OPM3001 - Techniques quantitatives de gestion - Cahier d'exercices corrigés

Eric LALLET, Jean-Luc RAFFY
TELECOM ÉCOLE DE MANAGEMENT - 1^{re} ANNÉE

Décembre 2011

Table des matières

Chapitre 1

Exercices

1.1 Les problèmes d'ordonnancement

Exercice 1.1.1 (Organisation d'un colloque)

En arrivant au travail, vous trouvez sur votre bureau cette note «très claire» :

> «La première chose à faire est de trouver le site de la conférence. Par exemple un hôtel qui pourra héberger les participants et qui possède des salles de conférence. Il faut compter 3 semaines pour le trouver.
>
> D'ailleurs pour toutes ces recherches, et tout l'aspect logistique, tu dois t'entourer d'une équipe, le comité d'organisation, à qui tu délégueras l'essentiel de ces tâches. Choisir cette équipe devrait te prendre 1 semaine.
>
> Il te faut aussi choisir le comité de programme. Ça sera l'équipe chargée de l'aspect scientifique du colloque. Compte 3 semaines pour ce choix. Ce comité de programme devra se réunir 2 fois avant la conférence. Une première fois, avant l'appel à communications, pour fixer les grandes lignes du programme qui seront indiquées dans cet appel. Et une seconde fois, après la sélection finale des articles, et au moins 3 semaines avant le colloque, pour fixer en détail le programme final.
>
> Le temps que les articles soient écrits et envoyés, il faut laisser aux auteurs, un délais de 8 semaines entre l'appel à communications et la sélection. Il faut aussi laisser 8 semaines au jury entre la réception des articles, et la sélection finale.
>
> Tu dois aussi te mettre d'accord avec un imprimeur pour l'édition des «proceedings». En général il faut compter 6 semaines pour l'impression à condition que tous les articles aient été mis en forme selon les conventions de l'imprimeur. Pour cela, accorde 4 semaines après la sélection finale aux différents auteurs pour qu'ils fassent cette mise en forme. Il faut que tu aies reçu les livres imprimés au moins 1 semaine avant le colloque.
>
> Prévoie aussi un programme «social» pour occuper les conférenciers en dehors du temps des conférences. Le temps fort sera un banquet lors d'une soirée. Ton comité d'organisation devrait pouvoir choisir le lieu de ce banquet en 2 semaines. Il devra aussi se mettre d'accord avec l'hôtel pour les menus et les prix des repas lors de la conférence. Pour cela compte 1 semaine après le choix de l'hôtel. Une fois tout cela connu, laisse encore 1 semaine au comité d'organisation pour fixer le prix que devront payer les conférenciers. Ce prix et le programme «social» devront figurer dans l'appel à communications.
>
> De plus, comme on profite de sponsors généreux, tu devrais profiter des deux réunions du comité de programme pour tester l'hôtel et le lieu du banquet. Donc programme la première réunion du comité de programme dans l'hôtel, et prévoie un dîner sur le lieu du banquet le soir de la seconde réunion.
>
> Voila, je pense que je n'ai rien oublié.»

En effet, le collègue qui devait organiser la prochaine conférence sur les techniques quantitatives à Paris vient d'être muté, et c'est vous qui avait hérité de la tâche. Ayant déjà eu l'expérience de genre d'organisation, il vous a donc listé les tâches à accomplir.

La date a été fixée. Ce sera du 17 au 20 décembre 2009 pour que les conférenciers puissent, s'ils le souhaitent, prolonger leur séjour à Paris lors des fêtes.

Quand devez-vous commencer au plus tard à organiser tout cela pour que le colloque puisse bien débuter le 17 décembre ?

Il n'est jamais simple de fixer une date de réunion… Quelles sont les marges dont vous disposez pour les deux réunions du comité de programme pour fixer une date sans que cela ne ralonge votre préparation ?

Correction page 23

Exercice 1.1.2 (Tarte Tatin (second problème du contrôle de septembre 2009))

Deux amis, Apollodore et Aristodème se décident presque à la dernière minute de faire une tarte tatin pour recevoir des amis qui doivent arriver 1 heure plus tard. Ils veulent l'accompagner d'une crème anglaise. Voici les diverses actions qu'ils doivent réaliser ainsi que leur durée.

Pour la pâte brisée :
– Préparer la pâte (5 minutes)
– Laisser reposer la pâte (30 minutes)
– Étaler la pâte (5 minutes)

Pour la tarte Tatin :
– Préparation du moule (5 minutes) : Prendre un moule à manquer... Verser 125g de sucre sur le fond. Parsemer sur le dessus 120g beurre coupé en petits morceaux.
– Préparation des pommes (10 minutes) : Peler 8 belles pommes, enlever le coeur et les couper en quartiers.
– Mise en place des pommes (10 minutes) : Placer les quartiers de pommes dans le moule, sur le sucre et le beurre. Saupoudrer avec 125g de sucre
– Caramélisation des pommes (5 minutes) : Placer le moule sur un feu vif, jusqu'à ce que le caramel commence à dorer.
– Mise en place de la pâte (5 minutes) : Recouvrir les pommes de la pâte étalée. Rentrer le bord à l'intérieur du moule. Faire quelques trous pour laisser échapper la vapeur.
– Cuisson (15 minutes) : Enfourner dans un four chaud, thermostat 9 pendant 15 minutes, le temps que la pâte soit bien dorée.

Pour la crème anglaise :
– Préparer la crème (15 minutes).
– Laisser refroidir (15 minutes).
– Mettre au réfrigérateur (30 minutes minimum).

Apollodore se propose pour préparer la pâte, et s'occuper ensuite de la tarte Tatin, pendant qu'Aristodème s'occupera de préparer la crème anglaise puis étalera la pâte.

Aristodème suggère qu'Apollodore commence immédiatement la préparation de la Tarte pendant que lui commencera la pâte brisé. Il préparera la crème anglaise durant le temps de repos de la pâte, et ensuite étalera la pâte.

Lequel des deux scénarios conseillez-vous de mettre en œuvre ?

Correction page 25

Exercice 1.1.3 (Petits méfaits à l'abbaye de Shrewsbury (second problème du contrôle de septembre 2011))

Juste avant l'office de Sexte (l'office de la mi-journée) Frère Jérome crie au scandale : le vin de messe a disparu ! Il en faut plus pour affoler l'Abbé Radulphe, mais il demande quand même à Frère Cadfael de faire enquête pour savoir ce qui s'est passé.

Frère Cadfael obtient vite certaines certitudes :

– À la fin de l'office des Laudes (6h30 du matin), le vin de messe a été enfermé sous clef dans un meuble de la sacristie.
– Au début de l'office de Sexte (midi), le vin n'était plus là.
– Seuls les membres de l'abbaye étaient présents dans les murs durant cette matinée.
– Le voleur a pris la clef dans le bureau du Prieur, et l'y a remise après son méfait. Frère Cadfael constate qu'il faut au minimum 20 minutes d'affilée pour faire ces actions.

Durant cette matinée, tous les frères valides ont travaillés ensemble sauf trois d'entre eux qui ont eu des tâches spécifiques. Seul l'un de ces trois a pu avoir le temps de voler ce vin. Après enquête, voici ce qu'il a pu établir des emplois du temps de ces trois frères :

Emploi du temps de Frère Daniel : Juste après les Laudes, Frère Daniel est allé au potager avec Frère Yves. Ils ont passé 2h à récolter des légumes et des plantes médicinales. Frère Daniel est ensuite allé rejoindre Frère Thomas aux cuisines où ils ont passé 1h15 à préparer les repas. Enfin il a rejoint l'atelier médicinal où pendant 1h45 il a préparé diverses concoctions, pommades et onguents.

Emploi du temps de Frère Yves : Juste après les Laudes, Frère Yves est allé au potager avec Frère Daniel. Ils ont passé 2h à récolter des légumes et des plantes médicinales. Frère Yves est ensuite allé à la léproserie apporter certains de ces légumes et plantes. Cela lui a pris 1h. Enfin il est allé à l'infirmerie où avec Frère Thomas il a passé 2h à soigner les malades.

Emploi du temps de Frère Thomas : Juste après les Laudes, Frère Thomas est allé en ville faire des courses. Cela lui a pris 2h15. Ensuite il est allé aux cuisines avec Frère Daniel où ils ont passé 1h15 à préparer les repas. Enfin Frère Thomas est allé à l'infirmerie où avec Frère Yves il a passé 2h à soigner les malades.

Pour Frère Cadfael, il n'y a plus de mystère. Seul un des trois frères a eu le temps de commettre le méfait !

Quel frère a pu commettre le vol ? De combien de temps a-t-il disposé ?

Correction page 26

1.2 Les Arbres

Exercice 1.2.1 (Promesse électorale)

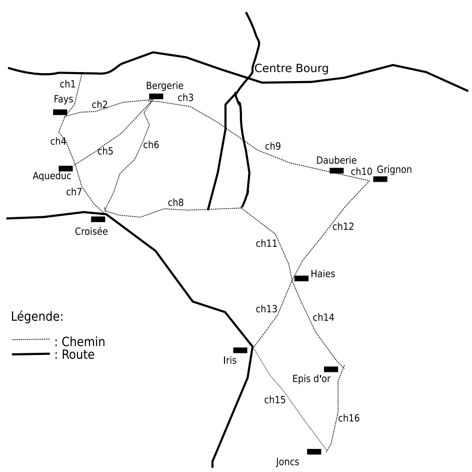


FIG. 1.1 – Carte de la commune

Le réseau routier d'une petite commune rurale a été laissé à l'abandon si longtemps qu'une bonne partie des routes sont devenues des chemins. Lors des dernières élections le maire a promis qu'il allait remettre en état suffisamment de routes pour que toutes les habitations de la commune puissent rejoindre le centre-bourg par une route digne de ce nom. Il lui faut maintenant tenir sa promesse, mais bien sûr, il voudrait engager un minimum de dépenses pour cela.

La carte de la commune et la liste des habitations à relier au centre-bourg sont sur la figure 1.1. Le coût de la remise en état d'une route est directement proportionnel à sa longueur. Voici la longueur des différents chemins :

ch1=500m	ch2=1200m	ch3=1400	ch4=800m	ch5=1400m	ch6=1600
ch7=1300m	ch8=1500m	ch9=1400	ch10=500	ch11=1400m	ch12=1600m
ch13=1300	ch14=1500	ch15=1700	ch16=1300		

Correction page 27

Exercice 1.2.2 (Combien de nains faut-il pour creuser les tunnels ? (premier problème du contrôle d'avril 2009))

Gorog est le nain contremaître responsable de la récolte minière d'une section comportant six salles en exploitation. Mais sa journée commence par une mauvaise nouvelle. Le responsable de la fabrication des paniers utilisés pour transporter le minerai à dos de chèvres a décidé d'en agrandir la taille. Bien sûr, cela part d'une bonne intention : avec des paniers plus grands, il y aura moins de voyages à faire pour transporter le minerai. Mais il y a un problème. Les couloirs qui permettent de circuler jusqu'aux salles ne seront plus assez larges pour la circulation des chèvres (chargées de leurs nouveaux paniers).

Gorog va donc devoir utiliser tous ses moyens pour élargir ces couloirs ! Comme il doit répondre à une commande urgente en minerai, il veut juste, dans une premier temps, n'élargir que les couloirs nécessaires pour atteindre toutes les salles.

Sa section comporte six salles réparties sur deux niveaux. Les couloirs de la partie supérieure (couloir d'entrée, et les couloirs 1 à 3) sont percés dans de la roche friable facile à creuser. Les couloirs de la partie inférieur (couloirs 4 à 6) sont percés dans une roche très dure beaucoup plus longue à creuser. Enfin les deux escaliers permettant le passage entre les deux niveaux sont percés dans une roche intermédiaire.

Gorog a calculé qu'il fallait 1 heure de travail pour 1 nain pour élargir 1 mètre de couloir dans la roche friable. Il faut 2 heures de travail pour 1 nain pour 1 mètre de roche intermédiaire, et 3 heures pour la roche dure.

Voici la longueur des différents couloirs (voir schéma de la grotte 1.2) :

Couloir d'entrée : 7m	Couloir 1 : 50m	Couloir 2 : 46m	Couloir 3 : 35m	Escalier 1 : 55m
	Couloir 4 : 55m	Couloir 5 : 30m	Couloir 6 : 45m	Escalier 2 : 60m

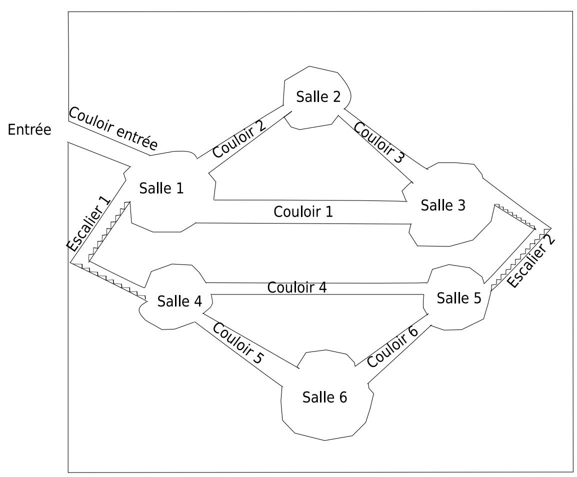


FIG. 1.2 – Schéma de la grotte

Quels couloirs devront être élargis en priorité pour que toutes les salles soient à nouveau exploitables au plus vite ?

La journée de travail d'un nain dure 8 heures. Combien de nains Gorog devra-t-il réunir pour réussir à élargir suffisamment de couloirs pour rendre toutes les salles accessibles en 1 seule journée ?

Correction page 30

1.3 Recherche du plus court chemin

Exercice 1.3.1 (Voyage Lyon-Agen)

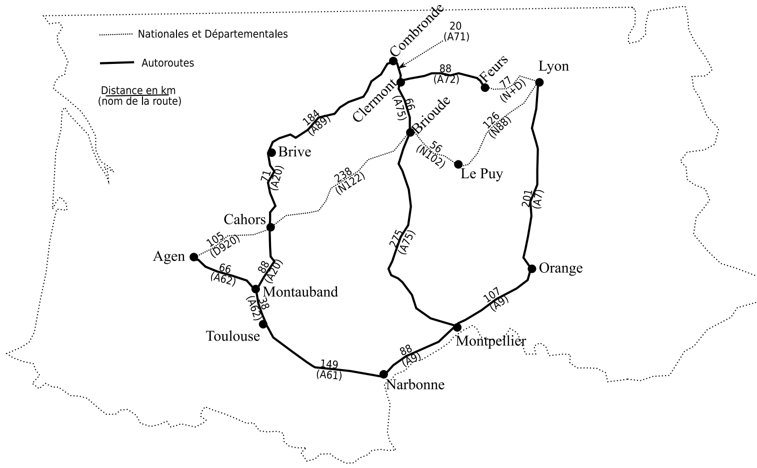


FIG. 1.3 – Les routes entre Lyon et Agen

Un voyageur doit aller en voiture de Lyon à Agen. En regardant les cartes il a dégagé diverses options pour faire sa route (voir figure 1.3).

- Il peut couper le massif-central par les nationales en passant le Le Puy-en-Velay, Brioude et Cahors.
- Il peut passer par les autoroutes du sud de la France, en passant par Orange, Montpellier, Narbonne, Toulouse et Montauban.
- Il peut passer par les autoroutes du centre de la France, en rejoingnant l'A72 à Feurs, et ensuite en passant par Clermont-Ferrand, Brive, Cahors, Montauband.
- Il peut enfin faire un mélange de tout cela en profitant éventuellement de l'A75 qui coupe toutes ces routes.

Sachant qu'il réalise une moyenne de 70km/h sur les nationales et départementales et de 110km/h sur les autoroutes quel chemin doit-il emprunter pour faire le trajet le plus rapidement possible ? Et quel est le temps de ce trajet ?

Correction page 31.

Exercice 1.3.2 (Le banquet (premier problème du contrôle de septembre 2009))

Apollodore, un jeune traiteur, vient de se mettre à son compte et propose ses services pour des banquets. En une journée de travail il arrive à produire 50 repas. Par contre il ne possède pas encore ses cuisines. Il a cependant trouvé une grosse collectivité qui possède des cuisines sous-utilisées trois jours par semaine et qui loue alors des espaces de travail. La location, même d'une seule journée, donne aussi l'accès durant la semaine à un espace de stockage en chambre froide où le traiteur peut conserver jusqu'à 100 repas. Cet espace doit être totalement libéré le vendredi soir.

En tenant compte du prix de location (variable), et des matières premières utilisées, Apollodore a calculé le prix d'une journée de production (50 repas) suivant la journée :

Jour	lundi	mardi	jeudi
Prix	2k euros	2k euros	1k euros

Pour la semaine à venir il a trouvé trois demandes pour 100 repas qui pourraient lui convenir. S'il les accepte, voici les jours et les prix convenus :

Jour	mardi	mercredi	vendredi
Prix	7k euros	4k euros	4k euros

Les jours où il sert un banquet, il n'a pas le temps de produire des repas. De plus chaque banquet lui coûte 1k euros de frais divers (transport, services. . .) à soustraire aux revenus indiqués ci dessus.

Est-ce qu'Apollodore a intérêt à travailler cette semaine ?
– Si oui, selon quel planning ?
– Sinon pourquoi ?
Correction page 33.

Exercice 1.3.3 (Le banquet (suite) (contrôle septembre 2009))

Apollodore connaît un ami, Aristodème, exactement dans les mêmes conditions que lui. Ils peuvent travailler ensemble durant cette semaine. Aristodème devra lui aussi payer la location d'un espace de travail, donc le prix des repas supplémentaires produits reste le même. Par contre il peut très bien continuer à produire des repas les jours où Apollodore sert les banquets (s'il a accès aux cuisines ce jour là !).

Leur conseillez-vous de travailler ensemble cette semaine (notez qu'ils peuvent très bien ne pas travailler les mêmes jours ni le même nombre de jours) ?
– Si oui, selon quel planning ?
– Sinon pourquoi ?
Correction page 34.

1.4 Flot Maximal

Exercice 1.4.1 (Cursus de formation)

Un organisme qui vend des formations sous-traite ses enseignements dans trois écoles. Une formation qu'elle propose à son catalogue nécessite la validation des trois unités de valeur (UV_1, UV_2, et UV_3). Il faut avoir validé l'UV_1 pour suivre l'UV_2, et avoir validé l'UV_2 pour suivre l'UV_3.

La deuxième école a des accords d'équivalence avec les deux autres. Elle peut recevoir des élèves ayant validés des UV dans les deux autres écoles, et ses élèves peuvent aussi continuer leur cursus dans les deux autres écoles.

La troisième école a réuni les UV_2 et UV_3 au sein d'un seul module indivisible. Voici le tableau des dates, capacités (en nombre d'élèves) et coût (en k euros/élève) pour les différentes UV et école.

	UV_1	UV_2	UV_3
Première école	Début : 1^{er} septembre Fin : 30 novembre Capacité : 40 Coût : 10 k euros	Début : 10 décembre Fin : 15 février Capacité : 20 Coût : 10 k euros	Début : 1^{er} février Fin : 15 mai Capacité : 25 Coût : 15 k euros
Seconde école	Début : 1^{er} octobre Fin : 15 décembre Capacité : 30 Coût : 8 k euros	Début : 5 janvier Fin : 15 mars Capacité : 35 Coût : 8 k euros	Début : 1^{er} avril Fin : 15 juin Capacité : 30 Coût : 8 k euros
Troisième école	Début : 15 octobre Fin : 15 janvier Capacité : 20 Coût : 13 k euros	Début : 20 janvier Fin : 15 juin Capacité : 35 Coût : 20 k euros	

À première lecture, la première école peut former 20 élèves, la seconde 30 et la troisième 20. Donc on pourrait former 70 élèves. Mais en profitant des équivalences entre la seconde école et les deux autres, l'organisme de formation doit pouvoir proposer mieux. Combien de formations peut-elle proposer cette année ?

Correction page 37.

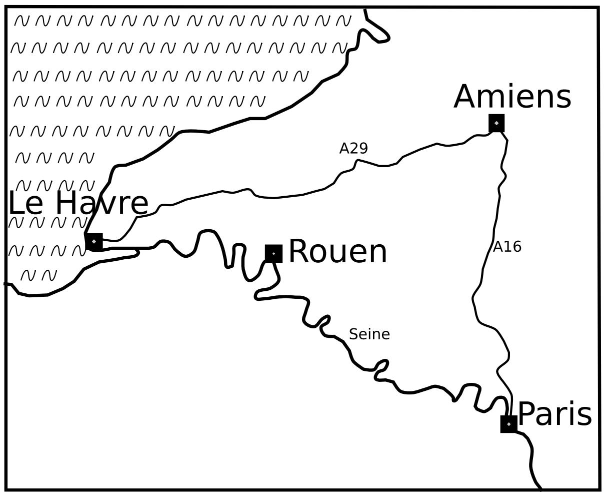
Exercice 1.4.2 (Cursus de formation (suite))

Finalement l'organisme de formation a reçu une demande pour 63 formations. Quel cursus l'organisme doit proposer à ces 63 élèves pour obtenir ces formations à moindre prix ?

Correction page 39.

Exercice 1.4.3 (Travaux sur la route (premier problème du contrôle d'avril 2010))

FIG. 1.4 – Carte des usines, magasins et voies praticables



Une entreprise possède deux usines et deux magasins pour vendre ses produits. Au fil des ans elle a su adapter les capacités de production et de transport de ses usines aux volumes de vente de ses magasins. Son usine d'Amiens produit chaque mois 100 containers de marchandise. Son magasin de Paris vend chaque mois ce même volume. Ils sont transportés par camion par l'autoroute A16. Son usine de Rouen produit chaque mois 120 containers de marchandise. Son magasin du Havre vend chaque mois ce même volume. Ils sont transportés par péniche par la Seine.

Tout allait pour le mieux jusqu'au jour où des travaux ont débuté sur l'autoroute A16 provoquant des bouchons réguliers. L'entreprise s'aperçoit qu'elle n'arrivera plus à faire passer que 50 containers par mois entre Amiens et Paris. Son service de logistique fait une rapide étude, mais ne trouve pas d'autres routes pratiques entre Amiens et Paris. Par contre elle a calculé qu'elle pouvait faire circuler jusqu'à 80 containers entre Amiens et le Havre par l'autoroute A29. De plus en utilisant la Seine elle sait transporter autant que containers qu'elle veut depuis Rouen vers Paris ou le Havre.

Grâce à ces nouvelles options l'entreprise espère pouvoir à nouveau vendre un maximum de sa production. Il faut donc qu'elle réorganise ses transports[1].

Trouvez le modèle qui va permettre de résoudre cette recherche de retour à la vente maximale.

Modélisez la situation actuelle (50 containers qui transitent d'Amiens vers Paris par l'autoroute A16, et 120 containers qui transitent de Rouen vers le Havre par la Seine), et prouvez qu'elle n'est pas optimale.

Toujours en partant de cette situation, trouvez la solution optimale qui demandera le moins de changement possible dans les habitudes de transport.

Correction page 41.

[1]Notez, qu'une fois arrivés au Havre ou à Paris, les containers ne peuvent plus bouger. Seuls les transports depuis Amiens ou Rouen jusqu'à un magasin sont possibles.

1.5 Programmation linéaire : la méthode géométrique

Voir les exercices 1.6.1 page 12 et 1.6.2 .page 12.

Exercice 1.5.1 (La route du sel)

Au quatorzième siècle, un Touareg compte gagner un peu d'or en investissant dans des dromadaires qu'il sait pouvoir revendre à Tombouctou. Comme sa route passe par Taoudeni, il pense aussi y acheter du sel pour tirer d'avantage de bénéfice de son voyage. Il sait qu'il pourra obtenir au terme de son voyage 10 po (pièce d'or) de bénéfice par dromadaire, et 1 pa (pièce d'argent, 1 po = 10 pa) de bénéfice par kg de sel.

Avant toute chose il faut déjà qu'il achète ces dromadaires et ce sel. Chaque dromadaire lui coûte 10 po, et chaque kg de sel 0,2 pa. Il peut investir 65 po.

Sachant qu'un dromadaire peut transporter jusqu'à 150 kg de sel, comment ce Touareg doit investir son pécule pour tirer le bénéfice maximal de son investissement ?

Correction page 42.

1.6 Programmation linéaire : le simplexe

Exercice 1.6.1 (Une histoire de fromage)

Une laiterie s'est spécialisée dans deux fromages. Le premier est un AOC qui exige plus d'heures de travail et un lait en provenance d'une région bien précise. Le second demande moins de travail, et peut être fabriqué avec n'importe quel lait. Par contre sa vente dégage une marge moindre.

La laiterie dispose de $21\,000$ heures de travail annuel, elle reçoit 4 millions de litres de lait de la zone AOC, et 6 millions de litres d'autres zones.

Le tableau suivant indique les ressources nécessaires pour produire 1 tonne de fromage.

Fromage	heures de travail par tonne de fromage	litres de lait par tonne de fromage
Fromage 1 (AOC)	30 h	$10\,000$ l
Fromage 2	15 h	$7\,500$ l

Sachant qu'un kilo du fromage AOC dégage une marge de 3 euros et qu'un kilo de l'autre fromage seulement 1 euro, quelle production doit fabriquer cette laiterie pour optimiser ses bénéfices ?

Correction page 43.

Exercice 1.6.2 (Une histoire de fromage (bis))

Même question, mais cette fois ci, avec une marge de 2 euros par kilo pour le fromage AOC et toujours d'un seul euro pour le second fromage.

Correction page 44.

Exercice 1.6.3 (Problème électrique)

Un revendeur d'électricité a promis à sa clientèle qu'au moins 25% de son électricité serait d'origine renouvelable. Il a calculé que pour l'année qui arrive il aura un marché de 18 TWh (térawattheure). Il a aussi pré-sélectionné trois fournisseurs à qui il va acheter son électricité en gros. Voici les quantités (en TWh), le taux d'électricité renouvelable et la marge dégagée (en k euro/TWh) que peuvent lui fournir ces trois producteurs.

	% d'électricité renouvelable	Quantité d'électricité achetable (TWh)	Marge (k Euro/TWh)
Producteur 1	10 %	25	900
Producteur 2	46 %	6	700
Producteur 3	100 %	4	500

Chez quels producteurs et en quelle quantité ce revendeur doit-il acheter son électricité pour avoir le meilleurs bénéfice possible ?

Correction page 46.

Exercice 1.6.4 (Problème électrique (bis))

Même problème mais avec ces nouvelles marges :

	% d'électricité renouvelable	Quantité d'électricité achetable (TWh)	Marge (k euros/TWh)
Producteur 1	10 %	25	850
Producteur 2	46 %	6	710
Producteur 3	100 %	4	500

Pour des raisons politiques le revendeur aimerait privilégier le second producteur. Est-il possible d'acheter une partie de l'électricité chez lui sans faire baisser les profits ?

Correction page 48.

1.7 Non classifiés

Dans les sections précédentes il était aisé de deviner la technique à mettre en œuvre pour les exercices puisque c'était le sujet la section. Voila pourquoi la plupart des exercices ont été placés dans cette dernière section. Ainsi vous n'aurez plus d'a priori sur le type de modélisation que vous devrez utiliser pour les résoudre. Il faudra le trouver par votre analyse du problème.

Mais si pour vos révisions vous souhaitez avoir un classement des exercices, vous le trouverez en annexe : un classement par annale page 77 et un classement par technique page 77.

Exercice 1.7.1 (Commerce de guilde (premier problème du contrôle d'avril 2008))

Une guilde du «Seigneur des Anneaux Online» a décidé de faire commerce de son artisanat. Elle vient de recevoir une commande pour un ensemble de 10 arbalètes, 10 sets complets d'armures lourdes, et 10 épées. Pour réaliser cette commande il faut récolter deux types de fer (le fer de nain et le fer ancien), du bois et du cuir. Il faut ensuite faire divers alliages de fer, traiter le bois et le cuir. Enfin il faut réaliser les objets. Elle décide de confier ces tâches à trois de ses membres :

– Tawar : Elfe chasseur menuisier, il aura pour tâche d'aller récolter le bois, de chasser pour rapporter le cuir. C'est aussi lui qui fera le traitement du bois et du cuir. Enfin c'est lui qui réalisera les arbalètes.
– Gorog : Nain prospecteur et ferronnier, il aura pour tâche de ramasser le fer de nain. C'est aussi lui qui aura la tâche de faire les armures. Mais attention, Gorog exige d'avoir le droit à une pause de 15 minutes à la taverne entre ses 2 tâches !
– Albin : Humain prospecteur et fabriquant d'arme, il aura pour tâche de ramasser le fer ancien. C'est lui qui transformera tout le fer (fer de nain, et fer ancien) afin d'obtenir les alliages utiles aux arbalètes, aux armures et aux épées. Enfin c'est lui qui réalisera les épées.

Tawar prévoit de passer 45 minutes pour récolter la totalité du cuir et du bois. Il lui faudra 15 minutes pour en faire le traitement. Les arbalètes sont fabriquées avec du bois traités et un alliage de fer. Il lui faudra 20 minutes pour toutes les faire.

Gorog prévoit de passer 1h pour récolter le fer de nain. La fabrication de ses armures utilisent des alliages de fer et du cuir traité. Il pense pouvoir faire toutes les armures en 25 minutes.

Albin passera 1h à ramasser le fer ancien. Il lui faudra 20 minutes pour réaliser les alliages. Ensuite pour fabriquer toutes les épées qui ne nécessitent que des alliages de fer, il lui faudra 10 minutes.

Une fois tout réalisé, Albin doit réunir la commande pour aller la livrer. Cela doit lui prendre 10 minutes.

Combien de temps faut-il prévoir pour livrer cette commande ?

Gorog a-t-il retardé la livraison à cause de sa pause à la taverne ? Quelle est la pause maximale qu'il peut faire sans retarder la livraison ?

Correction page 49

Exercice 1.7.2 (Commerce de guilde (suite) (second problème du contrôle d'avril 2008))

Les épées et les arbalètes ont satisfait les clients. La guilde a reçu de nombreuses commandes. Elle décide de les produire en série. Pour fabriquer une arbalète il faut ramasser 25 morceaux de bois, et 20 blocs de fer de nain. Pour fabriquer une épée il faut 25 blocs de fer ancien et 20 blocs de fer de nain. Tawar peut ramasser 1000 morceaux de bois par semaine, Gorog 1000 blocs de fer de nain et Albin 1000 blocs de fer ancien.

Sachant que la guilde vend une épée pour 1 pièce d'or (1 pièce d'or = 1000 pièces d'argent) et une arbalète pour 500 pièces d'argent, quel est le gain maximal qu'elle peut faire par semaine.

Gorog a négocié de recevoir 1 chope de bière par épée vendue, et 2 chopes par arbalète vendue. Or cette semaine c'est lui qui dirige la production. Sachant qu'il va privilégier son intérêt (la bière !) quelles vont être les pertes de gain pour la guilde cette semaine ?

