ANALYSE COMPLEXE

CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

Ouvrages de la même collection (Maîtrise de mathématiques pures): voir page 4 de couverture.

Collection Mathématiques appliquées pour la Maîtrise sous la direction de Ph. CIARLET et J. LIONS :

INTRODUCTION A L'ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE ET A L'OPTIMISATION, par Ph. CIARLET. 1988, 3^e tirage, 292 pages.

EXERCICES D'ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE ET D'OPTIMISATION, avec solutions, par Ph. CIARLET, B. MIARA et J. M. THOMAS. 1987, 2^e édition, 192 pages.

ANALYSE NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, par M. CROUZEIX et A. L. MIGNOT. 1989, 2^e édition, 192 pages.

EXERCICES D'ANALYSE NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, par M. CROUZEIX et A. L. MIGNOT. 1986, 192 pages.

INTRODUCTION A L'ANALYSE NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, par P. A. RAVIART et J. M. THOMAS. 1988, 2^e tirage 224 pages.

EXERCICES D'ANALYSE NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, par P. RABIER et J. M. THOMAS. 1985, 208 pages.

ANALYSE FONCTIONNELLE. Théorie et applications, par H. BRÉZIS. 1987, 2^e tirage, 248 pages.

Autres ouvrages

ANALYSE RÉELLE ET COMPLEXE, par W. RUDIN. 1987, 4^e tirage, 408 pages.

MATHÉMATIQUES POUR LA LICENCE, Second cycle des Universités et écoles d'ingénieurs. Variable complexe, calcul différentiel et tensoriel, espaces normés et calcul intégral, analyse de Fourier, par J. P. FERRIER. 1984, 232 pages

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE. PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES, Écrit du CAPES, avec rappels de cours. Année 1979—1987, Concours interne 1987, par A. LÉVY-BRUHL, P. LÉVY-BRUHL, C. PIQUET, C. SERVIEN et J. VAUTHIER. 1988, 2^e édition, 224 pages.

ANALYSE. PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES, Ecrit du CAPES, avec rappels de cours. Année 1980-1987, par A. LÉVY-BRUHL, P. LÉVY-BRUHL, C. PIQUET, C. SERVIEN et J. VAUTHIER. 1988, 2^e édition, 248 pages.

Collection Maîtrise de mathématiques pures
sous la direction de J. DIEUDONNÉ et P. MALLIAVIN
de l'Institut

P. DOLBEAULT

Professeur à l'Université
Pierre et Marie Curie

ANALYSE COMPLEXE

Ouvrage publié avec le concours du Ministère
de la Recherche et de la Technologie (DIST).

MASSON Paris Milan Barcelone Mexico 1990

ISBN : 2-225-81425-2
ISSN : 0339-879 X

MASSON — 120, bd Saint-Germain, 75280 Paris Cedex 06
MASSON S.p.A. — Via Statuto 2, 20121 Milano
MASSON S.A. — Balmes 151, Barcelona 8
MASSON EDITORES — Dakota 383, Colonia Napoles, Mexico 18 DF

INTRODUCTION AU COURS D'ANALYSE

L'Analyse mathématique donne un ensemble de règles gouvernant la manipulation des limites et des infiniment petits : règles de changement de variables, règles d'interversion de limites, règles de dérivation sous le signe intégrale, etc. On ne peut toutefois réduire l'Analyse à cette gymnastique formelle sans perdre de vue ses objets principaux et le sens même de sa démarche.

Dès le XVIII^e siècle les séries ont été utilisées pour définir des fonctions nouvelles. Dans un langage moderne, l'Analyse démontre des *théorèmes d'existence* en formulant les problèmes dans des *espaces complets convenables*. Lorsqu'un résultat d'existence est précisé par un théorème d'unicité, alors, et seulement alors, la notion de solution approchée a un sens ; les algorithmes numériques de calcul des solutions approchées proviendront souvent de la démarche antérieure de l'Analyste.

L'évolution des systèmes mécaniques est gouvernée par le *principe du minimum d'action*. Plus généralement l'Analyse permet de définir des fonctions remarquables : celles qui réalisent le minimum de fonctionnelles naturelles. Les propriétés de ces *fonctions extrémales* pourront être déduites alors des équations aux variations de la fonctionnelle associée.

Les lois élémentaires de conservation de la Physique ne permettent pas de décrire un phénomène complexe. Toutefois la formulation *infinitésimale* de ces lois peut conduire à des équations aux dérivées partielles. L'Analyse, en établissant l'existence globale des solutions de ces équations, ainsi que leurs propriétés, apportera un outil pour passer de l'infinitésimal au global.

Le calcul des probabilités sur un nombre fini n d'événements, est souvent équivalent à des problèmes de combinatoire. Lorsque n tend vers l'infini, des lois limites simples apparaissent. Là où l'on ne trouvait que le contingent et l'enchevêtrement d'énumérations fastidieuses, le passage à la limite fera apparaître des fonctions régulières justiciables des méthodes de calcul de l'Analyse.

Ces points de vue seront mis en évidence dans ce cours, destiné à des étudiants de licence ou de maîtrise, et qui comportera quatre volumes de 100 à 200 pages chacun :

— Topologie et Analyse fonctionnelle ;
— Intégration, Probabilités, Analyse de Fourier et Analyse Spectrale ;
— Calcul différentiel ;
— Analyse complexe.

Chaque volume sera écrit de telle sorte qu'il puisse être lu de façon indépendante.

P. Malliavin

INTRODUCTION AU COURS D'ALGÈBRE

> L'Algèbre n'est pas vraiment une discipline indépendante, mais un fondement et un outil pour l'ensemble des mathématiques, et son développement rapide dans les dernières années a été en fait suscité et dirigé par les besoins d'autres disciplines mathématiques.
>
> L. KRONECKER (1861), *Math. Werke*, vol. V, p. 387.

L'OPINION DE KRONECKER (l'un des plus illustres algébristes de tous les temps) peut paraître en opposition avec le phénomène bien connu de la prépondérance de plus en plus grande de l'Algèbre dans les mathématiques actuelles, ce qu'on a pu appeler l'« algébrisation » de l'Analyse, de la Géométrie et de la Topologie. En réalité, cette prépondérance est due au fait que les algébristes ont su infléchir leurs recherches sous l'influence des parties des mathématiques où elles pouvaient apporter un appui décisif. Un exemple historique typique est l'évolution de l'Algèbre linéaire et multilinéaire, qui, pour devenir un outil fondamental en Analyse fonctionnelle, a dû commencer par se débarrasser du fatras des calculs de déterminants et de matrices qui l'encombraient inutilement au XIXe siècle. De même, on sait que l'Algèbre commutative est née, d'une part avec les démonstrations, par Dedekind et Weber, des théorèmes fondamentaux de la Théorie des nombres et de la Théorie des courbes algébriques, et de l'autre avec les découvertes de Hilbert sortant la Théorie des invariants des interminables calculs où elle s'enlisait. Et son essor à partir de 1920 est concomitant avec l'essor simultané, à partir de la même époque, de la Géométrie algébrique et de la Géométrie analytique, dont elle forme la base.

C'est donc dans l'esprit de Kronecker qu'est rédigé ce Cours d'Algèbre ; il ne comprend pas une seule définition ni un seul résultat d'Algèbre pure qui n'ait une application dans une autre partie des mathématiques, et on a veillé à ce que les étudiants s'en rendent compte dans toute la mesure du possible. Pour le premier volume, consacré à l'Algèbre linéaire et multilinéaire, cela ne posait pas de problème, car il s'agit là de ce que l'on peut appeler le « pain quotidien » de *tout* mathématicien, qu'il s'occupe d'Arithmétique, d'Analyse fonctionnelle, de Géométrie différentielle, de Topologie algébrique ou de Mécanique quantique.

Les deux autres volumes sont divisés en trois chapitres, dont deux, consacrés respectivement à la Théorie des groupes et à la Théorie des nombres algébriques, sont déjà essentiellement des chapitres d'applications de l'Algèbre. Le troisième, qui traite des parties élémentaires de l'Algèbre commutative, a pour domaines principaux d'applications la Théorie des nombres et la Géométrie algébrique. Le niveau plus élevé de cette dernière n'a pas permis d'en inclure une partie appréciable dans le texte ni dans les exercices ; mais on a essayé de signaler à quoi correspondent « géométriquement » de nombreuses notions purement algébriques de cette théorie, lorsque cela n'exigeait pas l'introduction d'un trop grand nombre de notions nouvelles.

J. DIEUDONNÉ

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 1

1. Fonctions holomorphes ; théorèmes de Cauchy 5

1. Fonctions holomorphes 5
2. Formes différentielles de degré 1 et 2, chaînes différentiables de dimension 0, 1 et 2 ; formule de Stokes 12
3. Théorème de Cauchy 23
4. Indice d'un cycle de dimension 1 27
5. Formule intégrale de Cauchy 28
6. Surfaces de Riemann 34

2. Propriétés des fonctions holomorphes 39

0. Séries entières convergentes 39
1. Développement en série de Taylor d'une fonction holomorphe 42
2. Application : théorème d'identité ; inégalités de Cauchy ; théorème de Liouville ; problème du d'' dans un disque ouvert 43
3. Principe du maximum ; lemme de Schwarz 47
4. Développement en série de Laurent 49
5. Résidus ; théorème des résidus 54
6. Applications : zéros et pôles d'une fonction méromorphe ; calculs d'intégrales par la méthode des résidus 58

3. Espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de C, transformations conformes 65

1. Convergence d'une suite de fonctions holomorphes 65
2. Suite exhaustive de compacts d'un ouvert D de $\mathbf{R}^2$; théorème de Stieljes—Vitali—Montel 68
3. Topologie de l'espace des fonctions continues sur un ouvert D de $\mathbf{C}$; espace des fonctions holomorphes sur D 69
4. Séries et produits infinis dans un ouvert D de $\mathbf{C}$ 72
5. Applications holomorphes, transformations conformes 79
6. Représentation conforme 82

4. Approximation des fonctions holomorphes sur un compact. Construction de fonctions méromorphes à singularités données 88

1. Théorème de Runge 88
2. Problème du d'' dans un ouvert D de $\mathbf{C}$ 93
3. Théorème de Mittag—Leffler dans un ouvert de $\mathbf{C}$ 94
4. Théorème de Weierstrass dans un ouvert D de $\mathbf{C}$ 95

5. Surfaces de Riemann étalées 99

1. Homéomorphismes locaux ; revêtements topologiques 99
2. Morphismes de surfaces de Riemann 105
3. Faisceaux 110
4. Prolongement analytique 115
5. Groupe fondamental ; revêtement universel 118
6. Surface de Riemann d'une fonction algébrique 126

6. Surfaces de Riemann compactes 134

1. Cohomologie à valeur dans un faisceau 135
2. Théorème de finitude 142
3. Théorème de Riemann—Roch 147
4. Fonctions harmoniques dans un ouvert D de **C** 152
5. Formes différentielles harmoniques sur une surface de Riemann 157
6. Formes différentielles abéliennes ; théorème d'Abel 164
7. Fibrés holomorphes en droites 171
8. Dualité de Serre et applications 175

7. Fonctions holomorphes de plusieurs variables 184

1. Préliminaires 184
2. Fonctions holomorphes sur Ω 185
3. Formule intégrale de Cauchy 187
4. Séries entières convergentes 189
5. Applications de la formule de Cauchy 194
6. Introduction au problème du d'' 199
7. Espace des fonctions holomorphes 203
8. Singularités apparentes 205

8. Etude locale des fonctions et des ensembles analytiques 209

0. Introduction : fonctions analytiques 209
1. Théorème de division ; théorème de préparation de Weierstrass 210
2. Algèbres analytiques ; noethérianité 211
3. Factorialité de $K\{X\}$ 213
4. Germes de fonctions et d'ensembles analytiques en un point 214
5. Propriétés des algèbres analytiques 215
6. Structure locale d'un ensemble analytique 218
7. Points singuliers et dimension d'un ensemble analytique 220
8. Cas des ensembles analytiques complexes ($\mathbf{K}=\mathbf{C}$) 222
9. Théorème des zéros de Hilbert ($\mathbf{K}=\mathbf{C}$) 223

Appendice : Variétés différentielles ; formes différentielles ; chaînes différentiables 224

1. Variétés différentielles 224
2. Différentielles en un point 226
3. Fibré cotangent ; formes différentielles de degré 1 227
4. Formes différentielles sur X 229
5. Variétés orientables ; variétés orientées ; intégrale d'une forme différentielle de degré maximum 231
6. Image réciproque par une application différentiable ; différentielle extérieure ; chaînes différentiables 233

Bibliographie 237

Index alphabétique des matières 239

AVANT-PROPOS

L'Analyse complexe étudie les fonctions holomorphes d'une ou plusieurs variables complexes localement ou globalement, ainsi que d'autres notions connexes. Localement, c'est-à-dire au voisinage d'un point de $\mathbf{C}^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), ces fonctions sont des sommes de séries entières convergentes ; globalement, même s'il s'agit de fonctions sur un ouvert de $\mathbf{C}$, des procédés de topologie algébrique ou différentielle doivent être utilisés. On se propose d'introduire, pour une variable complexe des méthodes et des résultats généralisables, moyennant une plus grande élaboration, pour plusieurs variables ; deux courts chapitres sur les fonctions de plusieurs variables comprennent l'un, après des généralisations faciles, l'apparition de phénomènes spécifiques, l'autre, une étude locale préliminaire indispensable au développement ultérieur de la théorie.

Les fonctions holomorphes d'une variable complexe z sont définies comme les fonctions différentiables au sens complexe ou encore comme les fonctions différentiables de deux variables réelles (les parties réelle et imaginaire de z), satisfaisant à la condition de Cauchy—Riemann $\partial f/\partial \bar{z}=0$. L'exposé est basé sur l'analyse des fonctions différentiables de deux variables réelles et emploie les notions de fonction indéfiniment différentiable à support compact et de partition de l'unité ; les formes différentielles de degré 0, 1, 2 seront définies et la formule de Stokes pour les chaînes différentiables établie. La formule de Cauchy non homogène (formule C) sera obtenue à partir de la formule de Stokes : c'est la formule intégrale, pour les fonctions continûment différentiables, relative au noyau de Cauchy. Il en résulte deux types de propriétés selon qu'elle est appliquée à une fonction holomorphe ou à une fonction différentiable à support compact :

1. Développement d'une fonction holomorphe en série de Taylor dans un disque, en série de Laurent dans un disque privé de son centre, d'où le principe du prolongement analytique ; formule de la moyenne qui permet, par ailleurs, de caractériser les fonctions harmoniques, intimement liées aux fonctions holomorphes ; principe du maximum et lemme de Schwarz. Le développement de Laurent permet l'étude des points singuliers isolés ; le théorème des résidus, déduit de la formule de Stokes, généralise la formule de Cauchy et a de nombreuses applications.

2. La formule C fournit la base de l'étude topologique de l'espace $\mathcal{O}(D)$ des fonctions holomorphes sur un ouvert D de $\mathbf{C}$; le théorème de la représentation conforme d'un domaine simplement connexe est démontré à partir d'une propriété de $\mathcal{O}(D)$ et du lemme de Schwarz par l'intermédiaire des automorphismes du disque.

La formule C permet de résoudre, en u, l'équation $(\partial u/\partial \bar{z})=g$, où g est une fonction continûment différentiable, d'abord pour g à support compact, puis par un procédé d'approximation des fonctions holomorphes, dans le disque ouvert et plus généralement, moyennant le théorème d'approximation de Runge, dans un ouvert de $\mathbf{C}$, d'où les théorèmes de Mittag—Leffler et de Weierstrass dans D qui montrent l'existence de fonctions méromorphes à singularités données.

La notion de surface de Riemann, i.e. de variété analytique complexe de dimension un, est utilisée dès le chapitre 2 dans le cas particulier de la droite projective complexe ou sphère de Riemann ; elle est systématiquement étudiée dans les chapitres 5 et 6. Le chapitre 5 concerne principalement le prolongement analytique d'un germe de fonction holomorphe sur une surface de Riemann ; cela nécessite l'emploi des arcs continus, de l'homotopie, des faisceaux et des revêtements. Le chapitre 6 groupe, outre quelques résultats sur les surfaces de Riemann quelconques, plusieurs théorèmes fondamentaux sur les surfaces de Riemann compactes déduits d'un théorème de finitude de cohomologie, en suivant, pour l'essentiel, un plan dû à J.-P. Serre.

Le chapitre 7 étend facilement des propriétés des fonctions holomorphes à un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et à une variété analytique complexe, puis met en évidence le phénomène de Hartogs pour $n \geqslant 2$ sur l'extension des fonctions holomorphes à certains ensembles d'intérieur non vide. Le chapitre 8 contient les résultats locaux sur les fonctions holomorphes et les ensembles analytiques complexes indispensables à l'analyse complexe globale à plusieurs variables.

Les variétés différentielles, l'algèbre extérieure, les formes différentielles de degré quelconque et leur intégration sur des chaînes différentiables sont décrites sommairement dans l'Appendice.

Les chapitres 1 à 3, éventuellement 4, constituent un enseignement de licence ; les chapitres suivants peuvent fournir la matière d'options d'Analyse complexe en maîtrise.

Sont utilisées sans référence des notions élémentaires de topologie générale dans $\mathbf{R}^n$ ou dans un espace métrique ; le théorème d'Ascoli intervient dans la démonstration de 2.2 du chapitre 3 ; les propriétés utilisées des fonctions C^∞ à support compact sont établies dans le livre de P. Malliavin de la même collection en 3.2.0 et 3.4.2.

Parmi les nombreux ouvrages publiés sur l'Analyse complexe, plusieurs ont été largement utilisés dans cette rédaction, c'est le cas, notamment, de ceux de L. Hörmander [8], H. Cartan [3] et O. Forster [4] ; des références plus précises sont indiquées dans la bibliographie.

Des notes polycopiées de licence de J. COMBES, R.-M. HERVÉ et H. SKODA ont aussi été utilisées ; la mise au point du texte final et la correction des épreuves ont été faites avec l'aide de S. DOLBEAULT-LEMOINE.

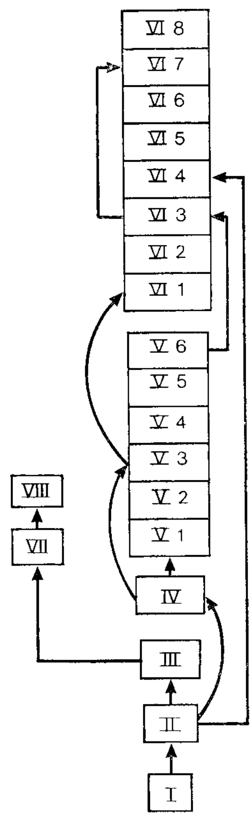


Diagramme d'implication des différents paragraphes

1 FONCTIONS HOLOMORPHES ; THÉORÈMES DE CAUCHY

Les fonctions holomorphes sur un ouvert D de **C** sont les fonctions différentiables au sens complexe en tout point de D ; elles sont caractérisées à l'aide d'opérateurs différentiels particuliers $\partial/\partial\bar{z}$, d$''$, d'où leurs propriétés élémentaires ; une première étude de la fonction logarithme complexe est alors possible. L'intégration des formes différentielles est essentielle pour la suite : les formes différentielles de degré 1 et 2 sur un ouvert de **C** sont définies, ainsi que les ensembles sur lesquels on les intègre (chaînes différentiables) et la formule fondamentale de Stokes est établie ; la notion de 1-forme différentielle fermée est ensuite généralisée. Le théorème de Cauchy s'énonce alors : f holomorphe dans D entraîne : $f\mathrm{d}z$ est fermée dans D. La notion topologique d'indice d'un cycle par rapport à un point est introduite dans le cas différentiable ; compte tenu de la formule de Stokes, on obtient une formule intégrale de Cauchy homologique non homogène assez générale ; la solution de l'équation d$''g=\omega$ s'en déduit pour une donnée à support compact. L'intégrale d'une 1-forme différentielle continue fermée sur des arcs continus est définie, d'où la formule intégrale de Cauchy homotopique, conséquence du théorème de Cauchy. Les notions de variété différentielle de dimensions 1 et 2 et celle de surface de Riemann sont introduites en vue d'études ultérieures : le cas particulier de la sphère de Riemann sera employé dès le chapitre 2 ; les surfaces de Riemann étalées seront utilisées implicitement au chapitre 2, localement au chapitre 3, puis, en général au chapitre 5, enfin les surfaces de Riemann ouvertes ou compactes seront étudiées au chapitre 6.

