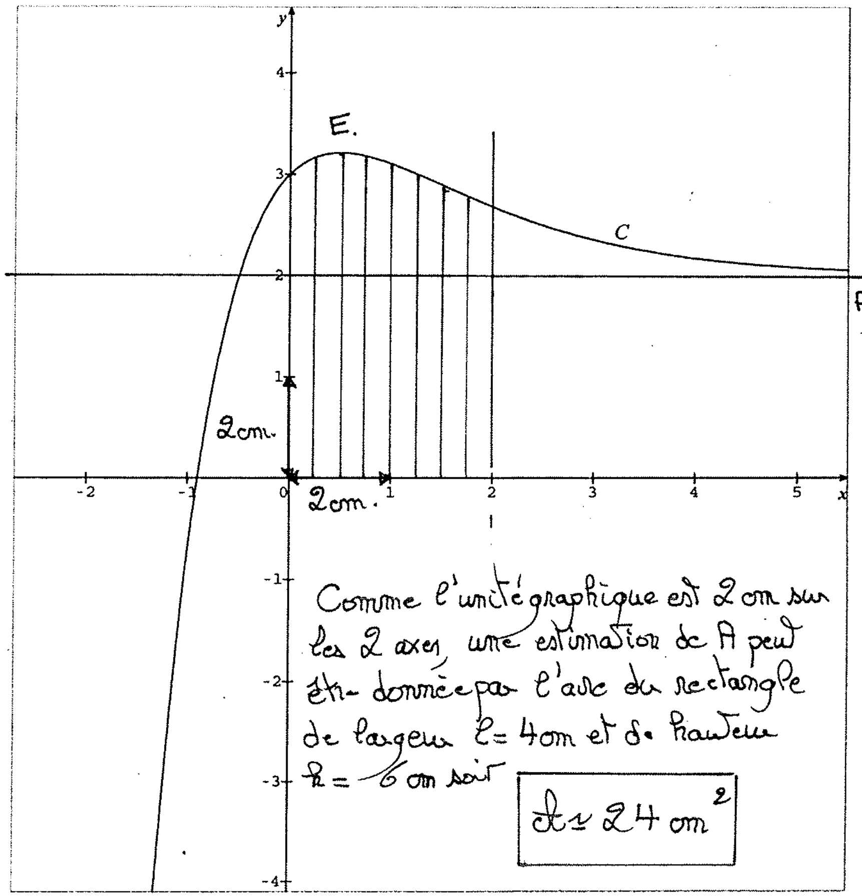
Annexe (à rendre avec la copie)



Comme l'unité graphique est 2 cm sur les 2 axes, une estimation de A peut être donnée par l'aire du rectangle de largeur $\ell = 4$ cm et de hauteur $h = 6$ cm soit $\boxed{A \simeq 24 \text{ cm}^2}$

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

GROUPEMENT C

Épreuve de Mathématiques

SESSION 2011

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENT
Agroéquipement	1
Charpente-couverture	1,5
Communication et industrie graphique	2
Conception et réalisation en chaudronnerie industrielle	2
Étude et réalisation d'outillages de mise en forme des matériaux	2
Fonderie	2
Industries céramiques	2
Industries des matériaux souples (2 options)	1
Industries papetières (2 options)	2
Mise en forme des matériaux par forgeage	2
Productique bois et ameublement (2 options)	1,5
Productique textile (4 options)	3
Systèmes constructifs bois et habitat	1,5

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4
le formulaire de mathématiques page 1 à 5.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Matériel autorisé :
Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante. (Circulaire n°99-186, du 16/11/1999)

Tout autre matériel est interdit

Document à rendre avec la copie :
Annexe ....page 4/4

Exercice 1 : Partie A $\quad (E) : y'' + 2y' + y = 2$

1) $(E_0) : y'' + 2y' + y = 0$

$1r^2 + 2r + 1 = 0$

$a = 1 \; ; \; b = 2 \; ; \; c = 1 \; ; \; \Delta = 0 \quad \boxed{r_1 = r_2 = r_0 = -\frac{b}{2a} = -1}$

D'après formulaire $\boxed{y_0(x) = (\lambda x + \mu) \times e^{-x}}$

2) $g(x) = b$ est la solution particulière

$g'(x) = 0$

$g''(x) = 0$ La méthode est par identification des coefficient.

