\lambda)=3$ équivaut à $\lambda=\beta$. D'autre part, $f(\lambda)<1$ équivaut à $\lambda<\alpha$. En effet, ce dernier résultat (qui peut se lire sur le tableau) découle du fait que f admet un maximum égal à 0 sur l'intervalle $[-3\,;-2]$, f est strictement croissante sur $[-2\,;+\infty[$ et $f(\alpha)=1$.

Finalement, l'équation $x\sqrt{x+3}+\lambda\sqrt{\lambda+3}=1$ admet une unique solution réelle si et seulement si $-3\leq\lambda<\alpha$ ou $\lambda=\beta$.

Exercice XI ❶ Soit x un réel fixé.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n = f(\frac{x}{10^n}) = f(10 \times \frac{x}{10^{n+1}}) = f(\frac{x}{10^{n+1}}) = u_{n+1}$ ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$ et la suite (u_n) est constante égale à $u_0 = f(x)$.

❷ Soit x un réel fixé.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 10^n = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x}{10^n} = 0$ puis, par composition avec $X = \frac{x}{10^n}$, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} f(\frac{x}{10^n}) = \lim\limits_{X \to 0} f(X) = f(0)$ car f est continue en 0.

Par ailleurs, la suite (u_n) étant constante égale à $u_0 = f(x)$, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = u_0 = f(x).$$

Donc, par unicité de la limite, on a $f(x) = f(0)$.

Le raisonnement étant valable pour tout réel x, on a obtenu que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)$. La fonction f est donc constante sur $\mathbb{R}$. ■

Corrigé de la séquence 3

Corrigé des activités du chapitre 2

■ **Activité 1** **Tri sélectif**

Une enquête portant sur le tri sélectif a été réalisée et 2000 personnes ont été interrogées.

On leur a posé la question : « Triez-vous le verre et le papier ? ».

Voici les résultats pour les effectifs :

Âge \ Tri	Oui	Non	Total par ligne
Moins de 40 ans : J	700	400	1100
Plus de 40 ans : $\overline{J}$	500	400	900
Total par colonne	1200	800	2000 : Total général

❶ On choisit au hasard une personne parmi les 2000 personnes interrogées, on utilise donc la loi équirépartie, l'univers Ω étant formé par l'ensemble des 2000 personnes interrogées.

$$P(T)=\frac{\text{card}(T)}{\text{card}(\Omega)}=\frac{1200}{2000}=0,6\ ;\ \ P(J)=\frac{\text{card}(J)}{\text{card}(\Omega)}=\frac{1100}{2000}=0,55\ ;$$

$$P(T\cap J)=\frac{700}{2000}=0,35.$$

❷ On choisit maintenant au hasard une personne parmi celles faisant du tri sélectif. On utilise toujours une loi équirépartie, mais il faut tenir compte que l'univers a changé, c'est maintenant l'événement T pour lequel $\text{card}(T)=1200.$

La probabilité qu'une personne ait moins de 40 ans sachant qu'elle fait du tri sélectif est donc égale à $\dfrac{\text{card}(J \cap T)}{\text{card}(T)} = \dfrac{700}{1200} = \dfrac{7}{12}$. On remarque que cette probabilité est différente de la valeur de $P(J)$ déterminée à la question précédente.

En observant les valeurs des probabilités de la question ❶, on obtient que

$$\frac{\text{card}(J \cap T)}{\text{card}(T)} = \frac{700}{1200} = \frac{\frac{700}{2000}}{\frac{1200}{2000}} = \frac{P(J \cap T)}{P(T)}.$$

❸ De la même façon, si on choisit une personne au hasard parmi les personnes ayant moins de 40 ans, l'univers est J pour lequel $\text{card}(J) = 1100.$

La probabilité qu'une personne fasse du tri sélectif sachant qu'elle a moins de 40 ans est donc égale à $\dfrac{\text{card}(J \cap T)}{\text{card}(J)} = \dfrac{700}{1100} = \dfrac{7}{11}$ et on a aussi $\dfrac{\text{card}(J \cap T)}{\text{card}(J)} = \dfrac{P(J \cap T)}{P(J)}$.

Plus généralement, et même s'il n'y a pas équiprobabilité, on utilisera des quotients analogues pour étudier ce type de probabilité liée à une condition.

■ Activité 2

❶ Dans l'initialisation, 30 dates d'anniversaire sont fixées aléatoirement entre 1 et 365 (on suppose qu'il n'y a pas d'année bissextile).

Lors du traitement, chaque date (numérotée k) parmi les 29 premières dates d'anniversaire (le compteur k va de 1 à 29) est comparée avec les dates qui la suivent (ce sont les dates numérotées de $k+1$ à 30). Si deux dates coïncident, la booléen « trouvé », qui a été initialisé avec la valeur « faux » prend la valeur « vrai ».

A la sortie, la valeur du booléen « trouvé » est affichée : si aucune coïncidence n'a été trouvée, « faux » est affichée, et, si une coïncidence a été trouvée, c'est « vrai » qui est affiché.

❷ Pour obtenir un algorithme qui donne la fréquence des groupes où il existe des coïncidences d'anniversaires dans 1000 groupes de 30 personnes, on insère l'algorithme précédent, dans une boucle.

Variables

dates : tableau des trente jours d'anniversaire ;
trouvé : un booléen qui indique si deux dates coïncident ;
i, k, p : trois compteurs de boucles ;
N : un entier naturel
f : un nombre réel compris entre 0 et 1.

Initialisation

$i=0$

$N=0$

Traitement

```
Pour i de 0 à 1000
 | Pour k de 1 à 30
 |  | dates[k] prend une valeur entière aléatoire comprise entre 1 et 365
 |  | inclus
 | trouvé prend la valeur faux
 | Pour k de 1 à 29
 |  | Pour p de k+1 à 30
 |  |   Si dates[k] = dates[p] alors
 |  |    | trouvé prend la valeur vrai
 | Si trouvé = vrai  N+1 → N
N / 1000 → f
```

Sortie

Affiche f

❸

```
▼ VARIABLES
  ├trouvé EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├i EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├k EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├p EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├N EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├f EST_DU_TYPE NOMBRE
  └dates EST_DU_TYPE LISTE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├i PREND_LA_VALEUR 0
  ├N PREND_LA_VALEUR 0
  ▼ POUR i ALLANT_DE 0 A 1000
    ├DEBUT_POUR
    ▼ POUR k ALLANT_DE 1 A 30
      ├DEBUT_POUR
      ├dates[k] PREND_LA_VALEUR floor(365*random())+1
      ├trouvé PREND_LA_VALEUR 0
      └FIN_POUR
    ▼ POUR k ALLANT_DE 1 A 29
      ├DEBUT_POUR
      ▼ POUR p ALLANT_DE k+1 A 30
        ├DEBUT_POUR
        ▼ SI (dates[k]==dates[p]) ALORS
          ├DEBUT_SI
          ├trouvé PREND_LA_VALEUR 1
          └FIN_SI
        └FIN_POUR
      └FIN_POUR
    ▼ SI (trouvé==1) ALORS
      ├DEBUT_SI
      ├N PREND_LA_VALEUR N+1
      └FIN_SI
    └FIN_POUR
  ├f PREND_LA_VALEUR N/1000
  └AFFICHER f
└FIN_ALGORITHME
```

En faisant fonctionner cet algorithme, on trouve, par exemple, $f = 0{,}839$.

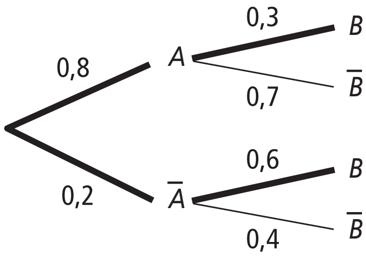
Cette fréquence peut paraître surprenante car on s'attend généralement à une fréquence plus faible.

Les probabilités conditionnelles, qui seront définies dans cette séquence, permettront de calculer la probabilité que deux anniversaires coïncident dans un groupe de 30 personnes et de comprendre les fréquences observées lors des simulations.

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 2

Exercice 1

❶ Par lecture de l'arbre, $P(B) = 0{,}8 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}6$ (probabilités des deux chemins en gras) soit $P(B) = 0{,}36$.



La bonne réponse est la b).

(Il faut tenir compte de $P(A)$ et $P(\overline{A})$ donc cela ne peut être la a))

❷ $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}12$ donc la bonne réponse est la c). (ne pas confondre avec $P_{\overline{A}}(B)$).

❸ $P_A(B) = 0{,}3$ donc la bonne réponse est la a).

C'est la pondération de la branche : A ——— B.

Exercice 2

❶ $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{10}$. Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

On utilise la formule : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{10} \times 2 = \dfrac{1}{5}$.

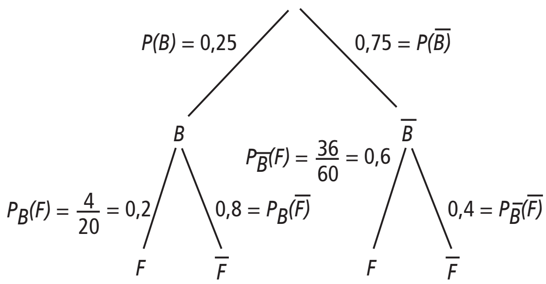
De même, $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{10} \times 4 = \dfrac{2}{5}$.

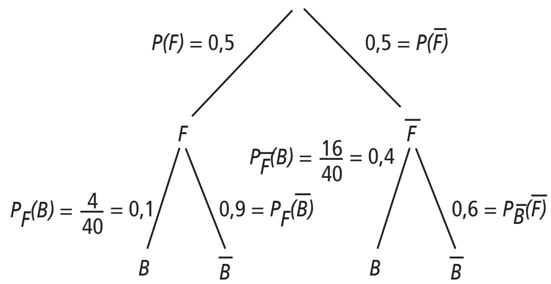
Exercice 3

Les données de l'énoncé permettent de déterminer le nombre de personnes qui ont les yeux et qui ne fument pas, le nombre de celles qui fument et qui n'ont pas les yeux bleus et enfin le nombre de celles qui n'ont pas les yeux bleus et qui ne fument pas.

	F	$\overline{F}$	Total
B	4	16	20
$\overline{B}$	36	24	60
Total	40	40	80

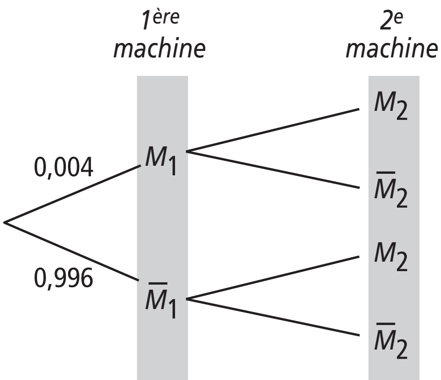
On utilise ensuite la loi équirépartie sur Ω ou des lois équiréparties sur les univers utilisés pour les probabilités conditionnelles.





Exercice 4 ❶ « Lorsque M_1 est en panne, la probabilité que M_2 tombe en panne est 0,5 » traduit une probabilité conditionnelle : la probabilité que M_2 tombe en panne sachant que M_1 est en panne est de 0,5 soit : $P_{M_1}(M_2) = 0,5$.

❷ Comme on nous donne $P_{M_1}(M_2)$, on construit l'arbre avec M_1, $\overline{M_1}$ d'abord :



$P(\overline{M_1}) = 1 - P(M_1) = 1 - 0,004 = 0,996$

❸ On utilise la formule : $P_{M_2}(M_1) = \dfrac{P(M_1 \cap M_2)}{P(M_2)}$ avec $P(M_2) = 0,006$ (donné dans l'énoncé) et d'après l'arbre,

$P(M_1 \cap M_2) = P(M_1) \times P_{M_1}(M_2) = 0,004 \times 0,5 = 0,002$ d'où $P_{M_2}(M_1) = \dfrac{0,002}{0,006} = \dfrac{1}{3}$.

Remarque

On pourrait à l'aide de $P(M_2)$ calculer les autres probabilités de l'arbre du 2.

On a par exemple :

$P(M_2) = 0,004 \times 0,5 + 0,996 \times P_{\overline{M_1}}(M_2) = 0,006$

d'où $P_{\overline{M_1}}(M_2) = \dfrac{0,006 - 0,004 \times 0,5}{0,996} = 0,0040$ à 10^{-4} près.

Exercice 5 On introduit les événements A : « la pièce est acceptée » et D : « la pièce est défectueuse ».

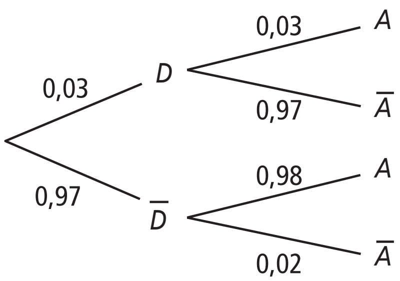
❶ On sait que 3 % des pièces sont défectueuses donc $\mathrm{P(D)} = \dfrac{3}{100} = 0,03$.

98 % des pièces bonnes sont acceptées donc la probabilité que la pièce soit acceptée sachant qu'elle est bonne (c'est-à-dire non défectueuse) est de $\frac{98}{100}$ soit de 0,98.

Donc $P_{\overline{D}}(A) = 0{,}98$.

De même 97 % des pièces défectueuses sont refusées (donc non acceptées) se traduit par : $P_D(\overline{A}) = 0{,}97$.

On commence donc l'arbre par D, $\overline{D}$ car on a $P_{\overline{D}}(A)$ et $P_D(\overline{A})$ soit :



D'après la loi des nœuds,
$P(\overline{D}) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$
$P_D(A) = 1 - 0{,}97 = 0{,}03$
$P_{\overline{D}}(\overline{A}) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02$

❷ La probabilité qu'une pièce soit bonne mais refusée est $P(\overline{D} \cap \overline{A})$.

D'après l'arbre ci-dessus : $P(\overline{D} \cap \overline{A}) = 0{,}97 \times 0{,}02 = 0{,}0194$.

❸ Une erreur de contrôle se produit si :

- soit la pièce est défectueuse mais acceptée.
- soit la pièce est bonne mais refusée.

donc la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle est $P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap \overline{A})$.

Or d'après l'arbre, $P(D \cap A) = 0{,}03 \times 0{,}03 = 0{,}0009$ et $P(\overline{D} \cap \overline{A}) = 0{,}0194$.

La probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle est donc de 0,0009 + 0,0194 soit de 0,0203.

❹ La probabilité qu'une pièce acceptée soit mauvaise est la probabilité que la pièce soit mauvaise (c'est-à-dire défectueuse) sachant qu'elle est acceptée à savoir $P_A(D)$.

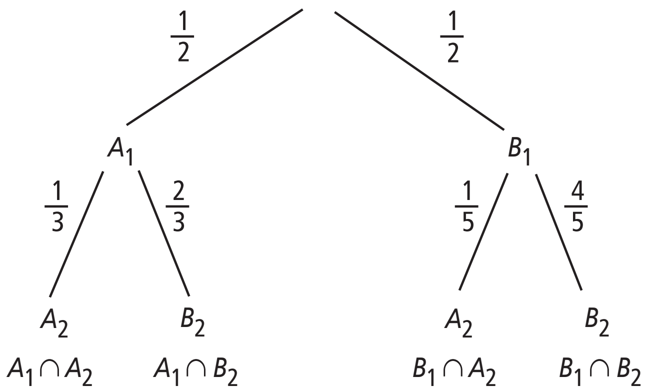
Or $P_A(D) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)}$ avec $P(A) = P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A)$

$$= 0{,}0009 + 0{,}97 \times 0{,}98 = 0{,}9515$$

Donc $P_A(D) = \dfrac{0{,}0009}{0{,}9515} \approx 0{,}000946$. La probabilité qu'une pièce acceptée soit mauvaise est d'environ 0,000946.

Exercice 6 ❶ Résumons la situation par un arbre de probabilité. D'après l'énoncé :

$$P_1 = P(A_1) = \frac{1}{2}\ ;\ P_{A_1}(A_2) = \frac{1}{3}\ ;\ P_{B_1}(B_2) = \frac{4}{5}$$



Les événements A_1 et B_1 forment une partition de Ω.

D'après la formule des probabilités totales :

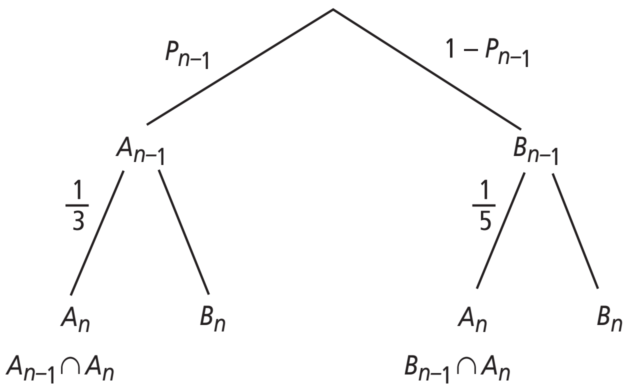
$$P(A_2) = P\left(A_2 \cap A_1\right) + P(A_2 \cap B_1)$$
$$P(A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2)$$
$$P(A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

soit $P_2 = \dfrac{4}{15}$.

❷ Les événements A_{n-1} et B_{n-1} forment une partition de Ω.

Donc

$$P(A_n) = P(A_n \cap A_{n-1}) + P(A_n \cap B_{n-1})$$
$$P_n = P(A_n) = P(A_{n-1}) \times P_{A_{n-1}}(A_n) + P(B_{n-1}) \times P_{B_{n-1}}(A_n)$$
$$P_n = P(A_n) = P_{n-1} \times \frac{1}{3} + (1 - P_{n-1}) \times \frac{1}{5}$$
$$P_n = P_{n-1}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} = \frac{2}{15}P_{n-1} + \frac{1}{5}$$



❸ Pour montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique on peut exprimer u_{n+1} en fonction de u_n en utilisant la définition de la suite (u_n) et la relation prouvée à la question précédente.

Pour tout entier n on a :

$$u_{n+1} = P_{n+1} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}P_n + \frac{1}{5} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}P_n - \frac{2}{65} = \frac{2}{15}\left(P_n - \frac{3}{13}\right) = \frac{2}{15}u_n,$$

Ainsi, pour tout entier n non nul, $u_{n+1}=\dfrac{2}{15}u_n$: la suite (u_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{2}{15}$ et de premier terme $u_1=p_1-\dfrac{3}{13}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{13}=\dfrac{7}{26}$.

❹ On en déduit $u_n=u_1\times\left(\dfrac{2}{15}\right)^{n-1}=\dfrac{7}{26}\times\left(\dfrac{2}{15}\right)^{n-1}$

donc $P_n=u_n+\dfrac{3}{15}=\dfrac{7}{26}\times\left(\dfrac{2}{15}\right)^{n-1}+\dfrac{3}{13}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{P}_n=\dfrac{3}{13}$

Exercice 7 Soit A (resp. B, C, D) l'événement : « l'élève choisit l'itinéraire A (resp. B, C, D) ».

Soit R l'événement : « l'élève arrive en retard ».

❶ $P(D)=1-P(A)-P(B)-P(C)$ car A, B, C et D forment une partition de l'univers.

Donc $P(D)=1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{3}$.

❷ On cherche $P_R(C)$.

$$P_R(C)=\frac{P(R\cap C)}{P(R)}$$

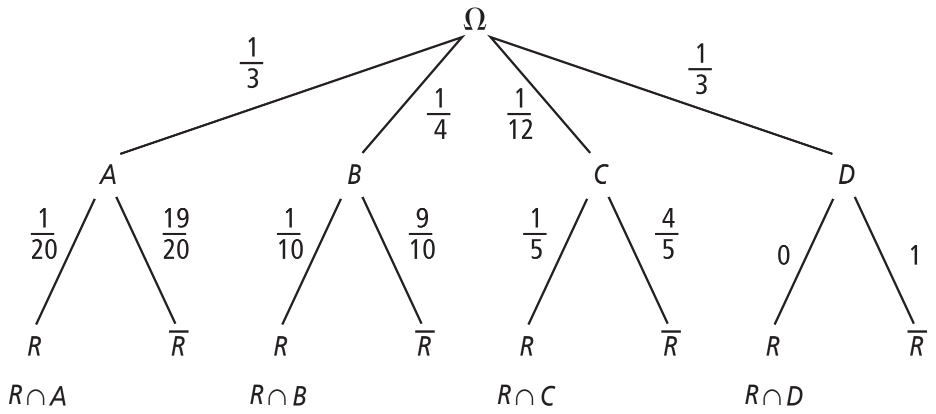
Pour déterminer $P(R)$, on peut utiliser la formule des probabilités totales :

$$P(R)=P(R\cap A)+P(R\cap B)+P(R\cap C)+P(R\cap A)$$
$$P(R)=P(A)\times P_A(R)+P(B)\times P_B(R)+P(C)\times P_C(R)+P(D)\times P_D(R)$$
$$P(R)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{20}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times 0$$
$$P(R)=\frac{7}{120}$$

$$P_R(C)=\frac{P(R\cap C)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{12}\times\frac{1}{5}}{\frac{7}{120}}=\frac{2}{7}$$

Remarque

on peut s'aider d'un arbre pondéré pour calculer $P(R)$.



Exercice 8 ❶ Désignons par E l'événement « la personne est en état d'ébriété » ;

T l'événement « l'alcootest se révèle positif ».

L'énoncé nous donne les résultats suivants :

$P(E)=0{,}02$; $P_E(T)=0{,}96$; $P_{\overline{E}}(T)=0{,}01$.

On veut calculer $P_T(\overline{E})$.

On sait que $\quad P_T(\overline{E})=\dfrac{0{,}009\,8}{0{,}029}=$

▸ Calcul de $\quad P(\overline{E}\cap T)$.

On a
$$P(\overline{E}\cap T)=P_{\overline{E}}(T)\times P(\overline{E})$$
$$P(\overline{E}\cap T)=0{,}01\times 0{,}98$$
$$P(\overline{E}\cap T)=0{,}0098.$$

▸ Calcul de $P(T)$.

On a $\quad T=(T\cap E)\cup(T\cap\overline{E})$.

Les événements $T\cap E$ et $T\cap\overline{E}$ sont incompatibles et on a

$$P(T)=P(T\cap E)+P(T\cap\overline{E}).$$

Soit
$$P(T)=P_E(T)\times P(E)+P_{\overline{E}}(T)\times P(\overline{E})$$
$$P(T)=0{,}96\times 0{,}02+0{,}009\,8$$
$$P(T)=0{,}029.$$

On a donc $\quad P_T(\overline{E})=\dfrac{0{,}009\,8}{0{,}029}=0{,}337\,9\ldots$

La probabilité qu'une personne dont l'alcootest est positif ne soit pas en état d'ébriété est environ égale à 0,338.

La probabilité trouvée peut paraître surprenante car il y a environ une chance sur trois qu'une personne contrôlée positive ne soit pas en état d'ébriété !

Ce résultat est du au faible taux (2 %) de conducteurs en état d'ébriété.

❷

▶ Un raisonnement identique nous donne :

$$P_T(\overline{E}) = \frac{P(\overline{E} \cap T)}{P(T)} = \frac{P(\overline{E} \cap T)}{P(T \cap E) + P(T \cap \overline{E})}$$

$$P_T(\overline{E}) = \frac{0,95 \times 0,01}{0,96 \times 0,05 + 0,01 \times 0,95}$$

$$P_T(\overline{E}) = 0,165\,2\ldots .$$

> La probabilité des faux positifs est $P_T(\overline{E}) = 0,165.$

▶ On fait de même pour les faux négatifs.

$$P_{\overline{T}}(E) = \frac{P(E \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{P(E \cap \overline{T})}{P(\overline{T} \cap E) + P(\overline{T} \cap \overline{E})}$$

$$P_{\overline{T}}(E) = \frac{0,05 \times 0,04}{0,05 \times 0,04 + 0,95 \times 0,99}$$

$$P_{\overline{T}}(E) = 0,002\,1\ldots .$$

> La probabilité des faux négatifs est $P_{\overline{T}}(E) = 0,002.$

La probabilité pour une personne dont l'alcootest est positif de ne pas être en état d'ébriété reste encore assez forte, bien qu'elle ait diminué de moitié environ (de 33 % à 16,5 %).

Par contre la probabilité pour une personne dont l'alcootest est négatif d'être en état d'ébriété est assez faible.

On observe que le test est plus fiable dans celui des deux cas où la probabilité p est la plus grande.

Exercice 9 Lorsque le logiciel de programmation utilisé ou la calculatrice le permet, on peut utiliser une seule boucle en faisant trier la liste des dates d'anniversaire. Il suffit alors de comparer chaque date à la suivante.

```
Variables
    dates : tableau des trente jours d'anniversaire
    trouvé : un booléen qui indique si deux dates coïncident.
    k : un compteur de boucles.
Initialisation
    Pour k de 1 à 30
    |   dates[k] prend une valeur entière aléatoire comprise entre 1 et 365 inclus
    Trier la liste dates du plus petit au plus grand

    trouvé prend la valeur faux
Traitement
    Pour k de 1 à 29
    |   Si dates[k] = dates[k+1] alors
    |   |   trouvé prend la valeur vrai
Sortie
    Affiche trouvé
```

Le logiciel Algobox ne permet pas de trier de listes. Ci-dessous les programmes correspondant à l'algorithme précédent.

Casio

```
======ANNIVERS======
ClrList 1↵
Seq(Int (365×Ran# +1)
,I,1,30,1)→List 1↵
SortA(List 1)↵
0→T↵
For 1→K To 29↵
If (List 1[K]=List 1[
K+1])↵
Then 1→T↵
IfEnd↵
Next↵
T◢
COM CTL JUMP ? ◢ ▷
```

Texas Instrument

```
PROGRAM:ANNIVERS
:For(K,1,30)
:ent(365*NbrAléa
t)+1→L₁(K)
:End
:TriCroi(L₁)
:0→T
:For(K,1,29)
:If (L₁(K)=L₁(K+
1))
:Then
:1→T
:End
:End
:Disp T
```

Corrigé de l'activité du chapitre 3

■ **Activité 3** On est en situation d'équiprobabilité. D'après les données du tableau, on a : $P(A)=\dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}=\dfrac{1500}{2000}=0,75$ (où Ω désigne l'univers c'est-à-dire l'ensemble des salariés de l'entreprise), $P_F(A)=\dfrac{600}{800}=0,75$ et $P_{\overline{F}}(A)=\dfrac{900}{1200}=0,75.$ On observe que ces trois nombres sont égaux. La probabilité de gagner moins de 1750€ est la même si on sait on non que l'employé est une femme. Dans cette entreprise, la répartition des salaires est indépendante du sexe.

De même $P(F)=\dfrac{800}{2000}=0,4, P_A(F)=\dfrac{600}{1500}=0,4$ et $P_{\overline{A}}(F)=\dfrac{200}{500}=0,4.$

On observe aussi que ces trois probabilités sont égales, dans cette entreprise la répartition des sexes est indépendante de la catégorie de salaire.

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 3

Exercice 10 Dans tout cet exercice, on utilise l'égalité $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

❶ D'après la relation précédente $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$ donc $P(A\cap B)=0,3+0,5-0,65=0,15.$

Comme $P(A)\times P(B)=0,3\times 0,5=0,15=P(A\cap B)$ les événements A et B sont indépendants, et, d'après une propriété du cours, ils ne sont donc pas incompatibles.

❷ De même, pour les événements A et C, on a $P(A\cap C)=0,3+0,4-0,7=0.$
Comme $P(A)\times P(C)\neq 0,$ on a $P(A)\times P(C)\neq P(A\cap C)$ et les événements A et C ne sont donc pas indépendants.

On a $P(A\cap C)=0,$ il est possible que les événements A et C soient incompatibles, il se peut aussi qu'ils ne le soient pas si leur intersection contiennent une éventualité… de probabilité nulle ce qui ne semble pas très intéressant, mais peut avoir lieu (voir la séquence 8).

❸ Enfin, pour les événements B et C, on a $P(B\cap C)=0,5+0,4-0,8=0,1.$

Comme $P(B)\times P(C)=0,5\times 0,4=0,2\neq P(B\cap C)$, les événements B et C ne sont pas indépendants. Ils ne sont pas non plus incompatibles car $P(B\cap C)\neq 0$ donc $B\cap C\neq\varnothing$.

Exercice 11 ❶ Comme $P(A)=0,2$ et $P(B)=0,5$ et les événements A et B étant indépendants, on a $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0,2\times 0,5=0,1$

et donc $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,2+0,5-0,1=0,6$.

❷ Comme les événements C et D sont incompatibles et que $P(C)=0,3$ et $P(D)=0,15$, on a $P(C\cap D)=0$ et $P(C\cup D)=P(C)+P(D)=0,3+0,15=0,45$.

Exercice 12 L'expérience aléatoire est formée à partir de trois expériences aléatoires indépendantes. On utilise donc la loi de probabilité telle que la probabilité d'une liste de résultats soit le produit des probabilités des résultats partiels qui la constitue.

❶ On note U_C l'événement « on obtient 1 avec le dé cubique », U_O l'événement « on obtient 1 avec le dé octaédrique », U_D l'événement « on obtient 1 avec le dé dodécaédrique ».

On a $P(U)=P(U_C)\times P(U_O)\times P(U_D)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{576}$, soit environ deux chances sur mille.

❷ Avec des notations analogues on a :

$P(Q)=P(Q_C)\times P(Q_O)\times P(Q_D)=\frac{2}{6}\times\frac{4}{8}\times\frac{8}{12}=\frac{64}{576}$, soit environ une chance sur neuf.

❸ Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un jeu.

La loi de probabilité de X est :

x_i	3	-1	$n\times 0,01$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{576}$	$\frac{64}{576}$	$1-\frac{1}{576}-\frac{64}{576}=\frac{511}{576}$

$E(X)=3\times\frac{1}{576}-1\times\frac{64}{576}+n\times\frac{5,11}{576}=\frac{5,11n-61}{576}$.

Le jeu est favorable au joueur lorsque $E(X)>0$ ce qui équivaut à $5,11n-61>0$ c'est-à-dire $n>\frac{61}{5,11}$. Comme $\frac{61}{5,11}\approx 11,937$ la plus petite valeur de n est égale à 12.

Exercice 13 Le candidat répète 10 fois la même épreuve à 2 issues possibles :

S « le candidat répond correctement à la question posée », $P(S)=p=\dfrac{1}{3}$ puisque le candidat répond au hasard.

$\overline{S}$ « le candidat répond mal » ; $P(\overline{S})=1-P(S)=1-p=\dfrac{2}{3}$. .

Les réponses à chaque question sont indépendantes.

On est donc en présence d'une suite de 10 épreuves de Bernoulli.

Soit X le nombre de réponses exactes. X suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\dfrac{1}{3}$.

Pour être reçu, il faut répondre au moins à 8 questions. La probabilité d'être reçu est donc :

$$p=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$$

$$=\binom{10}{8}\times\left(\frac{1}{3}\right)^8\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\binom{10}{9}\times\left(\frac{1}{3}\right)^9\times\left(\frac{2}{3}\right)^1+\binom{10}{10}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\times\left(\frac{2}{3}\right)^9$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^8\times\left(45\times\frac{4}{9}+10\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\right)=\frac{67}{19\ 683}\simeq 0{,}003.$$

Exercice 14 ❶ On lance une pièce non truquée n fois de suite, n est un entier tel que $n\geq 2$.

Il s'agit de la répétition d'épreuves identiques, on choisit donc la probabilité habituelle (voir les pré-requis).

a) Il y a deux éventualités pour lesquelles tous les résultats sont identiques : on obtient toujours Pile ou on obtient toujours Face. Ces deux éventualités ont la même probabilité donc $P(A)=2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

b) Soit X le nombre de fois où on obtient Pile. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et $p=\dfrac{1}{2}$.

$$P(B)=P(X=0)+P(X=1)=\binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\left(\frac{1}{2}\right)^l$$

car $\dbinom{n}{0}=1$ et $\dbinom{n}{1}=n$.

Remarque

il ne faut surtout pas confondre l'écriture d'une fraction dans des parenthèses, comme $\left(\dfrac{1}{2}\right)=0{,}5$, et l'écriture d'un coefficient binomial, comme $\dbinom{n}{0}=1$).

❷ Si $n=2$, on a $P(A)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ et $P(B)=\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Comme l'événement $A\cap B$ ne contient que l'éventualité où on obtient toujours Face, on a $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$. Les événements A et B ne sont pas indépendants car $P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$ ce qui est différent de $P(A\cap B)$.

Si $n=3$, on a $P(A)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$ et $P(B)=\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$. Comme l'événement $A\cap B$ ne contient que l'éventualité où on obtient toujours Pile, on a $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$. Les événements A et B sont indépendants car

$$P(A)\times P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=P(A\cap B).$$

L'indépendance des événements A et B dépend donc du nombre de répétitions.

Exercice 15

❶ Les résultats des trois lancers sont indépendants.

a) La probabilité que la case 3 soit atteinte est égale à $\left(\frac{7}{12}\right)^3$.

b) La probabilité que les cases 1, 2, 3 soient atteintes dans cet ordre est égale à

$$\frac{1}{12}\times\frac{1}{3}\times\frac{7}{12}=\frac{7}{432}.$$

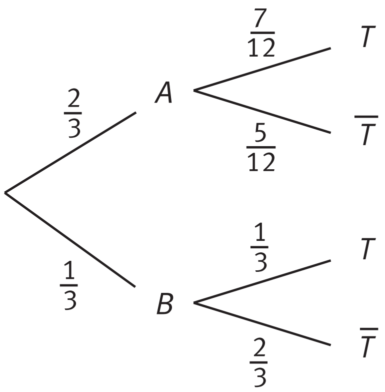
c) Soit X le nombre de fois où on atteint la case 1. On cherche $P(X=1)$. La variable X suit la loi binomiale $\mathrm{B}\left(3\,;\frac{1}{12}\right)$, donc $P(X=1)=\binom{3}{1}\times\frac{1}{12}\times\left(\frac{11}{12}\right)^2=3\times\frac{11^2}{12^3}=\frac{363}{1728}$, soit environ une chance sur cinq.

❷ On note A l'événement « Alice est choisie », B l'événement « Bob est choisi » et T l'événement « la case 3 est atteinte ».

On sait que $P(A)=2\times P(B)$ et que $P(B)=1-P(A)$ car l'événement B est le contraire de l'événement A. D'où $P(A)=\frac{2}{3}$ et $P(B)=\frac{1}{3}$.

Comme pour Bob les trois éventualités sont équiprobables, on a $P_B(T)=\frac{1}{3}$ et $P_B\left(\overline{T}\right)=\frac{2}{3}$.

On obtient l'arbre pondéré :



a) Les événements A et B sont des événements contraires donc

$$\begin{aligned}P(T) &= P(T \cap A) + P(T \cap B) \\ &= P(A) \times P_A(T) + P(B) \times P_B(T) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

b) Un seul lancer a été effectué et la case 3 a été atteinte, la probabilité pour que ce soit Alice qui ait lancé la fléchette est la probabilité conditionnelle $P_T(A)$.

$$P_T(A) = \frac{P(T \cap A)}{P(T)} = \frac{P(A) \times P_A(T)}{P(T)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{7}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{9}.$$

On peut remarquer que, dans cet exercice d'examen, on doit savoir utiliser et bien distinguer les notions d'indépendance et de probabilité conditionnelle.

Exercice 16 Il s'agit de la répétition d'épreuves identiques, on choisit la loi qui consiste à faire le produit des probabilités de chacun des n résultats partiels qui constituent une liste de n résultats.

Notons p la probabilité d'un succès et $1-p$ la probabilité d'un échec.

On obtient :

$P(X=0) = (1-p)^n$ et, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on a $P(X=k) = (1-p)^{k-1} \times p$.

En utilisant la somme des termes successifs d'une suit géométrique, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{k=n} P(X=k) = (1-p)^n + p \times \sum_{k=1}^{k=n} (1-p)^{k-1} = (1-p)^n + p \times \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1.$$

Corrigé des exercices de synthèse du chapitre 5

Exercice I Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation.

Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée. Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

▶ 92% des jouets sont sans défaut de finition ;

▶ parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;

▶ 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

▶ F l'événement : « le jouet est sans défaut de finition » ;

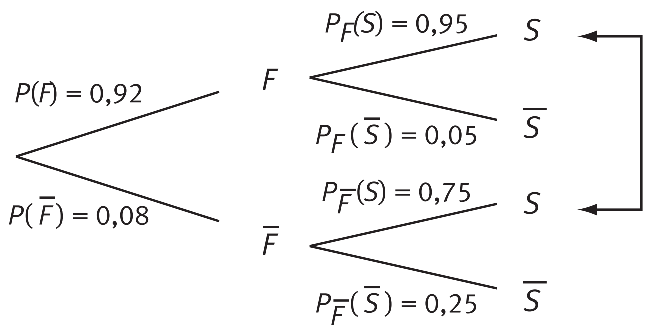
▶ S l'événement : « le jouet réussit le test de solidité ».

❶ Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.

a) Les données sont $P(F)=0{,}92$, $P_F(S)=0{,}95$ et $P\left(\overline{F}\cap\overline{S}\right)=0{,}02$.

b) On sait $P\left(\overline{F}\cap\overline{S}\right)=P\left(\overline{F}\right)\times P_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right)$, soit $0{,}02=0{,}08\times P_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right)$, donc $P_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right)=\dfrac{1}{4}$.

c) On a aussi $P_{\overline{F}}\left(S\right)=1-P_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right)=0{,}75$ et on peut construire l'arbre pondéré :



❷ **a)** On a $S=(F\cap S)\cup\left(\overline{F}\cap S\right)$ et , comme F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers, on a

$$\begin{aligned}P(S)&=P(F\cap S)+P\left(\overline{F}\cap S\right)=P(F)\times P_F(S)+P\left(\overline{F}\right)\times P_{\overline{F}}(S)\\&=0{,}92\times0{,}95+0{,}08\times0{,}75=0{,}934,\end{aligned}$$

$P(S)=0{,}934.$

b) On cherche $P_S(F)$.

On a $P_S(F)=\dfrac{P(F\cap S)}{P(S)}=\dfrac{P(F)\times P_F(S)}{P(S)}=\dfrac{0{,}92\times 0{,}95}{0{,}934}\approx 0{,}936.$

❸ La variable aléatoire B prend les valeurs 10, 5 et 0.

$$P(B=10)=P(F\cap S)=P(F)\times P_F(S)=0{,}92\times 0{,}95=0{,}874\ ;$$

$$P(B=0)=P\left(\overline{S}\right)=1-P(S)=0{,}066\ ;$$

$$P(B=5)=1-P(B=10)-P(B=0)=0{,}066.$$

b_i	10	5	0
$P(B=b_i)$	0,874	0,06	0,066

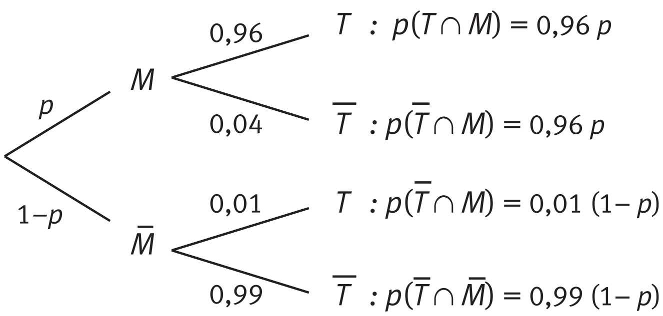
❹ Comme la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution du lot de 10 jouets puisse être assimilée à un tirage avec remise, la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathrm{B}(10\ ;0{,}934)$.

On cherche $P(X\geq 8)$ et on a :

$$\begin{aligned}P(X\geq 8)&=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)\\&=\binom{10}{8}0{,}934^8\times 0{,}066^2+\binom{10}{9}0{,}934^9\times 0{,}066+\binom{10}{10}0{,}934^{10}\end{aligned}$$

$$P(X\geq 8)\approx 0{,}9328.$$

Exercice II ❶ Les données nous permettent de construire l'arbre pondéré.



❷ Déterminons $P_T(M)=\dfrac{P(T\cap M)}{P(T)}$.

On a $P(T)=P(T\cap M)+P(T\cap \overline{M})$

$P(T)=0{,}96p+0{,}01(1-p)$

$P(T)=0{,}95p+0{,}01.$

D'où $P_T(M)=\dfrac{0{,}96p}{0{,}95p+0{,}01}=\dfrac{96p}{95p+1}.$

Posons $f(p)=\dfrac{96p}{95p+1}=96\times\dfrac{p}{95p+1}$.

Déterminons la dérivée.

$$f'(p)=96\times\frac{(95p+1)-95p}{(95p+1)^2}=\frac{96}{(95p+1)^2}.$$

La fonction f est croissante sur [0 ; 1] car $f'(p)>0$.

p	0		1
$f(p)$	0	$\nearrow$	1

▶ Tableau de valeurs

p	0,001	0,005	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20
$f(p)$	0,087 7	0,325 4	0,492 3	0,662 1	0,834 8	0,914 3	0,96

❸ ▶ Déterminons $P_{\overline{T}}(\overline{M})=\dfrac{P(\overline{T}\cap\overline{M})}{P(\overline{T})}$.

On a $P(\overline{T})=1-p(T)=1-(0{,}95p+0{,}01)$

$P(\overline{T})=-0{,}95p+0{,}99$.

D'où $P_{\overline{T}}(\overline{M})=\dfrac{0{,}99(1-p)}{-0{,}95p+0{,}99}=\dfrac{99(1-p)}{99-95p}$

▶ Posons $g(p)=\dfrac{99(1-p)}{99-95p}$.

Déterminons la dérivée.

$$g'(p)=\frac{99(-99+95p+95-95p)}{(99-95p)^2}=\frac{-4\times 99}{(99-95p)^2}.$$

La fonction g est décroissante sur [0 ; 1] car $g'(p)<0$.

p	0		1
$g(p)$	1	$\searrow$	0

▶ Tableau de valeurs

p	0,001	0,005	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20
$g(p)$	0,999 9	0,999 8	0,999 6	0,999 2	0,997 9	0,995 5	0,99

❹ On sait que $P_T(M)+P_T(\overline{M})=1$, d'où $P_T(\overline{M})=1-P_T(M)$.

Posons $h(p)=P_T(\overline{E})$.

D'où $h(p)=1-f(p)$.

Comme la fonction f est croissante sur [0 ; 1], h est décroissante sur [0 ; 1].

p	0		1
$h(p)$	1	↘	0

▶ Tableau de valeurs

p	0,001	0,005	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20
$h(p)$	0,912 3	0,674 6	0,507 7	0,337 9	0,165 2	0,085 7	0,04

❺ On sait que $P_{\overline{T}}(E)+P_{\overline{T}}(\overline{E})=1$, d'où $P_{\overline{T}}(E)=1-p_{\overline{T}}(\overline{E})$.

Posons $k(p)=P_{\overline{T}}(\overline{E})$.

D'où $k(p)=1-g(p)$.

Comme la fonction g est décroissante sur [0 ; 1], k est croissante sur [0 ; 1].

p	0		1
$k(p)$	0	↗	1

▶ Tableau de valeurs

p	0,001	0,005	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20
$k(p)$	0,000 04	0,000 2	0,000 4	0,000 8	0,002 1	0,004 5	0,01

❻ Quelques commentaires

Probabilité conditionnelle	$P_T(M)$	$P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right)$	$P_T\left(\overline{M}\right)$ (faux positifs)	$P_{\overline{T}}(M)$ (faux négatifs)
Fonction	f	g	$h=1-f$	$k=1-g$
Variations de la fonction	croissante sur $I=\left[0\,;1\right]$	décroissante sur I	décroissante sur I	croissante sur I
Valeurs prises sur [0 ; 0,2]	de 0 à 0,96	toujours proches de 1	de 1 à 0,04	Toujours proches de 0

On remarque tout d'abord que la valeur diagnostique du test n'est pas une notion intrinsèque au test lui-même : elle varie fortement suivant la probabilité p qui dépend de la population ciblée.

Si la population est une population à risque, p n'est pas faible et il n'y a pas trop de « faux positifs » ; la positivité du test sera donc un élément important du diagnostic. Par contre, pour une maladie rare, un test de dépistage systématique de toute une population aura l'inconvénient majeur de fournir beaucoup de faux positifs. Le nombre des personnes non malades dont le test est positif et, pour la société, le prix des tests de dépistage systématique, sont des problèmes éthiques et économiques liés à la mise en place de tels tests.

Autres remarques

- Les probabilités conditionnelles $P_T(M)$ et $P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right)$ varient en sens contraires.
- $P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right)$ est toujours proche de 1, ce qui est rassurant.
- La probabilité qu'une personne soit malade alors que le test est négatif, $P_{\overline{T}}(M)$, est donc toujours proche de 0.

Exercice III ❶ Le mathou n'ayant aucune mémoire, les essais successifs sont modélisés par la succession d'épreuves répétées et indépendantes, et pour chacune d'elles on utilise la loi équirépartie. On a donc :

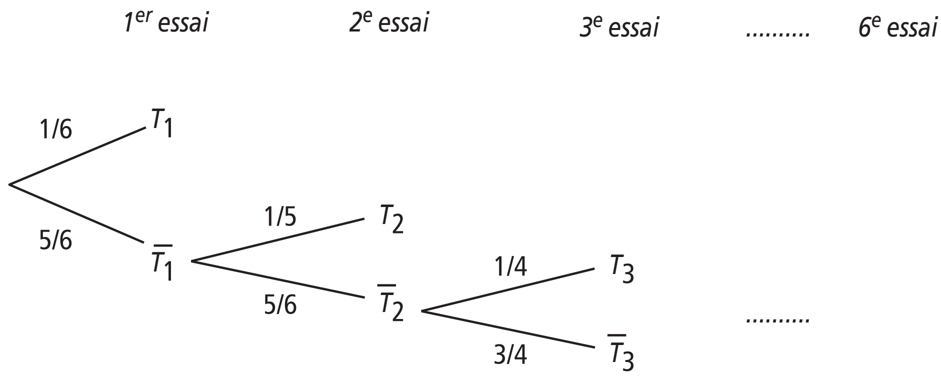
a) $P(X=1)=\dfrac{1}{6}$, b) $P(X=2)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{36}$,

c) $P(X=6)=\left(\dfrac{5}{6}\right)^5\times\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{5^5}{6^6}\approx 0{,}067.$

d) $P(X\le 6)=1-P(X>6)=1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^6\approx 0{,}665$ car $P(X>6)$ est la probabilité que le mathou pousse une mauvaise porte à chacun des six essais.

❷ On note T_n l'événement « le mathou trouve le fromage au nième essai ».

Comme le mathou a une mémoire parfaite, s'il ne trouve pas le fromage le nombre de portes entre lesquelles il va choisir diminue de 1 à chaque essai. On obtient l'arbre suivant :



Les valeurs prises par la variable aléatoire Y sont donc 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Avant même de trouver la loi de Y, on peut donc savoir que $P(Y \leq 6) = 1$, en effet le mathou fait six essais au maximum.

On trouve $P(Y=1) = \dfrac{1}{6}$, $P(Y=2) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{6}$, $P(Y=2) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{6}$, …,

$$P(Y=6) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{6}.$$

La loi de la variable aléatoire Y est donc la loi équirépartie.

❸ Pour tester l'hypothèse selon laquelle les mathoux ont une mémoire, on peut faire faire un très grand nombre d'essais à plusieurs mathoux et calculer la fréquence de découverte du fromage en au plus six essais. Si cette fréquence est très proche de 0,67, on en déduira que les mathoux n'ont aucune mémoire, si cette fréquence est proche de 1, on en déduira que ces animaux ont une excellente mémoire.

Exercice IV

❶ **a)** Chaque tirage se faisant au hasard, on utilise dans chaque cas la loi équirépartie. D'après l'énoncé, $P(E_1) = \dfrac{2}{5}$, $P_{E_1}(E_2) = \dfrac{3}{5}$ et $P_{\overline{E_1}}(E_2) = \dfrac{2}{5}$. D'après la loi des probabilités totales, on a

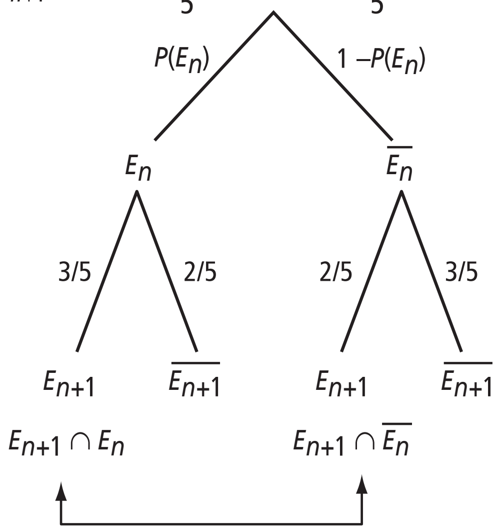
$$P(E_2) = P(E_1) \times P_{E_1}(E_2) + P\left(\overline{E_1}\right) \times P_{\overline{E_1}}(E_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}.$$

b) L'arbre pondéré (ou la formule des probabilités totales) donne :

$$P(E_{n+1}) = P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P\left(\overline{E_n}\right) \times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}).$$

D'après les conditions des tirages $P_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{3}{5}$ et $P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = \frac{2}{5}$, donc

$P(E_{n+1}) = P(E_n) \times \frac{3}{5} + (1 - P(E_n)) \times \frac{2}{5}$, soit $P(E_{n+1}) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times P(E_n)$.



❷ a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n \leq \frac{1}{2}$.

▶ Initialisation : au rang $n = 1$ on a bien $u_1 \leq \frac{1}{2}$.

▶ Hérédité

On suppose que, pour un entier k supérieur à 1, $u_k \leq \frac{1}{2}$. On a donc $\frac{1}{5}u_k + \frac{2}{5} \leq \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$, d'où $u_{k+1} \leq \frac{1}{2}$. La proposition est bien héréditaire.

