Exercices avec corrigés

Corrigés à partir de la page 344

Pour s'entraîner

- Les **exercices avec corrigés**, dont les solutions très détaillées figurent à la fin du livre, fournissent une aide pour résoudre les exercices non corrigés proposés par le (la) professeur(e).
- Ils permettent également de **s'entraîner pour les contrôles et le baccalauréat***.
- Les **étoiles** à côté du numéro de l'exercice indiquent le niveau de difficulté :
★ désigne un exercice d'application directe du cours ; ★★ désigne un exercice d'entraînement très progressif ; ★★★ désigne un exercice qui pourrait figurer dans un contrôle ou l'épreuve du baccalauréat* ; ★★★★ désigne un exercice pour aller plus loin.
- Les **exercices corrigés** sont destinés à apprendre **ce qu'il faut savoir faire**.

* Voir également, plus loin, **les exercices corrigés pour le baccalauréat à partir de la page 264.**

Ce qu'il faut savoir faire

Exercices corrigés n°

Nombres de la forme a^x, équations ou inéquations de la forme : $a^x = b$, $a^x \geq b$, $a^x \leq b$

1. ★ Déterminer une valeur approchée de nombres de la forme a^b

Déterminer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} du nombre n, t ou i.

a) $n = (0{,}9)^{1{,}5}$. **b)** $n = (1{,}035)^{10}$.

c) $n = 2 \times (0{,}92)^{12}$. **d)** $n = 100(0{,}9875)^{125}$.

e) $t = (1{,}30)^{1/3} - 1$. **f)** $i = 100[(1{,}05)^{1/12} - 1]$.

2. ★ Équation de la forme $a^x = b$

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Pour tout nombre réel $a > 0$ et tout nombre réel x :
$\log(a^x) = x \log a$.

Déterminer le nombre réel strictement positif, x ou t, qui est solution de l'équation suivante.

Donner la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie à 10^{-4} de la solution.

a) $(0{,}8)^x = 0{,}5$. **b)** $(1{,}05)^t = \dfrac{100}{67}$.

c) $3\,000\,(0{,}913)^x = 1\,500$. **d)** $0{,}4 \times 10^t + 90 = 102$.

3. ★ Inéquation de la forme $a^x \leq b$ ou $a^x \geq b$

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Si a et b sont deux nombres réels strictement positifs :
$a \leq b$ si et seulement si : $\log a \leq \log b$.

Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'inéquation suivante. (C'est-à-dire déterminer l'ensemble des nombres réels pour lesquels l'inégalité suivante est vraie).

a) $(0{,}9)^x \leq 0{,}4$. **b)** $10^4 \times (1{,}2)^t \leq 20\,000$.

c) $7{,}1 - 3{,}6 \times (0{,}99)^x \geq 6$.

4. ★★ Premier terme d'une suite géométrique franchissant un seuil donné : équation de la forme $a^x = b$

On s'intéresse, lors d'une expérience, à la croissance d'une population de bactéries dont le nombre triple toutes les heures. À l'instant $t = 0$ la population est de 10 germes.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Temps en heures	0	1	2	6	9
Nombre de germes	10				

2. On appelle :
u_0 le nombre de germes à l'instant $t = 0$,
u_1 le nombre de germes à l'instant $t = 1$,
u_2 le nombre de germes à l'instant $t = 2$,
u_n le nombre de germes à l'instant $t = n$.

a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier n.

b) En déduire la nature de la suite de terme général u_n et donner ses caractéristiques.

c) Donner l'expression de u_n en fonction de n pour tout entier n.

3. a) Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'équation $3^x = 10^6$.

b) En déduire au bout de combien d'heures la population dépasse 10^7 germes.

5. ★★★ Croissance d'une population de bactéries (suite), résolution d'une inéquation de la forme $a^x \leq b$

Une population de bactéries augmente de 40 % toutes les heures. Il y a 100 bactéries au départ.

1. Combien y aura-t-il de bactéries au bout de 10 heures ?

2. Pendant combien de temps y aura-t-il moins de 5 000 bactéries ?

INDICATION

On peut construire une suite géométrique.

Corrigés à partir de la page 344

6. * Fréquence cardiaque et résolution d'une inéquation**

Dans cet exercice on étudie le lien qui existe entre la puissance d'un effort fourni et la fréquence cardiaque d'un individu.

On admet que la fréquence cardiaque d'une sportive en fonction de la puissance de l'effort qu'elle fournit est donnée par la fonction f définie sur $[0, 340]$ par $f(x) = 50 \times (1{,}004)^x + 10$ où :

– x est la puissance de l'effort fourni exprimée en Watts (W),

– $f(x)$ est le nombre de battements du cœur par minute.

1. Calculer la fréquence cardiaque de cette sportive si elle exerce un effort d'une puissance de 200 W. On donnera la valeur exacte, puis la valeur approchée arrondie à l'unité.

2. Déterminer la puissance que doit fournir la sportive pour que sa fréquence cardiaque dépasse 180 battements par minute. On donnera la valeur exacte, puis la valeur approchée arrondie à l'unité.

Exemples de résolution d'équations de la forme log $x = b$

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Pour tout nombre réel strictement positif x :
$\log x = b$ si et seulement si : $x = 10^b$.

7. * Équation $\log x = b$

Résoudre dans $]0, +\infty[$ chacune des équations suivantes d'inconnue x ou I.

a) $\log x = 1$ **b)** $\log x = -2$.

c) $\log\left(\dfrac{x}{3}\right) = 2$. **d)** $\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) = 50$.

8. * Recherche de la raison d'une suite géométrique**

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 10\,000$ et de raison b, avec $b > 0$.

1. Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n.

2. Calculer b pour que $u_4 = 14\,641$.

INDICATION

• Établir que : $\log b = \dfrac{1}{4}\log(1{,}4641)$.

• D'où : $\log b = \log(1{,}4641)^{1/4}$, puisque $x\log a = \log(a^x)$.

• On en déduit b, en utilisant : $\log a = \log b$ si et seulement si $a = b$.

9. * Exemple de recherche d'un taux d'évolution moyen**

Fin 2004, une mutuelle comptait 506 000 sociétaires. L'évolution en pourcentage du nombre de sociétaires pour les trois années suivantes est donnée par le tableau suivant.

Année	2005	2006	2007
Taux d'évolution en pourcentage	+ 10 %	+ 6 %	+ 5 %

Par exemple, le taux d'évolution du nombre de sociétaires de fin 2005 à fin 2006 est de + 6 %.

1. a) Démontrer que le taux d'évolution global du nombre de sociétaires entre fin 2004 et fin 2007 est de 22,43 %.

b) En déduire le nombre de sociétaires à la fin de 2007. Arrondir à l'unité par défaut.

2. Calculer le taux d'évolution annuel moyen pour chacune des trois années 2005, 2006, 2007. Donner ce taux d'évolution sous forme de pourcentage arrondi à 0,01 %.

MÉTHODE

• En notant t_1, t_2, t_3 les trois taux d'évolution successifs et T le taux d'évolution global, on a l'égalité des coefficients multiplicatifs : :

$1 + T = (1 + t_1)(1 + t_2)(1 + t_3)$

• Le *taux d'évolution moyen annuel*, est le taux t tel que :

$1 + T = (1 + t)^3$, d'où

$\log(1 + T) = 3\log(1 + t)$,

$\log(1 + t) = \dfrac{1}{3}\log(1 + T)$

$\log(1 + t) = \log[(1 + T)^{1/3}]$

$1 + t = (1 + T)^{1/3}$.

Exemples d'utilisation de la fonction logarithme décimal

10. ** Pression acoustique

Le niveau de pression acoustique est exprimé en décibels par $S = 20\log\dfrac{p}{p_0}$,

où p_0 est la valeur minimale de la pression perçue par l'oreille humaine et p la valeur de la pression pour un son perçu.

$p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ bars pour un individu normal.

L'oreille humaine peut supporter sans dommage au maximum une pression p de 20 bars.

Calculer le niveau de pression S correspondant au bruit maximum (pour $p = 20$ bars).

Exercices avec corrigés

Corrigés à partir de la page 344

11. ⋆⋆⋆ Potentiel d'hydrogène (pH)

La concentration en H_3O^+ d'une solution aqueuse est $1{,}75 \times 10^{-12}$ mol · L^{-1}. Calculer le pH de cette solution. Arrondir à 10^{-2}.

En chimie, le « *pH* » (potentiel d'hydrogène) est défini par :
pH = – log [H_3O^+] où [H_3O^+] est la concentration en ions H_3O^+, exprimée en mol · L^{-1}, d'une solution aqueuse.

Sens de variation de fonctions $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto ka^x$

12. ⋆⋆ Étude du sens de variation de fonctions

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le sens de variation. Rappeler chaque fois le résultat du cours utilisé.

a) f définie sur [0, 10] par : $f(x) = (0{,}85)^x$.

b) f définie sur [0, 12] par : $f(t) = (1{,}03)^t$.

c) f définie sur [0, 7] par : $f(t) = 4(0{,}9)^t$.

d) f définie sur [0, 20] par : $f(x) = -\,0{,}005(2{,}2)^x$.

Exercices corrigés pour le baccalauréat

Corrigés à partir de la page 346

Les exercices corrigés pour le baccalauréat sont des exercices qui pourraient figurer dans l'épreuve de mathématiques du baccalauréat ST2S.

Avec des suites géométriques

13. ⋆⋆ Deux suites géométriques

Lors d'un achat le 1er janvier 2007, deux plantes, un ficus et un cactus, mesuraient respectivement 0,50 m et 1,50 m. On notera u_n et v_n les hauteurs respectives en mètres de ces deux plantes au 1er janvier de l'année $(2007 + n)$. La hauteur du ficus augmente de 20 % par an, alors que celle du cactus n'augmente que de 4 % par an.

1. Calculer u_1, u_2, v_1, v_2 au centimètre près.

2. a) Montrer que pour tout n, $u_{n+1} = 1{,}2u_n$ et $v_{n+1} = 1{,}04v_n$.

b) En déduire que chacune des suites (u_n) et (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) Donner les expressions de u_n et de v_n en fonction de n.

3. a) Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'équation $(1{,}2)^x = 5$.

Donner la valeur exacte de la solution, puis, sa valeur approchée arrondie à 10^{-2}.

INDICATION
Utiliser la fonction logarithme décimal.

b) Utiliser le résultat obtenu a.u **a)** pour déterminer au cours de quelle année le ficus atteindra le plafond, à 2,5 m du sol.

c) Déterminer de même au cours de quelle année le cactus atteindra le plafond. Laquelle des deux plantes atteindra la première le plafond ?