Dans (E) : $g'' + 2g' + g = 2 \iff \boxed{b = 2 \iff g(x) = b = 2}$

3) $y_g = y_0 + y_p \iff \boxed{y_g(x) = (\lambda x + \mu)\, e^{-x} + 2}$

4) Les deux conditions portent sur la fonction f (donc y_g), il n'y a donc pas besoin de déterminer y_g'

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(-\frac{1}{2}) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu + 2 = 3 \\ (-\frac{1}{2}\lambda + \mu)\, e^{+\frac{1}{2}} + 2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 1 \\ (-\frac{1}{2}\lambda + \mu)\, e^{+\frac{1}{2}} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu = 1 \\ -\frac{1}{2}\lambda + \mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = 2\mu \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases}}$$

La fonction f est donc $\boxed{f(x) = (2x + 1)\, e^{-x} + 2}$

Remarque(s) : On retrouve la fonction de la partie B.

Exercice 1 (11 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \; y'' + 2y' + y = 2$$

dans laquelle y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur **R**, y' désigne la fonction dérivée de y, et y'' désigne sa dérivée seconde.

1. Résoudre sur **R** l'équation différentielle
$$(E_0) : \; y'' + 2y' + y = 0.$$
2. Soit un réel b. On définit sur **R** la fonction constante g par : $g(x) = b$.
Déterminer b pour que la fonction g soit une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire les solutions de l'équation (E).
4. Déterminer la fonction f, solution particulière de l'équation (E) sur **R**, qui vérifie les conditions : $f(0) = 3$ et $f(-\frac{1}{2}) = 2$.

Partie B : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = (2x+1)e^{-x} + 2$.

On appelle C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O \; ; \vec{i} \; ; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

La courbe C est représentée **en annexe** qui devra être rendue avec la copie.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. a. En écrivant $f(x) = 2xe^{-x} + e^{-x} + 2$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. En déduire l'existence d'une asymptote D à C dont on donnera une équation.
   c. Tracer D sur le graphique fourni en annexe.
3. a. On appelle f' la fonction dérivée de f sur **R**.
   Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (1 - 2x)e^{-x}$.
   b. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation sur **R**.
4. Soit F la fonction définie sur **R** par : $F(x) = (-2x - 3)e^{-x} + 2x$.
   a. Vérifier que F est une primitive de f sur **R**.
   b. Calculer la mesure A, en cm², de l'aire du domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième de A.

Exercice 1 : Partie B $f(x)=(2x+1)\times e^{-x}+2$

1) Pour $x \to -\infty$

$-x \to +\infty$ donc $e^{-x} \to +\infty$

$2x+1 \to -\infty$ donc $(2x+1)\times e^{-x} \to -\infty$ (règle des signes)

donc $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ Remarque : cohérent avec la courbe $\mathcal{C}$

2) a) $f(x) = 2xe^{-x} + e^{-x} + 2$

Pour $x \to +\infty$

$-x \to -\infty$ donc $e^{-x} \to 0^+$

$2x \to +\infty$ donc $2x \times e^{-x} \to +\infty \times 0^+$

c'est une F.I. mais l'exponentielle l'emporte donc $2xe^{-x} \to 0^+$

donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2}$ Remarque : cohérent avec la courbe $\mathcal{C}$

b) La courbe $\mathcal{C}$ possède en $+\infty$ une asymptote horizontale D d'équation $y=2$

c) Voir graphique

3) a) $f(x) = (2x+1)\times e^{-x} + 2$ est du type $U \times V$ avec

$U = 2x+1 \longrightarrow U' = 2$

$V = e^{-x} \longrightarrow V' = -e^{-x}$

donc $f'(x) = 2e^{-x} + (2x+1)\times(-e^{-x})$

$= (2 - 2x - 1)\times e^{-x}$ (mise en facteur)

donc $\boxed{f'(x) = (1-2x)\times e^{-x}}$

b) $f'(x) = 0 \iff (1-2x)e^{-x} = 0 \iff 1-2x = 0 \iff \boxed{x = \frac{1}{2}}$

de même

$f'(x) \geq 0 \iff 1-2x \geq 0 \iff -2x \geq -1 \iff \boxed{x \leq \frac{1}{2}}$

Exercice 1 (11 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \ y'' + 2y' + y = 2$$

dans laquelle y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur **R**, y' désigne la fonction dérivée de y, et y'' désigne sa dérivée seconde.

1. Résoudre sur **R** l'équation différentielle
$$(E_0) : \ y'' + 2y' + y = 0.$$
2. Soit un réel b. On définit sur **R** la fonction constante g par : $g(x) = b$.
Déterminer b pour que la fonction g soit une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire les solutions de l'équation (E).
4. Déterminer la fonction f, solution particulière de l'équation (E) sur **R**, qui vérifie les conditions : $f(0) = 3$ et $f(-\frac{1}{2}) = 2$.

