Département MIDO

Notes de cours

ANALYSE COMPLEXE

Guillaume CARLIER

L3, année 2012-2013

Ces notes de cours constituent une introduction à l'analyse complexe élémentaire, domaine fascinant de l'analyse aux nombreuses ramifications. Ces notes ne vous seront profitables que si vous préparez régulièrement et sérieusement les T.D.s et ne vous dispensent bien évidemment pas d'assister au cours.

N'hésitez pas à me signaler les erreurs et les coquilles qui subsisteraient dans ces notes. De manière générale, vos suggestions sont les bienvenues, c'est grâce à elles que ces notes pourront être améliorées pour vos camarades des prochaines années. J'espère que ce poly vous sera utile et vous en souhaite une bonne lecture.

G. CARLIER

Table des matières

Chapitre 1

Rappels et préliminaires

1.1 Rappels sur les nombres complexes

Soit (x, y) et (x', y') deux couples de réels et définissons leur produit $(x, y) \times (x', y')$ (ou $(x, y)(x', y')$) par

$$(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx').$$

Ce produit définit une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^2$ et en notant $i = (0, 1)$ et $1 = (1, 0)$ on a les propriétés fondamentales que 1 est l'élément neutre pour le produit :

$$(x, y)(1, 0) = (x, y)$$

et

$$i^2 = i \times i = (-1, 0) = -1$$

de sorte que i peut être vu comme une racine carrée de l'unité. On identifie par la suite les points du plan $\mathbb{R}^2$ (x, y) à $z = x+iy$ et l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est précisément l'ensemble $\{z = x + iy, \in \mathbb{R}, \; y \in \mathbb{R}\}$. Ainsi le produit des nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ est il le nombre complexe $zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$. Le conjugué de $z = x + iy$ est par définition le nombre complexe $\bar{z} := x - iy$, l'écriture $z = x + iy$ avec x et y réels est unique (car 1 et i forment une famille libre sur $\mathbb{R}$), x et y s'appellent respectivement partie réelle et partie imaginaire de z :

$$x = \mathrm{Re}(z), \; y = \mathrm{Im}(z).$$

Un nombre complexe z est dit réel ssi sa partie imaginaire est nulle (on l'identifie alors au réel $\mathrm{Re}(z)$) et imaginaire pur ssi sa partie réelle est nulle. Le nombre complexe 0 est par définition le nombre complexe de partie réelle et imaginaire nulles.

Notons que

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2}.$$

La somme des nombres complexes $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ est par définition

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

et le produit de z par le réel λ est le complexe $\lambda z = \lambda x + i\lambda y$ (noter que λz est aussi le produit des nombres complexes z et λ). Ainsi $\mathbb{C}$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et l'application :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + iy \in \mathbb{C}$$

est un isomorphisme et donc $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension deux (une base étant formée par 1, i).

Muni de son produit et de son addition $\mathbb{C}$ est aussi un corps commutatif ce qui signifie que :

- $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif (son neutre étant le nombre complexe 0),
- notant $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif (son neutre étant le nombre 1 et l'inverse de $z = x + iy \neq 0$ étant $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{x^2+y^2}$),
- la multiplication est distributive pour l'addition (à gauche comme à droite) cest-à-dire que pour tout $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ on a

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3,\ (z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3.$$

Notons que pour $z = x+iy \in \mathbb{C}$ le nombre complexe $z\bar{z} = x^2+y^2$ (d'où la formule de l'inverse d'un complexe non nul) est donc réel et positif, le module de z est alors défini par

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

qui représente la distance (euclidienne) de (x, y) à l'origine dans le plan.

L'ensemble des nombres complexes de module 1 se note S^1 c'est l'ensemble des nombres complexes de la forme $e^{i\theta} := \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ $\theta \in \mathbb{R}$, c'est un groupe pour la multiplication ($1 \in S^1$ et l'inverse de $e^{i\theta}$ est $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$). L'application $\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta}$ est 2π-périodique et c'est un morphisme de groupes entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(S^1, \times)$ au sens où $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$. En effet,

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\theta')} &= \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') \\ &= (\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + i(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')) \\ &= e^{i\theta}e^{i\theta'}. \end{aligned}$$

Notons aussi que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ainsi que les formules de Moivre :

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta),\ n \in \mathbb{Z},\ \theta \in \mathbb{R}$$

et d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},\ \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $z/|z| \in S^1$ et donc z peut s'écrire sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = |z| > 0$ et pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$, le nombre θ n'est défini que modulo 2π et s'appelle un argument de z, il représente géométriquement l'angle entre l'axe des réels et celui engendré par z. L'argument d'un nombre complexe n'étant défini qu'à un multiple de 2π près nous chercherons par la suite à en déterminer une (ou des) représentations continue(s), notons que l'argument n'est pas défini (même modulo 2π) au point 0 et par conséquent pour construire des déterminations continues de l'argument, il faudra se placer sur des domaines ne contenant pas l'origine. La représentation $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ s'appelle factorisation polaire de $z \in \mathbb{C}^*$.

Similitudes

Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, considérons l'application $f_{z_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f_{z_0}(z) := z_0 z$. L'application f_{z_0} est un isomorphisme de $\mathbb{C}$ (son inverse étant $f_{z_0^{-1}}$ évidemment). Notant $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$ et $z = \rho e^{i\theta}$ on a $f_{z_0}(z) = \rho_0 \rho e^{i(\theta_0 + \theta)}$ ainsi on voit aisément que l'application f_{z_0} est la composée de l'homothétie de rapport $\rho_0 = |z_0|$ et de la rotation d'angle θ_0, c'est ce que l'on appelle une *similitude*, f_{z_0} a la propriété remarquable de conserver les angles orientés (exercice : montrer que c'est une caractérisation des similitudes). Noter que la conjugaison $z \mapsto \bar{z}$ n'est PAS une similitude.

Une application linéaire du plan $\mathbb{R}^2$ est de la forme $f(x, y) = (ax+by; cx+dy)$ et se représente par sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

il faut donc quatre réels pour la décrire. La matrice de f_{z_0} (vue comme application linéaire du plan) a donc une structure spéciale (elle est définie par les deux réels x_0 et y_0) ce qui se voit sur sa matrice

$$M_{f_{z_0}} = \begin{pmatrix} x_0 & -y_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix}$$

dont les colonnes forment une base orthogonale directe.

Racines de polynômes

Par construction $i^2 = -1$ c'est-à dire que l'équation polynômiale $z^2 + 1 = 0$ admet les deux racines complexes i et $-i$ tandis qu'elle n'admet pas de racines réelles, l'un des principaux intérêts des nombres complexes réside dans la résolution d'équations polynomiales. On a le théorème fondamental suivant que nous démontrerons plus loin dans ce cours :

Théorème 1.1 (Théorème de d'Alembert-Gauss) *Soit P un polynôme complexe non constant ($P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$) alors P possède au moins une racine complexe.*

La conclusion du théorème est qu' il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_0) = 0$, ce qui revient aussi à dire que $(z - z_0)$ divise $P(z)$: $P(z) = (z - z_0)P_1(z)$ avec P_1 de degré $n-1$, si $n-1 \geq 1$ on applique encore le théorème de d'Alembert Gauss à P_1 : $Q(z) = (z - z_1)P_2(z)$ et ainsi de suite jusqu'à obtenir un facteur constant ce dont on déduit le corollaire

Corollaire 1.1 *Tout polynôme complexe de degré n possède n racines (comptées avec leur multiplicité).*

Il y a quelques équations polynômiales que l'on sait résoudre explicitement, c'est le cas des équations du second ordre vues au lycée, mais aussi de l'équation

$$z^n = 1$$

dont les solutions sont les racines n-ièmes de l'unité $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k = 0, ..., n-1$.

1.2 Topologie des métriques, topologie de $\mathbb{C}$

On rappelle qu'un espace métrique est la donnée d'un ensemble non vide E muni d'une distance, c'est-à-dire d'une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés :

1. (symétrie) $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout $(x, y) \in E \times E$,
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. (inégalité triangulaire) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in E \times E \times E$.

Soit (E,d) un espace métrique, $x \in E$ et $r > 0$, on notera $B_E(x,r)$ (ou simplement $B(x,r)$ s'il n'y a pas d'ambiguité) la boule ouverte de centre x et de rayon r :

$$B(x,r) := \{y \in E : d(x,y) < r\}$$

et $\overline{B}_E(x,r)$ (ou simplement $\overline{B}(x,r)$ s'il n'y a pas d'ambiguité) la boule fermée de centre x et de rayon $r \geq 0$:

$$\overline{B}(x,r) := \{y \in E : d(x,y) \leq r\}.$$

Définition 1.1 *Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$, on dit que A est <u>bornée</u> ssi il existe $x \in E$ et $r > 0$ tels que $A \subset B(x,r)$.*

Si A est une partie de E, on définit son <u>diamètre</u> $\mathrm{diam}(A)$ par :

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{d(x,y),\ (x,y) \in A^2\}.$$

On vérifie aisément que A est bornée ssi $\mathrm{diam}(A)$ est fini.

On peut maintenant définir les ensembles <u>ouverts</u> de (E,d) :

Définition 1.2 *Soit (E,d) un espace métrique et A une partie de E. On dit que :*

1. *A est <u>ouvert</u> ssi pour tout $x \in A$, $\exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$,*
2. *A est <u>fermé</u> ssi $E \setminus A$ est ouvert.*
3. *A est un <u>voisinage</u> de $x \in E$ ssi $\exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$.*

Autrement dit, un ensemble est ouvert ssi il est voisinage de chacun de ses points. L'ensemble des ouverts de (E,d) s'appelle la topologie de E induite par la distance d. On vérifie aisément qu'une boule ouverte (resp. fermée) est ouverte (resp. fermée).

Proposition 1.1 *Soit (E,d) un espace métrique, on a alors :*

1. *E et $\emptyset$ sont ouverts,*
2. *une réunion (quelconque) d'ouverts est ouverte,*
3. *une intersection <u>FINIE</u> d'ouverts est ouverte.*

La démonstration est élémentaire et laissée au lecteur qui s'entrainera ainsi à se familiariser avec les définitions...

Par passage au complémentaire, on obtient les énoncés correspondant aux fermés :

1. E et $\emptyset$ sont fermés,
2. une réunion FINIE de fermés est fermée,
3. une intersection (quelconque) de fermés est fermée.

Définition 1.3 *Soit (E,d) un espace métrique, A une partie de E et $x \in E$ on dit que :*

1. *x est un point intérieur à A ssi $\exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$ (autrement dit A est un voisinage de x),*
2. *x est un point adhérent à A ssi $\forall r > 0$, $B(x,r)$ rencontre A.*
3. *x est un point frontière de A ssi $\forall r > 0$, $B(x,r)$ rencontre A et $E \setminus A$.*

On appelle intérieur de A et l'on note $\mathrm{int}(A)$ l'ensemble des points intérieurs de A. On appelle adhérence de A et l'on note $\overline{A}$, l'ensemble des points adhérents à A. On appelle frontière de A et l'on note ∂A l'ensemble des points frontière de A. Enfin on dit que A est dense dans E ssi $\overline{A} = E$.

Proposition 1.2 *Soit (E,d) un espace métrique, A une partie de E, on a :*

1. *$\mathrm{int}(A)$ est ouvert et c'est le plus grand ouvert contenu dans A,*
2. *$\overline{A}$ est fermé et c'est le plus petit fermé contenant A.*

Preuve:

Montons d'abord que $\mathrm{int}(A)$ est ouvert : soit $x \in \mathrm{int}(A)$ alors $\exists r > 0$ tq $B(x,r) \subset A$, donc si $y \in B(x,r/2)$ on a $B(y,r/2) \subset B(x,r) \subset A$ ce qui montre que $y \in \mathrm{int}(A)$ et donc $B(x,r/2) \subset \mathrm{int}(A)$. $\mathrm{int}(A)$ est donc ouvert et évidemment $\mathrm{int}(A) \subset A$. Montrons maintenant que $\mathrm{int}(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A. Soit U ouvert avec $U \subset A$ et soit $x \in U$, comme U est ouvert $\exists r > 0$ tq $B(x,r) \subset U$ mais comme $U \subset A$ il vient $B(x,r) \subset A$ et donc $x \in \mathrm{int}(A)$ ce qui montre $U \subset \mathrm{int}(A)$ et achève la preuve.

La démonstration du point 2) est similaire et donc laissée au lecteur.

□
L'énoncé précédent implique en particulier les caractérisations :

$$A \text{ ouvert } \Leftrightarrow A = \mathrm{int}(A),$$

et

$$A \text{ fermé } \Leftrightarrow A = \overline{A}.$$

Beaucoup de propriétés topologiques dans les espaces métriques peuvent se traduire par des propriétés séquentielles (i.e. en utilisant des suites) : retenez ce principe, l'utilisation de suites rend souvent les démonstrations plus simples que le maniement des définitions générales. Rappelons d'abord ce qu'est une suite convergente :

Définition 1.4 *Soit (E, d) un espace métrique et (x_n) une suite d'éléments de E, on dit que $x \in E$ est limite de la suite (x_n) (ce que l'on notera $x_n \to x$ ou $\mathrm{lim_n} x_n = x$) ssi : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\forall n \geq N$, $d(x_n, x) \leq \varepsilon$. On dit que (x_n) est convergente si elle admet une limite.*

Quand $\lim_n x_n = x$, on dit aussi que x_n converge vers x. Remarquons que la convergence de (x_n) vers x (dans E) est équivalente à la convergence vers 0 de $d(x_n, x)$ (dans $\mathbb{R}$).

Il convient de noter que si une suite est convergente alors elle admet une UNIQUE limite (cette propriété s'exprime en disant que les espaces métriques sont séparés) :

Proposition 1.3 *Soit (E, d) un espace métrique et (x_n) une suite convergente d'éléments de E, alors sa limite est unique.*

Preuve:
Supposons que (x_n) admette pour limite x et y dans E. On a $0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$ ainsi en passant à la limite en $n \to +\infty$ on obtient $d(x, y) = 0$ i.e. $x = y$ d'où l'unicité. □

Proposition 1.4 *Soit (E, d) un espace métrique, A une partie de E, on a :*

1. *soit $x \in E$, alors $x \in \overline{A}$ ssi x est limite d'une suite d'éléments de A,*
2. *A est fermé ssi pour toute suite convergente (x_n) d'éléments de A, la limite de cette suite appartient à A.*

Preuve:
2) découle de 1) et du fait que A est fermé ssi $A = \overline{A}$. Supposons $x \in \overline{A}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(x, 1/n)$ rencontre A. Soit donc $x_n \in A \cap B(x, 1/n)$ comme $d(x, x_n) \leq 1/n$, x_n converge vers x. Réciproquement suposons que x soit la limite d'une suite (x_n) d'éléments de A et montrons que $x \in \overline{A}$. Soit $r > 0$, pour n assez grand $d(x, x_n) < r$ ainsi, comme $x_n \in A$, on a $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$. Finalement $r > 0$ étant arbitraire on a bien $x \in \overline{A}$.
$\square$

Définition 1.5 *Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E, on dit que $(x_n)_n$ est de Cauchy ssi : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ t.q. pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \geq N$ et $q \geq N$ on a : $d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$.*

La définition précédente peut aussi s'exprimer en disant que $(x_n)_n$ est de Cauchy ssi

$$\sup_{p \geq N,\, q \geq N} d(x_p, x_q) \to 0 \text{ quand } N \to +\infty.$$

Evidemment, toute suite convergente est de Cauchy (s'en persuader !), la réciproque n'est cependant pas vraie : les espaces métriques pour lesquels cette réciproque est vraie sont dits complets :

Définition 1.6 *Soit (E, d) un espace métrique, on dit que (E, d) est complet ssi toute suite de Cauchy d'éléments de E converge dans E.*

On dit qu'une suite (x_n) d'éléments de E est bornée s'il existe $r \geq 0$ et $x \in E$ tels que $d(x, x_n) \leq r$ pour tout n (noter qu'avec l'inégalité triangulaire la définition précédente est équivalent au fait que POUR TOUT $x \in E$ il existe r tel que $d(x, x_n) \leq r$ pour tout n).

Passons maintenant à la compacité, rappelons d'abord quelques définitions relatives aux suites extraites et valeur d'adhérence.

Définition 1.7 *Soit E un ensemble non vide et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E, on appelle sous-suite (ou suite extraite) de la suite $(x_n)_n$ toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_n$ avec φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Définition 1.8 *Soit (E, d) un espace métrique et (x_n) une suite d'éléments de E. On dit que x est <u>valeur d'adhérence</u> de (x_n) ssi l'une des assertions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *(x_n) admet une sous-suite qui converge vers x,*

2. *$\forall\varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq N$ t.q. $d(x_n, x) \leq \varepsilon$,*

3. *$\forall\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) \leq \varepsilon\}$ est infini.*

Exercice 1.1 *Prouver l'équivalence des trois assertions précédentes.*

Exercice 1.2 *Prouver que si φ est comme dans la définition 1.7 alors $\varphi(n) \geq n$ pour tout n.*

Exemple 1.1 *La suite $(-1)^n$ admet deux valeurs d'adhérence : 1 et -1.*

L'équivalence qui suit est le théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 1.2 *Soit (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E, on dit que A est compacte si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *toute suite d'éléments de A possède une valeur d'adhérence dans A,*

2. *pour toute famille d'ouverts de E, $(U_i)_{i\in I}$ recouvrant A c'est à dire telle que $A \subset \cup_{i\in I} U_i$ il existe $J \subset I$ FINI tel que $A \subset \cup_{i\in J} U_i$.*

Proposition 1.5 *Soit (E, d) un espace métrique et A une partie compacte de E alors A est fermée et bornée.*

Preuve:
A est recouvert par la famille $B(x, n)$ (x quelconque et $n \in \mathbb{N}^*$) de ce recouvrement on peut extraire un sous-recouvrement fini ce qui implique clairement que $A \subset B(x, n_0)$ pour n assez grand et donc que A est bornée. Soit (x_n) une suite d'éléments de A convergeant vers $x \in E$, comme A est compacte (x_n) a une valeur d'adhérence dans A, cette valeur d'adhérence est nécessairement x et donc $x \in A$ ce qui montre que A est fermée.
□

La distance usuelle sur $\mathbb{C}$ est définie par

$$d(z, z') := |z - z'| = \sqrt{(z - z')\overline{(z - z')}} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

où $z = x + iy,\ z' = x' + iy'$. Cette distance correspond évidemment à la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ identifié à $\mathbb{C}$. Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ (resp. $r \geq 0$), la boule ouverte $B(z_0, r)$ (resp. la boule fermée $\overline{B}(z_0, r)$) s'appelle plutôt disque ouvert (resp. fermé) de centre z_0 et de rayon r et on la note généralement $D(z_0, r)$ (resp. $\overline{D}(z_0, r)$). Le cercle de centre z_0 et de rayon r est enfin noté $S(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} \ :\ |z - z_0| = r\}$.