▶ La proposition est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire, donc pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n \leq \frac{1}{2}$. La suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

b) Pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} - u_n = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}u_n = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2} - u_n\right)$.

D'après la question précédente, la parenthèse est toujours positive donc la différence $u_{n+1} - u_n$ est toujours positive, donc la suite (u_n) est croissante.

c) La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente, notons ℓ sa limite. Comme on a $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}$ pour tout $n \geq 1$, on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_{n+1}) = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}\ell + \frac{2}{5}$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_{n+1}) = \lim\limits_{n \to +\infty}(u_n) = \ell$, donc ℓ est solution de l'équation $\ell = \frac{1}{5}\ell + \frac{2}{5}$, d'où $\boxed{\ell = \frac{1}{2}}$.

❸ Évolution des probabilités $P(E_n)$

a) Comme $u_1 = P(E_1)$ et que la suite (u_n) est définie par la même relation de récurrence que la suite $\left(P(E_n)\right)$, il s'agit de la même suite. Les probabilités $P(E_n)$ forment donc une suite croissante et convergente vers $\frac{1}{2}$.

b) Pour déterminer quelles valeurs de l'entier n on a $0{,}499\,99 \le P(E_n) \le 0{,}5$, on peut calculer les premiers termes de la suite à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice. La première valeur qui convient est $n = 8$ et, comme la suite est croissante et majorée par 0,5, on a $0{,}499\,99 \le P(E_n) \le 0{,}5$ pour tout $n \ge 8$.

Remarque

- On aurait pu montrer que, pour tout entier $n \ge 1$, on a $u_n < \frac{1}{2}$ ce qui prouve que, contrairement à l'impression donnée par les valeurs approchées données par le tableur, la limite ℓ n'est jamais atteinte.
- La suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique (voir Séquence 1).
- Le jour de l'examen on peut vous poser une question analogue. Il est donc vivement conseillé d'avoir un programme qui vous permet de calculer les termes successifs d'une suite.

Exercice V

❶ On rencontre une personne par hasard, on utilise donc la loi équirépartie sur l'univers formé par l'ensemble des dates d'une année. L'événement A « avoir la même date d'anniversaire que vous » contient une seule éventualité et donc $P(A) = \frac{1}{365} \approx 2{,}7 \times 10^{-3}$.

❷ Si les personnes sont plus nombreuses que les jours de l'année, il y a nécessairement plusieurs personnes dont les dates d'anniversaire coïncident

Point historique

Cette propriété que l'on utilise ici et que l'on peut énoncer ainsi « si n+1 chaussettes sont répartis entre n tiroirs, alors il y a un tiroir qui contient au moins deux chaussettes » est le princuipe des tiroirs ou principe de Dirichlet. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet est un mathématicien allemand né en 1805 et mort en 1859.

En tenant compte du 29 février, on trouve qu'à partir de 367 personnes on est sûr qu'il y a plusieurs anniversaires à la même date, la probabilité qu'au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour est donc égale à 1

❸ Nommons ces 30 enfants $e_1, e_2, \ldots, e_{30}$.

Soit $D_{1\text{et}2}$ l'événement « les enfants e_1 et e_2 ont des dates d'anniversaire différentes ». On a $P(D_{1\text{et}2}) = 1 - P(A) = \frac{364}{365} \approx 0{,}997$ car 2011 n'est pas une année bissextile.

Soit $D_{1et2et3}$ l'événement « les enfants e_1, e_2 et e_3 ont des dates d'anniversaire différentes ».

D'où $P\left(D_{1et2et3}\right)=P\left(D_{1et2}\right)\times\frac{363}{365}$ car la probabilité que la date d'anniversaire du troisième enfant soit différentes des deux premières sachant que les deux premières sont différentes est égale à $\frac{363}{365}$ car les deux dates d'anniversaire des deux premiers enfants sont exclues.

On a donc $P\left(D_{1et2et3}\right)=\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}$.

On obtient de même que $P\left(D_{1et2et3et4}\right)=\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}$.

En appelant D l'événement « les anniversaires des 30 enfants sont tous à des dates différentes » on obtient $P\left(D\right)=\overbrace{\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}\times\ldots\times\frac{336}{365}}^{30-1=29 \text{ fractions}}$.

$P(C)$

L'événement C « deux anniversaires au moins coïncident » est l'événement contraire de l'événement D donc $P(C)=1-P\left(D\right)=1-\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}\times\ldots\times\frac{336}{365}$.

❹ Pour calculer cette probabilité et déterminer l'entier N, on peut utiliser les algorithmes suivants :

Calcul de $P(C)$	Détermination de N
Variables k : compteur de boucles ; n : un entier naturel ; p : un nombre réel compris entre 0 et 1. Initialisation $p=1$ $n=$ nombre de personnes du groupe Traitement Pour k de 1 à $n-1$ mettre $p\times\frac{365-k}{365}$ dans p Sortie Afficher $1-p$	Variables k : compteur de boucles ; N : un entier naturel ; p : un nombre réel compris entre 0 et 1. Initialisation $p=1$ Traitement Pour k de 1 à 367 Tant que $p<0,5$ mettre $p\times\frac{365-k}{365}$ dans p $N=k$ Sortie Afficher N

On peut utiliser un tableur de la façon suivante.

On a rempli les colonnes A, B et C ; dans la cellule D2, on a recopié C2, c'est-à-dire la fraction $\frac{364}{365} \approx 0{,}997$, dans la cellule D3 on a rentré la formule D2*C3 c'est-à-dire $\frac{364}{365} \times \frac{363}{365}$, et on l'a recopiée ce qui permet d'obtenir $\frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \ldots \times \frac{336}{365}$ dans la cellule D30. La colonne E donne donc les probabilités de rencontrer au moins une coïncidence de date d'anniversaire en fonction du nombre de personnes du groupe.

D3 f_x =D2*C3

anniversaire

	A	B	C	D	E
1	k = nombre de personnes	365 - k	(365 - k)/365	*P(D)* =	*P(C)* = 1 - *P(D)*
2	2	364	0,997260274	0,99726027	0,002739726
3	3	363	0,994520548	0,99179583	0,008204166
4	4	362	0,991780822	0,98364409	0,016355912
22	22	344	0,942465753	0,52430469	0,475695308
23	23	343	0,939726027	0,49270277	0,507297234
24	24	342	0,936986301	0,46165574	0,538344258
25	25	341	0,934246575	0,4313003	0,568699704
26	26	340	0,931506849	0,40175918	0,59824082
27	27	339	0,928767123	0,37314072	0,626859282
28	28	338	0,926027397	0,34553853	0,654461472
29	29	337	0,923287671	0,31903146	0,680968537
30	30	336	0,920547945	0,29368376	0,706316243

C'est donc à partir de $N = 23$ que la probabilité que deux anniversaires coïncident dans un groupe de N personnes est supérieure à 0,5.

Exercice VI

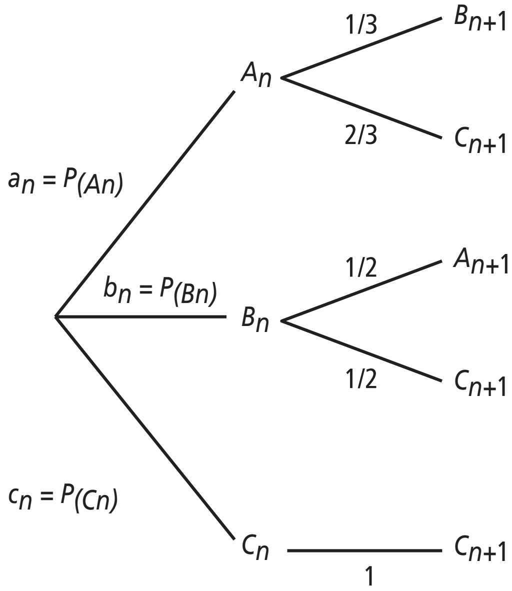
❶ L'énoncé donne les égalités $a_0 = 1,\ b_0 = c_0 = 0,$ et les probabilités conditionnelles :

$$P_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{3},\ P_{A_n}(C_{n+1}) = \frac{2}{3},\ P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2},\ P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2},\ P_{C_n}(C_{n+1}) = 1.$$

Ces probabilités peuvent être indiquées sur une partie d'un arbre pondéré :

À l'instant 0, la puce est en A, donc à l'instant 1, elle est soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$, soit en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$. Donc $a_1 = 0$, $b_1 = \frac{1}{3}$ et $c_1 = \frac{2}{3}$.

On peut utiliser l'arbre pour $n = 1$.



On a $P(A_2) = P(A_2 \cap B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A_2)$, soit $P(A_2) = b_1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$, $a_2 = \dfrac{1}{6}$.

On a $P(B_2) = b_2 = 0$ car, à l'instant 1, la puce n'est pas en A puisque $P(A_1) = a_1 = 0$.

On a $P(C_2) = P(C_2 \cap B_1) + P(C_2 \cap C_1)$, d'où

$$P(C_2) = P(B_1)P_{B_1}(C_2) + P(C_1)P_{C_1}(C_2) = b_1 \times \frac{1}{2} + c_1 \times 1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3}, \text{ soit } c_2 = \frac{5}{6}.$$

De même pour l'instant 3, on utilise l'arbre pondéré avec $n = 2$.

$$a_3 = P(A_3) = P(B_2)P_{B_2}(A_3) = b_2 \times \frac{1}{2} = 0 \ ;$$

$$b_3 = P(B_3) = P(A_2)P_{A_2}(B_3) = a_2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18} \ ;$$

$$c_3 = P(C_3) = P(A_2)P_{A_2}(C_3) + P(B_2)P_{B_2}(C_3) + P(C_2)P_{C_2}(C_3) = a_2 \times \frac{2}{3} + b_2 \times \frac{1}{2} + c_2 \times 1$$
$$= \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times 1 = \frac{17}{18}.$$

❷ **a)** Les événements A_n, B_n et C_n forment une partition de l'univers car ils sont disjoints et leur réunion est égale à l'univers, donc $P(\Omega) = P(A_n) + P(B_n) + P(C_n)$ soit $1 = a_n + b_n + c_n$.

Pour montrer que, pour tout entier naturel n, $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2} b_n \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{3} a_n \end{cases}$ on raisonne comme pour l'instant 3 :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2} b_n \text{ et } b_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{3} a_n.$$

b) D'après le résultat précédent, pour tout entier n, $a_{n+2}=\frac{1}{2}b_{n+1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}a_n=\frac{1}{6}a_n$.

c) Démontrons par récurrence la proposition « pour tout entier naturel p, $a_{2p}=\left(\frac{1}{6}\right)^p$ et $a_{2p+1}=0$ ».

▶ *Initialisation* : pour $p=0$, on a bien $a_0=1=\left(\frac{1}{6}\right)^0$ et $a_1=0$.

▶ *Hérédité* : on suppose que, pour un entier naturel k quelconque, on a $a_{2k}=\left(\frac{1}{6}\right)^k$ et $a_{2k+1}=0$. D'après le résultat de la question b) on a $a_{2k+2}=\frac{1}{6}a_{2k}=\left(\frac{1}{6}\right)^{k+1}$ et $a_{2k+3}=\frac{1}{6}a_{2k+1}=\frac{1}{6}\times 0=0$. La proposition est bien héréditaire.

▶ *Conclusion* : pour tout entier naturel p, $a_{2p}=\left(\frac{1}{6}\right)^p$ et $a_{2p+1}=0$.

❸ On peut dire brièvement que les termes de rang pair sont égaux aux termes d'une suite géométrique qui converge vers 0 et, les termes de rang impair étant tous nuls, on conclut que la suite (a_n) converge vers 0.

Si on souhaite approfondir les explications on utilise la définition.

Tout intervalle $]-r\,;r[$ où r est un réel strictement positif contient tous les termes $\left(\frac{1}{6}\right)^p$ à partir d'un certain rang p_0 car il s'agit des termes d'une suite géométrique de raison q telle que $-1<q<1$. Comme $]-r\,;r[$ contient tous les termes a_{2p+1} qui sont nuls, on peut dire que $]-r\,;r[$ contient tous les termes a_n à partir de $n_0=2p_0$: la suite (a_n) converge donc vers 0.

On montrerait de même que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=0$.

On sait que $1=a_n+b_n+c_n$, donc $c_n=1-a_n-b_n$ et, d'après les opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=1$. On pouvait conjecturer ce résultat car, dès que la puce est en C, elle y reste.

■

Corrigé de la séquence 4

Corrigé des activités du chapitre 2

■ **Activité 1** **La désintégration radioactive**

On suppose qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=1$ et $f'=f$ (c'est-à-dire $f'(t)=f(t)$ pour tout réel t).

❶ La dérivée d'une fonction composée permet d'avoir l'idée d'une réponse. En utilisant la fonction f, on définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ en posant pour tout nombre réel t : $g(t)=f(3t)$. On a bien $g'(t)=3f(3t)=3g(t)$ et $g(0)=f(3\times 0)=f(0)=1$.

❷ Il suffit de changer la valeur pour $t=0$, et, pour cela, il suffit de multiplier par 0,2.

On définit la fonction h sur $\mathbb{R}$ en posant pour tout nombre réel t : $h(t)=0{,}2g(t)$, soit $h(t)=0{,}2f(3t)$.

On a bien $h'(t)=0{,}2\times 3f(3t)=3h(t)$ et $h(0)=0{,}2f(3\times 0)=0{,}2\times 1=0{,}2$.

❸ En supposant que le nombre initial de noyaux est égal à 10^6 et que $\lambda=-0{,}003$ on chercher une fonction N, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $N'=-0{,}003N$ et $N(0)=10^6$.

Il suffit de faire exactement l'analogue de ce qui a été fait pour la fonction h et on pose :

pour tout nombre réel t, $N(t)=10^6 f(-0{,}003t)$.

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 2

Exercice 1 On utilise les règles de calcul sur les exposants des exponentielles : $e^{-3}\times e^{0,15}\times\dfrac{e^{2,3}}{e}=e^{-3+0,15+2,3-1}=e^{-1,55}$.

Exercice 2 Pour tout réel x, on a :

a) $e^{3x+1}\left(e^{\frac{-x}{4}}\right)^3=e^{3x+1}\times e^{\frac{-3x}{4}}=e^{\frac{9}{4}x+1}$.

b) $\dfrac{e^{x^2}\sqrt{e}}{e^{1,5}}=e^{x^2}\times e^{\frac{1}{2}}\times e^{-1,5}=e^{x^2-1}=\dfrac{e^{x^2}}{e}$.

c) $\dfrac{e^{5x}-e^{x}}{e^{x}}=\left(e^{5x}-e^{x}\right)e^{-x}=e^{5x-x}-e^{x-x}=e^{4x}-1$.

Exercice 3 Pour montrer chacune de ces égalités, on transforme une expression pour obtenir l'autre.

Pour tout nombre réel x, on a :

❶ $\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\dfrac{e^{x}\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{e^{x}\left(e^{x}+e^{-x}\right)}=\dfrac{e^{2x}-e^{0}}{e^{2x}+e^{0}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

❷

$$\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2-\left(e^{x}-e^{-x}\right)^2=\left(e^{x}\right)^2+2e^{x}e^{-x}+\left(e^{-x}\right)^2-\left(\left(e^{x}\right)^2-2e^{x}e^{-x}+\left(e^{-x}\right)^2\right)$$

$$=4e^{x-x}=4e^{0}=4.$$

Exercice 4 ❶ Vrai. En effet, pour tous nombres réels a et b,

$\sqrt{e^{2a}\times e^{2b}}=\sqrt{e^{2(a+b)}}=e^{\frac{2(a+b)}{2}}=e^{a+b}$.

❷ Faux. En effet, le cas $a=b=0$ est un contre-exemple : $3e^{a+b}=3e^{0}=3$ et $e^{3a}\times e^{3b}=e^{0}\times e^{0}=1\neq 3$.

❸ Faux. En effet, le cas $a=b=0$ est encore un contre-exemple : $e^{0}+e^{0}=2$ et $e^{0+0}=e^{0}=1$.

❹ Vrai. Il suffit de trouver deux nombres réels a et b pour lesquels l'inégalité est vraie : pour $a=b=1$ on a $e^{1}+e^{1}=2e\approx 5,43$ et $e^{1+1}=e^{2}\approx 7,38$ donc $e^{1}+e^{1}<e^{1+1}$.

Corrigé de l'activité du chapitre 3

Étude de la fonction exponentielle

■ Activité 2 Variation et comparaison

❶ La courbe de la fonction exponentielle donnée par une calculatrice permet de conjecturer que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont respectivement $+\infty$ et 0.

❷ Comparaison avec les fonctions puissances.

Les courbes et les tables de valeurs permettent de conjecturer que :

- pour tout x réel positif, on a $\exp(x) > x^2$,
- pour tout $x \geq 5$, on a $\exp(x) > x^3$,
- pour $n = 10$, et pour tout $x \geq 36$, on a $\exp(x) > x^{10}$.

Il semble donc que la fonction exponentielle permet de dépasser toutes les puissances. C'est effectivement le cas et c'est pourquoi on parle souvent de « croissance exponentielle » pour désigner une croissance extrême.

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 3

Exercice 5

❶

$$\begin{aligned} e^{2x-3} - e^{x+1} = 0 &\Leftrightarrow e^{2x-3} = e^{x+1} \\ &\Leftrightarrow 2x-3 = x+1 \text{ (la fonction exponentielle} \\ &\qquad\qquad \text{étant strictement croissante sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $S = \{4\}$.

On rappelle qu'il est conseillé de donner au moins une fois dans une copie la justification « la fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ».

Nous ne répèterons pas cette justification dans ce qui suit.

❷ On a :

$$e^{2x} + e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + X - 2 = 0 \\ X = e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \text{ ou } X = -2 \\ X = e^x \end{cases} \Leftrightarrow e^x = 1 \text{ ou } e^x = -2.$$

L'équation $e^x = -2$ n'a pas de solution car la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives. D'où : $e^{2x} + e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$.

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $S = \{0\}$.

❸ On a :

$$e^{2(x+1)} - (1+e^2)e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^2 e^{2x} - (1+e^2)e^x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^2 X^2 - (1+e^2)X + 1 = 0 \\ X = e^x. \end{cases}$$

Résolvons l'équation du second degré (E) : $e^2 X^2 - (1+e^2)X + 1 = 0$

On a : $\Delta = (1+e^2)^2 - 4 \times e^2 = 1 + 2e^2 + e^4 - 4e^2 = 1 - 2e^2 + e^4 = (1-e^2)^2$.

Alors (E) admet 2 solutions réelles :

$$x_1 = \frac{1+e^2-(1-e^2)}{2e^2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{1+e^2+(1-e^2)}{2e^2} = \frac{1}{e^2} = e^{-2}.$$

On a donc : $e^{2(x+1)} - (1+e^2)e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \text{ ou } e^x = e^{-2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2$.

L'ensemble des solutions de cette équation est donc : $\mathcal{S} = \{0\,;\,-2\}$.

❹ On a : $e^{x^2+8} = \left(e^x\right)^2 \Leftrightarrow e^{x^2+8} = e^{2x} \Leftrightarrow x^2 + 8 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 8 = 0$.
Le discriminant de cette dernière équation est $(-2)^2 - 4 \times 8 = -28$, cette équation n'admet donc aucune solution dans $\mathbb{R}$ et donc il en est de même pour l'équation initiale, $S = \varnothing$.

❺ On a :

$$e^{x^2} > e^{3x} \Leftrightarrow x^2 > 3x \text{ (la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) > 0.$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $\mathcal{S} =]-\infty\,;0[\cup]3\,;+\infty[$.

❻ On a : $e^{2x} + e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + X - 2 > 0 \\ X = e^x \end{cases}$. Le trinôme du second degré $X^2 + X - 2$ a été étudié précédemment, il est positif à l'extérieur des racines 1 et -2 (le coefficient de X^2 vaut 1 : il est positif). On en déduit : $e^{2x} + e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x \in]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[\Leftrightarrow e^x > 1$ (la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives).

On a donc : $e^{2x} + e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$. L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc : $\mathcal{S} =]0\,;+\infty[$.

❼ On a : $\dfrac{2}{e^x+1}<e^x \Leftrightarrow 0<e^x-\dfrac{2}{e^x+1} \Leftrightarrow 0<\dfrac{e^{2x}+e^x-2}{e^x+1} \Leftrightarrow e^{2x}+e^x-2>0$

(car e^x+1 est toujours strictement positif).

Donc, d'après l'exercice précédent, on a $\dfrac{2}{e^x+1}<e^x \Leftrightarrow e^{2x}+e^x-2>0 \Leftrightarrow x>0.$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc : $\mathscr{S}=\left]0\,;+\infty\right[$.

Exercice 6 Dans cet exercice, on utilise l'équivalence : pour tout réel *k* strictement positif et pour tout réel *x*, $e^x=k \Leftrightarrow x=\ln k$.

❶ On a : $e^{3x+1}=5 \Leftrightarrow 3x+1=\ln 5 \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln 5-1}{3}.$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc : $\mathscr{S}=\left\{\dfrac{\ln 5-1}{3}\right\}$.

❷

$$e^{2x}-e^x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X^2-X-2=0 \\ X=e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=2 \text{ ou } X=-1 \\ X=e^x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow e^x=2 \text{ ou } e^x=-1.$$

La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives donc $e^{2x}-e^x-2=0 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2.$ L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc : $\mathscr{S}=\{\ln 2\}$.

❸ On a : $e^{x-1}>3 \Leftrightarrow e^{x-1}>e^{\ln 3}$ car, pour tout *k* strictement positif $e^{\ln k}=k$.

D'où $e^{x-1}>3 \Leftrightarrow e^{x-1}>e^{\ln 3} \Leftrightarrow x-1>\ln 3 \Leftrightarrow x>1+\ln 3.$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc : $\mathscr{S}=\left]1+\ln 3\,;+\infty\right[$.

❹ la fonction exponentielle étant à valeurs strictement positives, l'inéquation $e^{x-1}>-3$ est vérifiée pour tout réel *x*, l'ensemble des solutions de cette inéquation est donc : $\mathscr{S}=\mathbb{R}$.

Exercice 7 ❶ La fonction f_1 est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f_1'(x)=2xe^x+x^2e^x$.

❷ La fonction f_2 est une fonction composée de la forme e^u où la fonction *u* est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f_2 est dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f'_2(x)=(-2x+4)e^{-x^2+4x-1}. \qquad \left(\left(e^u\right)'=u'e^u\right).$$

❸ La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives, donc la fonction f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f_3(x)=\sqrt{1+e^{-x}} \text{ d'où } f_3(x)=-e^{-x}\times\frac{1}{2\sqrt{1+e^{-x}}}. \qquad \left(\left(\sqrt{u}\right)'=u'\times\frac{1}{2\sqrt{u}}\right).$$

❹ La fonction f_4 est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ le dénominateur ne s'annulant pas, donc f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f_4'(x) = \frac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = \frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}. \quad \left(\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v-uv'}{v^2}\right).$$

❺ La fonction f_5 est une fonction composée de la forme e^u où la fonction u est la fonction inverse, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc f_5 est dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et on a

$$f_5'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}. \qquad \left(\left(e^u\right)' = u'e^u\right).$$

Exercice 8 ❶ Il s'agit d'une forme indéterminée. On peut factoriser par le terme prépondérant.

On a : $e^x - x = e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)$. Comme on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0$ et que la limite de la parenthèse est égale à 1. On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, et, d'après les règles sur les opérations, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x - x\right) = +\infty$.

❷ On transforme l'expression : $e^{2x} - e^{-x} = e^x \times e^x - \frac{1}{e^x}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x \times e^x\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} = +\infty$ (car la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives).

D'après les règles sur les opérations, on peut conclure que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x} - e^{-x}\right) = -\infty$.

❸ En $-\infty$, le numérateur tend vers $-\infty$ et le dénominateur tend vers 0, il ne s'agit pas d'une forme indéterminée. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x} = -\infty$.

On peut aussi utiliser un produit en écrivant $\frac{x}{e^x} = x \times \frac{1}{e^x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} = +\infty$ (voir l'exercice précédent), la limite du produit est $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x \times \frac{1}{e^x}\right) = -\infty$.

❹ Il s'agit d'une forme indéterminée, on met en facteur le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur.

$$\frac{e^x-1}{x+3}=\frac{e^x}{x}\times\frac{1-\dfrac{1}{e^x}}{1+\dfrac{3}{x}}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^X=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-\dfrac{1}{e^x}}{1+\dfrac{3}{x}}\right)=1.$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x-1}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}\times\dfrac{1-\dfrac{1}{e^x}}{1+\dfrac{3}{x}}\right)=+\infty.$

❺ Il s'agit d'un produit dont les deux facteurs tendent vers $+\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)e^x=+\infty.$$

❻ Il s'agit d'une forme indéterminée. En développant, on peut utiliser les limites du cours : $(x+1)e^x=xe^x+e^x$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ on conclut :

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^x=0.$$

Exercice 9 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^x$.

▶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ car il s'agit d'un produit dont les deux facteurs tendent vers $+\infty$.

▶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, c'est un résultat du cours.

▶ La fonction f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$. la fonction dérivée f' est donc du signe de $1+x$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘		↗	$+\infty$

Exercice 10 Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I=\left[0\,;30\right]$ par : $f(t)=2500\times e^{-0,513t}$.

Partie A ❶ La fonction f est une fonction composée de la forme e^{u} et a les mêmes variations que la fonction u. Ici u est une fonction affine où le coefficient de la variable est négatif, donc la fonction f est décroissante sur $I=\left[0\,;30\right]$.

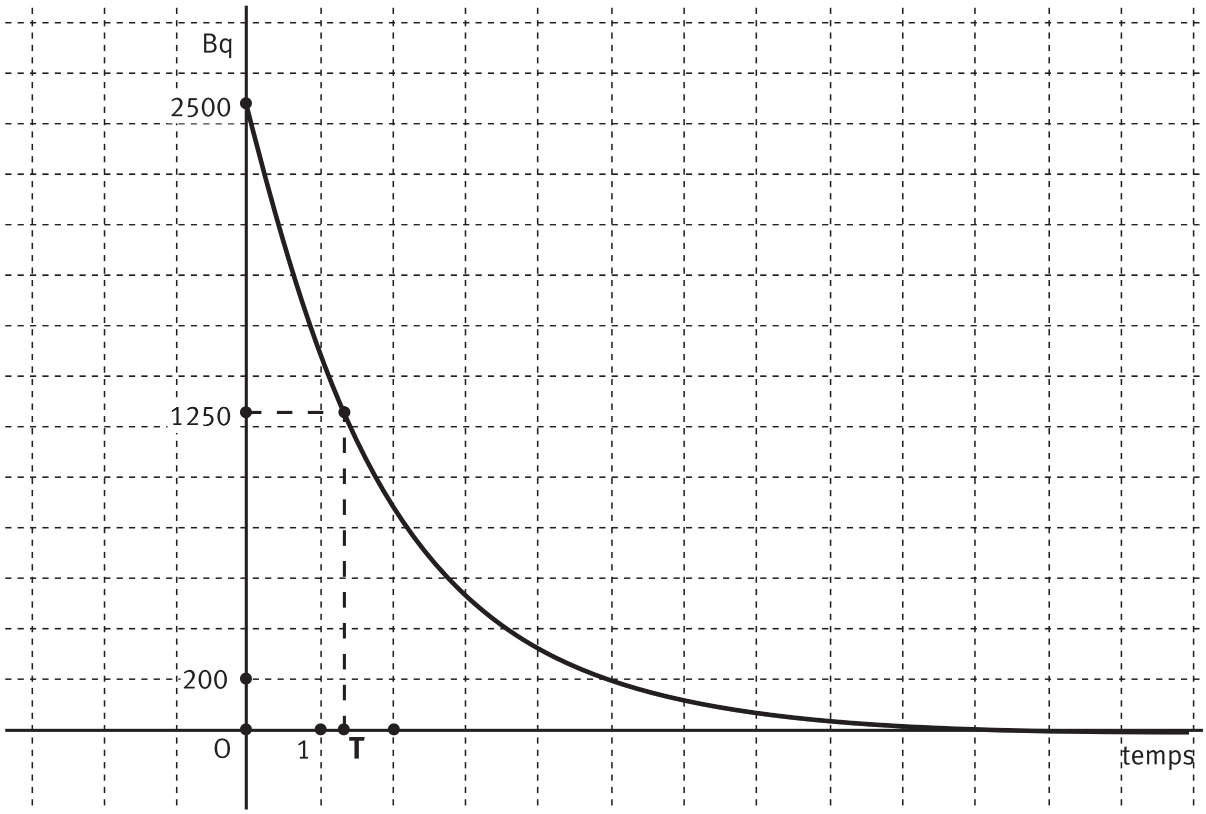
❷ Voir ci-après.

Partie B ❶ $f(0)=2500\times e^{-0,513\times 0}=2500$ Bq.

❷ $f(18)=2500\times e^{-0,513\times 18}=2500\times e^{-9,234}\approx 0,24$ Bq.

❸ La demi-vie, notée T, d'un radionucléide est le temps nécessaire au bout duquel son activité a diminué de moitié, donc ici on cherche le temps T pour lequel l'activité du radio nucléide est égale à 1250 Bq.

a)



D'après le graphique, on trouve $T\approx 1,3$ h.

b) Par le calcul la période T vérifie l'équation $f(T)=\dfrac{f(0)}{2}$ soit $2500\times e^{-0,513T}=1250$ qui équivaut à $e^{-0,513T}=0,5$ ou encore $e^{0,513T}=2$.

Et enfin $0,513T=\ln 2$ soit $T=\dfrac{\ln 2}{0,513}\approx 1,351\text{ h}\approx 1\text{ h }21\text{ min}$.

Corrigé des exercices de synthèse du chapitre 4

Exercice I Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

En $+\infty$ il s'agit d'une forme indéterminée. On peut transformer l'expression de $f(x)$: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{e^x\left(1-e^{-x}\right)}{e^x\left(1+e^{-x}\right)}=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$, on conclut que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=1$.

Ces limites montrent que les droites d'équation $y=1$ et $y=-1$ sont asymptotes à la courbe représentative de f.

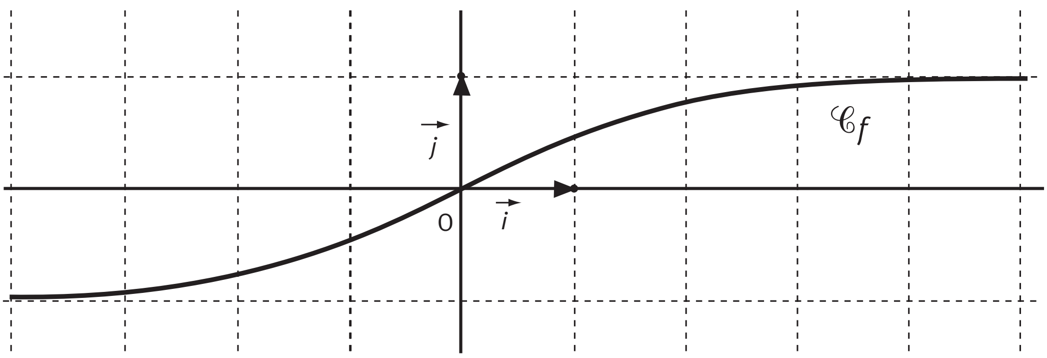
❷ la fonction f est égale au quotient de deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a :

$$f'(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}.$$

La fonction exponentielle étant à valeurs strictement positives, il en est de même pour la fonction dérivée f' et donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

❸

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1 ↗	1



Exercice II La fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=8{,}25\ t\ \mathrm{e}^{-t}$.

Partie A

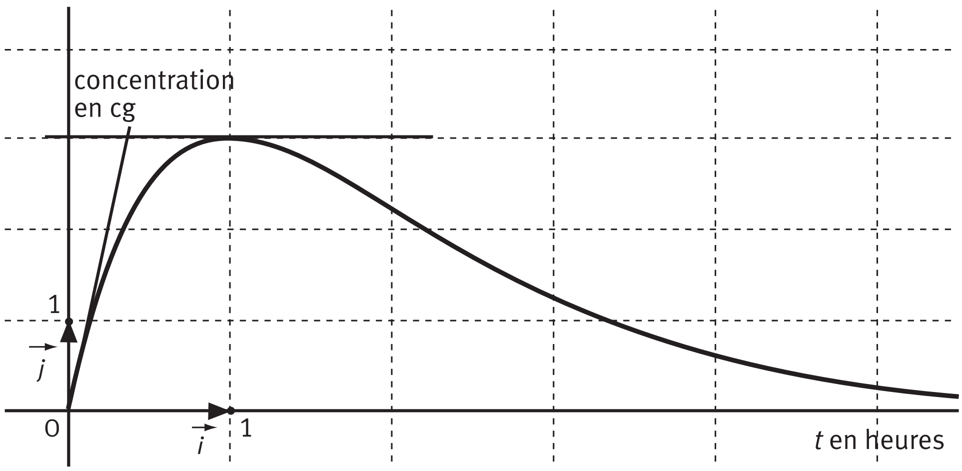
❶ Comme $f(t)=8{,}25\dfrac{t}{\mathrm{e}^t}$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}=+\infty$, on obtient $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$ ce qui montre que l'axe des abscisses est asymptote en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

❷ La fonction f est le produit de deux fonctions dérivables sur $[0\,;+\infty[$ donc f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout réel positif t, on a : $f'(t)=8{,}25\mathrm{e}^{-t}-8{,}25t\mathrm{e}^{-t}=8{,}25\mathrm{e}^{-t}(1-t)$. Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, $f'(t)$ est du signe de $1-t$ d'où le tableau de variation :

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗	$8{,}25\mathrm{e}^{-1}$	↘	0

❸ La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y=f'(0)(t-0)+f(0)$ soit $y=8{,}25t$.

Comme $f'(1)=0$ la tangente au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



Partie B ❶ Comme 2 h 30 min correspond à $t = 2{,}5$ on obtient : $f(2{,}5) = 8{,}25 \times 2{,}5 \times e^{-2{,}5}$ d'où $f(2{,}5) \approx 1{,}693$ cg.

❷ Une résolution graphique étant trop imprécise, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence de deux solutions de l'équation $f(t) = 1$ et en déduire des encadrements de ces solutions.

▶ Sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0\,;1]$ la fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables, donc la fonction f est dérivable sur I, donc continue sur I. Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = 8{,}25e^{-1} \approx 3{,}035$, le nombre 1 appartient à l'intervalle $[f(0)\,; f(1)]$ et l'équation $f(t) = 1$ admet au moins une solution dans l'intervalle I. Comme f est strictement croissante sur I, cette solution est unique, on la note t_1.

On a $f(0{,}13) \approx 0{,}941$ et $f(0{,}14) \approx 1{,}004$ donc $f(0{,}13) < f(t_1) < f(0{,}14)$ et donc $0{,}13 < t_1 < 0{,}14$ puisque f est strictement croissante sur I.

▶ De même, sur l'intervalle $\mathrm{J} = [1\,;+\infty[$ la fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables, donc la fonction f est dérivable sur J, donc continue sur J. Comme $f(1) = 8{,}25e^{-1} \approx 3{,}035$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$ le nombre 1 appartient à l'intervalle des images $]0\,;\ f(1)]$ et l'équation $f(t) = 1$ admet au moins une solution dans l'intervalle J. Comme f est strictement décroissante sur J, cette solution est unique, on la note t_2.

On a $f(3{,}30) \approx 1{,}004$ et $f(3{,}31) \approx 0{,}997$ donc $f(3{,}31) < f(t_2) < f(3{,}30)$ et donc $3{,}30 < t_2 < 3{,}31$ puisque f est strictement décroissante sur *I*.

▶ La durée pendant laquelle le médicament est efficace est égale à l'amplitude de l'intervalle $[t_1\,;\ t_2]$.

Comme $0{,}13 < t_1 < 0{,}14 < 3{,}30 < t_2 < 3{,}31$

on obtient $3{,}30 - 0{,}14 < t_2 - t_1 < 3{,}31 - 0{,}13$ d'où $3{,}16 < t_2 - t_1 < 3{,}18$.

$3{,}16$ h $= 3$ h 9 min 36 s et $3{,}18$ h $= 3$ h 10 min 48 s on peut dire que le médicament est actif pendant 3 h 10 min à 1 min près.

Exercice III ❶ L'étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\ \mathrm{e}^x$ a été faite dans l'exercice 9.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

❶ On déduit du tableau de variations de f que :

Si $a < \dfrac{-1}{\mathrm{e}}$ alors l'équation $f(x)$ = n'admet aucune solution ;

Si $a = \dfrac{-1}{\mathrm{e}}$ alors l'équation $f(x)$ = a admet une unique solution : –1 ;

Si $\dfrac{-1}{\mathrm{e}} < a < 0$ alors l'équation $f(x)$ = a admet deux solutions : $(x_1 \in \left]-\infty ; -1\right[$ et $x_2 \in \left]-1 ; +\infty\right[)$;

Si $a = 0$ alors l'équation $f(x)$ = a admet une unique solution : 0 ;

Si $a > 0$ alors l'équation $f(x)$ = a admet une solution $x_0 \in \left]-1 ; +\infty\right[$ et même $x_0 \in \left]0 ; +\infty\right[$.

❸ Le réel $\dfrac{1}{n}$ est un nombre strictment positif alors, d'après ce qui précède, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution u_n et $u_n \in \left]0 ; +\infty\right[$.

❹ Le réel u_1 est solution de l'équation : $f(x) = 1$; u_1 est positif et de plus $f(1) = \mathrm{e}$ est strictement supérieur à 1. On en déduit $u_1 \in \left]0 ; 1\right[$. et on trouve par dichotomie ou balayage : $u_1 = 0{,}567$ à 10^{-3} près.

Le réel u_2 est solution de l'équation : $f(x) = \dfrac{1}{2}$; u_2 est positif et de plus $f(1) = \mathrm{e}$ est strictement supérieur à $\dfrac{1}{2}$. On en déduit $u_2 \in \left]0 ; 1\right[$ et on trouve par dichotomie ou balayage : $u_2 = 0{,}352$ à 10^{-3} près.

Le réel u_3 est solution de l'équation : $f(x)=3$; u_3 est positif et de plus $f(1)=\mathrm{e}$ est strictement supérieur à $\frac{1}{3}$. On en déduit $u_3 \in \left]0\,;1\right[$ et on trouve par dichotomie ou balayage : $u_3 = 0{,}257$ à 10^{-3} près.

❺ Tous les termes u_n sont dans l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ où la fonction f est strictement croissante. Pour comparer u_n et u_{n+1} on compare leurs images par la fonction f. Comme u_n est l'unique solution sur $\left]0\,;+\infty\right[$ de l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$, on a $f(u_n)=\frac{1}{n}$ et de même $f(u_{n+1})=\frac{1}{n+1}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'inégalité $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$ signifie que $f(u_{n+1})<f(u_n)$ et donc $u_{n+1}<u_n$ puisque la fonction f a conservé l'ordre.

La suite $\left(u_n\right)$ est donc décroissante.

Tous les termes u_n sont strictement positifs donc la suite est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

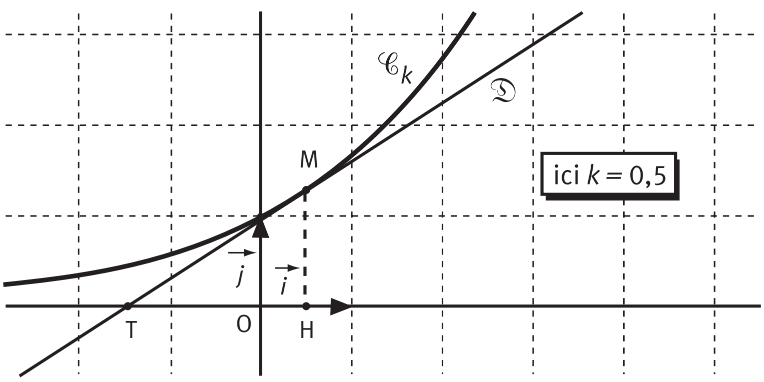
❻ On raisonne de même pour prouver que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n<\frac{1}{n}$.

En effet, $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$ et $1<\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$, donc $\frac{1}{n}<\frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$, soit $f\left(u_n\right)<f\left(\frac{1}{n}\right)$,

d'où $u_n<\frac{1}{n}$.

Comme $0<u_n<\frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, d'après le théorème des gendarmes, on conclut : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

Exercice IV



Soit M un point de la courbe $\mathscr{C}_k$ de coordonnées $\left(a\,;\mathrm{e}^{ka}\right)$ a étant un nombre réel quelconque.

Le point H a pour coordonnées $\left(a\,;0\right)$.

Comme la fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x on a $f_k\,'(x)=k\mathrm{e}^{kx}$, la droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y=k\mathrm{e}^{ka}(x-a)+\mathrm{e}^{ka}$. Le point T est le point de cette droite d'ordonnée 0 et dont l'abscisse x vérifie donc l'équation $0=k\mathrm{e}^{ka}(x-a)+\mathrm{e}^{ka}$, d'où $x-a=-\dfrac{\mathrm{e}^{ka}}{k\mathrm{e}^{ka}}$ et $\mathrm{T}\left(a-\dfrac{1}{k}\,;0\right)$.

Comme les deux points H et T sont sur l'axe des abscisses, on a $\mathrm{TH}=\left|x_{\mathrm{H}}-x_{\mathrm{T}}\right|=\left|a-\left(a-\dfrac{1}{k}\right)\right|=\left|\dfrac{1}{k}\right|=\dfrac{1}{|k|}$: cette distance est bien indépendante de a, l'abscisse du point M.

Remarque

on peut aussi utiliser

$$\mathrm{TH}=\sqrt{\left(x_{\mathrm{H}}-x_{\mathrm{T}}\right)^2+\left(y_{\mathrm{H}}-y_{\mathrm{T}}\right)^2}.$$

Exercice V

❶ On sait que $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$ (remarque : il n'est pas utile ici de distinguer $x>0$ et $x<0$) et que $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X=0$, donc en composant avec $X=-\dfrac{1}{x^2}$ on obtient $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X=0.$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ ce qui prouve que la fonction f est continue en 0.

❷ Pour étudier la dérivabilité en 0, on étudie la limite du taux d'accroissement en 0.

Pour tout h non nul, $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{h^2}}}{h}$. Quand h tend vers 0 c'est une forme indéterminée et, comme l'exposant tend vers $-\infty$ on cherche à faire apparaître $-\dfrac{1}{h^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{h^2}}$ pour utiliser la limite $\lim\limits_{X\to-\infty}X\mathrm{e}^X=0.$

On écrit : $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}=(-h)\left(-\dfrac{1}{h^2}e^{-\frac{1}{h^2}}\right).$

Comme $\lim\limits_{h\to 0}\left(-\dfrac{1}{h^2}\right)=-\infty$, en composant avec $X=-\dfrac{1}{h^2}$ on obtient $\lim\limits_{h\to 0}\left(-\dfrac{1}{h^2}e^{-\frac{1}{h^2}}\right)=\lim\limits_{X\to-\infty}\left(Xe^X\right)=0$ et, en multipliant par h qui tend aussi vers 0 : $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}\right)=0.$

La fonction f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

❸ On étudie les limites et les variations de f.

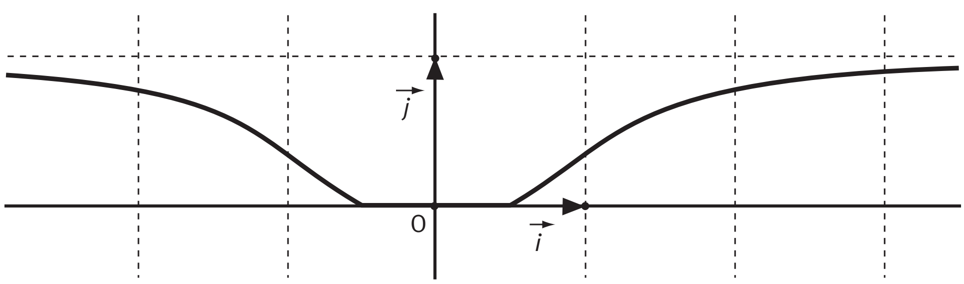
▶ En $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{X\to 0}e^X=e^0=1$ (car la fonction exponentielle est continue en 1), donc en composant avec $X=-\dfrac{1}{x^2}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{X\to 0}e^X=1.$

▶ En $-\infty$, on trouve de même $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{X\to 0}e^X=1.$

▶ Sur $\mathbb{R}^*$, $f(x)=e^{u(x)}$ où u est la fonction définie par $u(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $u'(x)=\dfrac{2}{x^3}$. Ainsi, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}=\dfrac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ qui a le même signe que x^3, c'est-à-dire que x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	1

❹ Les limites montrent que la droite d'équation $y=1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.



Remarque

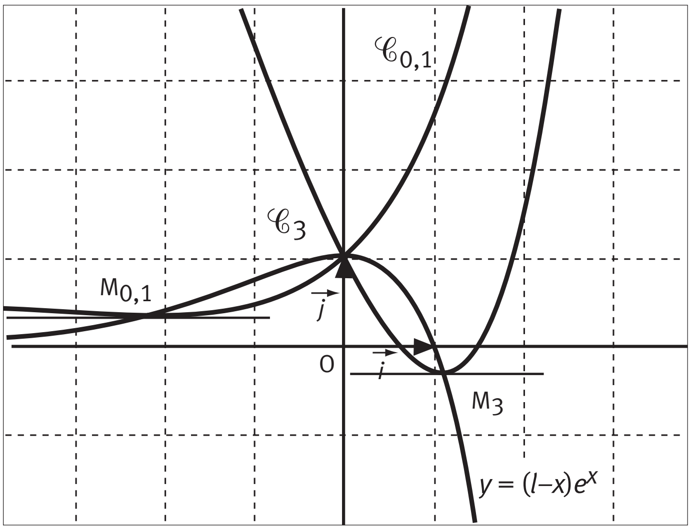
les valeurs de $f(x)$ semblent nulles sur l'intervalle $\left[-0,4\,;0,4\right]$, il n'en est rien, la courbe est seulement très écrasée aux alentours de l'origine et $f(x)$ est nul seulement pour $x=0$.

Exercice VI ❶ Soit a un nombre réel fixé, la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x)=\mathrm{e}^x-ax$ est la différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f_a est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_a'(x)=\mathrm{e}^x-a$.

Pour tout $a\leq 0$, la dérivée ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f_a ne peut pas avoir d'extremum.

Pour tout $a>0$, la fonction dérivée f_a' est strictement croissante comme la fonction exponentielle. On sait que $f_a'(x)=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x=a \Leftrightarrow x=\ln a$, donc $f_a'(x)$ est négatif quand $x\leq \ln a$ et positif quand $x\geq \ln a$. la fonction f_a est donc décroissante puis croissante, elle admet donc un minimum.

x	$-\infty$		$\ln a$		$+\infty$
$f_a'(x)=\mathrm{e}^x-a$		↗	0	↗	
Signe de $f_a'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_a(x)$		↘	$f_a(\ln a)$	↗	



❷ Soit $a>0$ et $M_a(x_M\,;y_M)$ le point de $\mathscr{C}_a$ d'ordonnée maximale. On a donc $f_a'(x_M)=0$, soit $e^{x_M}=a$.

Comme $y_M=f_a(x_M)$,

on a $y_M=e^{x_M}-ax_M$

ou encore $y_M=e^{x_M}-e^{x_M}x_M$

soit $y_M=(1-x_M)e^{x_M}$.

Les points M_a sont bien sur la courbe d'équation $y=(1-x)e^x$ qui est représentée sur le graphique.

Exercice VII ❶ La fonction C est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout réel t positif, on a

$C'(t)=8(-e^{-t}-(-2)e^{-2t})=8(-e^t+2)e^{-2t}$ (car $(e^u)'=u'e^u$).

Comme une exponentielle est toujours strictement positive, $C'(t)$ est du signe de $2-e^t$.

La fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $t\mapsto 2-e^t$ est décroissante car la fonction exponentielle est croissante. $2-e^t$ est nul lorsque $e^t=2$ c'est-à-dire quand $t=\ln 2$. Ainsi, $2-e^t$ est positif si $t<\ln 2$, nul pour $t=\ln 2$ et négatif si $t>\ln 2$.

Il en est de même pour $C'(t)$.

Pour déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$, on peut transformer l'écriture :

$$C(t)=8\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)=8\left(\frac{1}{e^t}-\left(\frac{1}{e^t}\right)^2\right).$$

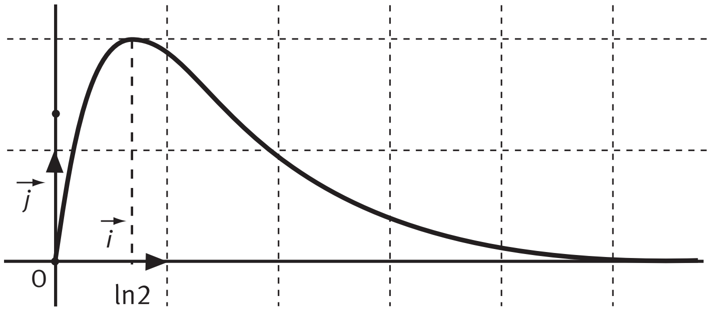
Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} e^t=+\infty$, on trouve $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)=0$.

Comme $e^{\ln 2}=2$, la valeur du maximum est égale à

$$C(\ln 2)=8\left(\frac{1}{e^{\ln 2}}-\left(\frac{1}{e^{\ln 2}}\right)^2\right)=8\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=2.$$

t	0		$\ln 2$		$+\infty$
$C'(t)$		$+$	0	$-$	
$C(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

La limite en $+\infty$ montre que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de la fonction $\mathscr{C}$.