Partie B : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = (2x+1)e^{-x} + 2$.

On appelle C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

La courbe C est représentée **en annexe** qui devra être rendue avec la copie.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. a. En écrivant $f(x) = 2xe^{-x} + e^{-x} + 2$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
b. En déduire l'existence d'une asymptote D à C dont on donnera une équation.
c. Tracer D sur le graphique fourni en annexe.
3. a. On appelle f' la fonction dérivée de f sur **R**.
Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (1-2x)e^{-x}$.
b. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation sur **R**.
4. Soit F la fonction définie sur **R** par : $F(x) = (-2x-3)e^{-x} + 2x$.
a. Vérifier que F est une primitive de f sur **R**.
b. Calculer la mesure A, en cm², de l'aire du domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième de A.

Exercice 1 : Partie B (suite)

3.) b) Le tableau de variation est donc :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\frac{1}{2})$	$\searrow$	2^+

avec $f(\frac{1}{2}) = 2e^{-\frac{1}{2}} + 2 \simeq 3{,}21$

Remarque(s) : Cohérent avec $\mathcal{C}$

4.) Rappel(s) : Primitive Fonction Dérivée

$$F \rightleftarrows f \rightleftarrows f'$$

a) Pour vérifier que F est une primitive de f, il faut calculer la dérivée F' de F et montrer que F' est égale à f.

Le 1er terme de F est du type $U \times V$ avec $U = -2x-3$ $U' = -2$

$V = e^{-x}$ $V' = -e^{-x}$

donc $F'(x) = -2e^{-x} + (-2x-3)\times(-e^{-x}) + 2$

↳ dérivée de $2x$

$F'(x) = (-2 + 2x + 3)\, e^{-x} + 2$

$\boxed{\text{donc } F'(x) = (2x+1)e^{-x} + 2 = f(x) \quad F \text{ est bien une primitive de } f}$

b) $I = \int_0^2 f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_0^2 = F(2) - F(0)$ en u.a.

$F(2) = (-4-3)e^{-2} + 4 = 4 - 7e^{-2}$ donc $\boxed{I = 7 - 7e^{-2} \text{ u.a.}}$

$F(0) = -3$; $-F(0) = +3$

Comme l'unité graphique est 2 cm sur les 2 axes, le facteur de conversion entre les unités d'aires et les cm² est 4. Donc

$\boxed{A = 4 \times I = 28 \times (1 - e^{-2}) \simeq 24{,}21 \text{ cm}^2}$

Exercice 1 (11 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \; y'' + 2y' + y = 2$$

dans laquelle y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur **R**, y' désigne la fonction dérivée de y, et y'' désigne sa dérivée seconde.

1. Résoudre sur **R** l'équation différentielle
$$(E_0) : \; y'' + 2y' + y = 0.$$
2. Soit un réel b. On définit sur **R** la fonction constante g par : $g(x) = b$.
Déterminer b pour que la fonction g soit une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire les solutions de l'équation (E).
4. Déterminer la fonction f, solution particulière de l'équation (E) sur **R**, qui vérifie les conditions : $f(0) = 3$ et $f(-\frac{1}{2}) = 2$.

Partie B : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = (2x+1)e^{-x} + 2$.

On appelle C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

La courbe C est représentée **en annexe** qui devra être rendue avec la copie.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. a. En écrivant $f(x) = 2xe^{-x} + e^{-x} + 2$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. En déduire l'existence d'une asymptote D à C dont on donnera une équation.
   c. Tracer D sur le graphique fourni en annexe.
3. a. On appelle f' la fonction dérivée de f sur **R**.
   Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (1-2x)e^{-x}$.
   b. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation sur **R**.
4. Soit F la fonction définie sur **R** par : $F(x) = (-2x-3)e^{-x} + 2x$.
   a. Vérifier que F est une primitive de f sur **R**.
   b. Calculer la mesure A, en cm², de l'aire du domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième de A.

Exercice 2: Partie A.

1.> soit p la probabilité cherchée

on cherche $p = P(237{,}18 \leq X \leq 238{,}82)$

avec X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m = 238 ; \sigma = 0{,}4)$

$m = 238$ $\quad x_1 = 237{,}18$ $\quad x_2 = 238{,}82$

$\sigma = 0{,}4$ $\quad t_1 = -2{,}05$ $\quad t_2 = 2{,}05$

$\Pi(t_1) = 1 - \Pi(2{,}05)$ $\quad \Pi(t_2) = 0{,}9798$

$= 0{,}0202$

$p = \Pi(t_2) - \Pi(t_1)$ on a donc $\boxed{p = 0{,}9596 \text{ soit } p = 0{,}960}$

Exercice 2. Partie B.