Notons que la suite de complexes $(z_n)_n$ converge vers z (resp. est de Cauchy, resp. est bornée) si et seulement si les suites de réels $\mathrm{Re}(z_n)$ et $\mathrm{Im}(z_n)$ convergent vers $\mathrm{Im}(z)$ et $\mathrm{Re}(z)$ respectivement (resp. sont de Cauchy dans $\mathbb{R}$, resp. sont bornées dans $\mathbb{R}$). Comme $\mathbb{R}$ est complet pour sa distance usuelle (celle induite par la valeur absolue) on en déduit que

Théorème 1.3 $\mathbb{C}$ *(muni de sa distance usuelle) est complet.*

De même, on déduit du fait que les compacts de $\mathbb{R}$ sont ses fermés bornés :

Théorème 1.4 *Les parties compactes de $\mathbb{C}$ sont ses parties fermées et bornées et donc toute suite bornée de complexes possède une sous-suite convergente.*

Terminons ces rappels par la continuité :

Définition 1.9 *Soit (E, d) un espace métrique et f une fonction définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $x \in E$, on dit que f est continue au point x si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *pour tout $\varepsilon > 0$ il existe δ tel que si $d(x, y) \leq \delta$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$,*
2. *pour toute suite (x_n) d'éléments de E, si x_n converge vers x (dans E) alors $f(x_n)$ converge vers $f(x)$ (dans $\mathbb{C}$).*

On dit enfin que f est continue sur E si f est continue en chaque point de E.

Noter que si l'on définit les deux fonctions à valeurs réelles $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$ la continuité de f est équivalente à celle de u et v. On note $C(E, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues de f dans $\mathbb{C}$ et $C_b(E, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues et bornées (par définition f est bornée si son image $f(E)$ est bornée) de E dans $\mathbb{C}$. Il s'agit de deux $\mathbb{C}$-ev et $C_b(E, \mathbb{C})$ peut être muni de la distance induite par la norme de la convergence uniforme :

$$\|f\| := \sup_{x \in E} |f(x)|,\ f \in C_b(E, \mathbb{C})$$

On a alors

Théorème 1.5 *$C_b(E,\mathbb{C})$ muni de la distance $(f,g) \mapsto \|f-g\|_\infty$ est complet.*

Notons enfin que si E est compact alors $C(E,\mathbb{C}) = C_b(E,\mathbb{C})$ en effet :

Proposition 1.6 *Si E est un métrique compact et $f \in C(E,\mathbb{C})$ alors $f(E)$ est un compact de $\mathbb{C}$, en particulier f est bornée.*

1.3 Rappels sur les suites et séries de fonctions

Soit (E,d) un espace métrique (par exemple une partie de $\mathbb{C}$) et (f_n) une suite de fonctions définies sur E à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.10 *La suite de fonctions (f_n) converge simplement si pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))$ converge dans $\mathbb{C}$. La suite (f_n) converge uniformément (CVU en abrégé) sur E (respectivement sur tout compact de E) vers une fonction f si $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ quand $n \to \infty$ (resp. si pour tout K, compact de E $\sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| \to 0$).*

Evidemment la convergence uniforme sur E implique la convergence uniforme sur tout compact qui implique la convergence simple mais ces implications sont généralement strictes (la suite $f_n(z) = z/n$, $z \in \mathbb{C}$ converge uniformément vers 0 sur tout compact de $\mathbb{C}$ mais pas uniformément sur $\mathbb{C}$, la suite $f_n(z) = |z|^n/(1+|z|^n)$ converge simplement mais pas uniformément sur tout compact). Vous avez normalement déja vu qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue mais que ce n'est pas le cas d'une limite simple (prendre $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0,1]$ par exemple). Un critère de convergence uniforme nous est fourni par le critère de Cauchy uniforme :

Proposition 1.7 *La suite f_n converge uniformément si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que pour tout $m \geq N$, $n \geq N$ et tout $x \in E$ on a $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.*

Preuve:
Si f_n CVU vers f pour tout ε il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in E$ on ait $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$ et donc pour tout $m \geq N$, $n \geq N$ et tout $x \in E$ on a $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$. Supposons maintenant que f_n vérifie le critère de Cauchy uniforme, il est alors clair que pour chaque $x \in E$ fixé la suite $f_n(x)$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ et donc par complétude de $\mathbb{C}$, $f_n(x)$ converge vers une limite que nous noterons $f(x)$. Il s'agit maintenant de montrer que

f_n CVU vers f, soit donc $\varepsilon > 0$ et N tel que pour tout $m \geq N$, $n \geq N$ et tout $x \in E$ on a $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$. Faisant tendre m vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente et utilisant le fait que $f_m(x) \to f(x)$ quand $m \to \infty$, il vient que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in E$ et $n \geq N$ ce qui signifie bien que f_n CVU vers f.

$\square$

Passons maintenant au cas des séries de fonctions à valeurs complexes. Etant donnée une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur E à valeurs dans $\mathbb{C}$, la série de termes général f_n notée $\sum f_n$ est la suite de fonctions formée par les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$, ainsi on définit naturellement :

Définition 1.11 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement (resp. uniformément, resp. uniformément sur tout compact) si la suite de fonctions formée par les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ converge simplement (resp. uniformément, resp. uniformément sur tout compact). Si $S_n(x)$ converge on appelle somme de la série $\sum f_n(x)$ et l'on note $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ (ou simplement $\sum_n f_n(x)$) la limite de $S_n(x)$.*

Le critère de Cauchy uniforme caractérise la convergence uniforme de la série $\sum_n f_n$ par : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour $m \geq n+1 \geq n \geq N$ on a $\sup_{x\in E} |\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)| \leq \varepsilon$. En particulier si $\sum f_n$ converge uniformément on doit avoir $\|f_n\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$.

Définition 1.12 *La série $\sum f_n$ est dite normalement convergente sur E si $\sum_n \|f_n\|_\infty < +\infty$.*

On a alors

Proposition 1.8 *Si la série $\sum f_n$ est normalement convergente alors ele est uniformément convergente*

Preuve:
C'est une conséquence immédiate du critère de Cauchy uniforme, en effet si $m \geq n+1 \geq n \geq N$ on a

$$\|S_m - S_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\| \leq \sum_{k=N}^{\infty} \|f_k\|$$

et le membre de droite tend vers 0 quand $N \to \infty$ car $\sum_n \|f_n\|_\infty < +\infty$. $\square$

Evidemment les arguments précédents s'adaptent immédiatement à la convergence sur tout compact.

1.4 Connexité

Une dernière notion importante est celle de connexité. Intuitivement, un ensemble connexe est un ensemble "d'un seul tenant".

Définition 1.13 *Soit (E, d) un espace métrique on dit que E est connexe ssi les seuls sous ensembles à la fois ouverts et fermés de (E, d) sont E et $\emptyset$.*

Par exemple, la réunion de deux disques disjoints ouverts D_1 et D_2 n'est pas connexe : D_1 est ouvert (dans $D_1 \cup D_2$) et aussi fermé (puisque son complémentaire est D_2 qui est aussi ouvert dans $D_1 \cup D_2$).

La caractérisation suivante permet de mieux visualiser la notion de connexité.

Proposition 1.9 *Soit (E, d) un espace métrique, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *(E, d) est connexe,*
2. *toute application continue de E dans $\{0, 1\}$ est constante ($\{0, 1\}$ étant muni par exemple de la distance naturelle de $\mathbb{R}$).*

Preuve:
Supposons (E, d) connexe et soit $f \in C^0(E, \{0, 1\})$, soit $A_0 = f^{-1}(0)$ et $A_1 = f^{-1}(1)$. Par continuité de f, A_0 et A_1 sont ouverts et $A_1 = E \setminus A_0$ ainsi A_0 et A_1 sont aussi fermés, donc A_0 ou A_1 est vide ce qui montre que f est constante.

Soit A une partie à la fois ouverte et fermée de E, en définissant $B := E \setminus A$, le couple (A, B) forme alors une partition ouverte de E. Définissons f la fonction indicatrice de A, f est alors une fonction continue de E dans $\{0, 1\}$. Si 2. est satisfaite, f est constante donc A est vide ou égale à E, ce qui montre que (E, d) est connexe.

□

Nous aurons besoin ultérieurement du résultat suivant :

Lemme 1.1 *Soit (E, d) connexe et $f : E \to \mathbb{Z}$ continue alors f est constante.*

Preuve:
Supposons que f ne soit pas constante soit $x \in E$ alors $f^{-1}(f(x))$ n'est ni E ni vide et est fermé et ouvert (en effet son complémentaire est $f^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \{f(x)\})$ et est donc fermé puisque $\mathbb{Z} \setminus \{f(x)\}$ l'est).

□

Exemple 1.2 *Un singleton est connexe. En revanche, les sous ensembles* $\{0,1\}$ *ou* $\mathbb{Z}$ *de* $\mathbb{R}$ *ne sont pas connexes. Dans* $\mathbb{R}^2$*, l'ensemble constitué de deux boules disjointes* B_1 *et* B_2 *n'est pas connexe (considérer la fonction valant* 1 *sur* B_1 *et* 0 *sur* B_2*).*

Un critère simple de connexité est celui de connexité par arcs ; un ensemble connexe par arcs est un ensemble dont les points peuvent être joints par un arc continu :

Définition 1.14 *Soit* (E,d) *un espace métrique on dit que* E *est connexe par arcs ssi pour tout* $(x_1,x_2)\in E^2$*, il existe* $\gamma\in C^0([0,1],E)$ *tel que* $\gamma(0)=x_1$ *et* $\gamma(1)=x_2$*.*

On a alors

Proposition 1.10 *Tout espace métrique connexe par arcs est connexe.*

Preuve:
Supposons (E,d) connexe par arcs, et soit f une application continue de E dans $\{0,1\}$, il s'agit de montrer que f est constante. Supposons par l'absurde qu'il existe $(x_1,x_2)\in E^2$ tel que $f(x_1)=0$ et $f(x_2)=1$ et soit $\gamma\in C^0([0,1],E)$ tel que $\gamma(0)=x_1$ et $\gamma(1)=x_2$. Pour tout $t\in[0,1]$ on définit alors $g(t):=f(\gamma(t))$, on a alors $g\in C^0([0,1],\mathbb{R})$, $g(0)=0$ et $g(1)=1$. Avec le théorème des valeurs intermédiares, il existe donc $t_0\in]0,1[$ tel que $g(t_0)=1/2$, or, $g(t_0)=f(\gamma(t_0))\in\{0,1\}$, d'où la contradiction voulue. $\Box$

Exemple 1.3 *Dans* $\mathbb{R}^n$*, les sous-ensembles convexes sont connexes par arcs et donc connexes.*

Exemple 1.4 *Soit* E *une partie de* $\mathbb{R}^n$ *et* $x_0\in E$*, on dit que* E *est étoilé par rapport à* x_0 *ssi pour tout* $x\in E$*, le segment joignant* x_0 *à* x *est entièrement inclus dans* E *(noter la différence avec la convexité...). Si* E *est étoilé par rapport à l'un de ses points, alors* E *est connexe par arcs donc connexe.*

Dans, la preuve de la proposition 1.10, nous avons utilisé le théorème des valeurs intermédiaires. En voici la généralisation naturelle formulée en termes de connexité : l'image d'un ensemble connexe par une application continue est connexe.

Proposition 1.11 *Soit* (E_1,d_1) *et* (E_2,d_2) *deux espaces métriques. Si* (E_1,d_1) *est connexe et* f *est une application continue de* E_1 *à valeurs dans* E_2*, alors l'image* $f(E_1)$ *est connexe.*

Preuve:
Soit g une application continue de $f(E_1)$ dans $\{0,1\}$ et soit $h(x) := g(f(x))$ pour tout $x \in E_1$, h est continue de E_1 qui est connexe dans $\{0,1\}$, donc h est constante sur E_1 ce qui implique que g est constante sur $f(E_1)$.

$\square$

Dans toute la suite, nous utiliserons la définition suivante :

Définition 1.15 *On appelle domaine de $\mathbb{C}$ toute partie U non vide, ouverte et connexe du plan complexe.*

Il faut bien comprendre que la définition précédente est au sens de la topologie sur U induite par la topologie de $\mathbb{C}$. Autrement dit U est un domaine de $\mathbb{C}$ si c'est un ouvert non vide et si les seules parties de U à la fois ouvertes et fermées dans U (une partie de A de U est fermée dans U si toute suite d'éléments de A convergeant dans U a sa limite dans A) sont U et $\emptyset$.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 1.6 *Tout domaine de $\mathbb{C}$ est connexe par arcs.*

Preuve:
Soit U ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $z \in U$, il s'agit de montrer que tout z' de U peut être joint à z par un arc continu (dans U). Appelons A le sous ensemble de U formé par les points qui peuvent être joints à z par un arc continu. Evidemment $z \in A$ et donc A est non vide ; si nous montrons que A est ouvert et fermé (dans U) nous pourrons déduire le résultat de la connexité de U. Montrons que A est ouvert : soit $z' \in A$ et γ continu reliant z à z', comme U est ouvert il existe $r > 0$ tel que $D(z', r) \subset U$, soit $z'' \in D(z', r)$, le segment joignant z' à z" est inclus dans U et donc le chemin obtenu en "collant" γ et ce segment joint z à z'' et donc $D(z', r) \subset A$ ce qui montre que A est ouvert. Soit maintenant z_n une suite de points de A convergeant vers une limite $z' \in U$, il s'agit de montrer que $z' \in A$. Il existe $r > 0$ tel que $D(z', r) \subset U$ pour n assez grand $z_n \in D(z', r)$, comme $z_n \in A$ il existe un arc continu γ dans U joignant z à z_n, en considérant à nouveau le chemin obtenu en "collant" γ au segment joignant z_n à z' nous en déduisons que $z' \in A$.

$\square$

Chapitre 2

Séries entières

Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ où les coefficients a_n sont complexes ainsi que la variable $z = x + iy$.

2.1 Définitions et propriétés premières

Dans tout ce qui suit $\sum a_n z^n$ désigne une série entière, la première notion est celle de rayon de convergence :

Définition 2.1 *On appelle rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$

$$R := \sup\{r \geq 0 \ : \ \sum_n |a_n| r^n < +\infty\}.$$

Le rayon de convergence est toujours bien défini, il peut valoir 0 (par exemple pour $\sum n^n z^n$) ou $+\infty$ (par exemple pour $\sum \frac{z^n}{n!}$). Le rayon de convergence peut aussi être obtenu comme suit

Lemme 2.1 (Abel) *Le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *est*

$$R = \sup\{r \geq 0 \ : \ \sup_n |a_n| r^n < +\infty\}.$$

Preuve:
Soit R le rayon de de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ et

$$R_0 := \sup\{r \geq 0 \ : \ \sup_n |a_n| r^n < +\infty\}.$$

Soit $r_0 < R_0$ alors il existe M tel que $|a_n| r_0^n \leq M$ et donc si $r < r_0$ on a $|a_n| r^n = |a_n| r_0^n (\frac{r}{r_0})^n \leq M (\frac{r}{r_0})^n$ et donc $\sum_n |a_n| r^n < +\infty$ puisque son terme

général est majoré par celui d'une série géométrique convergente on a donc $R \geq r_0$ et donc en passant à la limite $r_0 \to R_0^-$, il vient bien que $R \geq R_0$. Si $r < R$, par définition $\sum_n |a_n| r^n < +\infty$ et donc en particulier la suite $|a_n| r^n$ est bornée si bien que $R \leq R_0$.
□

Définition 2.2 *Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, on appelle disque ouvert de convergence le disque ouvert $D := D(0, R)$.*

On a alors :

Proposition 2.1 *Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, on a alors*

1. *si $r < R$, $\sum a_n z^n$ converge normalement (donc uniformément) sur le disque fermé $|z| \leq r$,*
2. *si $|z| > R$, $\sum_n a_n z^n$ diverge.*

Preuve:

1. Soit $r < R$ et $r_0 \in]r, R[$, il existe M tel que $|a_n| r_0^n \leq M$ pour tout n. Ainsi

$$\sup_{z \in \overline{D}(0,r)} |a_n z^n| \leq |a_n| r^n \leq M \Big(\frac{r}{r_0}\Big)^n$$

ce qui montre la convergence normale sur $\overline{D}(0, r)$.