Correction page 50

Exercice 1.7.3 (Reconstruction)

Vous êtes le ministre du budget d'un petit pays victime d'une catastrophe naturelle qui a détruit toute infrastructure et quasiment toutes les ressources de production sauf celles situées dans la ville de Coudebolle.

Le ministre de l'équipement a fait chiffrer par ses services les coûts de reconstruction du réseau routier entre les principales villes (seules peuvent être construites, les routes dont les coûts sont indiqués dans le tableau suivant)

	Coudebolle	Borivage	Ollala	Pompays	Tecuge
Coudebolle		3000	7000		7000
Borivage			2000		4000
Ollala				2000	3000
Pompays					6000
Tecuge					

Quelle solution allez-vous adopter pour obtenir un réseau routier minimal au moindre coût ? On entend par réseau routier minimal, un réseau permettant d'aller de n'importe quelle ville vers n'importe quelle autre.

Correction page 51

Exercice 1.7.4 (Reconstruction (suite))

Le ministre de l'industrie intervient alors et vous reproche d'avoir une vue à court terme et qu'il faut aussi prendre en compte le fait que toutes les ressources de production sont maintenant concentrées à Coudebolle.

Il vous transmet donc les coûts de transport (par tonne) estimés entre les différentes villes.

	Coudebolle	Borivage	Ollala	Pompays	Tecuge
Coudebolle		3	7		7
Borivage	4		2		4
Ollala	6	4		2	3
Pompays			3		6
Tecuge	8	8	6	8	

(Vous aurez remarqué que le coût de transport de A vers B n'est pas obligatoirement le même que de B vers A).

En supposant que le réseau routier est complet (toutes les routes possibles existent), optimisez les coûts de transport à partir de Coudebolle vers toutes les villes.

Correction page 51

Exercice 1.7.5 (Reconstruction (fin))

Comme tout ministre du budget, vous tentez de concilier les intérêts de l'état (reconstruire au coût minimum) et des acteurs économiques (ici, coûts de transport minimum).

Quelle solution adopteriez-vous et pourquoi ?

Quel sera le surcoût par rapport à ce que vous avez calculé à la première question ?

Correction page 52

Exercice 1.7.6 (Préparation des secours)

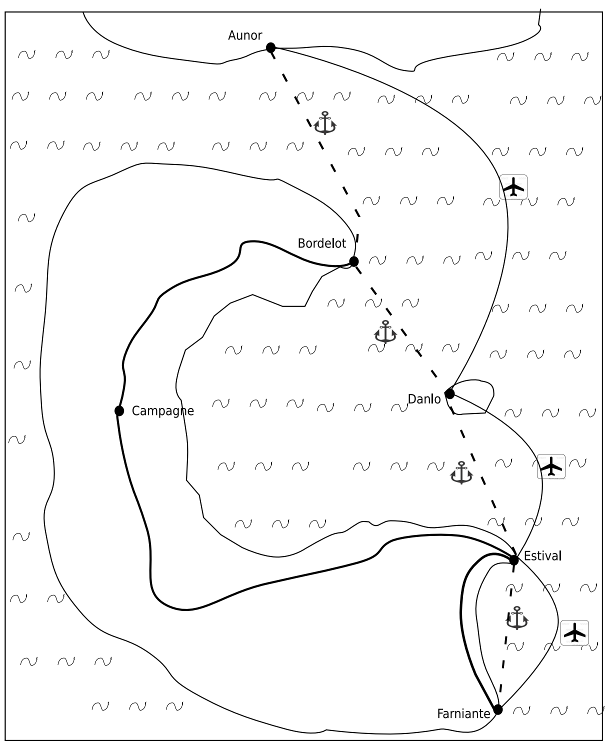


FIG. 1.5 – Les infrastructures de transports

Un pays tropical doit faire face avec ses propres et maigres moyens à un cyclone en approche. Les prévisions indiquent que le cyclone arrivera sur le sud d'une île du pays et qu'il risque de dévaster la région dont la ville principale, Farniente est hautement touristique. Le gouvernement a fait évacuer la zone et décide de préparer des équipes de secours pour réparer au plus vite les infrastructures après le passage du cyclone. Il veut pouvoir disposer d'un maximum de personnel qualifié dans une ville hors du chemin du cyclone, mais à proximité : Estival. Actuellement ce personnel est cantonné dans la capitale : Aunor.

Le gouvernement dispose de quelques jours pour transporter le plus de personnes possible depuis la capitale jusqu'à Estival. Pour cela il dispose de plusieurs moyens de transport (voir figure 1.5) :

– Par bateau : Le voyage se fait en trois étapes. Depuis Aunor jusqu'à Bordelot la capacité de transport sera au total de 1000 personnes. Depuis Bordelot jusqu'à Danlo la capacité de transport sera au total de 1000 personnes. Et depuis Danlo jusqu'à Estival la capacité totale de transport sera de 700 personnes.
– Par avion : Le voyage se fait en deux étapes. Depuis Aunor jusqu'à Danlo la capacité de transport sera de 1000 personnes. Et depuis Danlo jusqu'à Estival la capacité totale de transport sera de 700 personnes.
– Par route : Une fois arrivée à Bordelot, une route mène en deux étapes à Estival en passant par Campagne. Entre Bordelot et Campagne la capacité totale sera de 1000 personnes. Entre Campagne et Estival la capacité totale sera de 700 personnes.

Toutes ces capacités de transports prennent en compte la totalité des gens que l'on peut transporter sur les quelques jours de préparation. Elle concernent des horaires qui permettent des correspondances pour acheminer les personnes jusqu'à Estival.

Combien de personnes au maximum sera-t-il possible d'acheminer depuis Aunor jusqu'à Estival ?

Pour chaque étape en bateau, le coût de transport d'une personne est de 1 galet (l'unité monétaire du pays). Pour chaque étape en avion le coût monétaire de transport d'une personne est de 6 galets. Pour chaque étape de route le coût monétaire de transport d'une personne est de 2 galets. Le gouvernement dispose d'un budget de 5400 galets pour le transport des personnes.

Combien pourra-t-il en transporter ?

Correction page 53

Exercice 1.7.7 (L'or bleu (premier problème du contrôle de septembre 2008))

Une société exploite une source d'eau de montagne. Pour cela elle possède deux usines. La première est construite directement à la source et a une capacité d'embouteillage de 6 millions de litres par mois. La seconde est construite dans la vallée. Elle est alimentée par une conduite d'eau depuis la source et a une capacité d'embouteillage de 4 millions de litres par mois.

Un gros client lui achète toute sa production qui doit être livrée jour après jour dans ses entrepôts. Pour cela la société qui exploite les eaux utilisent plusieurs moyens : soit la route de bout en bout, soit la route puis le train. La même gare est utilisée par les 2 usines.

– Sa capacité de transport par route de la première usine jusqu'aux entrepôts est de 6 millions de litres par mois.
– Sa capacité de transport par la route de la seconde usine jusqu'aux entrepôts est de 2 millions de litre par mois.
– Sa capacité de transport par la route de la première usine jusqu'à la gare est de 4 millions de litre par mois.
– Sa capacité de transport par la route de la seconde usine jusqu'à la gare est de 4 millions de litre par mois.
– Sa capacité de transport par train depuis la gare jusqu'aux entrepôts est de 4 millions de litre par mois.

Combien de litres par mois cette société est-elle en mesure de fournir à son client ?

– Le coût d'embouteillage dans chaque usine est de 2 centimes par litre.
– Le coût de transport par la route de la première usine aux entrepôts est de 10 centimes par litre.
– Le coût de transport par la route de la seconde usine aux entrepôts est de 6 centimes par litre.
– Le coût de transport par la route de la première usine à la gare est de 4 centimes par litre.
– Le coût de transport par la route de la seconde usine à la gare est de 2 centimes par litre.
– Le coût de transport par train de la gare aux entrepôts est de 2 centimes par litre.

Quel est le coût minimal pour produire et acheminer la livraison calculée dans la question précédente ?

Correction page 57

Exercice 1.7.8 (Un zeste de citron (second problème du contrôle de septembre 2008))

Une société exploite une source d'eau de montagne. Pour cela elle possède deux usines. La première est construite directement à la source et a une capacité d'embouteillage de 6 millions de litres par mois. La seconde est construite dans la vallée. Elle est alimentée par une conduite d'eau depuis la source et a une capacité d'embouteillage de 4 millions de litres par mois.

Pour améliorer ses marges elle a transformé la production de sa seconde usine en lui ajoutant un petit goût d'agrume. Ainsi elle dégage une marge (transports inclus) de 10 centimes par litre pour la première usine, et de 15 centimes par litre pour la seconde usine.

Un gros client lui achète toute sa production qui doit être livrée jour après jour dans ses entrepôts. Pour cela la société qui exploite les eaux utilisent plusieurs moyens : soit la route de bout en bout, soit la route puis le train. La même gare est utilisée par les 2 usines.

- Sa capacité de transport par route de la première usine jusqu'aux entrepôts est de 4 millions de litres par mois.
- Sa capacité de transport par route de la seconde usine jusqu'aux entrepôts est de 2 millions de litres par mois.
- Sa capacité de transport par train depuis la gare jusqu'aux entrepôts est de 3 millions de litre par mois.
- Elle dispose de toute la capacité nécessaire pour acheminer les bouteilles des usines jusqu'à la gare.

Cette société aimerait dégager une marge maximale.

Quel type de problème reconnaissez-vous ? Modélisez le.

Quelle marge maximale cette société des eaux peut-elle dégager chaque mois ? Comment doit-elle gérer et acheminer sa production pour y arriver ?

Correction page 60.

Exercice 1.7.9 (La valeur des déchets (second problème du contrôle d'avril 2009))

Après l'élargissement des couloirs Gorog se retrouve avec des tonnes de gravats en stock :

- 90 tonnes de roches friables.
- 30 tonnes de roches dures.
- 54 tonnes de roches intermédiaires.

Mais tout a une valeur. Il a trouvé différentes offres d'achat pour ses gravats, mais à condition qu'ils soient livrés dans certaines proportions. Voici les 3 types de lots qu'il peut vendre :

- Un mélange de 60% de roches friables et 40% de roches dures se vend 100 pièces d'or la tonne.
- Un mélange de 20% de roches friables, 20% de roches dures et 60% roches intermédiaires se vend 80 pièces d'or la tonne.
- Et les gravats de roches intermédiaires pures se vendent 50 pièces d'or la tonne.

Quel gain maximal Gorog peut-il tirer de ses gravats ?

Gorog utilise les gravats de roches friables pour l'exploitation de sa mine. Il aimerait donc en conserver un peu pour lui.

Lui reste-t-il des gravats de roches friables après la vente optimale ? Existe-t-il une autre vente lui donnant le même gain optimal mais lui laissant d'avantage de gravats de roches friables ? Et si oui, comment doit-il répartir les lots pour garder un maximum de roches friables tout en conservant le gain maximal ? Combien de tonnes de roches friables lui reste-t-il alors ?

Correction page 62.

Exercice 1.7.10 (Choisir les bonnes voies (premier problème du contrôle d'avril 2010))

Une entreprise possède deux usines (une à Amiens, l'autre à Rouen) et deux magasins pour vendre ses produits (un à Paris, l'autre au Havre). Les capacités de production des usines savent s'adapter au besoin, par contre les capacités de transport sont limités :

- L'entreprise utilise la route pour transporter la production d'Amiens. Elle peut l'acheminer vers Paris ou le Havre, mais en tout pas plus de 120 containers par mois. De plus les difficultés de transport qu'elle rencontre sur l'autoroute A16 ne lui permettent pas d'acheminer plus de 50 containers par mois entre Amiens et Paris.

– L'entreprise utilise la Seine pour transporter la production de Rouen. Elle peut l'acheminer vers Paris ou le Havre, mais en tout pas plus de 110 containers par mois.

Ses ventes sont très régulières, et elle sait qu'elle ne peut pas vendre plus de 120 containers dans son magasin du Havre, et pas plus de 100 dans son magasin de Paris.

Les marges qu'elle obtient sur chaque container de marchandise dépend de son lieu de production, de son mode de transport et de son lieu de vente.

– Un container de marchandise produit à Amiens et vendu au Havre dégage une marge de $20\,000$ euros.
– Un container de marchandise produit à Amiens et vendu à Paris dégage une marge de $10\,000$ euros.
– Un container de marchandise produit à Rouen et vendu au Havre dégage une marge de $50\,000$ euros.
– Un container de marchandise produit à Rouen et vendu à Paris dégage une marge de $20\,000$ euros.

Comment lui conseillez-vous de répartir sa production et ses ventes pour dégager une marge maximale ?

Est-ce que cette solution lui permet d'exploiter en totalité ses capacités de ventes de ces deux magasins ? Sinon lesquelles sont sous-exploitées ?

Correction page 64.

Exercice 1.7.11 (Les vignes de l'abbaye (premier problème du contrôle de juin 2010))

Une abbaye de Bourgogne possède 2 hectares de vignes pour sa propre consommation. Mais comme elle produit plus de vin qu'elle n'en a besoin, elle commercialise le surplus.

Son vignoble contient deux cépages différents : 1 hectare de pinot noir, et 1 hectare de gamay. Cette année les vendanges ont permis la récolte de $2\,400$ litres de pinot noir et de $6\,000$ litres de gamay.

Pour son usage propre, l'abbaye met d'entrée de coté 400 bouteilles (1 bouteille = 0,75 litre) de pinot noir et $4\,000$ bouteilles de gamay.

Elle compte commercialiser le vin restant sous la forme de deux vins :

– Des bouteilles de pinot noir : ce vin est composé uniquement de pinot noir. Chaque bouteille (0,75 litre) se vendra à 30 euros.
– Des bouteilles de passe-tout-grain : ce vin est composé d'un tiers de pinot noir et deux tiers de gamay. Chaque bouteille (0,75 litre) se vendra à 12 euros.

Comment cette abbaye doit repartir le vin restant pour gagner le plus d'argent possible ?

Cette répartition laisse-t-elle encore du vin sans usage ? Si oui lequel ?

Correction page 66.

Exercice 1.7.12 (Barcelone ou Dublin ? (second problème du contrôle de juin 2010))

Une agence de voyage fidélise sa clientèle en délivrant des «Hermès» à chaque voyage acheté. Elle propose ensuite d'échanger ces Hermès contre des voyages. Chaque semaine elle offre ainsi une liste de trajets possibles avec leur coût en Hermès.

Un client bordelais qui a accumulé une belle somme d'Hermès compte en utiliser une partie pour se payer un voyage. Deux destinations le tente : soit Dublin, soit Barcelone. Il consulte les propositions de voyages de la semaine, et voici la liste des trajets qu'il a retenus pour aller à destination en partant de Bordeaux (dans chaque ville les correspondances sont réalisables) :

– En avion il peut faire :

Bordeaux->Madrid : pour 45 Hermès.

Paris->Londres : pour 25 Hermès.

Paris->Barcelone : pour 50 Hermès.

Madrid->Barcelone : pour 25 Hermès.

Toulouse->Barcelone : pour 15 Hermès.

Toulouse->Dublin : pour 30 Hermès.

Londres->Dublin : pour 25 Hermès.

Bruxelles->Dublin : pour 30 Hermès.

Bruxelles->Barcelone : pour 25 Hermès.

– En train il peut faire :

Bordeaux->Paris : pour 20 Hermès.

Paris->Londres : pour 30 Hermès.

Paris->Bruxelles : pour 20 Hermès.

Quelle destination doit-il choisir pour minimiser sa dépense d'Hermès. Combien va-t-il devoir en dépenser et en prenant quels trajets ?

Correction page 68.

Exercice 1.7.13 (Faire feu de tout bois (premier problème du contrôle de septembre 2010))

Au 19ème siècle un exploitant d'une forêt utilise la rivière qui traverse son exploitation pour acheminer son bois jusqu'au lieu de vente. Pour cela il construit des embarcations avec le propre bois qu'il coupe pour ensuite charger le bois restant et descendre la rivière.

La section de forêt qu'il exploite lui permet d'obtenir deux types de bois :
- Un bois de bonne qualité qui servira à la construction ou à la tonnellerie. Cette année, il estime pouvoir vendre ce bois avec une marge de 15 kF la tonne.
- Un bois de piètre qualité qui servira de bois de chauffage. Cette année, il estime pouvoir vendre ce bois avec une marge de 3 kF la tonne.

Son équipe d'ouvrier sait construire deux types d'embarcation :
- Une embarcation de qualité, faite pour durer. Pour la construire il faut utiliser 1 tonne de bois de qualité. Elle peut charger 5 tonnes de bois. Une fois la rivière descendue, elle sera revendue avec une marge de 30 kF.
- Une embarcation de piètre qualité, faite pour ne descendre qu'une fois la rivière. Pour la construire il faut utiliser 1 tonne de bois de piètre qualité. Elle peut charger 10 tonnes de bois. Une fois la rivière descendue, elle sera revendue avec une marge 2 kF.

Cette année la section exploitée devrait permettre de couper 25 tonnes de bois de bonne qualité, et 45 tonnes de bois de piètre qualité.

Sachant que l'exploitant n'a assez d'ouvriers que pour faire l'équipage de 10 embarcations au maximum, que lui conseillez-vous de construire pour acheminer son bois jusqu'au lieu de vente et obtenir une marge maximale.

Est-ce que cette solution lui permet de descendre tout son bois ? Sinon quel bois reste sans usage et en quelle quantité ?

Correction page 69.

Exercice 1.7.14 (En trois dimensions (second problème du contrôle de septembre 2010))

Septembre							Octobre							Novembre						
lu	ma	me	je	ve	sa	di	lu	ma	me	je	ve	sa	di	lu	ma	me	je	ve	sa	di
		-80									-50							-15		
		1	2	3	4	5					1	2	3	1	2	3	4	5	6	7
-75					-70				-45							-10				
6	7	8	9	10	11	12	4	5	6	7	8	9	10	8	9	10	11	12	13	14
			-65				-40					-35		-5					J	
13	14	15	16	17	18	19	11	12	13	14	15	16	17	15	16	17	18	19	20	
	-60					-55				-30										
20	21	22	23	24	25	26	18	19	20	21	22	23	24							
								-25					-20							
27	28	29	30				25	26	27	28	29	30	31							

Un petit studio de développement prévoit de sortir un jeu utilisant la 3D pour noël prochain. Ses dirigeants veulent organiser un mini show de lancement le samedi 20 novembre. Mais l'organisation de ce genre d'évènement n'est pas leur spécialité, et ils l'ont confiée à une toute petite agence de publicité qui veut en profiter pour se faire un nom.

Cette agence doit trouver le lieu, organiser la réception, en faire la publicité pour y faire venir le grand public et les journalistes. Ils doivent proposer un planning aux dirigeants du studio de jeu, sachant que ces derniers n'ont donné que trois obligations :

– Tout doit être totalement prêt le 19 novembre au soir.
– Ils veulent qu'une réunion de lancement soit organisée avec tous les gens qui vont participer à l'organisation pour être sûrs de bien être compris.
– Ils veulent qu'une seconde réunion soit organisée pour sélectionner et valider les choix d'organisation avant que la machine ne soit lancée de façon irréversible.

L'agence de publicité n'est composée que de deux indépendants : un graphiste, et un communiquant. Le graphiste prévoit de faire des flyers avec une image 3D gravée dessus pour pouvoir faire la publicité du show auprès du grand public. De son coté le communiquant compte utiliser son carnet d'adresse pour sélectionner les lieux possibles, prévenir les journalistes, et trouver le traiteur qui gérera le cocktail.

Pour ce projet, ils comptent bien travailler 7 jours sur 7, et voici les diverses grandes tâches qu'ils ont identifiées :

– Le projet débutera par la réunion de lancement étalée sur une journée.
– Ensuite, le graphiste préparera diverses maquettes du flyer, tandis que le communiquant prendra des options pour réserver diverses salles. Il contactera aussi divers traiteurs pour obtenir des propositions de cocktail. Le graphiste prévoit 10 jours de travail pour ses maquettes, et le communiquant 16 jours.
– Arrive alors la réunion de validation (1 journée). Le lieu, le traiteur, et la maquette devront être choisis ce jour là.
– Le graphiste prévoit alors 5 jours pour finaliser le flyer. Il le fera alors imprimer par une imprimerie spécialisée dans les flyers 3D. Cette impression prendra 1 journée.
– De son coté le communiquant prévoit deux tâches qu'il sait pouvoir mener en parallèle. D'un coté il se donne 11 jours pour trouver et sélectionner toutes une série d'évènements grand public où il pourra organiser une distribution de flyers. De l'autre il lui faudra une période de 20 jours pour contacter et convaincre journalistes et attachés de presse d'assister à ce show.
– Une fois les flyers imprimés, et les lieux de distributions sélectionnés, la campagne d'annonce grand public devra durer au moins 3 semaines (21 jours).

À quelle date au plus tard devra se faire la réunion de lancement de ce projet ?

On va supposer que le projet commencera à cette date.

L'imprimerie qui sait graver les flyers en 3D n'est pas disponible en permanence. On propose au graphiste de choisir un jour entre le 11 et le 15 octobre ou entre le 25 et 29 octobre. Cela est-il possible avec les dates retenus ? Si oui quelles sont les dates possibles de réservation de cette imprimerie ?

Correction page 71.

Exercice 1.7.15 (Que semer (premier problème du contrôle d'avril 2011))

Un agriculteur doit choisir la culture de 200 hectares de ses champs pour l'année qui arrive. Il peut y faire pousser du maïs et du colza. La maïs rapporte plus que le colza (il prévoit un gain de 600 euros à l'hectare pour le maïs contre 500 euros à l'hectare pour le colza). Mais il s'est engagé à respecter diverses contraintes environnementales :

– Il doit limiter ses apports de phosphates. Concrètement cela signifie qu'il ne pourra pas utiliser plus de 30 tonnes d'engrais en tout et pour tout.
– Il doit limiter sa consommation d'eau. Il ne devra pas puiser plus de $200\,000 m^3$ d'eau pour l'arrosage de ses cultures.

Pour une année normale :

– il doit puiser $2\,000\,m^3$ d'eau et utiliser $100\,kg$ d'engrais par hectare de maïs.
– il doit puiser $1\,000\,m^3$ d'eau et utiliser $250\,kg$ d'engrais par hectare de colza.

Comment doit-il répartir ses cultures pour espérer un gain maximal ? Quel est ce gain ?

Est-ce que cette solution lui demande d'utiliser les 200 hectares de terre à sa disposition[2] ?

Correction page 72.

[2] Pour cette question on vous demande d'interpréter les résultats donnés par la technique utilisée, et non pas de refaire des calculs pour obtenir ce résultat

Exercice 1.7.16 (Hivernage (second problème du contrôle d'avril 2011))

Un éleveur de vaches doit prévoir la production, l'achat, le transport et le stockage du fourrage pour l'alimentation de son bétail pour l'hiver prochain.

Il estime qu'il pourra lui même récolter en juin 70 tonnes de fourrage.

Par ailleurs il a obtenu à bon prix l'achat de fourrage auprès de deux autres producteurs.

- Le premier pourra lui fournir fin juin jusqu'à 30 tonnes de fourrage. Mais c'est à l'éleveur de les acheminer jusqu'à son exploitation et de les stocker en attendant l'hiver.
- Le second lui propose jusqu'à 120 tonnes de fourrage. Il pourra prendre cette livraison en deux parties. La première fin juin qu'il devra stocker lui même durant l'été et l'automne et la seconde au début de l'hiver. C'est à l'éleveur de venir prendre livraison du fourrage.

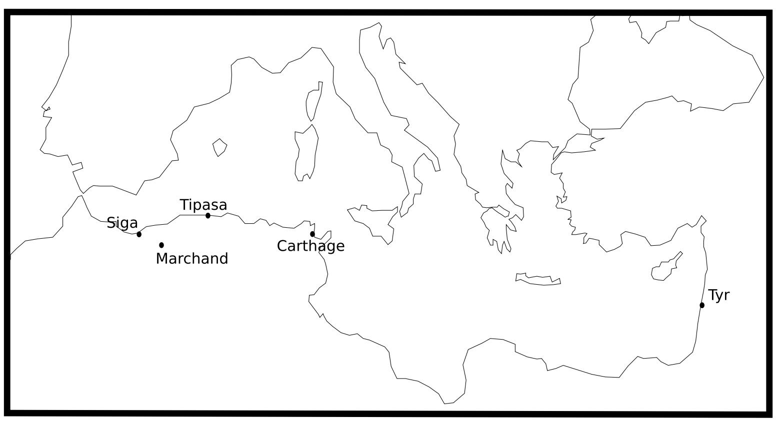
L'éleveur ne peut stoker durant l'été et l'automne que 130 tonnes de fourrage. Au début de l'hiver, il récupère un silo supplémentaire qui lui permet de monter jusqu'à un total de 250 tonnes de stockage. Fin juin, il aura les moyens de transporter depuis les vendeurs jusqu'à son exploitation 50 tonnes de fourrage. Au début de l'hiver il pourra en transporter 80 tonnes.

Sachant qu'une vache consomme environ 2 tonnes de fourrage durant l'hiver, combien de vaches au maximum sera-t-il en mesure de nourrir durant l'hiver prochain ? Comment devra-t-il procéder pour cela ?

Correction page 73.

Exercice 1.7.17 (Course contre la montre (premier problème du contrôle de septembre 2011))

FIG. 1.6 – Bassin méditerranéen



Il ne reste que 65 jours à un marchand phénicien pour honorer une commande de métaux précieux. Il vient enfin de trouver ce qu'il cherchait dans l'arrière pays de Siga. Mais la livraison doit être faite à Tyr. Il faut donc acheminer cette cargaison le plus rapidement possible. Pour cela diverses routes s'offrent à lui. Il peut déjà acheminer sa cargaison jusqu'à la côte grâce à trois routes différentes :

- Une caravane peut acheminer cette cargaison jusqu'à Siga en 2 jours.
- Une caravane peut acheminer cette cargaison jusqu'à Tipasa en 10 jours.
- Une caravane peut acheminer cette cargaison jusqu'à Carthage en 35 jours.

Une fois arrivée dans ces ports diverses options sont possibles :

- Une fois à Siga il peut soit utiliser un de ses bateaux qui pourrait naviguer vers Tyr, soit louer un bateau pourrait caboter jusqu'à Tipasa. Son propre bateau est actuellement en réparation. Il estime que les réparations plus le voyage ajouteraient 60 jours de voyage à sa cargaison. S'il choisit le cabotage, sa cargaison pourra être en 6 jours à Tipasa.
- Une fois à Tipasa, une seule possibilité lui est offerte. Il peut louer un bateau pour caboter jusqu'à Carthage. Cela lui prendra 10 jours.
- À Carthage il dispose d'un de ses bateaux qui peut naviguer vers Tyr. En cette saison, il estime pouvoir faire ce voyage en 35 jours.

En faisant confiance dans ces diverses estimations, quelle route doit choisir le marchand pour arriver au plus vite à Tyr ? Les voyages maritimes étant assez aléatoires, de combien de jours de marge ce marchand dispose-t-il pour honorer sa commande dans les temps ?

Correction page 75.

Chapitre 2

Corrections

2.1 Ordonnancement

2.1.1 Correction de l'exercice 1.1.1 de la page 5

Suite à ces explications très claires de votre collègue, la première étape va être d'identifier toutes les tâches et leurs dépendances.

Commençons par l'aspect logistique, qui ne dépend pas de l'aspect scientifique :

Tâche A : Choix du comité d'organisation. Sans lui, aucune tâche logistique ne peut se faire. Durée : 1 semaine.

Tâche B : Choix de l'hôtel. Il est fait par le comité d'organisation : après **A**. Durée : 3 semaines.

Tâche C : Choix des menus et prix des repas. Il faut avoir choisi l'hôtel : après **C** : Durée : 1 semaine.

Tâche D : Choix du lieux du banquet. Il est fait par le comité d'organisation : après **A**. Durée : 2 semaines.

Tâche E : Détermination du prix payé par les conférenciers. Cela dépend du banquet et des menus : après **C** et **D**. Durée : 1 semaine.

Traitons maintenant l'aspect scientifique :

Tâche F : Choix du comité de programme. De lui dépend tout l'aspect scientifique. Durée : 3 semaines.

Tâche G : Première réunion. Il faut que le comité scientifique et l'hôtel soient choisis : après **B** et **F**. Durée : 0 semaine.

Tâche H : Appel et attente des communications : Cette tâche arrive après la première réunion et la détermination du prix : après **G** et **E**. Durée : 8 semaines.

Tâche I : Sélection des articles. Elle arrive après les réponses à l'appel : après **H**. Durée 8 semaines.

Tâche J : Second réunion. Elle suit la sélection des articles et arrive après le choix du lieux de banquet : après **I** et **D**. Elle doit arriver au moins 3 semaines avant le colloque : durée 3 semaines.

Tâche K : Mise en forme des articles sélectionnés. Elle arrive après la sélection des articles : après **I**. Durée 4 semaines.

Tâche L : Impression des «Proceedings». Elle arrive après la mise en forme des articles : après **K**. Durée 6 semaines.

Tâche M : Réception des livres. Elle suit l'impression : après la tâche **L**. Il faut les recevoir au moins 1 semaine avant le colloque : durée 1 semaine.

Tâche ω : Le début du colloque. Il faut que tous les aspects logistiques soit réglés que le programme final soit fixé (deuxième réunion), et que les livres soient reçus : après **E**, **J** et **M**.

Après avoir ajouté une tâche fictive α de durée nulle placée avant les tâches sans dépendances, on obtient le graphe de la figure 2.1

On peut simplifier un peu ce graphe. Lorsqu'on a un chemin $X \to Y \to Z$, avec Y seul successeur de X, et Z seul successeur de Y, on peut supprimer Y, et remplacer le chemin par $X \to Z$. La durée du nouvel

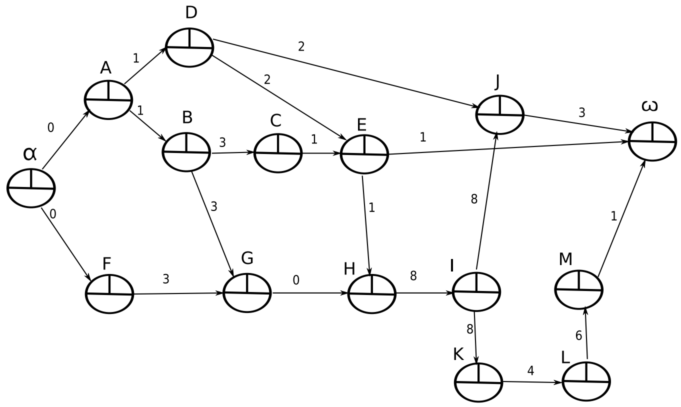


FIG. 2.1 – Le graphe des tâches

arc reçoit la somme des durées des deux anciens. À la fin pour retrouver la date au plus tôt et la date au plus tard de Y, il suffira d'ajouter la durée de la tache X aux dates de X (et donc la marge totale de Y sera exactement la même que celle de X).