❷ On cherche au bout de combien de temps la concentration retombe à la moitié de sa valeur maximale, on cherche donc à résoudre l'équation $C(t)=1$ dans l'intervalle $\left[\ln 2\,;+\infty\right[$.

$$C(t)=1 \Leftrightarrow 8\left(\frac{1}{e^t}-\left(\frac{1}{e^t}\right)^2\right)=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{8}{T}-\dfrac{8}{T^2}=1\\ T=e^t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}T^2-8T+8=0\\ T=e^t\end{cases}.$$

L'équation du second degré a deux racines, $4-2\sqrt{2}$ et $4+2\sqrt{2}$.

La résolution des deux équations $e^t=4-2\sqrt{2}$ et $e^t=4+2\sqrt{2}$ donne deux solutions $t_1=\ln\left(4-2\sqrt{2}\right)\approx 0{,}158$ et $t_2=\ln\left(4+2\sqrt{2}\right)\approx 1{,}921$.

Seule la solution t_2 convient et

$t_2 \approx 2\,\text{h}+0{,}2677\times 60\,\text{min}$

$t_2 \approx 2\,\text{h}+16\,\text{min}.$

❸ Pour déterminer le plus petit entier n tel que la concentration soit devenue inférieure à 10^{-3} au bout de n heures, il suffit d'afficher sur la calculatrice des valeurs de la fonction C, et on trouve $n=9$ car $C(8)\approx 0{,}002$ et $C(9)\approx 0{,}00099$.

Exercice VIII

▶ La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^x$ est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x)=e^x+xe^x$.

▶ De même, d'après les propriétés des opérations, la fonction dérivée f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f''(x)=e^x+(e^x+xe^x)$, soit

$$f''(x)=2e^x+xe^x.$$

▶ De même, d'après les propriétés des opérations, la fonction dérivée seconde f'' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f^{(3)}(x)=2e^x+(e^x+xe^x)$, soit

$$f^{(3)}(x)=3e^x+xe^x.$$

On va donc démontrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif, « f est dérivable n fois sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = ne^x + xe^x$ ».

▶ *Initialisation* : la proposition est vraie pour $n = 1$.

▶ *Hérédité* : soit k un entier strictement positif pour lequel on suppose que la propriété est vraie.

Ainsi la fonction $f^{(k)}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f^{(k)}(x) = ke^x + xe^x$, elle est donc dérivable et, $f^{(k+1)}(x) = ke^x + e^x + xe^x = (k+1)e^x + xe^x$. La proposition est donc héréditaire.

▶ *Conclusion* : pour tout entier n strictement positif, f est dérivable n fois sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = ne^x + xe^x$.

Exercice IX

Partie A

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

❶ La fonction g est égale à la différence de deux fonctions dérivables sur $[0\,;+\infty[$ donc la fonction g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $g'(x) = e^x - 1$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, il en est donc de même de la fonction g'.

Comme $g'(0) = e^0 - 1 = 0$, on en déduit que $g'(x) \geq 0$ sur $[0\,;+\infty[$. Donc la fonction g est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

❷ On en déduit que, pour tout réel x positif, on a $g(x) \geq g(0)$, soit $g(x) \geq 0$. Donc $g(x)$ est toujours positif sur $[0\,;+\infty[$.

❸ Pour tout réel x positif, on a donc $e^x - x - 1 \geq 0$, soit $e^x - x \geq 1$. Donc, pour tout réel x positif, on a aussi $e^x - x > 0$.

Partie B

❶ On a : $f(0) = \dfrac{e^0 - 1}{e^0 - 0} = 0$ et $f(1) = \dfrac{e^1 - 1}{e^1 - 1} = 1$.

Comme on admet que f est strictement croissante sur $[0\,;1]$, pour tout x de $[0\,;1]$, on a $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$, c'est-à-dire $0 \leq f(x) \leq 1$.

Donc, pour tout x de $[0\,;1]$, $f(x) \in [0\,;1]$.

Complément : les plus courageux pourront démontrer que f est strictement croissante sur $\left[0\,;1\right]$ en calculant $f'(x)$ qui a la forme d'un quotient $\dfrac{N(x)}{\left(e^x - x\right)^2}$ et en étudiant les variations de $N(x)$ pour déterminer son signe.)

❷ **a)** Pour tout x de $\left[0\,;1\right]$, on a :

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x = \frac{e^x - 1 - x\left(e^x - x\right)}{e^x - x} = \frac{(1-x)e^x - 1 + x^2}{e^x - x}$$

$$= \frac{(1-x)e^x - (1-x)(1+x)}{e^x - x} = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}.$$

b) Pour étudier la position relative de la droite $\mathscr{D}$, d'équation $y = x$, et de la courbe $\mathscr{C}$ sur $\left[0\,;1\right]$, on étudie le signe de la différence $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.

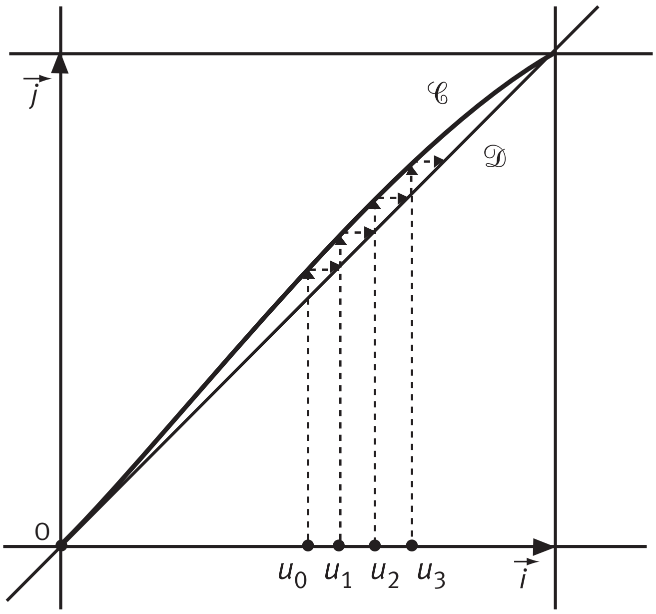
Pour tout x de $\left[0\,;1\right]$, $1 - x \geq 0$ et, d'après la partie A, $g(x) \geq 0$ et $e^x - x > 0$.

Ainsi, pour tout x de $\left[0\,;1\right]$, $f(x) - x \geq 0$.

La courbe $\mathscr{C}$ est donc toujours au-dessus de la droite $\mathscr{D}$ sur $\left[0\,;1\right]$,

Partie C

❶



On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f\left(u_n\right), \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$.

❷ Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel *n,* « $\frac{1}{2} \le u_n \le u_{n+1} \le 1$ ».

▸ *Initialisation* : $u_0 = \frac{1}{2}$ donc u_0 est dans $[0\,;1]$. Donc, d'après la Partie B, $f(u_0) \in [0\,;1]$ et $f(u_0) - u_0 \ge 0$, soit $f(u_0) \ge u_0$. Comme $f(u_0) = u_1$, on obtient $\frac{1}{2} \le u_0 \le u_1 \le 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

▸ *Hérédité* : soit k un entier naturel, $k \ge 0$, pour lequel on suppose que $\frac{1}{2} \le u_k \le u_{k+1} \le 1$. Comme la fonction f est croissante sur $[0\,;1]$, on a $f\left(\frac{1}{2}\right) \le f\left(u_k\right) \le f\left(u_{k+1}\right) \le f(1)$, soit $u_1 \le u_{k+1} \le u_{k+2} \le 1$. Comme on a vu que $\frac{1}{2} \le u_0 \le u_1$, on en déduit $\frac{1}{2} \le u_{k+1} \le u_{k+2} \le 1$. La propriété est donc héréditaire.

▸ *Conclusion* : pour tout entier naturel *n,* $\frac{1}{2} \le u_n \le u_{n+1} \le 1$.

❸ Ce qui précède prouve que la suite $\left(u_n\right)$ est croissante et majorée par 1. La suite $\left(u_n\right)$ est donc convergente et sa limite ℓ est telle que $\frac{1}{2} \le \ell \le 1$.

La fonction f est le quotient de deux fonctions continues sur $[0\,;1]$ (avec le dénominateur non nul), donc f est continue sur $[0\,;1]$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f\left(u_n\right)\right) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) = f(\ell)$. Mais $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$, donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f\left(u_n\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell.$$

Donc le nombre ℓ est dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ et tel que $f(\ell) = \ell$.

L'équation $f(x) = x$ équivaut à $f(x) - x = 0$, soit, d'après la Partie B, à $(1-x)g(x) = 0$.

On a vu dans la Partie A que la fonction g est croissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$, et comme $g\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}15$ on obtient que donc $g(x) > 0$ sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

L'équation $f(x) = x$ n'a donc que la solution $x = 1$ sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ et c'est le nombre ℓ.

La suite $\left(u_n\right)$ converge donc vers 1 (comme on peut le conjecturer d'après le graphique).

■

Corrigé de la séquence 5

Corrigé de l'activité du chapitre 2

■ **Activité 1** ❶ Avec $a =$ et $b = 1{,}5$ on a $f(2\times 1{,}5) = f(3) = 11{,}527$ et $f(2) + f(1{,}5) = 7{,}273 + 4{,}254 = 11{,}527$.

Avec $a = 1{,}4$ et $b = 3$ on a $f(1{,}4\times 3) = f(4{,}2) = 15{,}057$

et $f(1{,}4) + f(3) = 3{,}530 + 11{,}527 = 15{,}057$.

Dans ces deux exemples, on retrouve bien $f(a\times b) = f(a) + f(b)$.

Avec $a = 1{,}8$ et $b = 1{,}2$ on $f\ (1{,}8)+f\ (1{,}2) = 6{,}167+1{,}913 = 8{,}08$ et $f(1{,}8\times 1{,}2) = f(2{,}16)$.

Le nombre $f(2{,}16)$ n'est pas indiqué dans la table, mais comme la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ on sait que $f(2{,}1) \le f(2{,}16) \le f(2{,}2)$ soit $7{,}784 \le f(2{,}16) \le 8{,}273$ ce qui est vérifié par 8,08.

❷ On a $f(1{,}9\times 2{,}2) = f(1{,}9) + f(2{,}2) = 6{,}734 + 8{,}273 = 15{,}007$; la deuxième ligne de la table permet de lire que $1{,}9\times 2{,}2$ est compris entre 4,17725 et 4,2 (la valeur exacte est 4,18).

On a $f(1{,}2\times 1{,}6\times 1{,}7) = f(1{,}2) + f(1{,}6) + f(1{,}7) = 1{,}913 + 4{,}931 + 5{,}567 = 12{,}411$; la deuxième ligne de la table permet de lire que $1{,}2\times 1{,}6\times 1{,}7$ est compris entre 3,2 et 3,3 (la valeur exacte est 3,264).

On a $f\left(1{,}9^2\right) = f\left(1{,}9\times 1{,}9\right) = f(1{,}9) + f(1{,}9) = 2\times f(1{,}9) = 2\times 6{,}734 = 13{,}468$; la deuxième ligne de la table permet de lire que $1{,}9^2$ est un peu plus grand que 3,6 (la valeur exacte est 3,61).

De même $f\left(1{,}2^5\right) = 5\times f(1{,}2) = 5\times 1{,}913 = 9{,}565$; la deuxième ligne de la table permet de lire que $1{,}2^5$ est compris entre 2,4 et 2,5 (la valeur exacte est 2,48832).

$$\begin{aligned} f\left(1{,}2^3\times 1{,}5^2\right) &= f\left(1{,}2^3\right) + f\left(1{,}5^2\right) = 3\times f(1{,}2) + 2\times f(1{,}5) \\ &= 3\times 1{,}913 + 2\times 4{,}254 = 14{,}247\ ; \end{aligned}$$

la deuxième ligne de la table permet de lire que $1{,}2^3 \times 1{,}5^2$ est compris entre 3,8 et 3,9 (la valeur exacte est 3,888).

Ces calculs, le dernier en particulier, montre bien comment la fonction f permet de faire des calculs techniquement plus simples. Les résultats obtenus ne sont que des valeurs approchées. Les tables qui ont été réellement utilisées jusque dans les années 1970 comportaient donc beaucoup de décimales.

❸ Pour calculer un produit on utilise une addition, on peut donc conjecturer que pour calculer un quotient on peut utiliser une différence : $f\left(\dfrac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$.

On a $f\left(\dfrac{4{,}1}{3{,}2}\right) = f(4{,}1) - f(3{,}2) = 14{,}804 - 12{,}204 = 2{,}600$; la deuxième ligne de la table permet de lire que $\dfrac{4{,}1}{3{,}2}$ est compris entre 1,2 et 1,3 (une valeur approchée à 10^{-5} près est 1,28125).

❹ On a observé qu'élever un nombre a au carré correspond à multiplier par 2 valeur de $f(a)$; on conjecture que prendre la racine carrée d'un nombre x correspond à prendre la moitié de la valeur de $f(a)$

$f\left(\sqrt{a}\right) = 0{,}5f(a)$.

On a $0{,}5 \times f(1{,}7) = 0{,}5 \times 5{,}567 = 2{,}7835$; la deuxième ligne de la table permet de lire que $\sqrt{7}$ est un peu plus grand que 1,3 (une valeur approchée à 10^{-5} près est 1,30384). Ces conjectures seront démontrées dans le cours.

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 2

Exercice 1 Les calculs de cet exercice utilisent toutes les propriétés algébriques de la fonction ln.

- $\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$,
- $\ln 16 = \ln\left(2^4\right) = 4\ln 2$,
- $\ln 24 = \ln(3 \times 2^3) = \ln 3 + \ln(2^3) = \ln 3 + 3\ln 2$,
- $\ln\left((-3)^2\right) = \ln\left(3^2\right) = 2\ln^3$,

- $\ln 54 = \ln(2\times 3^3) = \ln 2 + \ln(3^3) = \ln 2 + 3\ln 3,$
- $\ln\left(\dfrac{4}{27}\right) = \ln 4 - \ln 27 = \ln\left(2^2\right) - \ln\left(3^3\right) = 2\ln 2 - 3\ln 3,$
- $\ln\left(\sqrt{36}\right) = \ln(6) = \ln(2\times 3) = \ln 2 + \ln 3,$
- $\ln\left(\dfrac{9}{8}\right) = \ln 9 - \ln 8 = \ln\left(3^2\right) - \ln\left(2^3\right) = 2\ln 3 - 3\ln 2.$

Exercice 2

- $\ln 63 - \ln 7 = \ln\left(3^2\times 7\right) - \ln 7 = \ln\left(3^2\right) + \ln 7 - \ln 7 = 2\ln 3,$
- $\ln\left(27\sqrt{3}\right) = \ln\left(3^3\right) + \ln\left(\sqrt{3}\right) = 3\ln 3 + \dfrac{1}{2}\ln 3 = \dfrac{7}{2}\ln 3,$
- $2\ln 21 - \ln 49 = 2\ln\left(3\times 7\right) - \ln\left(7^2\right) = 2\ln 3 + 2\ln 7 - 2\ln 7 = 2\ln 3.$

Exercice 3

$C = 5\ln\left(\dfrac{1}{3}\right) - 4\ln\sqrt{3} = 5(-\ln 3) - \dfrac{4}{2}\ln 3 = -7\ln 3$;

$D = \ln\left(\dfrac{4}{5}\right) + \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{4}{5}\times\dfrac{5}{3}\times\dfrac{3}{4}\right) = \ln 1 = 0$

ou $D = \ln\left(\dfrac{4}{5}\right) + \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) = \ln 4 - \ln 5 + \ln 5 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 = 0.$

Exercice 4

$E = e^{\ln 6 - \ln 3} = e^{\ln\frac{6}{3}} = e^{\ln 2} = 2$;

$F = e^{-\frac{1}{2}\ln 4} = e^{-\frac{1}{2}\ln\left(2^2\right)} = e^{-\frac{1}{2}\times 2\ln 2} = e^{-\ln 2} = \dfrac{1}{e^{\ln 2}} = \dfrac{1}{2}.$

$G = e^{\ln 28 - \ln 4} = \dfrac{e^{\ln 28}}{e^{\ln 4}} = \dfrac{28}{4} = 7$;

$H = e^{2\ln 3 + 3\ln 2} = e^{\ln\left(3^2\right) + \ln\left(2^3\right)} = e^{\ln(9\times 8)} = 9\times 8 = 72.$

$I = \ln\left(\dfrac{1}{e^5}\right) = -\ln\left(e^5\right) = -5.$

Exercice 5 Vrai / Faux

a) Vrai. On sait qu'une valeur approchée de e est 2,7, donc on sait aussi que $2 < e < 3$. Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, on en déduit que $\ln 2 < \ln e < \ln 3$, c'est-à-dire $\ln 2 < 1 < \ln 3$.

b) Faux. L'inéquation $x\times\ln 0,5 \le \ln\sqrt{2}$ est équivalente à $x \ge \dfrac{\ln\sqrt{2}}{\ln 0,5}$, puisqu'en divisant par $\ln 0,5$ qui est strictement négatif, l'inégalité change de sens. Comme

$\dfrac{\ln\sqrt{2}}{\ln 0{,}5}=\dfrac{\frac{1}{2}\ln 2}{\ln\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}\ln 2}{-\ln 2}=-\dfrac{1}{2}$, finalement l'inégalité est équivalente à $x\geq-\dfrac{1}{2}$.

Conclusion $\mathcal{S}=\left[-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

c) Faux. D'après la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle, $x=\mathrm{e}^5\times\mathrm{e}^7=\mathrm{e}^{5+7}=\mathrm{e}^{12}$, donc $\ln x=\ln\left(\mathrm{e}^{12}\right)=12$.

d) Vrai. $a<b\Leftrightarrow\left(\ln 11-\ln 4{,}9\right)<\ln 5{,}2\Leftrightarrow\ln\dfrac{11}{4{,}9}<\ln 5{,}2\Leftrightarrow\dfrac{11}{4{,}9}<5{,}2$ car la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc elle conserve l'ordre.

D'où $a<b\Leftrightarrow\dfrac{11}{4{,}9}<5{,}2\Leftrightarrow 11<4{,}9\times 5{,}2$ et le calcul mental de 4×5 montre que la dernière inégalité est vraie, donc, par équivalence, la première est vraie aussi.

Exercice 6 Commentaire : on utilise ici des équivalences justifiées par les propriétés 5 et 6, guidé par la remarque : *l'application de la fonction ln fait disparaître l'exponentielle et l'application de la fonction exponentielle fait disparaître le logarithme.*

❶ On a les équivalences : $\ln(5x+2)=\ln 3\Leftrightarrow 5x+2=3\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{5}$ et on conclut $S=\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$.

❷ On a les équivalences :

$\ln(-2x+1)=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln(-2x+1)}=\mathrm{e}^0\Leftrightarrow -2x+1=1\Leftrightarrow x=0$, et on conclut $S=\{0\}$.

❸ On a les équivalences :

$\ln(3x+1{,}5)=2\Leftrightarrow\mathrm{e}^{\ln(3x+1{,}5)}=\mathrm{e}^2\Leftrightarrow 3x+1{,}5=\mathrm{e}^2\Leftrightarrow x=\dfrac{\mathrm{e}^2-1{,}5}{3}$ et on conclut $S=\left\{\dfrac{\mathrm{e}^2-1{,}5}{3}\right\}$.

❹ On a les équivalences :

$\mathrm{e}^{2x-3}=2\Leftrightarrow\ln\left(\mathrm{e}^{2x-3}\right)=\ln 2\Leftrightarrow 2x-3=\ln 2\Leftrightarrow x=\dfrac{3+\ln 2}{2}$ et on conclut $S=\left\{\dfrac{3+\ln 2}{2}\right\}$.

Exercice 7 ❶ $\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11)$

Déterminons le domaine d'étude D (ensemble des réels x tels que $\ln(x+3)+\ln(x+2)$ et $\ln(x+11)$ soient définis).

On a : $x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x+3>0 \\ x+2>0 \\ x+11>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x>-2 \\ x>-11 \end{cases} \Leftrightarrow x>-2.$ D'où $D = \left]-2\,;+\infty\right[$.

L'accolade signifie ici : $x+3>0$ et $x+2>0$ et $x+11>0$.

De plus, pour tout x de D :

$$\begin{aligned} \ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11) &\Leftrightarrow \ln\left[(x+3)(x+2)\right]=\ln(x+11) \\ &\Leftrightarrow \ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11) \\ &\Leftrightarrow x^2+5x+6=x+11 \ (x \to \ln x \text{ étant bijec} \\ &\Leftrightarrow x^2+4x+5=0 \end{aligned}$$

Résolvons cette équation du second degré : $x^2+4x-5=0$.

On a : $\Delta = 4^2-4\times(-5)=36=6^2$. Cette équation admet donc deux solutions réelles : $x_1=\dfrac{-4-6}{2}=-5$ et $x_2=\dfrac{-4+6}{2}=1$.

Seul x_2 appartient à D, ainsi l'ensemble des solutions réelles de l'équation $\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11)$ est : $\mathscr{S}=\{1\}$.

❷ $\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$.

Déterminons le domaine d'étude D de l'équation. On a :

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x+6>0 \\ x+11>0 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation du second degré $x^2+5x+6=0$ sont -3 et -2.

Ainsi $x^2+5x+6>0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\,;-3\right[\cup \left]-2\,;+\infty\right[$.

On a donc : $D=\left]-11\,;-3\right[\cup \left]-2\,;+\infty\right[$.

Les calculs effectués pour la 1re question de l'exercice nous montrent alors que : $\mathscr{S}=\{-5\,;1\}$.

❸ $(\ln x)^2+2\ln x-3=0$.

La fonction ln étant définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$, on a $D=\left]0\,;+\infty\right[$. Effectuons le changement de variables $X=\ln x$:

$$(\ln x)^2+2\ln x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=\ln x \\ X^2+2X-3=0 \end{cases}.$$

Les solutions de l'équation du second degré $X^2+2X-3=0$ sont -3 et 1.

Ainsi :

$$(\ln x)^2+2\ln x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=\ln x \\ X=-3 \text{ ou } X=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ln x=-3=\ln(\mathrm{e}^{-3}) \text{ ou } \ln x=1=\ln \mathrm{e}$$

$$\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{-3} \text{ ou } x=\mathrm{e}.$$

L'ensemble des solutions réelles de l'équation $(\ln x)^2+2\ln x-3=0$ est donc : $\mathcal{S}=\left\{\mathrm{e}^{-3}\ ;\ \mathrm{e}\right\}$.

Exercice 8

❶ La fonction ln étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, $\ln x>\ln 3$ équivaut à $x>3$. Donc $S=]3\,;+\infty[$.

❷ La fonction ln étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$,

$\ln(x+1)\geq \ln 3 \Leftrightarrow x+1\geq 3 \Leftrightarrow x\geq 2$. Donc $S=[2\,;+\infty[$.

❸ La fonction ln étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$,

$\ln x\leq 1 \Leftrightarrow \ln x\leq \ln \mathrm{e} \Leftrightarrow x\leq \mathrm{e}$. Donc $S=]0\ ;\ \mathrm{e}]$.

❹ Comme $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}=\mathrm{e}^x$, on a : $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{-x}}<6 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x+x}<6 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x}<6$; puis, comme la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$\mathrm{e}^{3x}<6 \Leftrightarrow 3x<\ln 6 \Leftrightarrow x<\dfrac{\ln 6}{3}$. Donc $S=\left]0\ ;\ \dfrac{\ln 6}{3}\right[$.

❺ On a $\ln\left(1-x^2\right)\geq 0 \Leftrightarrow \left(1-x^2\right)\geq \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow 1-x^2\geq 1$, puisque la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Enfin, $1-x^2\geq 1 \Leftrightarrow x^2\leq 0 \Leftrightarrow x=0$. Donc $S=\{0\}$.

Commentaire : le rappel du sens de variation de la fonction utilisée (qui justifie une équivalence) est souhaitable au moins une fois dans une copie.

Exercice 9

❶ La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, pour les résolutions suivantes, le domaine d'étude sera donc $\mathbb{R}$.

On a : $\mathrm{e}^{2x}-5\mathrm{e}^x+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=\mathrm{e}^x \\ X^2-5X+4=0 \end{cases}.$

Les solutions de l'équation $X^2-5X+4=0$ sont 4 et 1.

Ainsi :

$$e^{2x}-5e^{x}+4=0 \Leftrightarrow e^{x}=4 \text{ ou } e^{x}=1 \Leftrightarrow x=\ln 4 \text{ ou } x=\ln 1=0.$$

L'ensemble des solutions réelles de l'équation $e^{2x}-5e^{x}+4=0$ est donc :

$\mathcal{S}=\{0\,;\ln 4\}$.

❷ $e^{4x+1}-2e^{2x}-\dfrac{3}{e}=0.$

Multiplions les 2 membres de l'égalité par e, on a alors :

$$e^{4x+1}-2e^{2x}-\frac{3}{e}=0 \Leftrightarrow e^{4x+2}-2e^{2x+1}-3=0 \Leftrightarrow (e^{2x+1})^2-2e^{2x+1}-3=0.$$

On résout : $\begin{cases} X=e^{2x+1} \\ X^2-2X-3=0 \end{cases}$.

Les solutions réelles de l'équation $X^2-2X-3=0$ sont 3 et –1. Ainsi :

$$e^{4x+1}-2e^{2x}-\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow e^{2x+1}=3 \text{ ou } e^{2x+1}=-1 \Leftrightarrow 2x+1=\ln 3 \Leftrightarrow x=\frac{\ln 3-1}{2}$$

(la fonction exponentielle étant à valeurs strictement positives, l'équation $e^{2x+1}=-1$ n'a pas de solution réelle).

L'ensemble des solutions réelles de l'équation $e^{4x+1}-2e^{2x}-\dfrac{3}{2}=0$ est donc :

$\mathcal{S}=\left\{\dfrac{\ln 3-1}{2}\right\}$.

❸ $e^{3x}-2e^{2x}-e^{x}\leq 0.$

Par le changement de variable $X=e^{x}$, on a : $e^{3x}-2e^{2x}-e^{x}=X^3-2X^2-X$.

Factorisons cette dernière expression.

$$X^3-2X^2-X=X(X^2-2X-1).$$

Déterminons, alors, les solutions de l'équation : $X^2-2X-1=0$.

On a : $\Delta=(-2)^2-4\times(-1)=8=(2\sqrt{2})^2$. Les solutions réelles de l'équation $X^2-2X-1=0$ sont donc : $X_1=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$ et $X_2=1+\sqrt{2}$. .

On en déduit : $X^3-2X^2-X=X(X-(1-\sqrt{2}))(X-(1+\sqrt{2}))$

et donc : $e^{3x}-2e^{2x}-e^{x}=e^{x}(e^{x}-1+\sqrt{2})(e^{x}-1-\sqrt{2})$.

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc pour tout réel $x : e^x$ et $e^x + (\sqrt{2} - 1)$ sont positifs. $e^{3x} - 2e^{2x} - e^x$ et $e^x - 1 - \sqrt{2}$ ont donc le même signe.

Ainsi : $e^{3x} - 2e^{2x} - e^x \leq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 - \sqrt{2} \leq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x \leq \ln(1 + \sqrt{2})$ (la fonction ln étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$).

L'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $e^{3x} - 2e^{2x} - e^x \leq 0$ est donc :
$\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\ \ln(1+\sqrt{2})\right]$.

Exercice 10 ❶ Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$, il existe des entiers n tels que $2^n \geq 3^{15}$.

Pour résoudre cette équation où l'inconnue n est dans une puissance on utilise la fonction ln et l'équivalence de la propriété 7.

Ainsi $2^n \geq 3^{15} \Leftrightarrow \ln\left(2^n\right) \geq \ln\left(3^{15}\right) \Leftrightarrow n \ln 2 \geq 15 \ln 3 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{15 \ln 3}{\ln 2}$ (on a divisé par $\ln 2$ qui est positif).

Comme la calculatrice nous indique que $23 < \dfrac{15 \ln 3}{\ln 2} < 24$, le plus petit entier n pour lequel $2^n \geq 3^{15}$ est $n = 24$.

❷ Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$, il existe des entiers n tels que $0{,}9^n \leq 0{,}001$.

Comme au ❶, on a les équivalences :

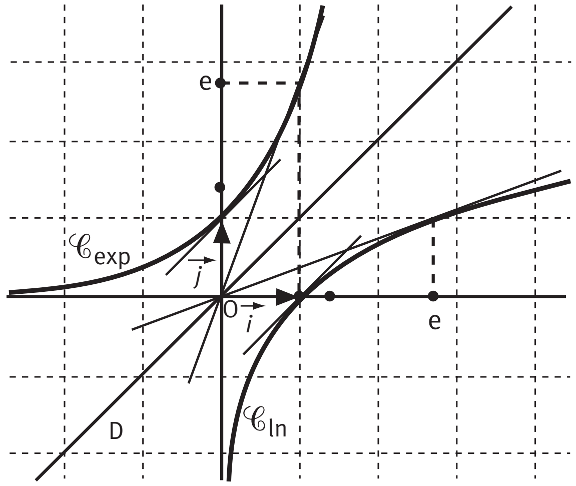
$$0{,}9^n \leq 0{,}001 \Leftrightarrow n \ln 0{,}9 \leq \ln 0{,}001 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}9}$$

(on a divisé par $\ln 0{,}9$ qui est négatif).

Comme la calculatrice nous indique que $65 < \dfrac{-3 \ln 10}{\ln 0{,}9} < 66$, le plus petit entier n pour lequel $2^n \geq 3^{15}$ est $n = 66$.

Corrigé des activités du chapitre 3

■ **Activité 2** ❶-❷ Les deux courbes semblent symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Ceci sera expliqué dans la cours.



❸ On peut conjecturer deux limites :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty.$$

La symétrie et les propriétés de la fonction exponentielle permettent de conjecturer deux valeurs : $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.

On peut conjecturer aussi que, comme celle de la fonction exp, la courbe de la fonction ln admet une tangente en chaque point et donc que la fonction ln est dérivable sur son ensemble de définition.

On peut même conjecturer deux nombres dérivés en utilisant les coefficients directeurs des tangentes aux points d'abscisse 1 et e : $\ln'(1) = 1$ et $\ln'(e) = \frac{1}{e}$.

■ **Activité 3** ❶ Comme la fonction f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = e^{\ln(x)}$, on a aussi l'expression plus simple $f(x) = x$ et donc $f'(x) = 1$ pour tout réel x strictement positif.

Sous la forme initiale, on utilise la dérivée d'une fonction composée e^u qui est $u'e^u$, la fonction u étant ici la fonction ln dont on a supposé qu'elle est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. On trouve donc $f'(x) = \ln'(x)e^{\ln(x)} = \ln'(x) \times x$.

❷ Pour tout réel x strictement positif, on a donc $\ln'(x) \times x = 1$ soit $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 3

Exercice 11 ❶ C'est une forme indéterminée. Comme on l'a fait avec les polynômes et avec la fonction exponentielle, on met en facteur le terme prépondérant. Dans ce cas c'est x car « x l'emporte sur le logarithme ».

On écrit $x - \ln x = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$. Or on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc

$\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}(x - \ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)\right) = +\infty.$

❷ Il ne s'agit pas d'une forme indéterminée, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}}(x - \ln x) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty.$

❸ Il s'agit d'une forme indéterminée.

On transforme en faisant apparaître une limite du cours en $+\infty$: $\frac{\ln x}{1+x} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{1+x}.$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1,$ on obtient

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{1+x} = 0 \times 1 = 0.$

❹ C'est un quotient où le numérateur et le dénominateur ont des limites différentes, il ne s'agit donc pas d'une forme indéterminée (que l'on trouve si les deux tendent vers l'infini ou si les deux tendent vers 0). En effet, $\frac{x}{1+\ln x} = \left(x \times \frac{1}{1+\ln x}\right)$ et, comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty,$ on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{1+\ln x} = 0,$

et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x}{1+\ln x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}}\left(x \times \frac{1}{1+\ln x}\right) = 0 \times 0 = 0.$

❺ Il s'agit de la limite d'une fonction composée. La fonction $x \mapsto \ln\left(e^x + 1\right)$ est la composée de $x \mapsto e^x + 1$ et de la fonction ln. Or $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(e^x + 1\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$, donc, en composant par $X = e^x + 1,$ on obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(e^x + 1\right) = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty.$

❻ Il s'agit de la même fonction composée. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(e^x + 1\right) = 0 + 1 = 1$ et que $\lim\limits_{X \to 1} \ln X = \ln 1 = 0$ car la fonction ln est continue en 1, on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(e^x + 1\right) = \lim\limits_{X \to 1} \ln X = 0.$

❼ Il s'agit d'une forme indéterminée. On transforme comme dans le cas ❷ de l'exemple 8. Pour tout réel x strictement positif, on a : $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \dfrac{\ln\left[\left(\sqrt{x}\right)^2\right]}{\sqrt{x}} = 2\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ est la composée de $x \mapsto \sqrt{x}$ et de $X \mapsto 2\dfrac{\ln X}{X}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} 2\dfrac{\ln X}{X} = 2\times 0 = 0$, donc, en composant par $X = \sqrt{x}$, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty}\left(2\dfrac{\ln X}{X}\right) = 0$.

❽ Il s'agit d'une forme indéterminée. On se souvient que, à l'infini, l'exponentielle l'emporte sur x et que x l'emporte sur le logarithme, on peut donc conjecturer que l'infini du dénominateur va l'emporter et que la limite est nulle. Montrons cela en faisant bien apparaître les limites du cours en $+\infty$. Comme $\dfrac{\ln x}{e^x} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{e^x}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$), on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = 0\times 0 = 0$.

Exercice 12 Dans les quatre premiers cas, il s'agit d'une fonction composée $\ln u$, la fonction u étant dérivable et à valeurs strictement positives sur I. L'expression de la dérivée est donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

a) Soit $u(x) = 3x - 4$ d'où $u'(x) = 3$.

$$f'(x) = \frac{3}{3x-4}$$

b) Soit $u(x) = 3 - x$ d'où $u'(x) = -1$.

$$f'(x) = \frac{-1}{3-x} = \frac{1}{x-3}$$

c) Soit $u(x) = x^2 + 1$ d'où $u'(x) = 2x$.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

d) Soit $u(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ d'où $u'(x)=\dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}{\dfrac{x}{x^2+1}}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\times\frac{x^2+1}{x}=\frac{1-x^2}{x(x^2+1)}$$

Ainsi $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{x(x^2+1)}$

Dans les deux derniers cas, on applique les propriétés des opérations.

e) $u(x)=\ln x$ d'où $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ $\qquad v(x)=x$ d'où $v'(x)=1$.

Comme $f=\dfrac{u}{v}$ alors $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ soit $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{x}-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

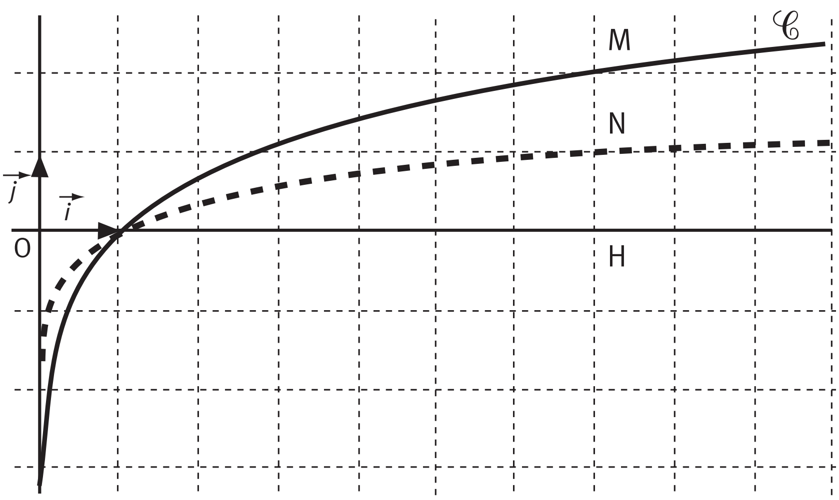
Ainsi $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

f) $f(x)=x\ln x-x$ d'où $f'(x)=1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x$.

Exercice 13 On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormé.

❶ $y=\ln\left(\sqrt{x}\right)$

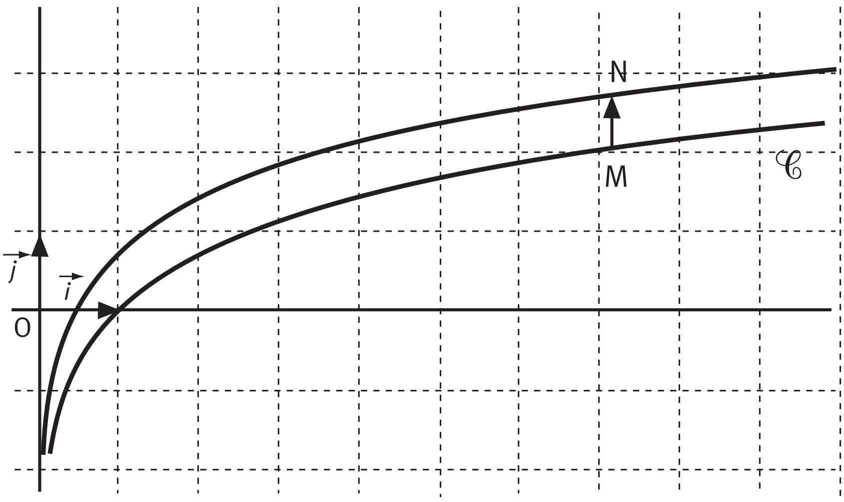
Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $\ln(\sqrt{x})=\dfrac{1}{2}\ln x$. Ainsi on peut construire « point par point » la courbe d'équation $y=\ln(\sqrt{x})$ de la façon suivante.



Soit $x \in \left]0\,;+\infty\right[$. On note M le point d'abscisse x de $\mathscr{C}$, alors le milieu de $[\mathrm{MH}]$ où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses est le point d'abscisse x de la courbe d'équations $y = \ln(\sqrt{x})$.

❷ $y = \ln(2x)$.

Pour tout x de $\left]0\,;+\infty\right[$, $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$. Ainsi la courbe d'équation $y = \ln(2x)$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $(\ln 2)\vec{j}$.



Exercice 14 ❶ La fonction f est dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et, pour tout x de $\left]0\,;+\infty\right[$,

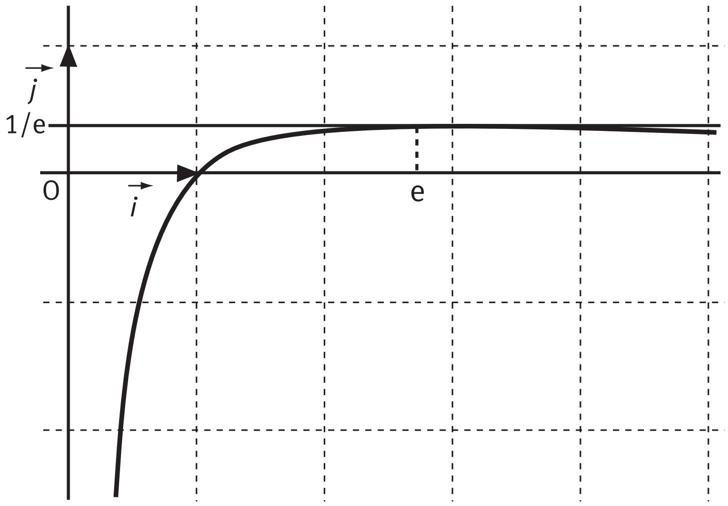
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - 1\times\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Ainsi $f'(x)$ et $1-\ln x$ ont le même signe.

On a : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e$ (la fonction ln est strictement croissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$). Et, de même, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$.

Limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (résultat du cours) et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ (car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\ln x \times \dfrac{1}{x}\right)$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$).

x	0		e		
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{e}$	↘	0



❷ Une exponentielle étant toujours à valeurs strictement positives, l'équation (E) : $e^{kx} = x$ ne peut pas avoir de solutions négatives. On raisonne donc dans $]0;+\infty[$ où on peut utiliser la fonction ln et obtenir les équivalences : $e^{kx} = x \Leftrightarrow kx = \ln x \Leftrightarrow k = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow k = f(x)$.

si $k \leq 0$ (E) admet une unique solution réelle (celle-ci appartient à]0 ; 1] ;

si $0 < k < \frac{1}{e}$, (E) admet deux solutions réelles (l'une appartient à]1 ; e] et l'autre à]e ; + ∞] ;

si $k = \frac{1}{e}$, (E) admet une unique solution réelle e ;

si $k > \frac{1}{e}$, (E) n'admet aucune solution réelle

Cela correspond aussi aux nombres de points d'intersection de la courbe représentant *f* avec la droite d'équation $y = k$ (parallèle à l'axe des abscisses).

Exercice 15 Cette fonction est l'occasion de remarquer qu'une fonction composée de la forme ln *u* peut-être définie sur $\mathbb{R}$ si la fonction *u* est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$.

❶ La fonction f est la fonction composée $f=\ln u$ avec $u : x \mapsto 1+\dfrac{1}{x^2+1}$.

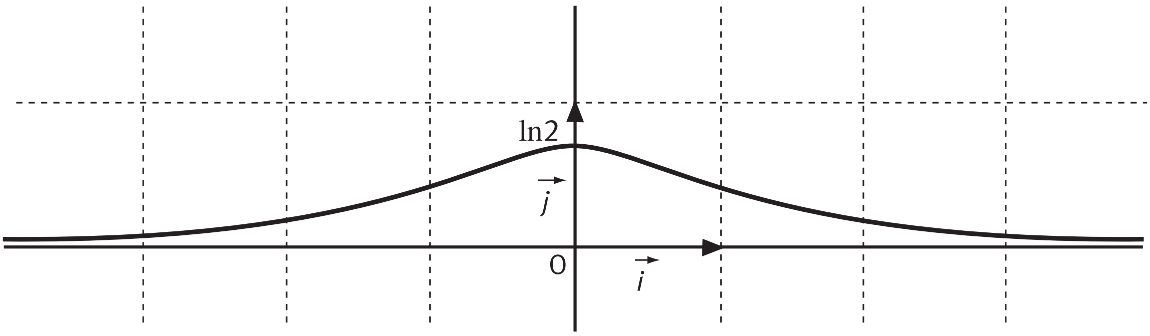
Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2+1}\right)=1$ et $\lim\limits_{X\to1}\ln X=\ln 1=0$ (car la fonction ln est continue en 1). Donc, en composant par $X=1+\dfrac{1}{x^2+1}$, on obtient ainsi la limite de f en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{X\to1}\ln X=0$.

Et de même, on trouve $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{X\to1}\ln X=0$.

❷ La fonction f a les mêmes variations que la fonction u. La fonction rationnelle u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a $u'(x)=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. Le signe de $u'(x)$ est le signe contraire de x. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		
Signe de $u'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de $f(x)=\ln(u(x))$	0	$\nearrow$	$\ln 2$	$\searrow$	0

❸



Exercice 16 On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(0)=0$ et, pour tout réel x strictement positif, $f(x)=x\ln x$.

❶ On a $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x=0=f(0)$ donc la fonction f est continue en 0.

❷ Pour étudier la dérivabilité en 0, on étudie la limite du taux d'accroissement :

$$\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{h\ln h}{h}=\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\ln h=-\infty.$$

Comme la limite n'est pas finie, on conclut que f n'est pas dérivable en 0. Comme la limite est infinie, on conclut que la courbe représentative de f admet une tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0, c'est-à-dire au point O.

❸ La fonction f est le produit de deux fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout x strictement positif, on a : $f'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1.$

On a : $f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+1>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow x>\mathrm{e}^{-1}$ (la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$).

Et, de même, $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<\mathrm{e}^{-1}$.

La fonction f est donc décroissante sur $\left[0\,;\mathrm{e}^{-1}\right]$ et croissante sur $\left[\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty\right[$.

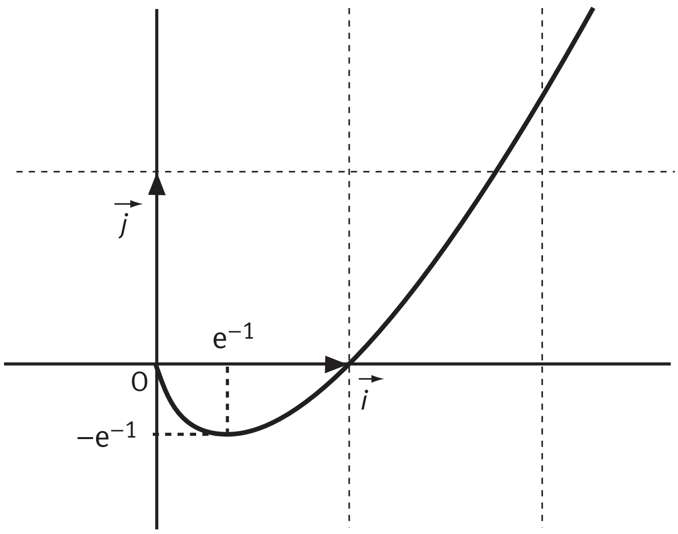
❹ Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$,

on a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln x\right)=+\infty$.

Et ainsi :

x	0		e^{-1}		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\mathrm{e}^{-1}$	↗	$+\infty$

❺



Exercice 17 ❶ La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $\sqrt{x}-2$ qui est celui de $x-4$ car la fonction racine est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout x de $]0\,;4]$ on a $f'(x)\leq 0$, donc f est décroissante sur $]0\,;4]$. De même, pour tout x de $[4\,;+\infty[$ on a $f'(x)\geq 0$, donc f est croissante sur $[4\,;+\infty[$. la fonction f admet donc un minimum pour $x=4$.

❷ Ce minimum vaut $f(4)=\sqrt{4}-\ln 4=2-2\ln 2\approx 0{,}62$ à 10^{-2} près.

Donc la fonction f est à valeurs strictement positive et $0<f(x)$ implique $0<\sqrt{x}-\ln x$ donc $\ln x<\sqrt{x}$ et donc $\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ (on a divisé par x qui est strictement positif). Si, de plus, on suppose que $x>1$, alors le logarithme est strictement positif et on a : $0<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

❸ Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$, on peut appliquer le théorème des gendarmes à l'encadrement précédent et on trouve $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

Exercice 18 ▸ Quand n tend vers $+\infty$, $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ est une forme indéterminée car il s'agit du produit de n qui tend vers l'infini par $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ qui tend vers 0 : en effet, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ et, par continuité en 1, le logarithme tend vers ln 1, c'est-à-dire 0.

Comme le logarithme porte sur une quantité qui tend vers 1, on cherche à faire intervenir la limite du cours où il en est de même : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$. Or on constate que $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}$.

Ainsi, par composition, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

▸ Pour déterminer la seconde limite, on remarque que, pour tout entier naturel n,

▸ $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1.$

Or, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\exp\circ\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, donc, en composant par la fonction exponentielle qui est continue en 1, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\exp(1)=\mathrm{e}.$

Remarque

la calculatrice donne $(1+0{,}001)^{1000}\approx 2{,}718145927$ et $\mathrm{e}\approx 2{,}718281828.$

Corrigé de l'activité du chapitre 4

■ Activité 4 ❶ On pose $\log 1=0$, $\log 10=1$, et on suppose que cette fonction possède les mêmes propriétés algébriques que la fonction ln. Donc on a $\log 10^5=5\log 10=5$, $\log 10^{-2}=-2\log 10=-2$, et, pour tout entier relatif *n,* on a $\log 10^n=n\log 10$, soit $\log 10^n=n$.

❷ On a $\log 20=\log 2+\log 10=1+\log 2\approx 1{,}30103$;

$\log 200=\log 2+\log 100=2+\log 2\approx 2{,}30103$;

$\log 2000=\log 2+\log 1000=3+\log 2\approx 3{,}30103.$

On cherche un réel strictement positif x tel que $\log x=5{,}30103.$

Les calculs précédents amènent à proposer 200000. Et, en effet, $\log 200000=\log 2+\log\left(10^5\right)=5+\log 2\approx 5{,}30103.$

Commentaire l'usage des tables de logarithme décimal qui ont été utilisées jusqu'aux années 1970 était basé sur ces propriétés.

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 4

Exercice 19 Le nombre $A=2^{243112609}-1$ est un nombre premier (divisible seulement par lui-même et par 1) son écriture décimale s'écrit avec autant de chiffres que celle de $A+1=2^{243112609}$ ($A+1$ aurait un chiffre de plus que A si $A+1$ se terminait par 0 ; mais $A+1$ serait alors divisible par 5 ce qui n'est pas possible pour une puissance de 2).

Comme $\log\left(2^{243112609}\right)=243112609\times\log 2\approx 76184187{,}63$, on peut en déduire que $A+1$, donc A, s'écrit sous forme décimale avec

$E\left(\log\left(2^{243112609}\right)\right)+1=76184188$ chiffres, plus de 76 millions !

Corrigé des exercices de synthèse du chapitre 5

Exercice I

❶ Soit f la fonction carrée. Pour tous a, b de $\mathbb{R}$:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{f(a)+f(b)}{2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{a^2+b^2+2ab}{4}-\frac{a^2+b^2}{2}$$

$$=\frac{a^2+b^2+2ab-2a^2-2b^2}{4}=\frac{-a^2-b^2+2ab}{4}$$

$$=-\left(\frac{(a-b)}{2}\right)^2\leq 0.$$

Ainsi pour tous a, b de $\mathbb{R}$: $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$. La fonction carrée est donc convexe.

❷ Pour tous a, b de $]0\,;+\infty[$:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geq 0.$$

Ainsi pour tous a, b de $\mathbb{R}^{+*}$: $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.

La fonction ln étant croissante sur $]0\,;+\infty[$, pour tous a, b de $]0\,;+\infty[$, $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\ln(\sqrt{ab})=\frac{1}{2}\ln(ab)=\frac{\ln a+\ln b}{2}$. La fonction ln est donc concave.

Exercice II

Partie A

❶ On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

De plus, pour tout x de $]0\,;+\infty[$: $g(x)=\dfrac{1}{x}\times(2x\ln x-x+1)$. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$

et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x=0$.

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(2x\ln x-x+1)=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=+\infty$.

❷ La fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout x de $]0\,;+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{2x-1}{x^2}.$$

Ainsi : $g'(x)>0 \Leftrightarrow 2x-1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$ et $g'(x)<0 \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{2}$.