2. Si $|z| > R$, $|a_n z^n|$ n'est pas bornée et donc en particulier le terme général de la série $\sum a_n z^n$ ne tend pas vers 0, la série diverge (grossièrement).
□

Noter que l'on a absolue converge de $\sum a_n z^n$ en chaque point du disque ouvert (et même convergence normale sur ses compacts) mais on ne peut généralement rien dire sur la convergence de la série aux points de ∂D, le bord du disque ouvert de convergence. Comme les sommes partielles sont continues (ce sont des polynômes) la convergence uniforme sur $\overline{D}(0, r)$ pour chaque $r < R$ nous donne le résultat de continuité suivant :

Théorème 2.1 *La somme d'une série entière est continue en chaque point du disque OUVERT de convergence.*

Rappelons que si (u_n) est une suite de réels, $\limsup u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de cette suite (éventuellement $+\infty$ quand la suite n'est pas majorée ou $-\infty$ quand la suite tend vers $-\infty$). Il est important de comprendre que $l := \limsup u_n$ peut aussi être caractérisé par

$$l = \lim_n \left(\sup_{k \geq n} u_k \right)$$

ou encore par le fait que si $l' > l$, l'inégalité $u_n \geq l'$ n'a lieu que pour un nombre fini de n et pour $l' < l$, l'inégalité $u_n \geq l'$ a lieu pour une infinité de n. On dispose alors d'une formule pour le calcul du rayon de convergence :

Proposition 2.2 (Hadamard) *Le rayon de convergence de* $\sum a_n z^n$ *vérifie*

$$\frac{1}{R} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Preuve:
Commençons par supposer que $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ et soit $r > 0$ alors pour une infinité de valeurs de n on a $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{2}{r}$ et donc aussi $|a_n|r^n \geq 2^n \to \infty$ si bien que $R = 0$. Si $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ alors il est facile de voir que pour tout $r > 0$, $|a_n|r^n$ tend vers 0 et donc $R = +\infty$. On suppose donc désormais que $0 < \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$.

Soit $r > 0$ tel que $\frac{1}{r} > \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ i.e. $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}r < 1$ si bien que pour n assez grand on a $\sqrt[n]{|a_n|}r \leq 1$ et donc aussi $|a_n|r^n \leq 1$ de sorte que $R \geq r$ et donc en passant à la limite $\frac{1}{R} \leq \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$. Supposons maintenant que $\frac{1}{r} < \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ i.e. $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}r > 1$ soit $\delta > 0$ tel que $1 + \delta < \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}r$ pour une infinité de valeurs de n on a que $\sqrt[n]{|a_n|}r \geq (1+\delta)$ et donc aussi $|a_n|r^n \geq (1+\delta)^n \to \infty$ de sorte que $R \leq r$ et donc $\frac{1}{R} \geq \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}r$.
$\square$

On pourra aussi penser pour calculer un rayon de convergence à utiliser le critère de d'Alembert (cf. TD).

Dans le cas où le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ est fini et strictement positif, intéressons nous maintenant un peu plus en détail au comportement sur le bord du disque de convergence. Nous avons vu qu'il y a convergence normale de la série $\sum_n a_n z^n$ sur tout compact du disque ouvert de convergence et donc que la somme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert, nous savons aussi que si $|z| > R$ la série diverge mais nous ne savons rien sur la convergence de la somme aux points de ∂D et lorsque la somme existe sur sa continuité en de tels points. Pour voir que le problème peut être subtil, considérons $\sum(-z)^n$ dont le rayon de convergence est 1 et dont la somme est $f(z) = 1/(1+z)$ sur son disque ouvert de convergence, nous voyons que f possède une limite en 1 alors que $\sum(-1)^n$ diverge. Le fait que la somme puisse admettre une limite en un point du bord du disque de convergence pas n'implique donc pas que la série converge en ce point. En revanche si $\sum a_n z_0^n$ converge en un point $z_0 \in \partial D$ alors on a une forme de continuité de f en z_0 quand on impose à z de rester dans un certain cône de sommet z_0, c'est l'objet du résultat suivant dû à Abel :

Théorème 2.2 (Abel) *Soit $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$ on note $f(z)$ la somme de cette série en les points en lesquels la série converge et soit z_0 tel que $|z_0| = R$ et notons $z_0 = Re^{i\theta_0}$. Si $\sum a_n z_0^n$ converge alors pour tout $\alpha \in]0, \pi/2[$ on a $f(z) \to f(z_0)$ quand $z \in C_\alpha(z_0) \cap D$, $z \to z_0$ où $C_\alpha(z_0)$ désigne le cône de sommet z_0 et d'ouverture 2α (i.e. $C_\alpha(z_0) = \{z_0 - \rho e^{i(\theta+\theta_0)},\ \rho \geq 0,\ \theta \in [-\alpha, \alpha]\}$.*

Preuve:

Quitte à effectuer une similitude, nous pouvons supposer que $R = 1$ et $z_0 = 1$ on peut aussi supposer que $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ (quitte à retrancher cette quantité qui est bien définie par hypothèse à la somme f). En notant $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ pour $n \geq 0$ et en posant $S_{-1} = 0$ on a d'une part que $S_n \to f(1) = 0$ quand $n \to \infty$ et d'autre part (après quelques justifications élémentaires) on a pour tout $z \in D$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(z^n - z^{n+1}) = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n.$$

Soit $\varepsilon > 0$ il s'agit de montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que si $|z-1| \leq \rho$ et $z \in C_\alpha(1) \cap D$ alors $|f(z)| \leq \varepsilon$. Comme S_n tend vers 0 il existe N_0 tel que $|S_n| \leq \frac{\varepsilon \cos(\alpha)}{4}$ pour tout $n \geq N_0$, on a alors pour tout $z \in D$

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq |z-1| \sum_{n=0}^{N_0} |S_n| + \frac{\varepsilon \cos(\alpha)}{4} |z-1| \sum_{n \geq N_0+1} |z|^n \\
&\leq C|z-1| + \frac{\varepsilon \cos(\alpha)}{4} \frac{|z-1|}{1-|z|} \\
&= C|z-1| + \frac{\varepsilon \cos(\alpha)}{4} \frac{|z-1|(1+|z|)}{1-|z|^2} \\
&\leq C|z-1| + \frac{\varepsilon \cos(\alpha)}{2} \frac{|z-1|}{1-|z|^2}
\end{aligned}$$

supposons maintenant que $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\alpha, \alpha]$ et $\rho \leq \cos(\alpha)$, on a alors $|z-1| = \rho$ et $1 - |z|^2 = 2\rho\cos(\theta) - \rho^2 = \rho(2\cos(\theta) - \rho) \geq$

$\rho(2\cos(\alpha)-\rho) \geq \rho\cos(\alpha)$ si bien que

$$\frac{|z-1|}{1-|z|^2} \leq \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

ainsi si $z \in C_\alpha(1) \cap D$ et $|z-1| \leq \min(\cos(\alpha), \frac{\varepsilon}{2C})$ on a $|f(z)| \leq \varepsilon$.
□

La démonstration est intéressante en ce qu'elle utilise la transformation d'Abel dont le lecteur perspicace aura bien noté qu'elle est l'analogue pour les séries de l'intégration par parties pour les intégrales.

2.2 Opérations sur les séries entières

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $g(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R et $R' \neq 0$ alors la série $\sum_n (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $\min(R, R')$ et pour $|z| < \min(R, R')$ on a

$$f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n.$$

Si $R \neq R'$ on montre facilement que le rayon de convergence de $\sum_n (a_n + b_n) z^n$ est égal à $\min(R, R')$ mais si $R = R'$ il se peut que le rayon de convergence soit plus grand (par exemple si $g = -f$). De même si $\lambda \in \mathbb{C}$, le rayon de convergence de $\sum_n \lambda a_n z^n$ est $+\infty$ si $\lambda = 0$ et R si $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Passons maintenant au produit de deux séries entières.

Lemme 2.2 *Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à valeurs complexes absolument convergentes : $\sum |a_n| < +\infty$, $\sum |b_n| < +\infty$ et posons*

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

alors $\sum |c_n| < +\infty$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big).$$

Preuve:
On a

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \leq \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| \Big(\sum_{n=k}^{N} |b_{n-k}| \Big)$$
$$\leq \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \Big) \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| \Big)$$

de sorte que $\sum |c_n| < +\infty$. Soit $N \geq 1$, il est facile de voir que $\sum_{n=0}^{2N} c_n$ représente la somme des $a_k b_l$ pour k, l entiers dans le triangle T_{2N} : $k \geq 0$, $l \geq 0$, $k + l \leq 2N$ ainsi

$$\Big| \sum_{n=0}^{2N} c_n - (\sum_{k=0}^{N} a_k)(\sum_{l=0}^{N} b_l) \Big| \leq \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}^2 \cap T_{2N} \setminus [0,N]^2} |a_k||b_l|$$
$$\leq \Big(\sum_{k=N}^{+\infty} |a_k| \Big) \Big(\sum_{l=0}^{+\infty} |b_l| \Big) + \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \Big) \Big(\sum_{l=N}^{+\infty} |b_l| \Big)$$
$$\to 0 \text{ quand } N \to \infty.$$

□

On en déduit donc

Proposition 2.3 *Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *et* $g(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de convergence respectifs* R *et* $R' \neq 0$ *alors la série* $\sum_n c_n z^n$ *où* $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *a un rayon de convergence au moins égal à* $\min(R, R')$ *et pour* $|z| < \min(R, R')$ *on a*

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

Preuve:
Soit $r < \min(R, R')$ alors $\sum |a_n| r^n < +\infty$ et $\sum |b_n| r^n < +\infty$, on observe que $c_n r^n = \sum_{k=0} a_k r^k b_{n-k} r^{n-k}$ et donc le lemme précédent permet de conclure que $\sum |c_n| r^n < +\infty$ et que pour $|z| < \min(R, R')$ on a bien $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$.
□

Notons que si $R = R'$ il se peut très bien que le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$ soit strictement supérieur à R ($f(z) = \sum z^n$ et $g(z) = 1 - z$).

2.3 Dérivées

La notion clé de ce cours (sur laquelle nous reviendrons en détail au chapitre 4) est celle de différentiabilité au sens complexe (ou d'holomorphie) :

Définition 2.3 *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction définie sur un voisinage de z_0 et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on dit que f est dérivable en z_0 si la limite*

$$\lim_{z \to z_0,\, z \neq z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe et dans ce cas on appelle dérivée de f en z_0 et l'on note $f'(z_0)$ (ou $\frac{d}{dz} f(z_0)$) cette limite.

Il faut bien noter que le quotient $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ est complexe et donc la dérivée aussi quand elle existe. Par définition, le nombre complexe $f'(z_0)$ est caractérisé par le fait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|z - z_0| \leq \delta$ on a $|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|$. Ceci peut aussi s'écrire sous la forme :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0) \text{ ou encore } f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(h)$$

où $o(z - z_0)$ désigne une fonction tendant vers 0 plus vite que $z - z_0$ quand $z \to z_0$ i.e. $\frac{o(z-z_0)}{|z-z_0|} \to 0$ quand $z \to z_0$. Evidemment si f est dérivable en z_0, f est continue en z_0.

On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est dérivable sur U si elle l'est en chaque point de U. On définit alors les dérivées successives par récurrence, comme dans le cas réel : f admet une dérivée k-ième en $z_0 \in U$ si f est dérivable $k - 1$ fois au voisinage de z_0 et sa dérivée $(k - 1)$-ième $f^{(k-1)}$ est dérivable en z_0 on note alors $f^{(k)}(z_0) = (f^{k-1})'(z_0)$.

Les fonctions différentiables les plus simples sont les polynômes : si $f(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$) on a

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) - f(z_0) = (z_0 + h)^n - z_0^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_0^{n-k} h^k - z_0^n &= \sum_{k=1}^{n} C_n^k h^k z_0^{n-k} \\ = n z_0^{n-1} h + o(h) \end{aligned}.$$

Ce qui montre que la dérivée de $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ au point z_0 est $P'(z_0) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}$.

Les séries entières étant une généralisation des polynômes, il est naturel de s'intéresser à leur différentiabilité au sens complexe, le résultat suivant généralise le calcul élémentaire précédent et montre qu'une série entière peut se dériver terme à terme :

Théorème 2.3 *Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$ *et* D *son disque de convergence, alors la série* $\sum n a_n z^{n-1}$ *a pour de rayon de convergence* R*,* f *est dérivable en chaque point de* D *et l'on a*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},\ \forall z \in D.$$

Preuve:
Soit $r \in]0, R[$ et $r' \in]r, R[$, $|a_n| r'^n$ est majorée et donc $n|a_n|r^{n-1} = \frac{n}{r'}\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1} |a_n| r'^n$ l'est aussi. Si $n|a_n|r^{n-1}$ est majorée alors $|a_n|r^n$ évidemment aussi. Ceci montre que le rayon de convergence de $\sum n a_n z^{n-1}$ est R.

Soit $\varepsilon > 0$, $z \in D$ et $h \in \mathbb{C}$ tel que $|z| + |h| \leq r < R$, rappelant l'identité

$$(z+h)^n - z^n = h((z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \ldots + z^{n-1}),$$

il vient

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n \geq 1} a_n \psi_n(h),$$

où :

$$\psi_n(h) := (z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \ldots + z^{n-1} - n z^{n-1}.$$

Pour $|z| + |h| \leq r$ on a donc $|a_n \psi_n(h)| \leq 2n|a_n|r^{n-1}$ ainsi la série $\sum a_n \psi_n$ converge normalement sur $D(0, r - |z|)$ et donc il existe N tel que

$$\sum_{n \geq N} |a_n \psi_n(h)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall (z,h)\ :\ |z| + |h| \leq r$$

on remarque ensuite que $\sum_{n \leq N-1} a_n \psi_n(h)$ est un polynôme nul pour $h = 0$ et donc il existe $\delta > 0$ tel que pour $|h| \leq \delta$ on a $|\sum_{n\leq N-1} a_n \psi_n(h)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ainsi pour $|h| \leq \min(\delta, r - |z|)$ on a

$$\Big| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} \Big| \leq \varepsilon$$

ce qui montre que f est dérivable en z avec $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.
$\square$

Evidemment en itérant l'argument précédent on voit immédiatement qu'une série entière est indéfiniment différentiable sur son disque de convergence. Notons aussi l'expression de la dérivée k-ième :

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n z^{n-k} = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$$

et donc en particulier la relation

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

de sorte que la série entière est donnée par son développement de Taylor en 0 (ou développement de Taylor Maclaurin)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0) z^n}{n!}.$$

En fait on a beaucoup mieux, f coïncide avec son développement (infini) de Taylor au voisinage de n'importe quel point de son disque de convergence (c'est la propriété d'analyticité à laquelle sera entièrement consacré le chapitre suivant) :

Théorème 2.4 *Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$ *et* D *son disque de convergence alors pour tout* $z_0 \in D$*, la série* $\sum_n \frac{f^{(n)}(z_0)h^n}{n!}$ *a un rayon de convergence au moins égal à* $R - |z_0|$ *et l'on a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n}{n!}, \forall z \in D(z_0, R - |z_0|).$$

Preuve:
Soit $z_0 \in D$, $r_0 := |z_0|$ et $z \in D(z_0, r - r_0)$ avec $r < R$, on a alors

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_n z_0^{n-k} = \sum_{n \geq k} C_n^k a_n z_0^{n-k}$$

comme $|z - z_0| \leq r - r_0$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_k \Big| \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \Big| &\leq \sum_k \Big(\sum_{n \geq k} C_n^k |a_n| r_0^{n-k} (r - r_0)^{n-k} \Big) \\
&\leq \sum_n |a_n| \Big(\sum_{k \leq n} C_n^k r_0^{n-k} (r - r_0)^{n-k} \Big) = \sum_n |a_n| r^n < +\infty
\end{aligned}$$

ce qui montre que la la série $\sum_n \frac{f^{(n)}(z_0)h^n}{n!}$ a un rayon de convergence au moins égal à $R - |z_0|$. La majoration précédente montre que le rayon de convergence de $\sum_n \frac{f^{(n)}(z_0)h^n}{n!}$ est au moins égal à $R - |z_0|$. Pour $z \in D(z_0, r - r_0)$ on a alors (on laisse le soin au lecteur de justifier que le regroupement de termes effectué ci-dessous est licite, ce qui peut se faire grâce au théorème de Fubini que vous avez vu ou verrez bientôt dans le cours d'intégration)

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k &= \sum_{k\geq 0}\Big(\sum_{n\geq k} C_n^k a_n z_0^{n-k}(z-z_0)^k\Big)\\ &= \sum_{n\geq 0} a_n\Big(\sum_{k=0}^{n} C_n^k z_0^{n-k}(z-z_0)^k\Big)\\ &= \sum_{n\geq 0} a_n z^n\\ &= f(z).\end{aligned}$$

□

2.4 Exponentielle et quelques fonctions usuelles

L'exponentielle de $z \in \mathbb{C}$ (notée e^z ou $\exp(z)$) est par définition la somme

$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$$

le rayon de convergence de cette série entière est évidemment $+\infty$. Cette fonction est indéfiniment différentiable et sa dérivée vaut $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nz^{n-1}}{n!} = e^z$ on a donc la relation fondamentale

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z.$$

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, utilisant le lemme 2.2, on a

$$\begin{aligned}e^z e^{z'} &= \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!}z^k z'^{n-k}\Big)\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\Big(\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k z'^{n-k}\Big) = \sum_{n\geq 0}\frac{(z+z')^n}{n!}\\ &= e^{z+z'},\end{aligned}$$

cette relation fondamentale exprimant le fait que l'exponentielle est un morphisme de groupes entre $(\mathbb{C}, +)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ (noter que $e^0 = 1$ et $e^z e^{-z} = 1$ de sorte que e^z ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$). Notons que pour $z = x + iy$ on a $e^z = e^x e^{iy}$ et donc il suffit de connaitre le comportement de l'exponentielle sur l'axe réel et sur l'axe imaginaire pour connaitre son comportement sur $\mathbb{C}$ en entier. Le comportement de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$ est (normalement) bien connu : c'est une fonction C^∞ strictement croissante avec $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ (et même $\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha}e^x = +\infty$ pour tout $\alpha > 0$ comme il est facile de le voir sur le développement en série de e^x) et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ (et même $\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = 0$ pour tout $\alpha > 0$ ce qui se voit facilement en utilisant le fait que $e^{-x} = 1/e^x$). Ainsi $x \mapsto e^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.