1.> * Y représente un nombre de succès ici nombre de disques non conformes.

* Les tirages se font AVEC remise, ils sont donc indépendants.

* A chaque tirage, il y a deux cas possible.

"succès" ici disque non conforme de probabilité $p = 0{,}04$

"échec" ici disque conforme " " $q = 0{,}96$

donc $\boxed{Y \text{ suit une loi binomiale } \mathcal{B}(n = 50 ; p = 0{,}04)}$

2.> "Tous les disques sont conformes"

donc "Aucun disque est non conforme"

donc $Y_1 = 0$ (probabilité ponctuelle) et $\boxed{P(Y_1 = 0) \approx 0{,}130}$

3.> a) La valeur de λ est telle que $\lambda = np = 50 \times 0{,}04 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 2}$

b.> "Au plus trois disques non conforme"

donc $Y_2 \leq 3$ (probabilité cumulée) et $\boxed{P(Y_2 \leq 3) \approx 0{,}857}$

Exercice 2 (9 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3}.

Une usine fabrique en grande série des disques de diamètre théorique 238 millimètres.

Partie A

Un disque est considéré comme conforme pour son diamètre si ce diamètre, exprimé en mm, est dans l'intervalle [237,18 ; 238,82]. Dans le cas contraire, le disque est non-conforme.

On définit par X la variable aléatoire qui à tout disque produit associe son diamètre en mm.
On admet que X suit la loi normale de moyenne 238 et d'écart type 0,4.

Calculer la probabilité qu'une pièce prise au hasard dans la production soit conforme pour son diamètre.

Partie B

On considère dans cette partie un stock important de disques. On suppose que 4 % des disques de ce stock n'ont pas un diamètre conforme.
On prélève au hasard dans ce stock des lots de 25 disques pour vérification du diamètre.
Le nombre de disques de ce stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler chaque prélèvement à un tirage avec remise de 25 disques.
On définit par Y_1 la variable aléatoire qui à chaque lot de 25 disques associe le nombre de disques non-conformes pour leur diamètre.

1. Justifier que Y_1 suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. On prélève un lot de 50 disques. Calculer la probabilité que tous les disques de ce lot aient un diamètre conforme.
3. Dans cette question, on décide d'approcher Y_1 par une variable aléatoire Y_2 qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   a. Justifier que $\lambda = 2$.
   b. A l'aide de l'approximation de Y_1 par Y_2, calculer la probabilité que le lot prélevé ait au plus 3 disques non-conformes pour leur diamètre.

Partie C

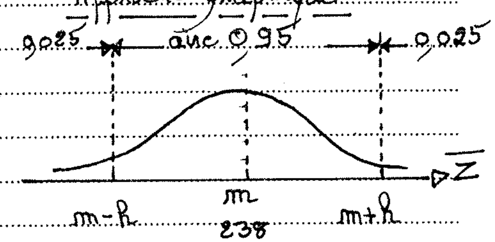
Une grande quantité de disques est livrée à un client. Celui-ci se propose de construire un test bilatéral au risque de 5 %, afin de vérifier si la moyenne μ de l'ensemble des diamètres des disques de la livraison est égale à 238 mm.
On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui à tout échantillon de 45 disques prélevé dans la livraison associe la moyenne des diamètres de ces 45 disques (la livraison est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).
L'hypothèse nulle est H_0 : « $\mu = 238$ ».

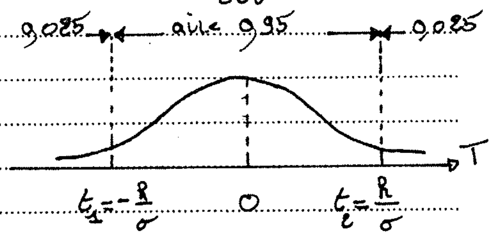
1. Quelle est l'hypothèse alternative H_1 ?
2. Sous l'hypothèse H_0, on suppose que la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 238 et d'écart type 0,06.
   Déterminer sous cette hypothèse le réel h tel que : $P(238 - h \leq \overline{Z} \leq 238 + h) = 0{,}95$.
3. Énoncer la règle de décision du test.
4. On prélève au hasard un échantillon 45 disques dans la livraison. La moyenne des diamètres des disques de cet échantillon est $\overline{z} = 237{,}91$ mm.
   Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que la moyenne des disques de la livraison est de 238 mm ?