Donc une fois simplifié on obtient le graphe de la figure 2.2 :

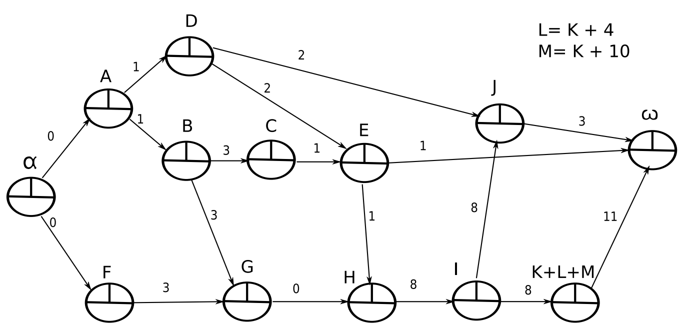


FIG. 2.2 – Le graphe simplifié des tâches

Maintenant, il suffit de mettre en œuvre le potentiel-tâches pour avoir la réponse à toutes les questions. Cela donne le graphe de la figure 2.3

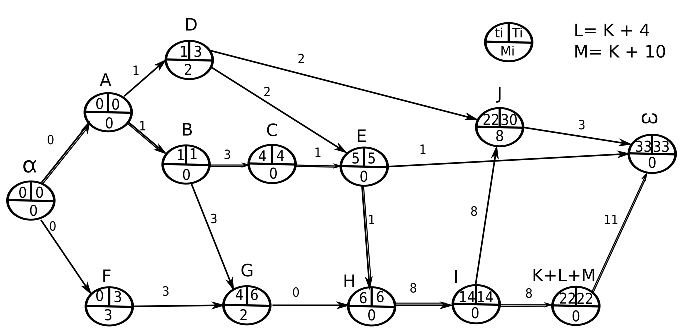


FIG. 2.3 – Le résultat du potentiel-tâches

La durée minimale du projet est donc de 33 semaines. Vous devez à tout prix commencer 33 semaines avant le 17 décembre c'est à dire avant le 30 avril.

Vous avez une marge de 2 semaines sur la date de la première réunion (tâche G) et 8 semaines sur la date de la seconde (tâche J).

2.1.2 Correction de l’exercice 1.1.2 de la page 6

Apollodore et Aristodème se demandent comment organiser leurs tâches pour être le plus efficace possible. Il s’agit donc évidemment d’un problème d’ordonnancement. La question porte juste sur le choix entre deux scénarios possibles. Il suffit donc de calculer le temps pris par les deux scénarios et de choisir le plus rapide. Il n’est même pas utile de trouver les tâches critiques, donc un simple diagramme de Gantt suffira. Bien sûr un potentiel-tâches répond tout aussi bien à la question. Pour cette correction nous allons faire un diagramme de Gantt.

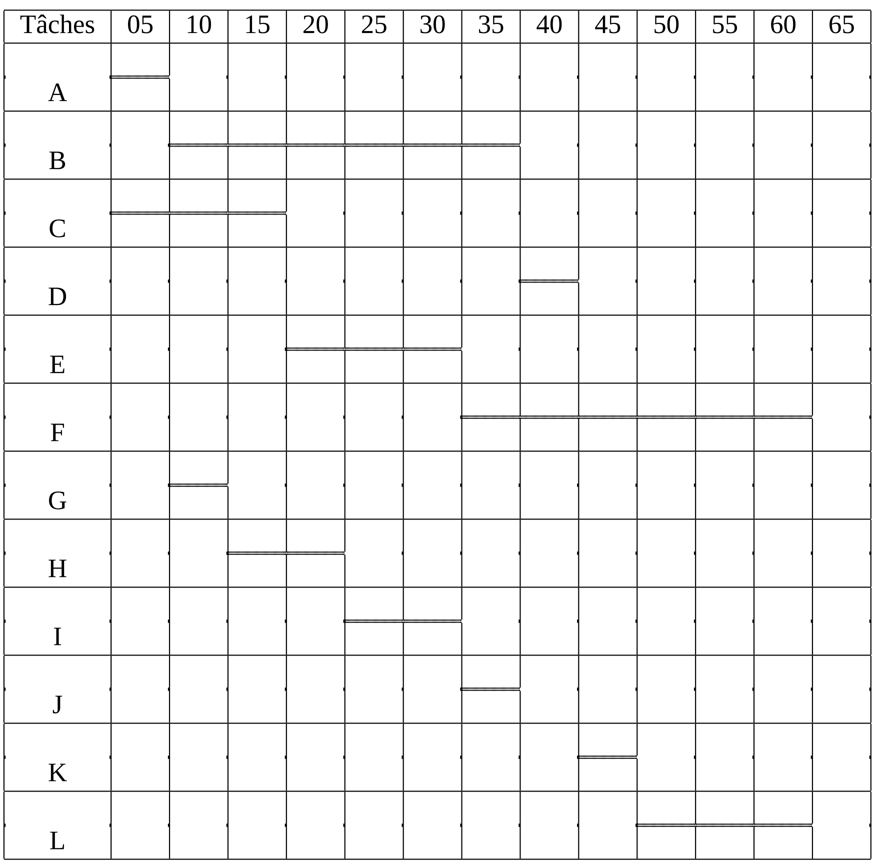
La première étape consiste à trouver les dépendances des tâches.

Pour le premier scénario, Apollodore doit commencer par préparer la pâte brisé avant de faire la tarte elle même. Aristodème étalera cette pâte après la préparation de crème anglaise.

On obtient donc les dépendances suivantes :

Nom de la tâche	Description	Durée (en minute)	dépendances
A	Préparer la pâte	5	
B	Laisser reposer la pâte	30	après A
C	Préparer la crème	15	
D	Étaler la pâte	5	après B et C
E	Laisser refroidir la crème	15	après C
F	Mettre la crème au réfrigérateur	30	après E
G	Préparer le moule	5	après A
H	Préparer les pommes	10	après G
I	Mettre en place des pommes	10	après H
J	Caraméliser les pommes	5	après I
K	Placer la pâte	5	après D et J
L	Cuisson	15	après K

Traduit sous la forme d’un diagramme de GANTT, on obtient :



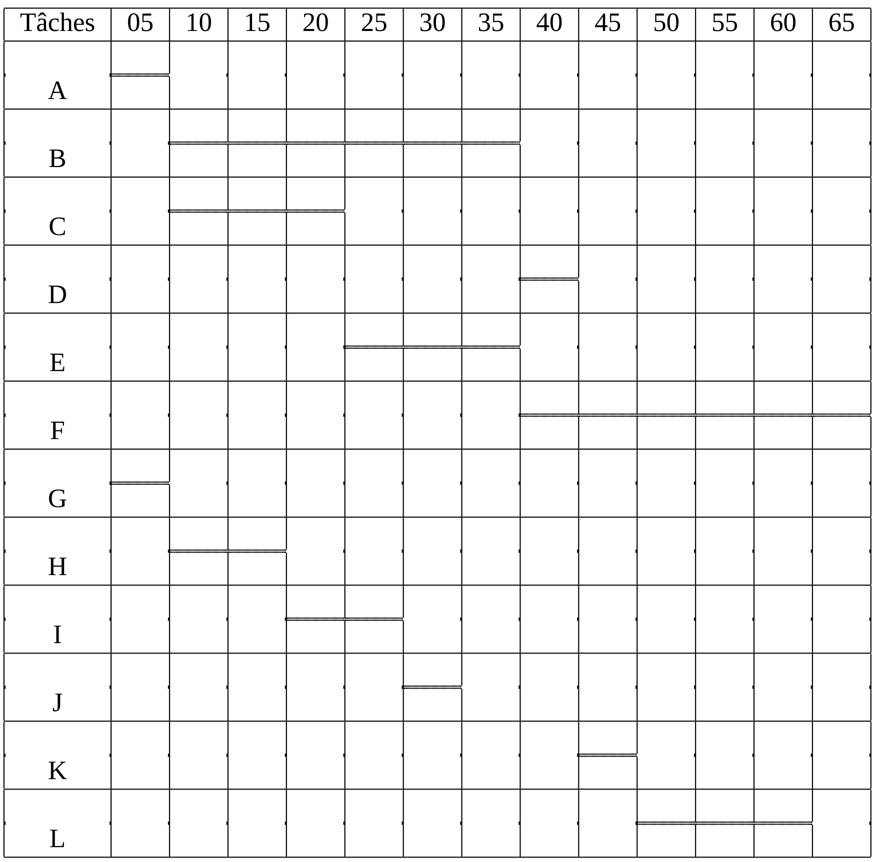
Donc avec ce scénario, en 60 minutes tout est prêt.

Regardons maintenant le second scénario : seule la tache A change d'acteur. Donc Apollodore peut commencer la tâche G immédiatement, par contre Aristodème doit reporter le début de la tâche C après la fin de la tache A.

On obtient les dépendances suivantes :

Nom de la tâche	Description	Durée (en minute)	dépendances
A	Préparer la pâte	5	
B	Laisser reposer la pâte	30	après A
C	Préparer la crème	15	après A
D	Étaler la pâte	5	après B et C
E	Laisser refroidir la crème	15	après C
F	Mettre la crème au réfrigérateur	30	après E
G	Préparer le moule	5	
H	Préparer les pommes	10	après G
I	Mettre en place des pommes	10	après H
J	Caraméliser les pommes	5	après I
K	Placer la pâte	5	après D et J
L	Cuisson	15	après K

Traduit sous la forme d'un diagramme de GANTT, on obtient :



Donc avec ce second scénario il faut 65 minutes pour que tout soit prêt.

Apollodore et Aristodème devraient suivre la premier scénario pour terminer leur préparation le plus vite possible.

2.1.3 Correction de l'exercice 1.1.3 de la page 6

Un examen rapide des emplois du temps innocente Frère Thomas qui n'a pas eu une minute de libre de la matinée. Par contre aussi bien Frère Daniel que Frère Yves ont profité de 30 minutes de temps libre.

A priori plus que nécessaire pour commettre le méfait. Mais pour cela il faut qu'ils aient eu au moins 20 minutes d'affilée. Le seul moyen de vérifier cela consiste à calculer leurs marges sur chacune de leurs tâches. Il s'agit donc d'un problème d'ordonnancement avec l'usage d'un potentiel-tâches.

La première étape de la modélisation consiste à identifier toutes les tâches, leur chronologie, et leur durée. Les trois frères participent à 6 tâches durant la matinée :

Jardin : La matinée de Frère Daniel et de Frère Yves commence par la récolte au jardin des légumes et plantes médicinales. Cette tâche dure 2h.

Courses : La matinée de Frère Thomas commence par des courses. Cette tâche dure 2h15.

Cuisine : Frère Daniel et Frère Thomas continuent leur journée en cuisine. Cette tâche dure 1h15. Elle arrive donc après celles du **Jardin** (Daniel doit avoir terminé sa premier tâche) et des **Courses** (Thomas doit avoir terminé sa première tâche).

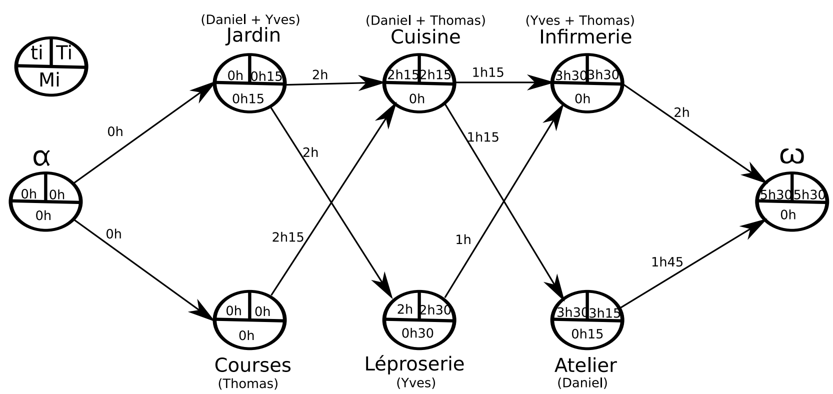
Léproserie : Frère Yves continue sa matinée en allant à la léproserie. Cela lui prend 1h. Cette tâche arrive donc après celle du **Jardin** (Yves doit avoir terminé sa première tâche).

Infirmerie : Frère Yves et Frère Thomas terminent leur matinée à l'infirmerie. Ils y passent 2h. Cette tâche arrive donc après celles de la **Cuisine** (Thomas doit avoir terminé sa deuxième tâche) et celle de la **Léproserie** (Yves doit avoir terminé sa deuxième tâche).

Atelier : Frère Daniel termine sa matinée à l'atelier pour faire ses décoctions. Il y passe 1h45. Cette tâche arrive donc après celle de la **Cuisine** (Daniel doit avoir terminé sa deuxième tâche).

On applique ensuite un potentiel-tâches à ce problème :

FIG. 2.4 – Potentiel-tâches



La seule tâche qui permet de dégager plus de 20 minutes de temps d'affilée est celle de la léproserie. Elle permet en effet de dégager 30 minutes de marge. Seul Frère Yves est affecté à cette tâche. C'est donc lui l'auteur du vol du vin de messe.

2.2 Arbre

2.2.1 Correction de l'exercice 1.2.1 de la page 7

Aucun doute possible pour cette exercice, il s'agit de trouver un arbre de recouvrement minimal. De plus le graphe est presque déjà dessiné par le plan de la commune. Il faut juste penser à considérer tous points déjà reliés par une route en bon état comme étant un seul et même sommet du graphe.

Donc le réseau du Centre-Bourg forme un seul sommet. Il est relié aux Fays par ch1, à la Bergerie par ch3, à la Dauberie par ch9, à la Croisée par ch8 et enfin aux Haies par ch11.

De plus les Iris et la Croisée ne forme qu'un seul et même sommet. Pour la suite de ce problème, on ne parlera plus que du sommet «la Croisée» relié aux Haies par ch13 et aux Joncs par ch15.

En nommant «CB» le sommet du Centre-Bourg et les habitations par leur initiale, on obtient la matrice d'adjacence suivante (les distances sont exprimées en hectomètre) :

	CB	A	B	C	D	E	F	G	H	J
CB										
A										
B	ch3=14	ch5=14								
C	ch8=15	ch7=13	ch6=16							
D	ch9=14									
E										
F	ch1=5	ch4=8	ch2=12							
G					ch10=5					
H	ch11=14			ch13=13		ch14=15		ch12=16		
J				ch15=17		ch16=13				

Le même graphe dessiné donne la figure 2.5.

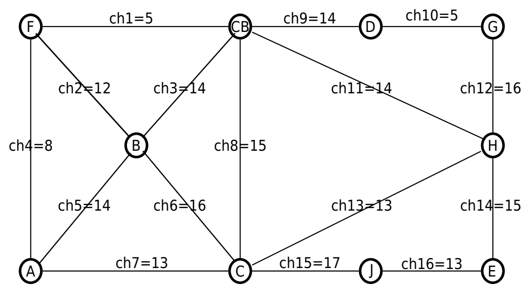


FIG. 2.5 – Le réseau de chemin de la commune

On va par exemple utiliser l'algorithme de Prim en utilisant les matrices. La premier sommet (qui peut être choisi au hasard) placé va être «CB».

	<u>CB</u>	A	B	C	D	E	F	G	H	J
<u>CB</u>										
A										
B	ch3=14									
C	ch8=15									
D	ch9=14									
E										
F	**ch1=5** **OUI**									
G										
H	ch11=14									
J										

La plus petite arête partant de «CB» est celle allant vers «F». On ajoute donc «F» à notre ensemble de sommets traités. On calcule le nouveau cocycle (on ajoute la ligne et la colonne de «F» mais en supprimant les arêtes reliées aux éléments déjà dans l'ensemble).

	<u>CB</u>	A	B	C	D	E	<u>F</u>	G	H	J
<u>CB</u>										
A										
B	ch3=14									
C	ch8=15									
D	ch9=14									
E										
<u>F</u>	~~**ch1=5**~~ **OUI**	**ch4=8** **OUI**	ch2=12							
G										
H	ch11=14									
J										

Dans le nouveau cocycle, la plus petite arête est celle allant de «F» à «A». On ajoute «A» à l’ensemble des sommets traités, et on calcule le nouveau cocycle.

	CB	A	B	C	D	E	F	G	H	J
CB										
A										
B	ch3=14	ch5=14								
C	ch8=15	ch7=13								
D	ch9=14									
E										
F	**~~ch1=5~~** **OUI**	**~~ch4=8~~** **OUI**	**ch2=12** **OUI**							
G										
H	ch11=14									
J										

C’est maintenant au tour de l’arête allant de «F» à «B». On ajoute le sommet «B» à l’ensemble :

	CB	A	B	C	D	E	F	G	H	J
CB										
A										
B	~~ch3=14~~	~~ch5=14~~								
C	ch8=15	**ch7=13** **OUI**	ch6=16							
D	ch9=14									
E										
F	**~~ch1=5~~** **OUI**	**~~ch4=8~~** **OUI**	**~~ch2=12~~** **OUI**							
G										
H	ch11=14									
J										

À cette étape c’est l’arête allant de «A» vers «C» qui est prise. Et quelques itérations plus tard on obtient au final :

	CB	A	B	C	D	E	F	G	H	J
CB										
A										
B	~~ch3=14~~	~~ch5=14~~								
C	~~ch8=15~~	**~~ch7=13~~** **OUI**	~~ch6=16~~							
D	**~~ch9=14~~** **OUI**									
E										
F	**~~ch1=5~~** **OUI**	**~~ch4=8~~** **OUI**	**~~ch2=12~~** **OUI**							
G					**~~ch10=5~~** **OUI**					
H	~~ch11=14~~			**~~ch13=13~~** **OUI**		**~~ch14=15~~** **OUI**		~~ch12=16~~		
J				~~ch15=17~~		**~~ch16=13~~** **OUI**				

Les 9 chemins à transformer en route sont donc : ch1, ch2, ch4, ch7, ch9, ch10, ch13, ch14, ch16.

La longueur totale à payer sera donc : 5+12+8+13+14+5+13+15+13=98 hm.

Et le nouveau plan de la commune est visible sur la figure 2.6.

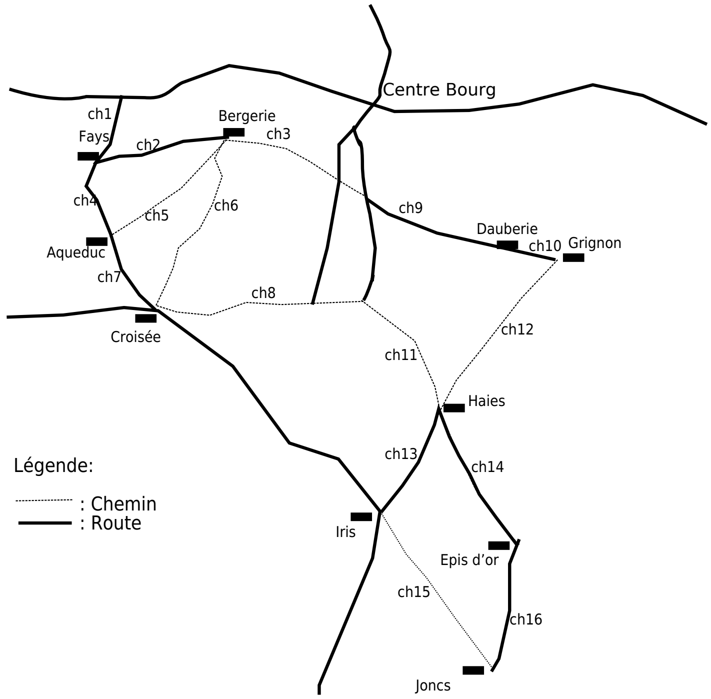


FIG. 2.6 – Nouveau plan de la commune

2.2.2 Correction de l'exercice 1.2.2 de la page 8

Pour résoudre le problème de Gorog il faut créer un réseau de couloirs et d'escaliers élargis qui atteigne toutes les salles. Et comme ce travail doit être fait au plus vite, il faut trouver la solution qui prend le moins de temps. Il s'agit donc d'un problème d'arbre de recouvrement minimal avec des poids exprimant le temps de travail.

La première étape consiste à calculer le temps de travail pour chaque couloir et escalier pour ensuite les reporter sur le graphe qui va modéliser notre réseau.

Niveau supérieur (×1)	Couloir d'entrée : 7h, Couloir 1 : 50h Couloir 2 : 46h, Couloir 3 : 35h
Escaliers (×2)	Escalier 1 : 110h, Escalier 2 : 120h
Niveau inférieur (×3	Couloir 4 : 155h, Couloir 5 : 90h Couloir 6 : 135h

On obtient le graphe de la figure 2.7.

Pour trouver l'arbre de recouvrement minimal on peut utiliser l'algorithme de Kruskal ou celui de Prim. Dans cette correction on va utiliser Kruskal.

La première étape consiste à trier les arêtes par ordre croissant de poids : CE=7, C3=35, C2=48, C1=50, C5=90, E1=110, E2=120, C6=135, C4=155.

Le graphe compte 7 sommets, on va donc ajouter les arêtes une à une sans créer de cycle jusqu'à obtenir un ensemble de 6 arêtes.

1. On ajoute le couloir CE à l'ensemble. T_1 = {CE}.
2. On peut ajouter C3 sans former de cycle. T_2 = {CE, C3}.
3. On peut ajouter C2 sans former de cycle. T_3 = {CE, C3, C2}.
4. On ne peut ajouter C1 qui formerait un cycle. Mais on peut ajouter C5. T_4 = {CE, C3, C2, C5}.
5. On peut ajouter E1 sans former de cycle. T_5 = {CE, C3, C2, C5, E1}.
6. On peut ajouter E2 sans former de cycle. T_6 = {CE, C3, C2, C5, E1, E2}.

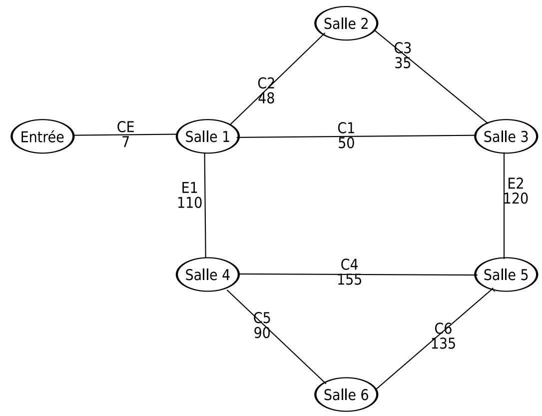


FIG. 2.7 – Modélisation de la grotte

L'ensemble contient 6 arêtes, l'algorithme est terminé. Le poids de cet arbre vaut : 7 + 35 + 46 + 90 + 110 + 120 = 408.

Donc il faut au minimum 408 heures de travail pour dégager un accès élargi à toutes les salles. Pour cela il faut élargir le couloir d'entrée, les couloirs 2, 3 et 5 ainsi que les 2 escaliers (voir figure 2.8).

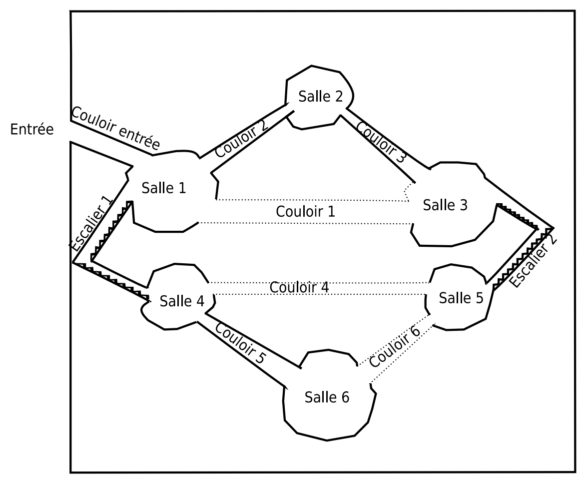


FIG. 2.8 – Plan de la grotte après élargissement des couloirs

Comme chaque nain peut fournir 8h de travail par jour, pour faire ce travail en une seule journée Gorog doit embaucher 51 nains.

2.3 Plus court chemin

2.3.1 Correction de l'exercice 1.3.1 de la page 9

Pour ce problème il faut rechercher un «plus court chemin» au sens du temps entre Lyon et Agen.

Il faut commencer par trouver le graphe qui va servir à résoudre le problème. Il n'est pas utile de conserver les noeuds intermédiaires qui ne concernent que les changements de noms des routes (comme Feurs, Orange, …). Seuls les noeuds aux intersections des routes sont intéressants pour notre modèle.

Il faut aussi calculer le temps de parcours entre chacun des ces noeuds :
- Entre Lyon et Clermont-Ferrand : il y a 77km de nationales et 88 km d'autoroutes. $(77/70+88/110)\times 60 = 114$ minutes de trajet.
- Entre Lyon et Montpellier : il y a 308km d'autoroutes. $(308/110) \times 60 = 168$ minutes de trajet.
- Entre Lyon et Brioude : il y a 182km de nationales. $(182/70) \times 60 = 156$ minutes de trajets.

– Entre Montpellier et Brioude : il y a 275km d'autoroutes. $(275/110) \times 60 = 150$ minutes de trajet.
– Entre Brioude et Clermont-Ferrand : il y a 66km d'autoroutes. $(66/110) \times 60 = 36$ minutes de trajet.
– Entre Clermont-Ferrand et Cahors : il y a 275km d'autoroutes. $(275/110) \times 60 = 150$ minutes de trajet.
– Entre Brioude et Cahors : il y a 238km de nationales. $(238/70) \times 60 = 204$ minutes de trajet.
– Entre Montpellier et Montauband : il y a 275km d'autoroutes. $(275/110) \times 60 = 150$ minutes de trajet.
– Entre Cahors et Montauband : il y a 88km d'autoroutes. $(88/110) \times 60 = 48$ minutes de trajet.
– Entre Cahors et Agen : il y a 105km de nationales. $(105/70) \times 60 = 90$ minutes de trajet.
– Entre Montauband et Agen : il y a 66km d'autoroutes. $(66/110) \times 60 = 36$ minutes de trajets.

On n'a pas d'aprioris sur le sens de parcours de l'axe transversal entre Montpellier et Clermont-Ferrand. Il faudra donc mettre les arcs dans les deux sens pour ces routes.

On obtient le graphe de la figure 2.9.

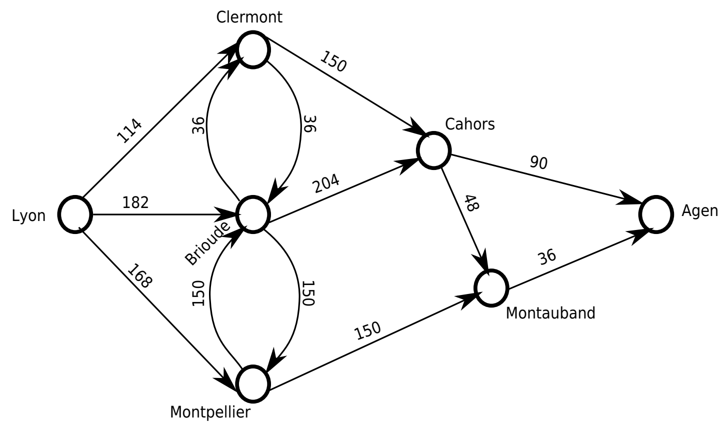


FIG. 2.9 – Graphe modélisant les temps de trajet

Il nous reste à trouver le chemin le plus court (au sens du temps). On utilise l'algorithme de Ford-Moore.

m	$\lambda(Ly)$	$\lambda(Cl)$	$\lambda(Br)$	$\lambda(Ml)$	$\lambda(Ca)$	$\lambda(Mb)$	$\lambda(Ag)$	changés	Γ^+
0	0	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	Ly	Cl, Br, Ml
1		114/Ly	~~182/Ly~~	168/Ly				Cl Br Ml	Ca, Br Cl, Ca, Ml Br, Mb
2		~~218/Br~~	150/Cl ~~318/Ml~~	~~332/Br~~	264/Cl ~~386/Br~~	~~318/Ml~~		Br Ca Mb	Cl, Ca, Ml Mb, Ag Ag
3		~~186/Br~~		~~300/Br~~	~~354/Br~~	312/Ca	~~354/Ca~~ ~~354/Mt~~	Mb Ag	Ag
4							348/Mb	Ag	

Le voyageur prendra donc 5h48 (348 minutes) pour faire le trajet. Il passera par les sommets Lyon, Clermont, Cahors et Montauband.

Donc son plan de route consiste à commencer son voyage sur des nationales et des départementales jusqu'à Feurs. Là, il passe sur le réseau autoroutier en rejoignant Clermont-Ferrand par l'A72. Il emprunte alors l'A71 jusqu'à Combronde où il passe sur l'A89 jusqu'à Brive la Gaillarde. Il change alors en passant sur l'A20 jusqu'à Montauband, où il rejoint l'A62 qui le mènera jusqu'à Agen.

2.3.2 Correction de l'exercice 1.3.2 de la page 9

Nous allons modéliser ce problème avec une recherche de plus court chemin.

La recherche du plus court chemin sert à trouver un optimum reposant sur un graphe orienté. L'optimum en question est un minimum. Que peut-on chercher à minimiser pour optimiser notre problème ? On a des coûts et des gains... Les deux étant en fait un peu la même chose : un gain est un coût négatif, et un coût est un gain négatif. Pour optimiser notre problème on doit soit maximiser les gains, soit minimiser les coûts. La technique de la rechercher du plus court chemin est parfaite pour le recherche d'un minimum. On va donc chercher à minimiser les coûts (en transformant les gains en coûts négatifs). La semaine de travail sera rentable que si le minimum obtenu est un nombre négatif. Sinon cela signifiera qu'elle coûtera de l'argent.