S'agissant de $y \in \mathbb{R} \mapsto e^{iy}$ on observe que

$$e^{iy} = \sum_{k\geq 0} \frac{(iy)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

on reconnait les développements vus (normalement) les années précédentes :

$$\cos(y) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!},\ \sin(y) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

de sorte que

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$$

on retrouve donc (en la justifiant) la définition que nous avions prise au premier chapitre de e^{iy}. Notons (ou plutôt rappelons) que $e^{iy} \in S^1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ (ce qu'on pouvait aussi voir en observant que $e^{\bar{z}} = \bar{e^z}$ et donc que $|e^{iy}|^2 = e^{iy}e^{-iy} = e^0 = 1$) et que $y \mapsto e^{iy}$ est 2π-périodique. La fonction $y \in \mathbb{R} \mapsto e^{iy}$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans S^1 mais elle n'est pas injective et plus précisément $e^{iy} = e^{iy'}$ si et seulement si $y - y' \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Revenant à l'exponentielle complexe $z \mapsto e^z$ on voit qu'il s'agit d'une fonction qui prend ses valeurs dans $\mathbb{C}^*$ (puisque pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ni e^x ni e^{iy} ne s'annulent), c'est une surjection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ en effet pour $z \in \mathbb{C}^*$ que l'on écrit sous forme polaire $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et θ un argument de z en posant $Z = \ln(\rho) + i\theta$ (où ln est le logarithme népérien étudié au lycée qui n'est autre que l'inverse de la fonction exponentielle...) on a

$$e^Z = \rho e^{i\theta} = z.$$

L'exponentielle complexe n'est cependant pas injective puisque $e^x e^{iy} = e^{x'}e^{iy'}$ (x, y, x', y' réels) si et seulement si $x = x'$ et $y - y' \in 2\pi\mathbb{Z}$. Autrement dit $e^z = e^{z'}$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z') \in 2\pi\mathbb{Z}$.

A partir de l'exponentielle complexe, on peut aussi naturellement définir d'autres fonctions. Tout d'abord on peut étendre les fonctions circulaires à $\mathbb{C}$:

$$\cos(z) := \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},\ \sin(z) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},\ \forall z \in \mathbb{C}$$

on vérifie sans peine que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ et } \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

et

$$\frac{d}{dz}\cos(z) = -\sin(z),\ \frac{d}{dz}\sin(z) = \cos(z).$$

Enfin pour tout complexe z, notons que

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z),\ e^{-iz} = \cos(z) - i\sin(z)$$

et donc

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = (\cos(z) + i\sin(z))(\cos(z) - i\sin(z)) = e^{iz}e^{-iz} = 1.$$

On définit aussi les fonctions hyperboliques :

$$\mathrm{ch}(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k}}{(2k)!},\ \mathrm{sh}(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},\ \forall z \in \mathbb{C}$$

qui sont respectivement la partie paire et impaire de l'exponentielle :

$$\mathrm{ch}(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \text{ et } \mathrm{sh}(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

On a alors

$$\frac{d}{dz}\mathrm{ch}(z) = \mathrm{sh}(z),\ \frac{d}{dz}\mathrm{sh}(z) = \mathrm{ch}(z).$$

Notons aussi que

$$\mathrm{ch}(z) = \cos(iz),\ \cos(z) = \mathrm{ch}(iz),\ \sin(z) = -i\mathrm{sh}(iz),\ \mathrm{sh}(z) = -i\sin(iz)$$

et donc

$$\mathrm{ch}^2(z) - \mathrm{sh}^2(z) = \cos^2(iz) + \sin^2(iz) = 1.$$

Notons enfin, l'exemple élémentaire de $\sum_{n\geq 0} z^n$ dont le rayon est 1 et dont la somme est $\frac{1}{1-z}$ pour $|z| < 1$.

2.5 Logarithme complexe

On souhaite maintenant inverser la fonction exponentielle dont nous avons vu qu'elle réalise une surjection de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}^*$ mais n'est pas injective dans la mesure où deux complexes qui diffèrent d'un multiple de $2i\pi$ ont la même exponentielle. Nous avons en effet vu que l'équation $e^z = \rho e^{i\theta}$ admet une infinité de solutions $z = \ln(\rho) + i(\theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, ces solutions sont les logarithmes de $\rho e^{i\theta}$, ainsi chaque élément de $\mathbb{C}^*$ possède une infinité de logarithmes complexes. Si l'on veut pouvoir parler d'une fonction logarithme complexe, il faut restreindre l'ensemble des valeurs de la variable et préciser quelle est la détermination choisie, d'où la définition :

Définition 2.4 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$, on dit que $f : U \mapsto \mathbb{C}$ est une détermination du logarithme sur U si f est continue sur U et si $e^{f(z)} = z$ pour tout $z \in U$.*

Sur un domaine, une détermination du logarithme permet de toutes les obtenir :

Lemme 2.3 *Soit U un domaine de $\mathbb{C}^*$. Alors f et g sont deux déterminations du logarithme sur U si et seulement si $f = g + 2ik\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.*

Preuve:
Si f et g ont le même logarithme $f(z) = g(z) + 2in(z)\pi$ où n est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et continue et par connexité de U cela implique que n est constant. $\square$

L'existence d'une détermination du logarithme sur U impose des restrictions sur U, en effet

Lemme 2.4 *Il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.*

Preuve:
Suposons que f soit une détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$ alors on devrait avoir $e^{f(e^{it})} = e^{it}$ et donc $f(e^{it}) = it + 2in(t)\pi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n(t) \in \mathbb{Z}$ pour tout t. Comme f est continue, n l'est aussi et par connexité de $\mathbb{R}$ on en déduit que n est constante et donc $f(e^{it}) = it + 2in\pi$ ce qui est en contradiction avec le fait que $t \mapsto f(e^{it})$ est 2π-périodique. $\square$

En revanche, il existe une détermination du logarithme sur les domaines obtenus en privant $\mathbb{C}$ d'une demi droite passant par l'origine, par exemple le domaine

$$U_\pi := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- = \{\rho e^{i\theta},\ \rho > 0,\ \theta \in]-\pi, \pi[\}$$

en effet sur ce domaine, il existe une détermination continue de l'argument que l'on construit de la manière suivante. Tout d'abord on rappelle que comme sin est une fonction continue et strictement croissante de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1,1]$, elle possède un inverse que l'on note arcsin : $[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, on a alors :

Lemme 2.5 *Pour $z = x+iy \in U_\pi$ définissons*

$$\theta(z) := \begin{cases} \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & si\ x \geq 0, \\ \pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & si\ x \leq 0,\ y \geq 0, \\ -\pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & si\ x \leq 0,\ y \leq 0 \end{cases}$$

alors la fonction θ est une détermination continue de l'argument sur U_π.

Preuve:
Tout d'abord, il est clair (faites un dessin si besoin est !) que $\theta(z)$ est un argument de z. Pour la continuité, il suffit de constater que quand $x = 0$ et $y > 0$, la limite $x \to 0^+$ vaut $\pi/2$ et la limite $x \to 0^-$ vaut $\pi - \pi/2 = \pi/2$. Quand $x = 0$ et $y < 0$, la limite $x \to 0^+$ vaut $-\pi/2$ et la limite $x \to 0^-$ vaut $-\pi + \pi/2 = -\pi/2$. $\square$

On en déduit que l'on peut définir sur U_π ce que l'on appelle usuellement la détermination principale du logarithme comme suit

Proposition 2.4 *Soit θ la détermination continue de l'argument du lemme 2.5, alors la fonction*

$$f(z) := \ln(|z|) + i\theta(z),\ \forall z \in U_\pi$$

est une détermination du logarithme sur U_π.

On a aussi une représentation en série entière que nous admettrons pour le moment :

Théorème 2.5 *Soit $U := D(1,1)$ pour $z \in U$, la somme*

$$f(z) := \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

est une détermination du logarithme sur U.

Notons que le rayon de cette série est 1 et pour tout $z \in D(1,1)$ on a

$$f'(z) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}(z-1)^{n-1} = \frac{1}{z}.$$

L'identité ci-dessus est en fait générale comme le montre le résultat suivant que nous admettrons pour le moment :

Proposition 2.5 *Si f est une détermination du logarithme sur l'ouvert U de $\mathbb{C}^*$ alors f est dérivable sur U et*

$$f'(z) = \frac{1}{z}, \ \forall z \in U.$$

Chapitre 3

Fonctions analytiques

3.1 Définitions premières

Une fonction analytique est une fonction qui se développe en série entière au voisinage de chaque point :

Définition 3.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in U$. On dit que*

1. *f est analytique en z_0 s'il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$ et une série entière $\sum_n a_n z^n$ de rayon de convergence au moins égal à r telle que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \ \forall z \in D(z_0, r),$$

2. *f est analytique sur U si f est analytique en chaque point de U.*

On pourrait définir de même les fonctions analytiques d'une variable réelle. Il faut bien noter que, comme la continuité, l'analyticité est une notion locale i.e. c'est une notion qui se vérifie en chaque point. Noter aussi que dans la définition précédente, le rayon r dépend du point z_0. Nous avons vu au chapitre précédent (cf Théorème 2.4) que la somme d'une série entière de rayon $R > 0$ est analytique sur son disque de convergence et que son développement en série entière au voisinage de z_0 est donnée par sa série de Taylor :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Il découle de ce que nous avons vu sur les séries entières au chapitre précédent (Théorème 2.4) que :

- une fonction analytique est indéfiniment différentiable,
- le développement en série entière de f en z_0 coïncide avec son développement de Taylor
$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

On notera également que les dérivées successives d'une fonction analytique sont aussi analytiques. Les fonctions exponentielle, cos, sin, ch et sh sont analytiques sur $\mathbb{C}$ puisque données par une série entière de rayon de convergence infini. Nous verrons que les déterminations du logarithme sont aussi analytiques. La fonction $z \in \mathbb{C}^* \mapsto 1/z$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$ en effet soit $z_0 \neq 0$, on a
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0(1+\frac{z-z_0}{z_0})} = \frac{1}{z_0}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\Big(\frac{z-z_0}{z_0}\Big)^n, \ \forall z \in D(z_0, |z_0|). \qquad (3.1)$$

Il est évident qu'une combinaison linéaire de fonctions analytiques est analytique. Nous démontrerons au chapitre suivant le résultat suivant concernant verrons la composée de fonctions analytiques (une démonstration directe en raisonnant sur les développements en séries entières est possible mais relativement fastidieuse, nous verrons au prochain chapitre comment démontrer ce résultat très simplement une fois que nous aurons démontré l'analyticité des fonctions holomorphes) :

Théorème 3.1 *Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$, $f : U \to V$ et $g : V \to \mathbb{C}$ si f est analytique sur U et g est analytique sur V alors $g \circ f$ est analytique sur U.*

Finalement, on définit

Définition 3.2 *Une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ s'appelle une fonction entière.*

3.2 Prolongement analytique, principe des zéros isolés et conséquences

Proposition 3.1 *Soit U un domaine (i.e. un ouvert connexe) de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur U, on a alors équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. *f est nulle sur U,*
2. *f est nulle sur un voisinage de z_0,*
3. *$f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve:
Il est clair que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$, il s'agit donc de montrer que 3 implique 1. Soit $E := \{z \in U \ : \ f^{(n)}(z) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}\}$, E est non vide car il contient z_0 et E est un fermé de U car f et ses dérivées sont continues. Ainsi, si nous montrons que E est ouvert nous pourrons déduire de la connexité de U que $E = U$ si bien que f est identiquement nulle sur U. Soit donc $z \in E$, comme f est analytique, il existe $r > 0$ tel que sur $D(z, r)$ f est égale à sa série de Taylor en z, laquelle est nulle car $z \in E$ et donc f et toutes ses dérivées sont nulles sur $D(z, r)$ ce qui fait que E est ouvert.
$\square$

L'hypothèse de connexité est évidemment fondamentale : si U est réunion de deux disques ouverts disjoints la fonction valant 0 sur le premier disque et 1 sur le second est analytique sur U, nulle sur un ouvert mais pas sur U.

On déduit immédiatement de la proposition précédente :

Corollaire 3.1 *Si f et g sont analytiques sur le domaine U et si $f = g$ sur un ouvert alors $f = g$ sur U.*

On a vu qu'une fonction analytique sur un domaine qui s'annule au voisinage d'un point est nulle partout, en fait on a un résultat beaucoup plus fort qui nous dit que si une fonction analytique s'annule sur un ensemble ayant des points d'accumulation (cf. définition ci-dessous) alors elle identiquement nulle.

Définition 3.3 *Soit A une partie de $\mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$. On dit que*

1. *z est un point isolé de A s'il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \cap A = \{z\}$,*
2. *z est un point d'accumulation de A si pour tout $r > 0$, $D(z, r) \backslash \{z\} \cap A \neq \emptyset$.*

Noter que par définition, les points de A qui ne sont pas isolés sont des points d'accumulation. Noter qu'un point isolé de A est dans A (ce qui n'est pas nécessairement le cas d'un point d'accumulation), noter aussi que z est un point d'accumulation de A signifie que z est limite d'une suite de points de $A \setminus z$ (en particulier un point d'accumulation est dans $\overline{A}$). Noter qu'un ensemble fini n'a que des points isolés et donc aucun point d'accumulation.

Théorème 3.2 (Principe des zéros isolés) *Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique non identiquement nulle, alors les zéros de f (i.e. les points en lesquels f s'annule) sont isolés.*

Preuve:
Soit $z_0 \in U$ tel que $f(z_0) = 0$, comme f n'est pas identiquement nulle sur U, il résulte de la proposition 3.1 qu'il existe $n \geq 1$ tel que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, soit n_0 le plus petit n pour lequel $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$ et pour tout $z \in D(z_0, r)$, on ait

$$f(z) = (z - z_0)^{n_0}(b_0 + \sum_{k\geq 1} b_k(z - z_0)^k) = (z - z_0)^{n_0}(b_0 + g(z)),$$

$$g(z) := \sum_{k\geq 1} b_k(z - z_0)^k$$

avec $b_0 \neq 0$ et $\sum_k b_k z^k$ est de rayon de convergence au moins r. Comme $g(z_0) = 0$ et g est continue, il existe $\delta < r$ tel que $|g(z)| < |b_0|$ pour tout $z \in D(z_0, \delta)$ de sorte que f ne s'annule pas sur $D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$. On a bien montré que les zéros de f sont isolés. $\square$

Théorème 3.3 (Principe du prolongement analytique) *Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ et f et g deux fonctions analytiques : $U \to \mathbb{C}$, si $f = g$ sur un sous-ensemble de U ayant un point d'accumulation dans U alors $f = g$ sur U.*

Preuve:
L'ensemble des zéros de $f - g$ possède un point d'accumulation dans U et donc les zéros de $f - g$ ne sont pas isolés, comme $f - g$ est analytique et U un domaine, il résulte du principe des zéros isolés que $f = g$ sur U.
$\square$

Notons les corollaires/cas particuliers suivants :

- Si f et g sont analytiques sur le domaine U, $z \in U$ et $f(z_n) = g(z_n)$ où z_n est une suite de points de $U \setminus \{z\}$ convergeant vers $z \in U$ alors $f = g$ sur U,
- Si f et g sont analytiques sur le domaine U et coïncident sur un segment $[a, b]$ inclus dans U avec $a \neq b$ alors $f = g$ sur U,
- Si f et g sont <u>entières</u> i.e. analytiques sur $\mathbb{C}$ et si $f = g$ sur $\mathbb{R}$ (ou sur $i\mathbb{R}$ ou sur une droite, ou sur un segment ou un cercle ou une courbe continue non réduite à un point ou plus généralement sur un ensemble possédant un point d'accumulation) alors $f = g$ sur $\mathbb{C}$.

On voit en particulier dans tous ces énoncés une différence fondamentales entre les fonctions analytiques et les fonctions C^∞ : une fonction analytique qui s'annule sur un ensemble ayant des points d'accumulation est nulle partout alors qu'il existe des fonctions C^∞ non nulles qui s'annulent sur de "gros" ensembles (par exemple il existe des fonctions C^∞ non nulles à support compact c'est à dire identiquement nulle en dehors d'une boule alors qu'une fonction entière à support compact est nécessairement identiquement nulle). Une fonction analytique est ainsi totalement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur une courbe non réduite à un points (ou une suite convergente de points distincts...), c'est une propriété de rigidité des fonctions analytiques (nous en verrons d'autre par la suite : théorème du module maximal au paragraphe suivant et théorème de Liouville au prochain chapitre).

Nous sommes maintenant en mesure d'établir certaines propriétés des déterminations du logarithme complexe que nous avions admises au chapitre précédent.

Théorème 3.4 *Soit $U := D(1,1)$ pour $z \in U$, la somme*

$$f(z) := \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

est une détermination du logarithme sur U.