14. ⋆⋆⋆ Datation au carbone 14

Le but de l'exercice est l'étude de la désintégration d'un corps radioactif : le carbone 14.

1. Soit N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$, N_1 le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après, N_k le nombre d'atomes de carbone 14 après k siècles (k entier). On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps : environ 1,24 % par siècle.

a) Donner l'expression de N_1 en fonction de N_0 puis de N_{k+1} en fonction de N_k.

b) En déduire la nature de la suite (N_k) et l'expression de N_k en fonction de N_0 et k.

c) Donner, en le justifiant, le sens de variation de la suite (N_k).

2. Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants ; à la mort de ceux-ci, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre.

Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 40 % de celle d'un fragment d'os actuel de même masse, pris comme témoin.

Calculer l'âge de ces fragments. On arrondira le résultat au siècle près.

Corrigés à partir de la page 346

Fonctions définies par $x \mapsto a^x$ ou $x \mapsto ka^x$

15. ★★ Étude des variations, résolution d'une équation de la forme $a^t = b$

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = 0{,}5\,(7{,}39)^t$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$. On prend comme unités graphiques : 10 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

1. a) Déterminer le sens de variation de f sur $[0, 1]$.

b) Établir le tableau de variation de f sur $[0, 1]$.

2. a) À l'aide d'une calculatrice, compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel on fera figurer des valeurs approchées arrondies à 10^{-2}.

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(t)$				0,91				2,03		3,03	

b) Construire la courbe $\mathscr{C}$.

B. Application

Pour tout t de $[0, 1]$, t exprimé en heures, $f(t)$ représente la densité microbienne dans un milieu liquide à l'instant t.

1. Déterminer graphiquement, en faisant apparaître les constructions utiles, au bout de combien de temps la densité bactérienne aura doublé.

2. Retrouver le résultat du 1 par le calcul.

INDICATION

Utiliser la fonction logarithme décimal.

16. ★★★ Lectures graphiques, résolution d'équation

Le graphique ci-dessous fournit la courbe représentative d'une fonction f de la variable réelle t définie sur l'intervalle $[0, 24]$.

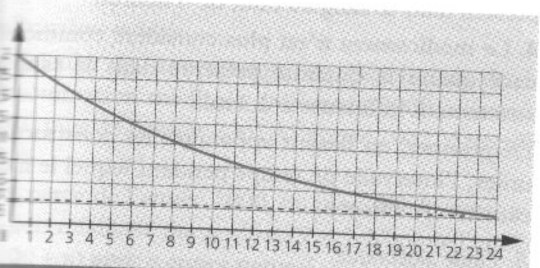


Figure 7

On injecte à un malade une dose de 2 centimètres cubes d'un certain médicament M. La quantité de ce médicament présente dans le sang du malade pendant les 24 heures suivant l'injection est $f(t)$ cm³, où f est la fonction définie ci-dessus.

1. *Étude graphique*

À l'aide du graphique :

a) Déterminer combien de temps s'est écoulé après l'injection lorsque la quantité présente dans le sang est la moitié de la dose injectée, qui était de deux centimètres cubes.

b) Donner une approximation, à l'unité près, sous forme de pourcentage, de la proportion de la dose injectée restant dans le sang au bout de 24 heures.

2. On admet dans cette question que, pour tout t de $[0, 24]$, $f(t) = 2(0{,}92)^t$.

a) Calculer $\dfrac{f(24)}{f(0)}$. Donner la valeur exacte du résultat, puis, sa valeur approchée arrondie à 10^{-3}.

b) Résoudre dans $[0, 24]$ l'équation $f(t) = \dfrac{1}{2}\,f(0)$.

Donner la valeur exacte de la solution puis, sa valeur approchée arrondie à 10^{-2}.

17. ★★★ Étude des variations, lecture graphique, résolution d'une inéquation

A. Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 5]$ par $f(t) = 10^4\,(1{,}22)^t$.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

On prendra pour unités graphiques : 3 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 5 cm pour 10 000 unités sur l'axe des ordonnées.

1. a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, 5]$. Justifier.

b) Établir le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0, 5]$.

2. a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs numériques suivant en arrondissant les résultats à la centaine la plus proche.

t	0	1	2	3	4	5
$f(t)$						27 000

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

B. Application

On étudie la croissance d'une culture bactérienne en milieu liquide non renouvelé en fonction du temps t, exprimé en heure, pour t compris entre 0 et 5. La densité bactérienne donnant le nombre de bactéries par millilitre est $f(t)$ où f est la fonction définie au début de la partie A.

1. Calculer la densité bactérienne à l'instant $t = 4{,}5$. Donner le résultat arrondi à la centaine la plus proche.

2. a) Déterminer graphiquement, en faisant apparaître les constructions utiles, l'intervalle de temps

Exercices corrigés pour le baccalauréat

Corrigés à partir de la page 346

pendant lequel la densité bactérienne est inférieure ou égale à 20 000.

b) Retrouver le résultat par le calcul.

18. ★★★ Étude des variations, lectures graphiques, résolution d'une équation

A. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 11]$ par $f(t) = 400(1{,}22)^t$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, 11]$.

2. Établir le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0, 11]$.

3. Reproduire et compléter le tableau suivant. Arrondir les valeurs à la dizaine la plus proche.

t	0	2	4	6	8	10	11
$f(t)$	400			1 320			3 560

4. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal tel que : 1 cm représente une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 200 unités sur l'axe des ordonnées.

a) Tracer la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 sachant que $f'(0) = 80$.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

B. Application

On étudie l'évolution d'une culture bactérienne en milieu liquide non renouvelé. On admet que l'expression $f(t) = 400(1{,}22)^t$ donne le nombre de bactéries présentes dans cette culture en fonction du temps t, exprimé en heures.

1. Calculer le nombre de bactéries présentes dans le liquide au bout de 5 h 30 min.

Le résultat est à arrondir à la dizaine d'unités la plus proche.

2. En utilisant, le graphique de la partie A, déterminer au bout de combien de temps la population de bactéries aura doublé (faire apparaître les tracés utiles et donner une réponse en heures et minutes).

3. Résoudre algébriquement l'équation $f(t) = 800$ et retrouver le résultat de la question précédente.

19. ★★★ Lectures graphiques, résolution d'équations et d'inéquation, taux d'évolution

À l'instant $t = 0$, on injecte dans le sang d'un malade 4 ml d'une substance médicamenteuse, éliminée par les reins. On souhaite connaître la durée d'effet de ce médicament. Pour cela, on étudie la quantité de la substance présente, dans le sang, exprimée en ml, au bout de t heures. Cette quantité est $f(t)$, où f est la fonction définie sur $[0, 8]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée ci-contre.

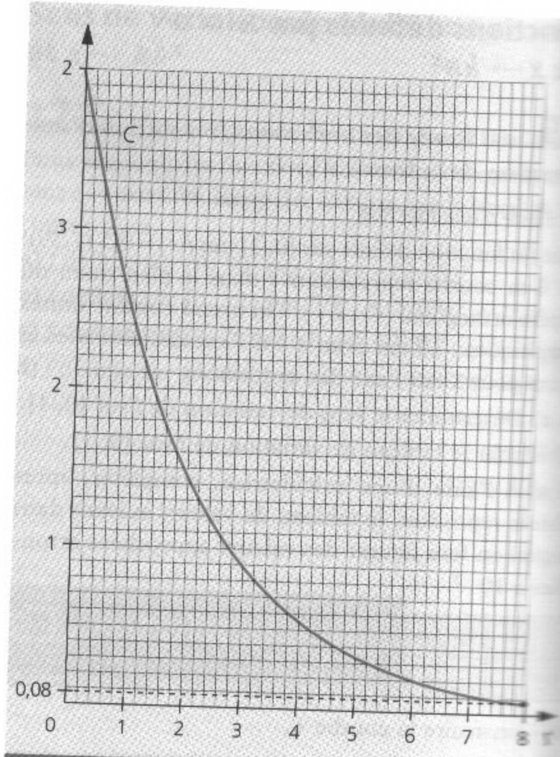


Figure 8

A. Étude graphique

1. Le plan est muni d'un repère orthogonal. On prend comme unités graphiques : 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 5 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

On donne le tableau de valeurs suivant.

t	0	1	2	3	4	5	6	8
$f(t)$	4	2,44	1,49	0,91	0,55	0,34	0,21	0,08

Reproduire la courbe $\mathscr{C}$.

2. Déterminer le temps écoulé après l'injection lorsque la quantité de médicament présente dans le sang est la moitié de la dose injectée.

3. Déterminer le pourcentage de médicament encore présent dans le sang au bout de 8 heures.

4. Le médicament n'est plus considéré comme efficace quand la quantité présente dans le sang est strictement inférieure à 0,3 ml.

Déterminer, en faisant apparaître les constructions utiles, l'intervalle de temps pendant lequel le médicament est efficace.

B. Étude algébrique

Dans cette question, on admet que la fonction f est définie sur $[0, 8]$ par $f(t) = 4(0{,}61)^t$.

1. Calculer la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 6 heures 30 minutes.

Vérifier sur le graphique. On fera apparaître les constructions utiles.

2. Retrouver le résultat obtenu à la question A4 en résolvant l'inéquation $f(t) \geq 0{,}3$.

3. Calculer, pour tout t de $[0, 7]$, $\dfrac{f(t+1)}{f(t)}$.

En déduire que la quantité de médicament présente dans le sang baisse de 39 % toutes les heures.

Ajustement affine et fonction exponentielle

20. ★★★ **Deux modélisations : ajustement affine et fonction exponentielle, taux d'évolution**

Le tableau ci-dessous donne la consommation médicale (exprimée en milliards d'euros) de la population d'un pays :

Année	1990	1995	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année : x_i	0	5	10	11	12	13
Consommation : y_i	38	49	51,79	57	62,70	68,90

Le but de cet exercice est de mettre en œuvre deux modélisations de cette consommation médicale.

1. *Premier modèle*

On utilise un ajustement affine.

a) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points de coordonnées (x_i, y_i).

b) On désigne par Δ la droite d'équation :
$y = 2{,}03x + 37{,}31$.

Vérifier que le point G appartient à la droite Δ.

c) On admet que la droite Δ est une « bonne » droite d'ajustement du nuage de points.

En supposant que l'évolution se poursuive selon ce modèle, en déduire une estimation de la consommation médicale en milliards d'euros pour l'année 2008 (donner la valeur décimale arrondie au centième).

2. *Deuxième modèle*

a) Calculer le pourcentage de l'évolution de la consommation médicale de l'année 2000 à l'année 2001, puis de l'année 2001 à l'année 2002. Arrondir à 1 %

b) À partir de l'année 2000, on modélise la consommation médicale par $y = 51{,}79 \times 1{,}1^n$ pour l'année $2000 + n$) avec n entier naturel.