On en déduit le tableau de variations de g :

x	0		α		$\frac{1}{2}$		1	
$g'(x)$	‖	$-$			0	$+$		
$g(x)$	‖	↘	0	↘	$-2\ln 2+1$	↗	0	↗

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=2\ln\left(\frac{1}{2}\right)-1+\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2\ln 2+1.$$

❸ D'après le précédent tableau de variations $(-2\ln+1<0)$ l'équation admet deux solutions α et β $(\alpha<\beta)$; $\alpha\in\,]0\,;0{,}5[$ et $\beta\in\,]0{,}5\,;+\infty[$.

❹ On a $g(1)=2\ln 1-1+\dfrac{1}{1}=0$. Ainsi 1 $(>0{,}5)$ est solution de l'équation $g(x)=0$ et donc : $\beta=1$. $g(0{,}1)\simeq 4{,}5>0$ donc d'après le tableau de variations de g : $\alpha\in\,]0{,}1\,;0{,}5[$.

Une dichotomie nous donne alors : $0{,}284<\alpha<0{,}285$.

❺ D'après le tableau de variations de g :

si $x\in\,]0\,;\alpha[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ alors : $g(x)>0$;

si $x\in\,]\alpha\,;1[$ alors : $g(x)<0$.

$$g(\alpha)=g(1)=0.$$

Partie B ❶ On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Pour tout réel x strictement positif, on $f(x) = x^2 \ln x - x^2 + x$. Alors comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^2 \ln x = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x \times x \ln x) = 0$, On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0$.

❷ On a $f(\alpha) = \alpha^2 \left[\ln \alpha - 1\right] + \alpha$.

De plus : $g(\alpha) = 0$ donc : $\ln \alpha = -\dfrac{\frac{1}{\alpha}}{2} = \dfrac{\alpha - 1}{2\alpha}$. On a donc :

$$f(\alpha) = \alpha^2 \left[\frac{\alpha - 1}{2\alpha} - 1\right] + \alpha = \alpha\left(\frac{\alpha - 1 - 2\alpha}{2}\right) + \alpha = \frac{\alpha}{2} \times (-\alpha - 1 + 2)$$

$$= \frac{\alpha}{2}(1 - \alpha).$$

On a successivement les inégalités :

$0{,}284 < \alpha < 0{,}285$; $0{,}142 < \dfrac{\alpha}{2} < 0{,}142\,5$; $0{,}715 < 1 - \alpha < 0{,}$ et donc en multipliant terme à terme ces inégalités qui portent sur des nombres positifs, on obtient $0{,}142 \times 0{,}715 < f(\alpha) < 0{,}142\,5 \times 0{,}716$ soit

$$0{,}101\,53 < f(\alpha) < 0{,}103\,963\,2.$$

Ainsi $f(\alpha) = 0{,}10$ à 10^{-2} près.

❸ La fonction f est dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et pour tout x de $\left]0\,;+\infty\right[$:

$$f'(x) = 2x \times \left[\ln x - 1\right] + x^2 \times \frac{1}{x} + 1 = 2x \ln x - 2x + x + 1 = 2x \ln x - x + 1$$

$$= x\left[2 \ln x - 1 + \frac{1}{x}\right] = x \times g(x).$$

❹ Comme x est strictement positif, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe, que l'on connaît grâce au dernier résultat de la partie A. On en déduit le tableau de variation :

x	0		α		1		$+\infty$
Signe de $g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

Exercice III ❶ On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-4}{x-2}\right)=\ln 1=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+3\right)=-\infty.$

De plus : $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}(x-4)=0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}(x-2)=2$. Ainsi : $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}\dfrac{x-4}{x-2}=0^+$.

La fonction $x\mapsto\ln\left(\dfrac{x-4}{x-2}\right)$ est la composée de $x\mapsto\dfrac{x-4}{x-2}$ et de la fonction

ln. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}\dfrac{x-4}{x-2}=0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty$, par composition on obtient : $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}\ln\left(\dfrac{x-4}{x-2}\right)=-\infty.$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}\left(-x+3\right)=1$, on conclut $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}f(x)=-\infty.$

❷ Pour tout x de I : $f(x)=-x+3+\frac{1}{2}\ln(x-4)-\frac{1}{2}\ln(x-2)$. Alors f est dérivable sur I et pour tout x de I :

$$\begin{aligned}f'(x)&=-1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\alpha-4}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x-2}\\&=\frac{-2(x-4)(x-2)}{2(x-4)(x-2)}+\frac{(x-2)}{2(x-4)(x-2)}-\frac{(x-4)}{2(x-2)(x-4)}\\&=\frac{-2x^2+12x-16+x-2-x+4}{2(x-4)(x-2)}=\frac{-2x^2+12x-14}{2(x-4)(x-2)}=-\frac{x^2-6x+7}{(x-4)(x-2)}.\end{aligned}$$

❸ Pour tout x de I, $x-4$ et $x-2$ sont positifs, $f'(x)$ et x^2-6x+7 ont donc des signes opposés.

Étudions le signe du trinôme du second degré : x^2-6x+7.

On a : $\Delta=6^2-4\times7=8=(2\sqrt{2})^2$ (>0). Ainsi l'équation $x^2-6x+7=0$ admet deux solutions : $x_1=\dfrac{6-2\sqrt{2}}{2}=3-\sqrt{2}$ $(\simeq 1{,}586)$ et $x_2=3+\sqrt{2}$ $(\simeq 4{,}414)$. On en déduit :

si $x\in\left]-\infty;3-\sqrt{2}\right[\cup\left]3+\sqrt{2};+\infty\right[$ alors : $x^2-6x+7>0$;

si $x\in\left]3-\sqrt{2};3+\sqrt{2}\right[$ alors : $x^2-6x+7<0$.

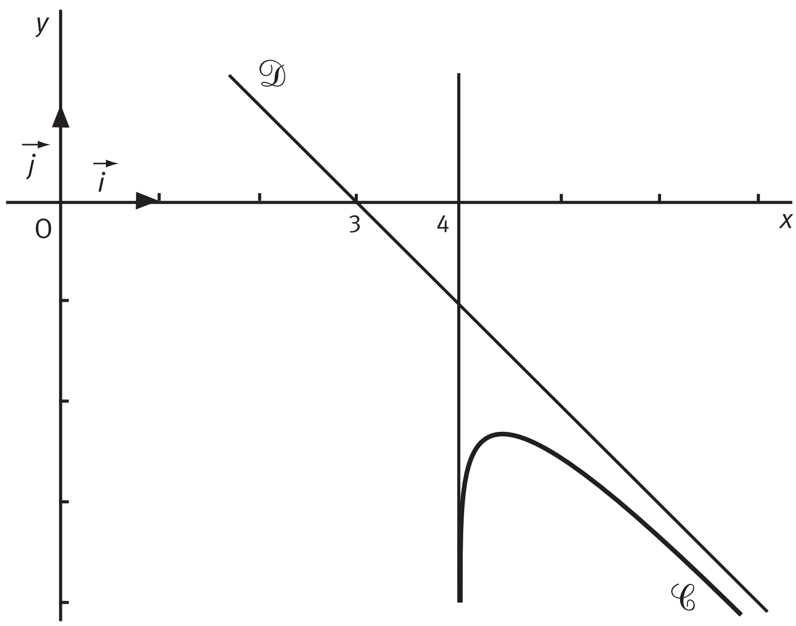
On peut donc construire le tableau de variations de f :

x	4		$3+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(3+\sqrt{2})$	$\searrow$	$-\infty$

$$f\left(3+\sqrt{2}\right)\approx -2{,}296.$$

❹ Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ revient à étudier le signe de la différence $f(x)-(-x+3)$ c'est-à-dire le signe de $\ln\left(\dfrac{x-4}{x-2}\right)$. Pour cela on compare $\dfrac{x-4}{x-2}$ et 1.

On a : $\dfrac{x-4}{x-2}-1=\dfrac{-2}{x-2}$. Or $x-2$ est strictement positif sur I, donc $\dfrac{x-4}{x-2}-1<0$ et $\dfrac{x-4}{x-2}<1$ sur I. Ceci prouve que $\ln\left(\dfrac{x-4}{x-2}\right)<0$, donc la courbe $\mathscr{C}$ est toujours située sous la droite $\mathscr{D}$.



Exercice IV ❶ La droite $\mathcal{T}$ a pour équation : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

De plus, $f(a) = \ln a$ et $f'(a) = \frac{1}{a}$. On en déduit :

$$\mathcal{T} : y = \frac{1}{a}(x-a)+\ln a \text{ soit } y = \frac{x}{a}+\ln a - 1.$$

❷ La droite $\mathcal{T}'$ a pour équation : $y = g'(b)(x-b)+g(b)$.

De plus, $g(b) = b - \ln b$ et $g'(b) = 1-\frac{1}{b}$. On en déduit :

$$\mathcal{T}' : y\left(1-\frac{1}{b}\right)(x-b)+b-\ln b \text{ soit } y = \left(1-\frac{1}{b}\right)x+1-\ln b.$$

❸ Les deux droites $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont confondues si et seulement si elles ont même coefficient directeur et même ordonnée à l'origine c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \frac{1}{a} = 1-\frac{1}{b} \\ \ln a - 1 = 1 - \ln b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b} = 1 \\ \ln a + \ln b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b} = 1 \\ \ln(ab) = 2 \end{cases}.$$

❹ On a :

$$\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b} = 1 \\ \ln(ab) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{ab} = 1 \\ ab = e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = ab \\ ab = e^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = e^2 \\ ab = e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = e^2 - a \\ a(e^2-a) = e^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = e^2 - a \\ a^2 - e^2 a + e^2 = 0 \end{cases}.$$

Résolvons l'équation du second degré : $X^2 - e^2 X + e^2 = 0$.

On a : $\Delta = e^4 - 4e^2 (> 0)$. Cette équation admet donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{e^2 - \sqrt{e^4-4e^2}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{e^2 - \sqrt{e^4-4e^2}}{2} (x_1 \simeq 1{,}192\ 433\ ;\ x_2 \simeq 6{,}196\ 623).$$

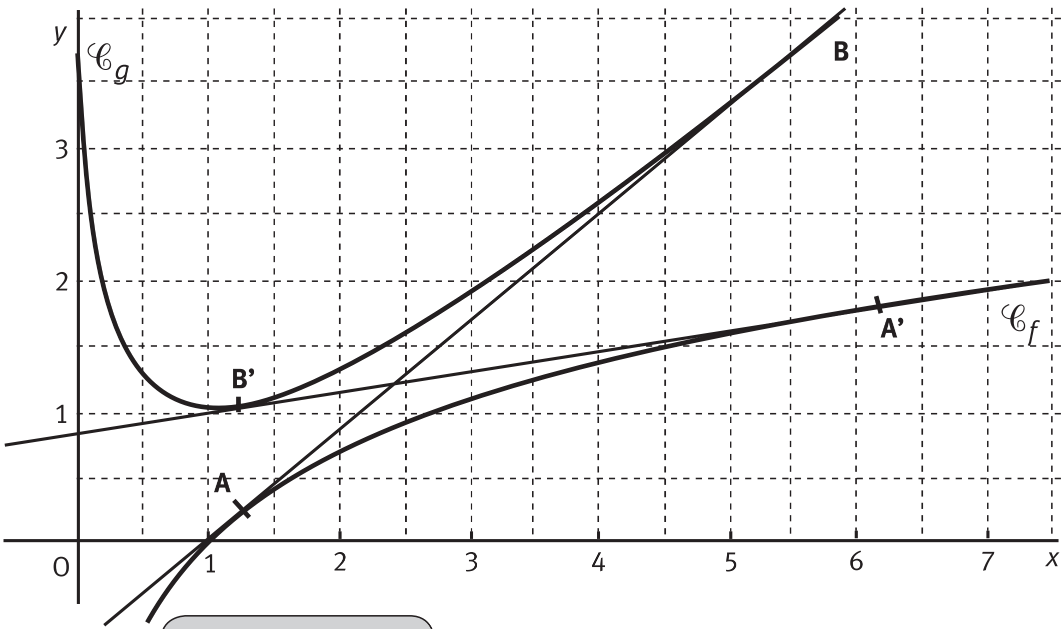
Ainsi : $\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b} = 1 \\ \ln(ab) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = e^2 - a \\ a = x_1 \text{ ou } a = x_2 \end{cases}.$

On remarque que : $e^2 - x_1 = x_2$ et $e^2 - x_2 = x_1$,

d'où $\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b} = 1 \\ \ln(ab) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (a\ ;\ b) = (x_1\ ;\ x_2)$ ou $(a\ ;\ b) = (x_2\ ;\ x_1)$.

On considère les points $A(x_1\,;f(x_1))$, $A'(x_2\,;f(x_2))$, $B(x_2\,;g(x_2))$ et $B'(x_1\,;g(x_1))$.

D'après ce qui précède les tangentes $\mathscr{C}$ en A et $\mathscr{C}'$ en B sont confondues ainsi que les tangentes $\mathscr{C}$ en A' et à $\mathscr{C}'$ en B'.



Remarque

Le résultat suivant (hors programme) pouvait simplifier les calculs : si a et b sont deux réels tels que : $a+b=S$ et $ab=P$ alors a et b sont les solutions de l'équation : $x^2-Sx+P=0$.

Exercice V

❶ Soit n un entier naturel non nul.

On a : $x^n\ln x = x^{n-1}\times x\ln x$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x=0$. Ainsi : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^n\ln x=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f_n(x)=f_n(0)$, la fonction f_n est donc continue en 0.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$.

❷ La fonction f_n est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout x de $]0\,;+\infty[$:

$f_n\,'(x)=n\times x^{n-1}\ln x + x^n\times\dfrac{1}{x}=n\times x^{n-1}\ln x+x^{n-1}=x^{n-1}\times\left[n\ln x+1\right]$.

On a donc : $f_n\,'(x)>0 \Leftrightarrow n\ln x+1>0 \Leftrightarrow \ln x>\dfrac{-1}{n} \Leftrightarrow x>\mathrm{e}^{\frac{-1}{n}}$ (en composant par la fonction exponentielle qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$).

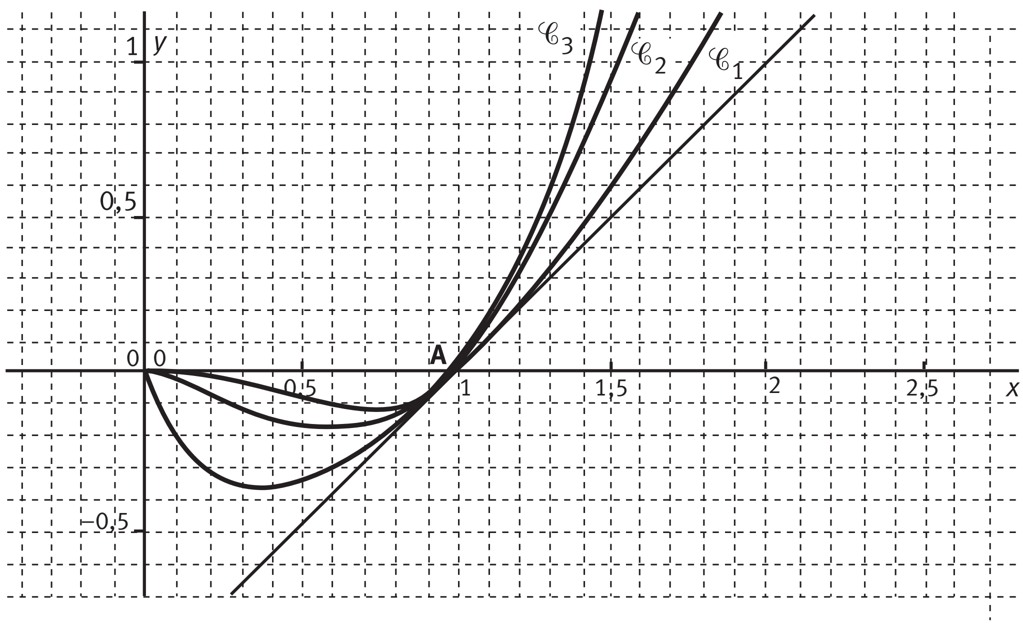
De même : $f_n'(x)<0 \Leftrightarrow x<e^{-\frac{1}{n}}$.

On en déduit le tableau de variations de f_n :

x	0		$e^{-\frac{1}{n}}$		
signe de $f_n^{'}$		$-$	0	$+$	
f_n	0	$\searrow$	$\dfrac{-1}{en}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f_n\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)=\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n\times\ln\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)=e^{-1}\times\frac{-1}{n}=\frac{-1}{en}.$$

❸



❹ On observe que les trois courbes ont deux points communs, l'origine $O(0\,;0)$ et le point A de coordonnées $(1;0)$. Montrons qtue ces deux points appartiennent à toutes les courbes $\mathscr{C}_n$.

Comme $f_n(0)=0$ pour tout entier naturel non nul *n*, l'origine O se trouve sur toutes les courbes $\mathscr{C}_n$.

Comme $f_n(1)=1^n\ln 1=0$, le point $A(1;0)$ se trouve sur toutes les courbes $\mathscr{C}_n$.

❹ Soit n un entier naturel non nul. On a $f_n'(1) = 1^{n-1}(n \times \ln 1 + 1) = 1$. La tangente à $\mathscr{C}_n$ en A est donc la droite de coefficient directeur 1 passant par $A(1;0)$, c'est-à-dire la droite d'équation : $y = x - 1$. Cette équation ne dépend pas de l'entier n. Cela signifie que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ admettent en A la même tangente : la droite d'équation : $y = x - 1$.

Exercice VI ❶ **a)** Pour montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique, on cherche une relation entre v_n et v_{n+1}.

On utilise les égalités données par l'énoncé ainsi que $u_n = v_n - 6$.

Pour tout entier naturel n, on a :

$v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 + 6 = \frac{1}{2}(v_n - 6) + 3 = \frac{1}{2}v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 6 = 15$, elle est donc à termes strictement positifs.

b) On a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 15 \times 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 30\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (v_k - 6) = \left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) - 6(n+1) = S_n - 6(n+1) = 24 - 30\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 6n.$$

Comme on a $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 30$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} -6n = -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n = -\infty$.

❷ La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 15$, donc, pour tout entier naturel n, $v_n = 15\left(\frac{1}{2}\right)^n$. On en déduit que $w_n = \ln v_n = \ln\left(15\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \ln 15 - n\ln 2$. Cette expression prouve que la suite (w_n) est la suite arithmétique de raison $-\ln 2$ et de premier terme 15.

On a

$$S''_n = \sum_{k=0}^{n} w_n = (n+1)\left(\frac{w_0 + w_n}{2}\right) = (n+1)\frac{\ln 15 + (\ln 15 - n\ln 2)}{2} = (n+1)\left(\ln 15 - n\frac{\ln 2}{2}\right).$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\ln 15-n\dfrac{\ln 2}{2}\right)=-\infty$ on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} S''_n=-\infty$.

❸ Comme $P_n=v_0\times v_1\times\ldots\times v_n$, on a $\ln(P_n)=\sum_{k=0}^{n}\ln v_k=\sum_{k=0}^{n}w_k=S''_n$ et donc $P_n=\exp\left(S''_n\right)$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} S''_n=-\infty$, on peut en déduire que $\lim_{n\to+\infty} P_n=0$.

Exercice VII

Partie A

❶ La fonction f est dérivable sur $[-1\,;1[$ et pour tout x de $[-1\,;1[$

$$f'(x)=\frac{-1}{1-x}+1=\frac{-1+1-x}{1-x}=\frac{-x}{1-x}.$$

Pour tout x de $[-1\,;1[$: $1-x>0$ donc $f'(x)$ et $-x$ ont le même signe. On en déduit le tableau de variations de f :

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	$\ln 2-1$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖

On a $f(-1)=\ln 2-1$; $f(0)=0$; $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(1-x)=0^+$ et, en composant par la fonction ln,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\ln(1-x)=-\infty \text{ d'où } \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=-\infty.$$

❷ D'après le précédent tableau de variations de f, pour tout x de $[-1\,;0[\,\cup\,]0\,;1[$: $f(x)<0$.

a) Pour tout entier naturel non nul n :

$$-\frac{1}{n+1}\in\,]-1\,;0\,[\text{ donc } f\left(-\frac{1}{n+1}\right)<0 \text{ soit } \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{n+1}<0.$$

b) Pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{n+1} \in \left]0\,;1\right[\text{ donc } f\left(\frac{1}{n+1}\right)<0 \text{ soit } \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{n+1}<0.$$

Partie B ❶ Pour tout entier naturel non nul n :

$$u_{n+1}-u_n = \cancel{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)\cancel{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n}}+\ln n$$

$$=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}+\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<0.$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

Pour tout entier naturel non nul n :

$$v_{n+1}-v_n = \cancel{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+2)\cancel{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n}}+\ln(n+1)$$

$$=\frac{1}{n+1}-\ln(n+2)+\ln(n+1)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}-\ln\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0.$$

La suite (v_n) est donc croissante.

❷ De plus pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n-v_n = \cancel{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}-\ln n\cancel{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n}}+\ln(n+1)$$

$$=\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Comme la fonction ln est strictement croissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$, u_n-v_n est strictement positif. En utilisant le sens de variation de ces deux suites on obtient $v_1<v_n<u_n<u_1$. La suite u est donc décroissante et minorée par v_1, elle est donc convergente. De façon analogue, la suite v est croissante et majorée par u_1, la suite v converge.

❸ On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$ et, en composant par la fonction ln qui est continue en 1, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln 1=0.$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n - v_n\right) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$: les deux suites convergent bien vers la même limite notée γ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma.$

❹ Pour organiser les calculs au tableur, on peut utiliser la suite a définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$, celle-ci étant aussi définie par la relation de récurrence : $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1}$.

On peut alors construire les suites de la façon suivante :

	A	B	C	D
1	n	a_n	u_n	v_n
2	1	1	=B2−ln(A2)	=B2−ln(A2+1)
3	=A2+1	=B2+1/ A3)		

Et on étend. On obtient alors les résultats suivants :

	A	B	C	D
1	179	5,76739217	0,58000636	0,57443532
2	180	5,77294772	0,57999087	0,57445069
3	181	5,77847258	0,57997555	0,5744659

Alors comme : $v_n \le \gamma \le u_n$, 0,57 est une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de γ.

■

Corrigé séquence 6

Corrigé de l'activité du chapitre 2

Activité 1 ❶ L'équation $x^3 = px+q$ équivaut à $x^3 - px - q = 0$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - px - q$, on s'intéresse donc à l'équation $f(x) = 0$. La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ donc 0 appartient à l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 ; \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\right[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

❷ Pour l'équation $x^3 = 2x+4$, on a $p = 2$ et $q = 4$. Une solution de l'équation $x^3 = 2x+4$ est donc

$$\sqrt[3]{\frac{4}{2}+\sqrt{\frac{27\times16-4\times2^3}{108}}}+\sqrt[3]{\frac{4}{2}-\sqrt{\frac{27\times16-4\times2^3}{108}}}=\sqrt[3]{2+\frac{10}{3\sqrt{3}}}+\sqrt[3]{2-\frac{10}{3\sqrt{3}}}.$$

La calculatrice indique que ceci vaut 2, et, si on ne l'avait pas deviné avant, il est facile de vérifier que 2 est bien solution de l'équation.

Pour l'équation $x^3 = 15x+4$, on trouve $27q^2 - 4p^3 = 27\times4^2 - 4\times15^3 = -13068$, on ne peut donc pas utiliser cette formule.

❸ En utilisant l'égalité $\mathrm{i}^2 = -1$, on obtient $\dfrac{27q^2-4p^3}{108} = -121 = 121\times\mathrm{i}^2 = (11\times\mathrm{i})^2$.

En remplaçant le radical par 11i, on obtient $\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{27q^2-4p^3}{108}} = 2+11\mathrm{i}$ et $\dfrac{q}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{27q^2-4p^3}{27}} = 2-11\mathrm{i}$.

❹ En appliquant les règles de calcul habituelles au nouveau nombre i, on utilise l'identité remarquable $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ avec $x = 2$ et $y = \mathrm{i}$, et on obtient :

$$(2+\mathrm{i})^3 = 2^3+3\times2^2\times\mathrm{i}+3\times2\times(\mathrm{i})^2+(\mathrm{i})^3 = 8+12\mathrm{i}-6+\mathrm{i}^3.$$

Or $\mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2\times\mathrm{i} = -\mathrm{i}$, donc $(2+\mathrm{i})^3 = 2+12\mathrm{i}-\mathrm{i} = 2+11\mathrm{i}$.

On montrerait de même que $(2-\mathrm{i})^3 = 2-11\mathrm{i}$.

❺ On écrit $x_0 = \sqrt[3]{(2+\mathrm{i})^3}+\sqrt[3]{(2-\mathrm{i})^3} = (2+11\mathrm{i})+(2-11\mathrm{i}) = 4$ (ici, ces écritures sont expérimentales, comme l'utilisation de i ; il y a en réalité plusieurs nombres dont le cube vaut $(2+\mathrm{i})^3$).

On peut vérifier qu'effectivement le nombre $x_0 = 4$ est solution de l'équation : $4^3 = 15 \times 4 + 4.$

❻ Pour trouver deux réels a et b tels que l'équation $x^3 = 15x + 4,$ ou encore $x^3 - 15x - 4 = 0,$ soit équivalente à $(x-4)(x^2 + ax + b) = 0,$ on développe le produit et on identifie les coefficients.

$(x-4)(x^2 + ax + b) = x^3 + (a-4)x^2 + (b-4a)x - 4b$ donc les équations sont équivalentes si

$$\begin{cases} a - 4 = 0 \\ b - 4a = -15. \\ -4b = -4 \end{cases}$$

Il suffit donc de choisir $a = 4$ et $b = 1$ et

$$\begin{aligned} x^3 - 15x - 4 = 0 &\Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 4x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x^2 - 4x + 1 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $x^2 - 4x + 1$ est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12,$ on trouve donc les deux racines $x_1 = \dfrac{-(-4) + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3}$ et $x_2 = \dfrac{-(-4) - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$

L'ensemble des solutions de l'équation $x^3 = 15x + 4$ est donc

$$S = \left\{4\ ;\ 2 + \sqrt{3}\ ;\ 2 - \sqrt{3}\right\}.$$

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 2

Exercice 1

a) $z = (1+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i} - 2\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 = 1 + 2 - \mathrm{i} = 3 - \mathrm{i}$

b) $z = (2-3\mathrm{i})(3\mathrm{i}) = 6\mathrm{i} - 9\mathrm{i}^2 = 9 + 6\mathrm{i}$

c) $$\begin{aligned} z &= (2\mathrm{i}+1)(1+\mathrm{i})^2(3\mathrm{i}-4) = (2\mathrm{i}+1)(1^2 + 2\mathrm{i} - 1)(3\mathrm{i}-4) \\ &= (2\mathrm{i}+1)(2\mathrm{i})(3\mathrm{i}-4) = (-4+2\mathrm{i})(3\mathrm{i}-4) \\ &= -12\mathrm{i} - 6 + 16 - 8\mathrm{i} = 10 - 20\mathrm{i} \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} z &= (5+4\mathrm{i})(3+7\mathrm{i})(2-3\mathrm{i}) = (15 + 12\mathrm{i} + 35\mathrm{i} - 28)(2-3\mathrm{i}) \\ &= (-13 + 47\mathrm{i})(2-3\mathrm{i}) = -26 + 94\mathrm{i} + 39\mathrm{i} + 141 = 115 + 133\mathrm{i} \end{aligned}$$

e) $z = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = \dfrac{(1-\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{-2\mathrm{i}^2} = \dfrac{\mathrm{i}^2 - \mathrm{i}}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

f) $z = \dfrac{3-4\mathrm{i}}{7+5\mathrm{i}} = \dfrac{(3-4\mathrm{i})(7-5\mathrm{i})}{(7+5\mathrm{i})(7-5\mathrm{i})} = \dfrac{21 - 28\mathrm{i} - 15\mathrm{i} - 20}{49 + 25} = \dfrac{1 - 43\mathrm{i}}{74} = \dfrac{1}{74} - \dfrac{43}{74}\mathrm{i}$

g) $z=\dfrac{(3-2i)(5+i)}{5-i}=\dfrac{(3-2i)(5+i)^2}{(5-i)(5+i)}=\dfrac{(3-2i)(25+10i-1)}{25+1}$

$=\dfrac{(3-2i)(24+10i)}{26}=\dfrac{(3-2i)(12+5i)}{13}=\dfrac{36-24i+15i+10)}{13}$

$=\dfrac{46-9i}{13}=\dfrac{46}{13}-\dfrac{9}{13}i$

Exercice 2 **a)** $(3-i)\overline{z}=\dfrac{1+i}{1-i}\quad \Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{1+i}{(1-i)(3-i)}$

$$\Leftrightarrow \overline{z}=\frac{1+i}{2-4i}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z}=\frac{(1+i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z}=\frac{-2+6i}{2^2+4^2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z}=-\frac{1}{10}+i\frac{3}{10}$$

$$\Leftrightarrow z=-\frac{1}{10}-i\frac{3}{10}$$

Conclusion : $S=\left\{-\dfrac{1}{10}-i\dfrac{3}{10}\right\}$

b) On pose $z=x+iy$, avec x et y réels. On a alors les équivalences :

$$4z^2+8z\overline{z}-3=0 \Leftrightarrow 4\left(x^2-y^2+2\,i\,xy\right)+8\left(x^2+y^2\right)-3=0$$

$$\Leftrightarrow 12x^2+4y^2-3+8\,i\,xy=0.$$

On utilise l'unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe, appliquée ici au nombre complexe nul :

$$4z^2+8z\overline{z}-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases}12x^2+4y^2-3=0\\ 8xy=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}12x^2+4y^2-3=0\\ xy=0\end{cases}$$

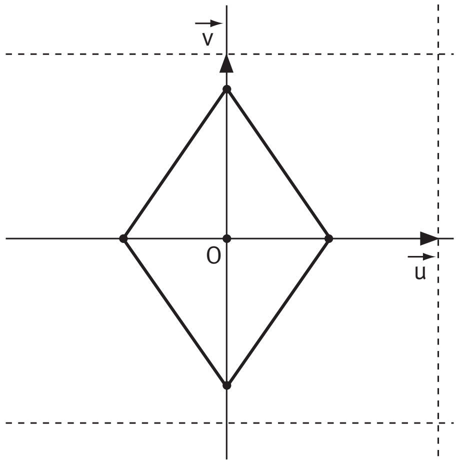
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y^2=\dfrac{3}{4}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}y=0\\ x^2=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x=0\\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ y=0\end{cases}$$

Conclusion : $S=\left\{i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;-i\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right\}$

Deux points images sont sur l'axe des imaginaires purs et symétriques par rapport à l'origine du repère car leurs affixes sont opposés.

Les deux autres points images sont sur l'axe des réels et sont de même symétrique par rapport à l'origine du repère. Le quadrilatère formé par les quatre points images est donc un parallélogramme (les diagonales se coupent en leur milieu) dont les diagonales sont perpendiculaires, il s'agit donc d'un losange.



c) On pose $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels. On a alors les équivalences :

$$\bar{z} = \frac{4}{z} \Leftrightarrow z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

On reconnaît, dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v}\right)$, une équation du cercle de centre O et de rayon 2. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des affixes des points de ce cercle.

d) On pose $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels. On a alors les équivalences :

$$z^2 - 2\mathrm{i}\bar{z} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy\right) - 2\mathrm{i}\left(x - \mathrm{i}y\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2y + 2\mathrm{i}(xy - x) = 0$$

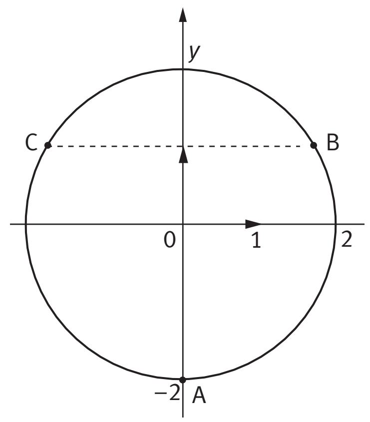
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 2y = 0 \\ x(y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y^2 - 2y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1 \\ x^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y(y+2) = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1 \\ (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases}$$

On a donc $S = \{0, -2\mathrm{i}, \sqrt{3} + \mathrm{i}, -\sqrt{3} + \mathrm{i}\}$ soit $\mathrm{O}(0)$; $A(-2\mathrm{i})$; $\mathrm{B}(\sqrt{3} + \mathrm{i})$; $\mathrm{C}(-\sqrt{3} + \mathrm{i})$.



Le repère est orthonormé, on utilise les coordonnées des points : $A(0\,;-2)$, $B\left(\sqrt{3}\,;1\right)$ et $C\left(-\sqrt{3}\,;1\right)$.

Les points B et C ont des abscisses opposées et la même ordonnée, ils sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. On sait donc que le triangle ABC est isocèle de sommet A, il suffit donc de prouver que $AB = BC$.

On a :

$$AB=\sqrt{\left(\sqrt{3}-0\right)^2+(1-(-2))^2}=\sqrt{12} \text{ et } BC=\sqrt{\left(-\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)^2+(1-1)^2}=\sqrt{12}.$$

Le triangle ABC est bien un triangle équilatéral.

Remarque

Dans le chapitre 3, une nouvelle notion, le module d'un nombre complexe, permettra de calculer les longueurs directement.

Exercice 3 Écrivons $Z=(z-2)(\bar{z}+\mathrm{i})$; $Z=X+\mathrm{i}Y$; $z=x+\mathrm{i}y$, x, y, X, Y réels.

a) On a donc :

► $$\begin{aligned} X+\mathrm{i}Y &= (x-2+\mathrm{i}y)(x+\mathrm{i}(1-y)) \\ &= (x-2)x-y(1-y)+\mathrm{i}(xy+(x-2)(1-y)) \\ &= x^2-2x+y^2-y+\mathrm{i}(x+2y-2) \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et des parties imaginaires, on obtient le système :

$$\begin{cases} X = x^2-2x+y^2-y \\ Y = x+2y-2 \end{cases}$$

► $$\begin{aligned} M(Z)\in E_1 &\Leftrightarrow Z \text{ réel} \Leftrightarrow Y=0 \Leftrightarrow x+2y-2=0 \\ &\Leftrightarrow M \text{ sur } (D) \end{aligned}$$

où (D) est la droite d'équation $x+2y-2=0$.

Il est important de procéder par équivalences pour conclure à l'égalité des deux ensembles.

Conclusion : $E_1 = (D)$

▶ $M(Z) \in E_2 \Leftrightarrow Z$ imaginaire pur $\Leftrightarrow X = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} \text{ (mise sous forme canonique)}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

On reconnaît l'équation réduite du cercle de centre $\Omega\left(1, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Conclusion : E_2 est le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

b) C'est une autre méthode.

On utilise les propriétés du conjugué d'un produit, d'une somme, d'un réel.

▶ Z réel $\Leftrightarrow Z = \overline{Z}$

$$\Leftrightarrow (z-2)(\overline{z}+\mathrm{i}) = \overline{(z-2)(\overline{z}+\mathrm{i})}$$

$$\Leftrightarrow (z-2)(\overline{z}+\mathrm{i}) = \overline{(z-2)}\,\overline{(\overline{z}+\mathrm{i})}$$

$$\Leftrightarrow (z-2)(\overline{z}+\mathrm{i}) = (\overline{z}-2)(z-\mathrm{i})$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z} - 2\overline{z} + \mathrm{i}z - 2\mathrm{i} = z\overline{z} - 2z - \mathrm{i}\overline{z} + 2\mathrm{i} \quad \text{(ligne 1)}$$

$$\Leftrightarrow 2(z - \overline{z}) + \mathrm{i}(z + \overline{z}) - 4\mathrm{i} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \times 2\mathrm{i}y + \mathrm{i} \times 2x - 4\mathrm{i} = 0 \text{ (on a utilisé } z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z) \text{ et } z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z))$$

$$\Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$$

On retrouve la même équation qu'en **a)**.

▶ Z imaginaire $\Leftrightarrow Z = -\overline{Z}$

En utilisant les calculs précédents, il suffit de prendre l'opposé du second membre de (ligne 1), d'où :

Z imaginaire $\Leftrightarrow z\overline{z} - 2\overline{z} + \mathrm{i}z - 2\mathrm{i} = -z\overline{z} + 2z + \mathrm{i}\overline{z} - 2\mathrm{i}$

$$\Leftrightarrow 2z\overline{z} - 2(\overline{z} + z) + \mathrm{i}(z - \overline{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4x + 2\mathrm{i}^2 y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - y = 0$$

Là encore, on est ramené à la même situation qu'en **a)**.

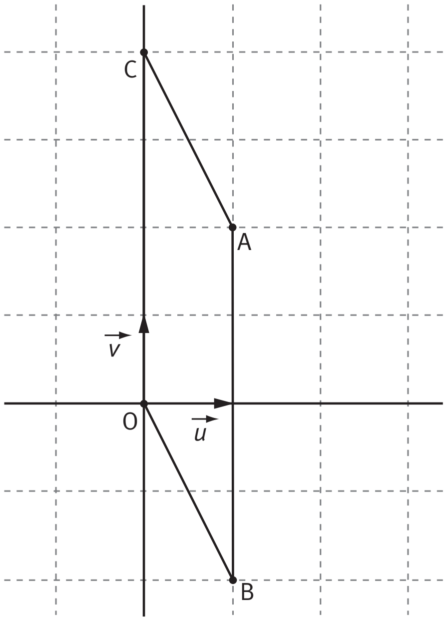
Exercice 4 ❶ $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16$ et les deux solutions sont

$$z_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \mathrm{i}\sqrt{16}}{2} = 1 + 2\,\mathrm{i} \text{ et}$$

$$z_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \mathrm{i}\sqrt{16}}{2} = 1 - 2\,\mathrm{i}.$$

❷ Le point A a pour affixe z_1 et B a pour affixe z_2. On a :

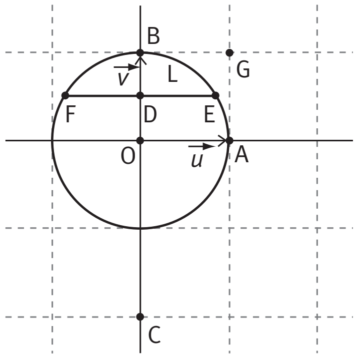
$$\begin{aligned} \text{OCAB est un parallélogramme} &\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA} \\ &\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{OC}} = z_{\overrightarrow{BA}} \\ &\Leftrightarrow c = z_1 - z_2 \\ &\Leftrightarrow c = 4\,\mathrm{i}. \end{aligned}$$



Exercice 5 Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1) $z^4 + 7z^2 + 12 = 0$, on pose $Z = z^2$ et on résout d'abord l'équation du second degré (E_2) $Z^2 + 7Z + 12 = 0$. Pour (E_2) on trouve $\Delta = 49 - 4 \times 12 = 1$ et on en déduit les deux solutions $Z_1 = \dfrac{-7+1}{2} = -3$ et $Z_2 = \dfrac{-7-1}{2} = -4$. Les solutions de l'équation (E_1) sont les nombres complexes z tels que $z^2 = Z_1 = -3$ ou $z^2 = Z_2 = -4$. On obtient ainsi les quatre solutions (imaginaires pures) : $\mathrm{i}\sqrt{3}, -\mathrm{i}\sqrt{3}, 2\,\mathrm{i}$ et $-2\,\mathrm{i}$.

Corrigé de l'activité du chapitre 3

Activité 2 Tous les points qui interviennent dans cette activité ont des coordonnées polaires simples car il est facile de trouver une mesure de l'angle en utilisant des valeurs remarquables des cosinus et sinus.



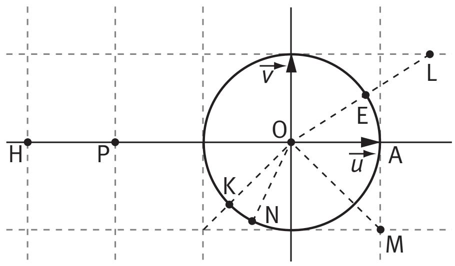
❶ $A(1,0)$, $B\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $C\left(2,-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $D\left(0{,}5,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $E\left(1,\dfrac{\pi}{6}\right)$, $F\left(1,\dfrac{5\pi}{6}\right)$ et $G\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ (pour la première coordonnée de G, c'est-à-dire la longueur OG on a utilisé la longueur de la diagonale du carré OAGB).

❷ $z_H = -3$.

D'après sa première coordonnée polaire, le point K est sur le cercle trigonométrique. Comme la deuxième coordonnée est $-\dfrac{3\pi}{4}$ les coordonnées cartésiennes de K sont $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et son affixe est $z_K = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On a $\left(\vec{u};\overrightarrow{OE}\right) = \left(\vec{u};\overrightarrow{OL}\right)$, donc, en tenant compte des longueurs, on obtient $\overrightarrow{OK} = 2\overrightarrow{OE}$ soit $z_L = 2z_E$.

Le point E est sur le cercle trigonométrique, on détermine son affixe comme on l'a fait pour le point K et finalement : $z_L = 2z_E = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$.



❸ En utilisant le triangle rectangle isocèle OAM, on trouve que les coordonnées polaires de M sont $\left(\sqrt{2},-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

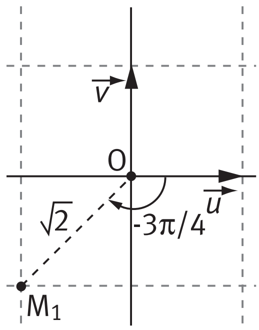
Pour le point N, on reconnaît que ses coordonnées cartésiennes sont le cosinus et le sinus de $-\dfrac{2\pi}{3}$, donc ses coordonnées polaires sont $\left(1,-\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

L'affixe de P est le nombre réel négatif -2, donc les coordonnées polaires de P sont $(2,\pi)$.

Corrigé des exercices du chapitre 3

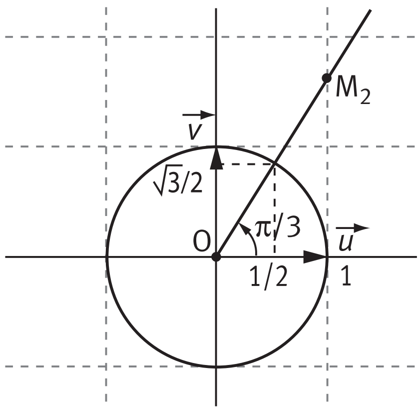
Exercice 6 **a)** On a : $|z_1|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ d'où $z_1=\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, on reconnaît le cosinus et le sinus de $\frac{-3\pi}{4}$ qui est donc un argument de z_1.

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}.$$



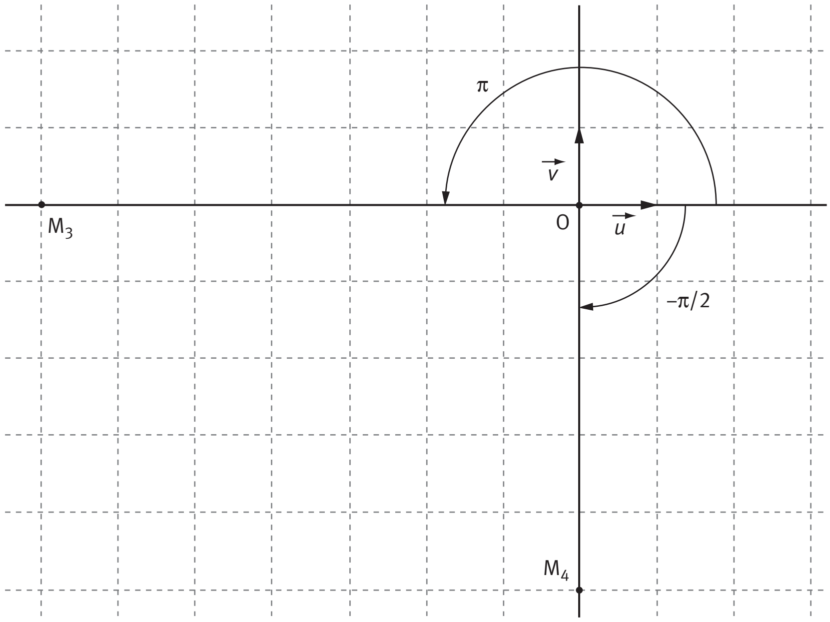
b) On a : $|z_2|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$ d'où $z_2=2\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, on reconnaît le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{3}$ qui est donc un argument de z_2.

$$z_2=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$



c) On a : $z_3=-7=7\times(-1)$ donc $z_3=7(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=7e^{\mathrm{i}\pi}$.

d) On a : $z_4=-5\,\mathrm{i}=5(0+(-1)\mathrm{i})$, on reconnaît le cosinus et le sinus de $\frac{-\pi}{2}$ qui est donc un argument de z_3. Donc $z_4=5e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.



Les représentations graphiques donnent un contrôle des résultats, mais aussi, dans les cas très simples comme les deux derniers, leurs visualisations permettent de donner directement la forme trigonométrique.

Exercice 7 **a)** Comme on l'a fait dans l'exercice 6, on trouve $1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et donc

$$z_1=(1-\mathrm{i})^5=\left(\sqrt{2}\right)^5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}} \text{ soit } z_1=4\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}.$$

On en déduit que $z_1=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et donc

$$z_1=(1-\mathrm{i})^5=-4+4\mathrm{i}.$$

b) On a : $1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $-3+3\mathrm{i}=3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ donc

$$z_2=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\times3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}=6\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)} \text{ soit } z_2=6\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}.$$

c) On a : $z_3=\frac{1}{\mathrm{i}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, on retrouve ainsi que $\frac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$.

d) On a : $2-2\mathrm{i}=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ donc

$$z_4=\frac{2-2\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\frac{2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} \text{ soit } z_4=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}.$$

e) On a : $z_5=\dfrac{(2-2\,\mathrm{i})^3}{\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^2}=\dfrac{\left(2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^3}{\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^2}=2\left(\sqrt{2}\right)^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}-\frac{2\pi}{6}\right)}$ soit :

$$z_5=4\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}=4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}.$$

Exercice 8 On a : $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{1}{2}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ donc

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}.$$

La forme trigonométrique de $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est donc :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}=\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}.$$

En développant le produit on trouve la forme algébrique :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}^2\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires on trouve le cosinus et le sinus de $\dfrac{\pi}{12}$:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\text{ et }\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Exercice 9 En appliquant l'identité remarquable $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ à $x=\cos\theta$ et $y=\mathrm{i}\sin\theta$, on obtient :

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3=(\cos\theta)^3+3(\cos\theta)^2(\mathrm{i}\sin\theta)+3(\cos\theta)(\mathrm{i}\sin\theta)^2+(\mathrm{i}\sin\theta)^3$$
$$=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+\mathrm{i}\left(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\right).$$

On sait que, pour un nombre complexe z non nul, on a $\arg\left(z^n\right)=n\arg(z)$.

Comme $\arg(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=\theta\quad(2\pi)$, on obtient $\arg\left((\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3\right)=3\theta\quad(2\pi)$.

Les modules sont égaux à 1, donc : $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3=\cos(3\theta)+\mathrm{i}\sin(3\theta)$.

On identifie ensuite les parties réelles et les parties imaginaires :

$$\cos(3\theta)=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta\ ;$$
$$\sin(3\theta)=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta.$$

Exercice 10 ❶ On a : $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \dfrac{AC}{AB}$ d'après la propriété 14.

❷ D'après la propriété 3, le nombre complexe $z_B - z_A$ a pour image le vecteur $\overrightarrow{AB}$, $z_B - z_A = z_{\overrightarrow{AB}}$.

Les points A, B et C sont distincts, donc les complexes $z_B - z_A$ et $z_C - z_A$ ne sont pas nuls et on peut étudier leurs arguments : $\arg(z_B - z_A) = \arg z_{\overrightarrow{AB}} = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ et de même $\arg(z_C - z_A) = \arg z_{\overrightarrow{AC}} = (\vec{u}, \overrightarrow{AC})$.

On sait qu'un argument d'un quotient est égal à la différence d'un argument du numérateur et d'un argument du dénominateur. D'où :

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}),$$

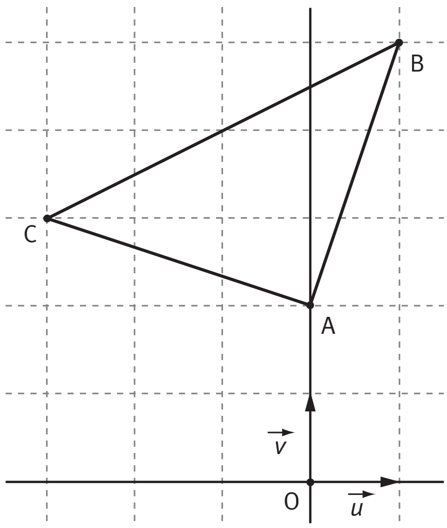
et comme $(\vec{u}, \overrightarrow{AC}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$,

on a enfin $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

❸ Application : $z_A = 2\,i$, $z_B = 1 + 5\,i$ et $z_C = -3 + 3\,i$. On a :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(-3+3\,i) - 2i}{(1+5\,i) - 2i} = \frac{-3+i}{1+3\,i} = \frac{(-3+i)(1-3\,i)}{1^2 + 3^2} = \frac{10\,i}{10} = i.$$

On en déduit $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$, le quotient $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ a pour module 1 et pour argument $\dfrac{\pi}{2}$, donc $\dfrac{AC}{AB} = 1$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}$, donc le triangle ABC est rectangle et isocèle de sommet A.