Preuve:
La série entière ci-dessus a pour rayon de convergence 1 et comme nous l'avons déjà observé, sa dérivée est $f'(z) = 1/z$ en particulier $f'(t) = 1/t$ pour $t \in]0,2[= D(1,1) \cap \mathbb{R}_+^*$ et comme $f(1) = 0$ on en déduit que f coïncide sur $]0,2[$ avec le logarithme népérien et donc $e^{f(t)} = t$ pour tout $t \in]0,2[$. En vertu du théorème 3.1, la fonction $e^{f(z)} - z$ est analytique sur $D(1,1)$ et s'annule sur le segment $]0,2[$ et donc sur tout $D(1,1)$ en vertu du principe du prolongement analytique on a donc $e^{f(z)} = z$ pour tout $z \in D(1,1)$: f est une détermination du logarithme sur $D(1,1)$. $\square$

Corollaire 3.2 *Soit $z_0 = |z_0|e^{i\theta_0} \in \mathbb{C}^*$, alors sur $U := D(z_0, |z_0|)$ la somme de la série*

$$g(z) := \log(|z_0|) + i\theta_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Big(\frac{z-z_0}{z_0}\Big)^n$$

définit une détermination <u>analytique</u> du logarithme.

Preuve:
Notant f la fonction donnée au théorème 3.4, pour $z \in D(z_0, |z_0|)$ on a $z/z_0 \in D(1,1)$ et

$$g(z) = \log(|z_0|) + i\theta_0 + f\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

et donc

$$e^{g(z)} = |z_0|e^{i\theta_0} \exp\left(f\left(\frac{z}{z_0}\right)\right) = z_0 \frac{z}{z_0} = z.$$

□

Notant qu'avec (3.1), on a $g'(z) = 1/z$, on en déduit le théorème suivant (qui implique en particulier la proposition 2.5 que nous avions admise au chapitre précédent) :

Théorème 3.5 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$, si f est une détermination du logarithme sur U, alors f est analytique sur U et $f'(z) = 1/z$ pour tout $z \in U$.*

Preuve:
Soit $z_0 \in U$, $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$ et $r < |z_0|$ et soit g la fonction analytique définie au corollaire 3.2 alors en vertu du lemme 2.3, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f = g + 2in\pi$ sur $D(z_0, r)$ et donc f est analytique sur $D(z_0, r)$ et $f'(z) = g'(z) = 1/z$ pour tout $z \in D(z_0, r)$. Comme z_0 est arbitraire, on en déduit le résultat voulu.

□

3.3 Théorème du module maximal et conséquences

Lemme 3.1 *Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $r > 0$, non constante (i.e. non réduite à a_0). Alors, dans tout voisinage de 0 contenu dans $D(0, r)$ il existe un z tel que $|f(z)| > |f(0)|$. Si en outre $f(0) = a_0 \neq 0$, alors, dans tout voisinage de 0 contenu dans $D(0, r)$ il existe un z tel que $|f(z)| < |f(0)|$.*

Preuve:
Montrons la première propriété. Si $f(0) = a_0 = 0$ alors d'après le principe des zéros isolés, il existe un voisinage de 0 sur lequel f ne s'annule qu'en 0 et donc $|f| > |f(0)|$ sur ce voisinage. Si $a_0 \neq 0$ quitte à remplacer f par f/a_0 nous pouvons supposer que $a_0 = 1$. Par hypothèse, il existe $n \geq 1$ tel que $a_n \neq 0$, soit n_0 le plus petit entier supérieur ou égal à 1 pour lequel $a_n \neq 0$. On peut alors écrire $f(z) = 1 + a_{n_0} z^{n_0}(1 + g(z))$ avec g série entière nulle en 0 et donc $f(\rho e^{i\theta}) = 1 + a_{n_0} \rho^{n_0} e^{in_0\theta}(1 + g(\rho e^{i\theta}))$, on choisit alors θ tel que

$e^{in_0\theta} = \overline{a_{n_0}}/|a_{n_0}|$ et $\rho > 0$ suffisamment petit pour que $|g| \leq 1/2$ sur $D(0,\rho)$ de sorte que

$$f(\rho e^{i\theta}) = 1 + |a_{n_0}|\rho^{n_0}(1 + g(\rho e^{i\theta}))$$

et donc

$$|f(\rho e^{i\theta})| \geq 1 + |a_{n_0}|\rho^{n_0}(1 - |g(e^{i\theta})|) \geq 1 + \frac{|a_{n_0}|\rho^{n_0}}{2} > 1 = |f(0)|.$$

La preuve de la deuxième propriété est similaire.

□

Théorème 3.6 (Théorème du module maximal) *Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ et f analytique sur U, si $|f|$ possède un point de maximum local alors f est constante sur U.*

Preuve:

Supposons f non constante et que $|f|$ présente un maximum local en z_0, quitte à effectuer une translation sur la variable nous pouvons supposer que $z_0 = 0$ et développant f en série entière en $z_0 = 0$ on obtient une série non constante (sans quoi f serait constante au voisinage de 0 et donc partout en vertu du principe du prolongement analytique). Le lemme précédent fournit la contradiction recherchée. □

De même on a :

Théorème 3.7 (Théorème du module minimal) *Si f est analytique et non constante sur le domaine U alors tout point de minimum local de $|f|$ est un zéro de f.*

Preuve:

Si $|f|$ atteint un minimum local en un point (qu'à nouveau nous prenons égal à 0) et que $f(0) \neq 0$, la seconde partie du lemme 3.1 fournit la contradiction recherchée.

□

Comme application du théorème du module minimal, nous pouvons déduire une démonstration très rapide du théorème de d'Alembert-Gauss : soit en effet P un polynôme (en particulier P est analytique) non constant alors comme $|P(z)| \to \infty$ quand $|z| \to \infty$, $|P|$ atteint son minimum (global sur $\mathbb{C}$) en un point z_0, le principe du module minimal implique que nécessairement $P(z_0) = 0$.

Chapitre 4

Fonctions holomorphes, formules de Cauchy, primitives complexes

4.1 Définitions et propriétés premières

Nous avons vu au paragraphe 2.3 la notion de dérivabilité au sens complexe en un point ou sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Nous parlerons désormais d'holomorphie (essentiellement pour bien distinguer la notion de dérivabilité au sens complexe de la notion de dérivabilité au sens du calcul différentiel sur $\mathbb{R}^2$, nous verrons en effet tout au long de ce chapitre que la première notion est considérablement plus forte que la seconde).

Définition 4.1 *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ on dit que f est holomorphe sur U si f est dérivable (au sens complexe) sur U.*

Nous avons vu que les fonctions analytiques sont holomorphes et même que toutes leurs dérivées le sont. Nous verrons ultérieurement un résultat extrêmement fort exprimant que réciproquement toute fonction holomorphe est analytique.

Comme dans le cas réel, on a des règles de calcul de dérivées dont nous laissons la preuve (identique en tout point au cas réel !) au lecteur :

Proposition 4.1 *Soit U et V deux ouverts non vides de $\mathbb{C}$,*

- *si f et g sont holomorphes sur U et $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda f + g$ est holomorphe sur U et $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$,*

- *si f et g sont holomorphes sur U alors le produit fg est holomorphe sur U et $(fg)' = f'g + fg'$,*

- *si f est holomorphe sur U et à valeurs dans V et g est holomorphe sur V alors $g \circ f$ est holomorphe sur V et $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$ pour tout $z \in U$*

- *soit a et b réels avec $a < b$, si la courbe $\gamma :]a, b[\to \mathbb{C}$ est dérivable (au sens où sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont en tant que fonctions d'une variable réelle) en $t \in]a, b[$ et si f est dérivable (au sens complexe) au point $\gamma(t)$ alors $f \circ \gamma$ est dérivable (au sens réel) en t et $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$.*

On vérifie sans peine que $1/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et que sa dérivée est $-1/z^2$ de sorte que si f est dérivable en z_0 et $f(z_0)$ alors $1/f$ est dérivable en z_0 et

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}$$

et si g est dérivable en z_0 alors g/f aussi et

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(z_0) = \frac{g'(z_0)f(z_0) - f'(z_0)g(z_0)}{f(z_0)^2}.$$

4.2 Les relations de Cauchy-Riemann

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$, $z_0 \in U$ et supposons que f soit dérivable en z_0. Revenant aux réels en notant la variable $z = x + iy$ et la fonction $f = u + iv$ ($u := \mathrm{Re}(f)$, $\quad v := \mathrm{Im}(f)$) on peut voir f comme une fonction de deux variables $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 4.2 *Sous les hypothèses et notations précédentes et notant $z_0 = x_0 + iy_0$ on a :*

1. *u et v sont dérivables en (x_0, y_0),*

2. *$\partial_x u(x_0, y_0) = \partial_y v(x_0, y_0) = \mathrm{Re}(f'(z_0))$, et $\partial_y u(x_0, y_0) = -\partial_x v(x_0, y_0) = -\mathrm{Im}(f'(z_0))$*

Ainsi si $f = u + iv$ est holomorphe sur l'ouvert U, u est v sont dérivables et vérifient les relations de Cauchy-Riemann

$$\partial_x u = \partial_y v, \ \partial_y u = -\partial_x u \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x + iy) \in U. \tag{4.1}$$

Preuve:
Pour $z = x + iy$ tel que $z + z_0 \in U$ notant $f'(z_0) = \alpha + i\beta$ on a

$$\begin{aligned} f(z_0 + z) &= u(x_0 + x, y_0 + y) + iv(x_0 + x, y_0 + y) \\ &= f(z_0) + f'(z_0)z + o(z) \\ &= u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + (\alpha + i\beta)(x + iy) + o(x, y) \\ &= (u(x_0, y_0) + \alpha x - \beta y) + i(v(x_0, y_0) + \beta x + \alpha y) + o(x, y) \end{aligned}$$

et donc

$$u(x_0 + x, y_0 + y) = u(x_0, y_0) + \alpha x - \beta y + o(x, y)$$

ce qui signifie que u est dérivable en (x_0, y_0) et

$$\partial_x u(x_0, y_0) = \alpha = \mathrm{Re}(f'(z_0)),\ \partial_y u(x_0, y_0) = -\beta = -\mathrm{Im}(f'(z_0))$$

et de même

$$v(x_0 + x, y_0 + y) = v(x_0, y_0) + \beta x + \alpha y + o(x, y)$$

ce qui signifie que v est dérivable en (x_0, y_0) et

$$\partial_x v(x_0, y_0) = \beta = \mathrm{Im}(f'(z_0)),\ \partial_y v(x_0, y_0) = \alpha = \mathrm{Re}(f'(z_0))$$

d'où les relations de Cauchy-Riemann :

$$\partial_x u = \partial_y v \text{ et } \partial_y u = -\partial_x v.$$

□

Le lecteur averti se dira sans doute qu'on aurait (quasiment) pu se passer de tout calcul en notant que la différentiabilité au sens complexe de f implique non seulement la différentiabilité de (u, v) mais aussi le fait que la matrice Jacobienne

$$J_{u,v} = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$$

représente une similitude (multiplication par un complexe !) et donc est de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

ce qui est une manière plus directe et géométrique de retrouver les relations de Cauchy-Riemann.

On notera également que la conjugaison $z = (x + iy) \mapsto \bar{z} = x - iy$ est l'achétype de la fonction qui vue comme une application (linéaire !) de $\mathbb{R}^2$ est

C^∞ mais n'est pas dérivable au sens complexe en effet sa différentielle n'est pas une matrice de similitude.

Comme déja évoqué plus haut nous verrons ultérieurement que si $f = u + iv$ est holomorphe alors elle est analytique et donc en particulier u et v sont de classe C^2, le laplacien de u est alors défini par

$$\Delta u := \partial^2_{xx} u + \partial^2_{yy} u$$

et avec les relations de Cauchy-Riemann et le théorème de symétrie de Schwarz, il vient que

$$\Delta u = \partial_x(\partial_y v) + \partial_y(-\partial_x v) = 0$$

de sorte que le laplacien de u est nulle, on dit que u est harmonique. Le même calcul montre que la partie imaginaire v de f est également harmonique. Ainsi la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe sont harmoniques. Cependant si u et v sont harmoniques, $u+iv$ n'est pas nécessairement holomorphe (car u et v ne vérifient alors pas nécessairement les relations de Cauchy-Riemann, considérer à nouveau l'exemple de la conjugaison).

Voici une autre conséquence facile de la proposition 4.2 :

Proposition 4.3 *Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur U, alors :*

1. *si $f' = 0$ sur U, f est constante sur U,*
2. *si $\mathrm{Re}(f)$ (ou $\mathrm{Im}(f)$) est constante sur U alors f aussi.*

Preuve:
Notons à nouveau $f = u + iv$. 1. Si $f' = 0$ alors $\nabla u = 0$ et $\nabla v = 0$ sur U ce qui implique comme U est connexe que u et v sont constantes sur U. 2. Si $\nabla u = 0$ alors les relations de Cauchy-Riemann impliquent que $\nabla v = 0$ et on conclut comme précédemment.

□

Noter que sur un domaine de $\mathbb{C}$ si on connait la partie réelle (resp. sa partie imaginaire) d'une fonction holomorphe alors on connait aussi sa partie imaginaire (resp. sa partie réelle) à une constante près (on a déjà sans doute abusé du terme rigidité dans ce qui précède mais là encore...).

4.3 Intégrales le long de chemins, indice

Nous appellerons chemin continu (ou simplement chemin) toute application continue γ définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ ($a \le b$) à valeurs dans $\mathbb{C}$, pour $t \in [a, b]$ nous noterons $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ (ou simplement $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ en identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$) nous noterons Γ l'image de γ i.e. $\Gamma := \{\gamma(t),\ t \in [a, b]\}$ noter que Γ est compact et connexe. Nous dirons que le chemin γ est fermé si son origine et son extrémité sont égales i.e. $\gamma(a) = \gamma(b)$. Noter que γ n'est pas déterminé par Γ car γ contient aussi l'information sur le paramétrage de Γ (par exemple si $\gamma(t) = e^{2ik\pi t}$, pour $t \in [0, 1]$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\Gamma = S^1$ indépendamment de k alors que le signe de k nous dit dans quel sens tourne γ et $|k|$ nous dit combien γ fait de tours).

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et γ est un chemin, on dira que γ est un chemin dans U si $\Gamma \subset U$. Si $\gamma : [a, b] \to U$ est continu (U est toujours supposé ouvert) et en notant pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$d(z, \Gamma) := \inf_{z' \in \Gamma} |z - z'|$$

il est facile de voir (petit exercice sur la compacité...) qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\{z \in \mathbb{C} \ :\ d(z, \Gamma) \le \varepsilon\} \subset U$.

Nous manipulerons par la suite essentiellement des chemins C^1 par morceaux,

Définition 4.2 *Le chemin $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est dit C^1 par morceaux s'il existe une subdivsion $a_0 = a < a_1 \dots a_{k-1} < a_k = b$ telle que la restriction de γ à chaque intervalle $[a_{j-1}, a_j]$ soit de classe C^1.*

On définit alors l'équivalence entre chemin C^1-par morceaux

Définition 4.3 *Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ et $\theta : [c, d] \to \mathbb{C}$ deux chemins C^1 par morceaux, on dit que γ et θ sont équivalents (respectivement opposés) s'il existe un C^1 difféomorphisme croissant (resp. décroissant) φ de $[c, d]$ sur $[a, b]$ tel que $\theta = \gamma \circ \varphi$.*

Si deux chemins sont équivalents ou opposés, ils ont évidemment la même image Γ, s'ils sont équivalents Γ est parcouru avec la même orientation, s'ils sont opposés le sens de parcours est inversé, noter que $t \mapsto \gamma(a + b - t)$ est opposé à γ. Par exemple $t \mapsto e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ et $t \mapsto e^{2i\pi t}$, $t \in [0, 1]$ sont équivalents et $t \mapsto e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ et $t \mapsto e^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$ sont opposés. Les chemins $t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it}$ et $t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{2it}$ ne sont pas équivalents car le premier est un paramétrage injectif de S^1 tandis que le second passe deux fois par chaque point de S^1.

Nous pouvons maintenant définir l'intégrale d'une fonction complexe le long d'un chemin comme suit :

Définition 4.4 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin C^1 par morceaux dans U et f continue $U \to \mathbb{C}$, on définit l'intégrale de f le long du chemin γ et l'on note $\int_\gamma f(z)dz$ le nombre complexe*

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Cette intégrale a bien un sens puisque γ' est continue par morceaux plus précisément avec les notations de la définition 4.3 :

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Evidemment $\int_\gamma f(z)dz$ est linéaire par rapport à f.