En utilisant ce deuxième modèle, en déduire une estimation de la consommation médicale en milliards d'euros pour l'année 2008 (donner la valeur décimale arrondie au centième).

Exemple d'ajustement affine à l'aide de la fonction logarithme décimal

21. ★★★ **Évolution d'une épidémie**

Lors d'une épidémie, on a relevé, à intervalles réguliers, le nombre de cas déclarés. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant.

Rang du relevé : x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre de cas déclarés : y_i	600	690	794	913	1 045	1 205

1. a) On pose $Y_i = \log(y_i)$. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3}.

x_i	0	1	2	3	4	5
$Y_i = \log(y_i)$						

b) Construire le nuage de points $M_i(x_i, Y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthonormal. Prendre comme unité graphique : 2 cm.

2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points de coordonnées (x_i, Y_i). On note $(\bar{x}, \bar{Y})$ les coordonnées du point G. Donner la valeur exacte de $\bar{x}$ et la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $\bar{Y}$.

3. a) On désigne par Δ la droite d'équation :
$Y = 0{,}06x + 2{,}78$.

Construire la droite Δ sur la figure de la question **1. b)**.

b) Le point de coordonnées (2,5 ; 2,93) appartient-il à la droite Δ ?

4. On admet que la droite Δ constitue un bon ajustement affine du nuage de points de coordonnées (x_i, Y_i). Déterminer une estimation du nombre de cas déclarés lors du sixième relevé.

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Pour tout nombre réel strictement positif a :
$\log a = b$ si et seulement si : $a = 10^b$.

5. Justifier les deux affirmations suivantes :

a) $y_i = 603(1{,}15)^{x_i}$,

sachant que 603 est un résultat arrondi à l'unité et 1,15 est un résultat arrondi à 10^{-2}.

b) Du relevé de rang 0 au relevé de rang 5, on peut considérer que le nombre de cas déclarés a augmenté de 15 % par relevé.

Exercices corrigés pour le baccalauréat

Corrigés à partir de la page 346

Avec le tableur

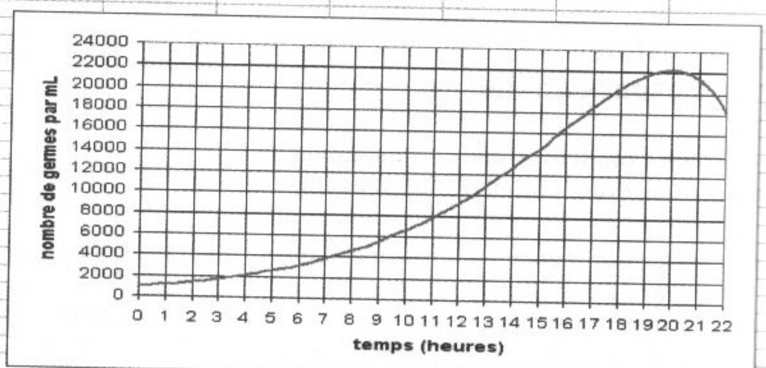
22. ★★★ Lait caillé

Les bactéries se multiplient dans le lait et finissent par le transformer en lait caillé. On admet que pendant 22 h
le nombre de germes par millilitres, pour un temps x en heures, est donné par : $f(x) = (960 - 40x) \times 1{,}29^x$.

1. On étudie la fonction f avec un tableur.

Quelle formule a-t-on entrée en B2 puis recopiée vers le bas ?

	A	B
1	x	f(x)
2	0	960
3	0,5	1063,4886
4	1	1177,6
5	1,5	1303,33922
6	2	1441,792
7	2,5	1594,12868
8	3	1761,60768
9	3,5	1945,57845
10	4	2147,48365
11	4,5	2368,86039
12	5	2611,34012
13	5,5	2876,64687
14	6	3166,59349
15	6,5	3483,07513
16	7	3828,05968
17	7,5	4203,5741
18	8	4611,68602
19	8,5	5054,47941
20	9	5534,02322
21	9,5	6052,33147
22	10	6611,31308
23	10,5	7212,7095



2. En utilisant les résultats affichés par le tableur, peut-on dire qu'au bout de 4 heures, la quantité de ge
par millilitres a plus que doublé ? Justifier la réponse.

3. Par lecture graphique, déterminer au bout de combien de temps (à une demi-heure près) le nombre de ger-
mes par millilitre est égal à 12 000.

4. On sait que le lait se met à cailler 5 heures après que la quantité maximale de germes ait été atteinte. Déter-
miner, en utilisant le graphique, à quel moment environ le lait se met à cailler, dans ce cas précis.

23. ★★★ Nombre d'abonnés à l'Internet haut débit

Le nombre trimestriel (en millions) d'abonnements en France à l'Internet haut débit, est inscrit en colonne C de la feuille de calcul suivante, du premier trimestre 2003 au premier trimestre 2004.

Le tableur propose d'ajuster le nuage de points avec un modèle exponentiel, en utilisant la fonction f définie par : $f(x) = 1{,}78 \times 1{,}19^x$ où x correspond au rang du trimestre à partir du premier trimestre 2003.

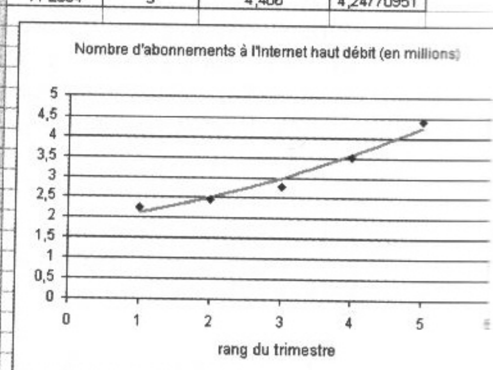
1. On a entré en cellule D2 la formule =1,78*1,19^B2 que l'on a recopiée vers le bas.

Quelle est la formule contenue dans la cellule D3 ?

2. Quel était le nombre d'abonnements à l'Internet haut débit, en millions, prévu par le modèle, au deuxième trimestre 2004 ($x = 6$) et au premier trimestre 2005 ($x = 9$) ? Arrondir à 10^{-2}.

D2 = =1,78*1,19^B2

	A	B	C	D
1	Trimestre	Rang du trimestre	Nb abonnements (millions)	f(x)
2	T1 2003	1	2,236	2,1182
3	T2 2003	2	2,45	2,520658
4	T3 2003	3	2,79	2,99958302
5	T4 2003	4	3,524	3,56950379
6	T1 2004	5	4,406	4,24770951



Questionnaire à choix multiples

Réponses à la page 349

Pour se tester

Dans ces questionnaires à choix multiples (QCM), il suffit d'indiquer sur sa copie, pour chaque question posée, la bonne réponse (ou une bonne réponse) parmi les propositions de l'énoncé ; aucune justification n'est demandée. Ces QCM, dont les réponses figurent à la fin de l'ouvrage, permettent **de se tester** et de se préparer à ce type d'exercices qui figure souvent dans l'épreuve de mathématiques du baccalauréat.

Fonction dérivée

24. ⋆ Propriétés algébriques des fonctions exponentielles

		a)	b)	c)	d)
1	$(0{,}95)^2 \times (0{,}95)^3 =$	$(0{,}95)^6$	$(0{,}95)^5$	$(0{,}95)^1$	$(0{,}95)^{-1}$
2	$(1{,}02)^{-2} =$	$\dfrac{1}{1{,}02}$	0,0002	$\dfrac{1}{(1{,}02)^2}$	$(1{,}02)^2$
3	$\dfrac{(0{,}85)^{n+1}}{(0{,}85)^n} =$	$(0{,}85)^{2n+1}$	0,85	$(0{,}85)^{-1}$	$(0{,}85)^{-2}$

25. ⋆ Application à la biologie

Le nombre de bactéries dans une culture de bactéries de la salmonellose est donné au bout de n heures par : $f(n) = 100 \times 3^n$.

		a)	b)	c)
1	La population initiale (pour $n = 0$) est :	0	100	300
2	Au bout de deux heures, la population initiale a été multipliée par :	2	3	9

26. ⋆ Sens de variation

		a)	b)	c)
1	La fonction f définie sur [0, 10] par $f(t) = (0{,}95^t)$ est :	strictement croissante sur [0, 10]	strictement décroissante sur [0, 10]	constante sur [0, 10]
2	La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(0{,}691)^x$ est :	strictement décroissante sur $\mathbb{R}$	constante sur $\mathbb{R}$	strictement croissante sur $\mathbb{R}$

27. ⋆ Propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal

		a)	b)	c)	d)
1	$\log(10^{-4}) =$	$-10\log 4$	$\dfrac{\log 4}{10}$	4	-4
2	L'équation $(1{,}25)^x = 2$ admet pour solution dans $\mathbb{R}$:	1,6	0,625	$\log(1{,}6)$	$\dfrac{\log(2)}{\log(1{,}25)}$
3	L'équation $\log x = 3$ admet pour solution dans $]0, +\infty[$:	3	30	1 000	10^3

28. ⋆ Applications de la fonction logarithme décimal

A. *En chimie*

En chimie, le « *pH* » (potentiel d'hydrogène) est défini par :
$\mathrm{pH} = -\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est la concentration en ions H_3O^+, exprimée en $\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$, d'une solution aqueuse.

	a)	b)	c)
La concentration en H_3O^+ d'une solution aqueuse est $1{,}8 \times 10^{-11}\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$. La meilleure approximation du pH de cette solution est :	$-10{,}74$	10,75	10,74

B. En acoustique

Le *niveau d'intensité acoustique* est défini par $L = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ où I est l'intensité du son étudié, exprimé en Watt par m^{-2}, et I_0, est une *intensité acoustique de référence*. On choisit le plus souvent $I_0 = 10^{-12}$ Watts par m^{-2}, qui est le seuil d'audibilité. L **s'exprime en décibels** (dB).

		a)	b)	c)
1	Quand l'intensité acoustique I est multipliée par 2, le niveau d'intensité acoustique est :	multiplié par 2	multiplié par 20	augmenté de 3 décibels
2	Sur un boulevard périphérique on a : $L = 70$ dB donc :	$I = 7I_0$	$I = 7\,000I_0$	$I = 10^7 I_0$

Questionnaire à choix multiples

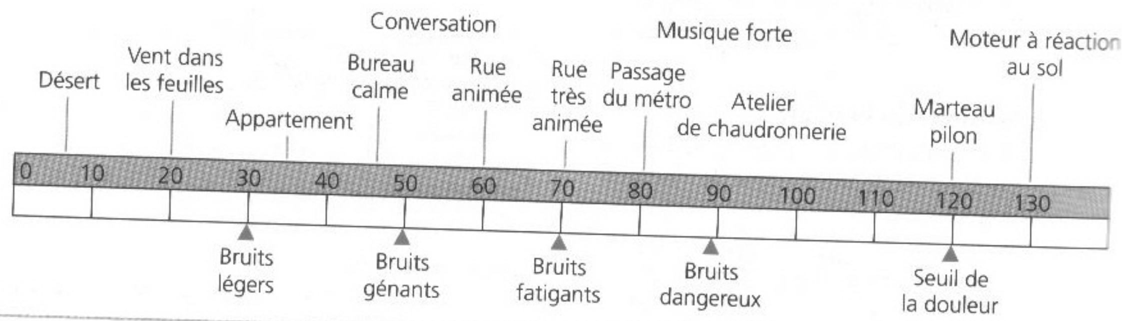
Réponses à la page 349

Des notations en acoustique

- La lettre « *L* », souvent utilisée pour l'intensité acoustique est la première lettre du mot anglais « level » (niveau).
- Le « décibel » est une unité choisie en hommage au physicien américain Graham Bell (1847-1922), un des inventeurs du téléphone, en 1876.