Correction des exercices de synthèse du chapitre 4

Exercice I On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $2z^3+(1-4\text{i})z^2+(1-2\text{i})z-2\text{i}=0.$

❶ On cherche un nombre $z_0=\text{i}t$ (avec t réel) solution de l'équation (E). On remplace :

$$2(\text{i}t)^3+(1-4\text{i})(\text{i}t)^2+(1-2\text{i})(\text{i}t)-2\text{i}=0.$$

On utilise les puissances de i et on trouve :

$$-t^2+2t+\text{i}\left(-2t^3+4t^2+t-2\right)=0.$$

Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

On cherche donc un réel t vérifiant le système $\begin{cases}-t^2+2t=0\\-2t^3+4t^2+t-2=0\end{cases}.$

La première équation a pour solutions 0 et 2. La deuxième équation n'est pas vérifiée pour $t=0$ et elle est vérifiée pour $t=2.$ On conclut donc que le nombre $z_0=2\text{i}$ est solution de l'équation (E).

❷ Pour déterminer trois nombres réels a, b et c tels que

$$2z^3+(1-4\text{i})z^2+(1-2\text{i})z-2\text{i}=(z-2\,\text{i})\left(az^2+bz+c\right),$$

on développe le produit du membre de droite et on identifie les coefficients. On a :

$$(z-2\text{i})\left(az^2+bz+c\right)=az^3+(b-2\,\text{i}a)z^2+(c-2\,\text{i}b)z-2\,\text{i}c$$

donc il suffit de trouver trois nombres a, b et c tels que

$$\begin{cases}a=2\\b-2\,\text{i}a=1-4\,\text{i}\\c-2\,\text{i}b=1-2\,\text{i}\\-2\,\text{i}c=-2\,\text{i}\end{cases},\ \text{soit}\ \begin{cases}a=2\\b=1\\c=1\\c=1\end{cases}.$$

L'équation (E) équivaut donc à $(z-2\,\text{i})\left(2z^2+z+1\right)=0.$

❸ On a : (E) $\Leftrightarrow z-2\,\text{i}=0$ ou $2z^2+z+1=0.$

Le discriminant de l'équation du second degré est $\Delta=-7,$ on obtient donc les deux solutions

$$z_1=\frac{-1+\text{i}\sqrt{7}}{4}\ \text{ et }\ z_2=\frac{-1-\text{i}\sqrt{7}}{4}.$$

L'équation (E) a donc trois solutions : $S=\left\{2\,\text{i}\,;\ \frac{-1+\text{i}\sqrt{7}}{4}\ ;\ \frac{-1-\text{i}\sqrt{7}}{4}\right\}.$

Exercice II ❶ Soit Z un nombre complexe de module 1 et θ un de ses arguments.

On a $Z=\text{e}^{\text{i}\theta}$ et $Z+\frac{1}{Z}=\text{e}^{\text{i}\theta}+\frac{1}{\text{e}^{\text{i}\theta}}=\text{e}^{\text{i}\theta}+\text{e}^{-\text{i}\theta}=2\cos\theta$: on trouve bien un nombre réel.

❷ Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et de même module.

On a $\dfrac{(z+z')^2}{zz'}=\dfrac{z^2+2zz'+z'^2}{zz'}=\dfrac{z}{z'}+2+\dfrac{z'}{z}$. En posant $Z=\dfrac{z}{z'}$ on obtient $\dfrac{(z+z')^2}{zz'}=Z+2+\dfrac{1}{Z}$. On utilise le résultat du ❶ puisque $|Z|=\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}=1$ (car z et z' ont le même module) et on trouve bien un nombre réel.

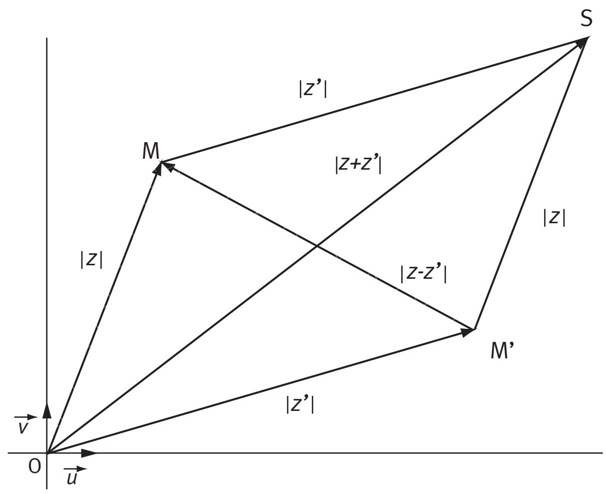
Exercice III ❶ On utilise plusieurs fois l'égalité $z\overline{z}=|z|^2$:

$$\begin{aligned}|z+z'|^2+|z-z'|^2&=(z+z')\overline{(z+z')}+(z-z')\overline{(z-z')}\\&=(z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right)+(z-z')\left(\overline{z}-\overline{z'}\right)\\&=\left(z\overline{z}+z\overline{z'}+z'\overline{z}+z'\overline{z'}\right)+\left(z\overline{z}-z\overline{z'}-z'\overline{z}+z'\overline{z'}\right)\\&=2z\overline{z}+2z'\overline{z'}\\&=2\left(|z|^2+|z'|^2\right).\end{aligned}$$

❷ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\vec{u},\vec{v}\right)$, soit M le point d'affixe z, M′ le point d'affixe z'. On appelle S le point d'affixe $z+z'$ et OMSM′ est un parallélogramme car $z+z'$ est l'affixe de $\overrightarrow{\text{OM}}+\overrightarrow{\text{OM}'}$.

On interprète géométriquement les modules, on obtient des longueurs : $|z|=\text{OM}$, $|z'|=\text{OM}'$, $|z+z'|=\text{OS}$ et $|z-z'|=\left|z_{\overrightarrow{\text{M'M}}}\right|=\text{M'M}$. On a donc obtenu au ❶ que dans le parallélogramme OMSM′ « la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés ».

Cette propriété est vraie pour tous les parallélogrammes puisque l'on peut toujours choisir un sommet d'un parallélogramme comme origine d'un repère orthonormé direct.



Exercice IV ❶ Réponse **c)**.

❷ Réponse **c)**. En utilisant la forme algébrique $z=a+\text{i}b$, on constate que les réponses **a)** et **b)** ne conviennent pas, donc la réponse correcte est la réponse **c)**.

Remarque

En observant que $\left|i\bar{z}+1\right|=\left|i\bar{z}-i^2\right|=\left|i\left(\bar{z}-i\right)\right|=\left|i\right|\left|\overline{z+i}\right|=1\times\left|z+i\right|$ on trouve la réponse **c)**.

❸ Réponse **b)**. $-1+i\sqrt{3}=2\left(\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc $\arg\left(-1+i\sqrt{3}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$.

$$\arg\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}=\arg\left(-1+i\sqrt{3}\right)-\arg\bar{z}=\frac{2\pi}{3}+\arg z=\frac{2\pi}{3}+\theta.$$

❹ Réponse **b)**.

On a $\sqrt{3}+i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $\arg\left(\sqrt{3}+i\right)^n=n\dfrac{\pi}{6}$.

Le complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si $\arg\left(\sqrt{3}+i\right)^n=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ (avec k entier relatif), soit $n\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ c'est-à-dire $n=6k+3$.

Remarque

La réponse **a)** correspond à une seule valeur de n alors qu'il faut les donner toutes, la réponse **c)** correspond aux valeurs de n pour lesquelles $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ est réel.

❺ Réponse **a)**. Il s'agit de la médiatrice du segment [AB] car $|z-i|=|z+1|\Leftrightarrow \text{MA}=\text{MB}$.

❻ Réponse **b)**. Comme $\bar{z}-(1-i)=\overline{z-(1+i)}$ on a les équivalences :

$$(z-(1+i))(\bar{z}-(1-i))=5\Leftrightarrow|z-(1+i)|^2=5$$
$$\Leftrightarrow \Omega\text{M}=\sqrt{5}.$$

Il s'agit du cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$.

❼ Réponse **c)**. En multipliant par le dénominateur (avec $z-1\neq 0$), l'équation donnée est équivalente à l'équation du second degré $z^2-2z+2=0$ qui a pour ensemble solution dans $\mathbb{C}$: $\{1+i\ ;\ 1-i\}$.

Exercice V *Trois méthodes*

Soit z un nombre complexe différent de i et soit M son image dans le plan muni d'un repère orthonormé direct. On pose $Z=\dfrac{z+2}{z-i}$. On appelle (E) l'ensemble des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur.

❷ On va utiliser l'équivalence : $\text{M}\in(\text{E})\Leftrightarrow \text{Re}(Z)=0$.

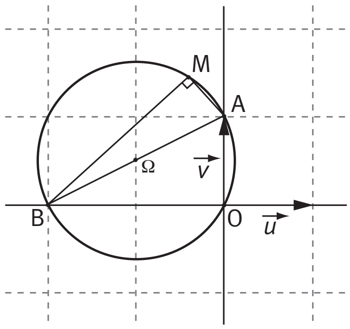
On pose $z=x+iy$ et $Z=X+iY$, les nombres x, y, X et Y étant réels.

Pour $x+\mathrm{i}y \neq \mathrm{i}$ on a :

$$\begin{aligned} X+\mathrm{i}Y &= \frac{x+\mathrm{i}y+2}{x+\mathrm{i}y-\mathrm{i}} = \frac{(x+2)+\mathrm{i}y}{x+\mathrm{i}(y-1)} = \frac{((x+2)+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}(y-1))}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x+y^2-y}{x^2+(y-1)^2} + \mathrm{i}\frac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in (\mathrm{E}) &\Leftrightarrow x+\mathrm{i}y \neq \mathrm{i} \text{ et } x^2+2x+y^2-y=0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{M} \neq \mathrm{A} \text{ et } (x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

L'ensemble (E) est donc le cercle de centre Ω d'affixe $-1+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$, privé du point A.



❷ On va utiliser l'équivalence : $\mathrm{M} \in (\mathrm{E}) \Leftrightarrow Z=0$ ou $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

On appelle A le point d'affixe i et B le point d'affixe -2. Pour $z \neq \mathrm{i}$ et $z \neq -2$, on a :

$$\arg Z = \arg(z+2) - \arg(z-\mathrm{i}) = \arg\left(z_{\overrightarrow{BM}}\right) - \arg\left(z_{\overrightarrow{AM}}\right)$$

$$\arg Z = \left(\vec{u}, \overrightarrow{BM}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) = \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right).$$

$$\mathrm{M} \in (\mathrm{E}) \Leftrightarrow \mathrm{M} = \mathrm{B} \text{ ou } \arg(Z) = \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{M} \in (\mathrm{E}) \Leftrightarrow \mathrm{M} = \mathrm{B} \text{ ou } \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}+k\pi.$$

D'après la configuration du triangle rectangle et de son cercle circonscrit, l'ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$ est le cercle de diamètre [AB] privé de A et de B.

On conclut donc que l'ensemble (E) est le cercle de diamètre [AB] privé de A.

❸ Pour $z \neq \mathrm{i}$ on a :

$$
\begin{aligned}
Z \text{ est imaginaire pur} \quad & \Leftrightarrow \overline{Z} = -Z \\
& \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+2}{z-\mathrm{i}}\right)} = -\frac{z+2}{z-\mathrm{i}} \\
& \Leftrightarrow \frac{\overline{z}+2}{\overline{z}+\mathrm{i}} = -\frac{z+2}{z-\mathrm{i}} \\
& \Leftrightarrow \left(\overline{z}+2\right)(z-\mathrm{i}) + (z+2)\left(\overline{z}+\mathrm{i}\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow 2z\overline{z} + 2\left(z+\overline{z}\right) + \mathrm{i}\left(z-\overline{z}\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow 2|z|^2 + 4\mathrm{Re}(z) + 2\mathrm{i}\times \mathrm{Im}(z) = 0
\end{aligned}
$$

On pose $z = x + \mathrm{i}y$, les nombres x et y étant réels et on trouve :

$$2|z|^2 + 4\mathrm{Re}(z) + 2\mathrm{i}\times \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2\right) + 4x - 2y = 0.$$

L'équation obtenue est équivalente à celle du ❶, on conclut de même :

l'ensemble (E) est le cercle de centre Ω d'affixe $-1+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$, privé du point A.

■

Corrigé séquence 7

Corrigé des activités du chapitre 2

Activité 1 ❶ La distance parcourue est $3\times10\,\text{m}=30\,\text{m}$.

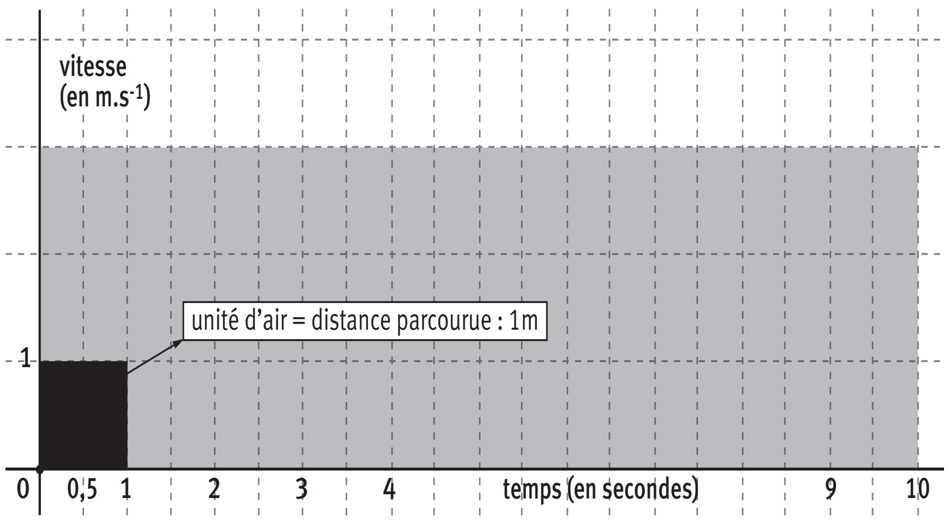
❷ Pour obtenir une valeur approchée de la distance parcourue dans ce deuxième cas, on peut considérer que la vitesse est constante entre deux valeurs. Par exemple, entre $t=0\,\text{s}$ et $t=0{,}5\,\text{s}$, on considère que la vitesse reste égale à $9\,\text{m.s}^{-1}$, une valeur approchée de la distance parcourue entre ces deux instants est alors $9\times0{,}5\,\text{m}=4{,}5\,\text{m}$. Ainsi la distance d parcourue pendant les 10 s peut être estimée :

$$d\approx(9\times0{,}5+7{,}6\times0{,}5+6{,}1\times0{,}5+4{,}6\times0{,}5+3{,}7\times0{,}5+\ldots$$

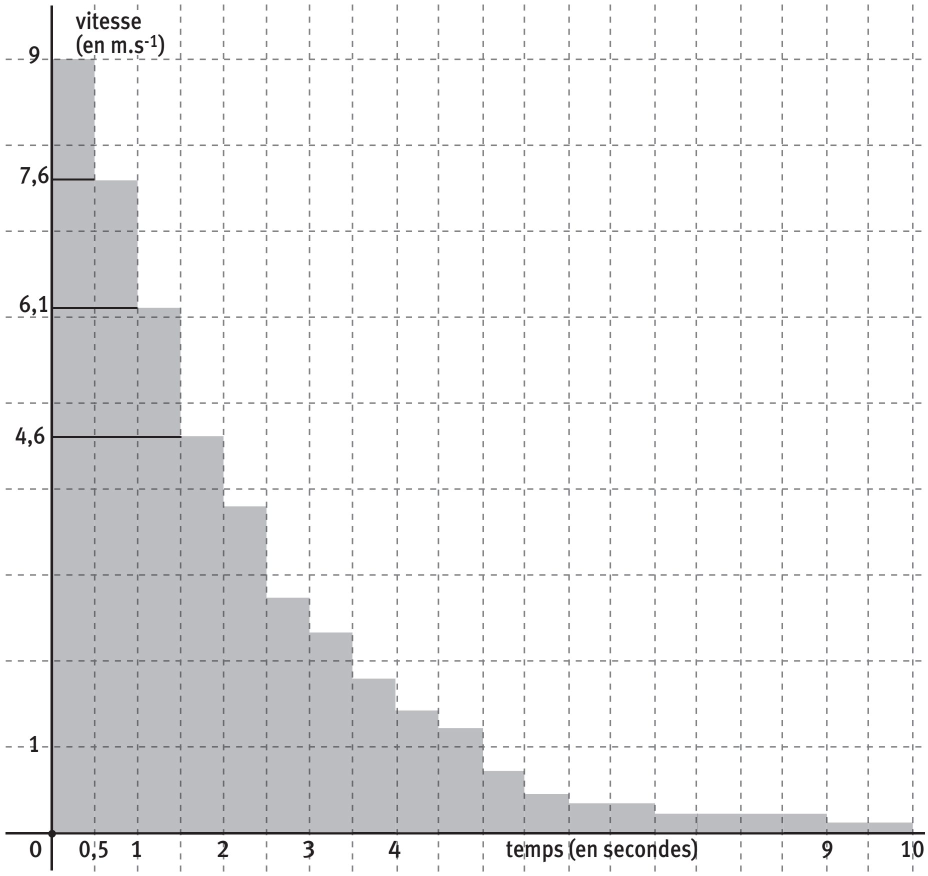
$$\ldots+0{,}4\times1+0{,}2\times1+0{,}2\times1+0{,}1\times1)\,\text{m}$$

$$d\approx21{,}65\,\text{m}.$$

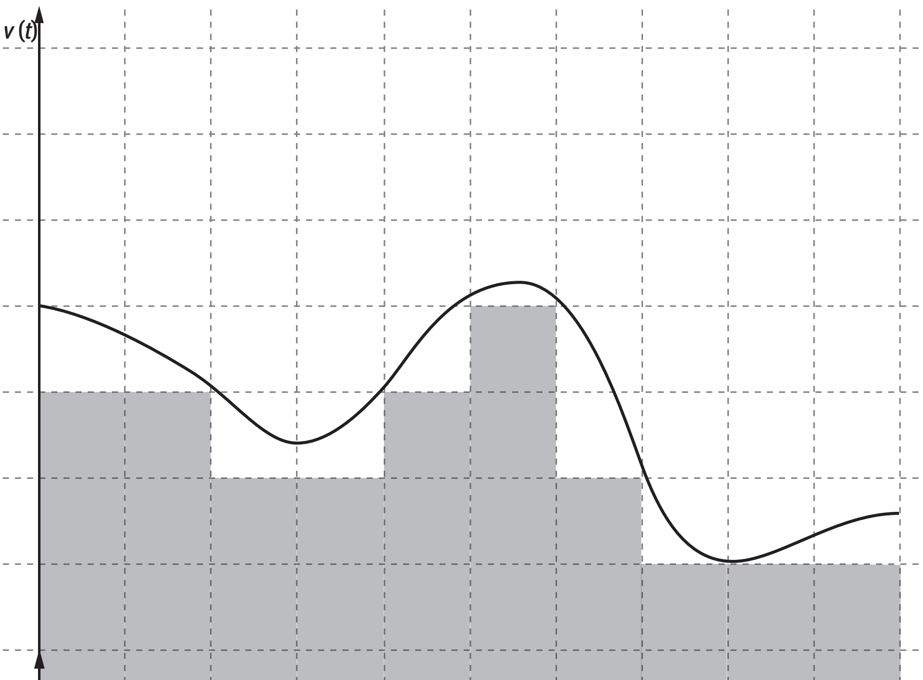
❸ Le produit de la question ❶ peut être interprété comme le calcul de l'aire d'un rectangle ayant un côté de mesure 10 (la durée) et un côté de mesure 3 (la vitesse). La distance parcourue est alors la mesure de l'aire du rectangle. La mesure de l'aire est faite avec l'unité donnée par le repère (qui n'est pas nécessairement orthonormé), cette unité est coloriée sur le graphique et elle représente $1\,\text{m}$ de distance parcourue puisque $1\text{m.s}^{-1}\times1\text{s}=1\text{m}$.



La somme de la question ❷ peut être interprétée comme la somme d'aires de rectangles dont les côtés parallèles à l'axe des abscisses sont les intervalles de temps et dont les côtés parallèles à l'axe des ordonnées sont les vitesses.



On évalue de façon analogue l'aire sous la courbe qui a été enregistrée.



L'aire d'un carreau correspond toujours au produit $1\text{m.s}^{-1} \times 1\text{s} = 1\text{m}$.

La distance parcourue D peut être évaluée à au moins 32 m en comptant les carreaux entiers qui sont coloriés. On peut estimer à environ cinq carreaux l'aire sous la courbe qui n'a pas été prise en compte dans les carreaux entiers. Finalement, la distance D peut être estimée à 37 m.

Activité 2 ❶ **a)** Les rectangles situés sous la courbe ont tous pour largeur $\frac{a}{n}$. Le premier a une hauteur nulle, le deuxième a pour hauteur $\left(\frac{a}{n}\right)^2$, le troisième a pour hauteur $\left(\frac{2a}{n}\right)^2$ … et le dernier a pour hauteur $\left(\frac{(n-1)a}{n}\right)^2$: chacun de ces triangles a pour hauteur l'image par la fonction carré de la borne gauche de l'intervalle sur lequel il est construit.

Le nombre u_n est la mesure de la somme des aires de tous ces rectangles, donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{a}{n} \times \left(0 + \left(\frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{2a}{n}\right)^2 + \left(\frac{3a}{n}\right)^2 + \ldots \left(\frac{(n-1)a}{n}\right)^2 \right) \\ &= \frac{a^3}{n^3} \times \left(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right) \\ &= \frac{a^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2. \end{aligned}$$

De même les rectangles contenant $\mathcal{E}_a$ ont tous pour largeur $\frac{a}{n}$. Le premier a pour hauteur $\left(\frac{a}{n}\right)$, le deuxième a pour hauteur $\left(\frac{2a}{n}\right)^2$, le troisième a pour hauteur $\left(\frac{3a}{n}\right)^2$… et le dernier a pour hauteur $\left(\frac{na}{n}\right)^2$: chacun de ces triangles a pour hauteur l'image par la fonction carré de la borne droite de l'intervalle sur lequel il est construit.

Le nombre v_n est la mesure de la somme des aires de tous ces rectangles, donc :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{a}{n} \times \left(\left(\frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{2a}{n}\right)^2 + \left(\frac{3a}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{na}{n}\right)^2 \right) \\ &= \frac{a^3}{n^3} \times \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) \\ &= \frac{a^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2. \end{aligned}$$

b) On admet que, pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on en déduit que :

$$u_n = \frac{a^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{a^3}{n^3} \times \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} = \frac{a^3}{6} \times \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} = \frac{a^3}{6} \times \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2}$$

et que :

$$v_n = \frac{a^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{a^3}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{a^3}{6}\times\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \frac{a^3}{6}\times\frac{2n^2+3n+1}{n^2}.$$

c) On sait que la limite d'une fraction rationnelle quand n tend vers $+\infty$ est égale à la limite des termes de plus haut degré, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^2-3n+1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{n^2} = 2$

et, de même, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^2+3n+1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{n^2} = 2.$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{a^3}{6}\times 2 = \frac{a^3}{3}.$

Les deux suites (u_n) et (v_n) encadrent la mesure I_a de l'aire de $\mathcal{E}_a$, $u_n \le I_a \le v_n$, et ces deux suites convergent vers le même nombre, donc, d'après le théorème des gendarmes : $I_a = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, d'où

$$I_a = \frac{a^3}{3}.$$

❷ On montrerait de même que $I_b = \frac{b^3}{3}.$

Comme $\mathcal{E}_b = \mathcal{E}_a \cup \mathcal{E}_{a,b}$ et que les points communs aux ensembles $\mathcal{E}_a$ et $\mathcal{E}_{a,b}$ forment un segment d'aire nulle, on a $\text{Aire}(\mathcal{E}_b) = \text{Aire}(\mathcal{E}_a) + \text{Aire}(\mathcal{E}_{a,b}).$

Pour les mesures des aires on obtient : $I_b = I_a + I_{a,b}$, soit $\frac{b^3}{3} = \frac{a^3}{3} + I_{a,b}$ et donc $I_{a,b} = \frac{b^3-a^3}{3}.$

Par exemple, l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe de la fonction carré et les deux droites d'équation $x=1$ et $x=2$ mesure $I_{1,2} = \frac{2^3-1^3}{3} = \frac{7}{3}$ en unités d'aire.

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 2

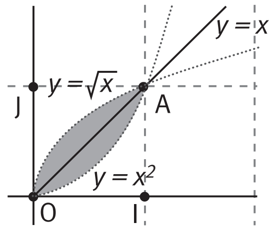
Exercice 1 ❶ On a $\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$ On sait que la courbe de la fonction racine est la courbe symétrique de la courbe de la fonction carré par rapport à la droite d'équation $y = x$. Ainsi, dans le carré OIAJ, la mesure de l'aire **au-dessus** de la courbe de la fonction racine est égale à $\frac{1}{3}$, l'intégrale précédente. L'aire du carré mesure 1, on obtient la mesure de l'aire sous la courbe de la fonction racine par différence et donc $\int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$

❷ Dans le carré OIAJ, comme l'aire sous la courbe de la fonction carré est égale à l'aire au-dessus de la courbe de la fonction racine, l'aire entre les deux courbes est égale à l'aire du carré moins deux fois l'aire sous la courbe de la fonction carré. Cette aire mesure donc :

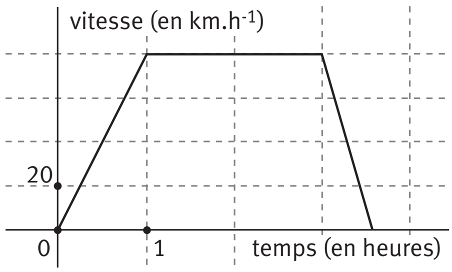
$$1-2\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = 1-2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Remarque

Les deux courbes partagent donc le carré OIAJ en trois domaines de même aire.



Exercice 2 ❶ Pendant la première heure, l'accélération, c'est-à-dire la dérivée de la vitesse, est constante, donc la vitesse est représentée par un segment de droite de l'origine jusqu'au point de coordonnées $(1;80)$. La vitesse est ensuite constante pendant deux heures. Pendant la dernière demi-heure, l'accélération (négative) est constante, la vitesse est représentée par un segment de droite jusqu'au point de coordonnées $(3,5\,;0)$.



❷ Comme on l'a vu dans l'activité 1, la distance parcourue D peut être évaluée en déterminant « l'aire sous la courbe ».

$$\mathrm{D}=\frac{1}{2}\times 1\times 80+2\times 80+\frac{1}{2}\times 0{,}5\times 80=220\text{ km}.$$

Le trajet a duré 3 h 30 min, on divise donc par 3,5 pour obtenir la vitesse moyenne :

$$v_m=\frac{220}{3{,}5}\approx 62{,}86\text{ km.h}^{-1}.$$

On peut remarquer que la vitesse moyenne est la valeur moyenne de la fonction vitesse sur l'intervalle de temps du parcours.

Exercice 3 ❶ **a)** On a :

$$\begin{aligned}
u_n-v_n &= \sum_{k=0}^{n-1}\big(h\times f(a+kh)\big)-\sum_{k=1}^{n}\big(h\times f(a+kh)\big)\\
&=\big(h\times f(a)+h\times f(a+h)+h\times f(a+2h)+\ldots+h\times f(a+(n-1)h)\big)\\
&\qquad -\big(h\times f(a+h)+h\times f(a+2h)+\ldots+h\times f(a+(n-1)h)+h\times f(a+nh)\big)\\
&=h\times f(a)-h\times f(a+nh)\\
&=h\times f(a)-h\times f(b)\ \ (\text{car } h=\frac{b-a}{n}).
\end{aligned}$$

On a donc :

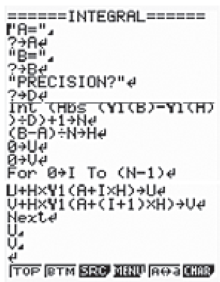
$$|u_n - v_n| = |h \times f(a) - h \times f(b)| = h|f(a) - f(b)|.$$

b) L'encadrement de l'intégrale est d'amplitude inférieure à d si et seulement si $|u_n - v_n| \le d$.

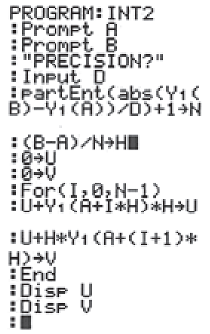
On a : $|u_n - v_n| \le d \Leftrightarrow \dfrac{|f(a)-f(b)|}{n} \le d \Leftrightarrow n \ge \dfrac{|f(a)-f(b)|}{d}$.

Ainsi si n est l'entier $n = \mathrm{E}\left(\dfrac{|f(a)-f(b)|}{d}\right)+1$, l'encadrement $v_n \le \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t \le u_n$ ou $u_n \le \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t \le v_n$ (selon le sens de variation de f) est d'amplitude inférieure ou égale à d. On peut donc utiliser l'algorithme suivant.

Casio



TI



❷ **a)** On a $f = \mathrm{e}^u$ où u est la fonction définie sur [0 ; 1] par $u(x) = -x^2$. On en déduit que f est dérivable sur [0 ; 1] et que, pour tout x de [0 ; 1], $f'(x) = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)} = -2x\ \mathrm{e}^{-x^2} \le 0$, donc f est décroissante (donc monotone) sur [0 ; 1].

b) En appliquant l'algorithme à : $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, précision = 0,0001, on obtient : 0,746874125 et 0,7467741376.

L'écart entre ces deux nombres est égal à $9{,}99874 \times 10^{-5}$, ces deux nombres donnent bien un encadrement de l'intégrale d'amplitude inférieure à 10^{-4}.

Si on souhaite encadrer par des nombres décimaux ayant quatre chiffres après la virgule, on utilise une valeur par défaut du plus petit nombre et une valeur approchée par excès du plus grand et on obtient : $0{,}7467 \le \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t \le 0{,}7469$.

On remarque que l'amplitude vaut 2.10^{-4}.

Exercice 4 D'après le théorème 1, $F'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ et $G'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. On remarque que les fonctions F et G ont la même fonction dérivée sur $[2;100]$.

Or on sait que, pour tout x de $[2;100]$, on a :

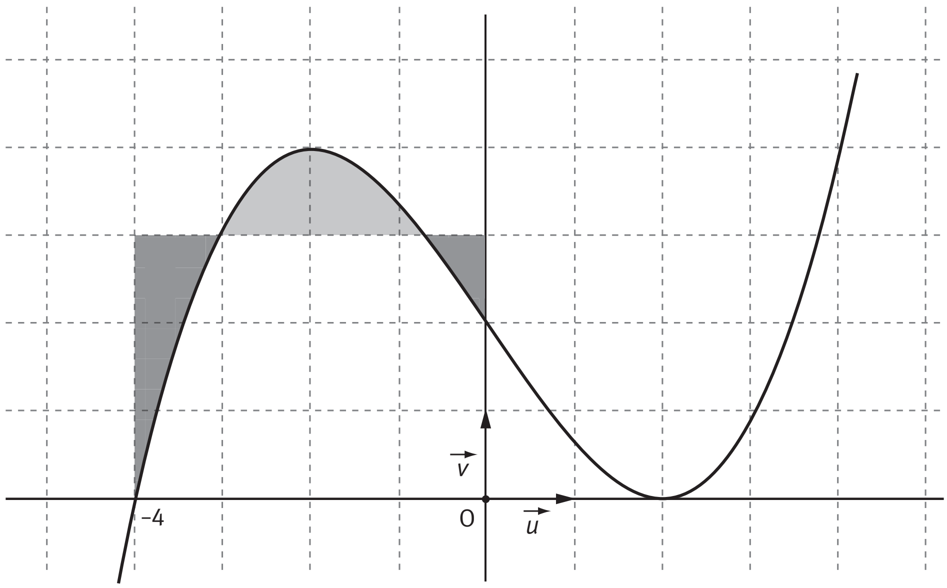
$\int_1^x \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \int_2^x \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ d'après la relation de Chasles, et donc $F(x) = \int_1^2 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + G(x)$.

L'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ est une constante, donc, en dérivant, on retrouve bien $F'(x) = G'(x)$.

Exercice 5 ❶ Réponse **c)** : c'est la relation de Chasles.

❷ Réponse **b)** : l'aire du rectangle construit sur $[-4\,;0]$ et ayant pour hauteur la valeur moyenne doit avoir une aire égale à l'aire sous la courbe de la fonction f sur $[-4\,;0]$. L'aire de couleur claire qui dépasse du rectangle doit être compensée par l'aire de couleur foncée. Cela n'est pas possible pour 2 et 3,5, donc la bonne réponse est 3.

❸ On peut estimer, à l'aide des carreaux, que l'intégrale $\mathrm{I} = \int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ appartient à l'intervalle b) $[9\,;11]$.



❹ La proposition « si deux fonctions f et g continues et positives sur $[a\,;b]$ sont telles que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, alors $f(x) = g(x)$ pour tout x de $[a\,;b]$ » est fausse. En effet, on peut seulement conclure que l'aire sous la courbe de f est égale à l'aire sous la courbe de g sur l'intervalle $[a\,;b]$. En particulier, on obtient une telle égalité si on prend pour fonction g la fonction constante égale à la valeur moyenne (voir la figure de la définition 2).

Corrigé des activités du chapitre 3

Activité 3 ❶ Pour tout réel x, on obtient $F'(x)=G'(x)=H'(x)=3x^2$. Les fonctions dérivées sont égales, mais les fonctions ne sont pas égales puisqu'elles sont chacune la somme de la fonction cube et d'une constante, les trois constantes utilisées étant différentes.

❷ Pour tout x de $]1;+\infty[$, on a $F'(x)=G'(x)=H'(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

Là encore, les trois fonctions F, G et H ont les mêmes fonctions dérivées. Si on transforme $G(x)$, on obtient $G(x)=F(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$. Les fonctions F et G sont égales, mais la fonction H est différente (par exemple $H(0)=5$ et $G(0)=3$).

Activité 4 On considère les deux fonctions f et F définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln x$ et $F(x)=x\ln x-x$.

❶ En appliquant la règle de dérivation d'un produit, on obtient, pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$F'(x)=\left(1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}\right)-1=\ln x+1-1=f(x).$$

❷ Pour trouver une fonction G différente de F, telle que $G'=F'$, il suffit d'ajouter une constante à l'expression $F(x)$: posons par exemple $G(x)=F(x)+2=x\ln x-x+2$. Et, pour trouver une fonction H différente de F et de G, il suffit d'ajouter une constante différente. Posons par exemple $H(x)=F(x)-3{,}01=x\ln x-x-3{,}01$.

❸ On peut ainsi créer une infinité de fonctions ayant pour dérivée la fonction f, il suffit d'ajouter une constante à la fonction F. Ici, on a une condition supplémentaire : on cherche donc une constante C telle que $K(x)=F(x)+\mathrm{C}=x\ln x-x+\mathrm{C}$ avec $K(1)=1\times\ln 1-1+\mathrm{C}=0$. On en déduit que $\mathrm{C}=1$ et donc la fonction K est définie par $K(x)=x\ln x-x+1$.

Activité 5 ❶ On reconnaît la somme des dérivées de $x\mapsto x^6$, $x\mapsto x^2$ et $x\mapsto x$.

Une possibilité est donc $F(x)=x^6+x^2+x$.

Remarque

On peut aussi ajouter en plus une constante.

❷ Ici, c'est un peu moins simple car on ne reconnaît pas les dérivées de fonctions puissances, un facteur multiplicatif est nécessaire.

Ainsi $x\mapsto x^5$ est la fonction dérivée de $x\mapsto\dfrac{1}{6}x^6$; $x\mapsto x^3$ est la fonction dérivée de $x\mapsto\dfrac{1}{4}x^4$; $x\mapsto -3$ est la fonction dérivée de $x\mapsto -3x$.

Une fonction qui convient est la fonction F définie par

$F(x)=\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{4}x^4-3x+1000$ (on peut choisir d'ajouter n'importe quelle constante).

❸ Pour $f(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$, on reconnaît la somme des dérivées de la fonction inverse et de la fonction logarithme, on peut proposer par exemple $F(x)=\frac{1}{x}+\ln x+52{,}3.$

❹ L'expression de la dérivée de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=(ax+b)e^x$ est

$$F'(x)=ae^x+(ax+b)e^x=\big(ax+(a+b)\big)e^x \text{ (on a dérivé un produit).}$$

Pour obtenir l'expression de $f(x)$, c'est-à-dire $(3x+1)e^x$, il suffit que les nombres a et b vérifient le système $\begin{cases}a=3\\a+b=1\end{cases}$, soit $\begin{cases}a=3\\b=-2\end{cases}$. Donc la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=(3x-2)e^x$ a pour dérivée f.

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 3

Exercice 6

❶ $F(x)=x^5-\frac{3}{4}x^4-x^3+2x^2+2x+12{,}3$;

❷ $F(x)=-\frac{5}{x}+333$;

❸ $F(x)=\frac{1}{x^2}$;

❹ $f(x)=1\times(x+1)^3$ d'où, en reconnaissant $u'u^3$, une primitive est F d'expression :

$$F(x)=\frac{1}{4}\times(x+1)^4.$$

❺ On reconnaît que f est de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, donc F est de la forme $2\sqrt{u}+k$, où k est une constante, la fonction ayant pour expression $F(x)=2\sqrt{x^2+x-2}$ sur $I=]1;+\infty[$ convient.

❻ La fonction f est de la forme $x\mapsto f(x)=g(ax+b)$ où g est la fonction cosinus, donc les primitives de f sont de la forme $x\mapsto F(x)=\frac{1}{a}\times G(ax+b)+k$ où G est la fonction sinus (une primitive de la fonction cosinus) ; la fonction ayant pour expression $F(x)=\frac{1}{2}\times\sin(2x)$ convient.

Exercice 7 Dans chaque cas, sur l'intervalle I, on détermine la primitive F de la fonction f telle que $F(x_0)=y_0$.

❶ $F(x)=x^2+3x+k$ et $F(2)=2^2+3\times 2+k=0$, d'où $k=-10$ et $F(x)=x^2+3x-10$.

❷ $F(x)=\frac{1}{4}(x-1)^4+k$ et $F(1)=k$, d'où $k=2$ et $F(x)=\frac{1}{4}(x-1)^4+2$.

❸ $F(x)=\mathrm{e}^x+k$ et $F(0)=\mathrm{e}^0+k=-4$, d'où $k=-5$ et $F(x)=\mathrm{e}^x-5$.

❹ $F(x)=\ln x+k$ et $F(1)=\ln 1+k=2$, d'où $k=2$ et $F(x)=\ln x+2$.

❺ $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+k$ et $F(0)=\frac{2}{3}+k$, d'où $k=\frac{1}{3}$ et $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+\frac{1}{3}$.

Exercice 8 Dans cet exercice, il faut savoir que les primitives de la fonction $f=u'\mathrm{e}^u$ sont toutes les fonctions $F=\mathrm{e}^u+k$, où k est une constante.

❶ $F(x)=\mathrm{e}^x+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}+k$ ❷ $F(x)=\mathrm{e}^{\left(x^2\right)}+k$ ❸ $F(x)=\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^x+1\right)^3+k$

❹ $F(x)=\ln\left(2+\mathrm{e}^x\right)+k$.

❺ Il y a un dénominateur dans l'expression de $f(x)$. Il n'est pas élevé à une puissance, on va donc transformer l'expression de $f(x)$ pour reconnaître la forme $\frac{u'}{u}$:

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^x+1\right)}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}=-\frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

D'où : $F(x)=-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)+k$.

Exercice 9 ❶ $F(x)=\sin x-\cos x+k$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$.

❷ $F(x)=\frac{1}{3}\sin(3x+2)+\frac{1}{5}\cos(5x-4)+k$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$.

❸ Comme $f(x)=-\frac{-\sin x}{\cos x}$ sur $I=\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, on reconnaît $\frac{u'}{u}$, d'où $F(x)=-\ln(\cos x)+k$.

Exercice 10 ❶ Sur $\mathbb{R}$, on a $f'(x)=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x+f(x)$, donc $f(x)=-\mathrm{e}^x+f'(x)$.

❷ Une primitive de f est donc définie par $F(x)=-\mathrm{e}^x+f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$.

Exercice 11

- La fonction f_1 est à valeurs strictement positives, donc F_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Seule la courbe d peut convenir.
- La fonction f_2 est à valeurs négatives, puis positives, puis négatives, donc F_2 est décroissante, puis croissante, puis décroissante. Seule la courbe c peut convenir.

- Les fonctions f_3 et f_4 sont à valeurs négatives sur $]-\infty\,;0[$ et à valeurs positives sur $[0\,;+\infty[$. Donc F_3 et F_4 sont décroissantes sur $]-\infty\,;0[$ et croissantes sur $[0\,;+\infty[$. Les courbes a et b correspondent à ces variations. Mais, pour les grandes valeurs de x, on peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x)=0$, soit $\lim\limits_{x\to+\infty} F_3'(x)=0$. Or, pour ces grandes valeurs de x, les tangentes à la courbe de a semblent avoir un coefficient directeur voisin de 1, et pas de 0. La courbe a ne convient donc pas pour représenter F_3.

Donc F_3 est représentée par la courbe b et F_4 est représentée par la courbe a. (Les tangentes aux courbes a et b, pour les grandes valeurs de x, sont bien cohérentes avec les limites en $+\infty$ que l'on peut conjecturer pour les fonctions f_3 et f_4.)

Corrigé des activités du chapitre 4

Activité 6 ❶ On a $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = G(b)-G(a)$, donc $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a)+G(b)-G(a)$.

Comme F est une primitive de f sur $[a\,;b]$ et G une primitive de g, on en déduit, d'après les règles de la dérivation, que $(F+G)'=F'+G'=f+g$. Ainsi la fonction $F+G$ est une primitive de $f+g$ et on a $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \left(F(b)+G(b)\right)-\left(F(a)+G(a)\right)=F(b)-F(a)+G(b)-G(a)$.

On a donc bien : $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

❷ D'après les règles de la dérivation $(\alpha F)'=\alpha F'=\alpha f$, donc la fonction αF est une primitive de la fonction αf et on a :

$$\int_a^b (\alpha f)(t)\,\mathrm{d}t = (\alpha F)(b)-(\alpha F)(b)=\alpha(F(b)-F(a))=\alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De ❶ et ❷ on déduit :

$$\int_a^b (\alpha f+\beta g)(t)\,\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Activité 7 ❶ On veut définir $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $c\le a$ pour généraliser la relation de Chasles.

En particulier on veut avoir $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x$, soit $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. On propose donc la définition : $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\left(F(a)-F(c)\right)$, soit la même forme que celle de la propriété 10, mais avec $c\le a$, $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(c)-F(a)$.

Par exemple $\int_3^1 4t^3\,\mathrm{d}t == \left[t^4\right]_3^1 = 1-81=-80$.

Remarque

Ce résultat est négatif, il ne s'agit plus de la mesure d'une aire.

❷ Quel que soit l'ordre des bornes des intégrales, on a :

$\int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a)$ et $\int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(c)$, donc

$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \big(F(c) - F(a)\big) + \big(F(b) - F(c)\big) = F(b) - F(a)$.

Ce qui s'écrit aussi : $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$, on a bien obtenu la relation de Chasles.

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 4

Exercice 12 ❶ $A = \int_{-3}^{2} 2x^3\,dx = \left[\frac{2}{4}x^4\right]_{-3}^{2} = \frac{2^4 - (-3)^4}{2} = \frac{-65}{2}$.

❷ $B = \int_0^2 e^q\,dq = \left[e^q\right]_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1$.

❸ $C = \int_1^2 \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

❹ $D = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \ln x\right]_1^e$

$= \left(\frac{e^2}{2} + \ln e\right) - \left(\frac{1}{2} + \ln 1\right) = \frac{e^2 - 1}{2} + 1 - 0 = \frac{e^2 + 1}{2}$.

❺ $E = \int_{-1}^{1} e^{-4x}\,dx = \left[-\frac{1}{4}e^{-4x}\right]_{-1}^{1} = \left(-\frac{e^{-4}}{4}\right) - \left(-\frac{e^4}{4}\right) = \frac{e^4 - e^{-4}}{4}$.

❻ $F = \int_1^e \frac{\ln t}{t}\,dt = \int_1^e \frac{1}{t} \times \ln t\,dt = \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 = \frac{1}{2}$.

Remarque

Dans ces calculs d'intégrales, il est prudent de faire des contrôles (calculer des valeurs approchées avec la calculatrice, vérifier que l'intégrale sur $[a\,;b]$ d'une fonction positive sur $[a\,;b]$ est positive…).

Exercice 13 D'après la linéarité, on a :

$$I + J = \int_0^\pi \cos^2 x\,dx + \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \int_0^\pi \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\,dx$$

$$= \int_0^\pi 1\,dx = \left[x\right]_0^\pi = \pi.$$

$$I-J=\int_0^{\pi}\cos^2 x\ \mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\sin^2 x\ \mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\ \mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}\cos(2x)\ \mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi}=0.$$

D'où $I=J=\dfrac{\pi}{2}.$

Exercice 14 La valeur moyenne de la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ sur [0 ; 3] est :

$$\frac{1}{3-0}\int_0^3 \mathrm{e}^{-2x}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^3=-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2\times 3}-\left(-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2\times 0}\right)=\frac{1-\mathrm{e}^{-6}}{6}.$$

Exercice 15 ❶ Sur $]0\,;+\infty[$ $G'(x)=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln x,$ donc G est une primitive de ln sur $]0\,;+\infty[.$

❷

$$\mathrm{A}=\int_1^{\mathrm{e}}\left(\ln x+3x^2\right)\ \mathrm{d}x=\left[x\ln x-x+x^3\right]_1^{\mathrm{e}}=\left(\mathrm{e}\ln\mathrm{e}-\mathrm{e}+\mathrm{e}^3\right)-\left(1\ln 1-1+1^3\right)=\mathrm{e}^3.$$

Exercice 16 ❶ La variable x n'apparaît qu'au carré dans l'expression de $f(x)$, donc, pour tout réel x, on a $f(-x)=f(x)$, la fonction f est une fonction paire et sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

La symétrie permettra d'utiliser l'égalité : $\int_{-b}^{0}f(x)\ \mathrm{d}x=\int_0^{b}f(x)\ \mathrm{d}x$ pour tout réel b.

❷ *Calculs approchés d'intégrales*

Pour A

La symétrie donne $\mathrm{A}=\int_{-1}^{0}f(x)\ \mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x=\mathrm{I}(1).$

D'où $\mathrm{A}\approx 0{,}34134.$

Pour B

$\mathrm{B}=\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x.$

$\mathrm{B}=2\times\mathrm{I}(2)$

$\mathrm{B}\simeq 0{,}954\,5.$

Pour C

$$\mathrm{C}=\int_{1,5}^{3,5}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{1,5}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{3,5}f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{3,5}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{1,5}f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{I}(3{,}5)-\mathrm{I}(1{,}5)$$

$\mathrm{C}\simeq 0{,}499\,77-0{,}433\,20.$

$\mathrm{C}\simeq 0{,}066\,57.$

Pour D

$$D=\int_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$D=\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ car f est paire.

$D=I(3)+I(1)$

$D=0{,}839\,99.$

Pour E

$$E=\int_{-4}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{1}^{0} f(x)+\int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$E=\int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$E=I(4)-I(1)$

$E\simeq 0{,}158\,63.$

Ainsi

A = 0,341 34	B = 0,954 5	C = 0,066 57	D = 0,839 99	E = 0,158 63

❸ Pour G, on obtient :

$$G=2\int_{0}^{4} f(x)\ \mathrm{d}x=2\times I(3).$$

$$G\approx 0{,}99994.$$

On remarque que G est vraiment très proche de 1 et que G semble aussi très proche de l'aire totale sous la courbe considérée entièrement, x variant dans $\mathbb{R}$ tout entier.

C'est pour obtenir un tel résultat que le coefficient $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ est introduit dans la fonction f (ce coefficient peut paraître un peu surprenant mais sa justification n'est pas accessible en terminale).

La fonction f et les intégrales analogues à celles que vous venez de calculer sont extrêmement importantes en probabilité et en statistiques car elles nous serviront à calculer des probabilités où l'univers est infini.

Exercice 17

❶ Sur $\mathbb{R}$, on a $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}-(x+3)\mathrm{e}^{-x}=(-x-2)\mathrm{e}^{-x}$. Comme une exponentielle est toujours positive, $f'(x)$ est du signe de $-x-2$, donc la fonction f est croissante sur $]-\infty\,;-2]$ et décroissante sur $[-2\,;+\infty[$.

❷ La fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ si, pour tout réel x, on a :

$F'(x)=f(x)$, soit $a\mathrm{e}^{-x}-(ax+b)\mathrm{e}^{-x}=(x+3)\mathrm{e}^{-x}$, c'est-à-dire

$-ax\mathrm{e}^{-x}+(a-b)\mathrm{e}^{-x}=(x+3)\mathrm{e}^{-x}$.

Il suffit donc que les réels a et b vérifient le système $\begin{cases}-a=1\\ a-b=3\end{cases}$, ainsi les réels $a=-1$ et $b=-4$ conviennent.