Remarquons maintenant que si l'on note $L(\gamma)$ la longueur de $\gamma = x + iy$:

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

on a l'inégalité de base

$$|\int_\gamma f(z)dz| \leq \sup_\Gamma |f| L(\gamma)$$

dont on déduit immédiatement

Lemme 4.1 *Si f_n est une suite de fonctions continues sur U et si f_n converge uniformément vers f sur tout compact de U alors*

$$\int_\gamma f_n(z)dz \to \int_\gamma f(z)dz.$$

Supposons que $\gamma = x + iy$ et $\theta = u + iv$ soient équivalents : $\theta = \gamma \circ \varphi$ (i.e. $u = x \circ \varphi$, $v = y \circ \varphi$) avec φ difféomorpshisme croissant de $[c,d]$ sur $[a,b]$, notant $f = g + ih$ alors on a

$$\begin{aligned}\int_\theta f(z)dz &= \int_c^d f(\theta(t))\theta'(t)dt \\ &= \int_c^d [(g(\theta(t))u'(t) - h(\theta(t))v'(t)) + i(g(\theta(t))v'(t) + h(\theta(t))u'(t))]dt\end{aligned}$$

en utilisant $\theta = \gamma \circ \varphi$, $u'(t) = x'(\varphi(t))\varphi'(t)$ et le changement de variable $s = \varphi(t)$ il vient que la première intégrale vaut

$$\int_c^d g(\gamma \circ \varphi(t))x'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b g(\gamma(s))x'(s)ds$$

traitant les trois autres intégrales de la même manière il vient que

$$\int_\theta f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$$

et donc la valeur de l'intégrale est inchangée entre deux chemins équivalents. De la même manière si γ et θ sont opposés on a

$$\int_\theta f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

Notons également que si les chemins $\gamma_1 : [a,b] \to U$, $\gamma_2 : [b,c] \to U$ vérifient $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ et si l'on définit γ en "collant" γ_1 à γ_2 (i.e. $\gamma : [a,c] \to U$, $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ si $t \in [a,b]$ et $\gamma(t) = \gamma_2(t)$ si $t \in [b,c]$) on a une relation similaire à la relation de Chasles dans le cas réel :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Passons maintenant à quelques exemples basiques. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ le paramétrage direct du cercle de centre z_0 et de rayon r et calculons $\int_\gamma dz/(z - z_0)$:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}dt = 2i\pi.$$

si maintenant on considère $\gamma_n(t) = z_0 + re^{int}$, $t \in [0, 2\pi]$ avec $n \in \mathbb{Z}$ le même calcul donne

$$\int_{\gamma_n} \frac{dz}{z - z_0} = 2in\pi.$$

Soit $\gamma = (x, y)$ C^1 par morceaux et fermée, $[a,b] \to \mathbb{C}$, on a

$$\int_\gamma dz = \gamma(b) - \gamma(a) = 0$$

et

$$\begin{aligned}\int_\gamma zdz &= \int_a^b [(xx' - yy') + i(xy' + x'y)]dt \\ &= \frac{1}{2}(x^2(b) - x^2(a) - y^2(b) + y^2(a)) + i(x(b)y(b) - x(a)y(a)) = 0\end{aligned}$$

Soit z_0 et z_1 deux complexes et $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$ le paramétrage linéaire du segment $[z_0, z_1]$, on a alors

$$\int_{[z_0,z_1]} e^z dz = \int_\gamma e^z dz = \int_0^1 e^{(1-t)z_0+tz_1}(z_1 - z_0)dt = e^{z_0}(z_1 - z_0)\int_0^1 e^{t(z_1-z_0)}dt$$

et nous avons très envie d'écrire que pour $z \in \mathbb{C}$ l'intégrale $\int_0^1 e^{tz}dt$ vaut $\frac{1}{z}(e^z - 1)$. Pour justifier cela, on peut soit faire un calcul direct (poser $z = x + iy$ et calculer $\int_0^1 e^{tx}\cos(ty)dt$ et $\int_0^1 e^{tx}\cos(ty)dt$ en intégrant par parties) soit observer que, par convergence normale, en intégrant terme à terme, on a

$$\int_0^1 e^{tz}dt = \int_0^1 \Big(\sum_{n\geq 0} \frac{t^n z^n}{n!}\Big)dt = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{(n+1)!} = \frac{1}{z}(e^z - 1)$$

(on peut aussi se passer de calcul en invoquant le théorème du prolongement analytique). On obtient finalement

$$\int_{[z_0,z_1]} e^z dz = e^{z_0}(e^{(z_1-z_0)} - 1) = e^{z_1} - e^{z_0}.$$

Si maintenant γ est le bord du triangle de sommets z_0, z_1, z_2 (on laisse au lecteur le soin d'écrire le paramétrage s'il le souhaite...) on a

$$\int_\gamma e^z dz = e^{z_1} - e^{z_0} + e^{z_2} - e^{z_1} + e^{z_0} - e^{z_2} = 0.$$

Une notion fondamentale est celle d'indice d'un chemin fermé par rapport à un point :

Définition 4.5 *Soit γ un chemin C^1 par morceaux fermé d'image Γ et $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, on appelle indice de z_0 le nombre :*

$$I_\gamma(z_0) := \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

Nous avons déjà calculé $I_\gamma(z_0)$ lorsque $\gamma(t) = z_0 + re^{int}$, $t \in [0, 2\pi]$ dans ce cas, nous avons vu que :

$$I_\gamma(z_0) = n.$$

Il est facile de voir (intégrale dépendant d'un paramètre) que $z_0 \mapsto I_\gamma(z_0)$ est continue sur $\mathbb{C}\setminus\Gamma$. Une propriété remarquable est que l'indice est toujours un entier :

Théorème 4.1 *Soit γ un chemin C^1 par morceaux fermé d'image Γ et $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, alors $I_\gamma(z_0) \in \mathbb{Z}$.*

Preuve:
Par définition
$$I_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt$$
il s'agit de montrer que
$$\exp\Big(\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt\Big) = 1$$
pour $t \in [a, b]$ posons donc
$$\varphi(t) := \exp\Big(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds\Big)$$
il s'agit d'une fonction C^1 par morceaux qui ne s'annule pas et dont la dérivée est
$$\varphi'(t) = \varphi(t) \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}$$
ce qui signifie que $\varphi(t)/(\gamma(t) - z_0)$ est constante et donc comme $\gamma(b) = \gamma(a)$, on a
$$\varphi(b) = \varphi(a) = 1.$$
□

Pour rendre le résultat qui précède réellement intéressant, il nous faut parler des *composante connexes* de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ (qui est ouvert). Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, et C_z l'ensemble de tous les points de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ que l'on peut joindre à z par un chemin dans $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, on vérifie alors facilement que

- C_z est connexe par arcs donc connexe,
- C_z est ouvert et contenu dans $\mathbb{C} \setminus \Gamma$,
- si $z' \in C_z$, $C_z = C_{z'}$,
- C_z est maximal : si C est un ouvert connexe (donc connexe par arcs au vu du théorème 1.6) inclus dans $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ et contenant z alors $C \subset C_z$.

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, l'ensemble C_z s'appelle la composante connexe de z dans $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, deux points z et z' sont dits connectés lorsque $C_z = C_{z'}$, il s'agit dune relation d'équivalence sur $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, les classes d'équivalence de cette relation s'appellent les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ forment ainsi une partition de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ en sous-ensembles connexes ouverts (maximaux pour l'inclusion). On a aussi :

Proposition 4.4 $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ *possède une et une seule composante connexe non bornée.*

Preuve:
Soit $R > 0$ tel que $\Gamma \subset \bar{D}(0, R)$, et $|z| > R$, alors $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ et comme $\mathbb{C} \setminus \bar{D}(0, R)$ est connexe et inclus dans $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, la composante connexe $C := C_z$ contient $\mathbb{C} \setminus \bar{D}(0, R)$. Si z' était dans une autre composante connexe non bornée que C_z, il existerait $z'' \in C_{z'}$ tel que $|z''| > R$ et on aurait alors $z'' \in C_z$ et donc $C_{z''} = C_{z'} = C_z$ ce qui constitue la contradiction recherchée.
□

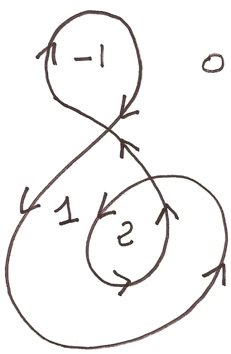
Théorème 4.2 *La fonction $z \mapsto I_\gamma(z)$ est à valeurs entières, elle est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ et nulle sur sa composante connexe non bornée.*

Preuve:
Le fait que I_γ soit constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ découle de sa continuité, du fait qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et que les composantes connexes sont connexes. Pour voir que $I_\gamma = 0$ sur la composante connexe non bornée il suffit d'observer que $I_\gamma(z)$ tend vers 0 quand $|z| \to \infty$.
□

On pourra retenir qu'intuitivement $I_\gamma(z)$ représente le nombre de tours que fait γ autour de z, en effet on peut voir que c'est $\frac{1}{2\pi}$ fois la variation de l'argument de $\gamma(t) - z_0$ entre a et b. La figure ci-dessous illustre le résultat précédent dans le cas d'un chemin simple (i.e. sans boucle)

Courbes simples

Voici un exemple plus compliqué avec des boucles



4.4 Primitives complexes

Comme nous disposons d'une notion de dérivabilité complexe, il est naturel de chercher à réaliser l'opération inverse c'est-à dire à chercher des primitives complexes (une primitive de f étant bien entendu une fonction holomorphe g telle que $g' = f$). C'est ce que l'on appelle un problème d'intégration [1]. Pour les fonctions d'une variable réelle, le problème est bien compris : une primitive de f (disons continue) s'obtient en considérant l'intégrale $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f$ où x_0 est fixé, d'une certaine manière, nous suivrons une stratégie un peu similaire dans le cas complexe en considérant l'intégrale de f le long d'un chemin joignant z_0 (fixé) à z. Cependant, la situation ne peut pas être aussi simple que dans le cas réel. Considérons en effet la fonction $f(z) = 1/z$, nous savons que cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ mais elle ne peut admettre de primitive sur $\mathbb{C}^*$, en effet si g était une telle primitive alors en notant g_0 la détermination principale du logarithme (cf. proposition 2.4) comme $g' - g_0' = 0$ sur U_π qui est connexe, on devrait avoir $g = g_0 + \lambda$ sur U_π où λ est une constante complexe et donc $\exp(g(z) - \lambda) = z$ pour tout $z \in U_\pi$ et donc aussi par continuité $\exp(g(z) - \lambda) = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ ce qui est contradictoire avec le fait qu'il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$. Bref, $1/z$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$. En revanche pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$, nous savons qu'il existe une détermination du logarithme qui est analytique sur $D(z_0, |z_0|)$ et donc $1/z$ admet une primitive au voisinage de chaque point de $\mathbb{C}^*$. Il faut donc distinguer le fait d'avoir une primitive localement et globalement, d'où la définition suivante :

Définition 4.6 *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f continue $U \to \mathbb{C}$, on dit que :*

1. *f admet une primitive globalement sur U s'il existe g holomorphe sur U telle que $f' = g$ sur U,*
2. *f admet une primitive localement sur U si pour tout $z \in U$, il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset U$ et g holomorphe sur $D(z, r)$ telle que $g' = f$ sur $D(z, r)$.*

---

[1] Un autre problème basique d'intégration consiste à déterminer quand une application $F = (F_1, ..., F_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme un gradient $F = \nabla f$; en redérivant et en appliquant le théorème de symétrie de Schwarz, on voit immédiatement qu'une condition nécessaire est que la Jacobienne de F soit symétrique, le fait que cela soit suffisant est un lemme classique de Poincaré (que vous devriez être capable de démontrer sans difficulté après avoir lu ce qui suit...)

Notons un cas où trouver globalement une primitive est évident : celui d'une série entière $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon infini, il est clair dans ce cas que la série entière obtenue en intégrant terme à terme

$$g(z) := \sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

est aussi de rayon infini et que c'est une primitive de f globalement sur $\mathbb{C}$. Le même argument montre évidemment qu'une fonction analytique possède localement des primitives (et comme nous le verrons plus tard, l'analyticité des fonctions holomorphes entrainera donc que les fonctions holomorphes admettent toujours localement des primitives) .

Un premier critère d'intégrabilité globale (noter l'hypothèse de connexité) nous est fourni par le :

Théorème 4.3 *Soit U un domaine et $f : U \to \mathbb{C}$ continue, on a équivalence entre :*

1. *f admet une primitive globalement sur U,*
2. *pour tout chemin C^1 par morceaux et fermé γ dans U, $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

Preuve:

Supposons d'abord que $f = g'$ avec g holomorphe sur U, alors pour tout chemin C^1 par morceaux $\gamma : [a, b] \to U$, on a

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b g'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

et donc cette intégrale est nulle dès que γ est fermé.

Supposons maintenant que 2 est satisfaite. Soit z_0 et z_1 dans U et γ_0 et γ_1 deux chemins C^1 par morceaux[2] joignant z_0 à z_1 et γ le chemin obtenu en collant γ_0 au chemin opposé à γ_1, γ étant fermé, on a

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 = \int_{\gamma_0} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

[2]Nous savons que z_0 et z_1 peuvent être joints par un chemin γ dans U car U est connexe par arcs, le fait qu'ils puissent être joints par un chemin de classe C^1 dans U se fait par régularisation : il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\|\gamma_\varepsilon - \gamma\|_\infty \leq \varepsilon$ alors γ_ε est dans U, et ensuite on note (densité des fonctions C^1, et même C^∞ dans les fonctions continues) qu'il existe γ_ε de classe C^1 ayant cette propriété.

ainsi $\int_\gamma f(z)dz$ est une quantité qui ne dépend que de l'origine z_0 et de l'extrémité z_1 de γ, notons $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$ la valeur commune de ces intégrales et posons $g(z) := \int_{z_0}^{z} f(z)dz$ pour tout $z \in U$. Soit $z \in U$, $r > 0$ tel que $D(z,r) \subset U$ et $h \in D(0,r)$, comme le segment $[z, z+h]$ est inclus dans U on a

$$g(z+h) - g(z) = \int_{[z,z+h]} f(\xi)d\xi.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme f est continue, il existe $\delta < r$ tel que $\sup_{D(z,\delta)} |f - f(z)| \leq \varepsilon$ et donc si $|h| \leq \delta$,

$$|g(z+h) - g(z) - f(z)h| \leq \int_{[z,z+h]} |f(\xi) - f(z)| d\xi \leq |h|\varepsilon$$

ce qui montre que g est dérivable en z et $g'(z) = f(z)$ et donc que g est une primitive de f sur U.

□

Dans le cas d'un domaine convexe, il suffit de prendre comme chemins fermés dans le théorème précédent le bord des triangles inclus dans U :

Proposition 4.5 *Soit U un ouvert convexe Soit U un domaine et $f : U \to \mathbb{C}$ continue, on a équivalence entre :*

1. *f admet une primitive globalement sur U,*
2. *pour tout triangle T inclus dans U, $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.*

Preuve:

Seule l'implication $2 \Rightarrow 1$ est à montrer, supposons donc que 2 est satisfaite et fixons $z_0 \in U$ et posons pour tout $z \in U$, $g(z) := \int_{[z_0,z]} f(\xi)d\xi$, soit $z \in U$ et $h \in \mathbb{C}$ tel que $z + h \in U$, alors l'intégrale de f le long du bord du triangle de sommets z_0, z, $z+h$ (inclus dans U par convexité) est nulle de sorte que

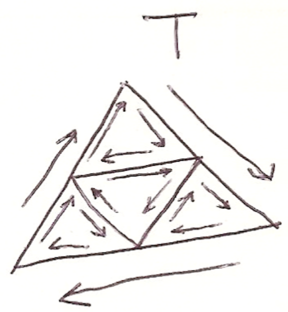
$$g(z+h) - g(z) = \int_{[z,z+h]} f(\xi)d\xi$$

ce dont on conclut facilement comme dans la preuve précédente que g est holomorphe et $g' = f$ sur U.

□

Théorème 4.4 (Théorème de Goursat) *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur U alors pour tout triangle T inclus dans U, $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.*

Preuve:
Soit donc T un triangle inclus dans U (et dont on a choisi une orientation du bord) et on pose $I := \int_{\partial T} f(z)dz$, on subdivise alors T en quatre triangles dont les sommets sont les milieux des côtés de T et dont on oriente le bord comme dans la figure ci dessous.



Il est alors facile de voir que I est la somme des intégrales de f le long du bord (orienté comme dans la figure) de ce ces quatre triangles. Ainsi il existe un de ces quatre triangles que nous noterons T_1 pour lequel

$$|\int_{\partial T_1} f(z)dz| \geq \frac{|I|}{4}.$$

Itérant ce procédé on construit une suite emboitée de triangles T_n vérifiant

$$|\int_{\partial T_n} f(z)dz| \geq \frac{|I|}{4^n}, L(\partial T_n) = \frac{L(\partial T)}{2^n}. \tag{4.2}$$

comme les T_n (que l'on va prendre fermés) forment une suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers 0, leur intersection est réduite à un point z_0. Soit $\varepsilon > 0$, comme f est holomorphe en z_0, il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$ et pour tout $z \in D(z_0, r)$ on a $|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|$. Par ailleurs nous avons vu que l'intégrale de z et des constantes le long de courbes fermées est nulle et donc

$$\int_{\partial T_n} f(z)dz = \int_{\partial T_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))dz.$$

Choisissant n assez grand pour que $T_n \subset D(z_0, r)$ on a donc

$$|\int_{\partial T_n} f(z)dz| \leq \varepsilon L(\partial T_n) \sup_{z \in \partial T_n} |z - z_0|$$

on utilise ensuite le fait que pour $z \in \partial T_n$, $|z - z_0|$ est majorée par le périmètre $L(\partial T_n) = 2^{-n} L(\partial T)$ pour obtenir que

$$|\int_{\partial T_n} f(z)dz| \leq \varepsilon \frac{L(\partial T)^2}{4^n}$$

et donc avec (4.2)

$$|I| \leq \varepsilon L(\partial T)^2$$

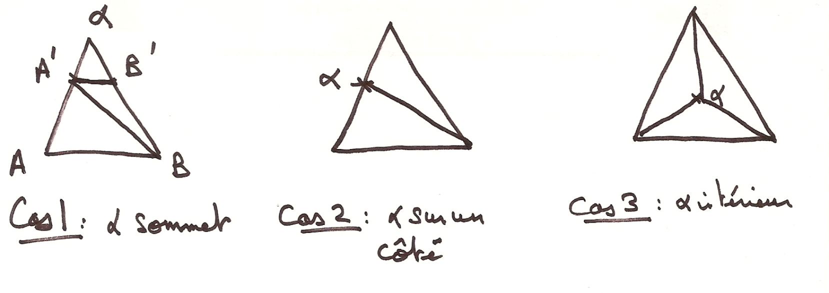
et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire on a bien $I = 0$.