Sur le boulevard périphérique ci-contre, on a $L = 70$ *et* $v \leq 80$...

Quelques exemples de niveaux d'intensité acoustique (en décibels)



Exercices non corrigés

Pour chercher

Les **étoiles** à côté du numéro de l'exercice indiquent le niveau de difficulté :
- ★ désigne des exercices d'application directe du cours ;
- ★★ désigne des exercices pour s'entraîner, plus progressifs que les exercices du baccalauréat ;
- ★★★ désigne des exercices, qui par leur niveau de difficulté et (ou) leur longueur correspondent au niveau d'exigence de l'épreuve du baccalauréat ;
- ★★★★ désigne des exercices pour « aller plus loin » ou des exercices comportant moins d'indications.

Simplification d'expressions avec une exponentielle

29. ★

Simplifier l'écriture de chacune des expressions suivantes.

a) $\log(10^3)$; **b)** $\log(10^{-4})$;

c) $\log\left(\frac{1}{10^2}\right)$; **d)** $\log(10^{t+10})$.

Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal

30. ★

Déterminer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de chacun des nombres suivants.

a) $\log(4{,}3 \times 10^{-4})$; **b)** $\log(0{,}3 \times 10^{-12})$;

c) $-\log(1{,}06 \times 10^{-6})$.

Nombres de la forme a^x, équations de la forme $a^x = b$, inéquations de la forme $a^x \geq b$ ou $a^x \leq b$

31. ★ **Déterminer une valeur approchée de nombres de la forme a^x**

Déterminer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de n.

a) $n = (0{,}85)^{1{,}2}$. **b)** $n = (1{,}203)^{10}$.

c) $n = -2(0{,}93)^{11}$. **d)** $n = 302(1{,}22)^{25}$.

32. ★ **Équations de la forme $a^x = b$**

Déterminer le nombre réel strictement positif, x ou t, solution de l'équation suivante. Donner la valeur exacte, puis la valeur approchée arrondie à 10^{-4} de la solution.

a) $(0{,}951)^x = 0{,}05$. **b)** $(1{,}035)^t = 2$.

c) $4(0{,}819)^x = 2{,}2$. **d)** $500(1 - 0{,}82^t) = 370$.

INDICATION

Utiliser : $\log a^x = x \log a$.

33. ★ **Inéquations**

Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'inéquation suivante. (C'est-à-dire déterminer l'ensemble des nombres réels pour lesquels l'inégalité suivante est vraie.)

a) $3(0{,}8)^t \leq 1{,}5$. **b)** $0{,}004(2{,}2)^x \geq 0{,}8$.

c) $5{,}2 - 3{,}5(1{,}02)^x \geq 6$.

Résolution d'une équation de la forme $a^x = b$ pour rechercher le premier terme d'une suite géométrique franchissant un seuil donné

CE QU'IL FAUT SAVOIR

- Pour tous nombres réels strictement positifs a et b : $a \leq b$ si et seulement si : $\log a \leq \log b$.
- Pour tout nombre réel strictement positif a et pour tout nombre entier n : $\log(a^n) = n \log a$.

34. ★★ **La production d'un médicament générique**

Au bout de la première semaine de fonctionnement, la production de boîtes d'un médicament générique est de 200 000 unités.

Par la suite, on envisage d'augmenter cette production de 3 % par semaine.

On note :
- U_1 la production, en unités, à la fin de la première semaine, ($U_1 = 200\ 000$),
- U_2 la production, en unités, à la fin de la 2e semaine,
- …
- U_n la production, en unités, à la fin de la n-ième semaine.

1. Calculer U_2 et U_3.

2. Quelle est la nature de la suite de terme général U_n ? Préciser la raison de cette suite.

3. a) Exprimer U_n en fonction de n.

b) En déduire la production au bout de la 12e semaine. Le résultat est à arrondir à l'unité.

4. L'équation $300\ 000 = 200\ 000 \times 1{,}03^{n-1}$ permet de déterminer le nombre n de semaines nécessaires pour que la fabrication atteigne 300 000 boîtes.

Résoudre cette équation en faisant figurer les différentes étapes du calcul et arrondir le résultat à l'unité.

35. ★★ **Placement avec intérêts composés**

Dans cet exercice, on donnera éventuellement des valeurs approchées des résultats arrondies à un euro près.

Exercices non corrigés

On place 10 000 euros le 1[er] janvier 2007 sur un compte d'épargne au taux de 3 % l'an avec « intérêts composés » ce qui signifie que les intérêts obtenus à la fin de la première année s'ajoutent au capital pour produire des intérêts la seconde année et ainsi de suite.

On note C_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Calculer C_1, C_2, C_3.

2. a) Donner pour tout entier n l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n.

b) En déduire que les nombres C_1, C_2... C_n sont des termes successifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

c) Donner l'expression de C_n en fonction de n.

3. Au bout de combien d'années le capital initial aura-t-il doublé ?

ON PEUT RETENIR QUE :

Pour un **placement avec intérêts composés de x %**, on note $i = \frac{x}{100}$; les capitaux disponibles successifs C_0, C_1,..., C_n sont alors des termes successifs d'une suite géométrique de raison $(1 + i)$.

36. ★★★ Suite géométrique de premier terme u_0, calcul de termes, sens de variation

La suite géométrique (C_n) est définie par :

$C_0 = 1\,000$ et, pour tout entier n de $\mathbb{N}$,

$C_{n+1} = 1{,}0225\, C_n$.

Dans ce qui suit, arrondir les valeurs approchées à 10^{-2}.

1. Calculer C_1, C_2, C_3.

2. Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, exprimer C_n en fonction de n.

3. Déterminer le sens de variation de la suite (C_n).

4. Déterminer le plus petit nombre entier n tel que : $C_n \geq 2C_0$.

37. ★★★ Le premier terme de la suite est P_1

Une entreprise fabriquant du matériel pour les laboratoires augmente chaque année sa production d'un certain type de pièces de 6 %. La production P_1 de la première année est de 45 000 pièces.

1. Déterminer la nature de la suite des productions annuelles en précisant le premier terme et la raison.

2. Calculer la production P_2 pour la deuxième année, P_3 pour la troisième année, P_4 pour la quatrième année ; les valeurs seront arrondies à l'unité.

3. On désigne par P_n la production de l'année n. Exprimer P_n en fonction de n.

4. Calculer la production de la douzième année (arrondir à l'unité).

5. Déterminer en quelle année la production P_n dépassera 100 000 pièces.

38. ★★★ L'injection d'un calmant

On a injecté un centimètre cube de produit calmant à un malade.

Toutes des demi-heures, son organisme élimine 10 % de ce produit.

1. Quel volume de ce produit calmant a-t-il éliminé au bout de six heures ? Arrondir à 10^{-2}

2. Sachant que ce produit n'est plus efficace lorsque le volume restant est inférieur à 500 millimètres cubes, au bout de combien de temps le produit sera-t-il inefficace ?

39. ★★★★ Les deux taux d'intérêts

Deux capitaux sont placés simultanément à intérêts composés :

le premier de 25 000 € à 4,5 % l'an ;

le second de 30 000 € à 3,5 % l'an.

Calculer le nombre d'années de placement à partir duquel la valeur acquise par le premier capital dépassera celle acquise par le second.

40. ★★★ La répartition de la population d'une ville

On donne la répartition de la population d'une ville selon l'âge de ses habitants en 2005

Moins de 20 ans	20-60 ans	Plus de 60 ans
27 000	50 300	35 980

On suppose que, pour cette ville et sur la période 2005-2055, la population évolue selon les trois hypothèses suivantes :

(1) la population des *moins de 20 ans* va décroître de 500 habitants tous les cinq ans ;

(2) la population des *20-60 ans* va rester constante ;

(3) la population des *plus de 60 ans* va augmenter de 10 % tous les cinq ans.

1. Si ces hypothèses se vérifiaient, est-il possible que dans cette ville, en 2055, il y ait environ 4 fois plus d'habitants de plus de 60 ans que d'habitants de moins de 20 ans ?

2. Au bout de combien d'années la population des plus de 60 ans devrait-elle doubler ?

Exemples de résolution d'équations de la forme $\log x = b$

41. ★

Résoudre dans $]0, +\infty[$ chacune des équations suivantes d'inconnue x.

a) $\log(x) = 2$. **b)** $\log(x) = -1$.

c) $\log\left(\frac{x}{2}\right) = -2$. **d)** $\log(2x) = 3$.

Exercices non corrigés

e) $\log(0{,}4x) = 2$.

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Pour tout nombre réel strictement positif x :
$\log x = b$ si et seulement si : $x = 10^b$.

42. ★★ Équation $x^n = a$

Déterminer le nombre réel x strictement positif qui est solution de l'équation suivante.

Donner la valeur exacte de la solution puis la valeur approchée arrondie à 10^{-4}.

a) $x^3 = 1{,}04$. **b)** $x^4 = 1{,}10$.
c) $x^5 = 1{,}50$. **d)** $x^{12} = 1{,}045$.

CONSEIL

On peut se reporter à la méthode exposée après l'énoncé de l'exercice corrigé **8** de ce chapitre.

43. ★★★ Taux d'évolution moyen

Un cabinet d'infirmières a fait 400 000 € de chiffre d'affaires pour l'année 2003. L'évolution du chiffre d'affaires pour les années suivantes est donnée dans le tableau suivant.