❸ Pour tout x supérieur à -3, $f(x)$ est positif car $x+3$ et e^{-x} sont positifs. Donc la mesure, en unités d'aires, de l'aire A_1 du domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-3$ et $x=4$, est donnée par :

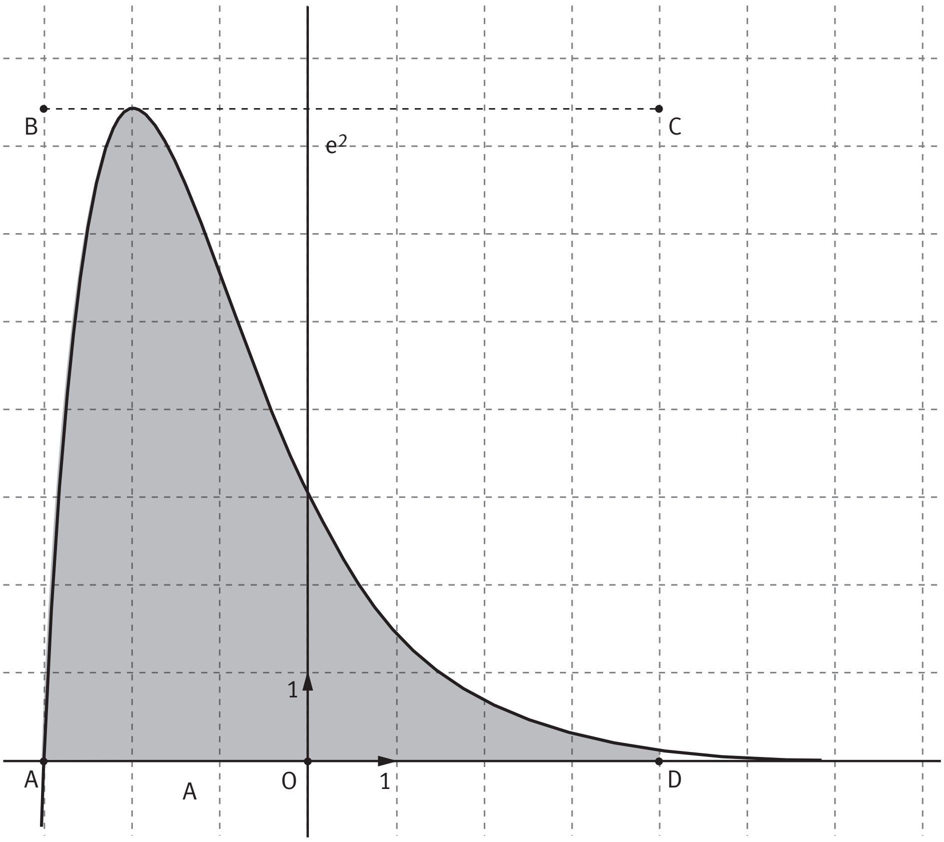
$$\int_{-3}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_{-3}^{4} = \left[(-x-4)e^{-x}\right]_{-3}^{4} = \left(-8e^{-4}\right)-\left(-1\times e^{3}\right) = e^{3}-8e^{-4}.$$

Donc $A_1 = e^3 - 8e^{-4}$ u.a. $\approx 19,94$ u.a.

❹ On trouve $f(-2)=e^2$. Les variations de la fonction f montrent que f admet un maximum en -2, donc $f(x)\leq e^2$ pour tout réel x.

L'aire A_2 est donc égale à l'aire du rectangle ABCD moins l'aire précédente.

D'où $A_2 = 7e^2 - A_1 = 7e^2 - \left(e^3 - 8e^{-4}\right)$u.a. $\approx 31,78$ u.a.



Exercice 18 On note a l'accélération de l'objet qui est constante.

La vitesse instantanée de l'objet à l'instant t est notée $v(t)$. La fonction v est une primitive de l'accélération sur l'intervalle $[t_1\,;t_2]$, on a donc $v(t)=at+b$, où b est une constante.

La distance D parcourue pendant l'intervalle de temps $[t_1\,;t_2]$ est égale à :

$$D = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} (at+b)\,\mathrm{d}t = \left[a\frac{t^2}{2}+bt\right]_{t_1}^{t_2} = a\frac{t_2^2-t_1^2}{2}+b\left(t_2-t_1\right).$$

La vitesse moyenne V_m de l'objet pendant l'intervalle de temps $[t_1\,;t_2]$ est donc :

$$V_m = \frac{\mathrm{D}}{t_2 - t_1} = a\frac{t_2+t_1}{2} + b.$$

La vitesse moyenne pendant l'intervalle de temps $[t_1\,;t_2]$ est bien égale à la vitesse instantanée à l'instant $\frac{t_1+t_2}{2}$.

Exercice 19 ❶ D'après le graphique le coût unitaire est minimal lorsque l'artisan fabrique 36 bijoux par mois. Cela correspond à l'abscisse du point le plus bas de la parabole P.

Le coût unitaire minimal est égal à 104 euros.

Ainsi

Coût unitaire minimal : 104 €
Nombre de bijoux : $n = 36$

❷ On sait que $f(x) = x^2 + bx + c$.

Comme $f(0) = 1400$ alors $c = 1400$.

On peut aussi écrire : $f'(36) = 0$.

Or $f'(x) = 2x + b$ d'où $2(36) + b = 0$.

Ainsi $b = -72$ et $f(x) = x^2 - 72x + 1400$.

On pouvait aussi utiliser d'autres renseignements :

$$f(36) = 104 \text{ et } f(80) = 2\,040.$$

❸ Pour calculer le coût moyen unitaire on va calculer des valeurs moyennes d'intégrales.

Calculons $\displaystyle \frac{1}{40}\int_0^{40} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{40}\left[\frac{1}{3}x^3 - 36x^2 + 1400x\right]_0^{40} = \frac{1}{40}\left(\frac{59\,200}{3}\right) = \frac{1480}{3}.$

$$\frac{1}{80}\int_0^{80} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{80}\left[\frac{1}{3}x^3 - 36x^2 + 1400x\right]_0^{80} = \frac{1}{80}\left(\frac{156\,800}{3}\right) = \frac{1960}{3}.$$

La calculatrice donne $\frac{1480}{3} = 493{,}33\ldots$ et $\frac{1960}{3} = 653{,}33\ldots$

Pour 40 bijoux par mois, le coût unitaire moyen est environ 493 €.
Pour 80 bijoux par mois, le coût unitaire moyen est environ 653 €.

Corrigé des exercices de synthèse de la séquence 7

Exercice I

❶ Sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \sin x + x\cos x$ et $f''(x) = \cos x + \cos x - x\sin x$ soit $f''(x) = 2\cos x - x\sin x$, soit $f''(x) = 2\cos x - f(x)$. Pour tout réel x, on a donc $f(x) = 2\cos x - f''(x)$.

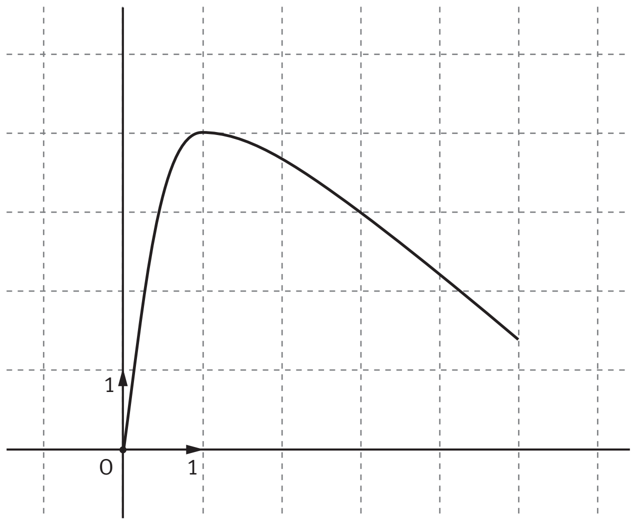
❷ On en déduit qu'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ a pour expression :

$F(x) = 2\sin x - f'(x)$, soit $F(x) = 2\sin x - (\sin x + x\cos x)$ c'est-à-dire

$F(x) = \sin x - x\cos x$.

Exercice II

❶



❷ On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(-4x^2 + 8x\right) = -4 + 8 = 4$

et : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (\ln x - x + 5) = 0 - 1 + 5 = 4.$

Or $f(1) = 4$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = f(1)$: la fonction f est continue en 1. Pour les autres valeurs de $[0;5]$ f coïncide avec une fonction continue (somme de fonctions de référence), donc f est continue sur $[0;5]$, on peut donc l'intégrer.

❸ **a)** La fonction F définie sur $[0;1]$ par $F(x) = \dfrac{-4}{3}x^3 + 4x^2$ est une primitive de f sur $[0;1]$.

b) On a : $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = \left[\dfrac{-4}{3}x^3 + 4x^2\right]_0^1 = \dfrac{-4}{3} + 4 = \dfrac{8}{3}.$

Donc l'aire du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et la droite d'équation $x = 1$ est égale à $\dfrac{8}{3}$ u.a.

❹ **a)** Sur $[1;5]$, on a $L'(x)=1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln x$. Donc la fonction L est une primitive de la fonction ln sur $[1;5]$.

b) On en déduit que la fonction G définie sur $[1;5]$ par $G(x)=L(x)-\dfrac{x^2}{2}+5x$ soit $G(x)=x\ln x-\dfrac{x^2}{2}+4x$ est une primitive de f sur $[1;5]$. On a :

$$\int_1^5 f(x)\ \mathrm{d}x=[G(x)]_1^5=\left[x\ln x-\frac{x^2}{2}+4x\right]_1^5=(5\ln 5+7{,}5)-(3{,}5)=5\ln 5+4.$$

Donc l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=5$ est égale à $(5\ln 5+4)$ u.a.

❺ D'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_0^5 f(x)\ \mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x+\int_1^5 f(x)\ \mathrm{d}x=\frac{8}{3}+5\ln 5+4\approx 14{,}714.$$

Le nombre total d'appels reçus pendant 5 minutes est donné, en milliers, par $\dfrac{8}{3}+5\ln 5+4$, ce nombre est donc à peu près égal à 14 700.

Exercice III

❶ La droite (OA) passe par l'origine du repère, donc son équation réduite est de la forme $y=mx$. Le point $\mathrm{A}\left(a\,;a^2\right)$ est sur la droite, donc $a^2=ma$, donc $m=a$. La droite (OA) a pour équation $y=ax$.

❷ On note $\mathscr{A}_{(\mathrm{OMK})}$ la mesure, en unités d'aire, du triangle OMK. On note les autres mesures d'aire de façon analogue.

On a : $\mathscr{A}_{(\mathrm{OAB})}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BO}\times\mathrm{BA}=\dfrac{1}{2}\times a\times a^2=\dfrac{1}{2}a^3$;

$$\mathscr{A}_{(\mathrm{OMK})}=\frac{1}{2}\mathrm{KO}\times\mathrm{KM}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{a}{2}\right)\times\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{1}{16}a^3\ ;$$

$$\mathscr{A}_{(\mathrm{ABKM})}=\frac{\mathrm{KM}+\mathrm{BA}}{2}\times\mathrm{KB}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{a^2}{4}+a^2\right)\times\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{5}{16}a^3.$$

On peut donc écrire :

$$\mathscr{A}_{(\mathrm{OAM})}=\mathscr{A}_{(\mathrm{OAB})}-\left(\mathscr{A}_{(\mathrm{OMK})}+\mathscr{A}_{(\mathrm{ABKM})}\right)$$

$$\mathscr{A}_{(\mathrm{OAM})}=\frac{1}{2}a^3-\left(\frac{1}{16}a^3+\frac{5}{16}a^3\right)$$

$$\mathscr{A}_{(\mathrm{OAM})}=\frac{a^3}{8}.$$

❸ Calculons l'aire du domaine limité par la parabole $\mathscr{P}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x=a$.

Cette aire est égale à : $\displaystyle\int_0^a x^2\ \mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{a^3}{3}.$

On a alors :

$$\mathscr{A}_{\mathscr{P}}=\mathrm{aire(OAB)}-\frac{a^3}{3}=\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}=\frac{a^3}{6}$$

❹ Calculons le rapport des aires $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{A}_{(\mathrm{OAM})}$: $\dfrac{\mathcal{A}_{\mathcal{D}}}{\mathcal{A}_{(\mathrm{OAM})}}=\dfrac{\frac{a^3}{6}}{\frac{a^3}{8}}=\dfrac{4}{3}$.

Exercice IV ❶ Pour tout x de $[0\,;1]$, on a $\dfrac{x^n}{1+x^2}$ positif, donc, comme on intègre de 0 à 1 (avec $0<1$!), d'après la propriété de positivité on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \geq 0$, soit $\mathrm{I}_n \geq 0$.

On cherche ensuite à majorer I_n par un nombre dépendant de n puisque ensuite on utilise l'encadrement pour montrer que la suite (I_n) converge vers 0.

Comme pour tout x de $[0\,;1]$ on a $\dfrac{1}{1+x^2}\leq 1$, on a aussi $\dfrac{x^n}{1+x^2}\leq x^n$. En intégrant de 0 à 1 on peut utiliser la propriété de comparaison et on en déduit que :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x,\ \text{soit}\ \mathrm{I}_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1,\ \text{c'est-à-dire}\ \mathrm{I}_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

❷ On a donc obtenu l'encadrement : $0 \leq \mathrm{I}_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$, d'après le théorème des gendarmes on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n=0$.

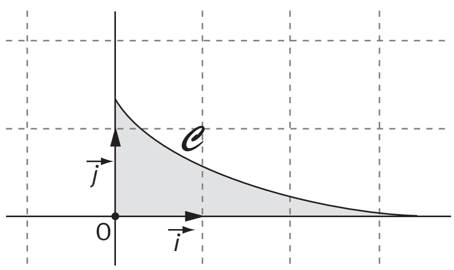
Exercice V ❶ On a $\displaystyle\int_0^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^2=\left(-\mathrm{e}^{-2\lambda}\right)-\left(-\mathrm{e}^{0}\right)=1-\mathrm{e}^{-2\lambda}$.

❷ On a $\displaystyle F(x)=\int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x=\left(-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)-\left(-\mathrm{e}^{0}\right)$, d'où

$$F(x)=1-\mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

❸ La fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{-\lambda x}$ est la composée de $x\mapsto -\lambda x$ et de $X\mapsto \mathrm{e}^X$, or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\lambda x=-\infty$ (λ est strictement positif) et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X=0$, on peut donc écrire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}=\lim_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X=0$ par composition avec $X=-\lambda x$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=1-0=1$.

Comme la fonction f est à valeurs positives, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, le nombre $F(x)$ est la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des ordonnées et la droite formée par les points d'abscisses x.



Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$, l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe $\mathscr{C}$ sur $[0\,;+\infty[$ est égale à une unité d'aire.

Remarque

On retrouve cette intégrale dans le cours de probabilité, dans le cas où l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire est $[0\,;+\infty[$.

Exercice VI

❶ Pout tout réel x, on a $F(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{-x}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Or, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est une fonction paire (à cause du carré), donc $\int_{-x}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, ce qui prouve que $F(-x) = -F(x)$. La fonction F est donc impaire et sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a $F'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$. La fonction F est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

❷ Pour tout réel t, on a successivement : $1+t^2 \geq 1$, $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$.

On en déduit : $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \leq \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1$.

❸ Pour tout réel non nul t, on a successivement : $1+t^2 \geq t^2$, $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.

On a donc pour tout $x > 1$; $\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \leq \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1 < 1$.

F est croissante donc pour tout réel $x \leq 1$: $F(x) \leq F(1) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \leq 1 (< 2)$.

Pour tout $x > 1$, $F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} < 1 + 1 = 2$.

F est donc majorée par 2.

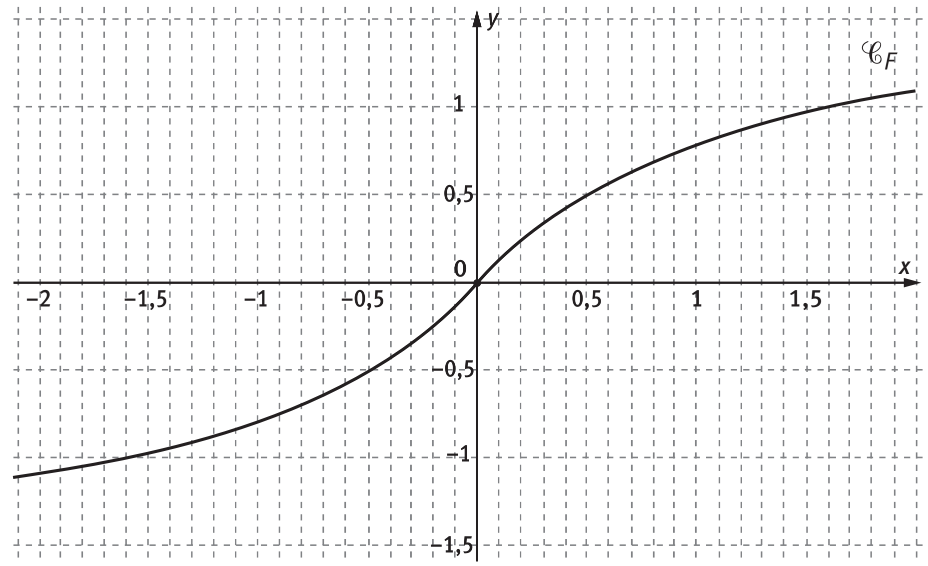
Remarque

En fait, on peut montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$.

❹

a	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	2
$F(a)$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1	1,1

En utilisant le précédent tableau de valeurs ainsi que la parité de F, on peut donner l'allure de la courbe représentant F.



Exercice VII ❶ On a $u_0 = \int_0^1 f_0(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1.$

❷ Comme, pour tout x de $[0\,;1]$, $f_1(x) = \dfrac{1}{1!}(1-x)^1\mathrm{e}^x = (1-x)\mathrm{e}^x$, en dérivant ce produit, on trouve bien $f_1'(x) = -\mathrm{e}^x + (1-x)\mathrm{e}^x = -f_0(x) + f_1(x)$.

Or $u_1 - u_0 = \int_0^1 f_1(x)\ \mathrm{d}x - \int_0^1 f_0(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \big(f_1(x) - f_0(x)\big)\ \mathrm{d}x$ d'après la linéarité de l'intégrale.

On en déduit que : $u_1 - u_0 = \int_0^1 f_1'(x)\ \mathrm{d}x = [f_1(x)]_0^1 = \left[(1-x)\mathrm{e}^x\right]_0^1 = 0 - \mathrm{e}^0 = -1.$

Donc $u_1 = u_0 - 1 = \mathrm{e} - 2.$

❸ De façon analogue, pour tout x de $[0\,;1]$, $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{(n+1)!}(1-x)^{n+1}\mathrm{e}^x$ et en dérivant ce produit, on trouve :

$$\begin{aligned} f_{n+1}'(x) &= \frac{-(n+1)}{(n+1)!}(1-x)^n\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{(n+1)!}(1-x)^{n+1}\mathrm{e}^x \\ &= \frac{-1}{n!}(1-x)^n\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{(n+1)!}(1-x)^{n+1}\mathrm{e}^x \\ &= -f_n(x) + f_{n+1}(x). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1 f'_{n+1}(x)\ \mathrm{d}x=\left[f_{n+1}(x)\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{1}{(n+1)!}(1-x)^{n+1}\mathrm{e}^x\right]_0^1=0-\frac{1}{(n+1)!}\mathrm{e}^0=\frac{-1}{(n+1)!}.$$

Et donc : $u_{n+1}=u_n-\dfrac{1}{(n+1)!}$.

❹ Montrons par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $u_n=\mathrm{e}-1-\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}$.

- Pour $n=1$, on a $u_1=\mathrm{e}-2$ et $\mathrm{e}-1-\displaystyle\sum_{p=1}^{1}\frac{1}{p!}=\mathrm{e}-1-1=\mathrm{e}-2$. La proposition est donc vraie pour $n=1$.
- Supposons que, pour k, $k\geq 1$, on ait $u_k=\mathrm{e}-1-\displaystyle\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p!}$ et, sous cette hypothèse, montrons que l'égalité est vraie aussi pour $k+1$.

  On utilise le résultat de la question ❸ et on a :

$$u_{k+1}=u_k-\frac{1}{(k+1)!}=\mathrm{e}-1-\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p!}-\frac{1}{(k+1)!}=\mathrm{e}-1-\sum_{p=1}^{k+1}\frac{1}{p!}.$$

  L'égalité est donc vraie pour $k+1$, on a donc prouvé l'hérédité.
- On conclut que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $u_n=\mathrm{e}-1-\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}$.

❺ Sur $[0\,;1]$ on a $0\leq x\leq 1$ d'où $0\leq 1-x\leq 1$ et donc $0\leq(1-x)^n\leq 1^n$ pour tout entier naturel n non nul (car les fonctions puissances sont croissantes sur $[0\,;1]$).
En multipliant par $\dfrac{1}{n!}\mathrm{e}^x$ qui est toujours positif, on obtient : $0\leq f_n(x)\leq\dfrac{1}{n!}\mathrm{e}^x$.
D'après la positivité et la propriété de comparaison, en intégrant de 0 à 1 (0<1), on trouve :

$$0\leq\int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x\leq\int_0^1\frac{1}{n!}\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x.$$

Or $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{n!}\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x=\frac{1}{n!}\left[\mathrm{e}^x\right]_0^1=\frac{1}{n!}(\mathrm{e}-1)$.

Donc finalement : $0\leq\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x\leq\frac{\mathrm{e}-1}{n!}$, soit $0\leq u_n\leq\dfrac{\mathrm{e}-1}{n!}$.

❻ On a aussi $0\leq u_n\leq\dfrac{\mathrm{e}-1}{n}$ et, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{n}}=0$, d'après le théorème des gendarmes, on déduit que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\mathrm{e}-1-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}\right)=0$ et enfin $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}\right)=\mathrm{e}$.

Autrement dit : $\mathrm{e}=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots$

Exercice VIII ❶ Comme $RI_e{}^2T = \int_0^T Ri^2(t)dt$, on obtient $I_e^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt$: I_e^2 est bien la valeur moyenne de la fonction i^2 sur $[0\,;T]$.

❷ En utilisant l'expression du sinus au carré en fonction de l'angle double, on obtient :

$$\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt = \int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^T = \frac{T}{2}$$

(car $\sin(2\omega T) = \sin(4\pi) = 0$).

Et donc $I_e^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt = \frac{I_m^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt = \frac{I_m^2}{T}\times\frac{T}{2} = \frac{I_m^2}{2}$.

On retrouve bien l'égalité $I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ (donnée dans le cours de sciences physiques de la classe de Troisième).

■

Corrigé séquence 8

Corrigé des activités du chapitre 2

Activité 1

❶ La probabilité d'obtenir 3 en lançant un cubique non truqué est égale à $\frac{1}{6} \approx 0{,}16667$ car on utilise la loi équirépartie sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De même, en lançant un dé dodécaédrique non truqué, cette probabilité est égale à $\frac{1}{12} \approx 0{,}08333.$

❷ **a)** Tous les nombres décimaux qui s'écrivent avec au plus neuf chiffres après la virgule dans l'intervalle $[0\,;1[$ s'écrivent avec le chiffre 0 à gauche de la virgule et une partie décimale qui correspond à un entier naturel n tel que $0 \leq n \leq 999999999$. Il y en a donc 10^{10}.

b) Pour calculer la probabilité d'obtenir le nombre d en choisissant au hasard dans $[0\,;1[$ un nombre décimal s'écrivant avec au plus neuf chiffres après la virgule, on utilise la loi équirépartie. On trouve donc 10^{-10}, soit un dix milliardième.

❸ **a)** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$. La fonction f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$). On a $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$, on obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		α		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ possède une solution α unique dans $\mathbb{R}$ et que cette solution appartient à l'intervalle $[0\,;1]$.

b) Il y a n intervalles dont un seul, noté J, contient la solution α. On en choisit un au hasard, la probabilité qu'il contienne α vaut donc $\frac{1}{n}$.

c) On choisit au hasard un nombre X de l'intervalle $[0\,;1]$. Il y a maintenant un nombre infini de possibilités. La situation est nouvelle. On propose $P(X = \alpha) = 0$. Deux démarches peuvent mener à cette proposition.

Première démarche : dans les questions précédentes, les probabilités sont de plus en plus proches de 0…

Deuxième démarche : on admet qu'on peut définir une loi de probabilité sur l'ensemble infini $[0\,;1]$.

L'événement $(X=\alpha)$ est contenu dans l'événement $(X \in \mathrm{J})$ et donc $p(X=\alpha) \leq P(X \in \mathrm{J})$.

Or $P(X \in \mathrm{J}) = \dfrac{1}{n}$ d'après le b), donc, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $0 \leq P(X=\alpha) \leq \dfrac{1}{n}$.
La seule possibilité est $P(X=\alpha)=0$.

Commentaire Dans le cas où l'univers est fini, la probabilité d'un événement A est $P(A) = \sum_{a_i \in A} P(a_i)$, où A est formé par la réunion des a_i. De façon analogue, dans le cas fini, $P(X \in E) = \sum_{x_i \in E} P(X = x_i)$. On ne peut pas généraliser ceci puisque, ici, d'une part, E peut avoir une infinité d'éléments et, d'autre part, toutes les probabilités $P(X=x_i)$ sont nulles, ce qui donnerait une somme nulle, ce qui, bien sûr, ne convient pas.

On est donc amené à définir différemment la probabilité d'un événement, comme on le verra dans le cours.

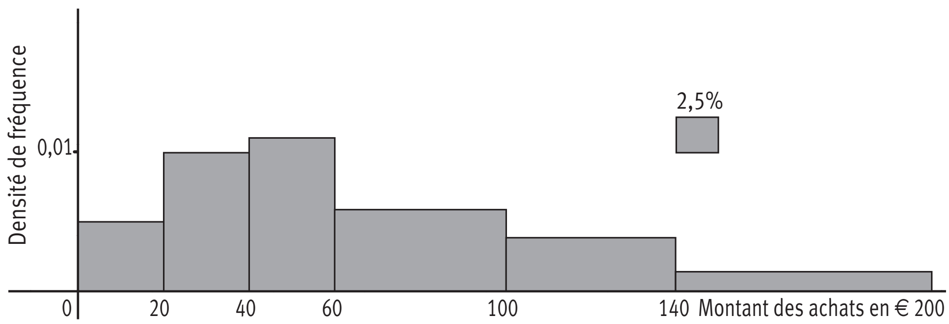
Activité 2

Montant des achats (en €)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200]
Amplitude de la classe = largeur du rectangle	20	20	20	40	40	60
Aire du rectangle	0,09	0,20	0,22	0,24	0,16	0,09
Hauteur du rectangle	0,045	0,01	0,011	0,006	0,004	0,0015

La graduation maximale indiquée sur l'axe des ordonnées est 0,011, c'est la hauteur du troisième rectangle.

Ce ne sont pas les fréquences qui sont indiquées sur l'axe des ordonnées car les fréquences sont les mesures des aires des rectangles.

Les hauteurs des rectangles sont obtenues en divisant les aires par les amplitudes, c'est-à-dire en divisant les fréquences par les amplitudes. On dit que les résultats obtenus sont des **densités de fréquence**. Ce sont les densités de fréquence qui sont indiquées sur l'axe des ordonnées.



Remarques

- La classe modale est la classe qui a la plus grande densité (la troisième pour cet exemple), elle ne coïncide pas toujours avec celle qui a la plus grande fréquence (la quatrième ici).
- Quand les classes ont toutes la même amplitude, les hauteurs des rectangles sont proportionnelles aux aires, les densités sont proportionnelles aux fréquences. Il peut alors exister une confusion sur la nature de l'axe des ordonnées (confusion volontaire ou involontaire).
- Quand l'axe des ordonnées est gradué et nommé, on peut enlever le rectangle qui donne l'unité pour les aires.
- La densité de fréquence peut être supérieure à 1 (ce n'est pas une fréquence !).

Exercices d'apprentissage du chapitre 2

Exercice 1

❶ Il ne s'agit pas d'une densité de probabilité car l'aire sous la courbe ne mesure pas 1 mais $2\times\frac{1}{3}$.

❷ La fonction représentée est constante sur $I=[0\,;0{,}5]$, donc continue. La constante vaut 2, qui est positif. L'aire sous la courbe est celle d'un rectangle qui mesure $2\times\frac{1}{2}=1$. Il s'agit bien d'une densité de probabilité.

Remarque

Cette densité est supérieure à 1, ce qui est possible car il s'agit d'une densité et non pas d'une probabilité.

❸ La fonction n'est pas continue en 0,5 et en 1,5, il ne s'agit donc pas d'une densité de probabilité.

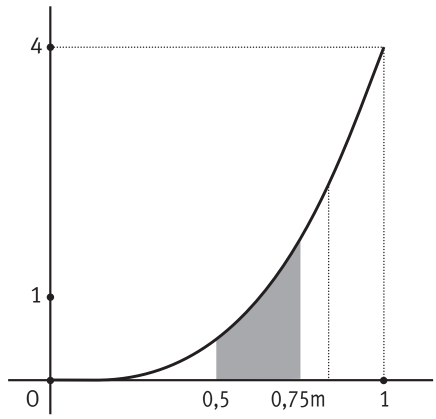
❹ La fonction est affine par morceaux sur $\mathrm{I}=[-1\,;1]$, elle est donc continue. Elle est à valeurs positives et l'aire sous la courbe mesure $\frac{2\times 1}{2}=1$. Il s'agit donc d'une densité de probabilité.

Remarque

L'intervalle I contient des nombres négatifs, ce qui est tout à fait possible !

Exercice 2 ❶ La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc continue sur $[0\,;1]$; elle est à valeurs positives.

On a $\int_0^1 4x^3 \; dx = \left[x^4\right]_0^1 = 1$, donc la fonction f est bien une densité de probabilité.



❷ **a)** La probabilité $P(0{,}5 \leq X \leq 0{,}75)$ est la mesure de l'aire colorée sur le graphique.

On a :

$$P(0{,}5 \leq X \leq 0{,}75) = \int_{0,5}^{0,75} 4x^3 \; dx = \left[x^4\right]_{0,5}^{0,75}$$
$$= 0{,}75^4 - 0{,}5^4 \approx 0{,}254.$$

b) On a :

$$P(X \leq m) = 0{,}5 \Leftrightarrow \int_0^m 4x^3 \; dx = 0{,}5$$
$$\Leftrightarrow m^4 = 0{,}5$$
$$\Leftrightarrow m^2 = \sqrt{0{,}5}$$
$$\Leftrightarrow m = \sqrt{\sqrt{0{,}5}}.$$

D'où $m \approx 0{,}84$.

Remarque

L'aire sous la courbe est partagée en deux parties d'aire 0,5 par le segment formé par les points d'abscisse m (en pointillés sur le graphique). On dit parfois que m est la médiane.

Exercice 3 ❶ Soit x tel que $1 \leq x$, on a :

$$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{k}{t^3}\mathrm{d}t = \left[\frac{-k}{2t^2}\right]_1^x = \frac{-k}{2x^2} - \frac{-k}{2} = \frac{k}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{k}{2}$.

La fonction f est une fonction rationnelle continue sur $[1;+\infty[$ et, pour $k=2$, la fonction f est à valeurs positives et l'aire sous la courbe mesure 1, donc f est une densité de probabilité.

❷ Soit x tel que $1 \leq x$, on a $\int_1^x g(t)\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{k}{t}\mathrm{d}t = [k\ln t]_1^x = k\ln x - k\ln 1 = k\ln x$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x g(t)\mathrm{d}t = +\infty$ et il est impossible de trouver un réel k tel que g soit une densité de probabilité.

Exercice 4 ❶ On a $P(1\le X\le 10)=\int_1^{10}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{-1}{t}\right]_1^{10}=\frac{-1}{10}-\frac{-1}{1}=1-0{,}1=0{,}9.$

❷ Le nombre $P_{(1\le X\le 10)}(1\le X\le 5)$ est la probabilité d'obtenir par la variable aléatoire X un nombre compris entre 1 et 5 sachant qu'il est compris entre 1 et 10.

On a : $P_{(1\le X\le 10)}(1\le X\le 5)=P_{(X\in[1;10])}\left(X\in[1;5]\right)$

$$=\frac{P\left(X\in[1;5]\cap[1;10]\right)}{P\left(X\in[1;10]\right)}=\frac{P\left(X\in[1;5]\right)}{P\left(X\in[1;10]\right)}.$$

Comme

$$P\left(X\in[1;5]\right)=P(1\le X\le 5)=\int_1^{5}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{-1}{t}\right]_1^{5}=\frac{-1}{5}-\frac{-1}{1}=1-0{,}2=0{,}8,$$

on obtient :

$$P_{(1\le X\le 10)}(1\le X\le 5)=\frac{0{,}8}{0{,}9}\approx 0{,}889.$$

Exercices d'apprentissage du chapitre 3

Exercice 5 ❶ Comme le facteur peut arriver à tout instant avec les mêmes chances, on modélise son heure d'arrivée par la variable aléatoire F qui suit la loi uniforme sur $[0;30]$.

Sa densité est donc la fonction constante sur $[0;30]$ qui vaut $\frac{1}{30-0}=\frac{1}{30}$.

❷ **a)** On a $P(F=25)=0$: c'est le cas pour toutes les probabilités de la forme $P(X=\alpha)$ pour toute valeur α prise par une variable aléatoire à densité. Par conséquent, dans ce qui suit, on peut écrire des inégalités larges ou strictes, des intervalles ouverts ou fermés sans que cela change les résultats.

b) On a $P(15<F<20)=P\left(X\in\,]15;20[\right)=\frac{20-15}{30-0}=\frac{1}{6}$.

c) On a $P(F<20)=P\left(F\in[0;20[\right)=\frac{20-0}{30-0}=\frac{2}{3}$.

d) On a $P(F>15)=P\left(F\in\,]15;30]\right)=\frac{30-15}{30-0}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$.

❸ L'heure moyenne de son passage est donnée par l'espérance de la variable aléatoire F.

Comme $\mathrm{E}(F)=\frac{0+30}{2}=15$, on peut dire que le facteur passe en moyenne à 10 h 15 min.

Exercice 6 ❶ Le tram passe à 7 h, 7 h 10 et 7 h 20. L'événement E « Ayana attend le tram moins de deux minutes » est l'événement $E=\{X\in\{7\}\cup[8\,;10]\cup[18\,;20]\}$.

On a donc :

$$P(E)=P(X=7)+P(8\le X\le 10)+P(18\le X\le 20)$$
$$=0+\frac{10-8}{20-0}+\frac{20-18}{20-0}=\frac{4}{20}=0{,}2.$$

❷ L'événement F « Ayana attend le tram plus de cinq minutes » est l'événement $F=\{X\in\,]0\,;5]\cup]10\,;15]\}$.

On a donc :

$$P(F)=P(0<X\le 5)+P(10<X\le 15)$$
$$=\frac{5-0}{20-0}+\frac{15-10}{20-0}=\frac{10}{20}=0{,}5.$$

Exercice 7 Les valeurs prises par la variable aléatoire T correspondent aux dix chiffres possibles : 0, 1, 2, … , 9.

Il s'agit donc d'une variable aléatoire discrète, prenant un nombre fini de valeurs.

La variable aléatoire T est la première décimale de X donc :

$P(T=0)=P(0\le X<0{,}1)=0{,}1-0=0{,}1$ puisque X suit la loi uniforme sur $[0\,;1]$.

On a aussi $P(T=1)=P(0{,}1\le X<0{,}2)=0{,}2-0{,}1=0{,}1$.

On obtient ainsi $P(T=k)=0{,}1$ pour tout entier k tel que $0\le k<1$.

La loi de T est donc la loi équirépartie sur l'ensemble fini $\{0,1,2,\ldots,8,9\}$.

Corrigé de l'activité du chapitre 4

Activité 3 ❶

Semaine	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de robots en fonctionnement	1000	950	902	857	814	773	735	698	663	630	598	568

❷ **a)** On a $P(X>3)=0{,}857$.

b) On a $P(X>5)=0{,}773$.

c) On a $P_{X>3}(X>5)=\frac{0{,}773}{0{,}857}\approx 0{,}902$. Remarque : on a aussi $P_{X>3}(X>5)=\frac{773}{857}$ en utilisant la loi équirépartie sur l'ensemble des 857 robots qui fonctionnent au début de la quatrième semaine.

d) On a $P(X>2)=0{,}902$.

e) On observe que $P_{X>3}(X>5)\approx P(X>2)$.

❸ On obtient aussi

$$P_{X>4}(X>6)=\frac{0,735}{0,814}\approx 0,903 \text{ et } P_{X>8}(X>10)=\frac{0,598}{0,663}\approx 0,902.$$

Si on n'avait pas utilisé de valeurs approchées pour remplir le tableau, on aurait même exactement l'égalité de ces probabilités avec $P(X>2)$. En effet le calcul qui donne le nombre de robots en fonctionnement au début de la n-ième semaine est $1000\times 0,95^n$, la probabilité de choisir un robot en fonctionnement au début de la n-ième semaine est $\dfrac{1000\times 0,95^n}{1000}=0,95^n$. On en déduit :

$$P_{X>3}(X>5)=\frac{0,95^6}{0,95^4}=0,95^2=P(X>2) \text{ et de même}$$

$$P_{X>p}(X>p+2)=0,95^2=P(X>2) \text{ pour tout entier } p \text{ de 1 à 10.}$$

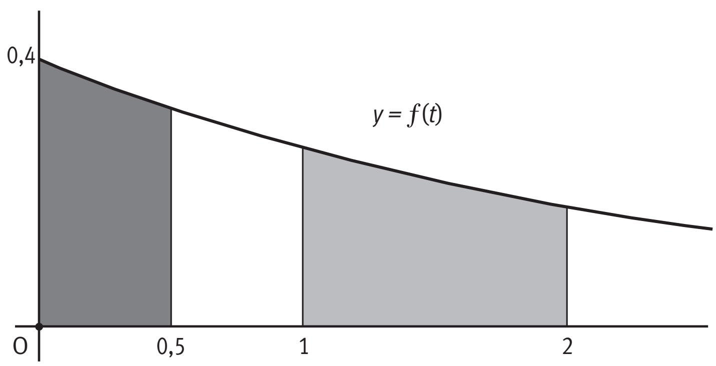
Et même $P_{X>p}(X>p+k)=0,95^k=P(X>k)$ pour tous les entiers positifs p et k tels que $p+k\le 12$.

Cette propriété est appelée propriété de **durée de vie sans vieillissement**. En effet, si X désigne un temps, on exprime ainsi le fait que la probabilité conditionnelle « sachant que $X>p$ » est égale à la probabilité obtenue en ne tenant pas compte du temps p qui s'est écoulé. On retrouvera cette propriété pour les lois exponentielles.

Exercices d'apprentissage du chapitre 4

Exercice 8 ❶ La fonction de densité de X est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=0,4e^{-0,4t}$.

❷



❸ On a :

$$P(X \le 0{,}5) = \int_0^{0,5} 0{,}4\mathrm{e}^{-0{,}4t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-0{,}4t}\right]_0^{0,5}$$
$$= \left(-\mathrm{e}^{-0{,}4\times 0{,}5}\right) - \left(-\mathrm{e}^{-0{,}4\times 0}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}2} \approx 0{,}181.$$

$$P(1 \le X \le 2) = \int_1^{2} 0{,}4\mathrm{e}^{-0{,}4t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-0{,}4t}\right]_1^{2}$$
$$= \left(-\mathrm{e}^{-0{,}4\times 2}\right) - \left(-\mathrm{e}^{-0{,}4\times 1}\right) = \mathrm{e}^{-0{,}4} - \mathrm{e}^{-0{,}8} \approx 0{,}22.$$

Exercice 9 ❶ On a :

$$P(X > 200) = 1 - P(0 \le X \le 200) = 1 - \int_0^{200} 0{,}0001\mathrm{e}^{-0{,}0001t}\,\mathrm{d}t = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-0{,}0001t}\right]_0^{200}$$
$$= 1 - \left(-\mathrm{e}^{-0{,}02} + 1\right) = \mathrm{e}^{-0{,}02} \approx 0{,}98.$$

❷ On cherche la durée x telle que $P(X > x) = 0{,}95.$ On a :

$$P(X > x) = 1 - P(0 \le X \le x) = 1 - \int_0^{x} 0{,}0001\mathrm{e}^{-0{,}0001t}\,\mathrm{d}t = 1 - \left[\text{-}\mathrm{e}^{-0{,}0001t}\right]_0^{x}$$
$$= 1 - \left(-\mathrm{e}^{-0{,}001\mathrm{x}} + 1\right) = \mathrm{e}^{-0{,}0001x}.$$

On résout donc :

$$\mathrm{e}^{-0{,}0001x} = 0{,}95 \Leftrightarrow -0{,}0001x = \ln 0{,}95$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 0{,}95}{-0{,}0001}.$$

D'où $x \approx 513$.

Donc une ampoule fonctionne au moins 513 h avec une probabilité d'environ 0,95.

❸ La durée moyenne de fonctionnement est donnée par l'espérance de la variable aléatoire X.

Comme $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}001} = 1000,$ on peut dire que ces ampoules fonctionnent en moyenne 1000 h.

❹ La probabilité qu'une ampoule fonctionne plus de 1500 h sachant qu'elle a déjà fonctionné pendant 1000 h est la probabilité conditionnelle $P_{X \ge 1000}(X \ge 1500).$ Comme la loi exponentielle est une loi sans vieillissement, on a : $P_{X \ge 1000}(X \ge 1500) = P(X \ge 500) = \mathrm{e}^{-0{,}0001\times 500} = \mathrm{e}^{-0{,}05} \approx 0{,}951.$

Exercice 10 ❶ La proposition est vraie car, si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, on a $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ d'où $\lambda = \frac{1}{\mathrm{E}(X)}.$

Ici, $\lambda = \frac{1}{8} = 0{,}125$ et λ est exprimé en années^{-1}.

❷ La proposition est fausse. On a $e^{-8} \approx 0{,}0003$.

La probabilité pour que l'appareil fonctionne moins de 8 ans est :

$$P(X<8)=\int_0^8 0{,}125e^{-0{,}125t}\,dt=\left[-e^{-0{,}125t}\right]_0^8$$
$$=\left(-e^{-0{,}125\times 8}\right)-\left(-e^{-0{,}125\times 0}\right)=1-e^{-1}\approx 0{,}632.$$

On peut aussi rédiger en appliquant directement la propriété $P(X\le a)=1-e^{-\lambda a}$.

❸ La proposition est vraie car, d'après la propriété 9, la probabilité pour que l'appareil fonctionne pendant au moins 16 ans est : $P(X\ge 16)=e^{-0{,}125\times 16}=e^{-2}$.

❹ La proposition est vraie car la probabilité pour que l'appareil fonctionne entre 8 et 12 ans est :

$$P(8\le X\le 12)=e^{-0{,}125\times 8}-e^{-0{,}125\times 12}=e^{-1}-e^{-1{,}5}\approx 0{,}145.$$

❺ La proposition est vraie.

On doit déterminer la probabilité conditionnelle $P_{X\ge 8}(X\ge 12)$. Comme la loi exponentielle est une loi sans vieillissement, on a $P_{X\ge 8}(X\ge 12)=P(X\ge 4)$. On sait que $P(X\ge 4)=e^{-0{,}125\times 4}=e^{-0{,}5}$, donc :

$$P_{X\ge 8}(X\ge 12)=e^{-0{,}5}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Exercice 11

Partie A

❶ D'après les propriétés 8 et 9, on a $P(X\ge \mathrm{T})=e^{-\lambda \mathrm{T}}$ et $P(X\le \mathrm{T})=1-e^{-\lambda \mathrm{T}}$.

On résout donc l'équation $1-e^{-\lambda \mathrm{T}}=e^{-\lambda \mathrm{T}}$:

$$1-e^{-\lambda \mathrm{T}}=e^{-\lambda \mathrm{T}}\Leftrightarrow 1=2e^{-\lambda \mathrm{T}}\Leftrightarrow 0=\ln 2-\lambda \mathrm{T}\ \text{(en prenant les logarithmes).}$$

La demi-vie est donc $\mathrm{T}=\dfrac{\ln 2}{\lambda}$.

❷ Pour le plutonium 239, on a $\mathrm{T}=24000$ (en années), donc :

$$\lambda=\frac{\ln 2}{\mathrm{T}}=\frac{\ln 2}{24000}\approx 2{,}9\times 10^{-5}\ \text{(en années}^{-1}\text{).}$$

❸ Pour l'iode 123, on a $\mathrm{T}=13$ (en heures), donc $\lambda=\dfrac{\ln 2}{\mathrm{T}}=\dfrac{\ln 2}{13}\approx 0{,}053$ (en h^{-1}).

Partie B

❶ L'unité étant le jour, on a $\mathrm{T}=\dfrac{\ln 2}{\lambda}=\dfrac{\ln 2}{0{,}086}\approx 8$. La demi-vie de l'iode 131 est donc d'environ 8 jours.

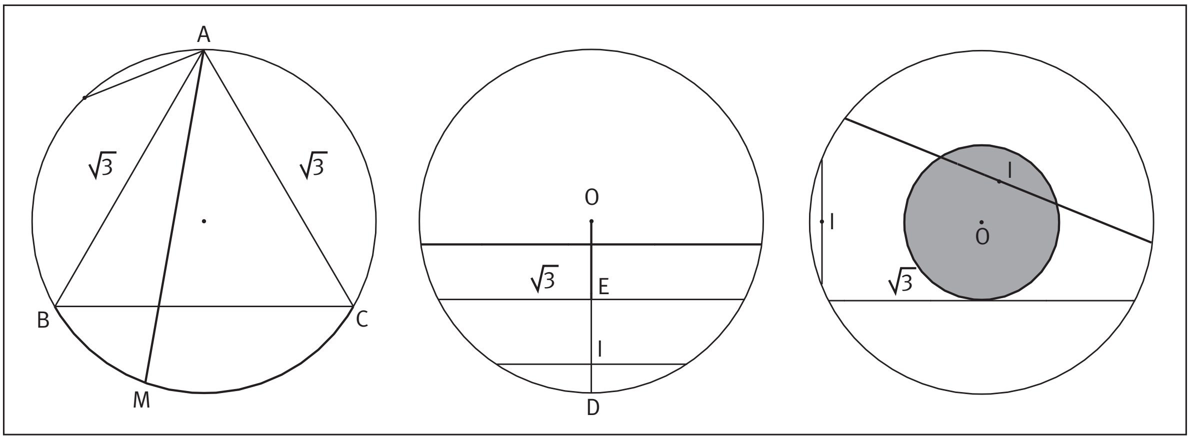
❷ La probabilité qu'un atome d'iode 131 se désintègre pendant les deux premières semaines d'observation est égale à $P(X\le 14)=1-e^{-0{,}086\times 14}\approx 0{,}7$.

Et pendant le premier mois : $P(X\le 31)=1-e^{-0{,}086\times 31}\approx 0{,}93$.

❸ La durée moyenne de désintégration d'un atome d'iode 131 est égale à $\frac{1}{\lambda}$ soit environ 11,63 jours.

Corrigé des exercices de synthèse du chapitre 5

Exercice I ❶ La corde AM a une longueur supérieure à $\sqrt{3}$ lorsque le point M appartient au « petit » arc $\overset{\frown}{BC}$ (qui est en trait épais). En appliquant la loi uniforme aux longueurs des arcs, la probabilité demandée est égale au quotient des longueurs de l'arc et du cercle, on obtient $\frac{1}{3}$.



❷ On obtient la corde de milieu I en traçant la perpendiculaire à la droite (OI). La corde de milieu I a une longueur supérieure à $\sqrt{3}$ lorsque le point I appartient au segment [OE], le point E étant le milieu de [OD]. En appliquant la loi uniforme aux longueurs des segments du segment [OE], la probabilité demandée est égale au quotient des longueurs des segments [OE] et [OD], on trouve $\frac{1}{2}$.

❸ La corde de milieu I a une longueur supérieure à $\sqrt{3}$ lorsque la distance OI est inférieure à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire lorsque le point I appartient au disque de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$. En appliquant la loi uniforme aux aires incluses dans le disque de centre O et de rayon 1, on trouve la probabilité $\dfrac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi \times 1^2} = \frac{1}{4}$.

❹ On observe que les probabilités obtenues sont différentes. L'expression «choisie au hasard » n'est donc pas assez précise dans cet exemple puisque le résultat dépend de la façon de choisir la corde. Ce phénomène est connu sous le nom de « paradoxe de Bertrand », du nom de Joseph Bertrand qui a mis cela en évidence en 1888.

Exercice II ❶ Comme la variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ, on a :

$$P(X \geq 10) = e^{-10\lambda} = 0,286, \text{ d'où } \lambda = -\frac{\ln 0,286}{10} \approx 0,125.$$

❷ On a $P(X \leq 0,5) = 1 - e^{-0,125 \times 0,5} \approx 0,061$.

❸ Comme la loi de X est une loi sans vieillissement, on a :

$$P_{X \geq 8}(X \geq 10) = P(X \geq 2) = e^{-0,125 \times 2} \approx 0,779.$$

❹ Le nombre Y de composants électroniques ayant une durée de vie supérieure à 10 ans suit la loi binomiale de paramètres 15 et 0,286 car le nombre Y compte le nombre de succès (fonctionner plus de 10 ans) pour 15 composants, les durées de fonctionnement des composants étant indépendantes. On cherche $P(Y \geq 1)$ et on a : $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - 0,286)^{15} \approx 0,994$.

❺ On cherche un nombre n de composants tel que $P(Y \geq 1) \geq 0,999$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) \geq 0,999 &\Leftrightarrow 1 - P(Y = 0) \geq 0,999 \\ &\Leftrightarrow 1 - (1 - 0,286)^n \geq 0,999 \\ &\Leftrightarrow 0,001 \geq 0,714^n \\ &\Leftrightarrow \ln 0,001 \geq n \ln 0,714 \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln 0,001}{\ln 0,714} \leq n. \end{aligned}$$

(Le sens de l'inégalité change à la dernière équivalence car on a divisé par $\ln 0,714$, qui est négatif.)

Comme $\frac{\ln 0,001}{\ln 0,714} \approx 20,506$, la première valeur de n qui convient est 21. L'établissement doit donc acheter au moins 21 composants électroniques.

Exercice III ❶ On a :

$$P(500 \leq X \leq 1000) = \int_{500}^{1000} \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_{500}^{1000} = e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda}.$$

❷ On donne $P(500 \leq X \leq 1000) = \frac{1}{4}$, on est donc amené à résoudre

$$e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda} = \frac{1}{4}.$$

On pose $X = e^{-500\lambda}$ et on résout $X - X^2 = \frac{1}{4}$ qui équivaut à $4X^2 - 4X + 1 = 0$, soit $(2X - 1)^2 = 0$.

On en déduit $X = \frac{1}{2} = e^{-500\lambda}$, d'où $-\ln 2 = -500\lambda$ et donc $\lambda = \frac{\ln 2}{500} \approx 0,0014$.