Comment modéliser la semaine de travail d'Apollodore sur un graphe faisant apparaître les coûts ? On va construire un graphe où chaque état représentera l'état du stock des repas d'Apollodore à la fin de chaque journée. Il démarre avec un stock vide, et doit finir le vendredi avec un stock vide. Sa production est de 50 repas, et un banquet en utilise 100. Le stock maximal est de 100 repas. Donc à la fin de chaque journée il y a trois états possibles pour ce stock : 0 repas, 50 repas ou 100 repas. Notre graphe devra donc passer par les états de la figure 2.10

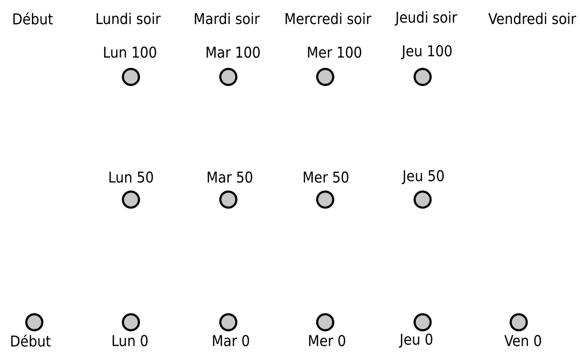


FIG. 2.10 – Tous les états possibles du stock d'Apollodore

Il faut maintenant placer les arcs entre ces états. Le lundi Apollodore peut ne rien faire (le stock reste à 0) ou produire 50 repas (le stock passe à 50 -état Lun 50-). S'il produit 50 repas, cela va lui coûter 2k euros. On va donc valuer cet arc avec la valeur 2 (notre unité sera le kilo euros). L'état Lun 100 ne peut pas être atteint, il faudra le retirer du graphe. Le mardi le stock d'Apollodore ne lui permet pas de répondre à la demande du premier banquet. Il n'a donc que 2 choix possibles : ne rien faire (son stock ne bouge pas), ou produire 50 repas pour 2k euros (son stock monte de 50). Le mercredi il n'a pas accès aux cuisines pour produire. Il n'a deux que deux choix : ne rien faire, ou servir les 100 repas du banquets de mercredi (si son stock le lui permet). Ce banquet lui rapporte 3k euros (il faut penser à retirer le 1k euros que lui coûte le service de chaque banquet). Comme ici on modélise avec des coûts, ce gain va être reporté comme un coût négatif. L'arc va être valué avec la valeur -3. On continue ainsi jusqu'à la fin de la semaine et on arrive à la figure 2.11

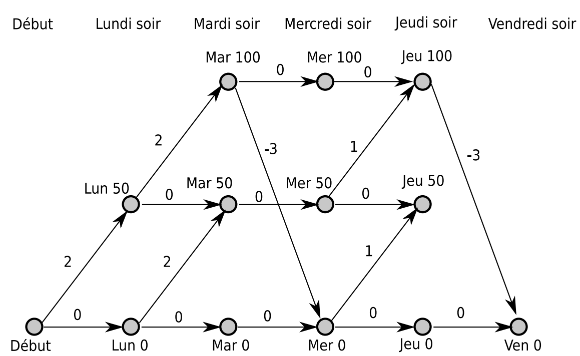


FIG. 2.11 – Ajouts des arcs suivants les actions d'Apollodore

Sur le graphe de la figure 2.11, l'état «Jeu 50» se trouve en dehors de tout chemin menant au seul état final acceptable (stock vide vendredi soir). Il faut donc le retirer de notre modélisation. On obtient le graphe de la figure 2.12.

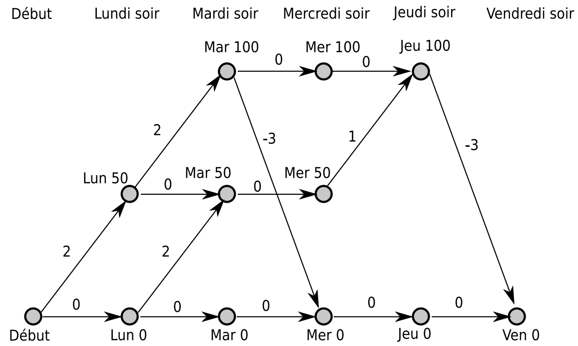


FIG. 2.12 – Graphe nettoyé des états impossibles

On peut encore maintenant simplifier ce graphe avant de faire tourner l'algorithme de Ford-Moore : on supprime les états sur lesquels il n'y qu'un seul arc entrant et un seul arc sortant. On remplace les 2 arcs par un nouvel arc valué par la somme des deux valeurs. On obtient le graphe de la figure 2.13.

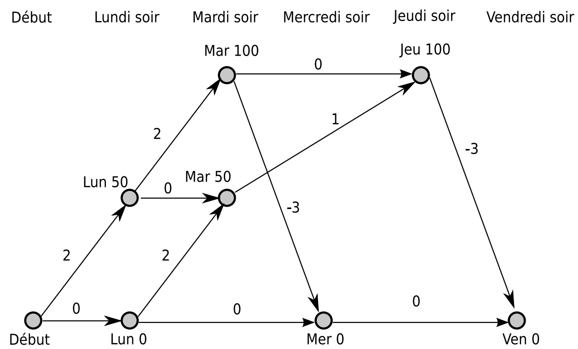


FIG. 2.13 – Graphe simplifié avant algorithme

On applique l'algorithme de Ford-Moore sur ce graphe :

m	$\lambda(D)$	$\lambda(L0)$	$\lambda(L50)$	$\lambda(Ma50)$	$\lambda(Ma100)$	$\lambda(Me0)$	$\lambda(J100)$	$\lambda(V0)$	Sommets changés	Γ^+
0	0	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	D	L0, L50
1		0/D	2/D						L0 L50	Me0, Ma50 Ma50, Ma100
2				2/L0 2/L50	 4/L50	0/L0			Ma50 Ma100 Me0	J100 J100, Me0 V0
3						 ~~1/Ma100~~	3/Ma50 ~~4/Ma100~~	 0/Me0	J100 V0	V0
4								0/J100		

Le plus court chemin vers Ven0 a pour valeur 0. Donc le coût minimal pour une semaine de travail d'Apollodore est de 0. Autrement dit, son gain (la valeur opposé du coût pour ce modèle) est de 0. Il vaut mieux conseiller à Apollodore de ne pas travailler dans ces conditions.

2.3.3 Correction de l'exercice 1.3.3 de la page 10

Pour la seconde partie de ce problème, la modélisation est exactement la même, sauf que la présence d'Aristodème permet d'ajouter d'autres chemins sur le graphe. En effet les jours de productions les deux amis peuvent produire 100 repas. Et mardi, il est possible de consommer 100 repas pour le banquet et d'en produire 50 par ailleurs et donc au bilan de n'en consommer que 50. On obtient donc le graphe de la figure 2.14

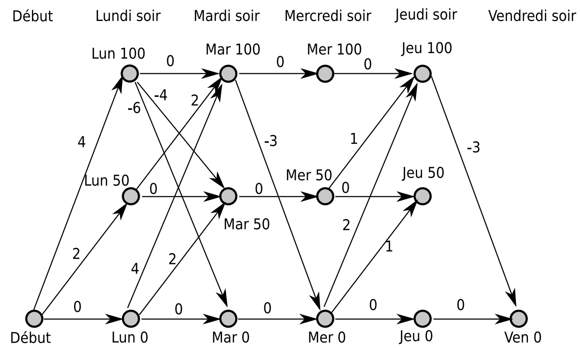


FIG. 2.14 – Ajouts des arcs en tenant compte des actions d'Apollodore et d'Aristodème

Sur le graphe de la figure 2.14, l'état «Jeu 50» se trouve en dehors de tout chemin menant au seul état final acceptable (stock vide vendredi soir). Il faut donc le retirer de notre modélisation. On obtient le graphe de la figure 2.15.

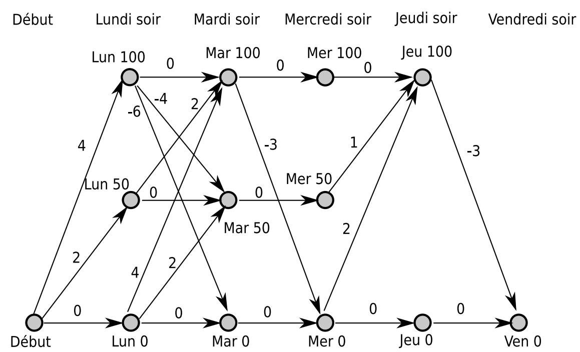


FIG. 2.15 – Graphe nettoyé des états impossibles

On peut encore maintenant simplifier ce graphe avant de faire tourner l'algorithme de Ford-Moore : on supprime les états sur lesquels il n'y qu'un seul arc entrant et un seul arc sortant. On remplace les 2 arcs par un nouvel arc valué par la somme des deux valeurs. On obtient le graphe de la figure 2.16.

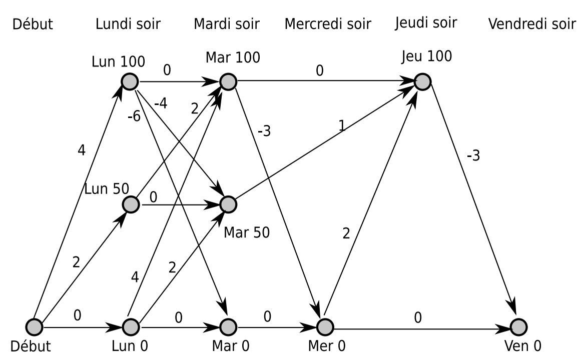


FIG. 2.16 – Graphe simplifié avant algorithme

On applique alors l'alogorithme de Ford-Moore :

m	$\lambda(D)$	$\lambda(L0)$	$\lambda(L50)$	$\lambda(L100)$	$\lambda(Ma0)$	$\lambda(Ma50)$	$\lambda(Ma100)$	$\lambda(Me0)$	$\lambda(J100)$	$\lambda(V0)$	Sommets changés	Γ^+
0	0	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	D	L0, L50, L100
1		0/D	2/D	4/D							L0 L50 L100	Ma0, Ma50, Ma100 Ma50, Ma100 Ma0, Ma50, Ma100
2					~~0/L0~~ -2/L100	~~2/L0~~ ~~2/L50~~ 0/L100	4/L0 4/L50 4/L100				Ma0 Ma50 M100	Me0 J100 Me0, J100
3								-2/Ma0 ~~1/Ma100~~	 ~~1/Ma50~~ ~~4/Ma100~~		Me0 J100	J100, V0 V0
4									0/Me0	~~-2/Me0~~ ~~-2/J100~~	J100 V0	V0
5										-3/J100	V0	

Pour ce graphe le plus court chemin fait -3 : il passe par Début, Lun100, Mar0, Mer0, Jeu100 et Ven 0.

Cela signifie qu'Apollodore et Aristodème peuvent travailler ensemble cette semaine pour un coût de -3k euros, autrement dit un gain de 3k euros. Ils ont donc intérêt à le faire.

Interprétons le chemin pour leur donner le bon scénario :

Début → Lun 100 Ils doivent monter leur stock à 100 dès le premier jour. Ils doivent donc travailler en cuisine tous les deux le lundi.

Lun 100 → Mar 0 Ils doivent consommer les 100 repas (en servant le banquet du mardi), sans en produire d'autres. Donc un seul des deux doit travailler le mardi au service du banquet du mardi, l'autre peut se reposer.

Mar 0 → Mer 0 Leur stock ne bouge pas ce jour là. Le mercredi est un jour de repos pour les deux amis.

Mer 0 → Jeu 100 Ils doivent remonter leur stock à 100 le jeudi. Ils doivent donc travailler en cuisine tous les deux.

Jeu 100 → Ven 0 Ils doivent consommer les 100 repas (en servant le banquet du vendredi), sans en produire d'autres. Donc un seul des deux doit travailler le vendredi au service du banquet du vendredi, l'autre peut se reposer.

2.4 Flot maximal

2.4.1 Correction de l'exercice 1.4.1 de la page 10

Il s'agit d'un problème de flot maximal.

La première étape consiste à dessiner le graphe des cursus possibles pour les élèves. Ils vont devoir passer par l'acquisition des trois UV. Comme la seconde école a des accords d'équivalence avec les deux autres, il peut y avoir des échanges entre cette école et les autres à chaque étape de la formation. Mais encore faut-il que les dates le permettent. Comme la première école commence plus tôt, les seuls transferts possibles avec elle vont de la première vers la seconde. Et comme la troisième école termine toujours ses UV après le début de la seconde, les transferts possibles entre elles vont de la deuxième vers la troisième.

On arrive au graphe de la figure 2.17. Sur cette figure «D» signale les débuts de formation, «F» les fins. Le premier nombre qui suit désigne l'école, et après le point le second nombre désigne l'UV. Donc par exemple «D2.3» désigne le début de la formation pour l'UV_3 dans l'école 2.

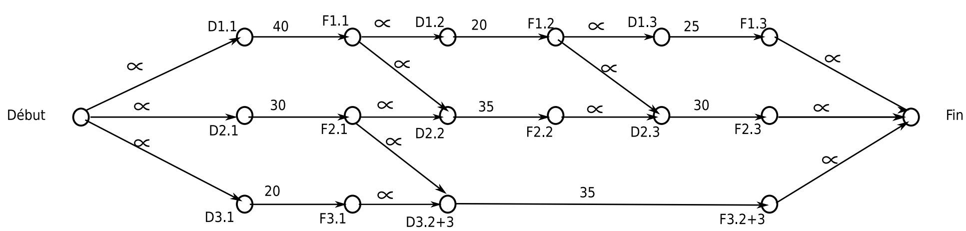


FIG. 2.17 – Graphe modélisant le cursus des élèves

Ce premier modèle peut être simplifié. Il est possible de supprimer les noeuds qui n'ont qu'une seule arête entrante et une seule arête sortante. On remplace alors ces deux arêtes par une arête ayant la capacité minimale des deux arêtes.

$$S_1 \xrightarrow{c_1} S_2 \xrightarrow{c_2} S_3 \quad \text{devient} \quad S_1 \xrightarrow{min(c_1,c_2)} S_3$$

On obtient alors le graphe de la figure 2.18.

Maintenant il faut trouver le flot maximal que l'on peut faire circuler sur ce graphe. Pour cela on va commencer avec un flot représentant le cas où chaque élève essaye de suivre la totalité de son cursus dans une seule école. En saturant chaque école on arrive au flot de la figure 2.19.

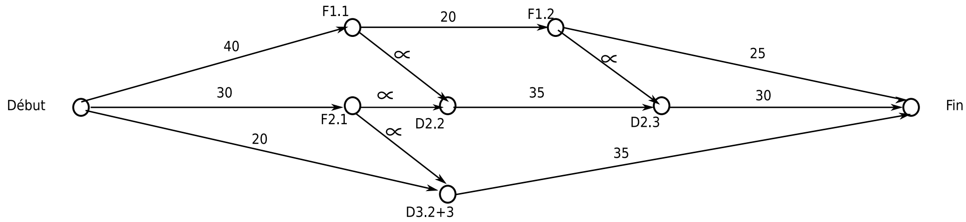


FIG. 2.18 – Graphe simplifié

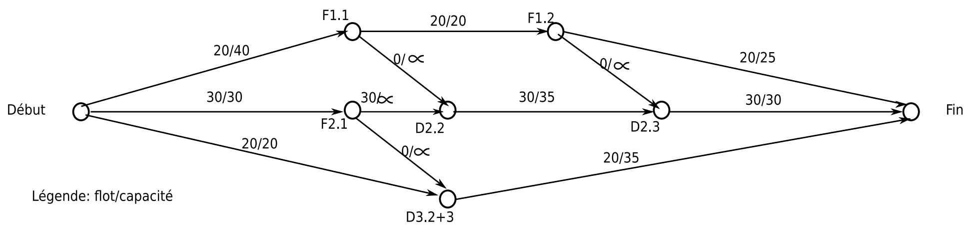


FIG. 2.19 – Premier flot. Chaque élève reste dans son école de départ

Ensuite on utilise l'algorithme de Ford-Fulkerson pour voir s'il est possible d'améliorer ce flot. La figure 2.20 montre le marquage d'une chaîne qui permet de marquer le puits (on n'a laissé sur le graphe que les marquages appartenant à cette chaîne).

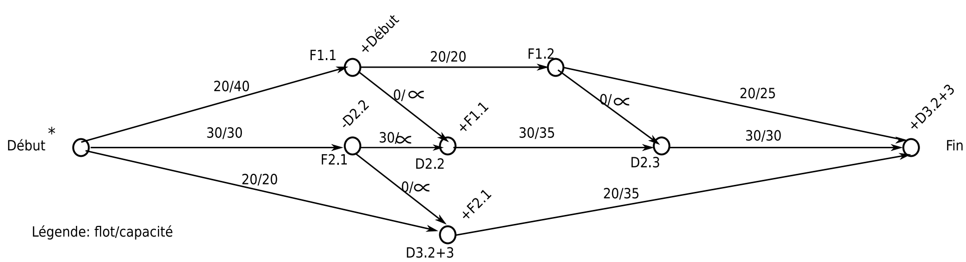


FIG. 2.20 – Marquage d'une chaîne améliorante

On obtient la donc chaîne suivante :

$$\text{Début} \xrightarrow{40-20=20} \text{F1.1} \xrightarrow{\infty-0=\infty} \text{D2.2} \xleftarrow{30} \text{F2.1} \xrightarrow{\infty-0=\infty} \text{D3.2+3} \xrightarrow{35-20=15} \text{Fin}$$

On calcule les capacités restantes sur les arcs directs de cette chaîne et le flot passant sur les arcs inverses (il n'y qu'un seul arc inverse pour notre cas), et on prend le minimum de ces valeurs : 15. Il est donc possible d'augmenter de 15 le flot entre Début et Fin. Il faut ajouter 15 aux flots des arcs directs de la chaîne et retirer 15 à l'arc inverse. On obtient le nouveau flot de la figure 2.21

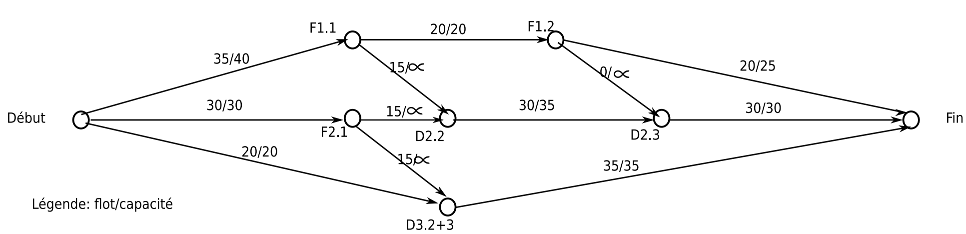


FIG. 2.21 – Nouveau flot après amélioration

Le flot est maintenant de 85 élèves.

On tente une nouvelle itération de l'algorithme de Ford-Fulkerson. On n'arrive plus à marquer le puits (voir figure 2.22). Donc le flot maximal est déjà atteint.

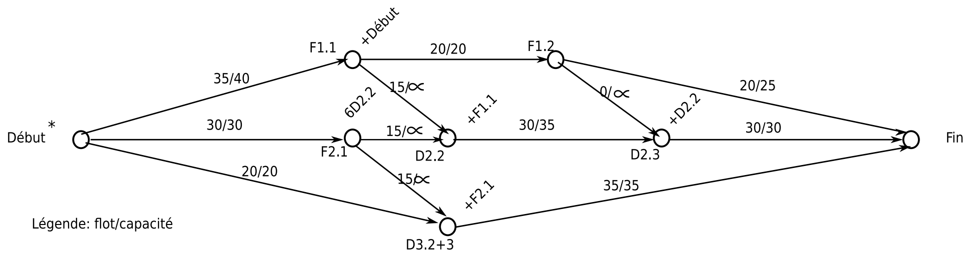


FIG. 2.22 – Nouveau marquage : impossible de trouver une chaîne améliorante

Le flot maximal est de 85.

Pour obtenir la formation de 85 élèves, l'organisme doit envoyer 35 élèves suivre l'UV_1 dans la première école. 20 de ces élèves continueront la formation dans celle-ci, mais 15 autres iront faire les UV_2 et UV_3 dans la deuxième école. Il doit aussi envoyer 30 élèves suivre l'UV_1 dans la deuxième école. 15 continueront dans celle-ci, mais 15 autres iront suivre le module qui regroupe les UV_2 et UV_3 dans la troisième école. Enfin 20 élèves feront toutes les UV dans la troisième école.

2.4.2 Correction de l'exercice 1.4.2 de la page 11

Il s'agit d'un problème de type flot-maximal à coût minimal. Mais attention, on sait que la capacité de notre réseau est de 85 élèves. On veut n'en faire passer que 63. Donc il faudra arrêter l'algorithme avant le flot maximal.

Le schéma modélisant notre problème est celui de la figure 2.23.

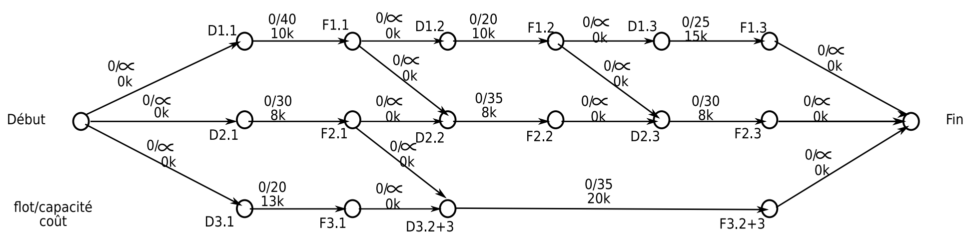


FIG. 2.23 – Graphe modélisant la recherche du flot maximal à coût minimal

Il est possible de simplifier ce graphe. On peut supprimer tous les noeuds n'ayant qu'une seule arête entrante et une seule arête sortant. On remplace ces deux arêtes par une arête ayant la capacité minimale et la somme des coûts des deux arêtes.

$$S_1 \xrightarrow{\text{cap}_1/\text{coût}_1} S_2 \xrightarrow{\text{cap}_2/\text{coût}_2} S_3 \quad \text{devient} \quad S_1 \xrightarrow{\min(\text{cap}_1,\text{cap}_2)/\text{coût}_1+\text{coût}_2} S_3$$

On obtient le graphe de la figure 2.24.

Il faut mettre en œuvre l'algorithme de Busacker et Gowen. Pour cela on démarre avec un flot nul, et on recherche le chemin le plus court (au sens du coût) allant de la source au puits. Il s'agit du chemin[1] passant pas les UV de l'école 2 . Le coût de ce chemin est de 24k euros. Sa capacité maximale est de 30 élèves. On peut donc déjà placer un premier flot de 30 élèves sur le graphe (voir figure 2.25) dont le coût global est $24k \times 30 = 720k$ euros. On peut aussi calculer le nouveau graphe associé pour l'étape suivante (figure 2.25).

Sur le nouveau graphe associé, le plus court chemin passe par Début → F1.1 → D2.2 → F2.1 → D3.2+3 → Fin. Son coût est de 30k euros. Sa capacité est de 30 élèves (concrètement à cette étape de l'algorithme,

[1]Pour alléger la correction de cet exercice, les calculs de recherche des chemins les plus courts ne seront pas reportés ici

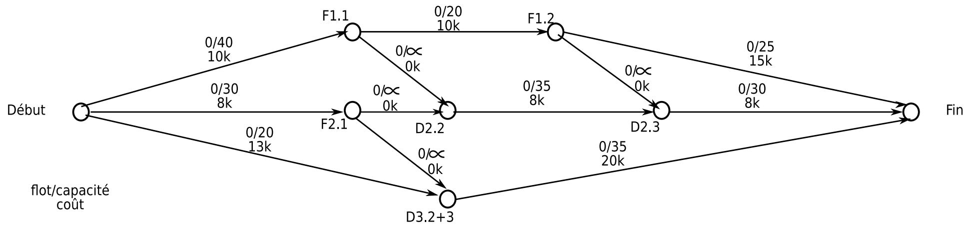


FIG. 2.24 – Graphe simplifié

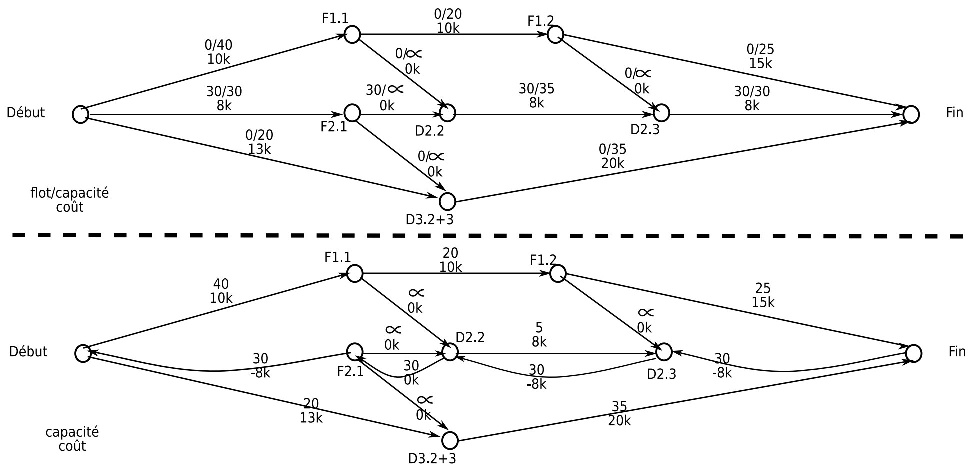


FIG. 2.25 – Premier flot de 30 élèves

on demanderait à 30 élèves de l'école 2 de poursuivre leur scolarité dans l'école 3 pour que 30 élèves de l'école 1 puissent finir à moindre coût leur apprentissage dans l'école 2). Le coût globale de ce flot est de $30k \times 30 = 900k$ euros. On obtient les nouveaux graphes de la figure 2.26.

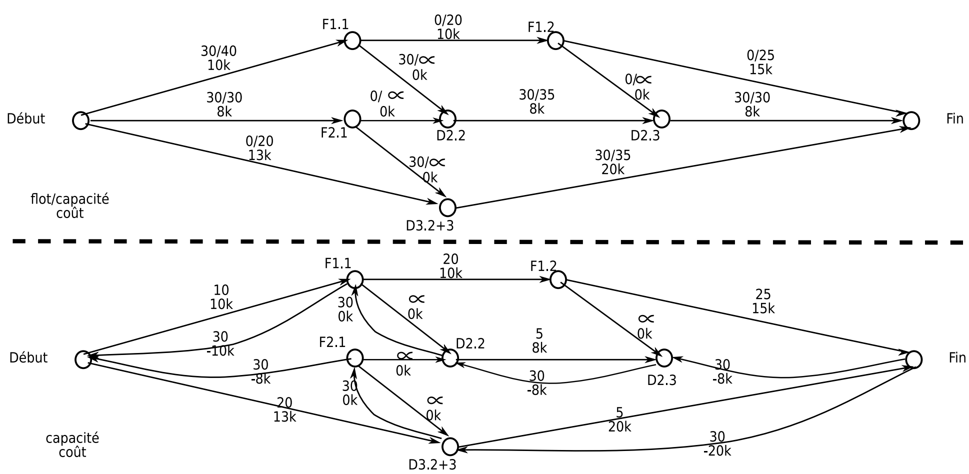


FIG. 2.26 – Un second flot de 30 autres élèves

On n'a toujours pas atteint le flot de 63 élèves. On doit donc continuer l'algorithme. Sur le nouveau graphe associé, le chemin le plus court est celui qui passe par l'école 3. Son coût est de 33k euros, et sa capacité de 5 élèves. Mais il ne nous manque que 3 élèves pour atteindre le flot recherché. Il suffit donc de rajouter 3 élèves pour un coût de $33k \times 3 = 99k$ euros. On obtient le flot de la figure 2.27.

La solution optimale coûte $720k + 900k + 99k = 1719k$ euros. Elle consiste à envoyer 30 élèves faire l'UV_1 dans l'école 1, et les UV_2 et UV_3 dans l'école 2. 30 autres élèves feront l'UV_1 dans l'école 2, et suivront le module réunissant les UV_2 et UV_3 dans l'école 3. Enfin les 3 derniers feront toutes les UV dans l'école 3.

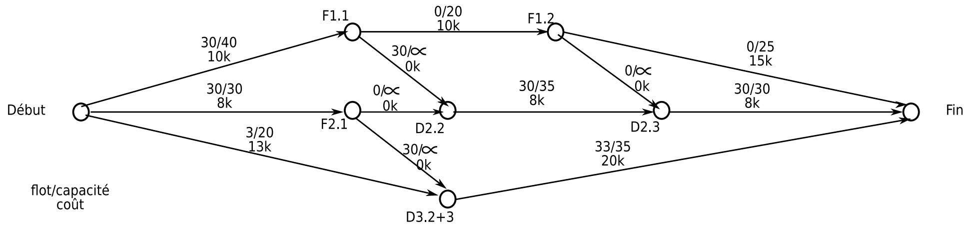


FIG. 2.27 – Solution optimale pour 63 élèves

2.4.3 Correction de l'exercice 1.4.3 de la page 11

On veut trouver un moyen de faire transiter un maximum de containers des usines ves les magazins. Il s'agit donc d'un problème de «flot max».

Le flot va des deux usines (Rouen, Amiens) vers les 2 magasins (Le Havre, Paris). On ajoute une source et un puits à notre modèle pour obtenir le graphe de la figure 2.28

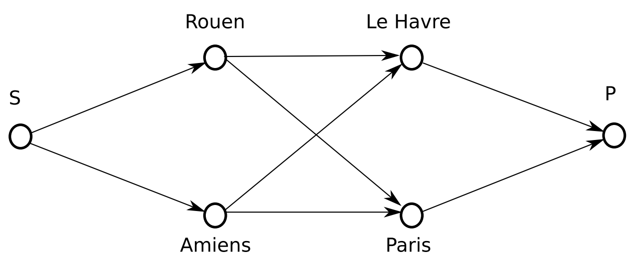


FIG. 2.28 – Modelisation du flot

Il reste à reporter les contraintes de production, transport et vente sur ce graphe. On obtient le graphe de la figure 2.29

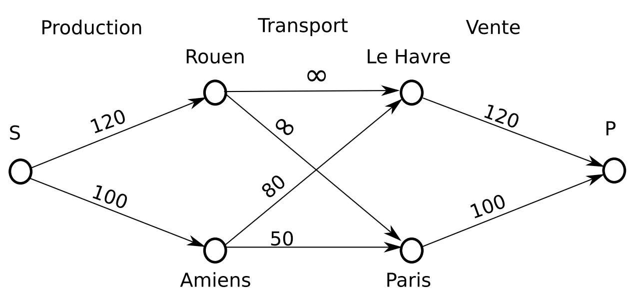


FIG. 2.29 – Modelisation du problème

Pour l'étape suivant, il faut reporter le flot sur le graphe et utiliser l'algorithme de Ford-Fulkerson (voir figure 2.30. Comme le marquage atteint le puits, il existe une chaîne améliorante. Cela prouve que ce flot n'est pas optimal.

Il suffit de continuer l'algorithme de Ford-Fulkerson pour répondre à la troisième question. On calcule le gain de la chaîne améliorante :

$$\text{S} \xrightarrow{100-50=50} \text{Amiens} \xrightarrow{80-0=80} \text{Le Havre} \xleftarrow{120} \text{Rouen} \xrightarrow{\infty-0=\infty} \text{Paris} \xrightarrow{100-50=50} \text{P}$$

Le minimum des différents maillon de cette chaîne est de 50 containers. On reporte ce flot sur le graphe (ajout de 50 sur les arcs orientés dans le bon sens, et retrait de 50 sur les arcs inverses). On obtient le graphe de la figure 2.31. Le nouveau marquage de Ford-Fulkerson ne permet pas d'atteindre le puits, il s'agit donc du flot maximal.