Année	2003	2004	2005	2006	2007
Taux d'évolution		+ 6 %	+ 5 %	+ 10 %	+ 7 %
Chiffre d'affaires	400 000				

1. Calculer, sous forme de pourcentage, le taux d'évolution global du chiffre d'affaires de fin 2003 à fin 2007.
2. Calculer le chiffre d'affaires pour 2007.
3. Calculer le taux d'évolution moyen annuel pour chacune des quatre années de 2004 à 2007. Arrondir à 0,01 %.

CONSEIL

On peut se reporter à l'énoncé de l'exercice corrigé **9** de ce chapitre.

44. ★★★ Calculer un taux d'évolution moyen

Dans chacun des cas suivants, déterminer le taux d'évolution global et en déduire le taux d'évolution moyen pour une période. Arrondir à 0,01 %.

1. *Les ressources européennes en électricité éolienne, en millions de watts (MW)*

Année	2002	2003	2004
Production des éoliennes en MW	23 154	28 568	34 366

2. *Évolution du PIB*

Un peu d'économie

• **PIB : produit intérieur brut**, il s'agit d'un indicateur qui permet d'évaluer les richesses créées par un pays, dans les secteurs privé et public, pendant une année.

• En 2006, le PIB de la France s'est élevé à 1 792 milliards d'euros.

Le tableau suivant donne l'évolution en pourcentage du PIB, par rapport à l'année précédente, pour quatre pays.

Année	2003	2004	2005	2006
États-Unis	3,1	4,4	3	3
France	0,2	2,3	1,5	2
Royaume-Uni	2,2	3,1	2	2,3
Chine		9,5	8,6	8,4

3. *Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de décès sur les routes françaises.*

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Nombre de décès	7 242	5 731	5 232	5 318	4 709	4 615

45. ★★★ Recherche de la raison d'une suite géométrique

Une organisation humanitaire dispose aujourd'hui d'un capital C_0 de 30 000 €. Déterminer à quel taux elle doit le placer aujourd'hui pour que la valeur acquise par C_0 dans cinq ans soit égale à 36 000 €.

46. ★★★★ Taux d'intérêts équivalents

Dans chacun des cas suivants, déterminer le taux d'intérêt mensuel équivalent au taux d'intérêt annuel donné.

CONSEIL

On peut se reporter à l'exercice résolu **3**, page 254.

1. *Taux de l'usure*

Un crédit de trésorerie au taux annuel de 19,8 %.

Un peu d'économie

Le **taux de l'usure** est le taux, pour un type de crédit, au-delà duquel la Banque de France interdit de prêter.
Celui qui prête à un taux supérieur au taux de l'usure commet un délit. Pour les crédits de trésorerie supérieurs à 1 524 €, le taux de l'usure était de 19,8 % en 2008.

Exercices non corrigés

2. *Crédit à la consommation*

Un crédit à la consommation au taux annuel de 5,90 %.

3. *Prêt pour l'achat d'une voiture*

Un prêt pour l'achat d'une voiture au taux annuel de 4,95 % (sur 5 ans).

4. *Un crédit à la consommation*

Un crédit à la consommation au taux annuel de 3,60 %.

Exemples d'utilisation de la fonction logarithme décimal

47. ⋆⋆ L'intensité acoustique (ou intensité sonore)

L'intensité acoustique (ou intensité sonore) est définie par $L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ où I est l'intensité du son étudié et I une intensité de référence.

I et I_0 sont exprimés en Watts par m^{-2} et L en décibels (dB). On donne $I_0 = 10^{-12}$.

Voir l'information accompagnant l'exercice **28**, page 270.

Reproduire et compléter le tableau suivant.

Valeur de L (en dB)	10	30	40	50	60	100	120
Valeur de I (en W/m^{-2})							1

48. ⋆⋆⋆ En avant la musique

On écoute dans une pièce de la musique diffusée par un haut-parleur. L'intensité acoustique est égale à $10^{-6}\,W \cdot m^{-2}$.

1. Calculer le niveau d'intensité acoustique L_1 correspondant.

La définition de L figure au début de l'énoncé de l'exercice 47.

2. On ajoute un deuxième haut-parleur. L'intensité acoustique double.

a) Déterminer la nouvelle valeur L_2 du niveau d'intensité acoustique.

b) L_2 est-il le double de L_1 ?

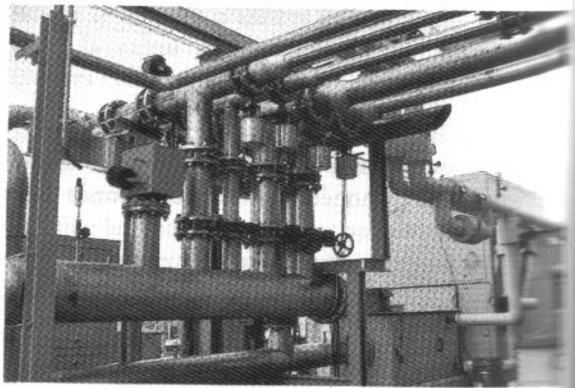
49. ⋆⋆⋆ Potentiel d'hydrogène

En chimie, le « *pH* » (potentiel d'hydrogène) est défini par :
pH = – log $[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est la concentration en ions H_3O^+, exprimée en $mol \cdot L^{-1}$, d'une solution aqueuse.

1. La concentration en H_3O^+ d'une solution est $2{,}4 \times 10^{-10}$ mole par litre. Calculer le pH de cette solution. Arrondir à 10^{-2}.

2. Le pH d'une solution est 3. Établir que la concentration en H_3O^+ est 10^{-3}.

3. Démontrer que si la concentration d'une solution est divisée par 100, son pH augmente de 2.



Sens de variation de fonctions $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto ka^x$

50. ⋆⋆ Étude du sens de variation de fonctions

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le sens de variation. Rappeler à chaque fois le résultat du cours utilisé.

a) f définie sur [0, 8] par : $f(t) = (0{,}95)^t$.

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1{,}025)^x$.

c) f définie sur [0, 10] par : $f(t) = -3(0{,}8)^t$.

d) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -0{,}5(1{,}3)^x$.

e) f définie sur [0, 12] par : $f(t) = 0{,}01(0{,}75)^t$.

f) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5(1{,}035)^x$.

Exercices pour le baccalauréat

Les exercices pour le baccalauréat sont des exercices qui pourraient figurer dans l'épreuve de mathématiques du baccalauréat ST2S.

Avec des suites géométriques

51. ★★★ Isolation phonique

L'unité d'intensité du son utilisée dans cet exercice est le décibel (symbole dB).

Une source sonore émet un son d'intensité 100 décibels ($u_0 = 100$).

On appelle u_n l'intensité du son mesurée après la traversée de n plaques d'isolation phonique, sachant que chaque plaque d'isolation absorbe 10 % de l'intensité du son qui lui parvient.

Par exemple $u_1 = u_0 - \frac{10}{100} u_0$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3.

2. a) Montrer que, pour tout n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n$.

b) En déduire que les nombres u_0, u_1, u_2..., u_n sont des termes successifs d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) Donner l'expression u_n en fonction de n.

3. Quelle intensité sonore obtient-on avec dix plaques d'isolation phonique ? Arrondir à 10^{-2}.

4. Déterminer à partir de quelle valeur de n l'intensité du son devient inférieure à 1 dB.

Augmentation ou diminution de t % :

- Chaque fois qu'on est confronté à une situation du type : « une population, un prix... augmente de t % tous les ans », on peut définir une suite géométrique de raison $1 + \frac{t}{100}$.
- S'il s'agit d'une diminution de t %, on peut définir une suite géométrique de raison $1 - \frac{t}{100}$.

52. ★★★ L'évolution d'une population

Une suite réelle (U_n) est définie par son premier terme U_0 strictement positif et par la relation : pour tout entier n, $U_{n+1} - U_n = -0{,}04U_n$.

A. Étude de la suite

1. Calculer U_1, U_2 et U_3 en fonction de U_0.

2. Démontrer que cette suite est une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison q que l'on déterminera.

3. Quel est son sens de variation ?

4. Exprimer U_n en fonction de U_0 et de n.

B. Application

Le premier janvier 2007 la population d'une commune rurale était de 3 000 personnes. On admet que cette population a diminué de 4 % par an.

1. Quelle a été la population de cette commune au 1er janvier 2008 ?

2. Quelle sera la population de cette commune au 1er janvier 2009 ?

3. À partir de quelle année la population chutera-t-elle à moins de 2 000 personnes ?

53. ★★★ Désintégration du carbone 14

Le but de l'exercice est l'étude de la désintégration du carbone 14, corps radioactif, et de son utilisation pour la datation des fossiles ou des squelettes.

A. Étude d'une suite

Soit N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$.

Soit N_1 le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après.

Soit N_k le nombre d'atomes de carbone 14 après k siècles, k entier naturel.

On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps, d'environ 1,24 % par siècle.

1. Justifier que la suite (N_k) est une suite géométrique de raison 0,9876.

2. Exprimer N_k en fonction de N_0 et de l'entier k.

3. Quel est le sens de variation de la suite (N_k) ? Justifier.

B. Application

Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du carbone 14, qui s'y désintègre très lentement, ce qui fait que le taux de carbone 14 dans l'atmosphère de la terre est constant.

Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère ; à leur mort, l'assimilation en carbone 14 cesse et celui-ci se désintègre dans les conditions vues dans la partie A.

1. Un squelette d'homme préhistorique contient 5 % du carbone 14 initial.

Justifier que l'on peut estimer son âge à 24 000 ans.

2. On admet que l'on peut ainsi estimer l'âge des fossiles qui contiennent au moins 1 % du carbone 14 initial.

Exercices pour le baccalauréat

En utilisant des propriétés de la fonction logarithme décimal, déterminer l'âge maximum que l'on peut calculer.

54. ★★★ Taux d'évolution, résolution d'une inéquation

Le 1er janvier 2007, la population d'un pays s'élevait à 30 millions d'habitants.

On estime que l'augmentation de la population pour les 15 ans à venir sera de 2 % par an.

1. Calculer la population au 1er janvier 2008, puis au 1er janvier 2014. Les résultats seront donnés en millions et arrondis à 10^{-3}.

2. Quelle est l'augmentation en pourcentage, entre la population au 1er janvier 2007 et la population au 1er janvier 2014 ? Le résultat sera arrondi à 0,1 %.