Exercice 2 : Partie C :

1) Hypothèse nulle H_0 : « $\mu = 238$ »
Hypothèse alternative H_1 : "$\mu \neq 238$" car test bilatéral.

2) Approche mathématique : | Approche graphique :





$P(238 - h \leq \overline{Z} \leq 238 + h) = 0,95$

$P\left(-\frac{h}{\sigma} \leq T \leq \frac{h}{\sigma}\right) = 0,95$

$\Pi\left(\frac{h}{\sigma}\right) - \Pi\left(-\frac{h}{\sigma}\right) = 0,95$

$\Pi\left(\frac{h}{\sigma}\right) - \left(1 - \Pi\left(\frac{h}{\sigma}\right)\right) = 0,95$

$2\Pi\left(\frac{h}{\sigma}\right) - 1 = 0,95$

$\Pi\left(\frac{h}{\sigma}\right) = \frac{1+0,95}{2} = 0,975$

$\frac{h}{\sigma} = 1,96$

$\boxed{h = 1,96\sigma \simeq 0,118}$

D'après les propriétés graphiques de la figure, on déduit

$\Pi(t_2) = 0,95 + 0,025 = 0,975$

$t_2 = \frac{h}{\sigma} = 1,96 \Leftrightarrow \boxed{h \simeq 0,118}$

3) Si la mesure $\overline{z}$ qui à un échantillon aléatoire de 45 disques associe la moyenne des diamètres appartient à l'intervalle de confiance $I_\alpha = [m - h = 237,882 \; ; \; m + h = 238,118]$ alors l'hypothèse H_0 est acceptée au seuil de 5%.
Dans le cas contraire H_0 est refusée.

4) comme $\overline{z} = 237,19$ appartient à I_α, H_0 est accepté.

$\boxed{\text{Au seuil de 5\%, la moyenne des disques de la livraison est bien 238}}$

Exercice 2 (9 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3}.

Une usine fabrique en grande série des disques de diamètre théorique 238 millimètres.

Partie A

Un disque est considéré comme conforme pour son diamètre si ce diamètre, exprimé en mm, est dans l'intervalle [237,18 ; 238,82]. Dans le cas contraire, le disque est non-conforme.

On définit par X la variable aléatoire qui à tout disque produit associe son diamètre en mm.
On admet que X suit la loi normale de moyenne 238 et d'écart type 0,4.

Calculer la probabilité qu'une pièce prise au hasard dans la production soit conforme pour son diamètre.

Partie B

On considère dans cette partie un stock important de disques. On suppose que 4 % des disques de ce stock n'ont pas un diamètre conforme.
On prélève au hasard dans ce stock des lots de 25 disques pour vérification du diamètre.
Le nombre de disques de ce stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler chaque prélèvement à un tirage avec remise de 25 disques.
On définit par Y_1 la variable aléatoire qui à chaque lot de 25 disques associe le nombre de disques non-conformes pour leur diamètre.

1. Justifier que Y_1 suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. On prélève un lot de 50 disques. Calculer la probabilité que tous les disques de ce lot aient un diamètre conforme.
3. Dans cette question, on décide d'approcher Y_1 par une variable aléatoire Y_2 qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   a. Justifier que $\lambda = 2$.

   b. A l'aide de l'approximation de Y_1 par Y_2, calculer la probabilité que le lot prélevé ait au plus 3 disques non-conformes pour leur diamètre.

Partie C

Une grande quantité de disques est livrée à un client. Celui-ci se propose de construire un test bilatéral au risque de 5 %, afin de vérifier si la moyenne μ de l'ensemble des diamètres des disques de la livraison est égale à 238 mm.
On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui à tout échantillon de 45 disques prélevé dans la livraison associe la moyenne des diamètres de ces 45 disques (la livraison est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).
L'hypothèse nulle est H_0 : « $\mu = 238$ ».

1. Quelle est l'hypothèse alternative H_1 ?
2. Sous l'hypothèse H_0, on suppose que la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 238 et d'écart type 0,06.
   Déterminer sous cette hypothèse le réel h tel que : $P(238 - h \leq \overline{Z} \leq 238 + h) = 0,95$.
3. Énoncer la règle de décision du test.
4. On prélève au hasard un échantillon 45 disques dans la livraison. La moyenne des diamètres des disques de cet échantillon est $\overline{z} = 237,91$ mm.
   Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que la moyenne des disques de la livraison est de 238 mm ?