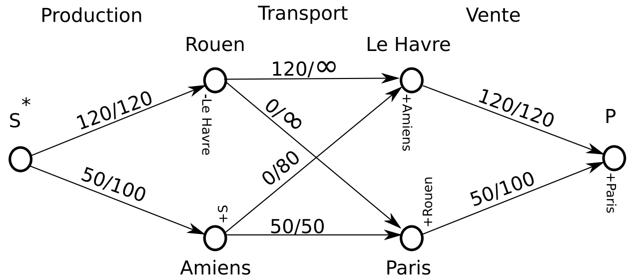


FIG. 2.30 – Marquage de Ford-Fulkerson sur le flot initial

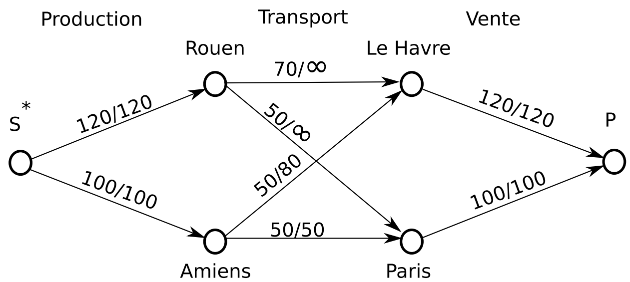


FIG. 2.31 – Report du flot et nouveau marquage

Donc l'entreprise devra faire transiter 50 containers par la rote depuis Amiens vers Paris, 50 containers par la route depuis Amiens vers La Havre, 50 containers par la Seine depuis Rouen vers Paris et enfin 70 containers par la Seine depuis Rouen vers Le Havre. Elle pourra ainsi toujours produire, acheminer et vendre ses 220 containers.

2.5 Méthode géométrique et Simplexe

2.5.1 Correction de l'exercice 1.5.1 de la page 12

Il s'agit d'un problème de programmation linéaire.

La première étape consiste à trouver la fonction économique. On nome D le nombre de dromadaires achetés, et S le nombre de kg de de sel achetés. Le bénéfice du voyage sera (exprimé en pa) :$Z = 100 \times D + S$.

Les achats du Touareg sont limités par deux contraintes :
– Son pécule de départ est de 650 pa, donc : $100 \times D + 0.2 \times S \leq 650$
– La seconde contrainte est un peu plus subtile : le nombre de kg de sel que l'on peut transporter est limité par le nombre de dromadaires achetés : $S \leq 150 \times D$. Pour obtenir la forme canonique, on va transformer l'expression de cette contrainte pour mettre toutes les variables du même coté de l'inégalité : $-150 \times D + S \leq 0$.

On arrive donc à la forme canonique suivante :

Trouver le maximum de Z avec

$$Z = 100 \times D + S \text{ (unité : pa)}$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{llll} 100 \times D & + & 0.2 \times S & \leq 650 \\ -150 \times D & + & S & \leq 0 \\ D \geq 0 & \text{et} & S \geq 0 & \end{array} \right.$$

Comme le problème n'a que 2 variables, on peut le résoudre avec le simplexe ou la méthode géométrique. Pour cette correction nous allons utiliser la méthode géométrique.

Pour délimiter le domaine des solutions admissible (voir figure 2.32) :

- on rejette toutes les valeurs négatives ($D \geq 0$ et $S \geq 0$).
- on trace la droite $100 \times D + 0.2 \times S = 650$, et on rejette toutes les valeurs au dessus (puisque $100 \times D + 0.2 \times S \leq 650$).
- on trace la droite $-150 \times D + S = 0$. Elle divise notre plan en deux. D'un coté il y a des valeurs admissibles et de l'autre des valeurs qui ne répond pas à la contrainte (il faut que $-150 \times D + S \leq 0$). Ici comme il y a un nombre négatif dans les facteurs, la logique de dire «inférieur veut dire en dessous de la droite» ne tient pas. Pour trouver de quel coté de cette droite se trouvent les valeurs admissibles, il suffit des tester un point de chaque coté. On calcule par exemple la valeur pour le point P1 ($S = 0$ et $D = 4$, donc $-150 \times D + S = -600$). On obtient -600 qui est bien inférieur ou égale à 0, donc ce point est acceptable. Par contre pour le point P2 ($S = 500$ et $D = 0$ donc $-150 \times D + S = 500$), la valeur obtenue 500, prouve que ce point n'est pas admissible. Donc sur le graphe de la figure 2.32, le domaine admissible des solutions se trouve au dessus de la droite $-150 \times D + S = 0$.

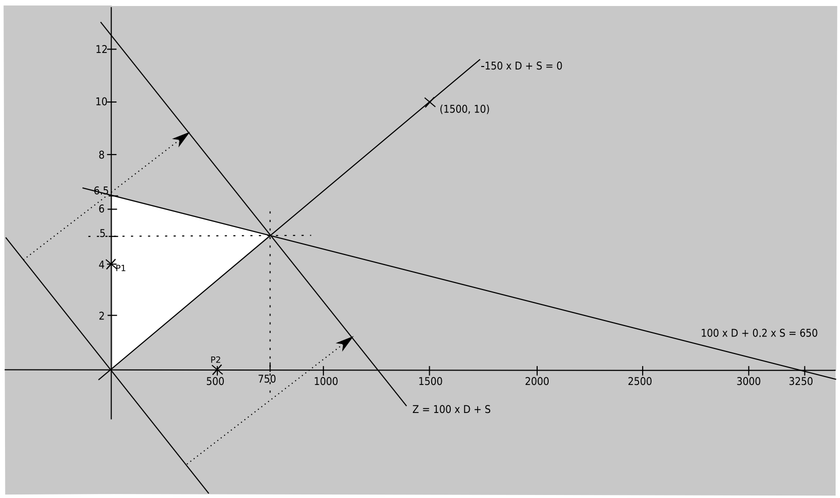


FIG. 2.32 – Résolution géométrique

Il ne reste plus qu'à tracer la droite de Z et la faire monter jusqu'à la limite du domaine. L'ultime point obtenu correspond à $D = 5$ et $S = 750$.

Donc le touareg devrait acheter 5 dromadaires et 750 kg de sel pour un bénéfice de $100 \times 5 + 750 = 1250$ pa, autrement dit 125 po.

2.5.2 Correction de l'exercice 1.6.1 de la page 12

Il s'agit d'un problème de programmation linéaire.

Commençons par trouver la fonction économique à optimiser. Si on nomme F_1 le nombre de tonnes de fromage AOC vendues en une année et F_2 le nombres de tonnes de l'autre fromage, la marge annuelle (exprimée en k euros) de l'entreprise est : $Z = 3 \times F_1 + F_2$.

Les ressources imposent des contraintes sur la production :

- La laiterie reçoit 4 millions de litres de lait de la zone AOC, et la tonne de fromage AOC en utilise $10\,000$ litres : $10000 \times F_1 \leq 4\,000\,000$
- La laiterie reçoit 10 millions de litres de lait (4 millions de la zone AOC et 6 millions d'autres zones), et tout ce qui n'est pas utilisé par le fromage AOC ($10\,000 \times F_1$) peut être utilisé pour le second fromage qui en utilise $7\,500$ litres par tonne : $7\,500 \times F_2 \leq 10\,000\,000 - 10\,000 \times F_1$
- La tonne de fromage AOC nécessite 30 heures de travail, et celle de l'autre fromage 15 heures. La laiterie dispose de $21\,000$ heures : $30 \times F_1 + 15 \times F_2 \leq 21\,000$.

Donc on obtient (après avoir repasser la variable F_1 de la seconde contrainte dans le membre de gauche) :

$$\begin{cases} 10\,000 \times F_1 \leq 4\,000\,000 \\ 10\,000 \times F_1 + 7\,500 \times F_2 \leq 10\,000\,000 \\ 30 \times F_1 + 15 \times F_2 \leq 21\,000 \\ \text{Trouver le max de } Z = 3 \times F_1 + F_2 \\ \text{Avec } F_1 \geq 0 \text{ et } F_2 \geq 0 \end{cases}$$

Après simplifications :

$$\begin{cases} F_1 \leq 400 \\ 4 \times F_1 + 3 \times F_2 \leq 4\,000 \\ 2 \times F_1 + F_2 \leq 1\,400 \\ \text{Trouver le max de } Z = 3 \times F_1 + F_2 \\ \text{Avec } F_1 \geq 0 \text{ et } F_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ici deux techniques sont utilisables : le simplexe et la méthode géométrique. On va utiliser cette dernière.

La délimitation du domaine de solution est visible sur le figure 2.33

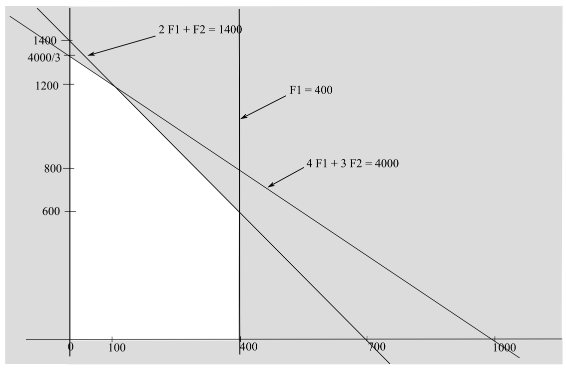


FIG. 2.33 – Domaine de solution

On place ensuite la droite représentant la fonction économique $Z = 3 \times F_1 + F_2$ et on la monte jusqu'à atteindre les limites du domaine. Elle atteint sont maximum lorsqu'elle passe par le point $F_1 = 400$ et $F_2 = 600$ (voir figure 2.34) Donc le meilleurs choix économique consiste à utiliser tout le lait de la zone AOC pour fabriquer 400 tonnes du fromage AOC (la maximum que l'on puisse faire), et à utiliser l'autre lait pour fabriquer 600 tonnes fromages de l'autre catégorie. Le bénéfice sera alors de $3 \times 400 + 600 = 1800$ k euros, c'est à dire 1,8 millions d'euros.

Notez que les deux contraintes qui bloquent la production sont d'une part la quantité de lait AOC ($F_1 \leq 400$) et d'autre part le nombre d'heures de travail ($2 \times F_1 + F_2 \leq 1400$) (les deux droites qui se croisent au point optimal). La contrainte sur l'autre lait ne bloque pas. D'ailleurs la solution n'utilise que 4,5 millions de litres de lait de la zone non AOC. Il en reste donc 1,5 millions de litres sans usage.

2.5.3 Correction de l'exercice 1.6.2 de la page 12

La modélisation du problème est identique à celle de la question du précédente exceptée pour Z qui change : $Z = 2 \times F_1 + F_2$ (toujours en k euros).

$$\begin{cases} F_1 \leq 400 \\ 4 \times F_1 + 3 \times F_2 \leq 4\,000 \\ 2 \times F_1 + F_2 \leq 1400 \\ \text{Trouver le max de } Z = 2 \times F_1 + F_2 \\ \text{Avec } F_1 \geq 0 \text{ et } F_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le domaine de solution ne change pas, on retrouve celui de la figure 2.33. Par contre la droite qui va représenter Z n'a plus la même pente. Elle a exactement la même pente que la troisième contrainte. Donc

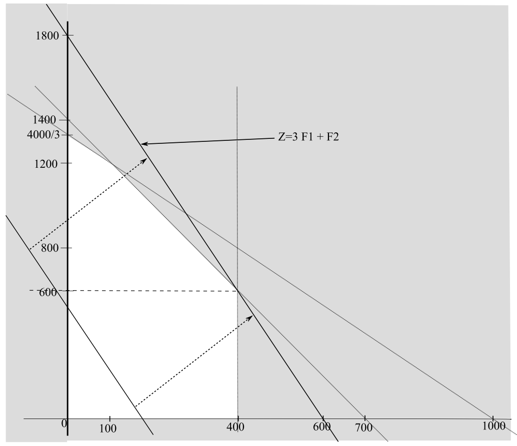


FIG. 2.34 – Résolution géométrique pour $Z = 3 \times F_1 + F_2$

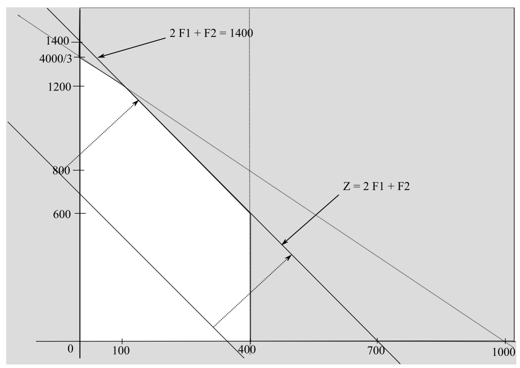


FIG. 2.35 – Résolution géométrique pour $Z = 2 \times F_1 + F_2$

lorsqu'on fait monter cette droite vers son maximum, elle va se confondre avec la droite qui exprime la troisième contrainte (voir figure 2.35).

Dans ce cas la solution optimale est donnée par tout un segment de droite : le segment compris entre les points ($F_1 = 100, F_2 = 1200$) et ($F_1 = 400, F_2 = 600$). Donc la solution optimale consiste à fabriquer entre 100 et 400 tonnes du fromage AOC et à utiliser tout le reste du temps de travail pour fabriquer entre 1200 et 600 tonnes de l'autre fromage. Toutes ces solutions rapporteront 1,4 millions d'euros. La solution qui consiste à fabriquer 400 tonnes du fromage AOC et 600 tonnes de l'autre fromage va laisser 1,5 millions de litres de lait (non AOC) sans usage. Si la laiterie arrive à les valoriser autrement, il sera certainement judicieux de choisir cette solution.

Voici une seconde correction du même exercice, mais obtenue avec le simplexe :

Le tableau du simplexe est :

	F_1	F_2	E_1	E_2	E_3	Somme
E_1	1	0	1	0	0	400
E_2	4	3	0	1	0	4000
E_3	2	1	0	0	1	1400
Δ_j	2	1	0	0	0	0

La premier pivot est sur la colonne de F_1 et la ligne de E_1. Après pivotement de F_1 à la place de E_1 on obtient :

	F_1	F_2	E_1	E_2	E_3	Somme
F_1	1	0	1	0	0	400
E_2	0	3	-4	1	0	2400
E_3	0	1	-2	0	1	600
Δ_j	0	1	-2	0	0	-800

La second pivot est sur la colonne de F_2 et la ligne de E_3.

	F_1	F_2	E_1	E_2	E_3	Somme
F_1	1	0	1	0	0	400
E_2	0	0	2	1	-3	600
F_2	0	1	-2	0	1	600
Δ_j	0	0	0	0	-1	-1400

Tout les Δ_j sont négatifs ou nuls, on a donc une solution optimale (400 tonnes de fromage AOC, et 600 tonnes de l'autre fromage pour un gain de 1,4 millions d'euros). Mais la variable E_1 n'est pas en base et a un Δ_j nul. Il existe donc d'autres solutions optimales. On peut faire pivoter cette variable pour connaître l'autre sommet du segment de solutions (la ligne du pivot est celle de E_2) :

	F_1	F_2	E_1	E_2	E_3	Somme
F_1	1	0	0	-1/2	1.5	100
E_1	0	0	1	1/2	-3/2	300
F_2	0	1	0	1	-2	1200
Δ_j	0	0	0	0	-1	-1400

Donc l'autre solution consiste à fabriquer 100 tonnes du fromage AOC, 1200 tonnes de l'autre fromage pour le même bénéfice (et bien sûr, toutes les solutions intermédiaires sont aussi valables).

Comme dit précédemment, choisir de fabriquer 400 tonnes de fromage AOC permet de laisser 1,5 millions de litres de lait non AOC sans usage. Et comme il sera probablement possible de le revendre pour augmenter les profits, on choisira certainement cette solution.

2.5.4 Correction de l'exercice 1.6.3 de la page 12

Il s'agit d'un problème de programmation linéaire.

Il faut commencer par trouver la fonction économique à optimiser. Il faut maximaliser la marge de l'entreprise. Si on nome P_1 l'électricité achetée au producteur 1, P_2 celle du producteur 2, et P_3 celle du producteur 3, cette marge se définit par : $Z = 900 \times P_1 + 700 \times P_2 + 500 \times P_3$ (unités : k euro et TWh).

Il faut ensuite mettre les contraintes en équation :

- On ne pourra pas vendre plus de 18 TWh : $P_1 + P_2 + P_3 \leq 18$. Avec les chiffres de cet exemple où les producteurs offrent plus de 18 TWh et où chaque TWh vendu rapporte de l'argent, on pourrait remplacer le «$\leq$» par un «=», et donc faire disparaître du problème une des trois variables. Mais en faisant ainsi on perdrait le coté général de la modélisation. Le modèle «$\leq$» demeure valable si on modifie les chiffres et que par exemple on ne trouve plus assez d'électricité sur le marché, ou que certains fournisseurs nous obligeraient à avoir des marges négatives sur leur électricité.
- Le producteur 1 nous propose au maximum 25 TWh : $P_1 \leq 25$. Évidemment, la contrainte précédente est bien plus forte que celle-ci, mais à cette étape, on modélise : les simplifications viendront plus tard.
- Le producteur 2 nous propose au maximum 6 TWh : $P_2 \leq 6$
- Le producteur 3 nous propose au maximum 4 TWh : $P_3 \leq 4$
- Il faut 25% d'électricité renouvelable dans le total vendu. La part d'électricité renouvelable est $0.1 \times P_1 + 0.46 \times P_3 + P_3$. Le total de l'électricité vendu est $P_1 + P_2 + P_3$. Il faut donc $0.1 \times P_1 + 0.46 \times P_3 + P_3 \geq 0.25 \times (P_1 + P_2 + P_3)$, ce qui revient à dire : $0.15 \times P_1 - 0.21 \times P_1 - 0.75 \times P_3 \leq 0$

En résumé on obtient :

$$\begin{cases} P_1 + P_2 + P_3 \leq 18 \\ P_1 \leq 25 \\ P_2 \leq 6 \\ P_3 \leq 4 \\ 0.15 \times P_1 - 0.21 \times P_2 - 0.75 \times P_3 \leq 0 \\ \text{Trouver le max de } Z = 900 \times P_1 + 700 \times P_2 + 500 \times P_3 \\ \text{Avec } P_1 \geq 0,\ P_2 \geq 0,\ P_3 \geq 0 \end{cases}$$

Maintenant que toutes les contraintes ont été bien modélisées, on peut simplifier certaines choses :

Comme on a $P_2 \geq 0$, et $P_3 \geq 0$ la contrainte $P_1 + P_2 + P_3 \leq 18$ implique $P_1 \leq 18$. Donc elle implique aussi $P_1 \leq 25$ que l'on peut retirer de notre problème sans perte d'information. En simplifiant les équations cela donne :

$$\begin{cases} P_1 + P_2 + P_3 \leq 18 \\ P_2 \leq 6 \\ P_3 \leq 4 \\ 5 \times P_1 - 7 \times P_2 - 25 \times P_3 \leq 0 \\ \text{Trouver le max de } Z = 9 \times P_1 + 7 \times P_2 + 5 \times P_3 \\ \text{Avec } P_1 \geq 0,\ P_2 \geq 0,\ P_3 \geq 0 \end{cases}$$

Avec Z exprimé en «100 k euros».

Le tableau du simplexe donne :

	P_1	P_2	P_3	E_1	E_2	E_3	E_4	Somme
E_1	1	1	1	1	0	0	0	18
E_2	0	1	0	0	1	0	0	6
E_3	0	0	1	0	0	1	0	4
E_4	5	-7	-25	0	0	0	1	0
Δ_j	9	7	5	0	0	0	0	0

Selon le premier critère de Dantzig, le premier pivot est sur la colonne de P_1. Ensuite le second critère de Dantzig donne le pivot de sur la ligne de E_4 (attention, il est tout à fait correct de choisir un 0 dans la colonne «Somme», par contre dans les colonnes des variables on ne peut sélectionner qu'un pivot strictement positif).

On pivote donc P_1 à la place de E_4 (attention, soustraire un nombre négatif, veut dire l'ajouter).

	P_1	P_2	P_3	E_1	E_2	E_3	E_4	Somme
E_1	0	2.4	6	1	0	0	-0.2	18
E_2	0	1	0	0	1	0	0	6
E_3	0	0	1	0	0	1	0	4
P_1	1	-1.4	-5	0	0	0	0.2	0
Δ_j	0	19.6	50	0	0	0	-1.8	0

Il reste des Δ_j strictement positifs, donc on continue. Le second pivot est sur la colonne de P_3, et la ligne de E_1. On pivote P_3 à la place de E_1.

	P_1	P_2	P_3	E_1	E_2	E_3	E_4	Somme
P_3	0	0.4	1	1/6	0	0	-1/30	3
E_2	0	1	0	0	1	0	0	6
E_3	0	0	1	0	0	1	1/30	1
P_1	1	0.6	0	5/6	0	0	1/30	15
Δ_j	0	-0.4	0	-25/3	0	0	-1/5	-150

Tous les Δ_j sont négatifs ou nuls. Le simplexe s'arrête là.

On a $P_1 = 15$, $P_3 = 3$. P_2 n'est pas en base, donc $P_2 = 0$. Et $Z = 150$.

L'entreprise doit donc acheter 15 TWh au premier producteur, 3 au troisième producteur et elle fera une marge de 150 «100 k euros», c'est à dire 15 millions d'euros.

2.5.5 Correction de l'exercice 1.6.4 de la page 13

Pour la modélisation, seule la fonction économique change par rapport à l'exercice précédent : $Z = 850 \times P1 + 710 \times P2 + 500 \times P3$

Donc on obtient :

$$\begin{cases} P_1 + P_2 + P_3 \leq 18 \\ P_1 \leq 25 \\ P_2 \leq 6 \\ P_3 \leq 4 \\ 0.15 \times P_1 - 0.21 \times P_2 - 0.75 \times P_3 \leq 0 \\ \text{Trouver le max de } Z = 850 \times P_1 + 710 \times P_2 + 500 \times P_3 \\ \text{Avec } P_1 \geq 0,\ P_2 \geq 0,\ P_3 \geq 0 \end{cases}$$

En simplifiant et en exprimant Z en «10 k Euros» :

$$\begin{cases} P_1 + P_2 + P_3 \leq 18 \\ P_2 \leq 6 \\ P_3 \leq 4 \\ 5 \times P_1 - 7 \times P_2 - 25 \times P_3 \leq 0 \\ \text{Trouver le max de } Z = 85 \times P_1 + 71 \times P_2 + 50 \times P_3 \\ \text{Avec } P_1 \geq 0,\ P_2 \geq 0,\ P_3 \geq 0 \end{cases}$$

D'où le tableau du simplexe suivant :

	P_1	P_2	P_3	E_1	E_2	E_3	E_4	Somme
E_1	1	1	1	1	0	0	0	18
E_2	0	1	0	0	1	0	0	6
E_3	0	0	1	0	0	1	0	4
E_4	5	-7	-25	0	0	0	1	0
Δ_j	85	71	50	0	0	0	0	0

Les deux pivotements vont êtres les mêmes que dans l'exercice précédent, et seule la ligne des Δ_j change.

Premier pivotement :

	P_1	P_2	P_3	E_1	E_2	E_3	E_4	Somme
E_1	0	2.4	6	1	0	0	-0.2	18
E_2	0	1	0	0	1	0	0	6
E_3	0	0	1	0	0	1	0	4
P_1	1	-1.4	-5	0	0	0	0.2	0
Δ_j	0	190	475	0	0	0	-17	0

Second pivotement :

	P_1	P_2	P_3	E_1	E_2	E_3	E_4	Somme
P_3	0	0.4	1	1/6	0	0	-1/30	3
E_2	0	1	0	0	1	0	0	6
E_3	0	0	1	0	0	1	1/30	1
P_1	1	0.6	0	5/6	0	0	1/30	15
Δ_j	0	0	0	-475/6	0	0	-7/6	-1425

On arrive à une solution optimale (toujours en prenant 15 TWh chez le premier producteur, et 3 chez les troisièmes), qui rapporte 14,25 millions d'euros.

Mais cette fois ci, à la fin du second pivotement il y a une variable hors base qui a son Δ_j nul (P_2). Cela signifie qu'il y a d'autres solutions optimales. En faisant un troisième pivotement pour faire entrer P_2 dans la base on obtient (selon le second critère de Dantzig la ligne de pivotement est celle de E_2) :

	P_1	P_2	P_3	E_1	E_2	E_3	E_4	Somme
P_3	0	0	1	1/6	-0.4	0	-1/30	0.6
P_2	0	1	0	0	1	0	0	6
E_3	0	0	1	0	0	1	1/30	1
P_1	1	0.6	0	5/6	-0,6	0	1/30	11.4
Δ_j	0	0	0	-475/6	0	0	-7/6	-1425

On obtient alors une autre solution optimale qui consiste à acheter 11,4 TWh chez le premier constructeur, 6 TWh chez le second et 0,6 chez le troisième (toujours pour un profit de de 14,25 millions d'euros). Il y a en fait tout un segment de droite compris entre les deux solutions qui donneront ce même profit optimal.

Le revendeur peut donc acheter les 6 TWh du second producteur tout en gardant le meilleurs profit.

2.6 Modélisation

2.6.1 Correction de l'exercice 1.7.1 de la page 13

Il faut résoudre un problème d'ordonnancement de tâches. Pour la première questions, on a le choix entre GANTT et le potentiel-tâches. Mais le deuxième pose clairement la recherche du chemin critique et de la marge totale d'une tâche. Il faudra donc faire un potentiel-tâches. Autant commencer par là dès la première question.

Pour modéliser ce potentiel-tâches, il faut identifier toutes les tâches et leur dépendances.

Il y a trois tâches de récoltes qui ne dépendent de rien d'autre :

Tâche A : La récolte du bois et du cuir par Tawar qui dure 45 minutes.

Tâche B : La récolte du fer de nain par Gorog qui dure 1 heure.

Tâche C : La récolte du fer ancien par Albin qui dure 1 heure.

Il y a deux tâches de traitement qui dépendent de certaines récoltes :

Tâche D : Le traitement du cuir et du bois par Tawar qui dure 15 minutes. Elle arrive après la tâche A.

Tâche E : Le traitement de tout le fer par Albin qui dure 20 minutes. Elle arrive après les deux récoltes de fer (tâche B et C).

Il y a la pause de Gorog :

Tâche F : Cette pause dure 15 minutes et arrive après la récolte fer de nain (tache B).

Il y a les trois tâches de production :

Tâche G : La production d'arbalètes par Tawar qui dure 20 minutes et arrive après le traitement du fer et du bois (tâche E et D).

Tâche H : La production d'armure par Gorog qui dure 25 minutes et arrive après sa pause, mais aussi après le traitement du cuir et du fer (tâche F, D et E).

Tâche I : La production d'épée qui dure 10 minutes ne dépend que du traitement du fer (tâche E).

Enfin il y a la tache de livraison :

Tâche J : Cette livraison prend 10 minutes et arrive après les 3 productions (tâches G, H I).

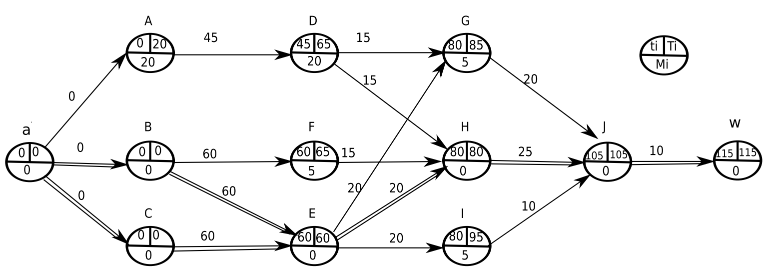


FIG. 2.36 – Graphe potentiel-tâches

Cela donne le graphe potentiel-tâches de la figure 2.36.

Il nous reste à l'interpréter :
– La livraison se fera au bout de 115 minutes (1h55).
– La pause de Gorog (tache F) n'est pas sur le chemin critique. Il n'a pas retardé la livraison avec cette pause.
– La marge totale de cette pause est de 5 minutes. Il peut donc rester encore 5 minutes de plus à la taverne sans retarder le projet. Sa pause maximale est donc de 20 minutes.

2.6.2 Correction de l'exercice 1.7.2 de la page 14

Ici il faut résoudre un problème de programmation linéaire.

Il faut optimiser le gain de la guilde. Si on appelle A le nombre d'arbalètes vendues, et E celui des épées, la fonction à optimiser est (gain exprimé en pièces d'or) :

$$Z = 0,5 \times A + E$$

.

On ne peut pas produire à l'infini ces armes : on a des contraintes sur les ressources.

Tout le bois est utilisé pour les arbalètes (25 morceaux par arbalètes), on a donc : $25 \times A \leq 1000$.

Tout le fer ancien est utilisé pour les épées (25 blocs par épée), on a donc : $25 \times E \leq 1000$

Le fer de nain sert aux deux production (20 blocs par arbalète, 20 blocs par épée), on a donc : $20 \times A + 20 \times E \leq 1000$.

Donc en résumé et après simplifications des inégalités on doit résoudre :

$$\begin{cases} A \leq 40 \\ E \leq 40 \\ A + E \leq 50 \\ \text{Trouver le max de : } Z = 0,5 \times A + E \\ \text{avec } A \geq 0 \text{ et } E \geq 0. \end{cases}$$

Ici deux techniques sont parfaitement adaptées : soit la résolution géométrique, soit le simplexe. Pour cette correction je choisis le simplexe.

On a trois inégalités, il faut ajouter trois variables d'écart : E_1, E_2, E_3.

	A	E	E_1	E_2	E_3	Somme
E_1	1	0	1	0	0	40
E_2	0	1	0	1	0	40
E_3	1	1	0	0	1	50
Δ_j	0,5	1	0	0	0	0

Le premier pivot est sur la colonne de E et la ligne de E_2. Donc après pivotement de E à la place de E_2, on obtient ce second tableau :

	A	E	E_1	E_2	E_3	Somme
E_1	1	0	1	0	0	40
E	0	1	0	1	0	40
E_3	1	0	0	-1	1	10
Δ_j	0,5	0	0	-1		-40

Le second pivot est sur la colonne de A et la ligne de E_3. Après le pivotement de A à la place de E_3, on obtient le troisième tableau :

	A	E	E_1	E_2	E_3	Somme
E_1	0	0	1	1	-1	30
E	0	1	0	1	0	40
A	1	0	0	-1	1	10
Δ_j	0	0	0	-0,5	-0,5	-45

Tous les Δ_j sont négatifs ou nuls, l'algorithme s'arrête là. Donc la solutions donne $A = 10$, $E = 40$ et $Z = 45$.

Interprétons ces chiffres : la guilde doit vendre 10 arbalètes et 40 épées. Elle fera un gain de 45 pièces d'or.

Lorsque Gorog prend les commandes de l'opération, la seule chose qui change c'est la fonction à optimiser. Cette fois ci, on doit optimiser le nombre de chopes : $Z = 2 \times A + E$. Et il nous reste à résoudre le problème avec cette nouvelle fonction. Alors soit on refait tous les calculs (pas bien longs vus les chiffres), soit on réfléchit un peu, et on se dit que si on parle en «double chopes» la fonction à optimiser est : $Z = A + 0,5 \times E$.

Donc il faut résoudre :

$$\begin{cases} A \leq 40 \\ E \leq 40 \\ A + E \leq 50 \\ \text{Trouver le max de : } Z = A + 0,5 \times E \\ \text{avec } A \geq 0 \text{ et } E \geq 0 \end{cases}$$

C'est à dire EXACTEMENT le même problème que précédemment si ce n'est que les E remplacent les A et réciproquement. Donc on connaît déjà la solution, il suffit d'inverser le A et le E de la solution précédente.