1. Fonctions holomorphes

On désigne par z un élément du corps des complexes **C** ; on pose $z=x+iy$, $x\in\mathbf{R}$, $y\in\mathbf{R}$ et on identifie **C** à $\mathbf{R}^2$ par l'isomorphisme de **R**-espaces vectoriels : $\mathbf{C}\to\mathbf{R}^2$.
$z\mapsto(x,y)$ L'ensemble **C** sera muni de la topologie définie par la norme $z\mapsto|z|=$ $=(x^2+y^2)^{1/2}$ compatible avec la structure de corps et de **R**-espace vectoriel de **C**.

On considérera des fonctions définies sur un ouvert D de **C** à valeurs dans **C** ou plus généralement dans un espace de Banach complexe.

1.1. Fonctions C-différentiables en un point

1.1.1. Une fonction $f : D \to \mathbf{C}$ est dite **C**-*différentiable* en $z_0 \in D$ s'il existe une forme **C**-linéaire $f'(z_0)$ sur **C** telle que

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)| = \mathrm{o}(z-z_0) \tag{1.1}$$

où $\mathrm{o}(z-z_0)$ est négligeable par rapport à $|z-z_0|$ c'est-à-dire telle que $\dfrac{\mathrm{o}(z-z_0)}{|z-z_0|} \to 0$ quand $z-z_0 \to 0$. La forme **C**-linéaire $f'(z_0)$ est appelée la *dérivée de f au sens complexe en* z_0.

1.1.2. $f'(z_0)$ définit une application **R**-linéaire $\tilde{f}'(z_0)$ pour la structure réelle de **C** à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ telle que

$$\tilde{f}'(z_0)\big((x-x_0), (y-y_0)\big) = f'(z_0)(z-z_0)$$

qui satisfait à :

$$\big|f(z)-f(z_0)-\tilde{f}'(z_0)\big((x-x_0), (y-y_0)\big)\big| = \mathrm{o}(z-z_0), \tag{1.2}$$

autrement dit f est différentiable en z_0 pour la structure réelle de **C** ; en outre les dérivées partielles de f par rapport à x et y satisfont à : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \tilde{f}'(z_0)$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\tilde{f}'(z_0)$: elles sont donc liées par la relation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\,\frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \tag{1.3}$$

Réciproquement, si f est différentiable en z_0 et si ses dérivées partielles par rapport à x et à y satisfont à (1.3), alors, d'après la définition de la différentiabilité en z_0, la forme **C**-linéaire

$$(z-z_0) \mapsto f'(z_0)(z-z_0)$$

avec $\tilde{f}'(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ satisfait à (1.1), i.e. f est **C**-différentiable en z_0.

La condition (1.3) est appelée *la condition de Cauchy* ou de *Cauchy—Riemann*.

1.1.3. La fonction $f : D \to \mathbf{C}$ s'écrit $f = P + iQ$ où P et Q sont des fonctions à valeurs réelles, alors la condition de Cauchy $\dfrac{\partial P}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -i\,\dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ s'écrit, en égalant les parties réelles et imaginaires respectivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= -\frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned} \tag{1.4}$$

1.2. Les opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, d′, d″

On va retrouver et interpréter la condition de Cauchy d'une autre façon.

1.2.1. Pour toute fonction $f : D \to \mathbf{C}$ différentiable au point z_0, on a :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y. \tag{1.5}$$

Les fonctions $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$ sont différentiables en tout point de $\mathbf{C}$ et $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y$; $\mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y$, d'où : $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\mathrm{d}z + \mathrm{d}\bar{z})$; $\mathrm{d}y = \frac{i}{2}(\mathrm{d}\bar{z} - \mathrm{d}z)$; alors $\mathrm{d}f = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{d}z + \mathrm{d}\bar{z}) + \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{d}\bar{z} - \mathrm{d}z)$.

On définit les deux opérateurs différentiels $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ par $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$; $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$; alors (1.5) s'écrit

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z}. \tag{1.6}$$

Si f est $\mathbf{C}$-différentiable en z_0, d'après (1.1), on a : $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$, d'où

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0) \tag{1.7}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0. \tag{1.8}$$

La relation (1.7) exprime que, si f est $\mathbf{C}$-différentiable en z_0, $\frac{\partial}{\partial z}$ est la dérivation complexe ; la relation (1.8) est la condition de Cauchy (1.3).

Dans le cas où f est seulement différentiable (au sens réel), $\frac{\partial}{\partial z}$ $\left(\text{resp. } \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$ n'est pas la dérivation partielle par rapport à la variable complexe z (resp. $\bar{z}$).

1.2.2. On pose $\mathrm{d}'f = \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}''f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z}$; les conditions (1.7) et (1.8) peuvent s'énoncer comme suit :

1.2.3. **Proposition.** — ***Soit $f : D \to \mathbf{C}$ une fonction $\mathbf{R}$-différentiable en un point z_0 de D ; alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :***

(i) ***f est $\mathbf{C}$-différentiable en z_0 ;***

(ii) ***en z_0, on a : $\mathrm{d}'f = \mathrm{d}f$;***

(iii) ***en z_0, on a : $\mathrm{d}''f = 0$.*** □

1.3. Fonction holomorphe sur un ouvert de C

1.3.1. Soit D un ouvert de $\mathbf{C}$, on dit que la fonction $f : D \to \mathbf{C}$ est *holomorphe dans* D si elle est $\mathbf{C}$-différentiable en tout point de D.

1.3.2. **Proposition.** — *Soit $f : D \to \mathbf{C}$; alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est holomorphe dans D ;*

(ii) *$\mathrm{d}f = \mathrm{d}'f$ sur D ;*

(iii) *$\mathrm{d}''f = 0$ sur D.*

DÉMONSTRATION. — Résulte immédiatement de 1.2.3 appliquée en tout point de D. □

1.3.3. Exemple de fonction holomorphe sur un ouvert de C

Toute série entière convergente au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$ est holomorphe dans son disque de convergence : sa dérivée au sens complexe est obtenue par dérivation terme à terme.

Exemple de série convergente : la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{z^n}{n!}$ est convergente dans $\mathbf{C}$, on la note $\exp z = e^z$; on l'appelle *l'exponentielle complexe* ; elle est égale à sa dérivée ; cette propriété et la condition que sa valeur en 0 est 1 la caractérisent.

1.3.4. On appelle *primitive d'une fonction f holomorphe* sur un ouvert D de $\mathbf{C}$ toute fonction holomorphe F sur D dont la dérivée au sens complexe est égale à f. Exemple : $e^z + c$ où $c \in \mathbf{C}$ est une primitive de e^z.

1.4. Propriétés élémentaires de l'ensemble des fonctions holomorphes dans D

1.4.1. **Proposition.** — *L'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert D de $\mathbf{C}$ est une $\mathbf{C}$-algèbre unitaire qu'on notera $\mathcal{O}(D)$.*

1.4.2. **Proposition.** — *Si f est une fonction holomorphe, sans zéro sur D, alors $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur D.*

1.4.3. **Proposition.** — *Si f est holomorphe sur D et si g est holomorphe sur un ouvert D' de $\mathbf{C}$ contenant $f(D)$, alors $g \circ f$ est holomorphe sur D.*

Les trois propositions résultent immédiatement des propriétés correspondantes et connues des fonctions dérivables au sens complexe. □

1.4.4. **Proposition.** — *Si D est un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et f une fonction holomorphe : $D \to \mathbf{C}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est constante sur D ;*

(ii) *$f' = 0$ sur D.*

DÉMONSTRATION. —
(i)$\Rightarrow$(ii) : évident ;
(ii)$\Rightarrow$(i) : f étant **C**-différentiable, on a, pour tout point $z_0 \in D$,

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0$$

d'après la condition de Cauchy. En particulier les dérivées partielles de f par rapport à x et à y sont continues et nulles sur D, donc f est **R**-différentiable sur D et sa **R**-dérivée est nulle, alors, (conséquence du théorème des accroissements finis) f est constante. □

1.4.5.* Proposition.** — ***Soit $f : D \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert connexe de C. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) ***f est constante sur D ;***
(ii) ***$P = \mathscr{R}\mathrm{e} f$ est constante sur D ;***
(iii) ***$Q = \mathscr{I}\mathrm{m} f$ est constante sur D ;***
(iv) ***$|f|$ est constante sur D ;***
(v) ***$\bar{f}$ est holomorphe sur D.***

DÉMONSTRATION. — f étant holomorphe, on a, $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$; (i)$\Leftrightarrow f'(z) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$; d'après la condition de Cauchy $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0 = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ ce qui équivaut à (ci-dessus, preuve de 1.4.4) : les dérivées au sens réel de P et Q sont nulles donc P et Q sont constantes ; cela équivaut à (iv) car $|f|^2 = P^2 + Q^2$. Enfin si f et $\bar{f}$ sont holomorphes, d'après la condition de Cauchy pour f et pour $\bar{f}$, les 4 dérivées partielles de P et Q sont nulles donc (i)$\Leftrightarrow$(v). □

***1.4.6.* Remarque.** — Si $f \in \mathcal{O}(D)$, $\bar{f}$ est dite antiholomorphe sur D.

1.5. La fonction $\log z$

1.5.1. Propriétés de la fonction exponentielle $\exp w$

(a) *additivité : pour tout couple* $(w_1, w_2) \in \mathbf{C}^2$, *on a :*

$$\exp(w_1 + w_2) = \exp w_1 \cdot \exp w_2.$$

DÉMONSTRATION. — $f(w) = e^{w+w_2}e^{-w}$ a pour dérivée $e^{w+w_2}e^{-w} - e^{w+w_2}e^{-w} = 0$, donc est égale à la constante $f(0) = e^{w_2}$; donc $e^{w+w_2}e^{-w} = e^{w_2}$. □

(b) *périodicité :* $\exp w$ *est périodique, de période* $2\pi i$.

DÉMONSTRATION. — $w = x + iy$; $(x, y) \in \mathbf{R}^2$; d'après (a), $e^w = e^x \cdot e^{iy}$; en outre, $e^{iy} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{y^n}{n!} = \sum_{p=0}^{\infty} i^{2p}\frac{y^{2p}}{(2p)!} + \sum_{q=0}^{\infty} i^{2q+1}\frac{y^{2q+1}}{(2q+1)!}$ car la série $\exp w$ est absolument convergente ; mais le dernier membre est égal à

$$\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{y^{2p}}{(2p)!}+i\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q\frac{y^{2q+1}}{(2q+1)!}=\cos y+i\sin y,$$

donc e^{iy} est périodique de période 2π et e^w est périodique, de période $2i\pi$. □

(c) *Pour y réel* $|e^{iy}|=1$; $|\exp w|=e^x$; $e^{iy}=\dfrac{\exp w}{|\exp w|}$; *l'exponentielle ne s'annule pas dans* $\mathbf{C}$.

DÉMONSTRATION. —

$$|e^{iy}| = |\cos y+i\sin y| = (\cos^2 y+\sin^2 y)^{1/2} = 1. \quad \square$$

1.5.2. Détermination continue de l'argument

Soient Ω un ouvert de $\mathbf{C}^*$ et $\theta : \Omega\to\mathbf{R}$ une fonction continue. On dit que θ est une *détermination continue de l'argument sur* Ω si, pour tout $w\in\Omega$, $\theta(w)$ est un argument de w, i.e. $\exp i\theta(w)=\dfrac{w}{|w|}$.

Deux déterminations continues de l'argument définies sur un ouvert connexe diffèrent d'un multiple entier de 2π.

1.5.3. **Proposition et définition.** — ***Soit*** $\Omega=\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-$ ***; l'application*** $\Omega\to\,]-\pi,\pi[$ ***définie par*** $w\mapsto\theta(w)$ ***est continue ; on l'appelle détermination principale de l'argument et on la note*** $\mathbf{Arg}\,w$.

DÉMONSTRATION. —

$$\text{pour } x = \mathscr{R}\mathrm{e}\, w > 0, \text{ on a : } \theta(w) = \operatorname{Arc}\sin \mathscr{I}\mathrm{m}\frac{w}{|w|} ;$$

$$\text{pour } y = \mathscr{I}\mathrm{m}\, w > 0,\ \theta(w) = \operatorname{Arc}\cos \mathscr{R}\mathrm{e}\frac{w}{|w|} ;$$

$$\text{pour } y = \mathscr{I}\mathrm{m}\, w < 0,\ \theta(w) = -\operatorname{Arc}\cos \mathscr{R}\mathrm{e}\frac{w}{|w|}. \quad \square$$

1.5.4. Pour $z\in\mathbf{C}^*$, on appelle *logarithme de* z tout nombre complexe $\log z=w$ tel que $\exp w=z=|z|\cdot\dfrac{z}{|z|}=\exp(\log|z|)\cdot\exp i\theta(z)=\exp\big(\log|z|+i\theta(z)\big)$, donc, compte tenu de la périodicité de l'exponentielle, $w\equiv\log|z|+i\theta(z) \pmod{2i\pi}$.

On appelle *détermination continue* de la fonction logarithme sur un ouvert $\Omega\subset\mathbf{C}^*$, toute application continue $l : \Omega\to\mathbf{C}$ telle que, pour tout $z\in\Omega$, on ait $\exp\big(l(z)\big)=z$. D'après ce qui précède, toute détermination continue du logarithme sur Ω est la fonction

$$z\mapsto\log|z|+i\theta(z)$$

où θ est une détermination continue de l'argument sur Ω.

Deux déterminations continues du logarithme sur un ouvert connexe diffèrent d'un multiple entier de $2\pi i$.

On appelle *détermination principale du logarithme* sur l'ouvert $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-$ la fonction $\operatorname{Log} z = \log |z| + i \operatorname{Arg} z$.

Remarquons qu'un ouvert de $\mathbf{C}^*$ sur lequel est définie une détermination continue de l'argument ou du logarithme n'est pas quelconque ; par exemple $\mathbf{C}^*$ n'est pas un tel ouvert. De tels ouverts sont définis au n° 5.

1.5.5. **Proposition.** — ***Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbf{C}^*$ et soit l une fonction continue : $\Omega \to \mathbf{C}$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :***

(i) ***$l(z)$ est une détermination continue du logarithme dans Ω, à l'addition près d'une constante ;***

(ii) ***$l(z)$ est une primitive de $\frac{1}{z}$ dans Ω.***

Démonstration. — (i)⇒(ii) : on a $\exp(\log z) = z$ et, pour z, $z_0 \in \Omega$, si l est une détermination continue du logarithme, on a :

$$\frac{l(z)-l(z_0)}{z-z_0} = \frac{l(z)-l(z_0)}{\exp\big(l(z)\big)-\exp\big(l(z_0)\big)}.$$

Quand $z \to z_0$, l étant continue, $l(z) \to l(z_0)$ et le second membre tend vers l'inverse de la dérivée de l'exponentielle au point $l(z_0)$, i.e.

$$l'(z_0) = \frac{1}{\exp\big(l(z_0)\big)} = \frac{1}{z_0}.$$

(ii)⇒(i) : Soit F une primitive de $\frac{1}{z}$ dans Ω. Dans Ω, on a,

$$\left(\frac{1}{z}\exp F(z)\right)' = \left(-\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} F'(z)\right)\exp F(z) = 0,$$

donc, comme conséquence de 1.4.4, $\frac{1}{z}\exp F(z) = c \in \mathbf{C}^*$; soit γ un logarithme de c, alors $\exp(F-\gamma) = z$ dans Ω. Donc $F-\gamma$ est une détermination continue du logarithme. □

1.5.6. Toute détermination continue de $\log z$ est holomorphe.

1.5.7. **Proposition.** — ***Pour $|z| < 1$, la détermination principale du logarithme de $(1+z)$ possède le développement en série entière***

$$\mathbf{Log}\,(1+z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} z^p.$$

Démonstration. — Par intégration terme à terme du développement en série entière de la dérivée $\frac{1}{1+z}$ de $\operatorname{Log}(1+z)$, compte tenu de $\operatorname{Log} 1 = 0$. □

1.6. Fonctions déduites de $\exp z$ et de $\log z$

1.6.1. Sur un ouvert Ω de $\mathbf{C}^*$ et pour $\alpha \in \mathbf{C}$, on appelle *détermination continue de z^α* toute application continue $g : \Omega \to \mathbf{C}$ telle que, pour tout $z \in \Omega$, il existe un logarithme ζ de z satisfaisant à : $g(z) = e^{\alpha\zeta}$.

Si $\alpha \in \mathbf{Z}$, z^α est la puissance α-ième de z ; si l est une détermination continue de la fonction log, alors $g_\alpha : z \mapsto \exp(\alpha l(z))$ en est une de z^α sur Ω ; c'est ce type de détermination qui sera généralement utilisé.

1.6.2. Les propriétés suivantes s'établissent aisément :

Dans Ω, g_α est holomorphe et a pour dérivée $\alpha z^{-1} g_\alpha$.

Si $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, alors $g_\alpha \cdot g_\beta = g_{\alpha+\beta}$.

Pour $z_1, z_2 \in \Omega$, $g_\alpha(z_1 z_2)$ n'est pas nécessairement égal à $g_\alpha(z_1) \cdot g_\alpha(z_2)$.

1.6.3. Sur l'ouvert $\Omega = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$, on appelle *détermination principale* de z^α la fonction $z \mapsto \exp[\alpha \operatorname{Log} z]$.

De même, la détermination principale, sur $|z| < 1$, de la fonction $(1+z)^\alpha$ sera
$$\exp[\alpha \operatorname{Log}(1+z)] = 1 + \alpha z + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots .$$

Plus généralement, si $f : \Omega \to \mathbf{C}$ est une fonction holomorphe sur l'ouvert Ω de $\mathbf{C}$, on appellera détermination principale de la fonction $\log f(z)$, resp. $[f(z)]^\alpha$ la fonction $\operatorname{Log} f(z)$, resp. $\exp[\alpha \operatorname{Log} f(z)]$ définie sur l'ouvert

$$\Omega' = \Omega \setminus \{z \in \Omega \ ; \ \mathscr{I}\mathrm{m} f(z) = 0, \ \mathscr{R}\mathrm{e} f(z) \leqslant 0\}.$$

2. Formes différentielles de degré 1 et 2, chaînes différentiables de dimension 0, 1 et 2 ; formule de Stokes

2.1. Différentielle en un point

Soit D un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et x un point de D. On va reprendre et préciser la notion de différentielle en x.

Soit $\mathscr{F}_x$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes définies au voisinage de x dans D et dérivables en x, i.e. pour toute $f \in \mathscr{F}_x$, il existe un voisinage V de x sur lequel f est définie et f est dérivable en x.