Exercice IV ❶ Comme X et Y valent au minimum 0 et au maximum 1, la somme prend des valeurs comprises entre 0 et 2.

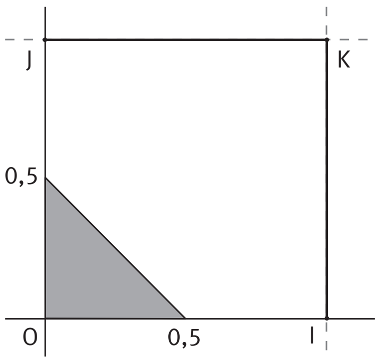
❷ On trace le segment de la droite d'équation $y = 0,5 - x$ qui se trouve à l'intérieur du carré OIKJ.

L'ensemble (E) est la partie du carré OIKJ situé sous ce segment car l'ordonnée y doit être inférieure à $0{,}5-x$ qui est l'ordonnée du point de même abscisse sur la droite.

On a : $\text{aire(E)}=\frac{1}{2}(0{,}5\times 0{,}5)=0{,}125.$ Comme $\text{aire(C)}=1,$ on a :

$$P(Y\le 0{,}5-X)=0{,}125.$$

Comme $Y\le 0{,}5-X \Leftrightarrow X+Y\le 0{,}5 \Leftrightarrow S\le 0{,}5,$ on a aussi $P(S\le 0{,}5)=0{,}125.$



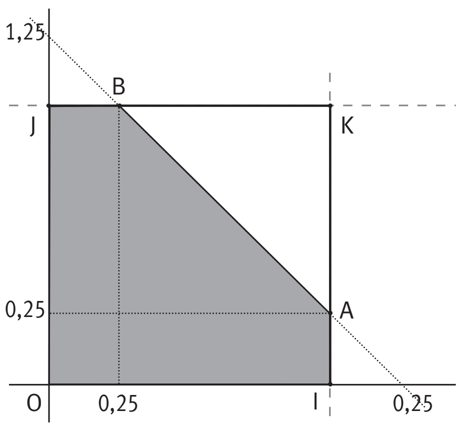
Remarque

Au début de l'énoncé, il est précisé « indépendamment l'une de l'autre ». Cette hypothèse d'indépendance correspond à la notion familière d'indépendance mais surtout aussi à la notion mathématique (hors programme pour des variables aléatoires), et c'est cette indépendance mathématique qui justifie le résultat (admis ici) pour le calcul des probabilités par les quotients $P(E)=\frac{\text{aire(E)}}{\text{aire(C)}}.$

❸ Soit t un nombre réel tel que $0\le t\le 1.$ On a de façon analogue

$$P(S\le t)=\frac{1}{2}t\times t=\frac{t^2}{2}.$$

❹



Comme précédemment, on trace le segment [AB] de la droite d'équation $y=1{,}25-x$ qui se trouve à l'intérieur du carré OIKJ et l'ensemble (G) est la partie du carré OIKJ situé sous ce segment. On obtient :

$$\text{aire(G)}=\text{aire(C)}-\text{aire(ABK)}=1-\frac{1}{2}(0{,}75\times 0{,}75)=0{,}71875.$$

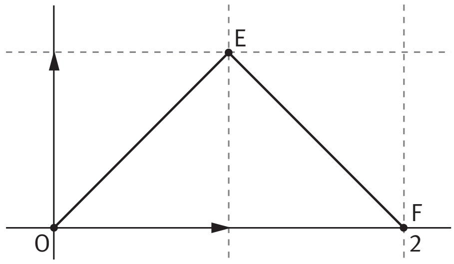
D'où $P(Y\le 1{,}25-X)=P(S\le 1{,}5)=0{,}71875.$

❺ Soit t un nombre réel tel que $1\le t\le 2.$ De façon analogue, le triangle non hachuré du carré a alors pour aire : $\frac{\text{KA}\times\text{KB}}{2}=\frac{(1-(t-1))^2}{2}=\frac{(2-t)^2}{2}=\frac{t^2}{2}-2t+2.$

On en déduit : $P(S\le t)=P(Y\le t-X)=1-\left(\frac{t^2}{2}-2t+2\right)=-\frac{t^2}{2}+2t-1.$

❻ Comme $F(t) = P(S \leq t) = \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u,$ d'après une propriété des intégrales on a $F' = f$.

Pour $0 \leq t \leq 1$, $F'(t) = t$ et, pour $1 \leq t \leq 2$, $F'(t) = 2 - t$.



La fonction $F' = f$ est une fonction affine par morceaux, elle est continue car les deux expressions coïncident pour $t = 1$. Elle est à valeurs positives et l'aire sous la courbe est l'aire du triangle OEF qui mesure $\frac{1}{2}(2 \times 1) = 1$.

La fonction f est donc bien une densité de probabilité sur $[0\,;2]$.

■

Corrigé séquence 9

Corrigé des activités du chapitre 2

Activité 1 **Centrer et réduire**

On a rappelé dans les prérequis que :

$$\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b \text{ et } \sigma(aX+b)=|a|\sigma(X).$$

Donc ici : $\mathrm{E}(X-m)=\mathrm{E}(X)-m=0$.

On a aussi $\sigma\left(\dfrac{X-m}{\sigma_0}\right)=\sigma\left(\dfrac{X}{\sigma_0}\right)=\dfrac{\sigma(X)}{\sigma_0}=\dfrac{\sigma_0}{\sigma_0}=1$.

La variable aléatoire $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ est donc une variable aléatoire centrée et réduite.

On admettra que cette propriété est encore vraie pour les variables aléatoires à densité.

Activité 3 Étude de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

❶ Cette fonction est paire car elle est définie sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x, on a $f(-x)=f(x)$ puisque x n'apparaît que par x^2.

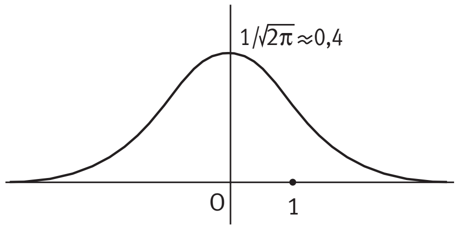
❷ La fonction f est le produit par $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ de la composée de la fonction $x\mapsto -\dfrac{x^2}{2}$ et de la fonction exponentielle $X\mapsto \mathrm{e}^X$.

En $+\infty$, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x^2}{2}=-\infty$ et que $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X=0$, on peut écrire $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}=\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X=0$ par composition avec $X=-\dfrac{x^2}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

En $-\infty$, on a de même $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x^2}=\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X=0$ et ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

❸ Par composition, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ qui est du signe contraire de x. La fonction f est donc croissante sur $\left]-\infty\,;0\right]$ et décroissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car f est paire.



❹ La calculatrice donne $\int_{-10}^{10} f(t)\,\mathrm{d}t \approx 1$.
Les limites et l'allure de la courbe permettent de conjecturer que l'aire tout entière mesure une unité d'aire.

C'est pour obtenir ce résultat que le coefficient $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ est introduit dans la fonction f (ce coefficient peut paraître un peu surprenant mais sa justification n'est pas accessible en terminale).

❺ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est dérivable, elle est à valeurs positives comme l'exponentielle, l'aire sous la courbe de f semble égale à 1 u.a., la fonction doit donc être une densité de probabilité.

Corrigé des exercices du chapitre 2

Exercice 1 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$.

❶ **a)** $P(-0,5 \le X \le 1,3) \approx 0,5946$

b) $P(X \le -1) \approx 0,1586$

c) $P(X \ge 1,8) \approx 0,0359$.

❷ Le réel x tel que $P(X \le x) = 0,8$ est tel que $x \approx 0,8416$.

Exercice 2 X suit la loi $\mathcal{N}(12\,;\,9)$.

❶ **a)** $P(10 \le X \le 14) \approx 0,495$ (attention $\sigma = 3$)

b) $P(X \le 13) \approx 0,6305$

c) $P(X \ge 7) \approx 0,9522$.

❷ Le réel x tel que $P(X \le x) = 0,9$ est tel que $x \approx 15,8446$.

Exercice 3 ❶ Chaque courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$ et, l'écart-type σ mesurant la dispersion, plus il est important, plus la courbe est « étalée ». On en déduit donc que :

- la courbe 1 représente la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(5\,;0,5^2)$,
- la courbe 2 représente la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(7\,;1)$,
- la courbe 3 représente la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(5\,;1)$
- la courbe 4 représente la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(7\,;2^2)$.

❷ La courbe ($\mathscr{C}$) est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 9$ et elle est « étalée » comme la courbe 1, elle représente donc la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(9\,;0{,}5^2)$.

Exercice 4 ❶ On utilise la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-15}{\sigma}$, Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Comme $X < 12 \Leftrightarrow \sigma Z + 15 < 12 \Leftrightarrow Z < \dfrac{-3}{\sigma}$, on obtient $P\left(Z < \dfrac{-3}{\sigma}\right) = 0{,}4$. La calculatrice donne $\dfrac{-3}{\sigma} \approx -0{,}2533$, on en déduit $\sigma \approx 11{,}84$.

❷ On utilise la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-\mu}{0{,}5}$, Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Comme $X < 7 \Leftrightarrow 0{,}5Z + \mu < 7 \Leftrightarrow Z < \dfrac{7-\mu}{0{,}5}$, on obtient $P\left(Z < \dfrac{7-\mu}{0{,}5}\right) = 0{,}3$. La calculatrice donne $\dfrac{7-\mu}{0{,}5} \approx -0{,}5244$, on en déduit $\mu \approx 7{,}2622$.

Exercice 5 La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(61{,}5\,;0{,}4^2)$.

❶ La probabilité qu'une pièce tirée au hasard ait un diamètre compris entre 60,7 mm et 62,3 mm vaut $P(60{,}7 \le X \le 62{,}3) \approx 0{,}9544$.

❷ Il s'agit de la probabilité de l'événement contraire, soit environ $0{,}0455$.

❸ $\dfrac{P((X \le 61) \cap (60{,}7 \le X \le 62{,}3))}{P(60{,}7 \le X \le 62{,}3)} = \dfrac{P(60{,}7 \le X \le 61)}{P(60{,}7 \le X \le 62{,}3)} \approx 0{,}0868$.

Exercice 6 La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(6000\,;400^2)$.

❶ $P(5800 \le X \le 6200) \approx 0{,}3829$.

❷ $P(X \le 5700) \approx 0{,}2266$.

❸ $P(X \ge 6400) \approx 0{,}1586$.

❹ Les vaches qui produisent moins de x litres de lait par an forment 30 % du troupeau. Le réel x tel que $P(X \le x) = 0{,}30$ correspond donc à la production maximale des 30 % des vaches les moins productives du troupeau. On trouve $x \approx 5790$ litres.

❺ La production minimale prévisible des 20 % des vaches les plus productives du troupeau est le nombre x tel que $P(X \ge x) = 0{,}20$ c'est-à-dire $P(X \le x) = 0{,}80$ et la calculatrices donne $x \approx 6336$ litres.

Exercice 7 ❶ La probabilité qu'une plaque soit conforme est égale à :

$$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997.$$

Donc la probabilité qu'une plaquette ne soit pas conforme vaut environ 0,003.

❷ On utilise la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-125}{0{,}5}$, Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Comme $\mu - h \le X \le \mu + h \Leftrightarrow 125 - h \le 0{,}5Z + 125 \le 125 + h \Leftrightarrow -2h \le Z \le 2h$, on cherche h tel que $P(-2h \le Z \le 2h) = 0{,}99 = 1 - 0{,}01$.

Dans le cours, on a vu qu'une valeur particulière u_α du théorème 2 est $u_{0,01} \approx 2{,}58$ donc $P(-2{,}58 \le Z \le 2{,}58) \approx 0{,}99$ et on en déduit $h \approx 1{,}29$.

Ainsi $\mu - h \approx 123{,}71$ et $\mu + h \approx 126{,}29$.

Grâce à des échantillons prélevés en fin de chaîne, ces poids d'alerte permettent de déceler l'existence d'anomalies de fonctionnement.

Corrigé des activités du chapitre 3

Activité 4 Dans la pratique, on utilise l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ pour des probabilités p comprises entre 0,2 et 0,8 et des échantillons de taille n supérieure à 25.

❶ Le dé est bien équilibré donc $p = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$ et $n = 100$. Les conditions d'utilisation de l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ sont vérifiées et on trouve environ $[0{,}233\,;\,0{,}434]$.

❷ $p = 0{,}51$ et $n = 25$. Les conditions sont vérifiées et on trouve environ $[0{,}31;0{,}71]$, ce qui signifie en multipliant par 25 que, le nombre de garçons parmi les 25 nouveau-nés est compris entre 8 et 17 avec une probabilité d'environ 0,95.

Dans chacun des deux cas suivants, les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation sont vérifiées.

❸ Pour $n = 100$ et $p = 0{,}5$, l'intervalle de fluctuation est $[0{,}4\,;\,0{,}6]$. La fréquence observée $f = 0{,}56$ appartient à cet intervalle, on décide que la pièce est équilibrée.

❹ Pour $n = 1000$ $p = 0{,}5$, l'intervalle de fluctuation est environ $[0{,}4683\,;\,0{,}5317]$. La fréquence observée $f = 0{,}560$ n'appartient pas à cet intervalle, on décide que la pièce n'est pas équilibrée.

Remarque

Dans les deux cas, la fréquence est la même, mais la décision est différente. Dans le deuxième cas, la taille de l'échantillon est plus grande, ce qui diminue l'amplitude de l'intervalle de fluctuation.

Activité 5 Dans le premier cas, l'intervalle $\mathrm{I} = \left[0{,}25 - \frac{1}{\sqrt{50}}\,;\, 0{,}25 + \frac{1}{\sqrt{50}}\right]$ est à peu près l'intervalle $[0{,}108\,;\,0{,}392]$ et l'intervalle

$$\mathrm{J} = \left[0{,}25 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}25 \times 0{,}75}}{\sqrt{50}}\,;\, 0{,}25 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}25 \times 0{,}75}}{\sqrt{50}}\right]$$

est à peu près l'intervalle $[0{,}129\,;\,0{,}371]$.

Remarque

On prend des valeurs approchées des bornes des intervalles. Il faut arrondir la borne inférieure d'un intervalle par défaut et la borne supérieure par excès.

Dans le premier cas, toutes les fréquences appartiennent à I et trois n'appartiennent pas à J. Ainsi, 100 % des fréquences appartiennent à I et 94 % appartiennent à J.

Dans le deuxième cas, l'intervalle I est l'intervalle $[0{,}15\,;0{,}35]$ et l'intervalle J est à peu près l'intervalle $[0{,}165\,;0{,}335]$. On observe 99 % des fréquences dans I et 95 % des fréquences dans J.

Dans le troisième cas, l'intervalle I est à peu près l'intervalle $[0{,}179\,;0{,}321]$ et l'intervalle J est à peu près l'intervalle $[0{,}189\,;0{,}311]$. On observe qu'une fréquence n'est pas dans I et que six ne sont pas dans J. On observe que 99,5 % des fréquences sont dans I et 97 % des fréquences sont dans J.

Dans les trois cas, l'intervalle I contient l'intervalle J.

Dans les trois cas, on observe qu'environ 95 % des fréquences sont dans I et dans J. C'est une propriété générale qui sera vue dans le cours. La propriété du cours concerne une probabilité. C'est pourquoi, en faisant d'autres simulations, on peut trouver des pourcentages un peu éloignés de 95 %.

Corrigé des exercices du chapitre 3

Exercice 8 $n=400$, $p=0{,}06$, $np=24$ et $n(1-p)=376$, donc les conditions sont remplies pour utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique du cours.

L'intervalle $\left[p-1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p+1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ est environ égal à $[0{,}036\,;0{,}084]$.

La fréquence est $f=\dfrac{50}{400}=0{,}125.$ Cette fréquence est en dehors de l'intervalle de fluctuation, donc on conclut que les femmes ayant eu un travail pénible pendant leur grossesse sont plus susceptibles d'avoir un enfant prématuré que les autres.

Exercice 9 ❶ $f=\dfrac{21}{103}\approx 0{,}204.$

❷ $n=103$, $p=0{,}12$, $np=12{,}36$ et $n(1-p)=90{,}64$, donc les conditions sont remplies pour utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique du cours.

L'intervalle $\left[p-1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p+1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ est environ égal à $[0{,}057\,;0{,}183]$.

❸ La fréquence observée f se situe en dehors de l'intervalle de fluctuation. Non, on ne peut pas dire que ce club est représentatif de la proportion de gauchers dans le monde puisque, dans ce club, la fréquence des gauchers n'est pas dans l'intervalle de fluctuation comme le sont environ 95 % des fréquences des gauchers pour des groupes de 103 personnes choisies au hasard.

Exercice 10

❶ Pour $p=0{,}02$, les conditions pour n deviennent :

$$n \geq 30,\ n \geq \frac{5}{0{,}02} \text{ et } n \geq \frac{5}{0{,}98}.$$

La plus petite valeur de n qui convient est donc $n=250$.

❷ L'amplitude de l'intervalle de fluctuation est égale à $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

L'inéquation $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0{,}1$ est équivalente à $\frac{2}{0{,}1} \leq \sqrt{n}$, la plus petite valeur de n qui convient est $n=400$.

Corrigé des exercices du chapitre 4

Exercice 11

On se place dans le cas où l'échantillon contient au moins 30 éléments et où la fréquence f observée est telle que $nf \geq 5$ et $n(1-f) \geq 5$.

❶ $f=0{,}23$ et $n=100$, $nf=23$ et $n(1-f)=77$, donc les conditions d'utilisation de l'intervalle de confiance au niveau de 95 % $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ sont remplies et on obtient $[0{,}13\,;0{,}33]$.

❷ Après avoir fait des modifications, la fréquence obtenue dans un nouvel échantillon est égale à 0,09. Les conditions sont de nouveau remplies et on obtient un nouvel intervalle de confiance : $[-0{,}01\,;0{,}19]$.

❸ Les deux intervalles ne sont pas disjoints. Il est donc possible, au niveau de confiance de 95 %, que les modifications n'aient pas apporté d'amélioration.

Exercice 12

❶ La fréquence des avis favorables est égale à 0,53, donc $nf=53$ et $n(1-f)=47$. Les conditions sont remplies et un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % est donné par $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$; on obtient $[0{,}43\,;0{,}63]$. Il est donc possible que la proportion de la population favorable à la proposition de la mairie soit inférieure à 50 %. On ne peut donc pas dire que la majorité de la population est favorable au projet.

❷ La fréquence obtenue est la même, mais maintenant $n=500$. Les conditions sont toujours remplies, le nouvel intervalle de confiance est $[0{,}485\,;0{,}574]$ et ne permet toujours pas de conclure quant à la position de la majorité de la population.

❸ Pour estimer, au niveau de confiance de 95 %, que la majorité de la population est favorable à cet emplacement, on a besoin que la borne inférieure de l'intervalle $\left[0{,}53-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;0{,}53+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ soit supérieure à 0,5.

On a $0{,}53-\frac{1}{\sqrt{n}}>0{,}5 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}<0{,}03 \Leftrightarrow \frac{1}{9}\times 10^4<n$. La plus petite valeur de n qui convient est 1112.

Corrigé des exercices de synthèse

Exercice I ❶ **a)** On souhaite que $P(X>83)\leq 0{,}01$. On pose $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-\mu}{2}$, d'où $X=2Z+\mu$ ce qui s'écrit aussi $P(2Z+\mu>83)\leq 0{,}01$, soit $P\left(Z>\frac{83-\mu}{2}\right)\leq 0{,}01$ ou encore $P\left(Z\leq\frac{83-\mu}{2}\right)\geq 0{,}99$.

La variable aléatoire Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$. Pour $P(Z\leq z)=0{,}99$, la calculatrice donne $z_1\approx 2{,}326$. La fonction $z\mapsto P(Z<z)$ est croissante (l'aire sous la courbe augmente quand z augmente), on obtient donc $\frac{83-\mu}{2}\geq 2{,}326$, d'où $\mu\leq 78{,}35$.

b) Si X suit la loi $\mathcal{N}(78{,}35\,;4)$, on trouve $P(X\leq 75)\approx 0{,}047$.

La législation n'est pas respectée car environ 4 % des bouteilles contiennent moins de 75 cl.

❷ **a)** Pour respecter la législation, on cherche μ tel que $P(X\leq 75)\leq 0{,}001$ soit $P(2Z+\mu\leq 75)\leq 0{,}001$ ou encore $P\left(Z\leq\frac{75-\mu}{2}\right)\leq 0{,}001$. Pour $P(Z\leq z)=0{,}001$, la calculatrice donne $z_2\approx -3{,}09$. D'où $\frac{75-\mu}{2}\leq -3{,}09$ soit $\mu\geq 81{,}18$.

b) On choisit $\mu=81{,}18$ et la probabilité qu'une bouteille déborde au remplissage est alors $P(X\geq 83)\approx 0{,}181$ soit environ 18 %.

❸ On cherche maintenant μ et σ tels que

$$P(X\leq 75)\leq 0{,}001 \text{ et } P(X\geq 83)\leq 0{,}01, \text{ c'est-à-dire tels que}$$

$$P\left(Z\leq\frac{75-\mu}{\sigma}\right)\leq 0{,}001 \text{ et } P\left(Z\geq\frac{83-\mu}{\sigma}\right)\leq 0{,}01.$$

Les nombres μ et σ doivent donc vérifier $\frac{75-\mu}{\sigma}\leq z_2$ et $\frac{83-\mu}{\sigma}\geq z_1$, c'est-à-dire $75-\sigma z_2\leq\mu\leq 83-\sigma z_1$ soit à peu près $75+3{,}09\sigma\leq\mu\leq 83-2{,}326\sigma$.

La condition sur les valeurs extrêmes est $75+3{,}09\sigma\leq 83-2{,}326\sigma$. Il suffit donc de choisir $\sigma\leq 1{,}47$ puis une valeur de μ comprise entre les deux valeurs extrêmes.

Exercice II ❶ Les comportements des clients étant indépendants les uns des autres, la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.

❷ On a $n > 300$ et $p = 0,85$, donc on a $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, et on peut utiliser l'intervalle J_n du cours :

$$J_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$
$$= \left[0,85 - 1,96\frac{\sqrt{0,1275}}{\sqrt{n}} ; 0,85 + 1,96\frac{\sqrt{0,1275}}{\sqrt{n}} \right].$$

❸ Si $J_n \subset \left[0 ; \frac{300}{n} \right]$, alors $P\left(\frac{X_n}{n} \leq \frac{300}{n} \right) \geq P\left(\frac{X_n}{n} \in J_n \right)$. Comme J_n est un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 %, on obtient que $P\left(\frac{X_n}{n} \leq \frac{300}{n} \right)$ est supérieur à une valeur proche de 0,95. Or $P(X_n > 300) = 1 - P(X_n \leq 300) = 1 - P\left(\frac{X_n}{n} \leq \frac{300}{n} \right)$, donc $P(X_n > 300)$ est inférieur à une valeur proche de 0,05.

❹ **a)** Si $J_n \subset \left[0 ; \frac{300}{n} \right]$, alors $0,85 + 1,96\frac{\sqrt{0,1275}}{\sqrt{n}} \leq \frac{300}{n}$ et donc $0,85n + 1,96\sqrt{0,1275}\sqrt{n} - 300 \leq 0$.

b) La fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = 0,85x + 1,96\sqrt{0,1275}\sqrt{x} - 300$ est croissante sur $[1 ; +\infty[$ car c'est la somme de deux fonctions croissantes sur $[1 ; +\infty[$ $\left(x \mapsto 0,85x - 300 \text{ et } x \mapsto 1,96\sqrt{0,1275x} \right)$.

La calculatrice montre que $f(337) \approx -0,702$ et $f(338) \approx 0,166$, donc le plus grand entier n_0 pour lequel la fonction f prend une valeur négative est $n_0 = 337$.

c) On obtient alors $J_{337} = \left[0,85 - 1,96\frac{\sqrt{0,1275}}{\sqrt{337}} ; 0,85 + 1,96\frac{\sqrt{0,1275}}{\sqrt{337}} \right]$ qui, en prenant des valeurs approchées des bornes, est inclus dans $[0,811 ; 0,889]$. Comme $\frac{300}{337} \approx 0,891$, on a bien l'inclusion $J_{337} \subset \left[0 ; \frac{300}{337} \right]$.

On peut conclure que la compagnie aérienne peut vendre 337 billets pour un avion n'ayant que 300 places avec une probabilité d'environ 95 % que le nombre de passagers ne dépasse pas 300.

❺ Avec $p = 0,9$, la fonction f est définie par $f(x) = 0,9x + 1,96 \times 0,3\sqrt{x} - 300$, le nombre entier n_0 vaut 321 et on a bien $J_{321} \subset \left[0 ; \frac{300}{321} \right]$.

Avec $p = 0,95$, la fonction f est définie par $f(x) = 0,95x + 1,96 \times \sqrt{0,0475}\sqrt{x} - 300$, le nombre entier n_0 vaut 307 et on a bien $J_{307} \subset \left[0 ; \frac{300}{307} \right]$.

On observe que, sur les trois cas, c'est lorsque la probabilité p est la plus grande que le nombre n_0 est le plus petit, ce qui était prévisible.

Il reste à la compagnie aérienne à calculer des indemnités pour les passagers refusés à l'embarquement.

Exercice III ❶ La variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite, on cherche $u_{0,05}$ tel que $P\left(-u_{0,05} \leq X \leq u_{0,05}\right) = 1-0,05 = 0,95.$

Étant donné que la courbe de densité de la loi normale centrée réduite est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on a $P\left(0 \leq X \leq u_{0,05}\right) = 0,5 \times 0,95 = 0,475$ et $P\left(X \leq u_{0,05}\right) = P(X \leq 0) + P\left(0 \leq X \leq u_{0,05}\right)$, soit $P\left(X \leq u_{0,05}\right) = 0,975.$
La calculatrice (Invnorm ou FracNormal) donne $u_{0,05} \approx 1,9599.$

On obtient de même $u_{0,01}$: $P\left(-u_{0,01} \leq X \leq u_{0,01}\right) = 1-0,01 = 0,99$ et $P\left(X \leq u_{0,01}\right) = 0,5+0,5 \times 0,99 = 0,995,$ la calculatrice donne $u_{0,01} \approx 2,5758.$

❷ On fait encore de même pour $u_{0,02}$: $P\left(-u_{0,02} \leq X \leq u_{0,02}\right) = 1-0,02 = 0,98$ et $P\left(X \leq u_{0,02}\right) = 0,5+0,5 \times 0,98 = 0,99,$ la calculatrice donne $u_{0,02} \approx 2,33.$

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 98 % de la variable aléatoire $F_n = \dfrac{X_n}{n}$, où chaque variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$, est $\left[p-2,33\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+2,33\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

❸ Si on se donne les mêmes conditions d'utilisation que pour les intervalles J_n du cours, on observe que $n = 150$, $np = 150 \times 0,8 = 120$ et $n(1-p) = 150 \times 0,2 = 30$ et on déduit qu'on peut utiliser cet intervalle de fluctuation.

On adopte la règle de décision habituelle :

- si la fréquence observée f dans l'échantillon appartient à un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 98 %, on considère que la production est conforme à la production attendue ;
- sinon, on considère que l'échantillon n'est pas compatible avec la production attendue.

L'intervalle $\left[0,8-2,33\dfrac{\sqrt{0,8 \times 0,2}}{\sqrt{150}}\,;\,p+2,33\dfrac{\sqrt{0,16}}{\sqrt{150}}\right]$ est très proche de $[0,723\,;\,0,877]$. La fréquence observée est $\dfrac{122}{150} \approx 0,813$. La fréquence observée appartient à l'intervalle de fluctuation au seuil de 98 %, on peut donc dire que la production est conforme à la proportion attendue au seuil de 98 %.

Exercice IV ❶ La fréquence observée est $f = \dfrac{18}{80} = 0,225$. Comme $n = 80$, $nf = 18$ et $n(1-f) = 62$, on considère que l'intervalle $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\,f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance au niveau de 95 % de la proportion p. Cet intervalle vaut à peu près $[0,113\,;\,0,337]$.

❷ La précision est donnée par l'amplitude de l'intervalle de confiance qui vaut $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$. On veut $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,05$ c'est-à-dire $\dfrac{2}{0,05} \leq \sqrt{n}$, ce qui donne $n \geq 1600$.

❸ On cherche n tel que $\left[0,225-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;0,225+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]\subset\left[0\,;0,25\right]$ c'est-à-dire tel que $0\le 0,225-\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $0,225+\frac{1}{\sqrt{n}}\le 0,25$.

Ces deux conditions sont équivalentes à $\sqrt{n}\ge\frac{1}{0,225}$ et $\sqrt{n}\ge\frac{1}{0,025}$. Cette dernière inéquation équivaut à $n\ge 1600$, l'autre inéquation étant alors vérifiée.

❹ Pour $n=1600$ les deux conditions sont vérifiées, l'intervalle de confiance au niveau de 95 % est alors $\left[0,225-\frac{1}{\sqrt{1600}}\,;0,225+\frac{1}{\sqrt{1600}}\right]$ soit $\left[0,2\,;0,25\right]$.

■

Corrigé séquence 10

Corrigé de l'activité du chapitre 2

Activité 1

❶ Considérons la face ABFE. Les droites (AB) et (EF) sont les intersections du plan (ABF) avec les plans (ABC) et (EFG). Or ces plans sont parallèles, donc les droites (AB) et (EF) le sont aussi. Les plans (BCF) et (ADE) sont également parallèles, donc leurs intersections avec (ABF) le sont aussi ; (AE) et (BF) sont parallèles. Il en résulte que ABFE est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles. On montre de la même manière que les cinq autres faces du parallélépipède sont aussi des parallélogrammes.

❷ **a)** Comme chaque face est un parallélogramme, les droites (AB) et (EF) sont parallèles, de même que (AB) et (CD) et que (EF) et (HG). Les 4 droites sont donc deux à deux parallèles.

b) Les sens de A vers B, de D vers C, de E vers F et de H vers G sont tous les mêmes (de la gauche vers la droite).

c) Les longueurs AB, EF, HG et DC sont égales car les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur.

d) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux car ABCD est un parallélogramme.

e) Les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont égaux car DCGH est un parallélogramme.

❸ On a vu que (AB) est parallèle à (EF) et que (EF) est parallèle à (HG). Ainsi (AB) et (HG) sont parallèles, donc coplanaires. Les points A, B, G, H sont coplanaires.

De plus, d'après ce qui précède, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HG}$ ont même direction, même sens et même longueur ; ils sont égaux.

❹ Grâce au fait que chaque face est un parallélogramme, on peut affirmer que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{BF}$ sont égaux.

❺ De l'égalité $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CG}$ on tire que AEGC est un parallélogramme et par conséquent que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EG}$.

❻ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}$ car AEGC est un parallélogramme. De même $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ car ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}$.

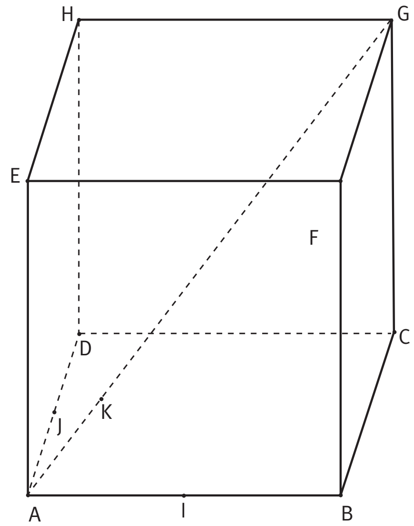
Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 2

Exercice 1 ❶ On a :

$$\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EF},\ \overrightarrow{EJ}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\ \text{et}$$

$$\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{5}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right)$$

$$=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{EF}+\frac{1}{5}\overrightarrow{EH}-\frac{1}{5}\overrightarrow{EA}=\frac{4}{5}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{EF}+\frac{1}{5}\overrightarrow{EH}.$$



❷ On cherche deux réels x et y tels que : $\overrightarrow{EK}=x\overrightarrow{EI}+y\overrightarrow{EJ}$. Par tâtonnements, on trouve : $\overrightarrow{EK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{EI}+\frac{2}{5}\overrightarrow{EJ}$. Ceci nous prouve bien que E, I, J et K sont coplanaires.

Exercice 2 Dans un repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on considère A(1 ; 1 ; 2), B(–1 ; 3 ; 0) et C(0 ; 2 ; 0).

❶ On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-1\\3-1\\0-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-1\\2-1\\0-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car $(-2\,;\,2\,;\,-2)$ et $(-1\,;\,1\,;\,-2)$ ne sont pas proportionnels, donc les points A, B et C définissent bien un plan.

❷ Le plan (ABC) admet donc la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x=1-2k-k' \\ y=1+2k+k' \\ z=2-2k-2k' \end{cases},\ k\in\mathbb{R},\ k'\in\mathbb{R}.$$

❸ Le point $D(3\,;\,-1\,;\,4)$ appartient à (ABC) si et seulement si il existe deux réels k et k' tels que :

$$\begin{cases} 3=1-2k-k' \\ -1=1+2k+k' \\ 4=2-2k-2k' \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 2k+k'=-2 \\ 2k+k'=-2. \\ k+k'=-1 \end{cases}$$

Le couple $(-1\,;\,0)$ est solution de ce système, donc D appartient au plan (ABC).

Exercice 3 Soit ABCD un tétraèdre. On considère que les points I et J sont les milieux respectifs de [AC] et [BD]. Les points P, Q, R et S sont définis par : $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CS}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

On considère le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC}\,,\,\overrightarrow{AD}\right)$.

❶ On a : A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), C(0 ; 1 ; 0) et D(0 ; 0 ; 1). Alors : $I\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$, $J\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$, $P\left(\frac{1}{3}\,;\,0\,;\,0\right)$, $Q\left(0\,;\,0\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

De plus, $\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CR}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

d'où $R\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,0\right)$.

De même, $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

d'où $S\left(0\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

❷ On a :

$$\overrightarrow{PS}\begin{pmatrix} 0-\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}-0 \\ \frac{1}{3}-0 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{QR}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}-0 \\ \frac{2}{3}-0 \\ 0-\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-0 \\ 0-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-0 \end{pmatrix}$$

ainsi $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont, respectivement, des vecteurs directeurs de (PS), (QR) et (IJ). On en déduit des représentations paramétriques de ces trois droites :

$$(PS) : \begin{cases} x=\frac{1}{3}-k \\ y=2k \\ z=k \end{cases},\ k\in\mathbb{R},\quad (QR) : \begin{cases} x=k' \\ y=2k' \\ z=\frac{1}{3}-k' \end{cases},\ k'\in\mathbb{R}$$

$$\text{et } (IJ) : \begin{cases} x=k'' \\ y=\frac{1}{2}-k'' \\ z=k'' \end{cases},\ k''\in\mathbb{R}$$

❸ Le point M (x ; y ; z) appartient à ces trois droites si et seulement si il existe trois réels k, k' et k'' tels que :

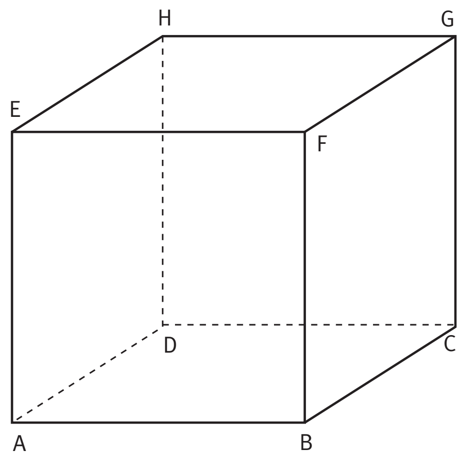
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} - k = k' = k'' \\ y = 2k = 2k' = \dfrac{1}{2} - k'' \\ z = k = \dfrac{1}{3} - k' = k'' \end{cases}.$$

Ce système est équivalent à : $\begin{cases} k = k' = k'' \\ x = \dfrac{1}{3} - k = k' = k'' \\ y = 2k = 2k' = \dfrac{1}{2} - k'' \\ z = k = \dfrac{1}{3} - k' = k'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = k' = k'' = \dfrac{1}{6} \\ x = \dfrac{1}{6} \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{1}{6} \end{cases}.$

Les droites (PS), (QR) et (IJ) sont donc concourantes en $M\left(\dfrac{1}{6}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{6}\right)$.

Corrigé des activités du chapitre 3

Activité 2 ❶



a) Les droites (AE) et (BC) sont orthogonales car (BF) est parallèle à (AE) et perpendiculaire à (BC).

b) Les droites (AE) et (GC) sont parallèles car toutes les deux sont parallèles à la même droite (BF). Elles ne sont pas orthogonales.

c) La droite (EF) est parallèle à (HG) et (HG) est perpendiculaire à (GC). Donc (EF) et (GC) sont orthogonales.

d) Les droites (EF) et (HE) sont perpendiculaires, donc orthogonales.

e) Les droites (EF) et (FH) ne sont pas perpendiculaires car la diagonale d'un carré n'est pas perpendiculaire au côté.

f) Les droites (EF) et (BD) ne sont pas orthogonales car, si c'était le cas, (EF) serait perpendiculaire à (HF). ((HF) et (BD) sont parallèles.)

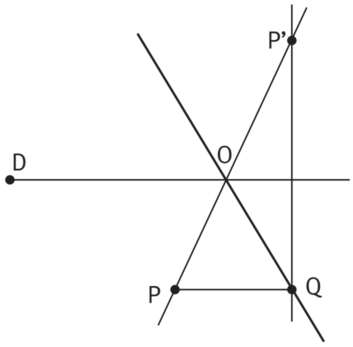
g) Les droites (FH) et (BD) sont parallèles ; (AC) et (BD) sont perpendiculaires car ce sont les diagonales d'un carré. Donc (FH) et (AC) sont orthogonales.

Activité 3 ❶ Considérons P sur (OB) et Q sur (OC) différents de O tels que : OP = OQ. Deux cas se présentent.

Cas 1 : les droites (PQ) et (OD) sont sécantes.
Dans ce cas, c'est terminé, les points P et Q vérifient les quatre conditions.

Cas 2 : les droites (PQ) et (OD) sont parallèles.
Considérons le point P' symétrique de P par rapport à O. Le point P' appartient à (OB) et : OP' = OP = OQ.
On se place dans le plan (OBC). Le point O est le milieu de [PP'] et OP' = OP = OQ, ce qui nous prouve (réciproque du théorème de la médiane) que les droites (PQ) et (P'Q) sont perpendiculaires. Ainsi, les droites (P'Q) et (OD) sont perpendiculaires et donc sécantes.
Ainsi, les points P' et Q vérifient bien les quatre conditions.

On a donc prouvé le résultat par disjonction de cas.



❷ et ❸ Ce sont des applications directes du théorème de la médiane démontré au chapitre des prérequis.

❹ On a :

- ▶ $AP^2 = OA^2 + OP^2$ (théorème de Pythagore dans le triangle OAP) ;
- ▶ $AQ^2 = OA^2 + OQ^2$ (théorème de Pythagore dans le triangle OAQ).

Donc, en sommant les deux égalités : $AP^2 + AQ^2 = 2OA^2 + OP^2 + OQ^2$ soit $2AI^2 + \dfrac{PQ^2}{2} = 2OA^2 + 2OI^2 + \dfrac{PQ^2}{2}$ en utilisant les égalités 2 et 3.
On a donc $AI^2 = OA^2 + OI^2$, ce qui nous prouve le résultat (réciproque du théorème de Pythagore).

❺ Le triangle OPQ est isocèle de sommet O et I est le milieu de [PQ], donc (OI) est perpendiculaire à (PQ), ce qui prouve que le triangle OIR est rectangle en I. Alors, d'après le théorème de Pythagore : $OR^2 = OI^2 + IR^2$.

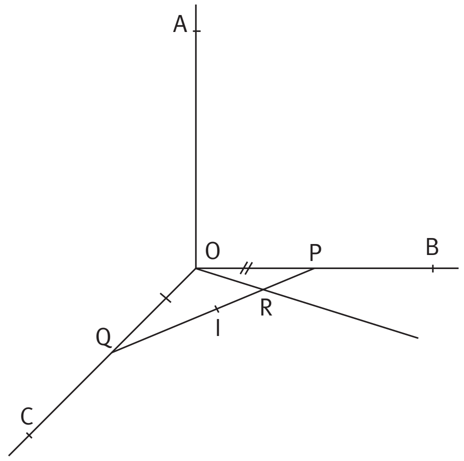
On a : $AB^2 = AO^2 + OB^2 = AO^2 + OC^2 = AC^2$. Donc le triangle APQ est isocèle de sommet A. On conclut alors, comme à la question précédente, que : $AR^2 = AI^2 + IR^2$.

❻ On a :

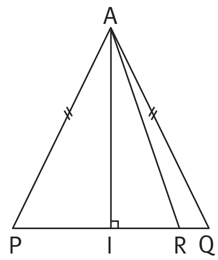
$$AR^2 = AI^2 + IR^2 = AI^2 + \left(OR^2 - OI^2\right) = \left(AI^2 - OI^2\right) + OR^2 = OA^2 + OR^2.$$

Ainsi (réciproque du théorème de Pythagore), le triangle OAR est rectangle en O.

On en déduit : $(OA) \perp (OD)$.



Vue dans l'espace



Vue dans le plan (APQ)

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 3

Exercice 4 ❶ Soit M un point de l'espace équidistant de A et de B, c'est-à-dire tel que : MA = MB. Si M appartient à (AB) alors M est le milieu de [AB]. Supposons que M n'appartienne pas à (AB).

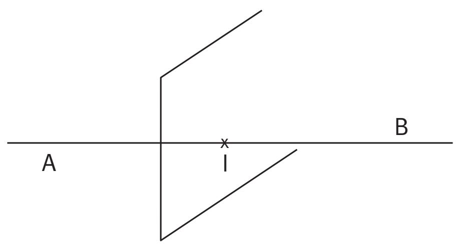
Plaçons-nous dans le plan (MAB) et considérons le triangle MAB. On a MA = MB, donc le triangle MAB est isocèle de sommet M. La médiane [MI] issue de M est donc une hauteur, c'est-à-dire : $(MI) \perp (AB)$. Le point M appartient donc au plan orthogonal à (AB) passant par I.

Réciproquement, considérons un point M de ce plan. On a : $(MI) \perp (AB)$. Donc la médiane [IM] du triangle (AMB) est aussi la médiatrice de [AB]. Ainsi : MA = MB.

L'ensemble des points équidistants de A et de B est donc le plan orthogonal à (AB) passant par I.

❷ **a)** On a : AD = AC, donc A appartient au plan médiateur $\mathcal{P}$ de [CD]. De même, B appartient à $\mathcal{P}$. Alors comme $\mathcal{P}$ est orthogonal à (CD), on a : $(AB) \perp (CD)$.

b) On montre de même que : $(AC) \perp (BD)$ et $(AD) \perp (BC)$, d'où la propriété suivante. Dans un tétraèdre régulier, deux arêtes opposées sont orthogonales.



Exercice 5 **a)** Montrer que la droite (BG) est orthogonale au plan (CFE) revient à montrer que (BG) est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Tout d'abord, [BG] et [CF] sont les diagonales d'un carré, donc (BG) $\perp$ (CF).

Ensuite, on sait que la droite (EF) est orthogonale au plan (BCF) puisque (EF) est perpendiculaire aux deux droites sécantes (FB) et (FG).

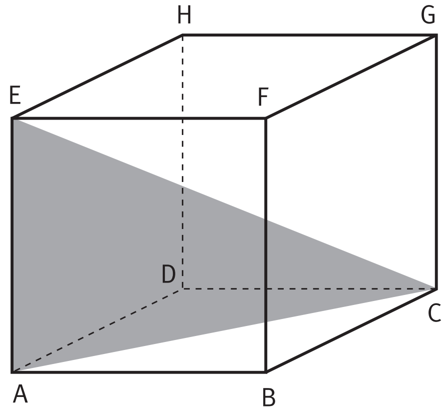
Ainsi (EF) est orthogonale à toute droite du plan (BCF). En particulier : (EF) $\perp$ (BG).

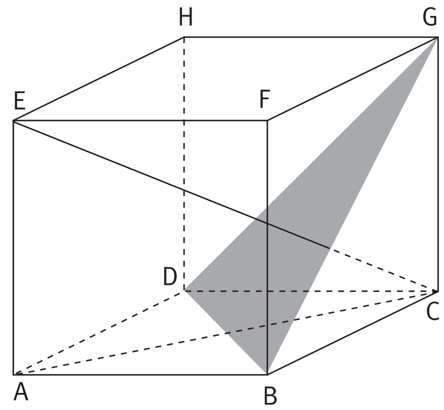
La droite (BG) étant orthogonale aux deux droites sécantes (EF) et (CF), (BG) est orthogonale au plan qui les contient : le plan (CEF).

b) Puisque la droite (BG) est orthogonale au plan (CEF), elle est orthogonale à toute droite de ce plan, donc en particulier : (BG) est orthogonale à la droite (CE).

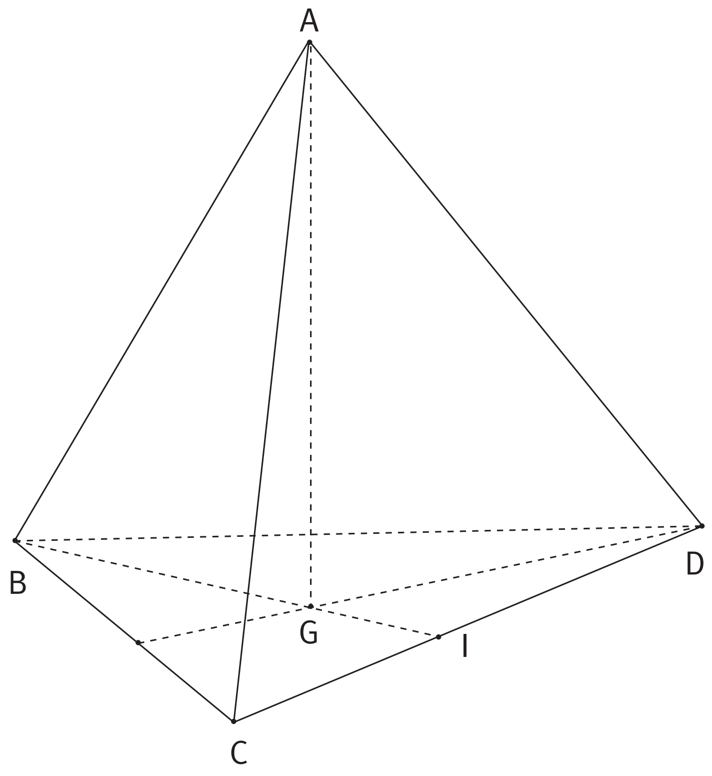
c) On démontrerait de la même façon que, par exemple, la droite (BD) est orthogonale au plan (ACE), donc à (CE).

Puisque (CE) est orthogonale aux deux droites sécantes (BG) et (BD), il s'ensuit que la droite (CE) est orthogonale au plan (BDG).





Exercice 6



❶ Plaçons-nous dans le triangle ACD. Le tétraèdre ABCD est régulier, donc le triangle ACD est équilatéral. La médiane [AI] issue de A est donc aussi une hauteur. On a donc : $(AI) \perp (CD)$. De même, dans le triangle BCD : $(BI) \perp (CD)$.

La droite (CD) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABI) ((AI) et (BI)) donc : $(ABI) \perp (CD)$. *(On pouvait aussi montrer que* (ABI) *est le plan médiateur de* [CD]).

❷ On a $(AG) \perp (CD)$ car $(ABI) \perp (CD)$. De même : $(AG) \perp (BC)$. La droite (AG) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (BCD). On a donc bien : $(AG) \perp (BCD)$.

Corrigé de l'activité du chapitre 4

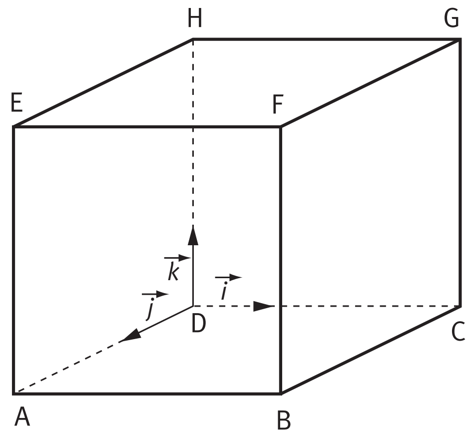
Activité 4 Soit ABCDEFGH un cube de côté 3. On se place dans un repère orthonormé $\left(D ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ comme indiqué sur la figure ci-dessous.

❶ On a :

A(0 ; 3 ; 0), B(3 ; 3 ; 0), C(3 ; 0 ; 0),

D(0 ; 0 ; 0), E(0 ; 3 ; 3), F(3 ; 3 ; 3),

G(3 ; 0 ; 3) et H(0 ; 0 ; 3).



❷ **a)** On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$.

b) On a : $\overrightarrow{BI}=\vec{u}$ donc $\begin{cases} x_I-3=x \\ y_I-3=y \\ z_I-0=z \end{cases}$. Ainsi, I a pour coordonnées $(x+3 ; y+3 ; z)$.

c) On a : $AB=\left\|3\vec{i}\right\|=3$, $BI=\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

et $AI=\sqrt{(x+3-0)^2+(y+3-3)^2+(z-0)^2}=\sqrt{(x+3)^2+y^2+z^2}$.

d) On a :

$$\overrightarrow{AB} \perp \vec{u} \Leftrightarrow (AB) \perp (BI) \Leftrightarrow AB^2 + BI^2 = AI^2 \quad \text{(théorème de Pythagore)}$$
$$\Leftrightarrow 3^2 + x^2 + y^2 + z^2 = (x+3)^2 + y^2 + z^2$$
$$\Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

❸ **a)** On a : $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) On a : $\overrightarrow{GJ} = \vec{u}$ donc $\begin{cases} x_J - 3 = x \\ y_J - 0 = y \\ z_J - 3 = z \end{cases}$. Ainsi, J a pour coordonnées $(x+3;\ y;\ z+3)$.

c) On a : $AG = \sqrt{3^3 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, $GJ = \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et

$$AJ = \sqrt{(x+3-0)^2 + (y-3)^2 + (z+3-0)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2}.$$

d) On a : $\overrightarrow{AG} \perp \vec{u} \Leftrightarrow (AG) \perp (GJ) \Leftrightarrow AG^2 + GJ^2 = AJ^2$ (théorème de Pythagore)

$$\Leftrightarrow 27 + x^2 + y^2 + z^2 = (x+3)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2$$
$$\Leftrightarrow 6x - 6y + 6z = 0 \Leftrightarrow x - y + z = 0.$$

❹ L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{AM}$ est le plan passant par A orthogonal à (AG).