Pour notre nouveau problème : $A = 40$ et $E = 10$.

Donc pour satisfaire Gorog, la guilde produit 40 arbalètes et 10 épées. La vente rapporte $40 \times 0,5 + 10 = 30$ pièces d'or, soit une perte de 15 pièces d'or par rapport à la solution optimale.

2.6.3 Correction de l'exercice 1.7.3 de la page 14

On reconnaît ici un problème de recherche d'arbre de recouvrement minimal. Pour cette correction on va appliquer l'algorithme de Kruskal. Pour le mettre en œuvre on va dessiner le graphe et ordonner les arêtes par ordre croissant (voir figure 2.37).

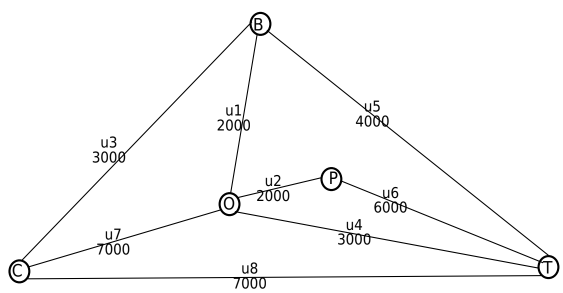


FIG. 2.37 – Les routes triées par ordre de coût

Maintenant en appliquant Kruskal on s'aperçoit que l'on peut prendre les 4 premières arêtes sans former de cycle. Ce sont donc elles qui forment notre arbre de recouvrement minimal (voir figure 2.38).

Donc les 4 routes à reconstruire en priorité sont : celle entre Coudebolle et Borivage, celle entre Borivage et Ollala, celle entre Ollala et Pompays et celle entre Ollala et Tecuge. Le coût de cette reconstruction sera de $2000 + 2000 + 3000 + 3000 = 10\,000$ unités monétaires.

2.6.4 Correction de l'exercice 1.7.4 de la page 14

Cette fois ci c'est un problème de recherche de plus court chemin. Le graphe servant à cette recherche est celui de la figure 2.39.

Mais on va plutôt utiliser un tableau pour faire tourner l'algorithme de Ford-Moore.

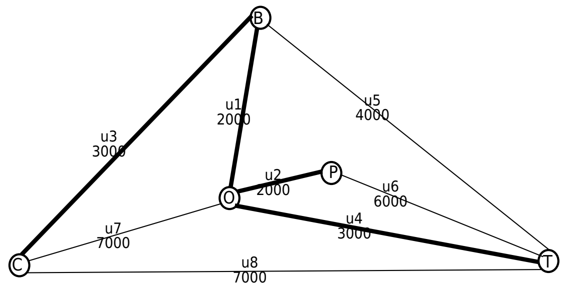


FIG. 2.38 – Les routes à reconstruire pour un réseau à moindre coût

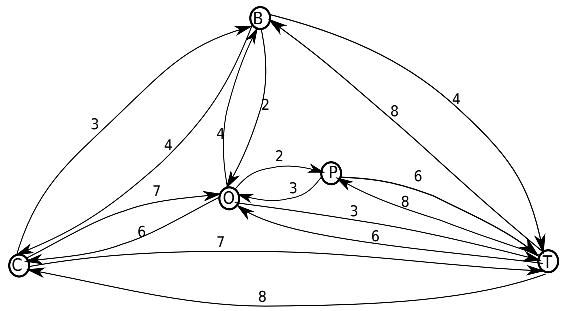


FIG. 2.39 – Graphe des coût de transports

m	$\lambda(C)$	$\lambda(B)$	$\lambda(O)$	$\lambda(P)$	$\lambda(T)$	changés	Γ^+
0	0	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	~~∞~~	C	B, O T
1		3/C	~~7/C~~		7/C	B O T	C, O, T C, B, P, T C, B, O, P
2	~~7/B~~ ~~13/O~~ ~~15/T~~	 ~~11/O~~ ~~16/T~~	5/B ~~14/T~~	 ~~9/O~~ ~~16/T~~	7/B ~~10/O~~	O P	C, B, P, T O, T
3	~~11/O~~	~~9/O~~	 ~~12/P~~	7/O	~~8/O~~ ~~15/P~~	P	O, T
4			~~10/P~~		~~13/P~~		

Depuis Coudebolle, pour aller à :
- Borivage, il faut prendre la route directe. Cela coûte 3 unités/tonne
- Ollala, il faut passer par Borivage. Cela coûte 5 unités/tonne
- Pompays, il faut passer par Borivage et Ollala. Cela coûte 7 unités/tonne
- Tecuge, il faut soit prendre la route directe soit passer par Borivage. Cela coûte 7 unités/tonne

2.6.5 Correction de l'exercice 1.7.5 de la page 15

Si on compare les routes qu'il faudrait utiliser pour un transport à moindre coût (figure 2.40) avec celles qu'il faudrait construire pour une reconstruction à moindre coût (figure 2.38) on trouve beaucoup de similitudes. La seule différence se trouve sur le chemin allant à Tecuge. Si on garde le réseau de reconstruction à moindre coût, la seule route permettant d'aller à Tecuge coûtera 8 unités/tonne à la place des 7 possibles par les deux autres routes. Par contre si on décide ne remplacer la route Ollala-Tecuge, par la route Borivage-Tecuge, on aura un transport à moindre coût pour toutes les destinations pour une reconstruction 1000 unités plus chère.

Si on envisage de transporter plus de 1000 tonnes vers Tecuge l'investissement sera rentabilisé. Alors il vaudra mieux faire ce choix et reconstruire le réseau de la figure 2.41 pour $11\,000$ unités monétaires.

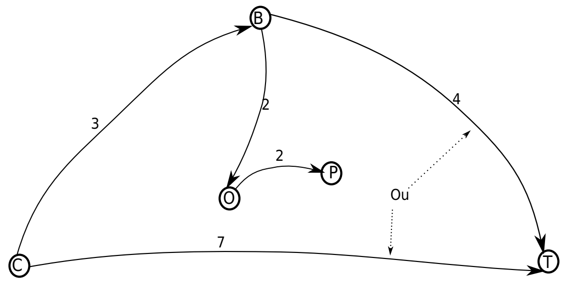


FIG. 2.40 – Routes pour les transports à moindre coût

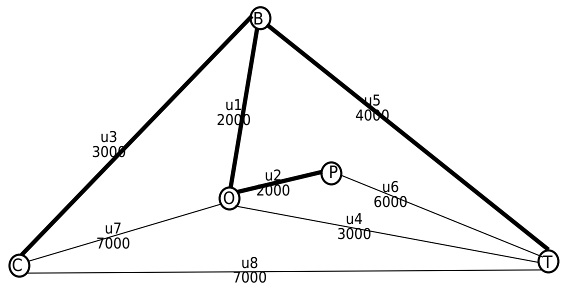


FIG. 2.41 – Réseau à reconstruire si on transporte plus de 1000 tonnes vers Tecuge

2.6.6 Correction de l'exercice 1.7.6 de la page 15

On reconnaît ici un problème de flot maximal. Et la seconde question sera celui d'un flot maximal à coût minimal.

Pour résoudre ce problème il faut déjà modéliser le réseau transport par un graphe. Un premier jet donne la figure 2.42

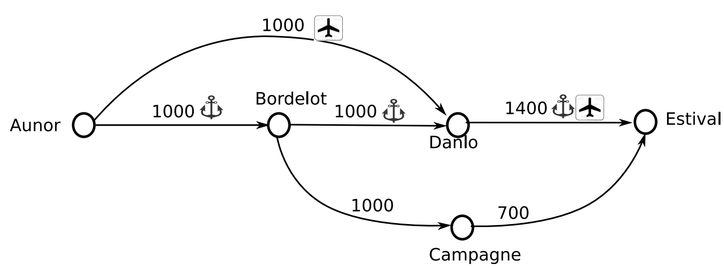


FIG. 2.42 – Réseau de transport entre Aunor et Estival

Même s'il existe deux moyens de transport différents entre Danlo et Estival, du point de vue du modèle, rien ne les distingue. Ils ont donc été unifiés en un seul arc de capacité 1400.

Mais il est possible d'apporter des simplification à ce graphe :

Lorsqu'un sommet n'a qu'un seul arc entrant et un seul arc sortant, il est possible de le supprimer en remplaçant les deux arcs par un seul arc ayant la capacité minimale des deux arcs.

$$S_1 \quad \stackrel{c_1}{\longrightarrow} \quad S_2 \quad \stackrel{c_2}{\longrightarrow} \quad S_3 \quad \text{devient} \quad S_1 \quad \stackrel{min(c_1,c_2)}{\longrightarrow} \quad S_3$$

Donc on peut supprimer le sommet «Campagne» pour ne mettre qu'un arc de capacité 700 entre Bordelot et Estival.

On obtient ainsi le réseau de transport de la figure 2.43

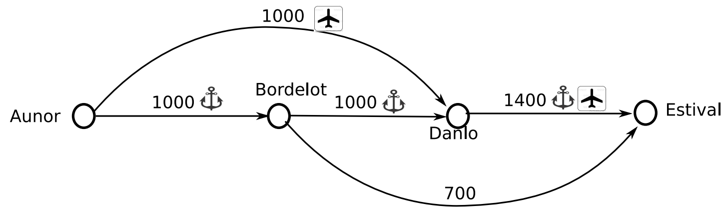


FIG. 2.43 – Réseau de transport entre Aunor et Estival après simplifications

Il reste à utiliser l'algorithme de Ford-Fulkerson sur ce graphe. Pour cela on commence par un flot initial en envoyant 1000 personnes en bateau jusqu'à Danlo. Ensuite ces 1000 personnes utilisent bateau et avion pour aller à Estival. Cela laisse la possibilité à 400 personnes de voyager en avion depuis Aunor jusqu'à Danlo, où ils peuvent continuer en bateau ou avion. On obtient le flot de la figure 2.44.

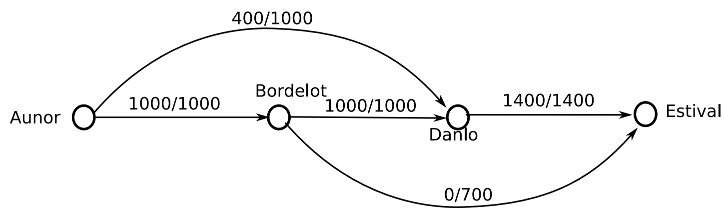


FIG. 2.44 – Flot initial pour commencer l'algorithme de Ford-Fulkerson

Lorsqu'on regarde si ce flot peut être amélioré, le marquage de l'algorithme de Ford-Fulkerson arrive jusqu'au puits (voir figure 2.45).

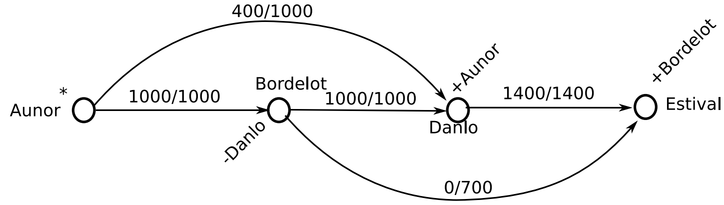


FIG. 2.45 – Ford-Fulkerson : marquage d'une chaîne améliorante

Il existe donc une chaîne améliorante :

$$\text{Aunor} \xrightarrow{1000-400=600} \text{Danlo} \xleftarrow{1000} \text{Bordelot} \xrightarrow{700-0=700} \text{Estival}$$

Le gain que l'on peut obtenir sur cette chaîne améliorante est de 600 personnes. On ajoute donc 600 personnes sur les trajets entre Aunor et Danlo et entre Bordelot et Estival. On retire ce flot sur l'arc inverse, entre Danlo et Bordelot. On obtient le nouveau flot de la figure 2.46. Comme le flot sortant de la source est saturé, on sait que le flot maximal est atteint. Il est de 2000 personnes.

Les capacités de transports autorisent donc le gouvernement à acheminer 2000 personnes depuis Aunor jusqu'à Estival. Une solution pour obtenir ce flot consiste à faire partir 1000 personne en bateau depuis Aunor jusqu'à Bordelot. 600 prennent alors la route pour Estival en passant par Campagne, et 400 continuent en bateau jusqu'à Danlo. Là ils sont rejoints par 1000 autres personnes qui arrivent en avion depuis Aunor. Les 1400 personnes arrivées à Danlo continuent jusqu'à Estival en empruntant avion ou bateau.

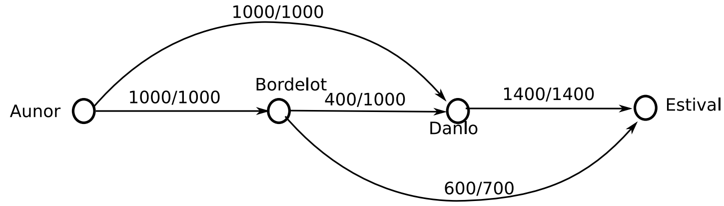


FIG. 2.46 – Flot après amélioration : il s'agit du flot maximal

Maintenant il faut savoir combien de personnes le gouvernement a les moyens de transporter. Il s'agit d'un problème de type «flot maximal à coût minimal». Le figure 2.47 illustre le premier jet pour modéliser le réseau de transport en intégrant les coûts. Cette fois ci il va falloir distinguer le moyen de transport entre Danlo et Estival, car le coût va changer suivant que l'on prend l'avion ou le bateau. Pour cela il va falloir introduire deux sommets artificiels pour séparer les deux routes. On va donc placer un «port» et un «aéroport» sur notre graphe.

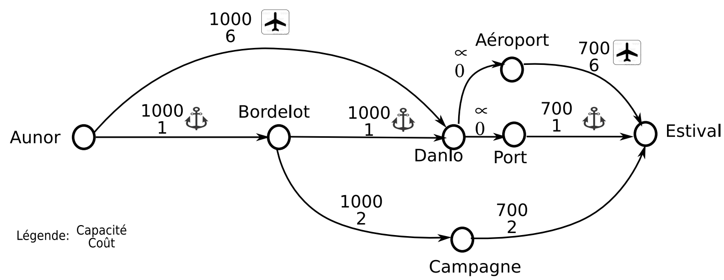


FIG. 2.47 – Réseau de transport avec coûts entre Aunor et Estival

Lorsqu'un sommet n'a qu'un seul arc entrant et un seul arc sortant, il est possible de le supprimer en remplaçant les deux arcs par un seul arc ayant la capacité minimal des deux arcs et la somme des coûts des deux arcs :

$$S_1 \xrightarrow{\text{cap}_1\,/\text{coût}_1} S_2 \xrightarrow{\text{cap}_2\,/\text{coût}_2} S_3 \quad \text{devient} \quad S_1 \xrightarrow{\min(\text{cap}_1,\text{cap}_2)/\text{coût}_1+\text{coût}_2} S_3$$

Donc on peut remplacer les deux arcs adjacents à Campagne par un seul ayant 700 de capacité et 4 galets par personne pour coût. On obtient le modèle de le figure 2.48. Il n'est pas possible de faire cette simplification pour les arcs entre Danlo et Estival, car cela placerait deux arcs différents entre le même couple de sommets (on obtiendrait un «multigraphe»), et les algorithmes utilisés par la suite (par exemple la recherche de plus court chemin utilisé pour Busacker et Gowen) ne fonctionne pas sur ce type de graphe.

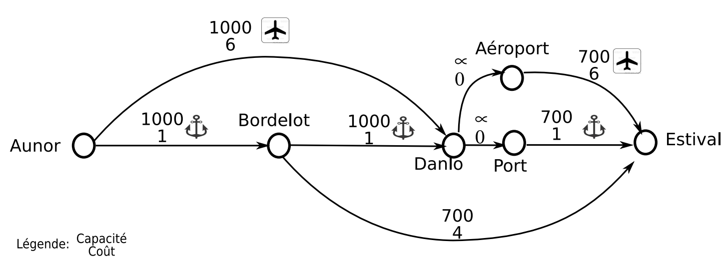


FIG. 2.48 – Réseau de transport avec coûts après simplification

À partir de ce modèle on peut mettre en œuvre l'algorithme de Busacker et Gowen. Mais attention, la condition d'arrêt sera le coût de transport. Si on atteint le coût maximal autorisé (5400 galets) avant que le flot maximal ne soit atteint, il faudra s'arrêter.

Il faut commencer par faire circuler un premier flot par le chemin le plus court au sens du coût[2] : c'est le transport en bateau de bout en bout qui coûte le moins cher, 3 galets par personne :

$$\text{Aunor} \xrightarrow{1000/1} \text{Bordelot} \xrightarrow{1000/1} \text{Danlo} \xrightarrow{\infty/0} \text{Port} \xrightarrow{700/1} \text{Estival}$$

On peut transporter 700 personnes par ce chemin pour un coût global $700 \times 3 = 2100$ galets. On reporte ce flot sur le réseau de transport et on calcule le graphe associé pour trouver le nouveau chemin le plus court (voir figure 2.49).

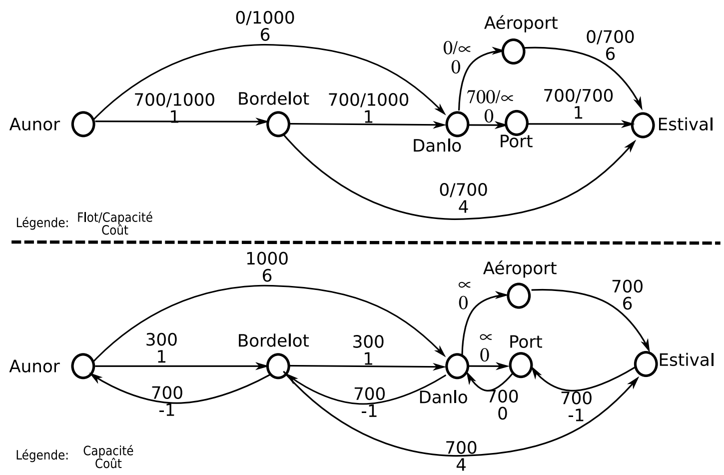


FIG. 2.49 – Busacker et Gowen : premier flot et graphe associé

Le chemin le plus court consiste à transporter les personnes en bateau jusqu'à Bordelot pour ensuite prendre la route jusqu'à Estival pour un coût de 5 galets par personne.

$$\text{Aunor} \xrightarrow{300/1} \text{Bordelot} \xrightarrow{700/4} \text{Estival}$$

On peut transporter 300 personnes par ce chemin pour un coût global de $300 \times 5 = 1500$ galets. Donc en cumulant les deux flots, on peut transporter 1000 personnes pour un coût de 3600 galets. Le budget maximal pour le transport n'est pas encore atteint, on peut continuer l'algorithme.

Après report du nouveau flot sur le graphe, on obtient la figure 2.50.

Le nouveau chemin le plus court part d'Aunor, passe par Danlo et Bordelot et arrive à Estival. Il consiste à acheminer par la route une partie des personnes qui prenaient le bateau à Bordelot pour laisser leur place aux personnes qui arrive en avion à Danlo (et qui peuvent ainsi continuer en bateau). Cela revient à 9 galets par personne.

$$\text{Aunor} \xrightarrow{1000/6} \text{Danlo} \xleftarrow{700/-1} \text{Bordelot} \xrightarrow{400/4} \text{Estival}$$

On peut transporter 400 personnes par ce chemin pour un coût global de $400 \times 9 = 3600$ galets. En cumulant ce flot avec les précédents on atteindrait 7200 galets de coût de transport. Ce qui dépasserait le budget maximal. On ne peut donc pas saturer ce nouveau chemin. Le budget restant après les 3600 galets utilisés pour les deux premiers flots est de $5400 - 3600 = 1800$ galets. Avec un coût unitaire de 9 galets par personne, on peut donc transporter 200 personnes de plus. La figure 2.51 illustre le flot maximal (1200 personnes) pour le budget fixé (5400 galets).

Pour 5400 galets de budget de transport, le gouvernement peut acheminer 1200 personnes. 1000 prendront le bateau depuis Aunor jusqu'à Bordelot. de là 700 continueront par la route jusqu'à Estival. 300 autre reprendront le bateau jusqu'à Danlo. Là ils seront rejoints par 200 personnes arrivées en avion depuis Aunor. Ces 500 personnes finiront leur voyage en bateau jusqu'à Estival.

[2] Pour alléger la correction, les recherches de chemin le plus court ne sont pas reportées ici.

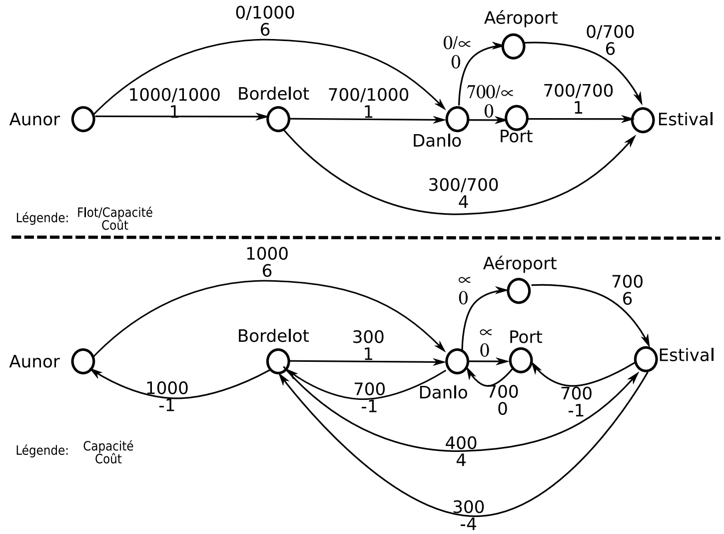


FIG. 2.50 – Busacker et Gowen : graphes après ajout du second flot

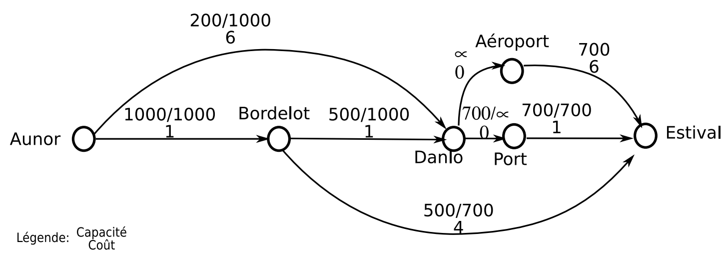


FIG. 2.51 – Flot maximal pour le budget fixé

2.6.7 Correction de l'exercice 1.7.7 de la page 16

Pour la première question on reconnaît un problème de flot maximal. La figure 2.52 montre le graphe utilisé pour modéliser ce flot (les unités sont en millions de litres).

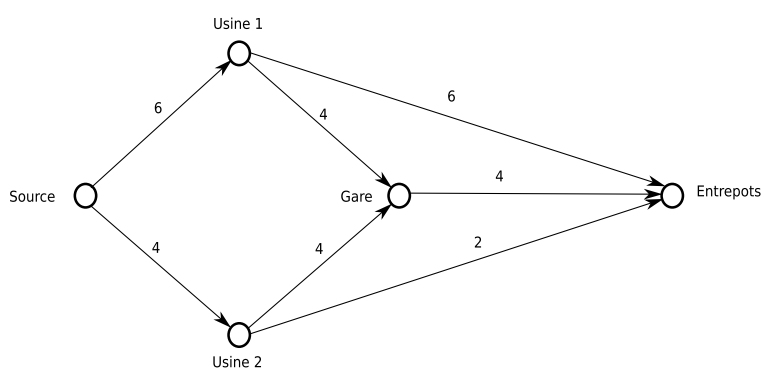


FIG. 2.52 – Modélisation du flot

Pour trouver le flot maximal, on établit un premier flot au jugé en envoyant toute la production de l'usine 1 par la route et toute la production de l'usine 2 par la gare. On obtient le flot de la figure 2.53.

Ce flot sature les arcs sortants de la source. Donc un marquage fait avec l'algorithme de Ford-Fulkerson ne permettrait de marquer que la source. Ce flot est donc maximal.

La société des eaux peut donc livrer 10 millions de litres d'eaux par mois à son client.

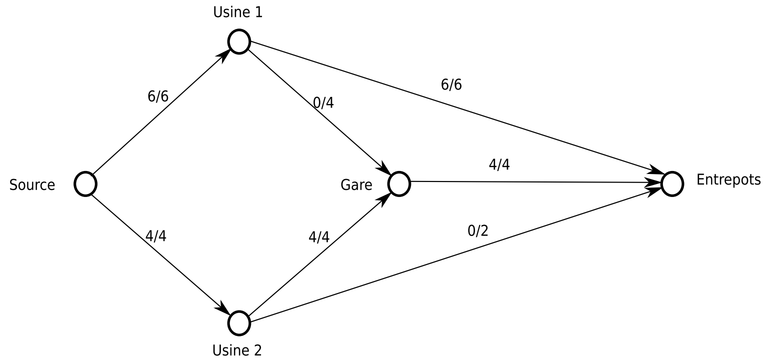


FIG. 2.53 – Premier flot au jugé... et flot maximal

Pour la seconde question, il faut modéliser un problème de flot maximal à coût minimal. En reportant les coûts d'exploitation et de transport sur le graphe de flot de la première question on obtient le modèle de la figure 2.54 (unités : millions de litres pour les capacités, et k euros par millions de litres pour les coûts).

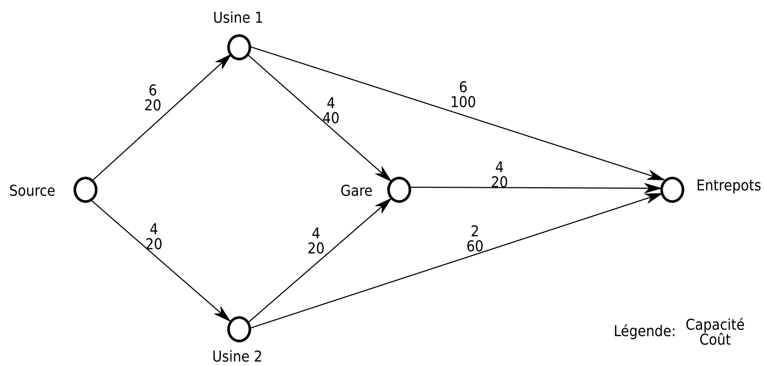


FIG. 2.54 – Modélisation du flot maximal à coût minimal

Il faut maintenant utiliser l'algorithme de Busaker et Gowen :

Première itération : Il faut commencer par trouver le plus court chemin de la source aux entrepôts au sens du coût, avec par exemple l'algorithme de Ford-Moore.

m	$\lambda(Source)$	$\lambda(Usine1)$	$\lambda(Usine2)$	$\lambda(Gare)$	$\lambda(Entrepts)$	Sommets changés	Γ^+
0	0	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	Source	Usine 1, Usine 2
1		20/Source	20/Source			Usine 1 Usine 2	Gare, Entrepôts Gare, Entrepôts
2				~~60/Usine 1~~ 40/Usine 2	~~120/Usine 1~~ ~~80/Usine 2~~	Gare Entrepôts	Entrepôts
3					60/Gare	Entrepôts	

Le plus court chemin (le moins cher) passe donc par l'usine 2 et la gare. Il coûte 60 k euros par millions de litre.

$$\text{Source} \xrightarrow{4} \text{Usine 2} \xrightarrow{4} \text{Gare} \xrightarrow{4} \text{Entrepôts}$$

Tous les arcs du chemin permettent de faire passer 4 millions de litres. Donc on peut établir par ce chemin un premier flot de 4 millions de litres pour un coût global de $60 \times 4 = 240$ k euros.

Deuxième itération : Le flot maximal n'est pas atteint, il faut continuer. Pour cela il faut établir le nouveau graphe associé au flot qu'on a déjà fait passer (figure 2.55).

Il faut trouver le plus court chemin du nouveau graphe calculé de la source aux entrepôts au sens du coût.

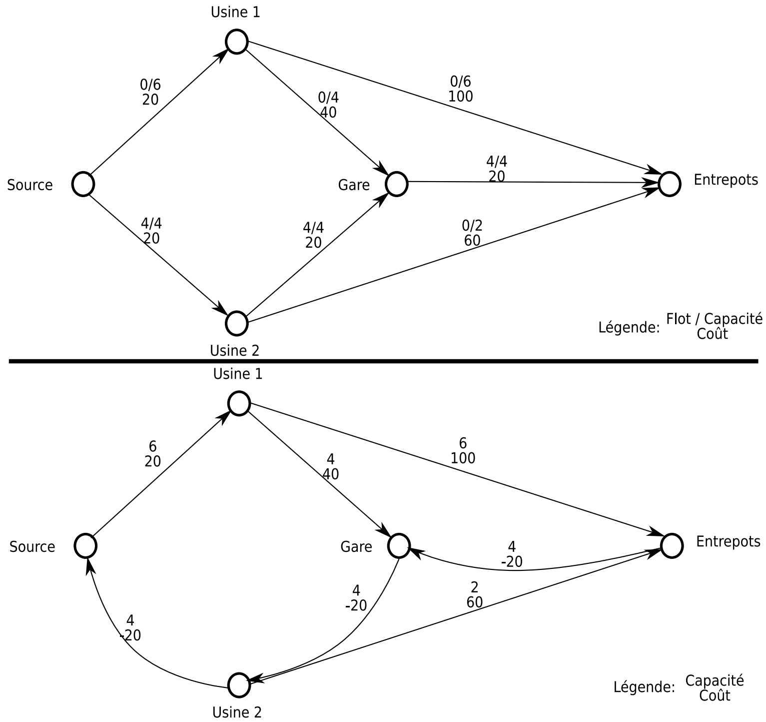


FIG. 2.55 – Graphes de la deuxième itération

m	$\lambda(Source)$	$\lambda(Usine1)$	$\lambda(Usine2)$	$\lambda(Gare)$	$\lambda(Entrepts)$	Sommets changés	Γ^+
0	0	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	Source	Usine 1
1		20/Source				Usine 1	Gare, Entrepôts
2				60/Usine 1	~~120/Usine 1~~	Gare Entrepôts	Usine 2 Gare
			40/Gare	~~100/Entrepôts~~		Usine 2	Source, Entrepôts
3	~~20/Usine 2~~				100/Usine 2	Entrepôts	Gare
4			~~80/Entrepôts~~				

Le plus court chemin (le moins cher) passe donc par l'usine 1, la gare et l'usine 2. Il coûte 100 k euros par millions de litre.

$$\text{Source} \xrightarrow{6} \text{Usine 1} \xrightarrow{4} \text{Gare} \xleftarrow{4} \text{Usine 2} \xrightarrow{2} \text{Entrepôts}$$

Sur ce chemin, l'arc ayant la capacité minimale est la route entre l'usine 2 et les entrepôts : on ne peut faire passer que 2 millions de litres. Donc on peut établir par ce chemin un second flot de 2 millions de litres pour un coût global de $100 \times 2 = 200$ k euros.