Soient $f, g \in \mathscr{F}_x$, alors f et g sont définies toutes deux sur un voisinage V de x. On considère, sur $\mathscr{F}_x$, la relation $\mathscr{R}$ définie comme suit : $f, g \in \mathscr{F}_x$, $f \mathscr{R} g$ signifie : f et g ont même dérivée en x ; $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence. L'ensemble $\mathscr{F}_x$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel pour l'addition des fonctions et la multiplication par les complexes et la relation $\mathscr{R}$ est compatible avec les deux lois de composition, donc $\mathscr{F}_x/\mathscr{R}$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. On désigne par $f'(x)$ la dérivée de $f \in \mathscr{F}_x$ au point x ; $f'(x) \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^2 ; \mathbf{C})$. Considérons l'application

$$\theta_X^* : \mathscr{F}_x/\mathscr{R} \to \mathscr{L}(\mathbf{R}^2 ; \mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}^2$$
$$\text{classe de } f \mapsto f'(x).$$

θ_x^* est une application $\mathbf{C}$-linéaire injective. Soient (x_1, x_2) les coordonnées dans $\mathbf{R}^2$, $f'(x)$ est l'application linéaire

$$(h_1, h_2) \mapsto f'(x)(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) h_2, \quad \text{où} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in \mathscr{L}(\mathbf{R} \; ; \; \mathbf{C}),$$

i.e. la multiplication par la constante complexe $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$. En particulier, $x_j'(x)(h_1, h_2) = h_j$, alors

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) x_1'(x) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) x_2'(x) \; ;$$

$x_1'(x)$, $x_2'(x)$ engendrent $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2 \; ; \; \mathbf{C})$ car elles sont linéairement indépendantes, et θ_x^* est surjective. θ_x^* est un $\mathbf{C}$-isomorphisme d'espaces vectoriels. $T_x^* = \mathscr{F}_x/\mathscr{R}$ est appelé *l'espace cotangent complexe* à D en x ; les éléments de T_x^* sont appelés les *différentielles* en x ; on désigne par $\mathrm{d}_x f$ la classe de f dans T_x^* et on l'appelle la différentielle de f en x ; en outre

$$\mathrm{d}_x f = (\partial f/\partial x_1)(x)\, \mathrm{d}_x x_1 + (\partial f/\partial x_2)(x)\, \mathrm{d}_x x_2 \; ;$$

de plus, tout élément de T_x^* s'écrit $\omega = \lambda_1\, \mathrm{d}x_1 + \lambda_2\, \mathrm{d}x_2$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ et en posant $\mathrm{d}x_j = \mathrm{d}_x x_j$, $j = 1, 2$.

2.2. Formes différentielles de degré 1

On considère l'ensemble suivant $T^*(D) = \bigcup_{x \in D} T_x^*$, réunion disjointe des T_x^*, $x \in D$ et l'application projection

$$\begin{aligned} \pi = \pi_D : T^*(D) &\to D \\ \mathrm{d}_x f &\mapsto x. \end{aligned}$$

Pour tout ouvert U de D, soit $\varphi : U \to T^*(D)$ une application telle que $\pi \circ \varphi = \mathrm{id}_U$, alors $\varphi(x) = a_1(x)\, \mathrm{d}x_1 + a_2(x)\, \mathrm{d}x_2$, où a_j est une application $U \to \mathbf{C}$, est appelée une *forme différentielle de degré* 1 (ou 1*-forme différentielle*) *sur* U.

On dira que φ est (de classe) C^r si les fonctions a_j sont de classe C^r.

En particulier, si f est une fonction de classe C^{r+1} sur U, $x \mapsto \mathrm{d}_x f = (\partial f/\partial x_1)(x)\, \mathrm{d}x_1 + (\partial f/\partial x_2)(x)\, \mathrm{d}x_2$ est une 1-forme C^r notée $\mathrm{d}f$.

2.3. D'après le n° 1, si f est une fonction C^1 sur un ouvert U de $\mathbf{C}$, alors $\mathrm{d}f = (\partial f/\partial z)\, \mathrm{d}z + (\partial f/\partial \bar{z})\, \mathrm{d}\bar{z}$ et toute 1-forme différentielle φ s'écrit $\varphi = b(z)\, \mathrm{d}z + c(z)\, \mathrm{d}\bar{z}$.

Si b est une fonction holomorphe et si $c = 0$, alors $\varphi = b(z)\, \mathrm{d}z$ est appelée une 1*-forme différentielle holomorphe.*

2.4. Formes différentielles de degré 2

2.4.1. Algèbre extérieure d'un espace vectoriel de dimension 2

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps K avec $K=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$; on définit (voir Appendice) un K-espace vectoriel $\Lambda^2 E$ dont les éléments sont les sommes finies d'éléments $x\wedge y$, où $x, y\in E$, le symbole $\wedge$ possédant les propriétés suivantes, pour $x, y, x_1, x_2\in E$, $\lambda\in K$

(i) $x\wedge y=-y\wedge x$ (anticommutativité)

(ii) $(x_1+x_2)\wedge y=x_1\wedge y+x_2\wedge y$ (distributivité par rapport à l'addition)

(iii) $(\lambda x)\wedge y=\lambda(x\wedge y)$.

En particulier, si (e_1, e_2) est une base de E, alors $e_1\wedge e_2$ est une base de $\Lambda^2 E$. $\Lambda^2 E$ est un K-espace vectoriel de dimension 1 appelé *puissance extérieure* seconde de E ; $\wedge$ est appelé *produit extérieur.*

Plus généralement, pour E de dimension quelconque finie, on définit la puissance extérieure p-ième $\Lambda^p E$ de E, espace vectoriel engendré par $x_1\wedge\ldots\wedge x_p$ pour $x_j\in E$, $j=1, \ldots, p$, $\wedge$ satisfaisant aux conditions (i), (ii), (iii). A cause de (i), on voit que si E est de dimension 2, $\Lambda^p E=0$ pour $p\geqslant 3$; en particulier, pour $x_1, x_2, x_3\in E$, on a $x_1\wedge x_2\wedge x_3=0$. Posons $\Lambda^0 E=K$, $\Lambda^1 E=E$, la somme directe $\Lambda^\bullet E=\bigoplus_{p\geq 0}\Lambda^p E$ est une K-algèbre dont la multiplication est définie par $\wedge$. Dans le cas où $\dim_K E=2$, on a $\Lambda^\bullet E=K\oplus E\oplus\Lambda^2 E$; $\Lambda^2 E$ est l'algèbre extérieure de E.

2.4.2. Comme en 2.1, soient D un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $x\in D$; alors T_x^* est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension 2 ayant la base $(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2)$; si D est un ouvert de $\mathbf{C}$ de coordonnée $z=x_1+ix_2$, $(\mathrm{d}z, \mathrm{d}\bar{z})$ est une base de T_x^* ; alors $\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$ est une base de $\Lambda^2 T_x^*$ et, dans le deuxième cas, $\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}$ en est aussi une base ; en outre $\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}=$ $=-2i\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$.

On pose $\Lambda^2 T^*(D)=\bigcup_{x\in D}\Lambda^2 T_x^*\xrightarrow{\pi}D$, où $\bigcup_{x\in D}$ est la réunion disjointe et π la projection $\lambda\,\mathrm{d}_x x_1\wedge\mathrm{d}_x x_2\mapsto x$. Soit U un ouvert de D ; toute application $\omega : U\to\Lambda^2 T^*(D)$ telle que $\pi\circ\omega=\mathrm{id}_U$ est appelée une *2-forme différentielle* (ou *forme différentielle de degré* 2) sur U ; alors $\omega(x)=f(x)\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$ où $f : U\to\mathbf{C}$ est une fonction.

On dira que ω est (de classe) C^r si f est de classe C^r. On désigne par $\mathscr{E}(U)$ l'anneau des fonctions C^1 sur U, par $\mathscr{E}^p(U)$ le $\mathscr{E}(U)$-module des p-formes différentielles C^1 sur U (où C^∞ sur U suivant le contexte).

La définition et les propriétés données de l'algèbre extérieure s'étendent aux K-modules lorsque K est un anneau commutatif unitaire. En particulier $\mathscr{E}^\bullet(U)=$ $=\mathscr{E}(U)\oplus\mathscr{E}^1(U)\oplus\mathscr{E}^2(U)$ est une $\mathscr{E}(U)$-algèbre.

On appelle *support* d'une forme différentielle ω sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel ω est nulle : c'est un fermé noté $\operatorname{spt}\omega$.

2.5. Image réciproque par une application différentiable ; différentiation extérieure ; intégrale d'une 2-forme

2.5.1. Soient Δ un ouvert de $\mathbf{R}^2$ ou de $\mathbf{R}$, et $\mu : \Delta \to D$ une application C^1. Si $\varphi, f \in \mathscr{E}^{\cdot}(D)$; $\varphi = a_1\,\mathrm{d}x_1 + a_2\,\mathrm{d}x_2$; $\omega = f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$, on pose

$$\mu^* f = f \circ \mu; \quad \mu^* \varphi = \mu^* a_1\,\mathrm{d}(\mu^* x_1) + \mu^* a_2\,\mathrm{d}(\mu^* x_2); \quad \mu^* \omega = \mu^* f\,\mathrm{d}(\mu^* x_1) \wedge \mathrm{d}(\mu^* x_2).$$

Pour $\varphi \in \mathscr{E}^{\cdot}(D)$, on a : $\operatorname{spt} \mu^* \varphi = \mu^{-1}(\operatorname{spt} \varphi)$. Dans le cas où μ est *propre* (i.e. telle que l'image réciproque de tout compact soit un compact), si $\varphi \in \mathscr{E}^{\cdot}(D)$ est à support compact, il en est de même de $\mu^* \varphi$.

La forme $\mu^* \varphi$ est appelée l'*image réciproque de* φ *par* μ.

2.5.2. Différentiation extérieure

Soient f une fonction C^1 sur un ouvert D de $\mathbf{R}^2$, la différentielle de f est

$$\mathrm{d}f = (\partial f/\partial x_1)\,\mathrm{d}x_1 + (\partial f/\partial x_2)\,\mathrm{d}x_2.$$

Pour $\varphi = a_1\,\mathrm{d}x_1 + a_2\,\mathrm{d}x_2 \in \mathscr{E}^1(D)$ et $\omega = f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \in \mathscr{E}^2(D)$, la *différentielle extérieure* de φ est, par définition :

$$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}a_2 \wedge \mathrm{d}x_2 = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\ ;$$

celle de ω est

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 = 0.$$

On vérifie immédiatement les propriétés suivantes : pour $\alpha, \beta \in \mathscr{E}^{\cdot}(D)$, on a :

$$\mathrm{d}(\alpha + \beta) = \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\beta \tag{2.1}$$

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \mathrm{d}\beta \quad \text{si } \alpha \text{ est de degré } p\,; \tag{2.2}$$

$$\mathrm{d}^2\alpha = \mathrm{d}\mathrm{d}\alpha = 0, \quad \text{si } \alpha \text{ est } C^2, \tag{2.3}$$

$$\operatorname{spt} \mathrm{d}\alpha \subset \operatorname{spt} \alpha. \tag{2.4}$$

En outre, pour toute application $\mu : \Delta \to D$ de classe C^1, on a :

$$\mathrm{d}\mu^* = \mu^*\,\mathrm{d}\,; \tag{2.5}$$

il suffit de vérifier (2.5) sur $f \in \mathscr{E}(D)$ et pour Δ ouvert de $\mathbf{R}$ muni de la coordonnée t

$$\mu^* f(t) = f(\mu(t))\,;\ \mathrm{d}\mu^* f(t) = \mathrm{d}(f(\mu(t))) =$$
$$= (\partial f/\partial x_1)(\mu(t))\,\mathrm{d}(\mu^* x_1) + (\partial f/\partial x_2)(\mu(t))\,\mathrm{d}(\mu^* x_2) = \mu^*\,\mathrm{d}f(t).$$

D'après les propriétés (2.1), (2.2), d est un endomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire du $\mathbf{C}$-espace vectoriel des formes différentielles C^∞ sur D.

On dit qu'une forme (différentielle) φ, C^1, est d-*fermée* (ou simplement *fermée*) si $\mathrm{d}\varphi = 0$, en particulier, si $\omega = \mathrm{d}\alpha$, on a $\mathrm{d}\omega = 0$, d'après (2.3).

Si D est un ouvert de $\mathbf{C}$ (de coordonnée z), on définit, de même, dans les notations de 1.2, $\mathrm{d}' = (\partial/\partial z)\,\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}'' = (\partial/\partial \bar{z})\,\mathrm{d}\bar{z}$; pour une fonction f, $\mathrm{d}'f$ et $\mathrm{d}''f$ ont déjà été considérés (1.2) ; pour φ de degré 1, on a :

$$\varphi = b\,\mathrm{d}z + c\,\mathrm{d}\bar{z} \text{ ; alors } \mathrm{d}'\varphi = \mathrm{d}'b\wedge\mathrm{d}z + \mathrm{d}'c\wedge\mathrm{d}\bar{z} = (\partial c/\partial z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}$$

$$\mathrm{d}''\varphi = \mathrm{d}''b\wedge\mathrm{d}z + \mathrm{d}''c\wedge\mathrm{d}\bar{z} = -(\partial b/\partial\bar{z})\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}.$$

Les propriétés (2.1) à (2.4) sont valides pour d′ ou d″ au lieu de d. Si Δ est un ouvert de **C** et μ une fonction holomorphe : $\Delta \to D$, on a :

$$\mathrm{d}''\mu^* = \mu^*\,\mathrm{d}''. \tag{2.6}$$

On dit que φ est *d″-fermée* si $\mathrm{d}''\varphi = 0$.

2.5.3. *Intégrale d'une forme de degré 2 sur D*

Soit ω une 2-forme C^0 à support compact dans D, alors $\omega = f\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$; par définition, l'intégrale de ω sur D est

$$\int_D \omega = \int_D f(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \tag{2.7}$$

où $\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$ est la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^2$.

La définition des formes différentielles de 2.2 et de 2.4.2 est valide lorsque les *coefficients* a_1, a_2 dans le premier cas, f dans le second sont des fonctions intégrables sur U ; on dira alors que les formes différentielles sont *intégrables*. La définition (2.7) ci-dessus est valide pour une 2-forme ω intégrable.

2.5.4. Théorème. — ***Si φ est une 1-forme différentielle C^1 sur D, à support compact, alors $\int_D \mathrm{d}\varphi = 0$.***

DÉMONSTRATION. —

$$\varphi = a_1\,\mathrm{d}x_1 + a_2\,\mathrm{d}x_2 \text{ ; } \int_D \mathrm{d}\varphi = \int_D (\partial a_2/\partial x_1)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 - \int_D (\partial a_1/\partial x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \text{ ;}$$

mais

$$\int_D (\partial a_2/\partial x_1)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (\partial a_2/\partial x_1)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\partial a_2/\partial x_1)\,\mathrm{d}x_1\right]\mathrm{d}x_2 = 0,$$

car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\partial a_2/\partial x_1)\,\mathrm{d}x_1 = [a_2(.\,, x_2)]_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

a_2 étant à support compact dans D, donc aussi dans $\mathbf{R}^2$.

Même raisonnement pour $\int_D (\partial a_1/\partial x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$. □

2.6. Chaînes différentiables

Soit D un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

2.6.1. Chaînes de dimension 0

On appelle 0-*chaîne* (ou *chaîne de dimension* 0) de D, toute combinaison linéaire finie, à coefficients dans $A=\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ de points de D : $\sum_{j\in J} n_j a_j$ où J est un ensemble fini, $n_j \in A$, a_j est un point de D.

Cette définition s'étend aux combinaisons linéaires localement finies de points d'un ensemble discret de D.

Les 0-chaînes constituent un groupe commutatif et même un module sur $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, l'addition étant définie par l'addition des coefficients.

2.6.2. Chaînes de dimension 1

On appelle *arc élémentaire différentiable* tout couple $\underline{\gamma}=(I, F)$ où I est l'intervalle fermé $[0, 1]$ de $\mathbf{R}$, ou, plus généralement, un intervalle fermé $[\alpha, \beta]$ de $\mathbf{R}$, $\alpha \neq \beta$, avec la coordonnée t, orienté dans le sens des t croissants et F une application C^1 propre d'un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenant I dans D.

On appelle bord de I la 0-chaîne $\{1\}-\{0\}$ de $\mathbf{R}$; $a=F(0)$ *l'origine* de $\underline{\gamma}$; $b=F(1)$ *l'extrémité* de $\underline{\gamma}$ et $b\underline{\gamma}=b-a$ le bord de $\underline{\gamma}$.

On dit que deux arcs élémentaires $\underline{\gamma}=(I, F)$ et $\underline{\delta}=(I, G)$ sont liés par la relation $\mathscr{R}$ s'il existe un difféomorphisme ϕ d'un voisinage de I dans lui-même, sur lequel F et G sont définis, tel que $\phi(0)=0$, $\phi(1)=1$ et $F=G\circ\phi$; on remarque que $\phi|I$ est une application strictement croissante de I sur I. La relation $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des arcs élémentaires et toute classe d'équivalence pour $\mathscr{R}$ sera appelée une 1-*chaîne élémentaire*. On appellera *bord* de la 1-chaîne élémentaire γ le bord $b-a$ de tout représentant de γ.

On appelle 1-*chaîne différentiable entière* (resp. *réelle, complexe*) toute combinaison linéaire $\gamma=\sum_{j\in J} n_j\gamma_j$ de 1-chaînes différentiables élémentaires γ_j à coefficients n_j dans $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. L'ensemble des 1-chaînes est un module sur $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Par définition, le *support* de γ est $\operatorname{spt}\gamma=\bigcup_{j\in J} F_j(I)$, avec $\underline{\gamma}_j=(I, F_j)$; l'ensemble J étant fini, $\operatorname{spt}\gamma$ est compact.

Noter que, pour tout γ de représentant (I, F), F définit, quand t croît de 0 à 1, un sens de parcours de $\operatorname{spt}\gamma$ qu'on appelle une orientation de γ.

On étend la définition des 1-chaînes aux combinaisons linéaires $\sum_{j\in J} n_j\gamma_j$ où J est un ensemble quelconque, mais telles que la famille $(\gamma_j)_{j\in J}$ soit *localement finie* i.e. satisfasse à la condition suivante : pour tout $x\in D$, il existe un voisinage V_x de x dans D tel que $V_x\cap\operatorname{spt}\gamma_j=\emptyset$ sauf pour un nombre fini d'indices j ; la 1-chaîne est alors dite *localement finie*.

Les 1-chaînes constituent un groupe commutatif.

Par définition le bord de γ est $b\gamma=\sum_{j\in J} n_j b\gamma_j$. Une 1-chaîne γ de bord 0 est appelée un *cycle* ; on dit aussi que γ est *fermée*.

2.6.3. Intégrales sur une 1-chaîne

Soit φ une 1-forme différentielle C^0 ou même, seulement, localement intégrable ; pour tout arc élémentaire $\underline{\gamma}=(I, F)$, on pose $\int_{\underline{\gamma}} \varphi=\int_I F^*\varphi$; si $\underline{\delta}=(I, G)$ est un arc élémentaire équivalent à $\underline{\gamma}$, avec $F=G\circ\phi$, on a : $\int_I F^*\varphi=\int_I \phi^*\circ G^*\varphi= =\int_{\phi(I)} G^*\varphi=\int_I G^*\varphi$; $\int_{\underline{\gamma}} \varphi$ ne dépend que de la 1-chaîne élémentaire γ dont $\underline{\gamma}$ est un représentant et se note $\int_\gamma \varphi$. Pour toute $f\in\mathscr{E}(D)$ et toute 1-chaîne élémentaire γ de bord $b\gamma=b-a$, on a :

$$(2.8)\quad \int_\gamma \mathrm{d}f=\int_I F^*\,\mathrm{d}f=\int_I \mathrm{d}F^*f=\int_0^1 \mathrm{d}(f(F(t)))=f(F(1))-f(F(0))=f(b)-f(a).$$

Si $\gamma=\sum_{j\in J} n_j\gamma_j$ est une 1-chaîne, par définition

$$\int_\gamma \varphi=\sum_{j\in J} n_j\int_{\gamma_j}\varphi.$$

Alors, pour $f\in\mathscr{E}(D)$, on a $\int_\gamma \mathrm{d}f=\sum_{j\in J} n_j(f(b_j)-f(a_j))$ où $b\gamma_j=b_j-a_j$.