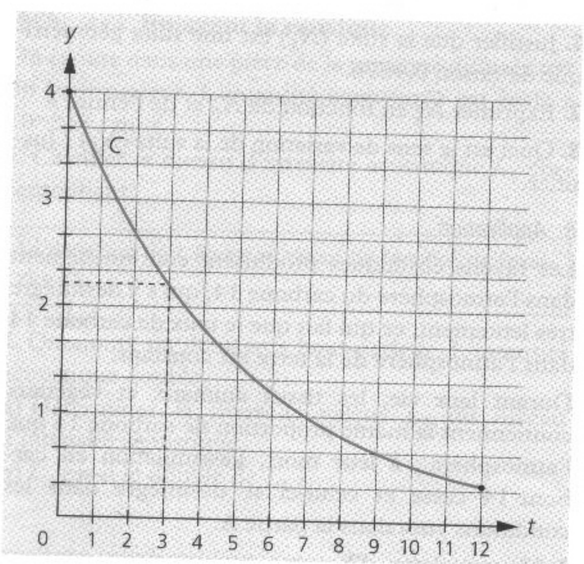
3. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'inéquation : $1{,}02^x \geq 1{,}2$.

4. Déterminer l'année à partir de laquelle la population dépassera 36 millions d'habitants.

Fonctions définies par $x \mapsto a^x$ ou $x \mapsto ka^x$

55. ★★★ Lectures graphiques, résolution d'équation

Le graphique suivant donne la courbe représentative C d'une fonction f de la variable t définie sur l'intervalle $[0, 12]$.



Un laboratoire étudie le processus d'élimination d'un produit anesthésiant pendant les 12 heures suivant l'injection.

À l'instant $t = 0$, on injecte à une personne une dose de 4 cm³ du produit anesthésiant.

La quantité de ce produit présente dans le sa (exprimée en cm³) en fonction du temps t (expri en heures) est donnée par $f(t)$ où f est la fonction dé nie ci-dessus, pour t appartenant à l'intervalle $[0, 12]$.

1. a) Lire sur le graphique la quantité de prod présente dans le sang 2 heures après l'injection.

b) Déterminer graphiquement combien de tem s'est écoulé après l'injection lorsque la quantité de produit contenue dans le sang est de 2,2 cm³.

2. On admet dans cette question, que, pour tout de $[0, 12]$, $f(t) = 4(0{,}819)^t$.

a) Déterminer la quantité de produit présente dans le sang 8 heures après l'injection. Arrondir à 10^{-2}.

En déduire le pourcentage de la quantité de prod présente dans le sang au bout de 8 heures par rapport à la dose injectée. Arrondir à 0,1 %.

b) Retrouver par le calcul le résultat obtenu à la question **1. b)**.

56. ★★★ Étude des variations, résolution d'équation et d'inéquation

A. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'interva $[0, 50]$ par $f(t) = 2(0{,}982)^t$.

Le plan est muni d'un repère orthogonal. On note C la courbe de la fonction f dans ce repère. Pren comme unités graphiques 1 cm pour 5 unités sur l'axe des abscisses et 5 cm pour une unité sur l'ax des ordonnées.

1. Déterminer le sens de variation de f sur l'interva $[0, 50]$.

2. Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = 1{,}5$. On donnera la valeur exacte de la solution, puis une valeur approchée arrondie à l'unité près.

3. a) Reproduire et compléter le tableau des vale suivant (dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}).

t	0	2	5	8	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$f(t)$				1,73			1,39		1,16				[illegible]

b) Tracer la courbe C.

B. Application

Le taux de glycémie (de glucose dans le sang) do rester stable. Cet équilibre est assuré par un processus appelé homéostasie. Quand un changement se produit, le cerveau le décèle et envoie des messages pour le corriger. À l'instant t, exprimé en minutes, le taux de glycémie, exprimé en g/l, est donné par $f(t) = 2 \times (0{,}982)^t$.

1. En utilisant les résultats de la partie A, détermine

a) le taux de glycémie pour $t = 8$;

b) la durée pendant laquelle le taux de glycém demeure supérieur ou égal à 1,5 g/l.

2. On considère qu'un patient a un taux de glycémie normal lorsque celui-ci est inférieur à 1,1 g/l (sachant qu'il reste supérieur à 0,8 g/l sur l'intervalle [0, 50]).
En utilisant le graphique de la partie B, déterminer la durée nécessaire pour que le taux de glycémie devienne normal. On fera apparaître les constructions utiles.

57. ★★★ Étude des variations, résolution d'inéquation, calcul de pourcentages

A. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0, 5] par : $f(t) = 0{,}8 \times (0{,}61)^t$.

On note C la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthogonal du plan. On prend comme unités graphiques 2 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

1. **a)** Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0, 5].
b) Établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0, 5].

2. **a)** Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats au centième.

t	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(t)$	0,62		0,38		0,23			0,11		

b) On désigne par T, la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0. On admet que f est dérivable sur [0, 5] et que $f'(0) = -0{,}4$. Déterminer une équation de T.
c) Construire la tangente T puis tracer la courbe C.

3. Résoudre par le calcul l'inéquation $f(t) \geq 0{,}2$ en donnant les résultats arrondis au centième.

B. Application

Un patient a reçu par injection une substance médicamenteuse. Son sang présente alors une concentration de 0,8 g/l du produit injecté. On note $f(t)$ la valeur de la concentration du produit dans le sang, en fonction du temps écoulé t exprimé en heures. On admet que f est la fonction définie au début de la partie A.

1. De l'étude menée dans la partie A, déduire le temps, exprimé en heures et en minutes, pendant lequel la concentration du produit dans le sang du patient reste supérieure à 0,2 g/l.

2. Quel est le pourcentage qui exprime la baisse de la concentration du produit dans le sang du patient entre la 1re heure et la 4e heure (c'est-à-dire entre les instants $t = 1$ et $t = 4$) ?

3. Calculer, pour tout t de [0, 5], $\dfrac{f(t+1)}{f(t)}$.

Donner une interprétation du résultat en utilisant le mot « pourcentage ».

58. ★★★★ Pression acoustique

A. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2 \times 10^{-5}, 25]$ par : $f(x) = 20 \log (5 \times 10^4 x)$.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses pour 1 unité et 1 cm sur l'axe des ordonnées pour 10 unités). On note C la courbe représentative de la fonction f dans ce repère.

1. Recopier après l'avoir complété le tableau de valeurs ci-dessous. On donnera les valeurs approchées arrondies à l'unité.

x	$2 \cdot 10^{-5}$	0,5	1	2	3	5	10	15	20	25
$f(x)$			94				114			122

2. On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2 \cdot 10^{-5}, 25]$.
Tracer la courbe C.

B. Application

Le niveau sonore L en décibels (dB) permet de distinguer un son fort d'un son faible perçu par l'oreille humaine. Un bruit devient dangereux pour l'oreille humaine à partir de 90 décibels et le seuil de la douleur est de 120 décibels.

CONSEIL
On peut se reporter à l'information sur une échelle des bruits figurant à la page 270.

Le niveau sonore L en décibels s'exprime en fonction de la pression acoustique p (en pascals) par la relation suivante : $L(p) = 20 \times \log (5 \cdot 10^4 p)$ pour p dans $[2 \times 10^{-5}, 25]$.

Utiliser la partie A pour répondre aux questions suivantes.

1. Quelle est, en pascal, la pression correspondant à un niveau sonore de 0 dB.

2. À l'aide de la courbe de la partie A, déterminer graphiquement à partir de quelle pression un bruit devient dangereux pour l'oreille humaine. On fera apparaître les traits de construction sur le graphique.

3. Déterminer par le calcul la valeur exacte de la pression correspondant au seuil de la douleur.

Exercices pour le baccalauréat

Exemples d'ajustements affines avec la fonction logarithme décimal

59. ★★★ Évolution d'une épidémie

Lors d'une épidémie, on a relevé, à intervalles réguliers, le nombre de cas déclarés :

Numéro du relevé : x_i	1	2	3	4
Nombre de cas : y_i	94	221	446	1 050

1. Représenter les points de coordonnées (x_i, y_i), dans un repère convenable. Un ajustement affine paraît-il justifié ?

2. On pose $z_i = \log y_i$. (On désigne par log le logarithme décimal.)

a) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x_i	1	2	3	4
$z_i = \log(y_i)$				

b) Représenter les points de coordonnées (x_i, z_i) dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

3. a) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points de coordonnées (x_i, z_i).
Arrondir l'ordonnée du point G à 10^{-2}.

b) On désigne par Δ la droite d'équation $z = 0{,}35x + 1{,}625$. Le point de coordonnées $(2{,}5\ ;\ 2{,}5)$ appartient-il à la droite Δ ?

4. On admet que la droite Δ constitue un bon ajustement du nuage de points de coordonnées (x_i, z_i). Déterminer une estimation du nombre de cas déclarés lors du cinquième relevé.

60. ★★★ Densité bactérienne

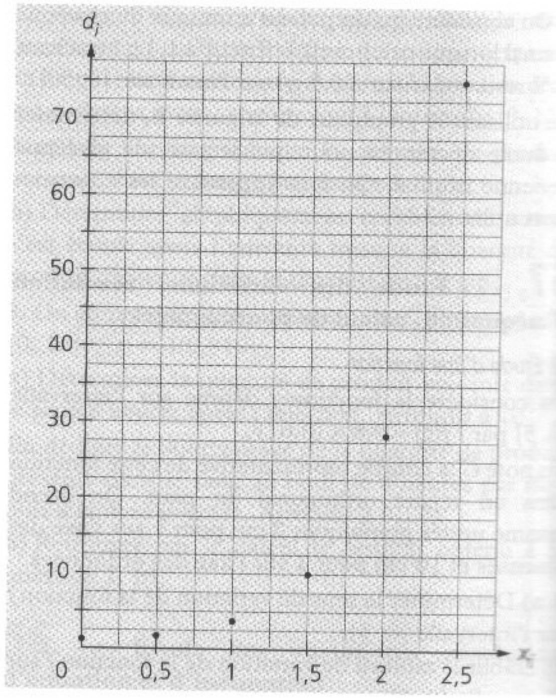
Une population homogène de bactéries placées dans un milieu stable, se multiplie par *mitose.* Dans ce problème, on va s'intéresser à l'évolution de la densité bactérienne en fonction du temps. La densité bactérienne représente le nombre de bactéries par mm³ et le temps est exprimé en secondes.

1. Une série de six mesures expérimentales a donné les résultats suivants.

Temps en seconde : x_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5
Densité : d_i	0,5	1,5	3,8	10	27	75

Le nuage de points correspondant est donné ci-après.

La forme de ce nuage incite-t-elle à chercher une droite d'ajustement ?



2. a) On pose $y = \log(d)$.

Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant. Arrondir les valeurs de y à 10^{-1}.

x_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$y_i = \log(d_i)$		0,2				

b) Construire le nuage de points $M(x_i, y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthonormal d'unité graphique 5 cm.

c) Peut-on envisager un ajustement affine du nuage de points obtenu au **b)** ?

3. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.

4. Soit la droite Δ d'équation $y = 0{,}88x - 0{,}3$.

a) Construire la droite Δ sur la figure du **2. b)**.

b) Le point moyen G appartient-il à la droite Δ ?

5. On admet que la droite Δ réalise un bon ajustement affine du nuage de points.

a) Quelle valeur peut-on prévoir pour y à l'instant $x = 4$?

b) Déterminer alors la valeur de la densité bactérienne. Arrondir à l'unité.

6. Justifier l'affirmation suivante : $d_i = 0{,}501(7{,}59)^{x_i}$, sachant que 0,501 est un résultat arrondi à 10^{-3} et 7,59 un résultat arrondi à 10^{-2}.

CONSEIL
On peut se reporter au corrigé de l'exercice **21** de ce chapitre.

61. ★★★ **Le nombre de personnes âgées : ajustement affine par la méthode des moindres carrés et fonction exponentielle**

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de personnes âgées de plus de 85 ans, en France métropolitaine, de 1950 à 2000.

On note X_i l'année. L'indice i varie de 1 à 11. Par commodité on pose $x_i = X_i - 1950$.

y_i désigne, en milliers, le nombre de personnes âgées de 85 ans ou plus, au 1er janvier de l'année X_i.

X_i	x_i	y_i
1950	0	201
1955	5	231
1960	10	290
1965	15	361
1970	20	423
1975	25	498
1980	30	567
1985	35	684
1990	40	874
1995	45	1 079
2000	50	1 267

Source : Insee, bilan démographique. Champ : France métropolitaine.

1. La forme du nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) n'incite pas à chercher un ajustement affine. On pose donc $z_i = \log(y_i)$.

a) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3}.

x_i	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$z_i = \log(y_i)$											

b) Construire le nuage de points $M_i(x_i, z_i)$ dans un repère orthogonal. Prendre comme unités graphiques : 1 cm pour 5 sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

c) Peut-on envisager un ajustement affine ?

2. **a)** En utilisant la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement Δ de z en x. Les coefficients sont à arrondir à 10^{-3}.

b) Construire la droite Δ sur la figure.

c) Déterminer graphiquement la valeur de z correspondant à 2010. Laisser les traits de construction utiles sur la figure. En déduire une estimation du nombre de personnes âgées de plus de 85 ans pour 2010.

3. **a)** À l'aide du résultat obtenu avec la calculatrice du 2.a), démontrer que $y = 199(1{,}038)^x$ où 199 et 1,037 sont deux résultats arrondis à 10^{-3}.

b) On désigne par f la fonction définie sur [0, 70] par $f(x) = 199(1{,}038)^x$.

Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) \geq 2\ 000$ et interpréter ce résultat.

Exemple de recherche d'un taux d'évolution moyen

62. ★★★★ **Taux d'évolution annuel moyen**

Une étude d'implantation du nombre d'ordinateurs dans une commune a permis de constater qu'en 1997 il y avait 1 203 ordinateurs et qu'en 2007 on en dénombrait 3 120.

1. Déterminer le taux d'évolution du nombre d'ordinateurs de 1997 à 2007 dans cette commune. Arrondir à 0,01 %.

2. Déterminer le taux d'évolution annuel moyen du nombre d'ordinateurs de 1997 à 2007 dans cette commune. Arrondir à 0,01 %.

3. Sur la période 1997-2002 le taux d'évolution annuel moyen était de 1,07 pour cette commune. Déterminer le taux d'évolution annuel moyen pour la période 2002-2007.

CONSEIL

On peut se reporter à la fiche méthode accompagnant l'exercice corrigé **9** de ce chapitre, page 263.

Avec le tableur

63. ★★★ **Puissance non entière et protocole de Kyoto**

Le protocole de Kyoto signé en 1997 implique des objectifs à atteindre en 2010 sur la base des émissions de gaz à effet de serre enregistrées en 1990. Pour cinq pays européens, les émissions de 1990 et 2001 (en millions de tonnes d'équivalent CO_2) sont entrées en colonnes B et C d'une feuille de calcul et les objectifs de Kyoto sont inscrits en colonne D.

Exercices pour le baccalauréat

F2 = =(1+D2)/(1+E2)-1

	A	B	C	D	E	F	G
1	Pays	Emissions en 1990	Emissions en 2001	Objectif Kyoto Variation 1990-2010	Variation observée 1990-2001	Variation à réaliser 2001-2010	Taux moyen annuel 2002-2010
2	Allemagne	1216	993,5	-21,0%	-18,3%	-3,3%	-0,37%
3	Espagne	289,8	382,8	15,0%	32,1%	-12,9%	-1,53%
4	France	558,6	560,8	0,0%	0,4%	-0,4%	-0,04%
5	Italie	509,2	545,4	-6,5%	7,1%	-12,7%	-1,50%
6	Royaume Uni	746,8	657,2	-12,5%	-12,0%	-0,6%	-0,06%
7							

Par exemple, l'Allemagne doit diminuer ses émissions d'au moins 21 % en 2010 par rapport à 1990 et l'Espagne peut les augmenter au maximum de 15 %.

Les cellules des colonnes D à G sont au format Pourcentage avec 1 ou 2 décimales.

1. Pour obtenir les résultats de la colonne E (variations observées entre 1990 et 2001), quelle formule a-t-on entrée en E2 puis recopiée vers le bas ?

2. Pour calculer la variation à réaliser entre 2001 et 2010 afin d'atteindre l'objectif de Kyoto, on a entré en F2 la formule =(1+D2)/(1+E2)–1, recopiée ensuite vers le bas.

Sachant que pour deux variations successives de t_1 % et t_2 %, le pourcentage t de la variation globale est donné par $1 + t = (1 + t_1) \times (1 + t_2)$, montrer que $t_2 = \dfrac{1+t}{1+t_1} - 1$ et justifier ainsi la formule entrée en F2.

3. Si T est le taux global à réaliser sur la pério
2002-2010 et t le taux moyen annuel, on a : $(1 + t)^9 = 1 + T$.

Pour calculer le taux moyen annuel à réaliser sur la période 2002-2010, on a entré en G2, puis recop
vers le bas, la formule =(1+F2)^(1/9)–1. Justifi
cette formule.

64. ★★★ Fréquence cardiaque

Lors d'une expérience on a mesuré la fréquence car
diaque, en battements par minute, d'un coureur d
400 mètres. Cette fréquence cardiaque est modéli
sée par la formule :

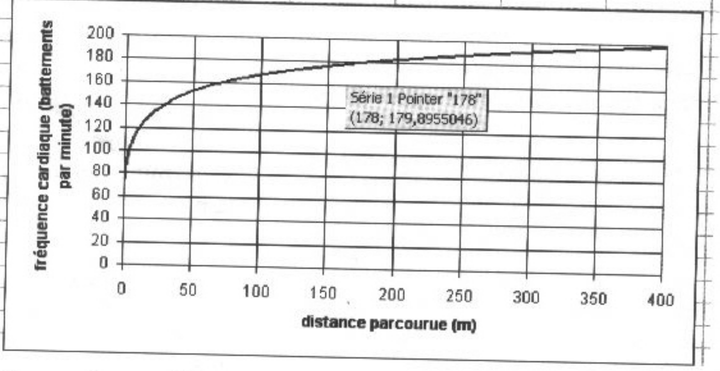
$f(x) = 65 + 51 \times \log(x + 1)$, où x représente la dis
tance parcourue depuis le départ avec $0 \leq x \leq 40$

1. Sur une feuille de calcul, on a entré en cellule B2
la formule =65+51*LOG10(A2+1).

Quelle est la formule contenue dans la cellule B3 ?

B2 = =65+51*LOG10(A2+1)

	A	B
1	x	f(x)
2	0	65
3	1	80,3525298
4	2	89,333184
5	3	95,7050596
6	4	100,64747
7	5	104,685714
8	6	108,1
9	7	111,057589
10	8	113,666368
11	9	116
12	10	118,111027
13	11	120,038244
14	12	121,811111
15	13	123,45253
16	14	124,980654
17	15	126,410119



2. a) Donner la fréquence cardiaque du sportif au début de la course.

b) Calculer la fréquence cardiaque du sportif à mi-course (arrondir à l'unité).

3. On cherche au bout de combien de mètres la fréquence cardiaque du sportif est égale à 180 battements par minute.

a) Déterminer cette distance à l'aide du graphique (on a approché le pointeur de la souris de l'endroit le plus proche).

b) Préciser la réponse à la question précédente en résolvant l'équation : $65 + 51 \log(x + 1) = 180$.
Arrondir à 10^{-1}.

65. ★★★★ Niveau sonore en décibels

Le niveau sonore L (en décibels) d'un son d'inten
sité I (en $W.m^{-2}$) est donné par :

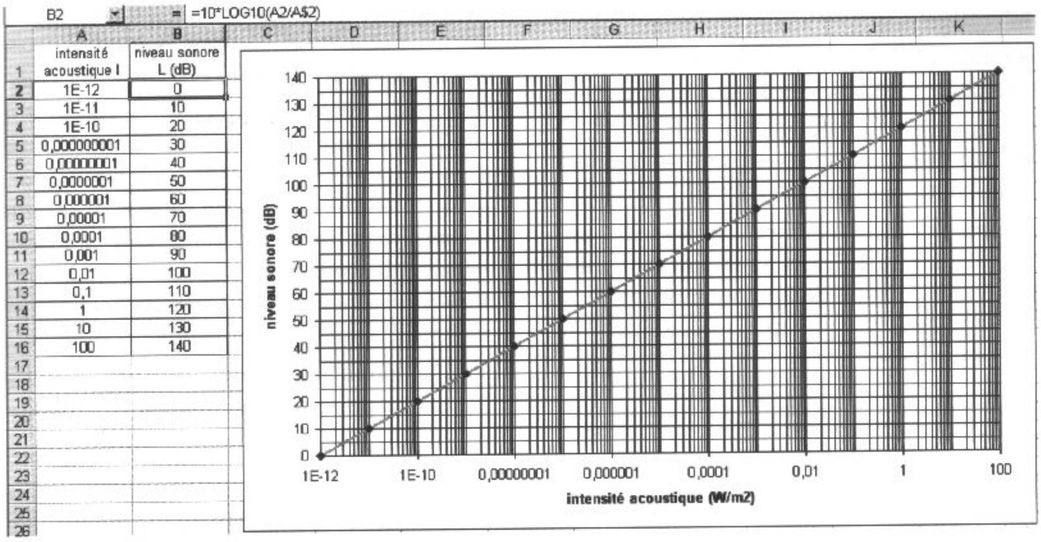
$L = 10 \times \log \dfrac{I}{I_0}$, où $I_0 = 10^{-12}$ $W.m^{-2}$ est le seuil
d'audibilité pour l'oreille humaine.