Troisième itération : Le flot maximal n'est pas atteint, il faut continuer. Pour cela il faut établir le nouveau graphe associé aux flots qu'on a déjà fait passer (figure 2.56).

Sur le graphe calculé, le seul chemin qui reste entre la source et les entrepôts passe par l'usine 1 et va directement aux entrepôts. Son coût est de 120 millions par litre.

$$\text{Source} \xrightarrow{4} \text{Usine 1} \xrightarrow{6} \text{Entrepôts}$$

Sur ce chemin, la capacité restante entre la source et l'usine 1 n'est que de 4 millions de litres. Donc le coût global de ce chemin sera de $120 \times 4 = 480$ k euros.

La somme des trois flots (4 + 2 + 4 = 10 millions de litres) atteint le flot maximal. L'algorithme s'arrête donc ici.

La somme du coût des trois flots est donc : $240 + 200 + 480 = 920$ k euros.

Le graphe de figure 2.57 modélise ce flot au coût minimal.

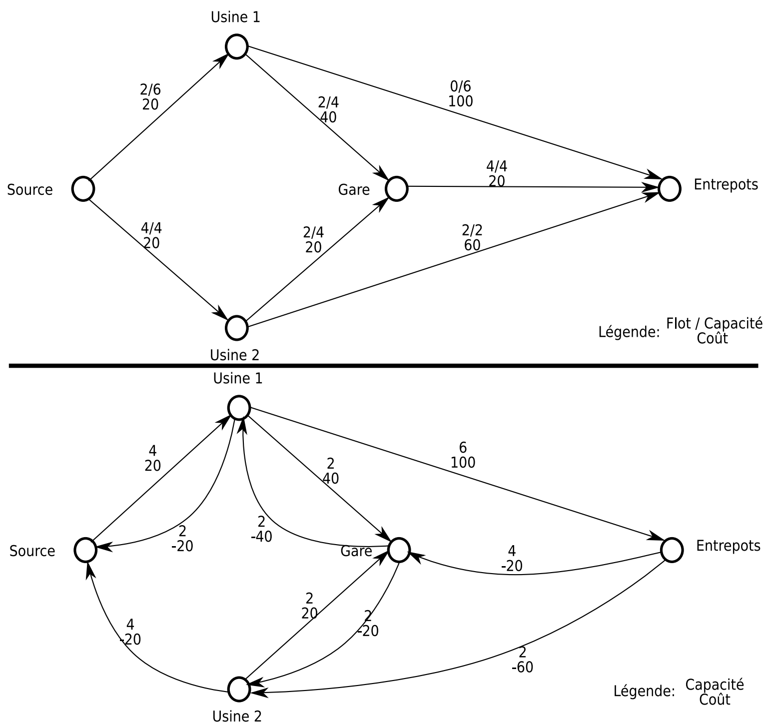


FIG. 2.56 – Graphes de la troisième itération

Donc le coût minimal pour le flot maximal est de 920 k euros. Pour cela, il faut envoyer 4 millions de litres de la production de l'usine 1 par la route, 2 millions de litres de la productions de l'usine 2 par la route et enfin 2 millions litres de la production de chaque usine (donc au total 4 millions de litres) par la gare.

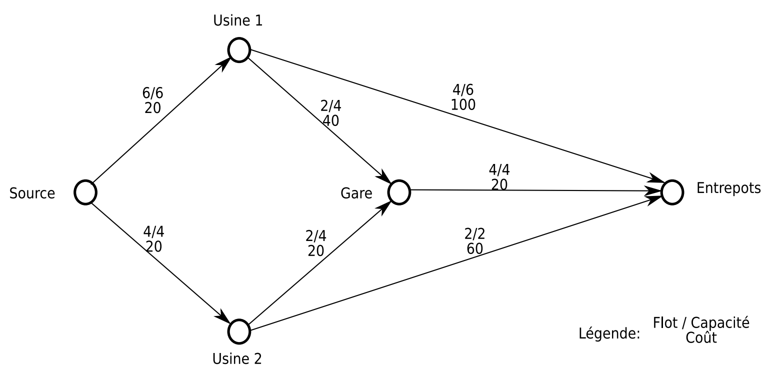


FIG. 2.57 – Flot à coût minimal

2.6.8 Correction de l'exercice 1.7 de la page 17

A première vue ce problème ressemble beaucoup au précédent. Mais après analyse, on constate qu'on ne peut pas le modéliser de la même manière. En effet l'eau qui part de l'usine 1 et celle qui part de l'usine 2 ne sont plus de la même nature. Elles dégagent des marges différentes, on ne peut donc plus les mélanger dans un flot unique et les traiter comme un problème de flot. Les capacités des moyens de transports deviennent des contraintes sur des variables qui vont représenter les quantités d'eau que l'on va pouvoir livrer. Toutes ses contraintes vont s'exprimer de façon linéaire.

Nous avons donc à faire à un problème de programmation linéaire.

A priori pour modéliser la fonction économique seule deux variables suffisent :
- X_1 : la production livrée de l'usine 1 (en million de litres).
- X_2 : la production livrée de l'usine 2 (en million de litres).

Avec ces variables la fonction économique représentant la marge à maximiser serait : $Z = 100 \times X_1 + 150 \times X_2$ avec Z en k euros.

Mais lorsqu'on essaie de modéliser les contraintes sur le transport on s'aperçoit que l'on est obligé de distinguer l'eau qui va être acheminée par la route de celle qui va être acheminée par la gare, et cela pour les 2 usines. Il faut donc utiliser 4 variables :

- X_{r1} : la production livrée par la route de l'usine 1 (en million de litres).
- X_{g1} : la production livrée par la gare de l'usine 1 (en million de litres).
- X_{r2} : la production livrée par la route de l'usine 2 (en million de litres).
- X_{g2} : la production livrée par la gare de l'usine 2 (en million de litres).

La fonction économique devient : $Z = 100 \times X_{r1} + 100 \times X_{g1} + 150 \times X_{r2} + 150 \times X_{g2}$

Ensuite il faut reporter les contraintes de production et de transport sur ces variables :

- L'usine 1 ne peut produire que 6 millions de litres : $X_{r1} + X_{g1} \leq 6$
- L'usine 2 ne peut produire que 4 millions de litres : $X_{r2} + X_{g2} \leq 4$
- Depuis l'usine 1, on peut transporter 4 millions de litre par la route : $X_{r1} \leq 4$
- Depuis l'usine 2, on peut transporter 2 millions de litre par la route : $X_{r2} \leq 2$
- On ne peut transporter que 3 millions par la gare : $X_{g1} + X_{g2} \leq 3$

En résumé, une fois mis sous la forme canonique, le problème se modélise par :

Trouvez le maximum de Z (exprimé en k euros), avec :

$$\begin{cases} X_{r1} + X_{g1} \leq 6 \\ X_{r2} + X_{g2} \leq 4 \\ X_{r1} \leq 4 \\ X_{r2} \leq 2 \\ X_{g1} + X_{g2} \leq 3 \\ Z = 100 \times X_{r1} + 100 \times X_{g1} + 150 \times X_{r2} + 150 \times X_{g2} \\ X_{r1} \geq 0 \; X_{g1} \geq 0 \; X_{r2} \geq 0 \; X_{g2} \geq 0 \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème de programmation linéaire à 4 variables il faut passer par le simplexe. Il faut ajouter 5 variables d'écart pour transformer les 5 inégalités de la forme canonique et obtenir la forme standard :

Trouvez le maximum de Z (exprimé en k euros), avec :

$$\begin{cases} X_{r1} + X_{g1} + E_1 = 6 \\ X_{r2} + X_{g2} + E_2 = 4 \\ X_{r1} + E_3 = 4 \\ X_{r2} + E_4 = 2 \\ X_{g1} + X_{g2} + E_5 = 3 \\ Z = 100 \times X_{r1} + 100 \times X_{g1} + 150 \times X_{r2} + 150 \times X_{g2} \\ X_{r1} \geq 0 \; X_{g1} \geq 0 \; X_{r2} \geq 0 \; X_{g2} \geq 0 \; E_1 \geq 0 \; E_2 \geq 0 \; E_3 \geq 0 \; E_4 \geq 0 \; E_5 \geq 0 \end{cases}$$

Mis sous la forme du simplexe on obtient :

	X_{r1}	X_{g1}	X_{r2}	X_{g2}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	Somme
E_1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	6
E_2	0	0	1	1	0	1	0	0	0	4
E_3	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4
E_4	0	0	1	0	0	0	0	1	0	2
E_5	0	1	0	1	0	0	0	0	1	3
Δ_j	100	100	150	150	0	0	0	0	0	0

Deux colonnes sont possibles pour le premier pivot (X_{r2} ou X_{g2}) on va choisir celle de X_{r2}. Dans ce cas, la ligne du pivot est celle de E_4.

Après pivotement, on obtient :

	X_{r1}	X_{g1}	X_{r2}	X_{g2}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	Somme
E_1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	6
E_2	0	0	0	1	0	1	0	-1	0	2
E_3	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4
X_{r2}	0	0	1	0	0	0	0	1	0	2
E_5	0	1	0	1	0	0	0	0	1	3
Δ_j	100	100	0	150	0	0	0	-150	0	-300

Le second pivot est sur la colonne de X_{g2} et la ligne de E_2.

Après pivotement, on obtient :

	X_{r1}	X_{g1}	X_{r2}	X_{g2}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	Somme
E_1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	6
X_{g2}	0	0	0	1	0	1	0	-1	0	2
E_3	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4
X_{r2}	0	0	1	0	0	0	0	1	0	2
E_5	0	1	0	0	0	-1	0	1	1	1
Δ_j	100	100	0	0	0	-150	0	0	0	-600

Deux colonnes sont possibles pour le troisième pivot (X_{r1} ou X_{g1}) on va choisir celle de X_{r1}. Dans ce cas, la ligne du pivot est celle de E_3.

Après pivotement, on obtient :

	X_{r1}	X_{g1}	X_{r2}	X_{g2}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	Somme
E_1	0	1	0	0	1	0	-1	0	0	2
X_{g2}	0	0	0	1	0	1	0	-1	0	2
X_{r1}	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4
X_{r2}	0	0	1	0	0	0	0	1	0	2
E_5	0	1	0	0	0	-1	0	1	1	1
Δ_j	0	100	0	0	0	-150	-100	0	0	-1000

Le quatrième pivot est sur la colonne de X_{g1} et la ligne de E_5.

Après pivotement, on obtient :

	X_{r1}	X_{g1}	X_{r2}	X_{g2}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	Somme
E_1	0	0	0	-1	1	1	-1	-1	-1	1
X_{g2}	0	0	0	1	0	1	0	-1	0	2
X_{r1}	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4
X_{r2}	0	0	1	0	0	0	0	1	0	2
X_{g1}	0	1	0	0	0	-1	0	1	1	1
Δ_j	0	0	0	0	0	-50	-100	-100	-100	-1100

Tous les Δ_j sont négatifs ou nuls, l'algorithme s'arrête ici.

À la fin, X_{r1} vaut 4, X_{g1} vaut 1, X_{r2} vaut 2, X_{g2} vaut 2, E_1 vaut 1 et Z vaut 1100.

Donc pour maximiser sa marge la société des eaux devra acheminer
- par la route 4 millions de litres de l'usine 1 et 2 millions de l'usine 2.
- par la gare 1 million de litres de l'usine 1 et 2 millions de l'usine 2.

1 million de litres de la capacité de production de l'usine 1 restera sans usage (E_1 = 1) faute de transport.

La marge de la société sera alors de 1100 k euros, c'est à dire 1,1 million d'euros.

2.6.9 Correction de l'exercice 1.7.9 de la page 17

On reconnaît ici un problème de programmation linéaire. La fonction à optimiser est celle qui donne le gain de la vente des gravats. Si on appelle M_1 le nombre de tonnes vendues du premier mélange (60% de roches friables et 40% de roches dures), M_2 le nombre de tonnes vendues du deuxième mélange (20% de roches friables, 20% de roches dures et 60% de roches intermédiaires), et M_3 le nombre de tonnes vendues du troisième lot (100% de roches intermédiaires), l'expression de Z donne :

$$Z = 100 \times M_1 + 80 \times M_2 + 50 \times M_3$$

Le nombre de tonnes vendues est limité par le stock de gravat :
- Il y a 90 tonnes de roches friables : $0.6 \times M_1 + 0.2 \times M_2 \leq 90$
- Il y a 30 tonnes de roches dures : $0.4 \times M_1 + 0.2 \times M_2 \leq 30$
- Et il y a 54 tonnes de roches intermédiaires : $0.6 \times M_2 + M_3 \leq 54$

La forme canonique du problème est donc :

Trouvez le maximum de Z avec :

$$.\left\{\begin{array}{lllll}(1) & 0.6 \times M_1 & +0.2 \times M_2 & & \leq 90 \text{ (unité : tonnes de roches friables)} \\ (2) & 0.4 \times M_1 & +0.2 \times M_2 & & \leq 30 \text{ (unité : tonnes de roches dures)} \\ (3) & & 0.6 \times M_2 & +M_3 & \leq 54 \text{ (unité : tonnes de roches intermédiaires)} \\ Z = & 100 \times M_1 & +80 \times M_2 & +50 \times M_3 & \\ \text{avec} & M_1 \geq 0, & M_2 \geq 0 & \text{et } M_3 \geq 0. & \end{array}\right.$$

Avant de faire le simplexe, on va supprimer les virgules des inégalités en les multipliant par 10.

$$.\left\{\begin{array}{lllll}(1) & 6 \times M_1 & +2 \times M_2 & & \leq 900 \text{ (unité : 1/10 tonnes de roches friables)} \\ (2) & 4 \times M_1 & +2 \times M_2 & & \leq 300 \text{ (unité : 1/10 tonnes de roches dures)} \\ (3) & & 6 \times M_2 & +10M_3 & \leq 540 \text{ (unité : 1/10 tonnes de roches intermédiaires)} \\ Z = & 100 \times M_1 & +80 \times M_2 & +50 \times M_3 & \\ \text{avec} & M_1 \geq 0, & M_2 \geq 0 & \text{et } M_3 \geq 0. & \end{array}\right.$$

Avec l'ajout des variables d'écart E_1 (sur les roches friables), E_2 (sur les roches dures), E_3 (sur les roches intermédiaires), on obtient ce premier tableau du simplexe :

	M_1	M_2	M_3	E_1	E_2	E_3	Somme
E_1	6	2	0	1	0	0	900
E_2	4	2	0	0	1	0	300
E_3	0	6	10	0	0	1	540
Δ_j	100	80	50	0	0	0	0

Le premier pivot est donc sur la colonne de M_1 et la ligne de E_2. Après pivotement on obtient ce second tableau :

	M_1	M_2	M_3	E_1	E_2	E_3	Somme
E_1	0	-1	0	1	-3/2	0	450
M_1	1	1/2	0	0	1/4	0	75
E_3	0	6	10	0	0	1	540
Δ_j	0	30	50	0	-25	0	-7 500

Il reste des Δ_j strictement positifs. On continue donc l'algorithme et le second pivot est sur la colonne de M_3 et la ligne de E_3.

	M_1	M_2	M_3	E_1	E_2	E_3	Somme
E_1	0	-1	0	1	-3/2	0	450
M_1	1	1/2	0	0	1/4	0	75
M_3	0	3/5	1	0	0	1/10	54
Δ_j	0	0	0	0	-25	-5	-10 200

Tous les Δ_j sont négatifs ou nuls, on a donc atteint la solution optimale : $M_1 = 75$, $M_2 = 0$, $M_3 = 54$, et $Z = 10\,200$.

Donc Gorog doit vendre 75 tonnes du premier mélange et 54 tonnes du troisième lots pour gagner $10\,200$ pièce d'or.

Dans la forme canonique du problème, la contrainte sur les roches friables était exprimée par l'inégalité (1). C'est donc la variable d'écart E_1 qui détermine le «reste» de roches friable après la vente. E_1 est toujours en base pour la solution optimale, donc E_1 n'est pas nulle et vaut 450.

Donc oui il reste des gravats de roches friables après la vente. Comme après simplification des inégalités l'unité de la contrainte (1) était des 1/10ème de tonnes, il reste 450 1/10ème de tonnes donc 45 tonnes.

La question semble sous-entendre qu'il existerait peut-être une autre façon de repartir les lots tout en gardant le gain optimal. Effectivement, si on regarde le tableau final du simplexe de la question précédente, on constate qu'à la fin M_2 a un Δ_j nul tout en étant hors base. Cela signifie que notre problème n'a pas une solution, mais une infinité de solutions : tout un segment de droite. La question précédente nous a donné une des extrémités de ce segment ($M_1 = 75$, $M_2 = 0$, $M_3 = 54$). Il faut faire un pivotement suplémentaire pour connaître l'autre extrémité.

État du simplexe à la fin de la question précédente :

	M_1	M_2	M_3	E_1	E_2	E_3	Somme
E_1	0	-1	0	1	-3/2	0	450
M_1	1	1/2	0	0	1/4	0	75
M_3	0	3/5	1	0	0	1/10	54
Δ_j	0	0	0	0	-25	-5	-10 200

Pour obtenir le même gain mais avec une autre solution on peut pivoter sur la variable hors base avec un Δ_j nul : M_2. Le pivot est sur la ligne de M_3.

On obtient ce nouveau tableau :

	M_1	M_2	M_3	E_1	E_2	E_3	Somme
E_1	0	0	5/3	1	-3/2	1/6	540
M_1	1	0	-5/6	0	1/4	-1/12	30
M_2	0	1	5/3	0	0	1/6	90
Δ_j	0	0	0	0	-25	-5	-10 200

Pour cette nouvelle solution (avec un gain inchangé de $10\,200$ pièces d'or), on a $M_1 = 30$, $M_2 = 90$ et $M_3 = 0$. Mais on constate que E_1 est toujours en base et que sa valeur a augmenté : elle est passée à 540. Ainsi cette solution laisse 54 tonnes de gravats de roches friables non vendues. Elle est donc plus intéressante pour Gorog.

Au final Gorog doit vendre 30 tonnes du mélange 1, 90 tonnes du mélange 2, rien pour le lot 3. Il tirera de sa vente $10\,200$ pièces d'or et conservera 54 tonnes de gravats de roches friables.

2.6.10 Correction de l'exercice 1.7.10 de la page 17

On doit optimiser un gain fonction de différentes variables (le nombre de containers allant d'une usine vers un magasin), tout en respectant différentes contraintes (transports, et ventes). C'est un problème de programmation linéaire.

La première étape consiste à trouver la fonction économique. Pour cela il faut identifier les variables du problème :

C_{ah} : le nombre de containers produits à Amiens et vendus au Havre.

C_{ap} : le nombre de containers produits à Amiens et vendus à Paris.

C_{rh} : le nombre de containers produits à Rouen et vendus au Havre.

C_{rp} : le nombre de containers produits à Rouen et vendus à Paris.

Avec ces varaibles, en exprimant le gain en k euros, la fonction économique est :

$$Z = 20 \times C_{ah} + 10 \times C_{ap} + 50 \times C_{rh} + 20 \times C_{rp}$$

Il faut ensuite modéliser les contraintes :

– (1) Pas plus de 120 containers ne peuvent partir d'Amiens : $C_{ah} + C_{ap} \leq 120$
– (2) Pas plus de 50 containers ne peuvent aller d'Amiens vers Paris : $C_{ap} \leq 50$
– (3) Pas plus de 110 containers ne peuvent partir de Rouen : $C_{rh} + C_{rp} \leq 110$
– (4) On ne peut pas vendre plus de 120 containers au Havre : $C_{ah} + C_{rh} \leq 120$
– (5) On ne peut pas vendre plus de 100 containers à Paris : $C_{ap} + C_{rp} \leq 100$

La forme canonique du problème est donc :

Trouvez le maximum de Z (exprimé en k euros) avec :

$$Z = 20 \times C_{ah} + 10 \times C_{ap} + 50 \times C_{rh} + 20 \times C_{rp}$$

en respectant les contraintes :

$$. \left\{ \begin{array}{llllll} (1) & C_{ah}+ & C_{ap} & & & \leq 120 \\ (2) & & C_{ap} & & & \leq 50 \\ (3) & & & C_{rh}+ & C_{rp} & \leq 110 \\ (4) & C_{ah} & & C_{rh} & & \leq 120 \\ (5) & & C_{ap}+ & & C_{rp} & \leq 100 \\ \text{avec} & C_{ah} \geq 0, & C_{ap} \geq 0, & C_{rh} \geq 0, C_{rp} \geq 0, & & \end{array} \right.$$

Avec 4 variables la méthode géométrique n'est pas envisageable, il faut utiliser un simplexe. Les 5 contraintes génèrent 5 variables d'écart, ce qui donne ce premier tableau :

	C_{ah}	C_{ap}	C_{rh}	C_{rp}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	Somme
E_1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	120
E_2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	50
E_3	0	0	1	1	0	0	1	0	0	110
E_4	1	0	1	0	0	0	0	1	0	120
E_5	0	1	0	1	0	0	0	0	1	100
Δ_j	20	10	50	20	0	0	0	0	0	0

Le premier pivot est sur la colonnes de C_{rh} (le plus grande Δ) et sur la ligne de E_3 (le plus petit rapport Somme/Colonne du pivot). On obtient alors ce second tableau :

	C_{ah}	C_{ap}	C_{rh}	C_{rp}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	Somme
E_1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	120
E_2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	50
C_{rh}	0	0	1	1	0	0	1	0	0	110
E_4	1	0	0	-1	0	0	-1	1	0	10
E_5	0	1	0	1	0	0	0	0	1	100
Δ_j	20	10	0	-30	0	0	-50	0	0	-5500

Le second pivot est sur la colonne de C_{ah} et sur la ligne de E_4. On obtient alors ce troisième tableau :

	C_{ah}	C_{ap}	C_{rh}	C_{rp}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	Somme
E_1	0	1	0	1	1	0	1	-1	0	110
E_2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	50
C_{rh}	0	0	1	1	0	0	1	0	0	110
C_{ah}	1	0	0	-1	0	0	-1	1	0	10
E_5	0	1	0	1	0	0	0	0	1	100
Δ_j	0	10	0	-10	0	0	-30	-20	0	-5700

Le troisième pivot est sur la colonne de C_{ap} et sur la ligne de E_2. On obtient alors ce quatrième tableau :

	C_{ah}	C_{ap}	C_{rh}	C_{rp}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	Somme
E_1		0								60
C_{ap}	0	1	0	0	0	1	0	0	0	50
C_{rh}		0								110
C_{ah}		0								10
E_5		0								50
Δ_j	0	0	0	-10	0	0	-30	-20	0	-6200

Tous les Δ sont négatifs ou nuls : l'algorithme est terminé (les cases internes du tableau n'ont donc pas besoin d'être calculées).

Pour la solution optimale on a donc : $E_1 = 60$, $C_{ap} = 50$, $C_{rh} = 110$, $C_{ah} = 10$, $E_5 = 50$, et toutes les autres variables (C_{rp}, E_2, E_3, E_4) sont nulles. De plus Z vaut $6\,200$.

L'entreprise doit donc acheminer 50 containers d'Amiens vers Paris et 10 containers d'Amiens au Havre (60 containers doivent être produits à Amiens). Elle doit aussi transporter 110 containers de Rouen au Havre et 10 containers de Rouen à Paris (120 containers doivent être produits à Rouen). Elle en tirera une marge de 6 200 k euros, autrement dit 6,2 millions d'euros.

Pour répondre à la question sur l'usage des capacités de vente, il faut retourner à la forme canonique pour constater que ces capacités sont modélisées par les contraintes (4) et (5). Ce sont donc les variables d'écart E_4 et E_5 qui nous indiquent si ces capacités ont été totalement utilisées.

- E_4 vaut 0, donc toute la capacité de vente du Havre a été utilisée.
- E_5 vaut 50, donc la capacité de vente de Paris est sous-exploitée. On pourrait y vendre 50 containers de plus.

Mais même si en utilisant différement les capacités de transport l'entreprise pourrait vendre d'avantage de containers, la nouvelle solution obtenue ne serait plus optimale, et la marge chuterait !

2.6.11 Correction de l'exercice 1.7.11 de la page 18

Trouver un gain maximal avec des ressources que l'on doit repartir sur divers produits... c'est typiquement un problème de programmation linéaire.

Comme toujours, le meilleurs point d'attaque pour modéliser ce type de problème consiste à trouver la fonction économique. Le gain est obtenu grâce à la vente des bouteilles de pinot noir (B_{pn}) et de passe-tout-grain (B_{ptg}). Les premières rapportent 30 euros et les secondes 12 euros. Donc la fonction économique s'exprime ainsi (Z exprimé en euro) :

$$Z = 30 \times B_{pn} + 12 \times B_{ptg}$$

Il faut ensuite exprimer les contraintes. Le nombres de bouteilles que l'on peut produire est limité par les ressources (la quantité de vin obtenu pour chaque cépage). Mais pour ce problème un petit traitement est nécessaire pour retrouver les bonnes données. En effet on nous donne le total des récoltes, mais seul ce qui reste après le retrait des quantités utilisées directement par l'abbaye nous intéresse.

- Les vendanges ont permis de récolter $2\,400$ litres de pinot noir, mais 400 bouteilles, donc $400 \times 0.75 = 300$ litres sont d'office mis de coté. Il reste donc $2\,100$ litres de pinot noir pour la vente.
- Les vendanges ont permis de récolter $6\,000$ litres de gamay, mais $4\,000$ bouteilles, donc $4\,000 \times 0.75 = 3\,000$ litres sont d'office mis de coté. Il reste donc $3\,000$ litres de gamay pour la vente.

Maintenant que l'on connaît les véritables ressources utilisables, on peut exprimer les contraintes :

- Chaque bouteille de pinot noir utilise 0.75 litre de pinot noir, et chaque bouteille de passe-tout-grain utilise $0.75 \times 1/3 = 0.25$ litre de pinot noir. Donc $0.75 \times B_{pn} + 0.25 \times B_{ptg} \leq 2100$.
- Les bouteilles de pinot noir n'utilise pas de gamay, mais chaque bouteille de passe-tout-grain utilise $0.75 \times 2/3 = 0.5$ litre de gamay. Donc $0.5 \times B_{ptg} \leq 3000$.

La forme canonique du problème est donc :

Trouver le maximum de Z (exprimé en euro) avec

$$Z = 30 \times B_{pn} + 12 \times B_{ptg}$$

en respectant les contraintes :

$$\begin{cases} (1) & 0.75 \times B_{pn}+ & 0.25 \times B_{ptg} & \leq 2100 \\ (2) & & 0.5 \times B_{ptg} & \leq 3000 \\ & B_{pn} \geq 0 & B_{ptg} \geq 0 & \end{cases}$$

Pour éviter d'avoir des fractions dans nos calculs on va multiplier par 4 l'inégalité (1) et par 2 l'inégalité (2). Mais attention, si à terme on doit interpréter les variables d'écarts qui seront associées à ces contraintes, il faudra se rappeler que leurs unités ont été changées ! On obtient donc :

Trouver le maximum de Z (exprimé en euro) avec

$$Z = 30 \times B_{pn} + 12 \times B_{ptg}$$

en respectant les contraintes :

$$\begin{cases} (1) & 3 \times B_{pn}+ & B_{ptg} & \leq 8400 \\ (2) & & B_{ptg} & \leq 6000 \\ & B_{pn} \geq 0 & B_{ptg} \geq 0 & \end{cases}$$

Avec 2 variables, il est envisageable d'utiliser la méthode géométrique. Mais attention, la seconde question du problème s'intéresse à l'utilisation totale des ressources, autrement dit elle va demander d'interpréter la valeurs des variables d'écart. Même si dans le cas présent (on va voir que ces variables sont nulles) la méthode géométrique permettrait aussi de connaître simplement le résultat, il vaut mieux passer par un simplexe lorsque vous voyez qu'il va falloir interpréter ces variables.

Voici donc le premier tableau du simplexe (après l'ajout des 2 variables d'écarts nécessaires à notre problème -une par contrainte-).

	B_{pn}	B_{ptg}	E_1	E_2	Somme
E_1	3	1	1	0	8400
E_2	0	1	0	1	6000
Δ	30	12	0	0	0

Le premier pivot est sur la colonne de B_{pn} (le plus grand Δ) sur la ligne de E_1 (le plus petit rapport Somme/Colonne du pivot). On obtient donc ce second tableau :

	B_{pn}	B_{ptg}	E_1	E_2	Somme
B_{pn}	1	1/3	1/3	0	2800
E_2	0	1	0	1	6000
Δ	0	2	-10	0	-84000

Le second pivot est sur la colonne de B_{ptg} sur la ligne de E_2 . On obtient donc ce troisième tableau.

	B_{pn}	B_{ptg}	E_1	E_2	Somme
B_{pn}		0			800
B_{ptg}	0	1	0	1	6000
Δ	0	0	-10	-2	-96000

Comme tous les Δ sont négatifs ou nuls, l'algorithme va s'arrêter à cette itération. Voila pourquoi il n'est même pas nécessaire de calculer les coefficients à l'intérieur du tableau. On ne calcule que la ligne Δ (pour vérifier qu'ils sont tous négatifs ou nuls) et la colonne Somme (pour avoir les résultats).

Donc pour la solution optimale, on a : $B_{pn} = 800$ et $B_{ptg} = 6\,000$. Toutes les autres variables (E_1, E_2) sont nulles (puisqu'elles sont hors base). De plus Z vaut $96\,000$.

L'abbaye doit donc embouteiller et vendre 800 bouteilles de pinot noir et $6\,000$ bouteilles de passe-tout-grain. Elle en obtiendra un gain de $96\,000$ euros.

La seconde question pose le problème des ressources inutilisés. Il faut donc interpréter les variables d'écart. Ces deux variables sont nulles. Donc toutes les ressources sont utilisées. Il ne reste aucun vin sans usage.

Si on avait utilisé la méthode géométrique, on aurait constaté que la solution se trouve à l'intersection des deux droites «$0.75 \times B_{pn} + 0.25 \times B_{ptg} = 2100$» et «$0.5 \times B_{ptg} = 3000$». Les solutions sur la première droite sont celles qui consomment tout le pinot noir, et sur la seconde droite celles qui consomment tout le gamay. Donc à leur intersection on trouve la solution qui consomme la totalité des deux cépages. Il est donc aussi possible de déduire du modèle géométrique que tout le vin est utilisé. Par contre si la solution avait laissé un vin sans usage, il aurait été plus difficile de mesurer les quantités restantes (mais pas impossible, avec un dessin et une règle précis).

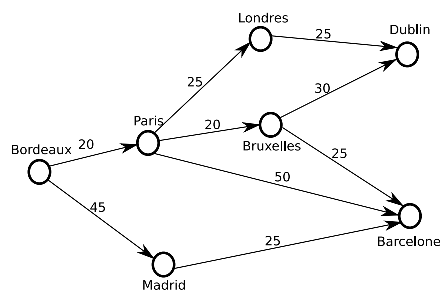
2.6.12 Correction de l'exercice 1.7.12 de la page 18

Ici, il faut trouver le chemin le moins cher entre Bordeaux et soit Barcelone soit Dublin. On nous indique toutes les étapes intermédiaires possibles, avec pour chacun un coût fixe. Aucun doute possible, il s'agit de la recherche d'un plus court chemin (les longueurs étant exprimées en «Hermès»).