On appellera *arc différentiable par morceaux* toute 1-chaîne $\gamma=\sum_{j=0}^{p}\gamma_j$ où les γ_j sont des 1-chaînes élémentaires de bord $b\gamma_j=b_j-a_j$ telles que $b_j=a_{j+1}, j=0, \dots, p-1$, alors

$$b\gamma=\sum_{j=0}^{p} b\gamma_j=\sum_{j=0}^{p}(b_j-a_j)=b_p-a_0.$$

On pose $b_p=b$, $a_0=a$, $\operatorname{spt}\gamma$ est connexe, on dira que a est l'origine de γ et b son extrémité, ou encore que l'arc γ *joint* a *à* b.

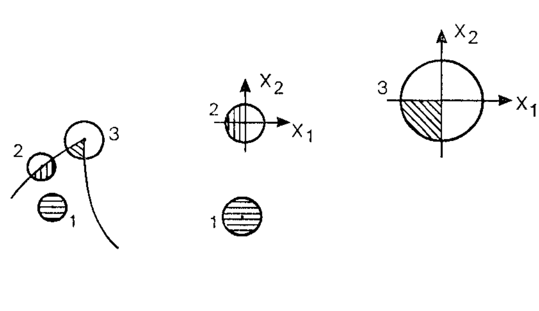
Dans le cas $b=a$, γ est un cycle à support connexe.

Dans les notations ci-dessus, si γ est un arc différentiable par morceaux de bord $b-a$, on a

$$\int_\gamma \mathrm{d}f=f(b)-f(a).$$

2.6.4. Chaînes de dimension 2

On appelle *compact à bord* Z dans $\mathbf{R}^2$ toute partie compacte connexe possédant les propriétés suivantes : tout point x de Z a un voisinage ouvert V_x dans Z homéomorphe à un ouvert W de $\mathbf{R}^2$ (type 1 de la figure ci-dessous), ou du demi-espace $\Delta=\{(x_1, x_2)\in\mathbf{R}^2 ;\ x_1\leqq 0\}$ (type 2) ou du quadrant $Q=\{(x_1, x_2)\in\mathbf{R}^2 ;\ x_1\leqq 0 ;\ x_2\leqq 0\}$



(type 3) ; soit $h : V_x \to W$ l'homéomorphisme ; on suppose, en outre, dans les deux derniers cas, qu'il existe un ouvert V'_x de D ; un ouvert W' de $\mathbf{R}^2$ tels que $V_x = V'_x \cap Z$; $W = W' \cap \Delta$ (resp. $W' \cap Q$) et un difféomorphisme $h' : V'_x \to W'$ tel que $h'|V_x = h$. Z sera dit de classe C^1 si tous les difféomorphismes h, h^{-1} sont de classe C^1. On appelle *2-chaîne différentiable élémentaire* de D tout couple (Z, F) formé d'un compact à bord Z de $\mathbf{R}^2$ et d'une application C^1 propre F dans D, d'un voisinage ouvert de Z dans $\mathbf{R}^2$.

On dira que deux 2-chaînes élémentaires (Z, F), (Z', G) sont liées par la relation $\mathcal{R}$ s'il existe un difféomorphisme ϕ d'un voisinage de Z sur un voisinage de Z' sur lesquels F et G sont définis respectivement, tel que $\phi(Z) = Z'$, que le jacobien de ϕ soit strictement positif en tout point et que $F = G \circ \phi$.

La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des 2-chaînes élémentaires ; on appellera désormais *2-chaîne différentiable élémentaire* de D toute classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$.

Soit $bZ = Z \setminus \mathring{Z}$ orienté de la façon suivante : au voisinage d'un point du type 2, l'orientation est celle définie par l'axe des x_2, au voisinage d'un point du type 3, elle est définie par l'orientation de l'axe des x_2, puis par l'orientation opposée à celle de l'axe des x_1.

Soit Γ une 2-chaîne élémentaire ayant un représentant (Z, F), la classe de (bZ, F) est une 1-chaîne différentiable fermée (ou *1-cycle*) appelée *bord* de Γ et notée $b\Gamma$.

On appelle *2-chaîne différentiable* de l'ouvert D, toute combinaison linéaire Γ, à coefficients dans $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ de chaînes élémentaires Γ_j, de représentants (Z_j, F_j) ; $\Gamma = \sum_{j \in J} n_j \Gamma_j$, J fini ; par définition, le bord de Γ est $b\Gamma = \sum_{j \in J} n_j b\Gamma_j$; on appelle *support* de Γ l'ensemble compact $\bigcup_{j \in J} F_j(Z_j)$.

Comme pour la dimension 1, on considère aussi les 2-chaînes localement finies

2.6.5. *Intégration d'une 2-forme différentielle sur une 2-chaîne*

Soit (Z, F) un représentant d'une 2-chaîne élémentaire Γ ; pour toute 2-forme différentielle ω sur D, on appelle intégrale de ω sur (Z, F) l'expression $\int_Z F^*\omega$; soit (Z', G) un autre représentant, dans les notations de 2.6.4, on a $F = G \circ \phi$

$$F = (F_1, F_2) : Z \to D \; ; \; \omega = f(x_1, x_2)\, dx_1 \wedge dx_2$$

$$u = (u_1, u_2) \mapsto x = (x_1, x_2)$$

$$\int_Z F^*\omega = \int_Z f(F(u)) \frac{D(F_1, F_2)}{D(u_1, u_2)} du_1\, du_2 \; ; \; \phi : Z \to Z' \; ; \; G = (G_1, G_2) : Z' \to D$$

$$u \mapsto v = (v_1, v_2) \qquad\qquad v \mapsto x$$

$$\int_Z F^*\omega = \int_Z f(G \circ \phi(u)) \frac{D(G_1, G_2)}{D(v_1, v_2)} \cdot \frac{D(v_1, v_2)}{D(u_1, u_2)} du_1\, du_2 =$$

$$= \int_{\phi(Z) = Z'} f(G(v)) \frac{D(G_1, G_2)}{D(v_1, v_2)} dv_1\, dv_2 = \int_{Z'} G^*\omega$$

d'après la formule de changement de variables dans une intégrale double et parce que le jacobien de ϕ est >0 ; $\int_Z F^*\omega$ ne dépend donc que de la 2-chaîne élémentaire Γ ; alors par définition, *l'intégrale de ω sur Γ est* $\int_\Gamma \omega = \int_Z F^*\omega$. Pour une 2-chaîne différentiable Γ, on définit $\int_\Gamma \omega$ par linéarité.

2.7. Formule de Stokes

2.7.1. Soient D un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $(V_\beta)_{\beta\in B}$ un recouvrement ouvert de D. Alors, il existe une famille $(\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ de fonctions C^p $(p \geqq 1)$ positives, à supports compacts telle que :

1) pour tout $\alpha\in A$, il existe $\beta\in B$ avec spt $\psi_\alpha \subset V_\beta$;
2) $(\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ est localement finie, i.e. telle que tout point $x\in D$ ait un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini d'ensembles spt ψ_α;
3) la somme $\sum_{\alpha\in A} \psi_\alpha$, finie en tout point $x\in D$, est égale à 1 sur D.

On dit que $(\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une *partition différentiable de l'unité subordonnée à* $(V_\beta)_{\beta\in B}$

2.7.2. On utilisera aussi la variante suivante du n° 2.7.1 : $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ étant un recouvrement ouvert de l'ouvert D de $\mathbf{R}^2$, il existe une famille $(\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ de fonctions C^p $(p\geqq 1)$ positives, avec spt $\psi_\alpha \subset V_\alpha$ pour tout $\alpha\in A$, localement finie, possédant la propriété suivante : la somme $\sum_{\alpha\in A}\psi_\alpha$ est égale à 1 sur D. La famille $(\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ sera appelée une *partition différentiable de l'unité subordonnée à* $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$.

On remarque les différences suivantes avec 2.7.1 : le support de ψ_α n'est pas nécessairement compact, mais la famille (ψ_α) et le recouvrement (V_α) sont indexés par le même ensemble A et spt $\psi_\alpha\subset V_\alpha$. Le contexte montrera, sans ambiguïté, celle des deux notions qui sera utilisée.

2.7.3. Soient $\Gamma=(Z, F)$ un représentant d'une 2-chaîne différentiable élémentaire Γ pour laquelle Z et F sont de classe C^1 et φ une 1-forme différentielle de classe C^1 sur D. Soit V un voisinage de Z dans $\mathbf{R}^2$ sur lequel F est définie. Soit $(V_\beta)_{\beta\in B}$ un recouvrement ouvert de V tel que, pour tout $V_\beta\cap Z$, il existe un difféomorphisme h_β de $V_\beta\cap Z$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$, d'un demi-espace, ou d'un quadrant. Soit $(\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ une partition différentiable de l'unité subordonnée à (V_β) ; alors $\sum_{\alpha\in A}\psi_\alpha=1$. Pour tout $\alpha\in A$, on a : spt $(\psi_\alpha F^*\varphi)\subset V_\beta$

$$\sum_{\alpha\in A} \mathrm{d}(\psi_\alpha F^*\varphi) = \mathrm{d}\big((\sum_\alpha \psi_\alpha)F^*\varphi\big) = \mathrm{d}F^*\varphi = F^*\mathrm{d}\varphi.$$

$$\int_\Gamma \mathrm{d}\varphi = \int_Z F^*\mathrm{d}\varphi = \sum_{\alpha\in A}\int_Z \mathrm{d}(\psi_\alpha F^*\varphi) = \sum_{\alpha\in A}\int_{V_\beta\cap Z}\mathrm{d}(\psi_\alpha F^*\varphi).$$

Supposons que le compact à bord Z possède la propriété suivante : tout point du bord de Z a un voisinage ouvert difféomorphe à un ouvert d'un demi-espace ; on a :

$$\int_{V_\beta\cap Z}\mathrm{d}(\psi_\alpha F^*\varphi) = \int_{h_\beta(V_\beta\cap Z)}\mathrm{d}\big(h_\beta^{-1*}(\psi_\alpha F^*\varphi)\big) \tag{2.9}$$

ou bien $V_\beta\cap bZ=\emptyset$, alors le second membre de (2.9) est nul d'après le théorème 2.5.4, ou bien $V_\beta\cap bZ\neq\emptyset$; alors pour des coordonnées (x_1, x_2) convenables (voir 2.6.4) dans $h_\beta(V_\beta)$, on a : $h_\beta^{-1*}(\psi_\alpha F^*\varphi)=a_1\,\mathrm{d}x_1+a_2\,\mathrm{d}x_2$ et

$$\int_{h_\beta(V_\beta\cap Z)} \mathrm{d}(h_\beta^{-1*}(\psi_\alpha F^*\varphi)) = \int_{x_1=-\infty}^{0} \int_{x_2=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ ;$$

mais

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 = a_2(0, x_2),$$

donc

$$\int_{V_\beta\cap Z} \mathrm{d}(\psi_\alpha F^*\varphi) = \int_{x_2=-\infty}^{+\infty} a_2(0, x_2)\,\mathrm{d}x_2 = \int_{V_\beta\cap bZ} \psi_\alpha F^*\varphi,$$

d'où, en sommant sur $\alpha\in A$,

$$\int_\Gamma \mathrm{d}\varphi = \sum_{\alpha\in A} \int_{V_\beta\cap bZ} \psi_\alpha F^*\varphi = \int_{bZ} F^*\varphi = \int_{b\Gamma} \varphi.$$

Le cas où Z a des points ayant un voisinage difféomorphe à un quadrant se traite de la même façon.

Pour une 1-chaîne quelconque Γ, on a, de même, par linéarité

$$\int_\Gamma \mathrm{d}\varphi = \int_{b\Gamma} \varphi \tag{2.10}$$

c'est la *formule de Stokes* qui a exactement la même forme que (2.8) pour $\varphi=f$ de degré 0 ; (2.8) sera aussi appelée formule de Stokes.

2.8. Formes différentielles fermées

Soit D un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

2.8.1. Si, pour tout couple (a, b) de points de D, il existe un arc différentiable par morceaux joignant a et b, on dit que D est *connexe par arcs différentiables par morceaux*.

2.8.2.* Proposition. — *Tout ouvert D de $\mathbf{R}^2$ connexe est connexe par arcs différentiables par morceaux.

DÉMONSTRATION. — Tout point $x\in D$ est centre d'un disque ouvert U contenu dans D. Tout point de U est joint à x par un segment de droite contenu dans U. Soient a un point de D et $E=\{y\in D$; il existe un arc différentiable par morceaux joignant a à $y\}$; E est ouvert non vide d'après ce qui précède. Soit $z\in\bar{E}$; tout disque ouvert U contenu dans D, centré en z, rencontre E, il existe un segment de droite joignant tout $x\in U\cap E$ à z dans U, donc un arc différentiable par morceaux joignant a à z, i.e. E est fermé ; D étant connexe, $E=D$. □

2.8.3. Soit ω une 1-forme différentielle C^0 sur D ; une fonction F de classe C^1 sur D est dite *primitive* de ω si $\mathrm{d}F=\omega$.

2.8.4.* Lemme de Poincaré. — *Soit ω une 1-forme différentielle C^1 dans un disque ouvert D de $\mathbf{R}^2$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{d}\omega=0$;

(ii) *ω a une primitive F, C^2 dans D.*

DÉMONSTRATION. — (ii)⇒(i) : $\omega = dF$ est de classe C^1 et $d\omega = ddF = 0$.

(i)⇒(ii) : Soient (x, y) les coordonnées dans $\mathbf{R}^2$; supposons D centré en (x_0, y_0) ; pour tout point $(x, y) \in D$, soit γ un cycle de $\mathbf{R}^2$ dont l'image Γ est le bord du rectangle, à côtés parallèles aux axes, de sommets opposés (x_0, y_0) et (x, y). Soit Δ l'intérieur du rectangle ; $\bar{\Delta} \subset D$ et $\bar{\Delta}$ est un compact à bord de $\mathbf{R}^2$; Δ est orienté par l'orientation canonique de $\mathbf{R}^2$ et γ est orienté comme bord de Δ ; l'injection canonique appliquée à $\bar{\Delta}$ définit la 2-chaîne différentiable δ de bord $b\delta = \gamma$. D'après la formule de Stokes $\int_\gamma \omega = \int_\delta d\omega$, (i) entraîne

$$\int_\gamma \omega = 0 ; \tag{2.11}$$

On a $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ où γ_1 et γ_2 sont deux arcs joignant (x_0, y_0) à (x, y) ; (2.11) entraîne

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega = F(x, y).$$

Posons $\omega = P\,dx + Q\,dy$; soit $h \in \mathbf{R}$ assez petit pour que $(x+h, y) \in D$; on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h, y) - F(x, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \omega =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} P(\xi, y)\,d\xi = P(x, y),$$

de même : $Q(x, y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$; P et Q étant C^1, F est C^2 et $dF = \omega$. □

2.8.5.* Corollaire. — *Toute* 1-*forme différentielle* C¹, d-*fermée dans un ouvert D de* C *admet une primitive localement, i.e. au voisinage de tout point de D.

DÉMONSTRATION. — Tout point (x_0, y_0) de D est centre d'un disque ouvert dans lequel 2.8.4 est valide. □

2.8.6.* Proposition. — *Soit ω une* 1-*forme différentielle de classe* C⁰ *sur un ouvert connexe D de* R², *alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) ***ω admet une primitive dans D ;***

(ii) ***pour tout* 1-*cycle γ de D, on a : $\int_\gamma \omega = 0$.***

DÉMONSTRATION. — (i)⇒(ii) : $\omega = dF$ où F est une fonction de classe C^1 sur D, soit γ un arc différentiable de D joignant α à β, alors $\int_\gamma dF = F(\beta) - F(\alpha)$ (formule de Stokes) ; si γ est un 1-cycle, pour tout $\alpha \in \operatorname{spt} \gamma$, on a : $\int_\gamma dF = F(\alpha) - F(\alpha) = 0$.

(ii)⇒(i) : Soit $z_0 = (x_0, y_0) \in D$; pour tout $z = (x, y) \in D$, d'après 2.8.2, il existe un arc différentiable par morceaux δ joignant z_0 à z ; soit $\omega = P\,dx + Q\,dy$; alors $F(z) = \int_\delta \omega$ est indépendant du choix de δ d'après (ii) ; de plus, pour $h \in \mathbf{R}$ assez petit, $F((x+h, y)) - F((x, y)) = \int_x^{x+h} P((\xi, y))\,d\xi$, donc $\dfrac{\partial F}{\partial x}((x, y))$ existe et est égal à $P(x, y)$; de même : $\dfrac{\partial F}{\partial y}((x, y)) = Q((x, y))$, donc $dF = \omega$. □

2.8.7. Généralisation

Une 1-forme ω de classe C^0 sur un ouvert D de $\mathbf{C}$ est dite *fermée* si, au voisinage de tout point $z \in D$, il existe une fonction F_z de classe C^1 telle que $\mathrm{d}F_z = \omega$.

2.8.8.* Lemme. — *Soit ω une* 1*-forme différentielle* C^0 *sur un ouvert* D *de* $\mathbf{R}^2$, *alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *ω est fermée ;*

(ii) *tout point $z_0 \in D$ est centre d'un disque U_{z_0} tel que, pour tout* 1*-cycle γ de D ayant pour image le bord Γ d'un rectangle Δ à côtés parallèles aux axes Ox, Oy avec $\bar{\Delta} \subset U_{z_0}$, on ait $\int_\gamma \omega = 0$.*

DÉMONSTRATION. — (i)$\Rightarrow$(ii): il existe une fonction F_{z_0} telle que $\omega = \mathrm{d}F_{z_0}$ sur un disque U_{z_0} centré en z_0, contenu dans D ; alors $\int_\gamma \omega = 0$, d'après 2.8.6.

(ii)$\Rightarrow$(i) : soit $z = (x, y)$ un point de U_{z_0} ; z et z_0 sont les sommets opposés d'un rectangle Δ à côtés parallèles aux axes et contenu dans U_{z_0} ; le bord Γ de Δ porte deux arcs différentiables par morceaux γ_1 et γ_2 d'extrémités z_0 et z ; alors $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega = F(z)$; comme dans la preuve de 2.8.6, pour $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ on trouve $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P$; $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q$. □

3. Théorème de Cauchy

3.1. Théorème. — *Si f est une fonction holomorphe dans un ouvert D de* $\mathbf{C}$, *alors la forme différentielle $f(z)\,\mathrm{d}z$ est fermée dans D.*

Par définition (1.3.1), f est **C**-différentiable en tout point de D. On va d'abord démontrer la proposition suivante qui entraîne 3.1 lorsque f est C^1.

3.1.1.* Proposition. — *Si f est une fonction* C^1 *sur un ouvert D de* $\mathbf{C}$, *alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) *f est holomorphe sur D ;*

(b) *$f(z)\,\mathrm{d}z$ est une* 1*-forme différentielle* d*-fermée sur D.*

DÉMONSTRATION. — $\omega = f(z)\,\mathrm{d}z$ est de classe C^1 ;

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(f\,\mathrm{d}z) = ((\partial f/\partial z)\,\mathrm{d}z + (\partial f/\partial \bar{z})\,\mathrm{d}\bar{z}) \wedge \mathrm{d}z = (\partial f/\partial \bar{z})\,\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z.$$

La condition de Cauchy (1.8) $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ sur D équivaut donc à $\mathrm{d}\omega = 0$ sur D. □

DÉMONSTRATION de 3.1. — D'après 2.8.8, il suffit de prouver que pour tout 1-cycle γ, bord d'un rectangle Δ à côtés parallèles aux axes Ox, Oy, tel que $\bar{\Delta} \subset D$, on a $\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = 0$.