On a : $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow x_{\overrightarrow{AG}} x_{\overrightarrow{AM}} + y_{\overrightarrow{AG}} y_{\overrightarrow{AM}} + z_{\overrightarrow{AG}} z_{\overrightarrow{AM}} = 0$

$$\Leftrightarrow 3(x-0) - 3(y-3) + 3(z-0) = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x - 3y + 3z + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow x - y + z + 3 = 0$$

Cette dernière équation caractérise donc le plan orthogonal à (AG) passant par A.

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 4

Exercice 7 ❶ On a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) \quad \text{(I milieu de [AB])}$$
$$= IM^2 - IA^2 = IM^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = IM^2 - 9.$$

❷ **a)** On a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow (AM) \perp (BM)$$
$$\Leftrightarrow \text{M appartient à la sphère de diamètre [AB].}$$

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est donc la sphère de diamètre [AB] (soit la sphère de centre I de rayon 3).

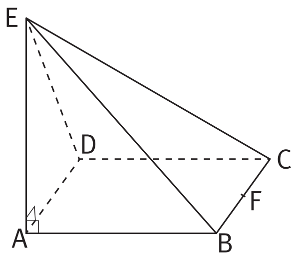
b) On a :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=16 \Leftrightarrow IM^2-9=16 \Leftrightarrow IM^2=25 \Leftrightarrow IM=5$$

$$\Leftrightarrow \text{M appartient à la sphère de centre I de rayon 5.}$$

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=16$ est donc la sphère de centre I de rayon 5.

Exercice 8 ❶ **a)** Les triangles ABE et ADE sont rectangles en A donc : $(AE)\perp(AB)$ et $(AE)\perp(AD)$.



La droite (AE) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABD) donc :

$$(AE)\perp(ABD).$$

On a donc : $(AE)\perp(AF)$.

On a donc : $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=0$.

b) On a : $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\left[\left\|\overrightarrow{DE}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{DB}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DB}\right\|^2\right]=\frac{1}{2}\left[DE^2+DB^2-EB^2\right]$.

On a (théorème de Pythagore) : $DE=EB=\sqrt{3^2+4^2}=5$. De plus : $DB=3\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 3).

Ainsi : $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\left[5^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2-5^2\right]=9$.

c) On a $(AE)\perp(AB)$, donc A est le projeté orthogonal de E sur (AB). De même, B est le projeté orthogonal de F sur (AB). Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{EF}$ sur $\overrightarrow{AB}$. On en déduit :

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=-AB^2=-9.$$

❷ On a : $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}\cdot\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}\right)=EA^2-\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=4^2-0=16$.

De plus, $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}=EA\times EF\times\cos\left(\widehat{AEF}\right)$.

On a : EA = 4 et :

$$EF=\sqrt{EA^2+AF^2} \text{ (théorème de Pythagore dans EAF)}$$

$$=\sqrt{4^2+\left(AB^2+BF^2\right)} \text{ (théorème de Pythagore dans ABF)}$$

$$=\sqrt{4^2+3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{25+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{109}}{2}.$$

On a donc : $\cos\left(\widehat{AEF}\right)=\frac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}}{EA\times EF}=\frac{16}{4\times\frac{\sqrt{109}}{2}}=\frac{8}{\sqrt{109}}$ On en déduit : $\widehat{AEF}=\cos^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{109}}\right)\approx 39{,}98°$.

Exercice 9 Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on considère les points :

A(1 ; 2 ; 3), B(0 ; 1 ; 4), $C\left(-1\;;\;-3\;;\;2\right)$, $D\left(4\;;\;-2\;;\;5\right)$ et $E\left(-2\;;\;1\;;\;2\right)$ ainsi que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

❶ **a)** On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-5\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\left(-1\;;\;-1\;;\;1\right)$ et $\left(-2\;;\;-5\;;\;-1\right)$ non proportionnels. Les points A, B et C définissent donc bien un plan $\mathcal{P}$.

b) On a :

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times(-1)+(-1)\times(-1)+1\times1=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-2)+(-1)\times(-5)+1\times(-1)=0$, donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux droites sécantes du plan (ABC) donc est un vecteur normal à ce plan.

c) Le vecteur $\vec{n}$ étant normal à $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ admet une équation cartésienne de la forme : $2x-y+z+d=0$.

Le point A appartient à $\mathcal{P}$ donc $2\times1-2+3+d=0$ soit $d=-3$.

Le plan $\mathcal{P}$ admet donc l'équation cartésienne $2x-y+z-3=0$.

❷ Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-2-4\\1-(-2)\\2-5\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}-6\\3\\-3\end{pmatrix}$.

On a donc : $\overrightarrow{DE}=-3\vec{n}$, ce qui prouve que (DE) est orthogonale à $\mathcal{P}$.

Exercice 10 ❶ Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble cherché. Soit M(x ; y ; z) un point de l'espace. On a :

$$M(x\;;\;y\;;\;z)\in\mathcal{S}\Leftrightarrow AM=2\Leftrightarrow AM^2=4\Leftrightarrow(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=4$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-6z+6=0$$

❷ On a :

$$x^2+y^2+z^2+4y-12z-9=0\Leftrightarrow x^2+y^2+4y+z^2-12z-9=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2\times2y+4-4+z^2-2\times6z+36-36-9=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+\left(y+2\right)^2-4+\left(z-6\right)^2-36-9=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+\left(y+2\right)^2+\left(z-6\right)^2=49.$$

Soit $A\left(0\;;\;-2\;;\;6\right)$. On a donc :

$$M\in\mathcal{S}\Leftrightarrow AM^2=7^2\Leftrightarrow AM=7.$$

L'ensemble cherché est donc la sphère de centre $A\left(0\;;\;-2\;;\;6\right)$ et de rayon 7.

Corrigé de l'activité du chapitre 5

Activité 5 **Partie I**

Considérons le système $\Sigma : \begin{cases} 2x+5y-z=11 & \text{L1} \\ 3x-2y+2z=15 & \text{L2} \\ x-3y+z=2 & \text{L3} \end{cases}$.

La ligne L1 permet d'écrire : $z = 2x + 5y - 11$. Substituons dans les lignes L2 et L3.

$$\Sigma : \begin{cases} z=2x+5y-11 \\ 3x-2y+2(2x+5y-11)=15 \\ x-3y+(2x+5y-11)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2x+5y-11 \\ \left.\begin{array}{l} 7x+8y=37 \\ 3x+2y=13 \end{array}\right\} : \Sigma' \end{cases}$$

❶ Résoudre le système Σ'.

On a :

$$\Sigma' : \begin{cases} 7x+8y=37 & \text{L}_1 \\ 3x+2y=13 & \text{L}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+8y=37 & \text{L}_1 \\ 12x+8y=52 & \text{L}_2'=4\times\text{L}_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x+8y=37 & \text{L}_1 \\ 5x=15 & \text{L}_2'-\text{L}_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x+8y=37 \\ x=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8y=16 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=3 \end{cases}.$$

Ainsi le système Σ' admet comme unique solution (3 ; 2) : $\mathcal{S}' = \{(3\ ;\ 2)\}$.

❷ On en déduit :

$$\Sigma : \begin{cases} z=2x+5y-11 \\ 3x-2y+2(2x+5y-11)=15 \\ x-3y+(2x+5y-11)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2x+5y-11 \\ \left.\begin{array}{l} 7x+8y=37 \\ 3x+2y=13 \end{array}\right\} : \Sigma' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=2x+5y-11 \\ x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=5 \\ x=3 \end{cases}.$$

Ainsi le système Σ admet comme unique solution (3 ; 2 ; 5) : $\mathcal{S}=\{(3\ ;\ 2\ ;\ 5)\}$.

❸ On a :

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x-y \\ 2x+y-z=3 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x-y \\ 2x+y-(2-x-y)=3 \\ x-y+2\times(2-x-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x-y \\ 3x+2y=5 \\ -x-3y=-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x-y \\ 3x+2y=5 \\ -x-3y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x-y \\ 3x+2y=5 \\ -3x-9y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x-y \\ 3x+2y=5 \\ -7y=-7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x-y \\ 3x+2y=5 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x-y \\ x=1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Ainsi le système $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \\ x-z+2z=0 \end{cases}$ admet comme unique solution : (1 ; 1 ; 0) :

$\mathcal{S}=\{(1\ ;\ 1\ ;\ 0)\}$.

Partie II

❶ On a : $\Sigma : \begin{cases} t+1=2t'+1 \\ -t-2=2 \\ 3t=t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+1=2t'+1 \\ t=-4 \\ 3t=t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+1=2t'+1 \\ 3t=t' \\ t=-4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t'=-4 \\ t'=-12 \\ t=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-4 \\ t'=-2 \\ t'=-12 \end{cases}.$$

Ce système n'admet pas de solution puisque t' ne peut pas être égal, à la fois, à -2 et à -12 : $\mathcal{S}=\varnothing$.

Une idée pour la résolution de ce type de système (où il y a plus d'équations que d'inconnues) est de ne considérer qu'une partie des équations pour obtenir des conditions nécessaires et de vérifier, à l'aide des autres équations du système, si ces conditions sont suffisantes ou pas.

❷ On a : $\Sigma : \begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=z+2 \\ 2x-y=z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=z+2 \\ 4x-2y=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=z+2 \\ 5x=3z+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=z+2 \\ x=\dfrac{3}{5}z+\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=z+2-\dfrac{3}{5}z-\dfrac{2}{5} \\ x=\dfrac{3}{5}z+\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y=\dfrac{2}{5}z+\dfrac{8}{5} \\ x=\dfrac{3}{5}z+\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{5}z+\dfrac{4}{5} \\ x=\dfrac{3}{5}z+\dfrac{2}{5} \end{cases}.$$

Ainsi les triplets $(x; y; z)$ solutions de Σ sont les triplets $\left(\dfrac{3}{5}z+\dfrac{2}{5}\ ;\ \dfrac{1}{5}z+\dfrac{4}{5}\ ;\ z\right)$:

$$\mathcal{S}=\left\{\left(\dfrac{3}{5}z+\dfrac{2}{5}\ ;\ \dfrac{1}{5}z+\dfrac{4}{5}\ ;\ z\right) \text{ tels que } z\in\mathbb{R}\right\}.$$

Une idée pour la résolution de ce type de système (où il y a plus d'inconnues que d'équations) est de considérer l'une des variables (ici z !) comme un paramètre et non comme une inconnue et de résoudre le système correspondant.

Corrigé des exercices d'apprentissage du chapitre 5

Exercice 11 La représentation paramétrique $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 + \dfrac{t}{3} \\ z = -t + 6 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ caractérise la droite $\mathcal{D}$ passant par A(4 ; 2 ; 6) de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$.

La représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 1 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ caractérise la droite $\mathcal{D}'$ passant par B(1 ; 4 ; 1) de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas colinéaires, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.

Un point I(x ; y ; z) appartient à $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} x = 4 - t = 1 + t' \\ y = 2 + \dfrac{t}{3} = 4 \\ z = -t + 6 = 1 - t' \end{cases}.$$

On a :

$$\begin{cases} 4 - t = 1 + t' \\ 2 + \dfrac{t}{3} = 4 \\ -t + 6 = 1 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 \\ -2 = 1 + t' \\ 0 = 1 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t' = -3 \\ t' = 1 \end{cases}$$, ce qui est impossible.

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Exercice 12 ❶ **a)** A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 1 ; 0), C(0 ; 0 ;1).

Le point G a pour coordonnées la moyenne des coordonnées de A, B et C.

Par suite, $G\left(\dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{3}\right)$

Pour montrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan, il suffit de montrer qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

La droite (OG) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\times(-1)+\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times0=0.$

Donc (OG) est orthogonale à (AB).

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\times(-1)+\frac{1}{3}\times0+\frac{1}{3}\times1=0.$

Donc (OG) est orthogonale à (AC).

La droite (OG) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC).

La droite (OG) est donc orthogonale au plan (ABC).

❷ Une équation cartésienne du plan A'B'C' dans le repère orthonormal $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$ est de la forme :

$$ax+by+cz+d=0.$$

a) Écrivons que les coordonnées des points A', B' et C' doivent vérifier cette équation. On doit donc avoir :

$$\begin{cases}2a+d=0\\2b+d=0\\3c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{d}{2}\\b=-\dfrac{d}{2}\\c=-\dfrac{d}{3}\end{cases}.$$

On peut choisir $d=-6$:

On trouve alors $a=3$; $b=3$; $c=2$.

Ainsi $3x+3y+2z-6=0$ est une équation cartésienne du plan (A'B'C').

b) La droite (AC) passe par A(1 ; 0 ; 0) et admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

La droite (AC) admet donc pour représentation paramétrique

$$\begin{cases}x=-\lambda+1\\y=0\\z=\lambda\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

c) On a $K(x\,;y\,;z)\in(AC)\cap(A'B'C')\Leftrightarrow$ il existe λ réel tel que :

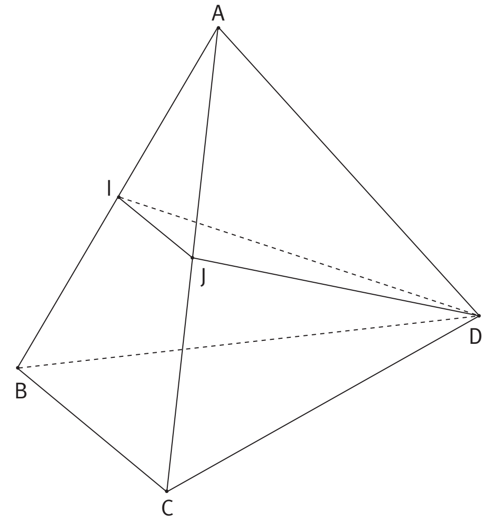
$$\begin{cases}x=-\lambda+1\\y=0\\z=\lambda\end{cases}\quad\text{et}\quad 3x+3y+2z-6=0.$$

On doit donc avoir $3(-\lambda+1)+3\times 0+2\lambda-6=0$ soit $\lambda=-3$.

On en déduit $K(4\,;0\,;-3)$.

On vérifie que le point K appartient à la droite (AC) et au plan (A'B'C'). On a ainsi prouvé que la droite (AC) coupe le plan (A'B'C') en K.

Exercice 13



❶ *Point de vue géométrique*

Remarquons tout d'abord que : (IJ) // (BC) (théorème de la droite des milieux dans le triangle ABC).

Considérons les trois plans (ABC), (BCD) et (IJD).

On a : $(ABC)\cap(BCD)=(BC)$, $(IJD)\cap(ABC)=(IJ)$ et $(BCD)\cap(IJD)=\Delta$ (ces deux plans sont bien sécants car D est commun aux deux plans).

D'après le théorème du toit, les droites précédentes sont concourantes ou parallèles. Comme les droites (IJ) et (BC) sont parallèles, on a : $\Delta//(BC)$.

Comme le point D appartient à la fois aux plans (IJD) et (BCD), il appartient à Δ.

❷ *Aspect algébrique*

a) Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires, ce qui prouve que $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère.

b) On a : A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), C(0 ; 1 ; 0), D(0 ; 0 ; 1), $I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right)$ et $J\left(0\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$.

c) Notons $ax+by+cz+d=0$ une équation cartésienne du plan (BCD) dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)$.

On a $B\in(BCD)$ donc $a+d=0$, $C\in(BCD)$ donc $b+d=0$ et $D\in(BCD)$ donc $c+d=0$. On a donc $a=b=c=-d$. En simplifiant, on obtient (BCD) :

$$x+y+z-1=0.$$

d) On a : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 0-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} 0-\frac{1}{2} \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Considérons les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\vec{u}$ et $\overrightarrow{ID}=\frac{1}{2}\vec{v}$. Le plan (IJD) est donc le plan $\left(D\,;\vec{u},\,\vec{v}\right)$, il est donc défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=0-k-k' \\ y=0+k \\ z=1+2k' \end{cases},\ k\in\mathbb{R},\ k'\in\mathbb{R} \text{ soit } \begin{cases} x=-k-k' \\ y=k \\ z=1+2k' \end{cases},\ k\in\mathbb{R},\ k'\in\mathbb{R}.$$

e) On a :

$$\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z)\in(\mathrm{BCD})\cap(\mathrm{IJD}) \Leftrightarrow \text{Il existe deux réels } k \text{ et } k' \text{ tels que } \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x=-k-k' \\ y=k \\ z=1+2k' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{Il existe deux réels } k \text{ et } k' \text{ tels que } \begin{cases} -k-k'+k+1+2k'-1=0 \\ x=-k-k' \\ y=k \\ z=1+2k' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{Il existe deux réels } k \text{ et } k' \text{ tels que } \begin{cases} k'=0 \\ x=-k \\ y=k \\ z=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{Il existe un réel } k \text{ tel que } \begin{cases} x=-k \\ y=k \\ z=1 \end{cases}.$$

La droite Δ admet donc la représentation paramétrique : $\begin{cases} x=-k \\ y=k \\ z=1 \end{cases},\ k\in\mathbb{R}.$

f) D'après ce qui précède, la droite Δ est la droite passant par D(0 ; 0 ; 1), de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a $\vec{u}=\overrightarrow{BC}$ donc Δ est bien parallèle à (BC).

Corrigé des exercices de synthèse du chapitre 6

Exercice I

❶ On a :

$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\ ;$$

$$\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EJ}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\ ;$$

$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}.$$

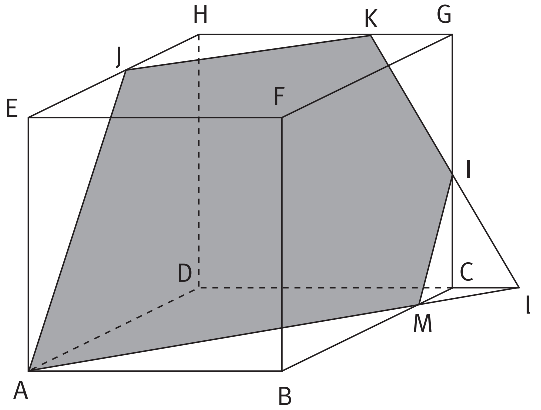
❷ On a :

$$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AK} \text{ d'où}$$

$\overrightarrow{AK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AI}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AJ}$, ce qui prouve la coplanarité des points A, I, J et K.

❸ Construire la section du cube par le plan (IJK).

Les droites (IK) et (CD) sont sécantes car coplanaires (plan (DCGH)) et non parallèles. Notons L le point d'intersection de ces deux droites. Le point L appartient à la droite (IK) donc au plan (IJK). Les droites (AL) et (BC) sont sécantes car coplanaires (plan (ABCD)) et non parallèles. Notons M le point d'intersection de ces deux droites. Le point M appartient à la droite (AL) donc au plan (IJK). La section du cube par le plan (IJK) est donc AMIKJ.



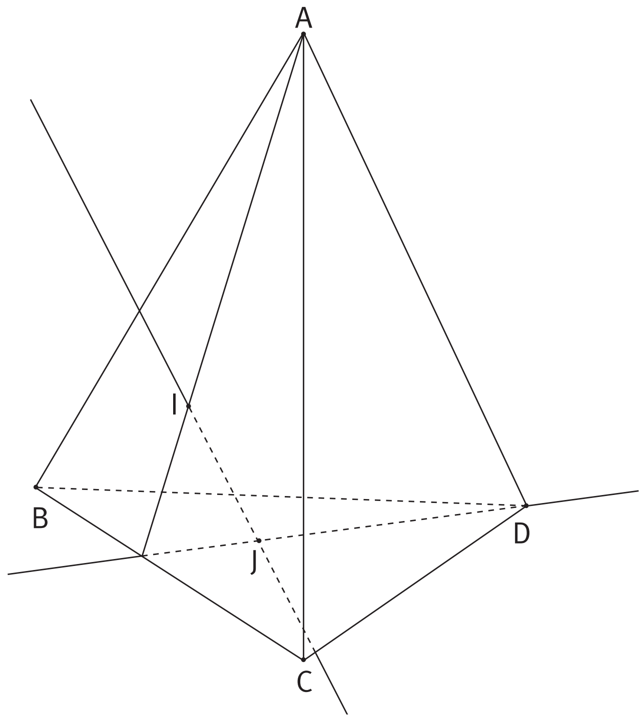
Exercice II

❶ *Aspect géométrique*

Construisons la droite d'intersection des plans (AID) et (BCD). Le point D appartient à cette droite.
Les droites (AI) et (BC) sont coplanaires (plan (ABC)) et sécantes. Notons K l'intersection de ces deux droites.

Le point K appartient aux plans (AID) et (BCD). On a donc : $(\text{AID})\cap(\text{BCD})=(\text{KD})$.

Le point J appartient aux plans (BCD) et (AID) donc il appartient à (KD).
Le point J est donc l'intersection de la droite (KD) et de la parallèle à (AD) passant par I.



❷ *Aspect algébrique*

On se place dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)$. On note α l'abscisse de I et β son ordonnée.

a) Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)$, A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), C(0 ; 1 ; 0) et D(0 ; 0 ; 1). Les coordonnées des trois points non alignés A, B, C vérifient l'équation cartésienne $z = 0$, cette équation est donc une équation cartésienne du plan (ABC). Le point I a donc pour cote 0 : $I(\alpha\,;\beta\,;0)$.

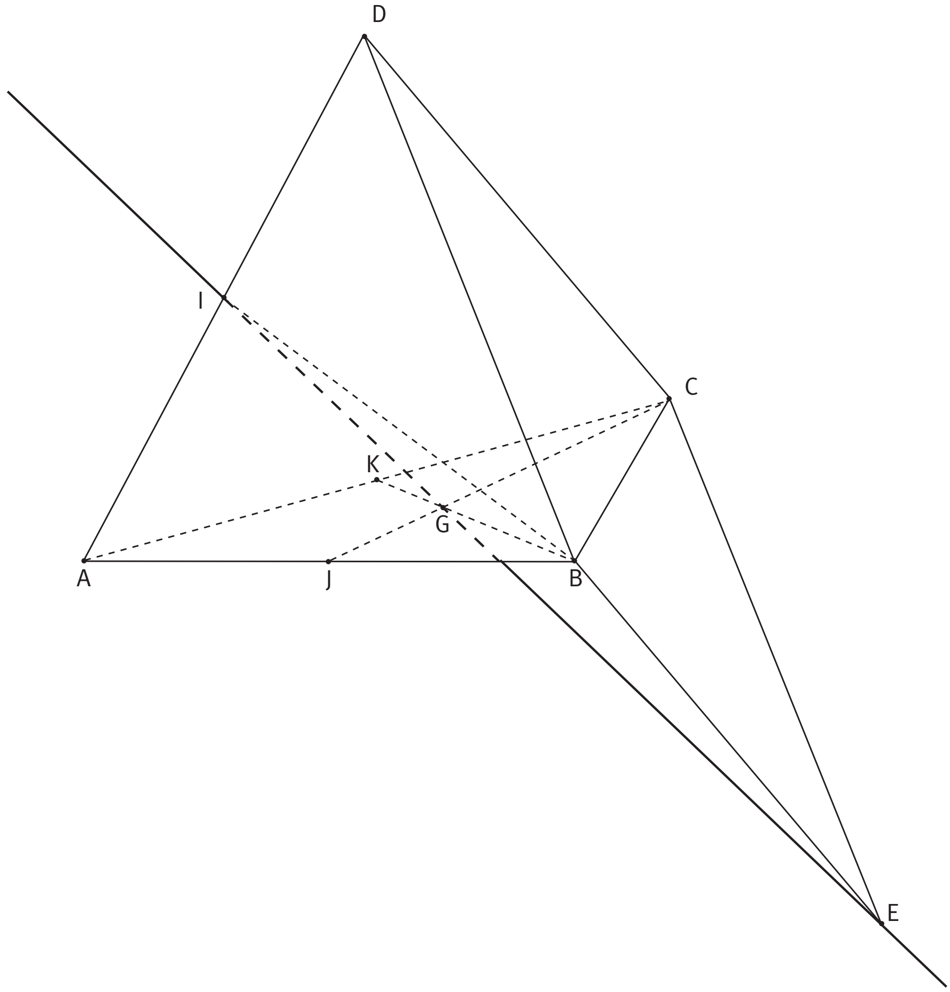
b) Le vecteur $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AD) et donc de toutes ses parallèles. Ainsi, la parallèle à (AD) passant par I est caractérisée par la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = k \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$.

Le point J a donc pour abscisse α et pour ordonnée β.

c) Les vecteurs $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs non colinéaires, donc le plan (BCD) est le plan $\left(B\,;\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BD}\right)$ et est donc caractérisé par la représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - k - k' \\ y = 0 + k \\ z = 0 + k' \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$, $k' \in \mathbb{R}$.

Il existe donc deux réels k et k' tels que $\alpha = 1 - k - k'$ et $\beta = k$. La cote de J est alors k' soit $1 - \alpha - \beta$. Le point J a donc pour coordonnées $(\alpha ; \beta ; 1 - \alpha - \beta)$.

Exercice III



I. *Méthode géométrique*

❶ Considérons les trois plans (CJI), (ABD) et (BCD). On a : $(\text{CIJ}) \cap (\text{ABD}) = (\text{IJ})$ et $(\text{BCD}) \cap (\text{ABD}) = (\text{BD})$. De plus, les droites (IJ) et (BD) sont parallèles (théorème de la droite des milieux dans le triangle ABD).

Ainsi, d'après le théorème du toit, les plans (CIJ) et (BCD) sont sécants selon une droite parallèle aux droites (IJ) et (BD). De plus, le point C appartient aux plans (CIJ) et (BCD), donc $(\text{CIJ}) \cap (\text{BCD})$ est la parallèle à (BD) passant par C.

❷ De même, en considérant les plans (BIK), (BCD) et (ACD), on obtient que $(\text{BIK}) \cap (\text{BCD})$, est la parallèle à (CD) passant par B.

❸ Le quadrilatère BECD est un parallélogramme, donc la droite (CE) est la parallèle à (BD) passant par C et la droite (BE) est la parallèle à (CD) passant par B. On en déduit que le point E appartient aux plans (CIJ) et (BIK).

Ces deux plans sont sécants selon une droite que l'on note Δ (sinon B, C, J et I seraient coplanaires). Le point G appartient à (CJ) donc à (CIJ) et à (BK) donc à (BIK). Les points E, G et I appartiennent tous trois à Δ, ce qui prouve que ces trois points sont alignés.

II. *Méthode vectorielle*

❶ On a $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ donc

$\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}\right)+\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}\right)=\vec{0}$ soit $3\overrightarrow{GI}+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)$ et donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{IG}$.

❷ On a :

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IA}+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)=2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CE}.$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IE}.$$

On a donc $3\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IE}$, ce qui prouve bien que les points I, G et E sont alignés.

III. *Méthode analytique*

❶ On a :

$$A(0\,;\,0\,;\,0),\ B(1\,;\,0\,;\,0),\ C(0\,;\,1\,;\,0) \text{ et } D(0\,;\,0\,;\,1).$$

De plus $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CE}$ donc $\begin{pmatrix} x_B-x_D \\ y_B-y_B \\ z_B-z_B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_E-x_C \\ y_E-y_C \\ z_E-z_C \end{pmatrix}$ d'où $E(1\,;\,1\,;\,-1)$.

Les points I et L sont les milieux respectifs de [AD] et [BC] donc :

$$I\left(0\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right) \text{ et } L\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right).$$

Le point G vérifie $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AL}$. On a donc :

$$G\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,0\right).$$

❷ On en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IE}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}$ et une représentation paramétrique de la droite (IE) :

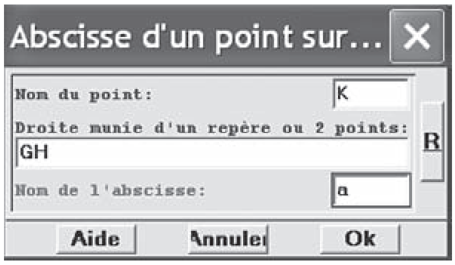
$\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+2t \\ z=-1-3t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$. (On remarque que $2\overrightarrow{IE}$ est un vecteur directeur de la droite.)

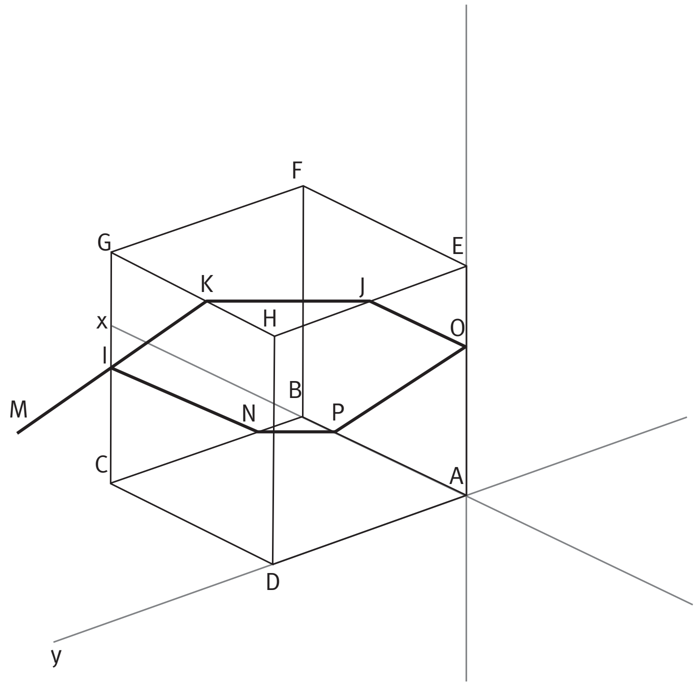
Pour le paramètre $t=-\frac{1}{3}$, on obtient les coordonnées de G, ce qui prouve bien que G appartient à (IE).

Exercice IV **Partie I** *Construction, conjectures*

❶ On crée :

- les points A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), F(1 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1) et H(0 ; 1 ; 1) ;
- les segments correspondants aux arêtes du cube ;
- le milieu I de [CG] ;
- le milieu J de [EH] ;
- le point K (point libre sur [GH]) ;
- le réel *a* abscisse de K sur la droite de repère (G ; H) ;
- le segment [JK] ;
- l'affichage de la valeur de *a*.





❷ Les droites (IK) et (CD) sont coplanaires (plan (CDH)). Dans ce plan, les droites (IK) et (GH) sont sécantes (en K) donc, comme (CD) et (GH) sont parallèles, les droites (IK) et (CD) sont sécantes. En effet, *dans le plan*, si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre.

❸ Les points J et K appartiennent à la fois au plan (IJK) et au plan (EFGH), ce qui prouve que ces deux plans sont sécants (I n'appartient pas à (EFGH)) selon la droite (JK).

Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles donc, comme (ABCD) et (EFGH) sont parallèles, les plans (ABCD) et (IJK) sont sécants selon une droite Δ parallèle à (JK).

De plus, le point M appartient à la fois au plan (IJK) et au plan (ABCD), donc il appartient à Δ.

La droite Δ est donc la parallèle à (JK) passant par M.

❹ On construit la droite Δ qui coupe [BC] en N et [AB] en P. On construit alors la parallèle à (IK) passant par P. Cette droite coupe (AE) en Q (c'est un point de (IJK) par des arguments similaires à ceux du ❸).

La section du cube par le plan (IJK) est JKINPQ.

❺

a) En se plaçant dans le menu Vues, Vue avec un autre plan de face, Nom du plan : IJK, on obtient une vue de face, les longueurs sont alors conservées.

En déplaçant le point K, on peut conjecturer que la section est un hexagone régulier pour $a=\frac{1}{2}$.

b) En déplaçant le point K, on peut conjecturer que la section a un sommet commun avec le cube pour $a=\frac{1}{3}$ (sommet A) et $a=\frac{2}{3}$ (sommet B).

Partie II *Vérifications*

Dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées des sommets du cube sont celles données à la question ❶ de la partie I.

❶ Le point I est le milieu de [CG] donc : $I\left(1\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\right)$. De même, on a : $J\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$.

Le point K vérifie $\overrightarrow{GK}=a\overrightarrow{GH}$, donc $\begin{cases} x_K-1=-a \\ y_K-1=0 \\ z_K-1=0 \end{cases}$. On a donc : $K(1-a\,;\,1\,;\,1)$.

❷ Écrivons $ax+by+cz+d=0$ une équation cartésienne du plan (AIJ). On a :

- $d=0$ (A appartient à ce plan) ;
- $a+b+\frac{c}{2}+d=0$ (I appartient à ce plan) ;
- $\frac{b}{2}+c+d=0$ (J appartient à ce plan).

Alors $b=-2c$ et $a=\frac{3c}{2}$. Pour $c=2$, on obtient $a=3$ et $b=-4$.

Ainsi, (AIJ) admet l'équation cartésienne :

$$3x-4y+2z=0.$$

❸ On déduit de ce qui précède :

A, I, J et K coplanaires si et seulement si $K\in(AIJ)$

si et seulement si $3\times(1-a)-4\times1+2\times1=0$

si et seulement si $1-3a=0$

si et seulement si $a=\frac{1}{3}$.

Exercice V ❶ On a : A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), F(1 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1) et H(0 ; 1 ; 1). Les points I, J et K étant les milieux respectifs de [BC], [BF] et [HF], on a :

$$I\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right),\ J\left(1\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)\text{ et }K\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right).$$

❷ Les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}$.

Ainsi :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{IK}=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\times 0+1\times 1=0 \text{ et } \vec{n}\cdot\overrightarrow{IJ}=2\times 0+1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\times\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux droites sécantes du plan (IJK), donc est un vecteur normal du plan (IJK).

On en déduit une équation cartésienne du plan (IJK) :

$$2x+y+z+d=0.$$

De plus, le point I appartient à ce plan donc :

$$2\times 1+1\times\frac{1}{2}+1\times 0+d=0 \text{ soit } d=-\frac{5}{2}.$$

Ainsi le plan (IJK) a pour équations cartésiennes :

$$2x+y+z-\frac{5}{2}=0 \text{ soit } 4x+2y+2z-5=0.$$

❸ **a)** On a : C(1 ; 1 ; 0) et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ donc (CD) : $\begin{cases} x=1-t\\ y=1\\ z=0\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

b) On a :

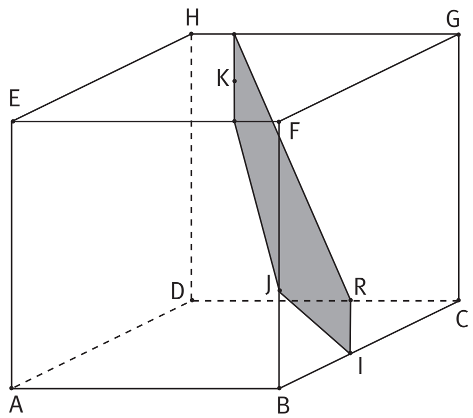
$$R(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{IJK})\cap(\text{CD}) \Leftrightarrow \text{Il existe } t \text{ de } \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x=1-t \\ y=1 \\ z=0 \\ 4x+2y+2z-5=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{Il existe } t \text{ de } \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x=1-t \\ y=1 \\ z=0 \\ 4(1-t)+2+0=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{Il existe } t \text{ de } \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x=1-t \\ y=1 \\ z=0 \\ t=1/4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3/4 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}.$$

Ainsi : $(\text{IJK})\cap(\text{CD})=R\left(\dfrac{3}{4}\,;\,1\,;\,0\right)$.



❹ Pour construire la section du cube par le plan (IJK) :

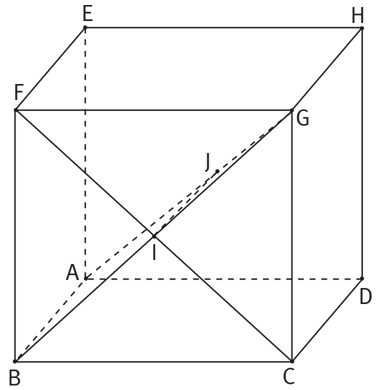
► on trace (IJ), (IR) ;

► on construit la parallèle à (IR) passant par K (cette droite est l'intersection des plans (IJK) et (EFGH) car si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles) ;

► on construit l'intersection de cette droite avec les droites (EF) et (GH) ;

► on achève la construction.

Exercice VI



❶ **a)** Les diagonales d'un carré étant perpendiculaires, on a : $(FC) \perp (BG)$. De plus, la droite (AB) étant orthogonale au plan (BCG), on a : $(FC) \perp (AB)$.
La droite (FC) étant orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABG), on a : $(FC) \perp (AGB)$.

b) Les points I et J appartiennent respectivement à (BG) et (AG), donc (IJ) est une droite de (ABG). On a donc bien : $(FC) \perp (IJ)$.

❷ **a)** Les droites (AB) et (BG) sont perpendiculaires, donc B est le projeté orthogonal de A sur (BG) soit sur (IG). On a donc : $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BG} = \frac{BG^2}{2}$.
Le segment [BG] est la diagonale d'un carré de côté a donc : $BG = a\sqrt{2}$. On en déduit $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2}{2} = a^2$.

b) On a : $\overrightarrow{GJ} \cdot \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AG} = -\frac{AG^2}{3}$.
De plus, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle ACG rectangle en C :

$$AG^2 = AC^2 + CG^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2.$$

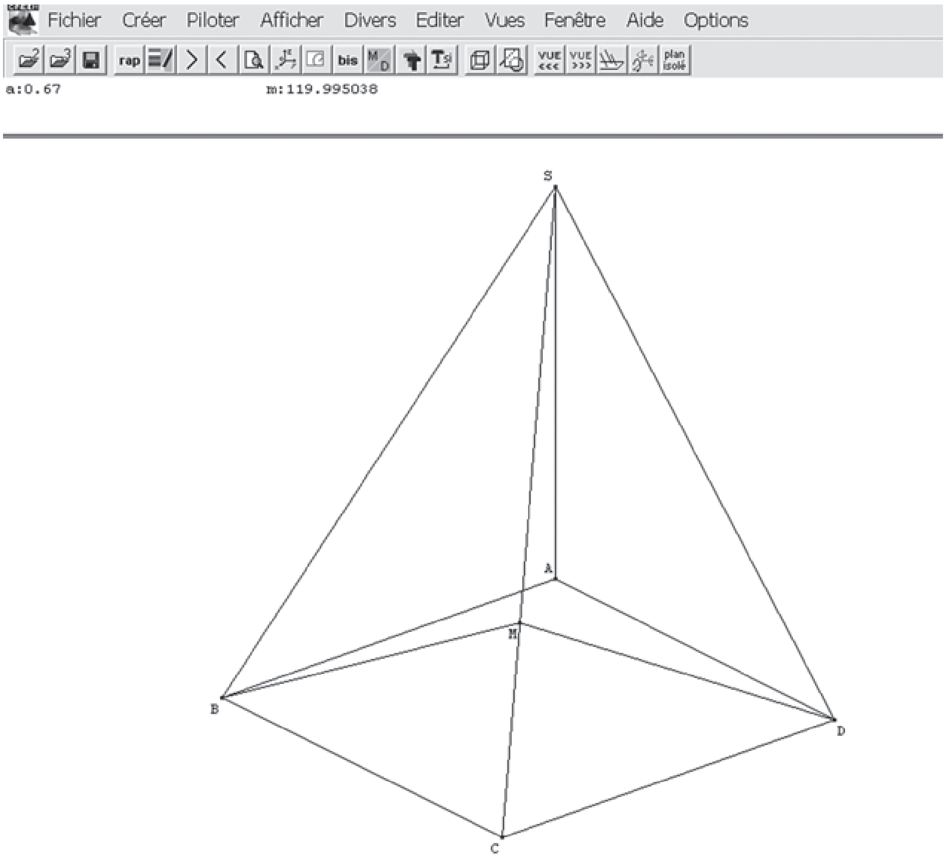
Ainsi : $\overrightarrow{GJ} \cdot \overrightarrow{AG} = -\frac{3a^2}{3} = -a^2$.

c) On a : $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AG} \cdot \left(\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GJ}\right) = \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GJ} = a^2 - a^2 = 0$. Donc : $(AG) \perp (IJ)$.

La droite (IJ) est perpendiculaire en I à (FC) et perpendiculaire en J à (AG). On pourrait démontrer que, étant donné deux droites coplanaires, il n'y a qu'une droite perpendiculaire à chacune des deux droites.

On dit que (IJ) est la perpendiculaire commune à (AG) et (FC).

Exercice VII **Partie I** *Conjecture*



❷ En modifiant la valeur de *a,* on peut conjecturer la valeur maximale de $\widehat{\text{BMD}}$: 120° et conjecturer qu'elle est atteinte pour : $a=\dfrac{2}{3}.$

Partie II *Démonstrations*

On se place dans le repère $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AS}}\right).$ Ce repère est bien *orthonormé.*

❶ On a :

$$\text{A}(0\,;0\,;0),\ \text{B}(1\,;0\,;0),\ \text{C}(1\,;1\,;0),\ \text{D}(0\,;1\,;0)\ \text{et}\ \text{S}(0\,;0\,;1).$$

De plus, le point M est défini par $\overrightarrow{\text{SM}}=a\overrightarrow{\text{SC}}.$ Alors, comme $\overrightarrow{\text{SC}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, on trouve : $\text{M}(a\,;\,a\,;\,1-a).$

❷ On a : $\overrightarrow{\text{MB}}\begin{pmatrix}1-a\\-a\\a-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{MD}}\begin{pmatrix}-a\\1-a\\a-1\end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\text{MB}=\sqrt{(1-a)^2+a^2+(a-1)^2}=\sqrt{3a^2-4a+2}\ ;$$

$$\text{MD}=\sqrt{a^2+(1-a)^2+(a-1)^2}=\sqrt{3a^2-4a+2}\ ;$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{MB}}\cdot\overrightarrow{\text{MD}}&=(1-a)\times(-a)+(-a)\times(1-a)+(a-1)\times(a-1)\\&=3a^2-4a+1.\end{aligned}$$

❸ On a :

$$\cos\left(\widehat{BMD}\right)=\frac{\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}}{MB\times MD}=\frac{3a^2-4a+1}{\sqrt{3a^2-4a+2}\times\sqrt{3a^2-4a+2}}=\frac{3a^2-4a+1}{3a^2-4a+2}$$

$$=\frac{3a^2-4a+2-1}{3a^2-4a+2}=1-\frac{1}{3a^2-4a+2}.$$

❹ Étudier les variations sur [0 ; 1] de la fonction $f: x\mapsto 1-\dfrac{1}{3x^2-4x+2}$.

La fonction trinôme du second degré $x\mapsto 3x^2-4x+2$ a pour discriminant $\Delta=(-4)^2-4\times3\times2=-8<0$ donc pour tout réel x, $3x^2-4x+2>0$.

La fonction f est dérivable sur [0 ; 1] (f est de la forme $1-\dfrac{1}{u}$ où u est une fonction dérivable sur [0 ; 1] ne s'annulant pas) et pour tout x de [0 ; 1],

$$f'(x)=0+\frac{6x-4}{\left(3x^2-4x+2\right)^2}=\frac{2(3x-2)}{\left(3x^2-4x+2\right)^2}.$$

Ainsi, pour tout x de [0, 1], $f'(x)$ et $(3x-2)$ ont le même signe.

On en déduit le tableau de variations de f sur [0 ; 1].

x	0		$\frac{2}{3}$		1
signe de $(3x-2)$		$-$	0	$+$	
f	0,5	↘	$-0,5$	↗	0

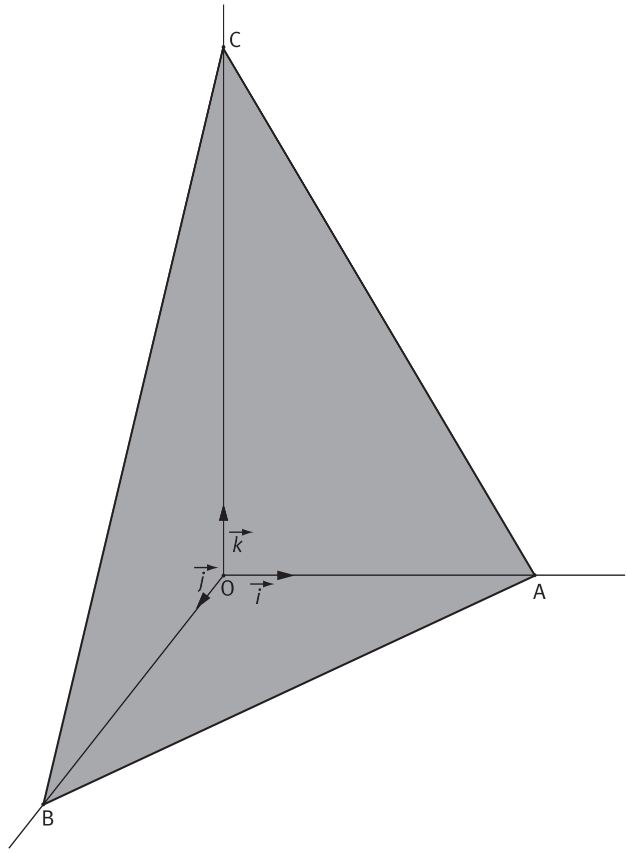
Pour tout x de [0 ; 1], $f(x)\geq f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ donc pour tout a de [0 ; 1], $\cos\left(\widehat{BMD}\right)\geq -0,5$ et donc $\widehat{BMD}\leq\dfrac{2\pi}{3}$ (car $\widehat{BMD}\in[0\ ;\ \pi]$).

Ainsi l'angle $\widehat{BMD}$ maximal est $\dfrac{2\pi}{3}$ valeur atteinte pour $a=\dfrac{2}{3}$. Aucune autre valeur ne réalise ce maximum, en effet :

$$\widehat{BMD}=\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow\cos\left(\widehat{BMD}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\ \text{(car } \widehat{BMD}\in[0\ ;\ \pi]$$

$$\Leftrightarrow f(a)=-0,5\Leftrightarrow a=\frac{2}{3}.$$

Exercice VIII On considère dans l'espace muni d'une base orthonormée $\left(O\,;\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$: A(a ; 0 ; 0), B (0 ; b ; 0) et C (0 ; 0 ; c) (a, b, $c > 0$). On note H l'orthocentre de ABC et S l'aire du triangle ABC.



❶ Le volume d'un tétraèdre est égal à : $\dfrac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

Considérons la face OAB. La hauteur relative à cette base est alors OC. Le volume du tétraèdre est alors :

$$\mathcal{V} = \frac{\text{Aire(OAB)} \times \text{OC}}{3} = \frac{\dfrac{\text{OA} \times \text{OB}}{2} \times \text{OC}}{3} = \frac{\text{OA} \times \text{OB} \times \text{OC}}{6} = \frac{abc}{6}.$$

❷ La droite (OA) est orthogonale au plan (OBC) donc : $(\text{BC}) \perp (\text{OA})$.

La droite (AH) est la hauteur de (ABC) issue de A donc : $(\text{BC}) \perp (\text{AH})$.

La droite (BC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (AOH), donc (BC) est orthogonale à ce plan : $(\text{BC}) \perp (\text{AOH})$.

❸ D'après ce qui précède, la droite (BC) est orthogonale à toute droite du plan (AOH). En particulier : (OH) ⊥ (BC).

On a, de même (OH) ⊥ (AB), ce qui prouve que : (OH) ⊥ (ABC).

❹ Soit $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ une équation cartésienne du plan (ABC) $((\alpha\,;\,\beta\,;\,\gamma) \neq (0\,;\,0\,;\,0))$.

On a :

$A \in$ (ABC) donc $\alpha a + \delta = 0$, B $\in$ (ABC) donc $\beta b + \delta = 0$, et C $\in$ (ABC) donc $\gamma c + \delta = 0$.

Le réel δ est non nul (si c'était le cas, on aurait : $\alpha=\beta=\gamma=0$).

Une équation cartésienne du plan (ABC) est alors $\frac{\delta}{a}x+\frac{\delta}{b}y+\frac{\delta}{c}z-\delta=0$ soit $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$.

❺ Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{a}\\ \frac{1}{b}\\ \frac{1}{c}\end{pmatrix}$ est, d'après ce qui précède, un vecteur normal à (ABC).

Comme (OH) est orthogonale à (ABC), $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (OH) qui est donc caractérisée par la représentation paramétrique $\begin{cases} x=\frac{k}{a}\\ y=\frac{k}{b}\\ z=\frac{k}{c}\end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$.

Notons k le paramètre de H pour la précédente représentation : $H\left(\frac{k}{a}\,;\,\frac{k}{b}\,;\,\frac{k}{c}\right)$.

On a $H\in(ABC)$ donc : $\frac{k}{a^2}+\frac{k}{b^2}+\frac{k}{c^2}-1=0$ d'où : $k=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$.

On en déduit $\overrightarrow{OH}=k\vec{n}$ avec $k>0$ donc $OH=k\|\vec{n}\|$.

Ainsi : $OH=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\|\vec{n}\|=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$.

La hauteur relative à la base ABC du tétraèdre est OH. On a donc :

$$\mathcal{V}=\frac{\text{Aire(ABC)}\times OH}{3}=\frac{1}{3}\times\mathcal{S}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}.$$

Or $\mathcal{V}=\frac{abc}{6}$ donc :

$$\mathcal{S}=\frac{abc}{6}\times3\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\frac{abc}{2}\times\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$

$$=\frac{abc}{2}\times\sqrt{\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}{2}.$$

■