La première étape consiste à dessiner le graphe pour modéliser tous les chemins possibles. Pas de difficulté majeure ici, sauf deux petits pièges qui se cachent dans les données :

- On trouve des possibilités de voyage à partir de Toulouse, mais le client bordelais n'a aucun moyen de joindre cette ville. Il faut donc retirer ces données parasites de notre problème.
- Entre Paris et Londres, il y a deux moyens de transport possible. Notre but étant de trouver le plus court chemin, c'est à dire le moins cher, on peut d'office oublier le plus cher des deux. Donc on retire des données le voyage en train entre Paris et Londres.

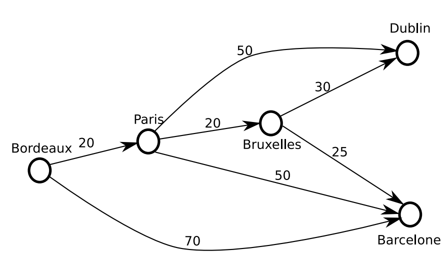
On obtient le graphe suivant :



Ce graphe a un seul point d'entrée (Bordeaux), mais plusieurs points de sortie (Dublin et Barcelone). Cela ne pose aucun problème puisque les recherches de plus court chemin permettent de trouver la valeur de tous les plus courts chemins depuis 1 point d'origine vers tous les autres points du graphe.

Une fois cette modélisation terminée, mais avant de mettre en œuvre la technique de recherche du plus court chemin on peut simplifier le graphe : on supprime les états sur lesquels il n'y a qu'un seul arc entrant et un seul arc sortant. On remplace les 2 arcs par un nouvel arc valué par la somme des deux valeurs.

On obtient ce nouveau graphe :



Il ne reste plus qu'à mettre en œuvre l'algorithme de Ford-Moore

m	Bor	Par	Bru	Dub	Bar	changés	Γ^+
0	0	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	Bor	Par, Bar
1		20/Bor			~~70/Bor~~	Par Bar	Bru, Dub, Bar
2			40/Par	70/Par	~~70/Par~~	Bru Bar Dub	Dub, Bar
3				70/Bru	65/Bru	Bar Dub	

Le plus court chemin vers Barcelone mesure 65 Hermès, et vers Dublin 70 Hermès.

Le client bordelais devrait donc choisir d'aller à Barcelone en prenant le train pour Paris, puis le train jusqu'à Bruxelles pour finir en avion jusqu'à Barcelone.

2.6.13 Correction de l'exercice 1.7.13 de la page 19

Il faut trouver la marge maximale d'une vente en répartissant des ressources sur les divers produits vendus. Aucun doute, il s'agit d'un problème de programmation linéaire.

Le meilleur moyen d'aborder la modélisation de ce type de problème consiste à identifier les produits vendus, et donc les variables de la fonction économique.

L'exploitant cherche déjà à vendre son bois :
- Il va vendre du bois pour la construction et la tonnellerie (B_{cons}) avec une marge de 15 kF la tonne.
- Il va vendre du bois de chauffage (B_{chau}) avec une marge de 3 kF la tonne.

Mais comme il doit construire des embarcations pour acheminer son bois sur le lieu de vente, il en profite pour les vendre aussi :
- Il va vendre les embarcations durables (E_{dur}) avec une marge de 30 kF par embarcation.
- Il va vendre les embarcations à usage unique (E_{uni}) avec une marge de 2 kF par embarcation.

Donc au final, sa marge (Z) sera de :

$$Z = 15 \times B_{cons} + 3 \times B_{chau} + 30 \times E_{dur} + 2 \times E_{uni}$$

Il faut ensuite identifier les contraintes qui vont limiter cette marge. Ces contraintes sont dues aux limites des ressources. Il y a déjà 2 limites très faciles à identifier.

- La quantité de bois de bonne qualité (25 tonnes) va limiter la quantité de bois de construction et le nombre d'embarcations durables. Comme chaque embarcation durable utilise 1 tonne de bois de bonne qualité, on obtient la contrainte : $(1) B_{cons} + E_{dur} \leq 25$.
- La quantité de bois de piètre qualité (45 tonnes) va limiter la quantité de bois de chauffage et le nombre d'embarcations à usage unique. Comme chaque embarcation à usage unique utilise 1 tonne de bois de piètre qualité, on obtient la contrainte : $(2) B_{chau} + E_{uni} \leq 45$.

Ensuite le nombre d'ouvriers limite le nombre d'équipages, et donc le nombre d'embarcations à 10 au maximum : $(3) E_{dur} + E_{uni} \leq 10$.

Reste une dernière contrainte, un peu plus subtile : on ne peut descendre et donc vendre du bois que si on a les embarcations pour le transporter. Donc la quantité de bois vendu est limitée par la capacité de transport. Chaque embarcation durable peut transporter 5 tonnes de bois, et chaque embarcation à usage unique peut transporter 10 tonnes. Donc $(4) B_{cons} + B_{chau} \leq 5 \times E_{dur} + 10 \times E_{uni}$.

Si on met ces 4 contraintes sous la forme canonique, on obtient :

Trouver le maximum de Z (exprimé en kF) avec

$$Z = 15 \times B_{cons} + 3 \times B_{chau} + 30 \times E_{dur} + 2 \times E_{uni}$$

en respectant les contraintes :

$$\begin{cases} (1) & B_{cons} & & +E_{dur} & & \leq 25 \\ (2) & & B_{chau} & & +E_{uni} & \leq 45 \\ (3) & & & E_{dur} & +E_{uni} & \leq 10 \\ (4) & B_{cons} & +B_{chau} & -5 \times E_{dur} & -10 \times E_{uni} & \leq 0 \\ & B_{cons} \geq 0 & B_{chau} \geq 0 & E_{dur} \geq 0 & E_{uni} \geq 0 & \end{cases}$$

En ajoutant 4 variables d'écart (E_1, E_2, E_3, E_4) pour les 4 contraintes, on obtient le simplexe suivant :

	B_{cons}	B_{chau}	E_{dur}	E_{uni}	E_1	E_2	E_3	E_4	Somme
E_1	1	0	1	0	1	0	0	0	25
E_2	0	1	0	1	0	1	0	0	45
E_3	0	0	1	1	0	0	1	0	10
E_4	1	1	-5	-10	0	0	0	1	0
Δ	15	3	30	2	0	0	0	0	0

Le premier pivot est sur la colonne de E_{dur} (le plus grand Δ) sur la ligne de E_3 (le plus petit rapport Somme/Colonne du pivot). On obtient donc ce second tableau :

	B_{cons}	B_{chau}	E_{dur}	E_{uni}	E_1	E_2	E_3	E_4	Somme
E_1	1	0	0	-1	1	0	-1	0	15
E_2	0	1	0	1	0	1	0	0	45
E_{dur}	0	0	1	1	0	0	1	0	10
E_4	1	1	0	-5	0	0	5	1	50
Δ	15	3	0	-28	0	0	-30	0	-300

Le second pivot est sur la colonne de B_{cons} sur la ligne de E_1 . On obtient donc ce troisième tableau.

	B_{cons}	B_{chau}	E_{dur}	E_{uni}	E_1	E_2	E_3	E_4	Somme
B_{cons}	1	0	0	-1	1	0	-1	0	15
E_2	0	1	0	1	0	1	0	0	45
E_{dur}	0	0	1	1	0	0	1	0	10
E_4	0	1	0	-4	-1	0	6	1	35
Δ	0	3	0	-13	-15	0	-15	0	-525

Le troisième pivot est sur la colonne de B_{chau} sur la ligne de E_4 . On obtient donc ce quatrième tableau.

	B_{cons}	B_{chau}	E_{dur}	E_{uni}	E_1	E_2	E_3	E_4	Somme
B_{cons}		0							15
E_2		0							10
E_{dur}		0							10
B_{chau}	0	1	0	-4	-1	0	6	1	35
Δ	0	0	0	-1	-12	0	-33	-3	-630

Comme tous les Δ sont négatifs ou nuls, l'algorithme va s'arrêter à cette itération. Voila pourquoi il n'est même pas nécessaire de calculer les coefficients à l'intérieur du tableau. On ne calcule que la ligne Δ (pour vérifier qu'ils sont tous négatifs ou nuls) et la colonne Somme (pour avoir les résultats).

Donc pour la solution optimale on a $B_{cons} = 15$, $E_2 = 10$, $E_{dur} = 10$, $B_{chau} = 35$, $Z = 630$ et toutes les autres variables (E_{uni}, E_1, E_3, E_4) sont nulles.

Donc pour obtenir une marge maximale l'exploitant devra construire et vendre 10 embarcations durables ce qui lui permettra de vendre 15 tonnes de bois de construction et 35 tonnes de bois de chauffage. Il en tirera une marge de 630 kF.

Le second question porte sur une ressource non-utilisée. Il faut donc regarder la variable d'écart associée à cette ressource. Le bois de piètre qualité est limité par la contrainte (2), il faut donc regarder la variable E_2. Elle vaut 10. Donc il reste 10 tonnes de bois de piètre qualité sans usage.

2.6.14 Correction de l'exercice 1.7.14 de la page 19

Il faut organiser diverses tâches pour connaître la durée d'un projet et les dates possibles pour certaines d'entre elles… Aucun doute possible, nous devons résoudre un problème d'ordonnancement. La seconde question laisse penser qu'une tâche (l'impression des flyers) pourra avoir plusieurs dates possibles. Pour cela il faudrait qu'elle dispose d'une marge totale. On devra donc connaître les marges des tâches. C'est donc un potentiel-tâches qu'il faudra faire. Un simple diagramme de GANTT ne nous donnera pas cette information.

Quoiqu'il en soit il faut commencer par l'analyse du problème : identifier toutes les tâches et connaître leurs pré-requis et leur durée.

Tâche A : la réunion de lancement. Le texte est très clair à ce sujet, cette réunion débute le projet. Elle dure 1 journée.

Tâche B : les maquettes des flyers. Sitôt cette réunion finie, le graphiste pourra commencer cette tâches. Elle dure 10 jours. Elle commence donc après la tâche A.

Tâche C : sélection d'une liste de lieux et de traiteurs. Ce sera la tâche du communiquant après la réunion. Elle dure 16 jours. Elle commence donc après la tâche A.

Tâche D : la réunion de validation. Elle doit sélectionner une maquette de la tâche B, et un lieu et un traiteur de la tâche C. Elle dure 1 journée. Elle commence après les tâches B et C.

Tâche E : finalisation des flyers. Le graphiste peut achever les flyers. Il prendra 5 jours pour le faire. Cette tâche commence après la tâche D.

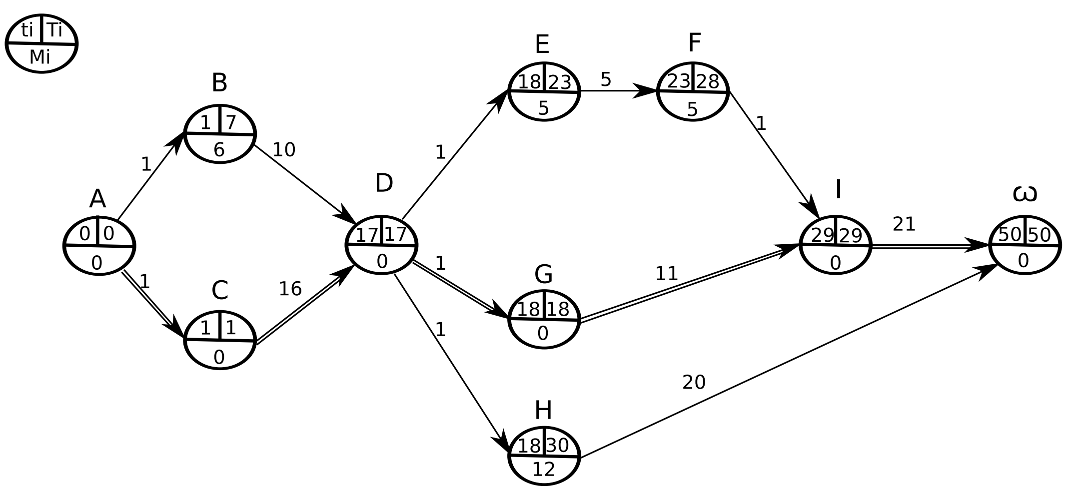
Tâche F : impression des flyers. Une fois les flyers finalisés ils peuvent être imprimés. Cette tâche prend 1 journée. Elle commence après la tâche E.

Tâche G : sélection des lieux de distribution des flyers. Suite à la réunion de validation, le communiquant étale cette tâche sur une période de 11 jours. Elle commence après la tâche D.

Tâche H : campagne d'information auprès de la presse. En parallèle de la tâche précédente, mais sur une période de 20 jours, le communiquant va prévenir la presse. Cette tâche commence après la tâche D.

Tâche I : distribution des flyers. Une fois imprimés et les lieux sélectionnés, on peut distribuer les flyers au grand public. Cette tâche dure 21 jours, et commence après les tâches F et G.

Il ne reste plus qu'à reporter ces informations sur un potentiel-tâches. On obtient le graphe suivant :



Il aurait été possible de «simplifier» le graphe avant de faire les calculs en faisant disparaître la tâche F (impression des flyers) et reportant sa durée sur la tâche précédente, mais la seconde question porte justement sur cette tâche. Il est donc beaucoup plus judicieux de la laisser pour éviter de refaire des calculs pour son interprétation. D'autant que de toute façon le graphe n'est pas vraiment complexe.

La durée totale du projet (date au plus tôt de tâche ω) est de 50 jours. Il faut donc faire la réunion de lancement au plus tard à J-50, c'est à dire le vendredi 1^{er} octobre.

La tâche F (impression des flyers) possède une marge totale de 5 jours et peut être réaliser entre le 23ème et le 28ème jour inclus sans retarder le projet. Autrement dit on peut faire cette impression entre le dimanche 24 octobre et vendredi 29 octobre. Cela laisse donc 5 dates possibles parmi celles proposées : du 25 au 29 octobre.

2.6.15 Correction de l'exercice 1.7.15 de la page 20

Trouver un gain maximal avec des ressources que l'on doit répartir sur divers produits... c'est un problème typique de programmation linéaire.

Commençons par trouver la fonction économique, elle nous permettra de trouver les variables du problème. Le gain est obtenu grâce au maïs et au colza récolté. Ce gain est fonction des surfaces mises en culture. Chaque hectare de maïs (variable M) rapporte 600 euros et chaque hectare de colza (variable C) rapporte 500 euros. Donc la fonction économique s'exprime ainsi (Z exprimé en euro).

$$Z = 600 \times M + 500 \times C$$

Il faut ensuite exprimer les contraintes. Les surfaces mises en exploitation sont limitées par trois ressources : la surface totale exploitable ($200\,hectares$), la quantité d'eau disponible pour l'irrigation ($200\,000\,m^3$), et la quantité d'engrais utilisables ($30\,tonnes$). On va donc obtenir les trois contraintes suivantes :

- La somme des deux surfaces ne peut pas dépasser les $200\,hectares$: $M + C \leq 200$
- La quantité d'eau puisée ne peut pas dépasser les $200\,000\,m^3$. Il faut $2\,000\,m^3$ d'eau par hectare de maïs et $1\,000\,m^3$ d'eau par hectare de colza. Donc $2\,000 \times M + 1\,000 \times C \leq 200\,000$
- La quantité d'engrais utilisée ne peut pas dépasser les $30\,tonnes$, autrement dit les $30\,000\,kg$. Il faut $100\,kg$ d'engrais par hectare de maïs et $250\,kg$ d'engrais par hectare de colza. Donc $100 \times M + 250 \times C \leq 30\,000$

La forme canonique du problème est donc :

Trouver le maximum de Z (exprimé en euro) avec

$$Z = 600 \times M + 500 \times C$$

en respectant les contraintes :

$$\left\{\begin{array}{llll} (1) & M & +C & \leq 200 \\ (2) & 2\,000 \times M & +1\,000 \times C & \leq 200\,000 \\ (3) & 100 \times M & +250 \times C & \leq 30\,000 \\ & M \geq 0 & C \geq 0 & \end{array}\right.$$

On peut chercher à simplifier les inégalités, mais attention dans ce cas les unités des variables d'écart que l'on va utiliser seront changées. Actuellement la contrainte (1) a été exprimée en $hectare$, la (2) est exprimée en m^3 et la (3) en kg. Si on anticipe sur la dernière question, on constate que l'on va devoir savoir s'il reste des surfaces de terre non exploitée. Il faudra donc interpréter la variable d'écart de l'inégalité (1). On peut donc se permettre de simplifier les deux autres sans trop se soucier des unités obtenues. On va simplifier par 1000 l'inégalité (2) et par 50 l'inégalité (3). On obtient :

Trouver le maximum de Z (exprimé en euro) avec

$$Z = 600 \times M + 500 \times C$$

en respectant les contraintes :

$$\left\{\begin{array}{llll} (1) & M & +C & \leq 200 \\ (2) & 2 \times M & +C & \leq 200 \\ (3) & 2 \times M & +5 \times C & \leq 600 \\ & M \geq 0 & C \geq 0 & \end{array}\right.$$

Avec 2 variables, il est envisageable d'utiliser la méthode géométrique. Mais attention, la seconde question du problème s'intéresse à l'utilisation totale des terres, autrement dit elle va demander d'interpréter la valeur de la variable d'écart qui sera associée à l'inégalité (1). Même si avec un dessin précis et une bonne règle il est envisageable de trouver cette information par la méthode géométrique, le simplexe est bien plus efficace.

Voici donc le premier tableau du simplexe (après l'ajout des 3 variables d'écarts nécessaires à notre problème -une par contrainte-).

	M	C	E_1	E_2	E_3	Somme
E_1	1	1	1	0	0	200
E_2	2	1	0	1	0	200
E_3	2	5	0	0	1	600
Δ	600	500	0	0	0	0

Le premier pivot est sur la colonne de M (le plus grand Δ) sur la ligne de E_2 (le plus petit rapport Somme/Colonne du pivot). On obtient donc ce second tableau :

	M	C	E_1	E_2	E_3	Somme
E_1	0	1/2	1	-1/2	0	100
M	1	1/2	0	1/2	0	100
E_3	0	4	0	-1	1	400
Δ	0	200	0	-300	0	-60000

Le second pivot est sur la colonne de C sur la ligne de E_3 . On obtient donc ce troisième tableau.

	M	C	E_1	E_2	E_3	Somme
E_1		0				50
M		0				50
C	0	1	0	-1/4	1/4	100
Δ	0	0	0	-250	-50	-80000

Comme tous les Δ sont négatifs ou nuls, l'algorithme va s'arrêter à cette itération. Voila pourquoi il n'est même pas nécessaire de calculer les coefficients à l'intérieur du tableau. On ne calcule que la ligne Δ (pour vérifier qu'ils sont tous négatifs ou nuls) et la colonne Somme (pour avoir les résultats).

Donc pour la solution optimale, on a : $M = 50$, $C = 100$ et $E_1 = 50$. Toutes les autres variables (E_2, E_3) sont nulles. De plus Z vaut $80\,000$.

La cultivateur doit donc mettre en culture 50 hectares de maïs et 100 hectares de colza. Il en obtiendra un gain de $80\,000$ euros.

La seconde question pose le problème des terres inutilisées. Il faut donc interpréter la variables d'écart E_1. Il reste donc 50 hectares de terre sans culture[3].

2.6.16 Correction de l'exercice 1.7.16 de la page 21

Pour cette question il faut trouver combien de tonnes de fourrage l'éleveur aura en stock pour l'hiver après un enchaînement de diverses étapes (productions, transports, stockages) ayant différentes capacités. Il s'agit donc d'un problème de flot maximal.

Il faut donc commencer par trouver un réseau de transport pour modéliser les enchaînements des diverses étapes.

Si on suit étape par étape le fourrage depuis sa production au printemps jusqu'à son stockage en début d'hiver, on obtient 4 phases :

la production : Trois productions sont possibles 70 tonnes de l'éleveur lui même, 30 tonnes du premier vendeur, et 120 tonnes du second vendeur.

[3] On pouvait bien sur trouver ce résultat en sommant les 50 hectares de maïs et les 100 hectares colza, mais comme il était dit dans l'énoncé, on demandait d'interpréter les variables d'écart et non pas de refaire des calculs

le transport en début d'été : aucune contrainte sur le fourrage produit pas l'éleveur déjà sur place, mais une contrainte commune pour le fourrage du premier et second vendeur : 50 tonnes au maximum peuvent être transportées. La seule petite difficulté de modélisation de ce problème est sur cette étape. Il faut rendre commune au deux vendeurs la contrainte de transport. Il faut donc faire passer par un seul arc les deux transports, et pour cela on est obligé d'ajouter un sommet intermédiaire (le sommet «Trans» des graphes ci dessous).

le stockage été-automne : ce stockage n'existe pas chez le premier vendeur, il n'est pas limité chez le second, et l'éleveur ne peut stocker au maximum que 130 tonnes durant cette période.

le transport en début d'hiver : aucune contrainte sur le fourrage déjà stocké sur place, mais une contrainte sur le fourrage stocké chez le second vendeur : 80 tonnes au maximum peuvent être transportées.

le stockage en hiver : l'éleveur ne pourra commencer l'hiver qu'avec au maximum 250 tonnes de fourrage.

À partir de cette analyse on peut construire le graphe suivant :

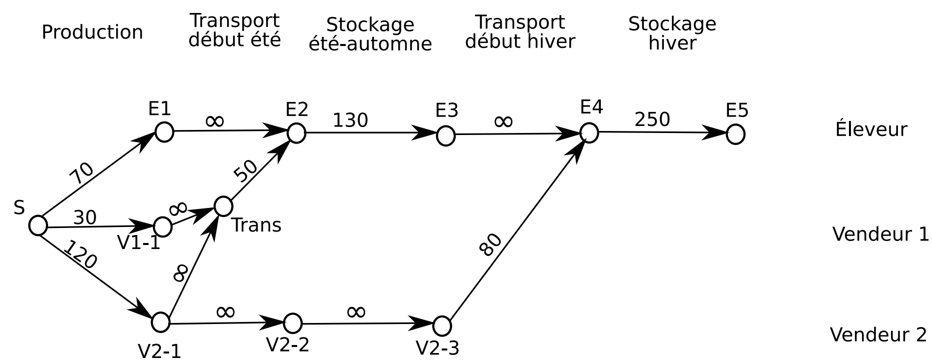


FIG. 2.58 – Modélisation avec toutes les étapes pour tous les flux (unité : tonne)

Dans ce graphe un certain nombre d'états sont dus à un artifice de modélisation : on a introduit des «transports sur place» à capacité infinie pour uniformiser les étapes de tous les flux, et on a fait apparaître le stockage chez le vendeur 2, alors qu'il n'y a aucune contrainte spécifiée à son sujet. Vous pouviez très bien faire un choix différent pour modéliser ce problème, en ne plaçant sur le graphe que les arcs concernant les contraintes connues. Dans ce cas on obtient le graphe de la figure 2.59 tout aussi correcte !

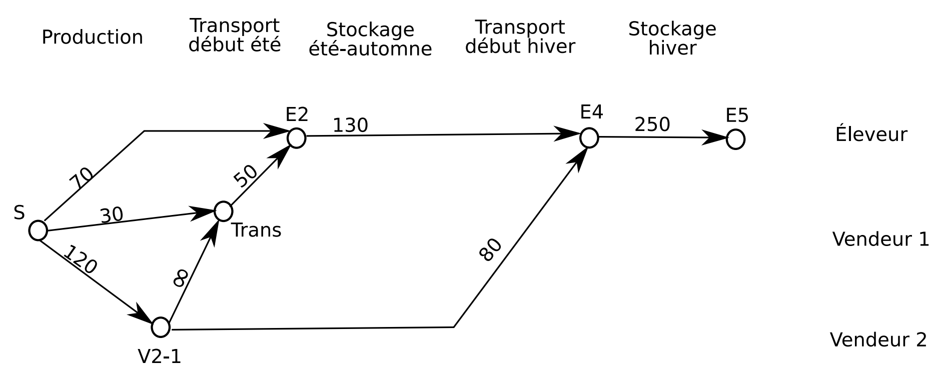


FIG. 2.59 – Modélisation avec uniquement les arcs utilisant les contraintes connues (unité : tonne)

Ce second graphe est de toute façon celui que l'on obtient quand on simplifie le premier avant de faire les calculs. C'est donc celui ci que l'on va utiliser pour trouver le flot maximal.

On commence par faire passer un premier flot au jugé (exemple sur le graphe 2.60), et ensuite on tente le marquage de l'algorithme de Ford-Fulkerson. On s'aperçoit que ce marquage ne permet pas d'atteindre le puits. Le flot maximal a donc été atteint.

Ce flot maximal est de 200 tonnes de fourrage. L'éleveur pourra donc nourrir 100 vaches durant l'hiver.

Une solution possible pour cela (mais ce n'est pas la seule !), consiste à utiliser toute sa propre production, d'acheter les 30 tonnes du premier vendeur, et d'acheter 100 tonnes au second vendeur. Sur ces 100

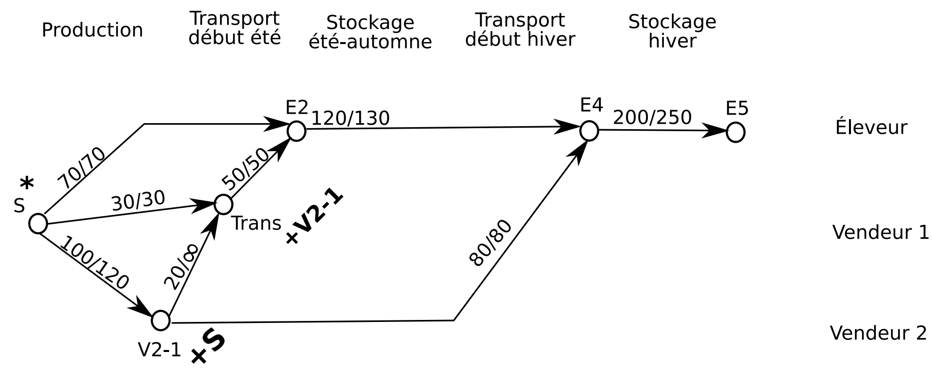


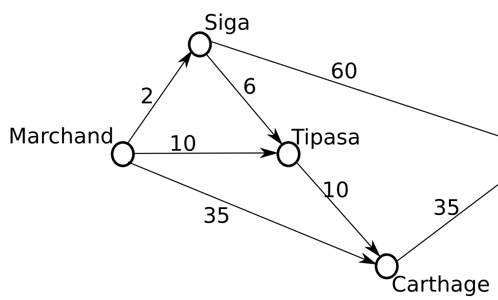
FIG. 2.60 – Calcul du flot maximal (unité : tonne)

tonnes 20 sont transportées avant l'été, et les 80 restantes au début de l'hiver.

2.6.17 Correction de l'exercice 1.7.17 de la page 21

Le marchand doit trouver le chemin le plus rapide, c'est à dire le plus court en temps. Donc aucune hésitation, il s'agit de le recherche d'un plus court chemin. Pour cette exercice il n'y a vraiment aucun problème sur la modélisation : il suffit de lister tous les chemins possibles et d'y placer pour valeur leur durée. Cela donne le schéma suivant :

FIG. 2.61 – Les chemins possibles



Ensuite il suffit d'appliquer Ford-Moore pour trouver le plus court chemin.

m	$\lambda(Mar)$	$\lambda(Sig)$	$\lambda(Tip)$	$\lambda(Car)$	$\lambda(Tyr)$	Sommets changés	Γ^+
0	0	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	Mar	Sig,Tip,Car
1		2/Mar	 ~~10/Mar~~	 ~~35/Mar~~		Sig Tip Car	Tyr, Tip Car Tyr
2			8/Sig	 ~~20/Tip~~	~~62/sig~~ ~~70/Car~~	Tip Car Tyr	Car Tyr
3				18/Tip	 ~~55/Car~~	Car Tyr	Tyr
4					53/Car	Tyr	

Le plus court chemin (au sens du temps) prend 53 jours. Pour cela le marchand doit transporter en caravane sa cargaison jusqu'à Siga. Ensuite par cabotage elle continue jusqu'à Tipasa. À nouveau par cabotage, elle va jusqu'à Carthage. Enfin elle embarque pour Tyr.

Le marchand profite donc d'une marge de 7 jours pour tenir ses délais.

Chapitre 3

Annexes

3.1 Annales

Les différents problèmes soumis lors des contrôles finaux des dernières années sont devenus des exercices corrigés de cette documentation. Si vous voulez les retrouver voici leurs références :

Contrôle	Problème 1	Problème 2
Avril 2008	1.7.1 page 13	1.7.2 page 14
Septembre 2008	1.7.7 page 16	1.7 page 17
Avril 2009	1.2.2 page 8	1.7.9 page 17
Septembre 2009	1.3.2 page 9	1.1.2 page 6
Avril 2010	1.4.3 page 11	1.7.10 page 17
Juin 2010	1.7.11 page 18	1.7.12 page 18
Septembre 2010	1.7.13 page 19	1.7.14 page 19
Avril 2011	1.7.15 page 20	1.7.16 page 21
Septembre 2011	1.7.17 page 21	1.1.3 page 6

3.2 Classement des exercices

Technique	Exercices			
Ordonnancement	1.1.1 page 5 1.7.14 page 19	1.1.2 page 6	1.1.3 page 6	1.7.1 page 13
Arbre de recouvrement	1.2.1 page 7 1.7.3 page 14	1.2.2 page 8	1.2.1 page 7	1.2.1 page 7
Plus court chemin	1.3.1 page 9 1.7.12 page 18	1.3.2 page 9 1.7.17 page 21	1.3.3 page 10	1.7.4 page 14
Flot max	1.4.1 page 10	1.4.3 page 11	1.7.16 page 21	
Flot max à coût min	1.4.2 page 11	1.7.6 page 15	1.7.7 page 16	
Programmation linéaire	1.5.1 page 12 1.6.4 page 13 1.7.10 page 17	1.6.1 page 12 1.7.2 page 14 1.7.11 page 18	1.6.2 page 12 1.7 page 17 1.7.13 page 19	1.6.3 page 12 1.7.9 page 17 1.7.15 page 20

Index

Bibliographie

[1] Jean-Claude Papillon. *Eléments de recherche opérationnelle*. Dalloz-Sirey, 1992.

[2] Roseaux. *Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle : Tome 3 : Programmation linéaire et extensions - Problèmes classiques*. DUNOD, 1985.

[3] Roseaux. *Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle : Tome 1, Graphes : leurs usages, leurs algorithmes*. DUNOD, 1998.

[4] Daniel Thiel. *Recherche opérationnelle et management des entreprises*. Economica, 1990.