Soit Δ un tel rectangle, on subdivise chaque côté en 2^k parties égales $k \in \mathbf{N}^*$, ce qui détermine 4^k rectangles homothétiques à Δ, qu'un note Δ_j^k ; $j \in [1, \ldots, 4^k]$ et tels que $\bigcup_j \Delta_j^k = \Delta$; soit γ_j^k le bord de Δ_j^k, on a $\gamma = \sum_{j=1}^{4^k} \gamma_j^k$.

Posons $\int_{\gamma_j^k} f(z)\,\mathrm{d}z=\alpha_j^k$; alors $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\alpha=\sum_{j=1}^{4^k}\alpha_j^k$.

Soient $\Delta^{(k)}$ l'un des rectangles Δ_j^k pour lequel $|\alpha_j^k|\geqslant\frac{1}{2^{2k}}|\alpha|$; $\gamma^{(k)}=b\Delta^{(k)}$ et C_k le centre de $\Delta^{(k)}$; on suppose, ce qui est possible, les $\Delta^{(k)}$ emboîtés $\Delta^{(k+1)}\subset\Delta^{(k)}$; la suite (C_k) est une suite de Cauchy ; elle converge vers $z_0\in\bar{\Delta}\subset D$.

Par définition de la dérivée au sens complexe en z_0, on a :

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\mathrm{o}(z-z_0)\,;$$

$$\int_{\gamma^{(k)}} f(z)\,\mathrm{d}z=f(z_0)\int_{\gamma^{(k)}}\mathrm{d}z+f'(z_0)\int_{\gamma^{(k)}}(z-z_0)\,\mathrm{d}z+\int_{\gamma^{(k)}}\mathrm{o}(z-z_0)\,\mathrm{d}z.$$

Dans le second membre, les deux premières intégrales sont nulles et le module de la troisième est $\mathrm{o}(1/4^k)$; mais $\left|\int_{\gamma^{(k)}} f(z)\,\mathrm{d}z\right|\geqslant(1/4^k)|\alpha|$, pour tout $k\in\mathbf{N}^*$, donc $\alpha=0$. □

3.1.2.* Théorème. — *Soient D un ouvert de* C, *A une droite de* C. *Si f est une fonction continue dans D et holomorphe dans $D\setminus A$, alors $f(z)\,\mathrm{d}z$ est fermée dans D. Même conclusion si A est remplacée par un ensemble $(a_i)_{i\in I}$ de points isolés ou par une famille $(A_i)_{i\in I}$ de droites parallèles telle que, pour tout i, $a_i\in A_i$, $(a_i)_{i\in I}$ étant un ensemble de points isolés.

Démonstration. — Soit θ un angle de A et de l'axe réel Ox, alors $z\mapsto ze^{-i\theta}$ est un changement de coordonnée après lequel la droite A est parallèle à l'axe des x ; dans la suite on suppose fait ce changement de coordonnée.

Il s'agit de prouver que, pour tout rectangle Δ à cotés parallèles aux axes Ox, Oy $\int_{b\Delta} f\,\mathrm{d}z=0$ (lemme 2.8.8).

(a) Si $\bar{\Delta}\cap A=\emptyset$, on est dans l'hypothèse de 3.1.

(b) Si A porte un côté δ de Δ, pour $\varepsilon>0$, soit Δ_ε le rectangle déduit de Δ par remplacement du côté δ par $\delta\pm i\varepsilon$, le signe étant choisi pour que $\Delta_\varepsilon\cap A=\emptyset$. Alors, à cause de la continuité de f,

$$\int_{b\Delta} f\,\mathrm{d}z=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{b\Delta_\varepsilon} f\,\mathrm{d}z=0 \text{ d'après (a).}$$

(c) Si $A\cap\Delta\neq\emptyset$, on a $\bar{\Delta}=\bar{\Delta}_1\cup\bar{\Delta}_2$ où Δ_1 et Δ_2 sont des rectangles dans la situation (b) par rapport à A.

$$\int_{b\Delta} f\,\mathrm{d}z=\int_{b\Delta_1} f\,\mathrm{d}z+\int_{b\Delta_2} f\,\mathrm{d}z=0, \text{ d'après (b).}$$

(d) La dernière assertion résulte de la première et du fait que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est localement finie. □

3.2. Lemme. — *Toute fonction holomorphe f sur un ouvert D de* C *est de classe* C^1.

Démonstration. — Soit $\zeta\in D$, considérons la fonction

$$g_\zeta(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} & \text{pour } z\in D,\ z\neq\zeta\\ f'(\zeta) & \text{pour } z=\zeta\end{cases}\tag{3.1}$$

$g_\zeta(z)$ est continue sur D et elle est holomorphe pour $z \neq \zeta$; d'après 3.1.2, $\omega = g_\zeta(z)\,\mathrm{d}z$ est fermée, donc pour tout point z_1 de D, il existe un voisinage U de z_1 dans D et une fonction $F(z)$, C^1, telle que $\omega = \mathrm{d}F$ sur U.

Soit Δ un rectangle borné à côtés parallèles aux axes Ox, Oy tel que $\bar{\Delta} \subset D$; $\bar{\Delta}$ étant compact, il existe un quadrillage fini de $\bar{\Delta}$ dont les côtés sont parallèles aux axes Ox, Oy tel que tout rectangle du quadrillage soit contenu dans un ouvert U_j connexe $(j=1, \ldots, n)$ sur lequel ω a une primitive F_j et que tout $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ soit connexe, alors $F_j - F_k = C_{jk}$ constante sur $U_j \cap U_k$, on vérifie, de proche en proche, pour $j=1, \ldots, n$ que, pour tout j, il existe une constante C_j satisfaisant à $C_j - C_k = -C_{jk}$ sur $U_j \cap U_k$, alors la fonction F telle que $F|U_j = F_j + C_j$ est une primitive de ω sur le voisinage ouvert $U = \bigcup_{j=1}^{n} U_j$ de $\bar{\Delta}$.

Le bord γ du rectangle Δ est une 1-chaîne différentiable contenue dans l'ouvert connexe U, alors d'après 2.8.6, on a :

$$\int_\gamma g_\zeta(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{3.2}$$

Mais, pour tout $\zeta \in D$ et $z \neq \zeta$, on a : $\dfrac{f(z)}{z-\zeta} = g_\zeta(z) + \dfrac{f(\zeta)}{z-\zeta}$. Pour tout $\zeta \in \Delta$, les trois fonctions ci-dessus sont continues sur γ, alors

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}z = f(\zeta) \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-\zeta} + \int_\gamma g_\zeta(z)\,\mathrm{d}z.$$

Soit γ' un cercle de centre ζ bord d'un disque δ fermé de rayon r contenu dans Δ, alors $\dfrac{\mathrm{d}z}{z-\zeta}$ est C^∞ d-fermée dans $U \setminus \delta$ et, d'après la formule de Stokes

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-\zeta} = \int_{\gamma'} \frac{\mathrm{d}z}{z-\zeta} = \int_0^{2\pi} i\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i. \tag{3.3}$$

Donc, compte tenu de (3.2) et de (3.3), on a :

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(\zeta) ; \tag{3.4}$$

La fonction $\dfrac{f(z)}{(z-\zeta)^2}$ est continue sur le compact γ, donc l'intégrale du premier membre de (3.4) est dérivable sous le signe $\int$, on a $2\pi i f'(\zeta) = \int_\gamma \dfrac{f(z)}{(z-\zeta)^2}\,\mathrm{d}z$, fonction continue en ζ ; tout point de D étant intérieur à un rectangle borné fermé $\bar{\Delta}$ de $\mathbf{C}$ contenu dans D, la fonction f est C^1 dans D. □

3.3. Conséquences du théorème 3.1

3.3.1. **Proposition.** — ***Toute fonction f holomorphe sur un ouvert D de* C *admet localement une primitive holomorphe.***

Démonstration. — D'après 3.1, $f\,dz$ est fermée dans D, i.e. tout point $z_0 \in D$ a un voisinage U sur lequel il existe une fonction F, de classe C^1 telle que $dF = \dfrac{\partial F}{\partial z}dz + \dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}}d\bar{z} = f\,dz$, donc $\dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$ sur U, et F est holomorphe sur U. □

3.3.2. **Proposition.** — ***Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert D de* C, *alors pour tout* 1*-cycle* γ *bord d'une* 2*-chaîne* Γ *différentiable de D, on a :*** $\int_\gamma f\,dz = 0$.

Démonstration. — D'après 3.1, $f\,dz$ est fermée sur D ; d'après 3.2, $f\,dz$ est de classe C^1. Alors la formule de Stokes entraîne $\int_\gamma f\,dz = \int_\Gamma d(f\,dz) = 0$. □

3.3.3. **Lemme.** — ***Si une fonction F est holomorphe sur un ouvert U de* C, *alors*** $F' = \dfrac{\partial F}{\partial z}$ ***est holomorphe sur U.***

Démonstration. — Tout point z_0 de U est centre d'un rectangle fermé Γ contenu dans U de bord le cycle γ ; d'après la fin de la démonstration de 3.2, pour $z \in \mathring{\Gamma}$, on a : $F'(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \dfrac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta$; l'intégrale est dérivable par rapport au paramètre $\bar{z}$ et sa dérivée est continue, alors $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}F'(z) = \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) = 0$, donc F' est holomorphe sur $\mathring{\Gamma}$ donc sur U. □

3.3.4. **Théorème de Morera.** — ***Soit f une fonction continue dans un ouvert D de* C *telle que f*** dz ***soit fermée, alors f est holomorphe dans D.***

Démonstration. — $f\,dz$ étant fermée, tout point z_0 de D a un voisinage U sur lequel il existe une fonction F, C^1 telle que $dF = (\partial F/\partial z)\,dz + (\partial F/\partial \bar{z})\,d\bar{z} = f\,dz$, donc $\partial F/\partial \bar{z} = 0$ sur U, i.e. F est holomorphe sur U ; de plus $\dfrac{\partial F}{\partial z} = f$; d'après le lemme 3.3.3, f est holomorphe sur U, donc sur D. □

3.3.5. **Corollaire.** — ***Soient D un ouvert de* C, *A une droite de* C *et f une fonction continue sur D, holomorphe sur*** $D \setminus A$, ***alors f est holomorphe sur D.***

Démonstration. — D'après 3.1.2, $f\,dz$ est fermée sur D ; d'après le théorème de Morera, f est holomorphe sur D. □

4. Indice d'un cycle de dimension 1

4.1. Définition. — Soient γ un 1-cycle à support compact dans $\mathbf{C}$ et $\Omega = \mathbf{C} \setminus \operatorname{spt} \gamma$; pour tout $\zeta \in \Omega$, on appelle *indice de γ par rapport* à ζ, le nombre

$$\operatorname{Ind}(\gamma, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-\zeta}.$$

4.2. Théorème. — ***Dans les notations de 4.1, l'indice $\operatorname{Ind}(\gamma,\zeta)$ de γ par rapport à ζ est une fonction à valeurs entières positives ou négatives, constante sur chaque composante connexe de Ω et nulle sur la composante connexe non bornée de Ω.***

Démonstration. — Il suffit de démontrer le théorème dans le cas où γ est un arc différentiable par morceaux. D'après 2.6.3. $\gamma = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j$ où $\gamma_j : I \to \mathbf{C}$ est une application C^1 avec $\gamma_j(1) = \gamma_{j+1}(0)$, pour $j = 1, \dots, n-1$ et $\gamma_n(1) = \gamma_1(0)$.

L'application $\gamma : [0, n] \to \mathbf{C}$ telle que $(\gamma|[k, k+1])(t) = \gamma_{k+1}(t-k)$ est continue ; elle est C^1 sur chaque intervalle $]k, k+1[$, $k = 0, \dots, n-1$; elle a des dérivées à gauche et à droite aux points $1, \dots, k-1$ et une dérivée à droite (resp. à gauche) en 0, (resp. n).

Pour $t \in [0, n]$, considérons $\varphi(t) = \exp \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-\zeta} ds$; alors $\frac{\varphi'}{\varphi}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-\zeta}$ sur tout intervalle $[k, k+1]$, les dérivées aux extrémités étant des dérivées à droite (resp. à gauche). Sur chaque intervalle $]k, k+1[$, la fonction $\frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-\zeta}$, ayant une dérivée nulle, est constante, donc elle est constante sur $[0, n]$. Alors $\frac{\varphi(0)}{\gamma(0)-\zeta} = \frac{\varphi(n)}{\gamma(n)-\zeta} = \frac{\varphi(n)}{\gamma(0)-\zeta}$, i.e. $\varphi(n) = \varphi(0) = 1$; $\int_\gamma \frac{dz}{z-\zeta}$ ayant pour exponentielle 1, l'expression $(1/2\pi i) \int_\gamma \frac{dz}{z-\zeta}$ est un entier rationnel.

De plus, la fonction $\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-\zeta}$ est continue sur $[k, k+1] \times \Omega$, donc $\int_{\gamma_{k+1}} \frac{dz}{z-\zeta}$ est continue sur Ω et il en est de même de $\int_\gamma \frac{dz}{z-\zeta}$; $\operatorname{Ind}(\gamma, \zeta)$ étant une fonction continue de ζ à valeurs entières est constante sur chaque composante connexe de Ω.

En outre, $\operatorname{Ind}(\gamma, \zeta)$ tend vers 0 quand $|\zeta| \to \infty$, donc est nul sur la composante connexe infinie de Ω. □

4.3. Dépendance de γ

4.3.1. **Théorème.** — ***Si Γ est une 2-chaîne de $\mathbf{C}$ à support compact et si $\zeta \notin \operatorname{spt} \Gamma$, alors $\operatorname{Ind}(b\Gamma, \zeta) = 0$.***

Démonstration. — La fonction $z \mapsto \frac{1}{z-\zeta}$ est holomorphe, donc C^1 sur un voisinage ouvert U de $\operatorname{spt}\Gamma$, alors, d'après la formule de Stokes $\int_{b\Gamma}\frac{dz}{z-\zeta}=\int_\Gamma d\left(\frac{dz}{z-\zeta}\right)=0$ car $\frac{dz}{z-\zeta}$ est d-fermée. □

4.3.2. Dans un ouvert de $\mathbf{C}$, on dit que deux 1-cycles γ, γ_1 *sont homologues*, s'il existe une 2-chaîne différentiable Γ telle que $\gamma_1-\gamma=b\Gamma$; alors le théorème 4.3.1 s'énonce ainsi :

4.3.3.* Corollaire.** — ***Soit $\zeta\in\mathbf{C}$, alors, si deux 1-cycles γ, γ_1 de $\mathbf{C}\setminus\{\zeta\}$ sont homologues dans $\mathbf{C}\setminus\{\zeta\}$, on a :

$$\mathbf{Ind}(\gamma_1,\zeta)=\mathbf{Ind}(\gamma,\zeta).\quad \square$$

5. Formule intégrale de Cauchy

On appelle *difféomorphisme* $\mu : \Delta\to D$ un homéomorphisme d'ouverts de $\mathbf{R}^2$, de classe C^1 ainsi que son inverse. Une application différentiable μ est un *difféomorphisme local* si tout point $x\in\Delta$ a un voisinage ouvert U_x dans Δ tel que $\mu|U_x$ soit un difféomorphisme : $U_x\to\mu(U_x)$.

5.1. Théorème. — ***Soient D un ouvert de $\mathbf{C}$ et f une fonction de classe C^1 dans D. Soit Γ une 2-chaîne différentiable à support compact de D, de représentant $\sum_{j\in J} n_j(Z_j, F_j)$, de bord le 1-cycle γ et soit $\zeta\in D\setminus\operatorname{spt}\gamma$. Alors, si pour tout $j\in J$, F_j est un difféomorphisme local, on a :***

$$2\pi i\,\mathbf{Ind}(\gamma,\zeta)f(\zeta)=\int_\gamma\frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz+\int_\Gamma\frac{(\partial f/\partial\bar z)(z)}{z-\zeta}\,dz\wedge d\bar z\,; \tag{5.1}$$

si, en outre, f est holomorphe dans D,

$$2\pi i\,\mathbf{Ind}(\gamma,\zeta)f(\zeta)=\int_\gamma\frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz. \tag{5.2}$$

DÉMONSTRATION. — $\Gamma=\sum_{j\in J} n_j\Gamma_j$ où J est un ensemble fini, Γ_j a pour représentant (Z_j, F_j) où Z_j est un compact à bord et F_j une application différentiable propre, dans D, d'un voisinage ouvert V_j de Z_j dans $\mathbf{R}^2$. On désigne par $B_r=\overline{B(\zeta, r)}$ le disque fermé de centre ζ, de rayon $r>0$ dans $\mathbf{C}$. Pour $\varepsilon>0$ assez petit $F^{-1}(B_\varepsilon)\cap Z_j$ est un compact à bord Z'_j.

Soient Γ'_j la chaîne élémentaire de représentant (Z'_j, F_j), $\Gamma'_\varepsilon=\sum_{j\in J} n_j\Gamma'_j$ et γ_ε le bord de Γ'_ε. La 2-chaîne $\Delta_\varepsilon=\Gamma-\Gamma'_\varepsilon$ a pour représentant $\sum_{j\in J} n_j(Z_j\setminus Z'_j, F_j)$, son support est disjoint de $\{\zeta\}$ et son bord est $b\Gamma-b\Gamma'_\varepsilon=\gamma-\gamma_\varepsilon$.

D'après 4.3.3, Ind $(\gamma,\zeta)=\operatorname{Ind}(\gamma_\varepsilon,\zeta)$; la 1-forme $\omega=\frac{f(z)}{z-\zeta}dz$ est C^1 dans $D\setminus\{\zeta\}$, alors, pour $\varepsilon>0$ assez petit, la formule de Stokes appliquée à ω et à la

2-chaîne Δ_ε donne

$$(5.3)\quad \int_\gamma \omega - \int_{\gamma_\varepsilon} \omega = \int_{\Delta_\varepsilon} \mathrm{d}\omega = \int_{\Delta_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{f(z)}{z-\zeta}\right) \mathrm{d}\bar z \wedge \mathrm{d}z = \int_{\Delta_\varepsilon} \frac{(\partial f/\partial \bar z)(z)}{z-\zeta}\, \mathrm{d}\bar z \wedge \mathrm{d}z.$$

Quand $\varepsilon \to 0$, $f(z)$ étant continue en ζ, $\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}z$ tend vers $f(\zeta)\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}z}{z-\zeta} = f(\zeta)2\pi i \operatorname{Ind}(\gamma,\zeta)$ d'après 4.3.3. $g(z) = \frac{(\partial f/\partial \bar z)(z)}{z-\zeta}$ étant localement intégrable au voisinage de ζ, il en est de même de $F_j^* g$ au voisinage de $F_j^{-1}(\zeta)$; $F_j^* g$, étant C^1 en dehors de $F_j^{-1}(\zeta)$, est intégrable sur Z_j, donc, quand $\varepsilon \to 0$, $\int_{\Delta_\varepsilon} \frac{(\partial f/\partial \bar z)(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}\bar z \wedge \mathrm{d}z$ tend vers $\int_\Gamma \frac{(\partial f/\partial \bar z)(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}\bar z\wedge\mathrm{d}z$, alors (5.3) entraîne (5.1).

Si f est holomorphe dans D, $(\partial f/\partial \bar z)(z)=0$ sur D, donc $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_\varepsilon}\omega$, d'où (5.2). □

5.2. Quand la fonction f est holomorphe, la relation

$$(5.2)\qquad 2\pi i \operatorname{Ind}(\gamma,\zeta) f(\zeta) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}z$$

est appelée la *formule intégrale de Cauchy* ; la fonction $\frac{1}{z-\zeta}$, holomorphe en z et ζ en dehors de la diagonale de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$, est le *noyau de Cauchy*. (5.1) est appelée *formule de Cauchy non homogène*.