□

Une extension[3] du théorème de Goursat qui nous sera utile pour établir la formule de Cauchy est donnée par :

Théorème 4.5 (Extension du théorème de Goursat) *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $\alpha \in U$ et f continue sur U et holomorphe sur $U \setminus \{\alpha\}$, alors pour tout triangle T inclus dans U, $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.*

Preuve:
Seul le cas où $\alpha \in T$ est à considérer. Considérons tout d'abord le cas où α est un sommet de $T = \alpha AB$, on considère alors les points A' et B' comme sur la figure ci-dessous et on note que par le théorème de Goursat l'intégrale de f le long des bords (convenablement orientés) des triangles $A'AB$ et $A'B'B$ est nulle et donc $\int_{\partial T} f(z)dz$ est égale à l' intégrale de f le long du bord de $\alpha A'B'$ et cette dernière tend vers 0 quand $A' \to \alpha$, $B' \to B$ car le périmètre de $\alpha A'B'$ tend alors vers 0 et f est continue en α donc $|f|$ est majorée au voisinage de α. Dans le cas où α est sur un côté ou à l'intérieur du triangle on se ramène au cas précédent en découpant T comme sur la figure-ci dessous.



□

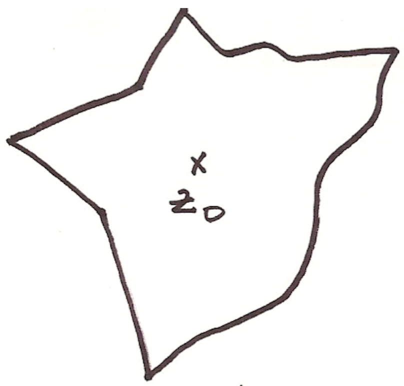
On déduit immédiatement (et sans utiliser l'analyticité des fonctions holomorphes) du théorème de Goursat, de la proposition 4.5 et du fait que les disques sont convexes :

Corollaire 4.1 *Si f est holomorphe sur l'ouvert non vide U (ou seulement continue sur U et holomorphe sur U privé d'un point), alors f admet localement une primitive sur U. Si en outre U est convexe, f admet globalement une primitive sur U.*

[3] qui n'est qu'apparente car nous verrons qu'une fonction continue sur U et holomorphe sur U privé d'un point est en fait nécessairement holomorphe sur U.

On peut affaiblir un peu l'hypothèse de convexité dans l'énoncé précédent

Définition 4.7 *Soit $A \subset \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$, on dit que A est étoilé par rapport à z_0 si pour tout $z \in A$, le segment $[z_0, z]$ est inclus dans A. On dit que A est étoilé s'il est étoilé par rapport à l'un de ses points.*



Ensemble étoilé

Remarquons qu'un ensemble étoilé est connexe par arcs, les ensembles convexes sont étoilés (par rapport à chacun de leur point !) et que $\mathbb{C}^*$ n'est pas étoilé (mais que $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ l'est). Sur un ouvert étoilé[4], la question de l'intégrabilité des fonctions holomorphes est résolue par :

Théorème 4.6 *Soit U un ouvert étoilé non vide de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur U, alors f admet une primitive globalement sur U.*

Preuve:
Soit $z_0 \in U$ par rapport auquel U est étoilé. Comme précédemment on pose $g(z) := \int_{[z_0,z]} f(\xi)d\xi$ pour tout $z \in U$ et il s'agit de montrer que g est holomorphe et que $g' = f$. Soit $z \in U$ et $r > 0$ tel que $D(z,r) \subset U$ alors pour tout $h \in D(0,r)$, le triangle T de sommets z_0, z et $z+h$ est inclus dans U (ceci résulte du fait que $[z, z+h] \subset U$ et U est étoilé par rapport à z_0). Il résulte du théorème de Goursat que $\int_{\partial T} f(\xi)d\xi = 0$ et on achève la démonstration exactement comme celle de la proposition 4.5.

□

[4]en réalité, ce n'est encore pas l'hypothèse optimale qui est celle de simple connexité de U, en gros, un ensemble simplement connexe est un ensemble qui n'a pas de trou, voir par exemple [2].

4.5 Théorème de Cauchy et analyticité des fonctions holomorphes

Nous allons voir maintenant un résultat essentiel dû à Cauchy qui montre que les fonctions holomorphes sont analytiques (ce qui est très fort : une information sur une différentiabilité d'ordre un implique une propriété encore plus forte que la différentiabilité à tout ordre) et en plus que leur développement en série est donné par le calcul d'intégrales sur des sphères.

Un premier résultat très important est la formule de Cauchy

Théorème 4.7 (Formule de Cauchy) *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, f holomorphe sur $D(z_0, r)$ alors pour tout chemin C^1 par morceaux et fermé γ dans $D(z_0, r)$ tel que $z_0 \notin \Gamma$ on a :*

$$f(z_0)I_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz.$$

Preuve:
Pour $z \in D(z_0, r)$ soit

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

de sorte que g est continue sur $D(z_0, r)$ et holomorphe sur $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ et donc il résulte de l'extension du théorème de Goursat et de la proposition 4.5 que g possède une primitive sur $D(z_0, r)$ et donc que son intégrale le long de γ est nulle ce qui prouve la formule de Cauchy. □

Corollaire 4.2 *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, f holomorphe sur U, $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ et $\gamma(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, pour tout $z \in D(z_0, r)$ alors on a :*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)}{u - z}du$$

en particulier

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)}{u - z_0}du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt$$

Preuve:
Si $z \in D(z_0, r)$, z et z_0 sont dans la même composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ et donc $I_\gamma(z) = I_\gamma(z_0) = 1$ et donc la formule de Cauchy donne bien que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u-z} du.$$

□

Le théorème fondamental de ce chapitre est le suivant

Théorème 4.8 (Cauchy) *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur U alors f est analytique sur U. En outre si $z_0 \in U$, $R > 0$ est tel que $D(z_0, R) \subset U$ alors*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \ \forall z \in D(z_0, R)$$

où, en posant $\gamma_r(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, on a

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}} du = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-nit} dt$$

pour tout $r \in]0, R[$. En particulier on a

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}} du = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-nit} dt$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \in]0, R[$.

Preuve:
Soit $r \in]0, R[$ on a alors $\overline{D}(z_0, r) \subset U$, soit $z \in D(z_0, r)$, on a alors d'après le corollaire précédent

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u-z} du \tag{4.3}$$

on observe ensuite que pour $u \in \Gamma_r := \gamma_r([0, 2\pi]) = \partial D(z_0, r)$, $|z - z_0| < r = |u - z_0| = r$ et l'on a

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{(u-z_0)(1 - \frac{z-z_0}{u-z_0})} = \frac{1}{u-z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^n$$

et donc

$$\frac{f(u)}{u-z} = \frac{1}{u-z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^n f(u)$$

or si $u \in \Gamma_r$, on a

$$\Big|\Big(\frac{z-z_0}{u-z_0}\Big)^n f(u)\Big| \leq M_r\Big(\frac{|z-z_0|}{r}\Big)^n, \ M_r := \sup_{\Gamma_r}|f|$$

et donc comme $|z-z_0| < r$ la série de terme générale $u \mapsto (\frac{z-z_0}{u-z_0})^n f(u)$ converge normalement sur Γ_r de sorte que l'on peut intégrer terme à terme dans la formule de Cauchy (4.3)

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_{\gamma_r}\frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}du\Big)(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

avec

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}du = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{it})}{r^{n+1}e^{i(n+1)t}}ire^{it}dt \\ &= \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})e^{-int}dt \end{aligned}$$

ce qui prouve l'analyticité de f (noter que le rayon de convergence de $\sum a_n\xi^n$ est au moins r puisque $|a_n|r^n \leq M_r$).

□

Corollaire 4.3 (Inégalités de Cauchy) *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur U, $z_0 \in U$, $R > 0$ est tel que $D(z_0, R) \subset U$ alors pour tout $r \in]0, r[$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n}\sup_{t\in[0,2\pi]}|f(z_0+re^{it})| = \frac{n!}{r^n}\sup_{\partial D(z_0,r)}|f|.$$

Nous pouvons maintenant prouver très simplement le théorème 3.1 que nous avions admis au chapitre précédent :

Théorème 4.9 *Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$, $f : U \to V$ et $g : V \to \mathbb{C}$ si f est analytique sur U et g est analytique sur V alors $g \circ f$ est analytique sur U.*

Preuve:

Les hypothèses de l'énoncé assurent que $g \circ f$ est holomorphe sur U et donc analytique en vertu du théorème de Cauchy.

□

Théorème 4.10 (Liouville) *Toute fonction holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$ en entier est constante.*

Preuve:
Posant $M := \sup_{\mathbb{C}} |f|$ il résulte des inégalités de Cauchy et du fait que f est entière que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $r > 0$, on a

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$$

et donc en faisant tendre r vers $+\infty$ on en déduit que $f' = 0$ sur $\mathbb{C}$.
$\square$

Du théorème de Liouville, nous pouvons déduire une nouvelle démonstration (encore plus courte) du théorème de d'Alembert-Gauss, en effet si P était un polynôme non constant ne s'annulant pas alors $1/P$ serait une fonction holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$ et donc devrait être constante.

Théorème 4.11 (Théorème de Morera) *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ continue alors si f admet localement une primitive dans U, f est holomorphe sur U.*

Preuve:
Si f admet une primitive localement sur U, pour chaque $z_0 \in U$ il existe $r > 0$ et g holomorphe sur $D(z_0, r)$ telle que $g' = f$ sur $D(z_0, r)$. Il résulte du théorème de Cauchy que g est analytique donc $f = g'$ aussi, en particulier f est holomorphe.
$\square$

Théorème 4.12 *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $\alpha \in U$ et f continue sur U et holomorphe sur $U \setminus \{\alpha\}$ alors f est holomorphe sur U.*

Preuve:
Nous savons par le corollaire 4.1 que f admet localement une primitive sur U et donc on déduit du théorème de Morera que f est holomorphe sur U.
$\square$

A titre d'exercice permettant au lecteur de vérifier qu'il a bien assimilé le contenu de ce chapitre, on pourra montrer que dans le résultat précédent on peut affaiblir l'hypothèse "f continue sur U" en "f bornée au voisinage de α".

Chapitre 5

Fonctions méromorphes, singularité et résidus

5.1 Séries de Laurent

Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$ on note $C(z_0, R_1, R_2)$ la couronne

$$C(z_0, R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \ : \ R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$

noter que l'on autorise la valeur 0 pour R_1 (l'ensemble $C(z_0, 0, R_2)$ est alors le disque <u>épointé</u> $D^*(z_0, R_2) = D(z_0, R_2) \setminus \{z_0\}$) et la valeur $+\infty$ pour R_2 (auquel cas la couronne est le complémentaire du disque fermé $\overline{D}(z_0, R_1)$).

Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, supposons que les deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} a_{-n} z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs $R > 0$ et $\rho > 0$, et supposons que

$$\frac{1}{\rho} < R$$

et soit

$$\frac{1}{\rho} < R_1 < R_2 < R$$

alors nous savons que

- comme $R_2 < R$, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, R_2)$ et y définit une fonction holomorphe
- comme $1/R_1 < \rho$, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, \frac{1}{R_1})$ et donc (en faisant le changement de variable $z \mapsto 1/z$), $\sum_{n\geq 0} a_n z^{-n}$ converge normalement sur la couronne

$$C(0, R_1, +\infty) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \geq R_1\}$$

et y définit une fonction holomorphe.

Ainsi en définissant, la fonction

$$f(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n = a_0 + \sum_{n>0} a_n z^n + \sum_{n<0} a_n z^n$$

on obtient une fonction holomorphe sur la couronne $C(0, \frac{1}{\rho}, R)$. La forme précédente s'appelle une <u>série de Laurent</u>. Ici, on a pris 0 comme origine pour fixer les idées mais on peut bien évidemment aussi considérer $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n$ sur $C(z_0, 1/\rho, R)$. Une série de Laurent définit une fonction holomorphe sur la couronne $C(0, 1/\rho, R)$ et nous allons montrer la réciproque à savoir que toute fonction holomorphe sur une couronne se représente comme une série de Laurent et que les coefficients de Laurent se calculent d'une manière analogue aux coefficients du développement en série entière dans le théorème de Cauchy. Pour ce faire, nous aurons d'abord besoin de deux lemmes :

Lemme 5.1 *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$, $R_1 < R_2$ *et* g *holomorphe sur la couronne* $C(z_0, R_1, R_2)$, *alors la fonction*

$$\psi(r) := \int_{\gamma_r} g(u)du,\ r \in]R_1, R_2[\ (\gamma_r(t) = z_0 + re^{it},\ t \in [0, 2\pi])$$

est constante sur $]R_1, R_2[$.

Preuve:
Pour tout $r \in]R_1, R_2[$, on a :

$$\psi(r) = \int_0^{2\pi} ig(z_0 + re^{it})re^{it}dt$$

on peut (après quelques justifications élémentaires) dériver sous le signe somme et ainsi obtenir

$$\psi'(r) = \int_0^{2\pi} i[g'(z_0 + re^{it})re^{2it} + g(z_0 + re^{it})e^{it}]dt$$

on remarque ensuite que

$$\frac{d}{dt}(g(z_0 + re^{it})e^{it}) = i[g'(z_0 + re^{it})re^{2it} + g(z_0 + re^{it})e^{it}]$$

et donc

$$\psi'(r) = g(z_0 + re^{2i\pi})e^{2i\pi} - g(z_0 + r) = 0.$$

□

Lemme 5.2 *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$, $R_1 < R_2$, f *holomorphe sur la couronne* $C(z_0, R_1, R_2)$ *alors pour tout* r_1, r_2 *tels que* $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ *et tout* $z \in C(z_0, r_1, r_2)$, *on a*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(u)}{u-z}du - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(u)}{u-z}du$$

(où on a posé $\gamma_r(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$*).*

Preuve:
On introduit à nouveau la fonction

$$g(u) := \begin{cases} \frac{f(u)-f(z)}{u-z} & \text{si } u \neq z \\ f'(u) & \text{si } u = z \end{cases}, \ u \in C(z_0, R_1, R_2)$$

qui est holomorphe sur $C(z_0, R_1, R_2) \setminus \{z\}$ et continue sur $C(z_0, R_1, R_2)$ et donc holomorphe sur $C(z_0, R_1, R_2)$ (Théorème 4.12). Le lemme précédent implique donc que $\int_{\gamma_r} g(u)du$ est indépendant de r, or

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} g(u)du = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u-z}du - I_{\gamma_r}(z)f(z)$$

comme $I_{\gamma_{r_2}}(z) = 1$ et $I_{\gamma_{r_1}}(z) = 0$ on a donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(u)}{u-z}du - f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(u)}{u-z}du$$

d'où le résultat.

□

Le théorème annoncé est le suivant

Théorème 5.1 (Laurent) *Soit* f *holomorphe sur la couronne* $C(0, R_1, R_2)$ *alors* f *est développable en série de Laurent :*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n, \ z \in C(0, R_1, R_2)$$

où les coefficients de Laurent sont donnés par

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u^{n+1}}du, n \in \mathbb{Z}, \ r \in]R_1, R_2[, \ (\gamma_r(t) = re^{it}, \ t \in [0, 2\pi]).$$

Preuve:

Fixons $r_1, r_2 : R_1 < r_1 < |z| < r_2 < R_2$, en vertu du lemme précédent, nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(u)}{u-z}du - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(u)}{u-z}du.$$

Pour $u \in \Gamma_{r_1} := \gamma_{r_1}([0,2\pi))$, on a $|u|/|z| = r_1/|z| < 1$ de sorte que

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{z(\frac{u}{z}-1)} = -\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{u}{z}\right)^n = -\sum_{n\leq -1}\frac{z^n}{u^{n+1}}$$

et la série de terme général $f(u)(u/z)^n$ converge normalement sur Γ_{r_1} ainsi nous pouvons intégrer terme à terme

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(u)}{u-z}du = \sum_{n\leq -1}\frac{1}{2i\pi}\Big(\int_{\gamma_{r_1}}\frac{z^n}{u^{n+1}}f(u)du\Big) = \sum_{n\leq -1} a_n z^n$$

où pour tout $n \leq -1$

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_1}}\frac{f(u)}{u^{n+1}}du$$

et cette quantité est indépendante de $r_1 \in]R_1, R_2[$ en vertu du Lemme 5.1 et du fait que $f(u)/u^{n+1}$ est holomorphe sur $C(0, R_1, R_2)$. Pour $u \in \Gamma_{r_2} := \gamma_{r_2}([0,2\pi))$, on a $|z|/|u| = |z|/r_2 < 1$ de sorte que

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u(\frac{z}{u}-1)} = -\frac{1}{u}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{u}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{u^{n+1}}$$

et la série de terme général $f(u)(z/u)^n$ converge normalement sur Γ_{r_2} ainsi nous pouvons intégrer terme à terme

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(u)}{u-z}du = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2i\pi}\Big(\int_{\gamma_{r_2}}\frac{z^n}{u^{n+1}}f(u)du\Big) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

où pour tout $n \geq 0$

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_2}}\frac{f(u)}{u^{n+1}}du$$

et cette quantité est indépendante de $r_2 \in]R_1, R_2[$ en vertu du Lemme 5.1 et du fait que $f(u)/u^{n+1}$ est holomorphe sur $C(0, R_1, R_2)$. Ceci achève la preuve du théorème de Laurent.

□

Le théorème précédent et sa démonsration appellent plusieurs remarques. Pour $n \geq 0$ en faisant tendre r_2 vers R_2^- (et en utilisant le fait que f est bornée sur Γ_{r_2} pour $R_1 < r_2 < R_2$) dans la formule

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(u)}{u^{n+1}} du$$

on voit que le rayon de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est au moins R_2, il est donc infini si R_2 est infini. De la même manière pour $n < 0$, en faisant tendre r_1 vers R_1^+ (et en utilisant le fait que f est bornée sur Γ_{r_1} pour $R_1 < r_1 < R_2$) dans la formule

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r_1}} f(u) u^{-n-1} du$$

on voit que le rayon de la série $\sum_{n \geq 0} a_{-n} z^n$ est au moins $1/R_1$. En posant

$$f_2(z) := \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \; f_1(z) = g_1(1/z), \; g_1(z) = \sum_{n > 0} a_{-n} z^n$$

on a donc :

- $f = f_1 + f_2$ sur $C(0, R_1, R_2)$,
- f_2 est holomorphe sur $D(0, R_2)$,
- f_1 est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \; : \; |z| > R_1\}$ (car g_1 est holomorphe sur $D(0, 1/R_1)$).