On désigne par f la fonction définie pour $I \geq I_0$ par

$L = f(I) = 10 \times \log \dfrac{I}{I_0}$.

On a tabulé et représenté la fonction f à l'aide d'un
tableur.

1. La formule entrée en B2 est : =10*LOG10(A2/A$2). Quelle est la formule contenue en B3 ?



	A	B
1	intensité acoustique I	niveau sonore L (dB)
2	1E-12	0
3	1E-11	10
4	1E-10	20
5	0,000000001	30
6	0,00000001	40
7	0,0000001	50
8	0,000001	60
9	0,00001	70
10	0,0001	80
11	0,001	90
12	0,01	100
13	0,1	110
14	1	120
15	10	130
16	100	140

2. Le seuil de douleur est fixé à une intensité acoustique de 10^2 W.m^{-2}. Quel est le niveau sonore $f(10^2)$ correspondant ?

3. Le seuil de danger pour l'oreille humaine est à 90 décibels. À quelle intensité acoustique correspond ce seuil ?

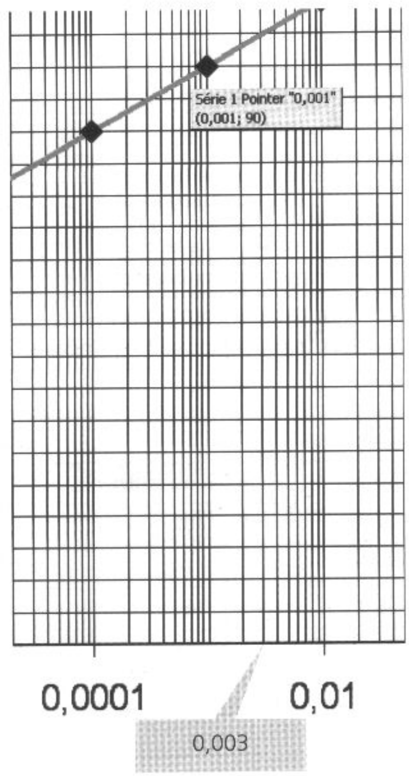
4. Que fait le niveau sonore L en décibels lorsque l'intensité acoustique I est multipliée par 10 ?

5. **a)** La fonction f a été représentée en choisissant une échelle logarithmique en abscisses. Quel en est l'intérêt ?

b) On veut utiliser le graphique pour lire le niveau sonore en décibels correspondant à une intensité acoustique $I = 0{,}003$ W.m^{-2}. Lire une réponse sur l'agrandissement ci-contre, où apparaît le point correspondant à $I = 0{,}001$ et $L = 90$ (les lignes horizontales sont tracées tous les 5 décibels).

c) Vérifier la lecture précédente en calculant :

$$f(0{,}003) = 10 \times \log \frac{0{,}003}{10^{-12}}.$$



Le seuil de danger est atteint…

66. ★★★ L'effectif d'un collège : suite géométrique franchissant un seuil donné, taux d'évolution moyen

Le tableau ci-dessous indique l'évolution de l'effectif d'un collège au cours des quatre dernières années.

Rentrée 2003	Rentrée 2004	Rentrée 2005	Rentrée 2006
702	716	746	758

Exercices pour le baccalauréat

Partie A

1. Calculer le pourcentage d'augmentation des effectifs du collège :

a) entre la rentrée 2003 et la rentrée 2004 ;

b) entre la rentrée 2005 et la rentrée 2006. Arrondir à 0,01 %.

2. Calculer le taux d'évolution annuel moyen entre 2003 et 2006. Arrondir à 0,01 %.

3. Les services départementaux choisissent un modèle dans lequel les effectifs augmenteront chaque année à partir de 2006 de 2,6 % par an.

On note U_n le résultat prévu en l'an $(2006 + n)$.

Ainsi on a $U_0 = 758$ (cellule **B5**).

On remarquera que les nombres U_n peuvent ne pas être entiers.

a) Calculer U_1.

b) Exprimer U_n en fonction de n.

c) On estime que, lorsque l'effectif du collège aura dépassé 1 000 élèves, il faudra disposer d'un nouvel établissement. Pour quelle rentrée scolaire devra-t-il être construit ?

Partie B

Les services départementaux utilisent un tableur. La feuille de calcul ci-après a été saisie (voir *annexe*).

1. Dans la cellule C3 on lit la formule C3 = B3/B2. Que représente le nombre obtenu par cette formule ?

2. Quelle formule saisir dans la cellule B6 pour obtenir l'effectif prévu pour le collège à la rentrée 2007 ?

3. Indiquer comment obtenir ensuite avec un tableur les effectifs prévus pour les années suivantes.

Annexe

	A	B	C
1	Année	Effectifs du collège	
2	2003	702	
3	2004	716	1,0199
4	2005	746	
5	2006	758	
6	2007		1,026
7	2008		
8	2009		
9	2010		
10	2011		
11	2012		
12	2013		
13	2014		
14	2015		
15	2016		
16	2017		

Un QCM

67. ★★★ Un QCM pour le baccalauréat

Pour chacune des questions suivantes, une seule des qua- tre réponses proposées est exacte. Le candidat indique sur la copie le numéro de la question et la lettre correspon- dant à la réponse choisie. Une seule réponse par question est acceptée est aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, la note totale attribuée à l'exercice est 0.

1. Une population augmente chaque année de 2,5 %. La population initiale est de 8 000.

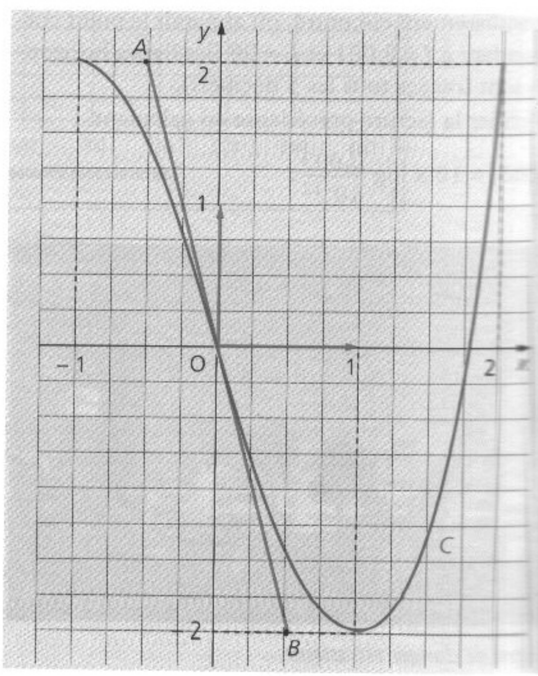
	a)	b)	c)
Au bout de 28 ans elle sera voisine de :	13 600	14 000	16 000

2. Soit A et B deux événements tels que $P(A) = \frac{1}{4}$ et

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

	a)	b)	c)
Alors $P_A(B) =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

3. La courbe C est la courbe représentative d'une fonction f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[-1, 2]$. On désigne par A et B les points de coordonnées respectives $(-0,5 ; 2)$ et $(0,5 ; -2)$. On note f' la fonction dérivée de f.



	a)	b)	c)
La fonction f est croissante sur :	$[-1, 1]$	$[-2, 2]$	$[1, 2]$
$f'(x) \geq 0$ sur :	$[-1, 1]$	$[1, 2]$	$[-1, 2]$
$f'(0) =$	-4	-1	4

4.

	a)	b)	c)
L'équation $(1,25)^x = 4$ admet pour solution dans $\mathbb{R}$:	log (3,2)	3,2	$\dfrac{\log(4)}{\log(1,25)}$

5.

	a)	b)	c)
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -3(0,98)^x$ est :	strictement décroissante sur $\mathbb{R}$	on ne peut pas répondre	strictement croissante sur $\mathbb{R}$

6. En chimie le « pH » (potentiel d'hydrogène) est défini par :

pH $= -\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est la concentration en ions H_3O^+, exprimée en mol $\cdot$ L^{-1}, d'une solution aqueuse.

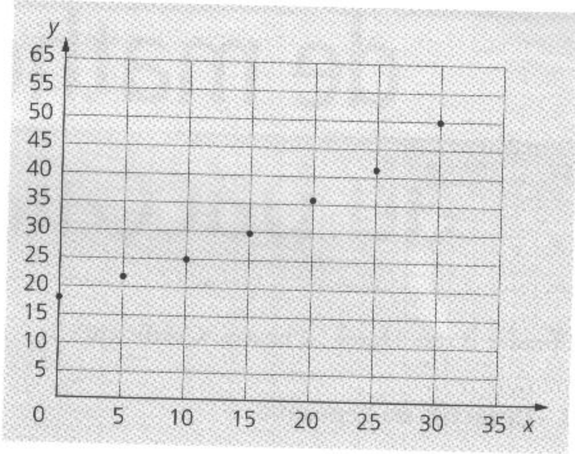
	a)	b)	c)
La concentration en H_3O^+ d'une solution est $1,56 \times 10^{-8}$ mol $\cdot$ L^{-1} alors, son pH, arrondi à 10^{-2} est :	$-7,807$	0,193	7,807

68. ★★★ Ajustement affine par la méthode des moindres carrés et ajustement exponentiel

Le tableau suivant donne la population d'une ville nouvelle entre les années 1975 et 2005.

Année	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
Rang de l'année : x	0	5	10	15	20	25	30
Population en milliers d'habitants : y	18	21	25	30	36	42	50

Le nuage de points associé à ce tableau est représenté graphiquement ci-après ; le rang x de l'année est en abscisse et la population y en ordonnée.



REMARQUE
Le jour du baccalauréat, la figure est fournie sur une feuille à part, à rendre avec la copie.

A. Ajustement affine

1. a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés. Les coefficients sont à arrondir à 10^{-2}.

b) Tracer cette droite sur le graphique ci-dessus, après l'avoir reproduit.

2. Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2008, à un millier près.

B. Ajustement exponentiel

1. L'allure du nuage incite à chercher un ajustement par une fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = ka^x$. Déterminer les nombres réels k et ce tels que $f(0) = 18$ et $f(30) = 50$. Arrondir à 10^{-3}.

2. On admet dans cette question et les suivantes que pour tout x de $[0, +\infty[$, $f(x) = 18(1,035)^x$. Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2008, à un millier près.

3. Construire sur la figure la courbe représentative C de la fonction f. *On ne demande pas d'étude des variations de f.*

4. La population en 2008 était de 55 milliers. Lequel des deux ajustements vous semble le plus pertinent ? Justifier votre choix.