5.3. Problème du d″ à donnée à support compact

5.3.1. Soient D un ouvert de $\mathbf{C}$ et Z un compact à bord de D, alors bZ est un 1-cycle. On considère la 2-chaîne (Z, id_D) qu'on note encore Z, on pose $\Delta = \mathring{Z}$. Une forme différentielle de degré p en $\mathrm{d}z$ et de degré q en $\mathrm{d}\bar z$ est dite de *type* (p, q).

5.3.2. **Théorème. — *Dans les notations ci-dessus, pour toute* 1-*forme différentielle* ω, C^1, *de type* (0, 1), *à support compact dans* Δ, *il existe une fonction* g C^1 *sur* Δ *telle que* $\mathrm{d}''g=\omega$.**

Démonstration. — Soit $\omega = f\,\mathrm{d}\bar z$ où f est C^1 à support compact dans Δ ; pour $z\in\Delta$, on pose $g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar\zeta$ et $w=\zeta-z$; $f(z+w)$ étant C^1 en z et à support compact en w, par dérivation sous le signe $\int$, on a :

$$\partial g/\partial \bar z(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{(\partial f/\partial \bar z)(z+w)}{w}\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\bar w = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{(\partial f/\partial\bar z)(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar\zeta.$$

D'après (5.1),

$$2\pi i f(z) = \int_\Delta \frac{(\partial f/\partial \bar z)(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar\zeta$$

$$\mathrm{d}''g(z) = (\partial g/\partial \bar z)(z)\,\mathrm{d}\bar z = f(z)\,\mathrm{d}\bar z = \omega.\quad \square$$

***5.3.3.* Corollaire. — *Soit D un ouvert de* C, *pour toute* 1*-forme différentielle* C^k, *de type* (0, 1), $\omega = f\,d\bar{z}$, *à support compact dans D, il existe une fonction g* C^k *sur D telle que* $d''g = \omega$.**

DÉMONSTRATION. — Pour un point z_0 quelconque de D, considérons, une fonction ψ C^k à support compact dans D égale à 1 sur un voisinage V de z_0 dans D ; soit $f_1 = \psi f$; $f_2 = (1-\psi)f$, on a $g = g_1 + g_2$, avec

$$g_j(\zeta) = (2\pi i)^{-1} \int (z-\zeta)^{-1} f_j(z)\, dz \wedge d\bar{z} \ ; \quad j = 1, 2.$$

Alors, d'après la démonstration de 5.3.2, g_j est de classe C^k dans $\mathbf{C}$. Soit Δ un disque ouvert centré en z_0 et contenant $\operatorname{spt}\psi$, pour $\zeta \in \Delta$, d'après 5.3.2, on a : $d''g_1(\zeta) = \omega$. En outre, $d''g_2(\zeta) = 0$ dans V. Donc $d''g = \omega$ dans V ; z_0 étant arbitraire dans D, on a :

$$d''g = \omega \text{ dans } D \text{ avec } g(\zeta) = (2\pi i)^{-1} \int (z-\zeta)^{-1} f(z)\, dz \wedge d\bar{z}. \quad \square$$

5.4. Ouverts simplement connexes de $\mathbf{R}^2$

5.4.1. Espace connexe par arcs

Soient X un espace topologique et $I = [0, 1] \subset \mathbf{R}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{R}$. On appelle *arc (continu)* de X toute application continue $\gamma : I \to X$; $a = \gamma(0)$ est l'origine et $b = \gamma(1)$ l'extrémité de γ. On dit aussi que γ est un arc joignant a à b. L'intervalle I étant connexe, l'image $\gamma(I)$, appelée support de γ et notée $\operatorname{spt}\gamma$ est connexe, donc contenue dans une composante connexe de X.

L'espace X est dit *connexe par arcs* si deux points quelconques de X peuvent être joints par un arc de X. Dans un ouvert D de $\mathbf{C}$, tout arc différentiable par morceaux est un arc continu, donc, d'après 2.8.2, si D est connexe, il est connexe par arcs.

Un arc γ est dit *fermé* si $\gamma(0) = \gamma(1)$; il est dit *constant* si γ est l'application constante de I sur un point a de X.

5.4.2. Soient D un ouvert connexe de $\mathbf{C}$, ω une 1-forme continue fermée dans D et $\gamma : I \to D$ un arc continu dans D. Une fonction $f : I \to \mathbf{C}$ est appelée une *primitive de ω le long de γ* si, pour tout $\tau \in I$, il existe une primitive F de ω dans un voisinage U de $\gamma(\tau)$ dans D telle que, pour tout $t \in I$ assez voisin de τ, $f(t) = F(\gamma(t))$.

5.4.3.* Proposition. — *Dans les notations de* 5.4.2, *pour toute* 1*-forme continue fermée* ω *dans D, pour tout arc continu* γ *dans D,* ω *admet une primitive le long de* γ, *définie à l'addition près d'une constante.

DÉMONSTRATION. — (a) unicité : soient f_1, f_2 deux primitives de ω le long de γ, alors $f_1 - f_2$, localement constante sur l'ensemble connexe I, est constante.

(b) existence : pour tout $\tau \in I$, il existe un disque ouvert U_τ dans D, centré en $\gamma(\tau)$ sur lequel ω possède une primitive F'_τ ; γ étant continu, il existe un intervalle I_τ contenant τ et ouvert dans I tel que $\gamma(I_\tau) \subset U_\tau$. L'intervalle I étant compact il existe un nombre fini de points $\tau_1 < \ldots < \tau_n$ de I tels que $(I_{\tau_j})_{j=1,\ldots,n}$ soit un recouvrement ouvert de I, alors $(U_{\tau_j})_{j=1,\ldots,n}$ est un recouvrement ouvert de $\gamma(I)$.

Soient $(t_j)_{j=0,\ldots,n}$ des points de I tels que $t_0=0$, $t_j \in I_{\tau_j} \cap I_{\tau_{j+1}}$, $j=1, \ldots, n-1$; $t_n=1$. Alors $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subset U_j = U_{\tau_j}$ $j=1, \ldots, n$.

Soit $F_j' = F_{\tau_j}'$; $\gamma(t_j) \in U_j \cap U_{j+1} \neq \emptyset$. Sur $U_j \cap U_{j+1}$ qui est connexe, on a $F_{j+1}' - F_j' = c_j \in \mathbf{C}$.

Posons $F_1 = F_1'$; $F_j = F_j' - \sum_{l=1}^{j-1} c_l$ pour $j=2, \ldots, n$.

Alors $dF_j = \omega | U_j$ et $F_{j+1} - F_j = F_{j+1}' - F_j' - c_j = 0$ sur $U_j \cap U_{j+1}$, donc il existe une fonction F sur $U = \bigcup_{j=1}^{n} U_j$ telle que $dF = \omega$ sur U, et $f = F \circ \gamma$ est une primitive de ω le long de γ. □

5.4.4. Soient $\gamma : I \to D$ un arc différentiable par morceaux d'origine a, d'extrémité b et ω une 1-forme différentielle continue fermée sur D, de primitive f le long de γ ; dans les notations de 5.4.3, il existe $t_0=0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n=1$ tels que $\gamma_j = \gamma | [t_j, t_{j+1}]$, $j=0, \ldots, n-1$, soit différentiable et que $\gamma([t_j, t_{j+1}])$ soit contenu dans le disque U_j sur lequel ω admet la primitive F_j. Alors

$$(5.4) \quad \int_\gamma \omega = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\gamma_j} \omega = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma_j^* \omega = \sum_{j=0}^{n-1} [F_j(t_{j+1}) - F_j(t_j)] = f(1) - f(0),$$

d'après (2.8).

Si γ est un *arc* seulement *continu,* d'après 5.4.3, le dernier membre de (5.4) a un sens et on définit *l'intégrale* $\int_\gamma \omega$ *de* ω sur γ par la formule ;

$$(5.5) \qquad \int_\gamma \omega = f(1) - f(0).$$

5.4.5. Dans un espace topologique X, on considère un arc (continu) fermé $\gamma : I \to X$ tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$; on dit que γ est *homotope à un point a,* s'il existe une application continue

$$\Gamma : I \times I \to X$$

$$(s, t) \mapsto \Gamma(s, t)$$

telle que :

1) $\gamma = \Gamma(0, .)$;
2) $\Gamma(s, 0) = \Gamma(s, 1)$ pour tout $s \in I$
3) $\gamma_1 = \Gamma(1, .)$ est l'arc constant de support le point $a \in X$.

On dit qu'un espace connexe par arcs X est *simplement connexe* si tout arc fermé de X est homotope à un point.

5.4.6. Soient D un ouvert connexe de $\mathbf{C}$, ω une 1-forme différentielle continue fermée dans D et $\Gamma : I \times I \to D$ une application continue, s'il existe une fonction continue $f : I \times I \to \mathbf{C}$ possédant la propriété suivante : pour tout $(\sigma, \tau) \in I \times I$, il existe une primitive $F_{\sigma\tau}$ de ω dans un voisinage de $\Gamma(\sigma, \tau)$ dans D telle que $f(s, t) = F_{\sigma\tau}(\Gamma(s, t))$ sur un voisinage de (σ, τ) dans $I \times I$, la fonction f est appelée une *primitive de* ω *par rapport à* Γ.

5.4.7. Lemme. — ***Pour toute 1-forme continue fermée ω dans un ouvert D de C, pour toute application continue $\Gamma : I\times I\to D$, il existe une primitive de ω par rapport à Γ définie à l'addition près d'une constante.***

DÉMONSTRATION. — Adapter le second paragraphe de la démonstration du lemme 3.2. □

5.4.8. Lemme. — ***Si γ est un arc fermé homotope à un point dans un ouvert D de C, pour toute 1-forme continue fermée ω, on a :***

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

DÉMONSTRATION. — Il existe une application continue $\Gamma : I\times I\to D$ satisfaisant aux conditions 1), 2), 3) de 5.4.5. D'après 5.4.7, il existe une primitive f de ω par rapport à Γ.

$$\int_\gamma \omega = f(0,1)-f(0,0) = f(0,1)-f(1,1)+f(1,1)-f(1,0)+f(1,0)-f(0,0)\ ;$$

d'après 3) $f(1,1)-f(1,0)=0$.

Soient

$$b=\gamma(0)=\gamma(1)=\Gamma(0,0)=\Gamma(0,1)\ ;\quad \delta_1=\Gamma(.,1),\quad \delta_0=\Gamma(.,0),$$

ce sont des arcs continus joignant b à a, alors

$$\int_\gamma \omega = -\int_{\delta_1}\omega+\int_{\delta_0}\omega\ ;\quad \text{mais d'après 2) } \delta_0=\delta_1,\ \text{donc} \int_\gamma \omega = 0. \quad \square$$

On définit les 1-chaînes (continues) à partir des arcs (continus) comme les 1-chaînes différentiables à partir des arcs élémentaires différentiables (2.6.2), d'où les notions de bord et de cycle (cf. 2.6.2).

Remarquons que tout 1-cycle est combinaison linéaire d'arcs fermés.

5.4.9. Corollaire. — ***Pour toute 1-forme différentielle continue fermée ω d'un ouvert simplement connexe D de C, tout 1-cycle (continu) γ de D, on a :***

$$\int_\gamma \omega = 0. \quad \square$$

5.4.10. Théorème. — ***Toute 1-forme différentielle fermée dans un ouvert simplement connexe D de C possède une primitive dans D. En particulier, toute 1-forme holomorphe, dans un tel ouvert D, possède une primitive holomorphe dans D.***

DÉMONSTRATION. — D'après 5.4.9, pour tout 1-cycle γ, différentiable par morceaux, on a $\int_\gamma \omega=0$; d'après 2.8.6, ω possède une primitive dans D. □

5.4.11. Corollaire. — ***La fonction $\log z$ admet une détermination continue dans tout ouvert simplement connexe D de C*.***

DÉMONSTRATION. — $\omega=\dfrac{dz}{z}$ est holomorphe, donc fermée dans D, d'après 5.4.10, elle admet une primitive dans D, qui est une détermination continue de $\log z$ dans D, d'après 1.5.5. □

5.5. Formule de Cauchy homotopique

Soit X un espace topologique.

5.5.1. Arcs homotopes

On dit que deux arcs continus γ, $\gamma_1 : I \to X$ sont *homotopes dans* X, s'il existe une application continue

$$\Gamma : I \times I \to X$$

telle que

1) $\gamma = \Gamma(0, .)$
3) $\gamma_1 = \Gamma(1, .)$.

$\gamma_s = \Gamma(s, .)$, $s \in I$ est alors un arc continu d'origine $\Gamma(s, 0)$, d'extrémité $\Gamma(s, 1)$. Deux arcs continus *fermés* seront dit *homotopes* si, en outre

2) $\Gamma(s, 0) = \Gamma(s, 1)$ pour tout $s \in I$.

La situation 5.4.5 est alors un cas particulier de celle-ci.

La famille $(\gamma_s)_{s \in [0,1]}$ est dite une *déformation* continue de γ_0 en γ_1.

5.5.2. Indice d'un arc continu fermé

Soient γ un arc continu fermé dans $\mathbf{C}$ et $\zeta \in \mathbf{C}$, $\zeta \notin \mathrm{Im}(\gamma)$; on appelle *indice de* γ *par rapport à* ζ le nombre

$$\mathrm{Ind}(\gamma, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - \zeta}.$$

Si γ est différentiable par morceaux, cette définition coïncide avec 4.1 pour un arc fermé.

5.5.3. **Théorème.** — ***Dans les notations de* 5.5.2, Ind (γ, ζ) *est une fonction à valeurs entières telle que :***

1) *si* γ_1 *est un arc fermé homotope à* γ *dans* $\mathbf{C} \setminus \{\zeta\}$, *on a :*

$$\mathbf{Ind}(\gamma_1, \zeta) = \mathbf{Ind}(\gamma, \zeta)$$

2) Ind (γ, ζ) *est constant sur chaque composante connexe de* $\mathbf{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$;

3) *si* Im (γ) *est contenue dans un ouvert simplement connexe de* $\mathbf{C} \setminus \{\zeta\}$,

$$\mathbf{Ind}(\gamma, \zeta) = \mathbf{0}.$$

DÉMONSTRATION. — Si f est une primitive de $\dfrac{\mathrm{d}z}{z-\zeta}$ le long de γ, on a $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-\zeta}$ $= f(1) - f(0)$ différence de deux déterminations continues de $\log(z - \zeta)$ au point $\gamma(0)$: c'est un multiple entier de $2\pi i$

1) résulte de 5.4.7 ;
2) se démontre comme dans 4.2 ;
3) résulte de 5.4.9. □

5.5.4. Théorème. — *Soient $f \in \mathcal{O}(D)$, $\zeta \in D$, γ un arc fermé de D tel que $\zeta \notin \operatorname{Im}(\gamma)$ et homotope à un point dans D. Alors*

$$\operatorname{Ind}(\gamma, \zeta) f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta}.$$

DÉMONSTRATION. — On considère la fonction $g_\zeta(z)$ définie par (3.1). Alors $g_\zeta\,dz$ est fermée dans D, donc $\int_\gamma \frac{f(z)-f(\xi)}{z-\zeta}\,dz=0$ d'après 5.4.8 et $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,dz= =\operatorname{Ind}(\gamma,\zeta)f(\zeta)$, d'après la définition 5.5.2. □

6. Surfaces de Riemann

6.1. Variétés différentielles de dimension 1 et 2

6.1.1. Cartes

Soit n l'entier 1 ou 2 supposé constant dans chaque définition.

Sur un espace topologique X, on appelle *carte* de dimension n de X un homéomorphisme h d'un ouvert U de X sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. L'ouvert U est appelé le *domaine* de la carte ; on dit que c'est un *ouvert de carte*. On désigne parfois une carte h par le couple (h, U).

Si V est un ouvert de X contenu dans U alors $h|V$ est une carte de domaine V.

6.1.2. Cartes compatibles

a) Deux cartes h et h' de X, *de même domaine* U sont dites *compatibles* si les deux homéomorphismes réciproques

$$h'\circ h^{-1}\colon\ h(U) \to h'(U)$$
$$h\circ h'^{-1}\colon\ h'(U) \to h(U)$$

sont de classe C^q pour $q \in \mathbf{N}\cup\{\infty\}$ au sens des applications d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans un autre.

b) Deux cartes (h, U) et (h', U') sont dites *compatibles* si

ou bien $U\cap U'=\emptyset$;

ou bien $h|U\cap U'$ et $h'|U\cap U'$ sont compatibles au sens de a).

6.1.3. Atlas

Un *atlas* de X, de classe C^q, est un ensemble de cartes, de dimension n, deux à deux compatibles, dont les domaines constituent un recouvrement de X. L'existence d'un atlas impose à l'espace X d'être homéomorphe, au voisinage de chaque point, à un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

Deux atlas de classe C^q sont dits *compatibles* si leur réunion est un atlas de classe C^q ; on vérifie que la compatibilité est une relation d'équivalence dans l'ensemble des atlas de classe C^q de X.

6.1.4. Variété différentielle de dimension 1 *ou* 2

On appelle *variété différentielle de dimension n*, $(n=1$ ou $2)$, de *classe* C^q, un espace topologique séparé X, réunion dénombrable de compacts, muni d'une classe d'équivalence d'atlas $\mathfrak{A}$, de classe C^q. C'est donc un couple $(X, \mathfrak{A})$ qu'on désignera par X seul lorsque $\mathfrak{A}$ sera défini sans ambiguïté. Lorsque la mention de la dimension sera sans importance, nous l'omettrons ; en outre, on désignera aussi par $\mathfrak{A}$ un atlas de la classe d'équivalence donnée.

6.2. Surfaces de Riemann

6.2.1. On va définir des variétés différentielles de dimension 2 particulières. Identifions $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}^2$ par le $\mathbf{R}$-isomorphisme d'espaces vectoriels $j : z=x+iy\mapsto(x, y)$.

Soit X un espace topologique séparé, réunion dénombrable de compacts muni d'un atlas $\mathfrak{A}$ dont les cartes (h, U) satisfont aux conditions suivantes :

1) $h(U)$ est un ouvert de $\mathbf{C}$ identifié à $\mathbf{R}^2$ par j ;

2) si (h, U), $(h', U')\in\mathfrak{A}$, $U\cap U'\neq\emptyset$, l'homéomorphisme $h'\circ h^{-1}|h(U\cap U')$ est une fonction holomorphe de l'ouvert $h(U\cap U')$ de $\mathbf{C}$ à valeur dans l'ouvert $h'(U\cap U')$ de $\mathbf{C}$.

6.2.2. $\mathfrak{A}$ est appelé *un atlas analytique complexe, h* une *carte holomorphe* ; deux tels atlas sont dits *équivalents* si leur réunion est un atlas analytique complexe. X muni d'une classe d'équivalence d'atlas analytiques complexes est appelé une *variété analytique complexe de dimension complexe* 1 ou une *surface de Riemann.*

Pour tout $q\in\mathbf{N}\cup\{\infty\}$, X est aussi une variété différentielle de classe C^q lorsqu'on la munit de la classe d'équivalence d'atlas de classe C^q contenant $\mathfrak{A}$; cette variété est dite la *structure différentielle sous-jacente* à la structure analytique complexe de X.

6.3. Exemples de surfaces de Riemann

6.3.1. Le plan complexe C *muni de la carte identité* $\mathrm{id}_{\mathbf{C}}$.

6.3.2. Tout ouvert U de $\mathbf{C}$ muni de la carte identité id_U.

6.3.3. Tout ouvert U d'une surface de Riemann X muni des cartes de X à domaines contenus dans X est une surface de Riemann dite sous-variété analytique complexe ouverte de X ; plus spécialement, on appellera *domaines* de X les ouverts connexes de X munis des cartes ci-dessus.