Dans le cas $R_1 = 0$, $R_2 = R > 0$, il résulte ainsi du théorème de Laurent que si f est holomorphe sur le disque épointé $D^*(z_0, R) = D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ alors f admet un développement en série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n, z \in D^*(z_0, R)$$

où

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du, \; \gamma_r(t) = z_0 + re^{it}, \; t \in [0, 2\pi],$$

cette formule étant valable pour tout $r \in]0, R[$. En outre $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est de rayon de convergence au moins R et $\sum_{n > 0} a_{-n} z^n$ est de rayon de convergence infini et l'on a donc

$$f = f_1 + f_2$$

sur $D^*(z_0, r)$ avec

$$f_1(z) = g_1(1/z) = \sum_{n < 0} a_n z^n, \; g_1(z) = \sum_{n > 0} a_{-n} z^n, \; f_2(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

avec f_1 holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ (car g_1 est entière) et f_2 holomorphe sur $D(0, R)$.

Il ne faut surtout pas confondre ce développement en série de Laurent qui fait apparaître des puissances négatives de $(z - z_0)$ mais ne demande pas que f soit holomorphe en z_0 mais seulement sur le disque épointé et le développement en série entière (qui ne contient que des puissances positives) fourni par le théorème de Cauchy qui demandait que f soit holomorphe sur un voisinage de z_0.

Le théorème de Laurent donne évidemment l'unicité du développement en série de Laurent :

Proposition 5.1 *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ *telles que* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ *soient de rayon de convergence (au moins)* $R_2 > 0$*,* $\sum_{n\leq 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\leq 0} b_n z^n$ *soient de rayon de convergence (au moins)* ρ *avec* $R_1 := \frac{1}{\rho} < R_2$*. Si l'on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n, \ \forall z \in C(0, R_1, R_2)$$

alors $a_n = b_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Preuve:
C'est une conséquence triviale du théorème de Laurent appliqué à la fonction (holomorphe sur $C(0, R_1, R_2)$)

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n, \ \forall z \in C(0, R_1, R_2).$$

□

5.2 Fonctions méromorphes, pôles, résidus

Définition 5.1 *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$ *on dit que* z_0 *est une* <u>*singularité isolée*</u> *de* f *s'il existe* $r > 0$ *tel que* f *est holomorphe sur* $D^*(z_0, r)$*.*

La définition qui précède n'est pas très maline a priori puisque si f est holomorphe au voisinage de z_0, alors z_0 est une singularité isolée de f alors que f est très régulière (analytique !) au voisinage de z_0. Il va donc falloir y regarder d'un peu plus près pour distinguer les "vraies" singularités de f.

Soit donc z_0 une singularité isolée de f, par définition il existe $r > 0$ tel que f est holomorphe sur $D^*(z_0, r)$ et grâce au théorème de Laurent, on peut écrire :

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n, \ z \in D^*(z_0, r)$$

il y a alors trois cas à distinguer :

- pour tout $n < 0$, $a_n = 0$ alors f s'étend en une fonction holomorphe sur $D(z_0, r)$, on dit alors que z_0 est une singularité artificielle[1] de f,

- il existe un nombre fini de $n < 0$ tels que $a_n \neq 0$, ainsi il existe $n_0 \geq 1$ tel que $a_{-n_0} \neq 0$ et $f - \sum_{n=1}^{n_0} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ est holomorphe sur $D(z_0, r)$, on dit alors que z_0 est un pôle de f, l'entier n_0 s'appelle l'ordre du pôle z_0 (noter que n_0 est le plus petit entier $n \geq 1$ pour lequel $f(z)(z - z_0)^n$ est holomorphe au voisinage de z_0),

- il existe une infinité de $n < 0$ tels que $a_n \neq 0$, on dit alors que z_0 est une singularité essentielle de f.

Par exemple $f(z) = 1/z$ a une singularité isolée en 0 est c'est un pôle d'ordre 1, $\sin(z)/z$ a une singularité isolée en 0 qui est une singularité artificielle et $e^{1/z}$ présente une singularité essentielle en 0. Si P et Q sont des polynômes avec Q non identiquement nulle, la fraction rationnelle P/Q est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé des racines de Q, soit z_0 l'une de ces racines de Q et m sa multiplicité alors : soit z_0 est racine de P de multiplicité $n \geq m$ et dans ce cas z_0 est une singularité artificielle, soit z_0 est racine de P de multiplicité $n < m$ ($n = 0$ si $P(z_0) \neq 0$) et dans ce cas z_0 est un pôle d'ordre $(m - n)$. Si f est non identiquement nulle sur le domaine U alors ses zéros sont isolés et donc $1/f$ n'a que des singularités isolées et ces singularités sont des pôles, et plus précisément, si $f(z_0) = 0$ alors l'ordre du pôle z_0 de $1/f$ correspond au premier terme non nul (ou première dérivée non nulle) dans la série de Taylor f en z_0.

Une fonction qui ne présente que des singularités isolées n'a qu'un nombre fini de "vraies" (i.e. non artificielles) singularités sur chaque compact :

Lemme 5.3 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction telle que chaque point de U est une singularité isolée de f. Soit K compact, $K \subset U$ alors f est holomorphe en chaque point de K sauf éventuellement un nombre fini.*

Preuve:
Pour tout $z \in K$ il existe $r_z > 0$ tel que f est holomorphe sur $D^*(z, r_z)$ comme K est compact il peut être recouvert par un nombre fini de tels disques $D(z, r_z)$, il existe donc k, $z_1, \dots z_k$ et $r_1 > 0, \dots r_k > 0$ tels que $K \subset \cup_{j=1}^{k} D(z_i, r_i)$ et comme f est holomorphe sur $D^*(z_i, r_i)$, f est holomorphe en chaque point de K sauf éventuellement $z_1, \dots, z_k$.
□

Nous pouvons maintenant définir les fonctions méromorphes :

[1] Nous avons déjà vu que si f est holomorphe sur un ouvert privé d'un point et bornée au voisinage de ce point alors f est holomorphe en ce point : un tel point est donc une singularité artificielle

Définition 5.2 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ on dit que la fonction f est méromorphe sur U si f est holomorphe sur U sauf (éventuellement) en des points singuliers isolés qui sont des pôles de f.*

Par exemple, les fractions rationnelles sont des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$, de même que $\sin(z)/z^4(z^5-12)(z^{37}+iz^{23}-2)$, en revanche $e^{1/z}$ n'est pas méromorphe sur $\mathbb{C}$. Il est évident par ailleurs que somme et produit de fonctions méromorphes sont méromorphes. Noter qu'avec le lemme 5.3, une fonction méromorphe n'a qu'un nombre fini de pôles sur chaque compact et en particulier n'a localement (i.e. au voisinage de chaque point) qu'un nombre fini de pôles. Noter aussi qu'une fonction méromorphe se développe en série de Laurent au voisinage de chaque pôle de f et dans ce développement il n'y a qu'un nombre fini de puissances négatives en $(z-z_0)$ (autrement dit le terme singulier dans le développement de Laurent est un polynôme en $1/(z-z_0)$).

5.3 La formule des résidus

Définition 5.3 *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, f méromorphe sur U et z_0 un pôle de f, on appelle résidu de f en z_0 et l'on note $\mathrm{Res}(f, z_0)$ le coefficient a_{-1} de $\frac{1}{z-z_0}$ dans le développement de Laurent de f en z_0.*

Il résulte du théorème de Laurent que pour $r > 0$ suffisamment petit (pour que f soit holomorphe sur $D^*(z_0, R)$ avec $R > r$) on a

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} f(z)dz,\ (\gamma_r(t) = z_0 + re^{it},\ t \in [0, 2\pi]).$$

Avant d'énoncer et d'établir la formule des résidus nous aurons besoin de deux lemmes :

Lemme 5.4 *Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ fermé et C^1 par morceaux, d'image Γ, $n \in \mathbb{Z}$ et $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ alors on a*

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-z_0)^n}dz = \begin{cases} 2i\pi I_\gamma(z_0) & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve:
Seul le cas $n \neq 1$ est à considérer, mais dans ce cas on observe que

$$\frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{(-n+1)}(z-z_0)^{-n+1}\Big) = \frac{1}{(z-z_0)^n}$$

de sorte que $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ admet comme primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ la fonction (holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$), $\frac{1}{(-n+1)}(z-z_0)^{-n+1}$, et donc (connexité de $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ et théorème 4.3)

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-z_0)^n} dz = 0$$

□

Lemme 5.5 *Soit U un ouvert étoilé non vide de $\mathbb{C}$, f méromorphe sur U et γ un chemin fermé C^1 par morceaux dans U, dont l'image Γ ne contient aucun pôle de f, alors*

1. *il existe V ouvert étoilé tel que $\bar{V}$ est compact, $\bar{V} \subset U$ et $\Gamma \subset V$,*
2. *l'ensemble, $P_\gamma(f)$, des pôles z_0 de f tels que $I_\gamma(z_0) \neq 0$ est fini.*

Preuve:

1. Sans perte de généralité nous pouvons supposer que U est étoilé par rapport à 0. Posons tout d'abord $K := \{\alpha z,\ \alpha \in [0,1], z \in \Gamma\}$ il est facile de voir que K est compact étoilé, inclus dans U et contient Γ. Comme K est compact il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K + D(0, 2\varepsilon) \subset U$ posons alors $V := K + D(0, \varepsilon)$, alors V est ouvert (c'est la réunion des disques ouverts $D(z, \varepsilon)$ pour z parcourant K), V est étoilé (si $x \in V$, x s'écrit $x = z + \varepsilon h$ avec $z \in K$ et $h \in D(0,1)$ et donc pour $t \in [0,1]$, $tx = tz + t\varepsilon h \in K + D(0,\varepsilon)$) et $\bar{V}$ est compact et $\bar{V} \subset K + \bar{D}(0,\varepsilon) \subset K + D(0, 2\varepsilon) \subset U$.

2. Tout point du complémentaire de $\bar{V}$ est d'indice nul par rapport à γ et donc l'ensemble $P_\gamma(f)$ est contenu dans l'ensemble des pôles de f appartenant au compact $\bar{V}$ lequel est fini en vertu du lemme 5.3.

□

Théorème 5.2 (formule des résidus) *Soit U un ouvert non vide étoilé de $\mathbb{C}$, f méromorphe sur U, γ un chemin fermé C^1 par morceaux dans U, dont l'image Γ ne contient aucun pôle de f, alors on a*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{z_0 \in P_\gamma(f)} \mathrm{Res}(f, z_0) I_\gamma(z_0)$$

où $P_\gamma(f)$ désigne l'ensemble (fini) des pôles de f d'indice non nul par rapport à γ.

Preuve:
On commence par fixer un ouvert étoilé V vérifiant les conditions du lemme 5.5, notons alors F l'ensemble (fini) des pôles de f dans V. Pour $z_0 \in F$, écrivons le développement en série de Laurent en z_0 sous la forme

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z_0)(z-z_0)^n + g_{z_0}(z)$$

où g_{z_0} est la partie singulière

$$g_{z_0}(z) := \sum_{n<0} a_n(z_0)(z-z_0)^n$$

notons que puisque z_0 est un pôle, g_{z_0} est une polynôme en $1/(z-z_0)$ et donc en particulier c'est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. La fonction

$$g(z) := f(z) - \sum_{z_0\in F} g_{z_0}(z)$$

est holomorphe sur l'ouvert étoilé V son intégrale le long de γ est donc nulle i.e.

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{z_0\in F} \int_\gamma g_{z_0}(z)dz$$

or pour $z_0 \in F$

$$\int_\gamma g_{z_0}(z)dz = \int_\gamma \sum_{n<0} a_n(z_0)(z-z_0)^n dz$$

cette somme est finie car z_0 est un pôle et en vertu du lemme 5.4 le seul terme non nul correspond à $n=-1$ de sorte que

$$\int_\gamma g_{z_0}(z)dz = \int_\gamma a_{-1}(z_0)\frac{1}{(z-z_0)}dz = 2i\pi \mathrm{Res}(f, z_0) I_\gamma(z_0).$$

En sommant sur F on obtient donc bien la formule des résidus.
□

Indiquons une manière simple de calculer un résidu :

Lemme 5.6 *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f méromorphe sur U et z_0 un pôle d'odre k de f et $g(z) := (z-z_0)^k f(z)$ pour $z \in U \setminus \{z_0\}$ alors (en notant encore g le prolongement holomorphe de g à U on a*

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

en particulier si z_0 est un pôle simple de f

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z)$$

Preuve:
Ecrivons que

$$g(z) = (z - z_0)^k f(z) = (z - z_0)^k f_1(z) + a_{-1}(z - z_0)^{k-1} + ... + a_{-k}$$

au voisinage de z avec f_1 holomorphe. Quand on dérive $(k-1)$ fois cette expression et qu'on évalue le résultat en $z = z_0$ il n'y a qu'un terme non nul :

$$g^{(k-1)}(z_0) = a_{-1}(k-1)! = \mathrm{Res}(f, z_0)(k-1)!.$$

□

5.4 Exemples de calcul d'intégrales par la formule des résidus

Fonctions trigonométriques

On souhaite calculer une intégrale du type

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))dt$$

où R est la fraction rationnelle

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

dont nous supposons qu'elle n'a pas de pôles sur S^1 i.e. que Q ne s'annule pas sur le cercle unité S^1 (ainsi I est l'intégrale d'une fonction continue). Evidemment on pose $z = e^{it} = \gamma(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ ainsi

$$\cos(t) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}),\ \sin(t) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}),\ dz = ie^{it}dt = izdt$$

de sorte que

$$I = \int_\gamma R\Big(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\Big)\frac{dz}{iz}$$

et pour la calculer, on peut appliquer la formule des résidus à la fraction rationnelle d'une variable complexe

$$f(z) := \frac{1}{iz}R\Big(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\Big).$$

Appliquons cette méthode au calcul de

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin(t)} dt$$

avec $a > 1$. La fraction rationnelle f prend la forme

$$f(z) = \frac{1}{iz} \frac{1}{a + \frac{1}{2i}(z - z^{-1})} = \frac{2}{z^2 + 2iaz - 1} = \frac{2}{(z - z_0)(z - z_1)}$$

où les deux pôles z_0 et z_1 sont

$$z_0 = i(-a + \sqrt{a^2 - 1}), \ z_1 = i(-a - \sqrt{a^2 - 1})$$

seul z_0 est à l'intérieur du disque on a donc

$$I = 2i\pi \text{Res}(z_0, f)$$

et $\text{Res}(z_0, f)$ "se lit" directement sur la forme de f :

$$\text{Res}(z_0, f) = \frac{2}{z_0 - z_1} = \frac{2}{2i\sqrt{a^2 - 1}}$$

et donc

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Cool, non ?

Fractions rationnelles

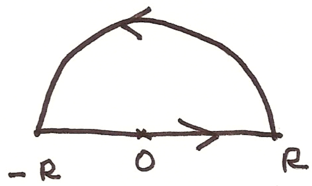
On souhaite maintenant calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^6} dt = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1 + t^6} dt$$

On considère la fonction méromorphe

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}, \ P(z) = 1 + z^6 = \prod_{k=1}^{6} (z - z_k), \ z_k = e^{i(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3})}, \ k = 0, ..., 5$$

dont les pôles sont z_k, $k = 0, ..., 5$. Pour $R > 1$, le cercle de rayon R ne contient aucun de ces pôles, soit alors γ_R le chemin constitué par le demi cercle de rayon R contenu dans le demi-plan supérieur (parcouru dans le sens direct) et le segment $[-R, R]$ comme sur la figure ci-dessous



on a alors

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^6}dt + \int_0^{\pi} \frac{iRe^{it}}{1+R^6e^{6it}}dt$$

le second terme tend vers 0 quand $R \to \infty$. Les pôles contenus dans le demi disque sont $z_0 = e^{i\pi/6}$, $z_1 = e^{i\pi/3}$ et $z_2 = e^{5I\pi/6}$ et la formule des résidus nous donne

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi(\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1) + \text{Res}(f, z_1)).$$

Pour calculer $\text{Res}(f, z_k)$, on note d'abord que

$$\text{Res}(f, z_k) = \frac{1}{\prod_{i \neq k}(z_k - z_i)},$$

or

$$P'(z) = 6z^5, \text{ et } P'(z_k) = \prod_{i \neq k}(z_k - z_i)$$

de sorte que

$$\text{Res}(f, z_k) = \frac{1}{P'(z_k)} = \frac{1}{6z_k^5} = -\frac{z_k}{6} \text{car } z_k^6 = -1.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} f(z)dz &= -\frac{i\pi}{3}(z_0 + z_1 + z_2) \\
&= -\frac{i\pi}{3} e^{i\frac{\pi}{6}}(1 + e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{2i\frac{\pi}{3}}) \\
&= -\frac{i\pi}{3} e^{i\frac{\pi}{6}} \frac{e^{i\pi} - 1}{e^{i\frac{\pi}{3}} - 1} \\
&= \frac{2i\pi}{3} \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{3}} - 1} \\
&= \frac{2i\pi}{3} \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}} \\
&= \frac{2\pi}{3\sin(\frac{\pi}{6})} = \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

et donc
$$I = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^6}dt = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\int_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{\pi}{3}.$$
Ca vous en bouche un coin, non ?

Bibliographie

[1] H. Cartan *Cours de calcul différentiel*, Hermann, Paris.

[2] H. Cartan *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris.

[3] W. Rudin *Analyse réelle et complexe*, Dunod, Paris.