6.3.4. La droite projective complexe ou sphère de Riemann

C'est l'espace topologique $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ (qu'on notera aussi $\mathbf{P}^1$), quotient de $\mathbf{C}^2\setminus\{0\}$ par la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ suivante : $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{C}^2\setminus\{0\}$ sont liés par $\mathscr{R}$ s'il existe $\lambda\in\mathbf{C}^*$ tel que $\xi_2=\lambda\xi_1$; autrement dit, c'est l'ensemble des droites complexes de $\mathbf{C}^2$ issues de 0, muni de la topologie quotient de $\mathbf{C}^2\setminus\{0\}$ par $\mathscr{R}$. Soient (z_1, z_2) les coordonnées dans $\mathbf{C}^2$; les éléments de $\mathbf{C}^2\setminus\{0\}$ sont les couples $(z_1, z_2)\neq(0, 0)$. Soit

$$\pi\colon \mathbf{C}^2\setminus\{0\} \to \mathbf{P}^1$$

$$(z_1, z_2) \mapsto \text{classe de } (z_1, z_2).$$

Considérons les couples $(z_1, z_2)\in\mathbf{C}^2$; $z_2\neq0$, on a : $\pi(z_1, z_2)=\pi(z_1z_2^{-1}, 1)$; soient $\zeta=z_1z_2^{-1}$, $\zeta'=z_2z_1^{-1}$; $z_1\neq0$; les cartes ζ, ζ' ont pour domaines deux ouverts U, U' de $\mathbf{P}^1$ homéomorphes à $\mathbf{C}$ et constituent un atlas de $\mathbf{P}^1$. Remarquons que U recouvre $\mathbf{P}^1$ complètement à l'exception du point $\pi(z_1, 0)$ que l'on notera ∞ et contient $\pi(0, z_2)$ noté 0 ; de même $U'=\mathbf{P}^1\setminus\{0\}$; en outre, sur $U\cap U'$, on a $\zeta'=\zeta^{-1}$. On remarque aussi que les ouverts de $\mathbf{P}^1$ sont ceux de U et les complémentaires, dans $\mathbf{P}^1$, des compacts de U, de sorte que $\mathbf{P}^1$ en tant qu'espace topologique est le compactifié d'Alexandrov de $\mathbf{C}$ obtenu par adjonction du point à l'infini ∞.

D'autre part $\mathbf{P}^1$ est homéomorphe à la sphère S^2 de $\mathbf{R}^3$ centrée à l'origine Ω, de rayon 1, munie de la topologie induite par celle de $\mathbf{R}^3$, car les deux cartes (ζ, U), (ζ', U') peuvent être décrites comme suit : $\zeta\in\mathbf{C}$ est la projection (stéréographique) à partir d'un point ∞ de S^2 sur le plan équatorial associé E (i.e. le plan identifié à $\mathbf{R}^2$, de $\mathbf{R}^3$, d'origine Ω, orthogonal à $\Omega\infty$, orienté par le vecteur $\overrightarrow{\Omega\infty}$) considéré comme le plan complexe $\mathbf{C}$, ζ^{-1} est obtenu par projection dans E à partir du point O de S^2 diamétralement opposé à ∞ et passage à l'imaginaire conjugué dans $\mathbf{C}$, i.e. symétrie par rapport à l'axe réel $\Omega\xi$ de $\mathbf{C}$.

En outre $U\cap U'$ est homéomorphe à $\mathbf{C}^*$ et U, U' étant connexes, il en est de même de $U\cup U'=\mathbf{P}^1$.

6.4. Applications différentiables ; formes différentielles

6.4.1. Soient X et Y deux variétés différentielles de classe C^q, de dimensions éventuellement différentes. Une application $f : X\to Y$ est dite *p-fois continûment différentiable* ou (de classe) C^p, $(p\in\mathbf{N}\cup\{\infty\}, p\leqslant q)$ si elle est continue et vérifie la condition suivante : pour tout couple de cartes (h, U), (k, V) de X et de Y respectivement tel que $f(U)\subset V$, l'application

$$k\circ(f|U)\circ h^{-1}\colon h(U) \to k(V)$$

est de classe C^p en tant qu'application d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans un ouvert de $\mathbf{R}^{n'}$ $(n, n'\leqslant2)$.

En particulier $\mathbf{R}^n$ (ou $\mathbf{C}$) muni de sa structure $\mathbf{R}$-vectorielle et de la carte identité est une variété différentielle de toute classe et toute application $C^p : X \to \mathbf{R}$ (resp. $X \to \mathbf{C}$) est appelée une *fonction* (de classe C^p) à valeurs réelles (resp. complexes) sur X.

6.4.2. *Partition C^p de l'unité sur une variété différentielle*

La définition et le théorème d'existence sont les mêmes que sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

6.4.3. *Coordonnées locales*

Soit (h, U) une carte d'une variété différentielle X de classe C^q, alors h est une application C^q :

$$U \to h(U) \subset \mathbf{R}^n$$
$$x \mapsto h(x) = x_1(x) \quad \text{ou} \quad \big(x_1(x), x_2(x)\big) \quad \text{selon que} \quad n = 1 \quad \text{ou } 2\,;$$

$\underset{x \mapsto x_j(x)}{x_j : U \to \mathbf{R}}$ est une fonction C^q sur U ; les fonctions x_1 (ou x_1, x_2) sont appelées *les fonctions coordonnées,* ou les *coordonnées locales* de X, sur U définies par la carte (h, U). Dans la suite du n° 6.4, on suppose $n=2$.

6.4.4. Soit f une fonction C^p sur un ouvert U de la carte h de X, alors, pour $x \in U$

$$f(x) = f \circ h^{-1}\big((x_1(x), x_2(x)\big)$$

sera notée $f(x_1, x_2)$; cette fonction définie sur l'ouvert $h(U)$ de $\mathbf{R}^n$ dépend de la carte h.

6.4.5. Soit X une variété différentielle ; une carte (h, U) de X telle que $x \in U$ est dite une *carte de X en x.*

Comme dans 2.1, pour $x \in X$, soit $\mathscr{F}_x$ l'espace vectoriel des fonctions C^1 au voisinage de x ; si $f, g \in \mathscr{F}_x$, il existe un voisinage ouvert V de x contenu dans le domaine U d'une carte h en x sur lequel f et g sont C^1. On considère la relation $\mathscr{R}$ dans $\mathscr{F}_x$: $f \mathscr{R} g$ signifie

$$(f \circ h^{-1})' = (g \circ h^{-1})' \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^2; \mathbf{C}) \approx \mathbf{C}^2 \tag{6.1}$$

(h, U) étant choisie il est clair que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence. $\mathscr{R}$ ne dépend pas de la carte (h, U) ; en effet (k, U') étant une autre carte de X en x, quitte à rétrécir U et U', on peut supposer $U' = U$. Alors

$$(f \circ k^{-1})' = \big((f \circ h^{-1}) \circ (h \circ k^{-1})\big)' = (f \circ h^{-1})' \circ (h \circ k^{-1})'\,;$$

$h \circ k^{-1}$ étant un difféomorphisme : $k(U) \to h(U)$, $(h \circ k^{-1})'$ est un isomorphisme : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$; alors la relation (6.1) équivaut à

$$(f \circ k^{-1})' = (g \circ k^{-1})'. \tag{6.2}$$

6.4.6. La situation de 2.1 est celle dans laquelle la carte h est l'identité. On montre, comme en 2.1, que $\mathscr{F}_x/\mathscr{R}$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension 2, qu'on notera $T_x^*(X)$ et appellera l'*espace cotangent complexe à X en x* ; pour $f \in \mathscr{F}_x$ on note $\mathrm{d}f = \mathrm{d}_x f$ la classe de f dans $T_x^*(X)$ et on appelle différentielles en x les éléments de $T_x^*(X)$. L'application

$$\begin{aligned} \theta_{hx}^* \colon T_x^*(X) = \mathscr{F}_x/\mathscr{R} &\to \mathscr{L}(\mathbf{R}^2 \,;\, \mathbf{C}) \\ \mathrm{d}f &\mapsto (f \circ h^{-1})' \end{aligned}$$

est un $\mathbf{C}$-isomorphisme.

Si (x_1, x_2) sont des coordonnées locales en x (i.e. sur un voisinage de x), les différentielles en x s'écrivent de façon unique

$$\varphi = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \, \mathrm{d}x_j \; ; \; \lambda_j \in \mathbf{C}.$$

6.4.7. On considère, comme en 2.2, l'ensemble $T^*(X) = \bigcup_{x \in X} T_x^*(X)$, réunion disjointe et l'application projection

$$\begin{aligned} \pi = \pi_X \colon T^*(X) &\to X \\ T_x^*(X) \ni \varphi &\mapsto x. \end{aligned}$$

Pour tout ouvert W de X, soit $\varphi : W \to T^*(X)$ une application telle que $\pi \circ \varphi = \mathrm{id}_W$, alors si (x_1, x_2) sont des coordonnées locales sur un voisinage U d'un point de W, pour $x \in W \cap U$, $\varphi(x) = a_1(x)\,\mathrm{d}x_1 + a_2(x)\,\mathrm{d}x_2$ où a_j est une application : $W \cap U \to \mathbf{C}$, $j = 1, 2$.

L'application φ est appelée une *1-forme différentielle sur W*.

On dira que φ est C^r si les a_j sont C^r. Avec la convention de 6.4.4, on a

$$\varphi = a_1(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 + a_2(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2. \tag{6.3}$$

Si $(h, U), (k, U)$ sont deux cartes de X définissant les coordonnées locales (x_1, x_2), (ξ_1, ξ_2) respectivement, $k \circ h^{-1} : h(U) \to k(U)$ est un difféomorphisme et l'expression de φ à l'aide des coordonnées locales (ξ_1, ξ_2) est, d'après (6.3)

$$\begin{aligned} \varphi &= a_1\big(x_1(\xi_1, \xi_2), x_2(\xi_1, \xi_2)\big)\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\,\mathrm{d}\xi_1 + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\,\mathrm{d}\xi_2\right) + \dots \\ &= \left(a_1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + a_2 \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\right)\mathrm{d}\xi_1 + \left(a_1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + a_2 \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right)\mathrm{d}\xi_2. \end{aligned} \tag{6.4}$$

2 PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS HOLOMORPHES

Par application de la formule intégrale de Cauchy sur le bord d'un disque, puis sur le bord d'une couronne, on obtient le développement (de Taylor) en série entière en $z-z_0$ d'une fonction holomorphe au voisinage d'un point z_0 et le développement en série de Laurent d'une fonction holomorphe dans un disque privé de son centre. Un grand nombre de théorèmes fondamentaux en découlent très simplement : théorème d'identité (ou principe du prolongement analytique), inégalités de Cauchy, théorème de Liouville, principe du maximum, lemme de Schwarz. Le développement de Taylor d'une fonction holomorphe dans un disque permet l'approximation d'une fonction holomorphe par des polynômes holomorphes, d'où une solution du problème du d'' dans le disque ouvert. Le développement de Laurent permet l'étude des points singuliers, en particulier des pôles, des fonctions holomorphes dans le complémentaire d'un ensemble discret, et l'introduction des résidus d'une 1-forme différentielle, d'où le théorème des résidus qui généralise la formule intégrale de Cauchy. Ce dernier théorème permet une étude des zéros et des pôles d'une fonction méromorphe et le calcul d'intégrales de fonctions de variable réelle par la méthode des résidus. Un paragraphe préliminaire rappelle des résultats sur les séries de fonctions et les séries entières convergentes.

0. Séries entières convergentes

0.1. Séries de fonctions

Soit E une partie de $\mathbf{C}$; on considère les fonctions f sur E à valeur dans $\mathbf{C}$. Pour l'espace vectoriel $\mathscr{B}$ des fonctions bornées dans E on appelle norme de la convergence uniforme la fonction :

$$\mathscr{B} \to \mathbf{R}_+$$

$$f \mapsto \|f\|_E = \sup_{z\in E} |f(z)|.$$

On rappelle les définitions suivantes : on dit que *la série de fonctions* $\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n$ *converge*

(a) *simplement sur* E si, pour tout $z\in E$, la série numérique $\sum_n f_n(z)$ est convergente ;

(b) *uniformément sur* E si elle converge simplement vers une fonction f et si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que, pour tout $p \geqslant N(\varepsilon)$, pour tout $z \in E$, on ait

$$\left|f(z) - \sum_{n=0}^{p} f_n(z)\right| \leqslant \varepsilon.$$

$\mathbf{C}$ étant un espace complet cette condition équivaut à la suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que, pour tout $p \geqslant N(\varepsilon)$, pour tout $z \in E$, on ait

$$\left|\sum_{n=p}^{\infty} f_n(z)\right| \leqslant \varepsilon \ ;$$

(c) *normalement sur* E si la série à termes positifs $\sum_{n \in \mathbf{N}} \|f_n\|_E$ converge.

La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point de E et la convergence uniforme sur E.

0.2. Séries entières

0.2.1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes, la série de fonctions $(a_n z^n)$ est appelée la *série entière en* z de coefficients (a_n) et est notée $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n z^n$.

0.2.2.* Théorème. — *Il existe un nombre réel* $\varrho \in [0, \infty]$ *unique tel que

(a) *pour tout* $0 < r < \varrho$, *la série* $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n z^n$ *est normalement convergente sur le disque fermé* $\bar{B}(0, r) = \{z \in \mathbf{C} \ ; \ |z| \leqslant r\}$;

(b) *pour tout* $|z| > \varrho$, *la série* $\sum_n a_n z^n$ *diverge, la suite* $(a_n z^n)$ *étant non bornée.*

Le théorème résulte du

0.2.3.* Lemme d'Abel. — *Le nombre* ϱ *qui figure dans* 0.2.2 *est la borne supérieure des* $r \geqslant 0$ *tels que la suite* $(|a_n| r^n)$ *soit bornée.

DÉMONSTRATION de 0.2.3. — Soit $\varrho = \sup\{r \geqslant 0, (|a_n| r^n)_{n \in \mathbf{N}}$ bornée$\}$. Soit $r < \varrho$; par définition de la borne supérieure, il existe un nombre $r_0 \in]r, \varrho[$ tel que $(|a_n| r_0^n)$ soit bornée, i.e. il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|a_n| r_0^n \leqslant M$. Alors, pour $|z| \leqslant r$

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n \leqslant \frac{M}{r_0^n} r^n = M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n,$$

d'où la convergence normale de la série $\sum a_n z^n$ pour $|z| \leqslant r$. □

0.2.4. Le nombre ϱ est appelé le *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$; le disque ouvert $\{z \in \mathbf{C} \ ; \ |z| < \varrho\}$ est appelé le *disque de convergence* de la série.

On a :

$$\frac{1}{\varrho} = \overline{\lim_{n \to +\infty}} |a_n|^{1/n} = \lim_p \sup_{n \geq p} |a_n|^{1/n}$$

c'est la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(|a_n|^{1/n})$; cela se démontre par la règle de Cauchy de convergence des séries.

0.2.5. Une série entière de rayon de convergence strictement positif est dite une *série (entière) convergente.*

0.3. Dérivation des séries convergentes

0.3.1.* Théorème. — *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\varrho>0$, alors la somme de cette série $f(z)=\sum a_n z^n$ est indéfiniment* C*-dérivable donc* C^∞ *dans $B(0,\varrho)$. Pour tout $k>0$, la k-ième* C*-dérivée de f est, pour $z\in B(0,\varrho)$,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^{n-k}; \tag{0.1}$$

la série du second membre de (0.1) ayant pour rayon de convergence ϱ.

Pour tout $k\in\mathbf{N}$, on a :

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

et

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k. \tag{0.2}$$

DÉMONSTRATION. — Pour tout $\zeta\in B(0,\varrho)$, il s'agit de montrer que f est **C**-différentiable en ζ et de calculer sa dérivée : pour $\zeta\in B(0,\varrho)$; on a :

$$\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} = \frac{1}{z-\zeta}\left(\sum a_n z^n - \sum a_n \zeta^n\right). \tag{0.3}$$

On peut supposer z et ζ dans $\bar{B}(0,r)$ avec $r<\varrho$; dans $\bar{B}(0,r)$ la série est normalement convergente donc

$$\sum a_n z^n - \sum a_n\zeta^n = \sum a_n(z^n-\zeta^n) = (z-\zeta)\sum a_n(z^{n-1}+z^{n-2}\zeta+\dots+\zeta^{n-1})$$
$$|a_n(z^{n-1}+\dots+\zeta^{n-1})| \leq n|a_n|\,r^{n-1};$$

pour tout n, quand $z\to\zeta$, $z^{n-1}+z^{n-2}\zeta+\dots+\zeta^{n-1}$ tend vers $n\zeta^{n-1}$ et la série $\sum na_n z^{n-1}$ est normalement convergente dans $\bar{B}(0,r)$, donc, quand $z\to\zeta$, (0.3) a une limite égale à $\sum na_n\zeta^{n-1}$; on vérifie, à l'aide du lemme d'Abel que la série $\sum na_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence que la série donnée ; elle s'obtient en dérivant cette dernière terme à terme. Par récurrence sur k, on vérifie (0.1) et on montre que $f(z)$ est indéfiniment **C**-dérivable donc est C^∞. En outre, pour tout k, $f^{(k)}(0)=k!\,a_k$, d'où (0.2). □

0.3.2.* Corollaire. — *La somme de toute série entière convergente est holomorphe dans son disque de convergence. □

0.3.3. On dit qu'une fonction f définie sur un ouvert D de **C** *est développable en série entière au voisinage d'un point* $z_0\in D$ s'il existe une série en $(z-z_0)$ convergente dont f est la somme.

1. Développement en série de Taylor d'une fonction holomorphe

1.1. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert D de $\mathbf{C}$, on va étudier f au voisinage d'un point $z_0 \in D$; pour cela on fait le changement de coordonnée $z \mapsto z - z_0$; de sorte que, dans la nouvelle coordonnée notée encore z, f est holomorphe sur un disque ouvert $B(0, \varrho) = \{z \in \mathbf{C} \ ; \ |z| < \varrho\}$.

1.2. Théorème. — ***Toute fonction holomorphe dans le disque $B(0, \varrho)$ est égale à la somme d'une série entière convergente dans ce disque.***

DÉMONSTRATION. — Pour tout $r < \varrho$, on va former une série entière qui converge normalement vers $f(z)$ pour $|z| \leqslant r$.

Soit r_0 tel que $r < r_0 < \varrho$ et soit γ_0 le bord du disque $B(0, r_0)$; d'après la formule intégrale de Cauchy, pour $z \in \bar{B}(0, r)$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(t)}{t - z} \, \mathrm{d}t.$$

Comme $|z| < |t|$, on a :

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{t} \frac{1}{1 - \dfrac{z}{t}} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{t}\right)^n$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \sum_{n \in \mathbf{N}} z^n \frac{f(t)}{t^{n+1}} \, \mathrm{d}t.$$

La série sous le signe $\int$ convergeant normalement sur γ_0, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 0} z^n \int_{\gamma_0} \frac{f(t)}{t^{n+1}} \, \mathrm{d}t \tag{1.1}$$

$$\left\| z^n \int_{\gamma_0} \frac{f(t)}{t^{n+1}} \, \mathrm{d}t \right\|_{\bar{B}(0,r)} = \sup_{z \in \bar{B}(0,r)} \left| z^n \int_{\gamma_0} \frac{f(t)}{t^{n+1}} \, \mathrm{d}t \right| = \sup_{z \in \bar{B}(0,r)} \left| \int_{\gamma_0} \frac{z^n}{t^n} \frac{1}{t} f(t) \, \mathrm{d}t \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \sup_{\gamma_0} |f(t)| \left| \int_{\gamma_0} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right| = 2\pi \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \sup_{t \in \gamma_0} |f(t)|,$$

donc la série 2ᵉ membre de (1.1) converge normalement sur $\bar{B}(0, r)$ et le rayon de convergence de cette série est $> r$.

Pour $r_0 < r_0' < \varrho$, soit $\gamma_0' = bB(0, r_0')$; d'après le théorème de Cauchy $\dfrac{f(t)}{t^{n+1}}$ étant holomorphe pour $t \in B(0, \varrho) \setminus \{0\}$, on a $\displaystyle\int_{\gamma_0' - \gamma_0} \frac{f(t)}{t^{n+1}} \, \mathrm{d}t = 0$ donc $\displaystyle\int_{\gamma_0} \frac{f(t)}{t^{n+1}} \, \mathrm{d}t$ est indépendant de r_0. Finalement, pour tout $z \in B(0, \varrho)$, on a

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n z^n \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(t)}{t^{n+1}} \, \mathrm{d}t, \tag{1.2}$$

la série du second membre ayant un rayon de convergence au moins égal à ϱ.

1.3. **Théorème.** — ***Toute fonction holomorphe f sur un ouvert D de*** **C** ***est développable en série entière convergente au voisinage de tout point $z_0 \in D$*** **(i.e. est égale à une série convergente en $(z-z_0)$ au voisinage de z_0)** ; ***cette série est la série de Taylor de f en z_0 et son rayon de convergence est au moins égal à $d(z_0, \complement D)$. En outre, pour tout disque $B(z_0, r)$ d'adhérence contenue dans D et pour $\gamma = bB(z_0, r)$, on a :***

$$(1.3) \qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Démonstration. — D'après la remarque 1.1, le théorème 1.2 et sa démonstration, on a :

$$(1.4) \qquad f(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n(z-z_0)^n \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

au voisinage de z_0.

D'après 0.3.1, on a la relation (1.3), alors

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(z_0)\frac{(z-z_0)^n}{n!},$$

i.e. f est égale à la somme de sa série de Taylor. Enfin, f étant holomorphe dans $B(z_0, \mathrm{d}(z_0, \complement D))$, d'après 1.2, la série du second membre de (1.4) a un rayon de convergence au moins égal à $d(z_0, \complement D)$. □

1.4. Corollaire. — ***Toute série entière de rayon de convergence ϱ est développable en série entière en $(z-z_0)$ au voisinage de tout $z_0 \in B(0, \varrho)$, le rayon de convergence de cette dernière étant au moins égal à $\varrho - |z_0|$.*** □

1.5. Corollaire. — ***Si f est une fonction définie sur un ouvert D de*** **C**, ***les deux propriétés suivantes sont équivalentes :***

(i) ***f est holomorphe sur D ;***

(ii) ***f est développable en série entière convergente au voisinage de tout point de D.*** □

1.6. Remarque. — On appelle parfois *fonction analytique complexe* sur D toute fonction possédant la propriété (ii) ci-dessus. Alors, 1.5 signifie : les fonctions holomorphes sur D sont les fonctions analytiques complexes sur D.

2. Application : théorème d'identité ; inégalités de Cauchy ; théorème de Liouville ; problème du d″ dans un disque ouvert

2.1. Théorème d'identité

2.1.1. **Théorème.** — ***Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe D de*** **C** ***et $z_0 \in D$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :***

(i) ***$f = 0$ sur D ;***

(ii) ***f est nulle au voisinage de z_0 ;***

(iii) ***pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f^{(k)}(z_0) = 0$.***

DÉMONSTRATION. — (i)⇒(ii)⇒(iii) ;

(iii)⇒(ii) ; d'après 1.3, il existe un disque ouvert U_{z_0} centré en z_0 sur lequel $f(z)=$ $=\sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)\cdot(z-z_0)^k$; alors (iii) entraîne $f|U_{z_0}=0$;

(ii)⇒(i) : Soit $E=\{z\in D$; il existe U_z comme ci-dessus tel que $f|U_z=0\}$; E contient z_0 ; E est ouvert. Soit $\zeta\in\bar{E}$, alors il existe une suite (z_n) de points de E qui converge vers ζ ; pour tout n, pour tout k, on a : $f^{(k)}(z_n)=0$; $f^{(k)}$ étant continue, $f^{(k)}(\zeta)=0$, donc $f=0$ au voisinage de ζ, i.e. $\zeta\in E$, d'où $E=\bar{E}$; E étant non vide, ouvert et fermé dans D connexe, on a : $E=D$. □

2.1.2. **Corollaire (théorème d'identité).** — ***Soient u et v deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe D de* C. *Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :***

(i) $u=v$;

(ii) $u=v$ ***au voisinage d'un point de D.*** □

2.1.3. **Remarque.** — Le Corollaire est aussi appelé *principe du prolongement analytique.*

2.2. Zéros d'une fonction holomorphe

2.2.1. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert D de $\mathbf{C}$. Tout point $z_0\in D$ tel que $f(z_0)=0$ est appelé un *zéro* de f. Au voisinage de z_0, f est développable en série entière convergente, i.e. $f(z)=\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n(z-z_0)^n$ avec $a_0=0$. Soit k le plus petit entier strictement positif tel que $a_k\neq 0$, alors

$$f(z) = (z-z_0)^k g(z), \tag{2.1}$$

La série $g(z)=\sum_{n\geq k} a_n(z-z_0)^{n-k}$ a même disque de convergence que $f(z)$ et

$$g(z_0) \neq 0 \; ; \tag{2.2}$$

l'entier k est appelé l'*ordre (de multiplicité)* ou la *multiplicité* du zéro z_0 de la fonction f, il est caractérisé par (2.1) et (2.2) et aussi par (2.3) $f^{(n)}(z_0)=0$ pour $n\in[0, k-1]$ et $f^{(k)}(z_0)\neq 0$. Si $k=1$, z_0 est dit un zéro *simple,* si $k\geq 2$, z_0 est dit *multiple.*

Soit $Z(f)$ l'ensemble des zéros de f dans D.

2.2.2. **Théorème.** — ***Soit f une fonction holomorphe non nulle dans un ouvert connexe D de* C, *alors les zéros de f sont des points isolés, i.e. Z(f) est un ensemble discret.***

DÉMONSTRATION. — D'après le théorème d'identité, f n'est nulle sur aucun ouvert non vide de D. Si z_0 est un zéro de f les conditions (2.1) et (2.2) et la continuité de g entraînent l'existence d'un voisinage U_{z_0} de z_0 dans D tel que $f|U_{z_0}\setminus\{z_0\}$ n'ait pas de zéro. □

2.2.3. **Corollaire.** — ***L'anneau des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe D de* C *est intègre.***

DÉMONSTRATION. — Soient $f, g \in \mathcal{O}(D)$; $f \neq 0$; $g \neq 0$; pour tout $z_0 \in D$, on a : $f(z)=(z-z_0)^m u(z)$; $g(z)=(z-z_0)^n v(z)$ avec $m, n \geqslant 0$, sur un voisinage U de z_0 avec $u, v \in \mathcal{O}(U)$ et $u(z_0) \neq 0$, $v(z_0) \neq 0$, alors $fg(z)=(z-z_0)^{m+n} u(z) v(z)$; $u(z_0) \cdot v(z_0) \neq 0$, donc le produit fg est non nul. □

2.3. Inégalités de Cauchy

D'après 1.3, pour toute fonction holomorphe f sur un ouvert D de $\mathbf{C}$, pour tout $z_0 \in D$, il existe $r>0$ tel que : $f(z)=\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n (z-z_0)^n$ sur $B(z_0, r)$ avec $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \int_\gamma \dfrac{f(z_0+t)}{t^{n+1}} \mathrm{d}t$ où $\gamma = bB(0, r)$. Sur γ, $t=re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$; $\mathrm{d}t = rie^{i\theta} \mathrm{d}\theta$, donc $a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} f(z_0+re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta$; f étant continue sur le compact spt γ on a $\sup_{\theta\in[0,2\pi]} |f(z_0+re^{i\theta})| = M(r) < +\infty$; alors

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}. \tag{2.4}$$

Les inégalités (2.4) sont appelées les *inégalités de Cauchy.*

2.4. Théorème de Liouville

2.4.1. Toute fonction f holomorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier est appelée une *fonction entière.*

2.4.2. **Théorème.** — ***Toute fonction entière bornée est constante.***

DÉMONSTRATION. — D'après 1.2, f est la somme d'une série entière en z convergente sur $\mathbf{C}$. Dans les notations de 2.3, soit M un majorant de $M(r)$; alors, d'après les inégalités de Cauchy, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $|a_n| \leqslant \dfrac{M(r)}{r^n} \leqslant \dfrac{M}{r^n}$, ce qui entraîne $a_n = 0$ pour $n \geqslant 1$, donc $f(z) = a_0$. □

2.4.3. Application : **Théorème de d'Alembert.** — ***Tout polynôme en z, à coefficients complexes et non constant, a au moins un zéro complexe.***

DÉMONSTRATION. — Soit $P(z)$ un tel polynôme ; si, pour tout $z \in \mathbf{C}$, $P(z) \neq 0$, la fonction : $z \mapsto \dfrac{1}{P(z)}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$; mais $P(z) = z^n(a_n + a_{n-1}z^{-1} + \ldots + a_0 z^{-n})$ avec $a_n \neq 0$, $n \geqslant 1$, donc $P(z)$ tend vers l'infini quand $|z| \to \infty$, i.e. il existe un disque compact $\bar{B}$ tel que, dans $\mathbf{C} \setminus \bar{B}$, $\left|\dfrac{1}{P(z)}\right|$ soit borné ; $\bar{B}$ étant compact, $\left|\dfrac{1}{P(z)}\right|$ est aussi borné sur $\bar{B}$. Alors la fonction entière $\dfrac{1}{P(z)}$ étant bornée sur $\mathbf{C}$ est constante d'après 2.4.2, donc $P(z)$ est constant, ce qui contredit l'hypothèse. □

2.5. Problème du d″ dans le disque ouvert

Théorème. — ***Soit $B=B(0, R)$ un disque ouvert de C avec $R\in]0, +\infty]$. $\omega=g\,d\bar{z}$ étant une forme différentielle donnée de classe C^1 dans B, il existe une fonction f, de classe C^1, sur B, telle que $d''f=\omega$; f est déterminée à l'addition près d'une fonction holomorphe sur B.***

DÉMONSTRATION. — Soit $(B_n)_{n\in N}$ une suite de disques $B_n=\{z\in C\ ;\ |z|<R_n\}$ emboîtés tels que $R_{n+1}>R_n$ et $\bigcup_{n\in N} B_n=B$. Soit (ψ_n) une suite de fonctions C^∞ sur B telles que $\operatorname{spt}\psi_n\subset B_{n+1}$ et $\psi_n|B_n=1$, $n\geqslant 1$, $\psi_n g$ est C^1 sur B et à support compact contenu dans B_{n+1} ; alors (ch. 1, 5.3.2), il existe f_n, C^1 sur B telle que $d''f_n=\psi_n g\,d\bar{z}$. On va démontrer, par récurrence sur n, l'existence d'une suite de fonctions $(\tilde{f}_n)$ sur B telle que

$$(2.5)\qquad \begin{cases} d''\tilde{f}_n = g\,d\bar{z} \quad \text{sur} \quad B_n\ ; \quad n\geqslant 1 \\ \|\tilde{f}_n-\tilde{f}_{n-1}\|_{B_{n-2}} \leqslant 2^{1-n}\ ; \quad n\geqslant 2 \end{cases}$$

où $\|\ \|_{B_{n-2}}$ désigne la norme de la convergence uniforme sur le compact $\bar{B}_{n-2}$.

On pose $\tilde{f}_1=f_1$, alors $(2.5)_1$ est satisfaite pour $n=1$. Supposons $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n$ construites satisfaisant à (2.5) pour $n\geqslant 1$, $n\geqslant 2$ resp. ; alors $d''(f_{n+1}-\tilde{f}_n)=0$ sur B_n, i.e. $f_{n+1}-\tilde{f}_n$ est holomorphe sur B_n, donc développable en série entière convergente sur B_n ; alors, il existe un polynôme P_n en z défini par un développement limité de Taylor de $f_{n+1}-\tilde{f}_n$ sur B_n tel que $\|f_{n+1}-\tilde{f}_n-P_n\|_{B_{n-1}}\leqslant 2^{-n}$. On pose : $\tilde{f}_{n+1}=f_{n+1}-P_n$, alors, sur B_{n+1}, on a : $d''\tilde{f}_{n+1}=d''f_{n+1}-d''P_n=d''f_{n+1}=\psi_{n+1}\omega=\omega$; donc (2.5) est vérifiée pour $n+1$. En outre, le raisonnement ci-dessus, pour $n=2$, montre que $(2.5)_2$ est satisfaite pour $n=2$, ce qui permet de faire démarrer la récurrence.

Soit $z\in B$, il existe n_0 tel que $z\in B_{n_0}$; alors, $(\tilde{f}_n(z))_{n\geqslant n_0+2}$ est une suite de Cauchy, donc converge vers un nombre $f(z)=\lim_{n\to\infty}\tilde{f}_n(z)$, d'après $(2.5)_2$; de plus, sur B_n, on a, pour $p\geqslant n$, $\tilde{f}_{p+1}=\tilde{f}_{n+1}+h^p_{n+1}$ avec $h^p_{n+1}=\sum_{k=n+1}^{p}(\tilde{f}_{k+1}-\tilde{f}_k)$, $f=\lim_{n\leqslant p\to\infty}\tilde{f}_{p+1}=$ $=\tilde{f}_{n+1}+\lim_{n\leqslant p\to\infty}h^p_{n+1}$. Pour $k\geqslant n$, $\tilde{f}_{k+1}-\tilde{f}_k$ est holomorphe sur B_n à cause de $(2.5)_1$; h^p_{n+1} est holomorphe sur B_n et la suite $(h^p_{n+1})_{p\geqslant n+1}$ converge uniformément sur B_n, à cause de $(2.5)_2$, donc (d'après un résultat qui sera établi au Chapitre 3, 1.3), cette suite converge vers une fonction holomorphe h_{n+1} sur B_n, $f=\tilde{f}_{n+1}+h_{n+1}$ sur B_n, f est C^1 sur B_n et $d''f=d''\tilde{f}_{n+1}=g\,d\bar{z}$ sur B_n ; f est indépendante de n, alors $d''f=$ $=g\,d\bar{z}$ sur B. Si φ est une autre solution $d''(\varphi-f)=0$, i.e. $\varphi-f\in\mathcal{O}(B)$. □

3. Principe du maximum ; lemme de Schwarz

3.1. Propriété de la moyenne

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert D de $\mathbf{C}$; d'après la formule intégrale de Cauchy et 2.3, pour tout $z_0 \in D$ et $\bar{B}(z_0, r) \subset D$, on a :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta. \tag{3.1}$$

Soit g une fonction continue sur D, si pour tout $z_0 \in D$, $\bar{B}(z_0, r) \subset D$ et $\gamma = bB(z_0, r)$, on a :

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta \tag{3.2}$$

on dit que g possède la *propriété de la moyenne* ; le second membre de (3.2) a un sens pour toute fonction continue g et est appelé la *valeur moyenne de* g *sur* $\operatorname{spt}\gamma$.

D'après (3.1), toute fonction holomorphe sur D possède la propriété de la moyenne et il en est de même de ses parties réelle et imaginaire.

On dit qu'une fonction continue g sur D vérifie le *principe du maximum dans* D si, en tout point z_0 où $|g|$ a un maximum relatif, g est constante au voisinage de z_0.

3.2. Théorème. — ***Soit g une fonction continue à valeurs complexes dans un ouvert D de $\mathbf{C}$. Si g possède la propriété de la moyenne et si $|g|$ possède un maximum relatif en un point $z_0 \in D$, alors g est constante sur un voisinage de z_0, donc vérifie le principe du maximum dans D.***

DÉMONSTRATION. — Si $g(z_0) = 0$, le résultat est évident.

Si $g(z_0) \neq 0$, après multiplication de g par une constante complexe de module 1, on se ramène au cas $g(z_0) > 0$, ce qu'on suppose désormais. $|g|$ possédant un maximum relatif en z_0, pour $r \geqslant 0$ assez petit et $\theta \in \mathbf{R}$, on a :

$$0 < \mathscr{R}\mathrm{e}\, g(z_0 + re^{i\theta}) \leqslant |g(z_0 + re^{i\theta})| \leqslant g(z_0) = \mathscr{R}\mathrm{e}\, g(z_0), \tag{3.3}$$

donc

$$\mathscr{R}\mathrm{e}\, g(z_0 + re^{i\theta}) \leqslant \mathscr{R}\mathrm{e}\, g(z_0). \tag{3.4}$$

g possédant la propriété de la moyenne, il en est de même de $\mathscr{R}\mathrm{e}\, g$; alors (3.4) ne peut être satisfaite qu'avec l'égalité, i.e.

$$\mathscr{R}\mathrm{e}\, g(z_0 + re^{i\theta}) = \mathscr{R}\mathrm{e}\, g(z_0) = g(z_0). \tag{3.5}$$

En portant dans (3.3) on trouve $0 < \mathscr{R}\mathrm{e}\, g(z_0 + re^{i\theta}) = |g(z_0 + re^{i\theta})| = g(z_0)$, d'où $g(z_0 + re^{i\theta}) = g(z_0)$ pour r assez petit, donc g est constante au voisinage de z_0.

3.3. Corollaire. — ***Soient D un ouvert borné connexe de $\mathbf{C}$ et g une fonction (à valeurs complexes) continue sur $\bar{D}$ et possédant, dans D, la propriété de la moyenne. Alors le maximum de $|g|$ est atteint sur la frontière de $\bar{D}$.***

DÉMONSTRATION. — $\bar{D}$ est compact ; la borne supérieure M' de $|g|$ sur $\bar{D}$ est atteinte en $z_0 \in \bar{D}$; si $z_0 \in D$, l'ensemble des points z où $g(z)=g(z_0)$ est un ouvert non vide d'après 3.2, il est fermé puisque g est continue, donc, à cause de la connexité de D, il est égal à D et g est constante sur D ; comme g est continue, elle est constante sur $\bar{D}$. □

3.4. Corollaire. — ***Soit f une fonction holomorphe bornée sur un ouvert D de $\mathbf{C}$. Si $|f|$ atteint son maximum en un point $z_0 \in D$, f est constante sur la composante connexe de z_0. Si D est borné, connexe et si f a une extension continue à $\bar{D}$, alors l'extension de f atteint son maximum sur la frontière de $\bar{D}$.***

DÉMONSTRATION. — D'après (3.1), f possède la propriété de la moyenne, la 2ᵉ conclusion résulte de 3.3 et de sa démonstration. La première assertion de 3.4 est valide pour f continue possédant la propriété de la moyenne. □

3.5. Lemme de Schwarz. — ***Toute fonction f holomorphe dans le disque $B(0, 1)$ telle que : $f(0)=0$ et $|f(z)|<1$ pour tout $z \in B(0, 1)$ possède les propriétés suivantes :***

1) $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in B(0, 1)$;

2) si, pour $z_0 \in B(0, 1)\setminus\{0\}$, on a $|f(z_0)|=|z_0|$, alors $f(z)=\lambda z$ avec $\lambda \in \mathbf{C}$; $|\lambda|=1$.

DÉMONSTRATION. — f est développable en série entière $\sum a_n z^n$ dans $B(0, 1)$; $f(0)=0$ équivaut à $a_0=0$, donc $\dfrac{f(z)}{z}$ est holomorphe sur $B(0, 1)$; $|f(z)|<1$ entraîne : pour tout $r<1$,

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{r} \quad \text{pour} \quad |z| = r. \tag{3.4}$$

D'après le principe du maximum, (3.4) est valide pour $|z| \leq r$, donc, sur $B(0, 1)$, $\left|\dfrac{f(z)}{z}\right| \leq 1$. Si pour $z_0 \in B(0, 1)\setminus\{0\}$, on a : $|f(z_0)|=|z_0|$, $\left|\dfrac{f(z)}{z}\right|$ atteint son maximum en z_0 ; d'après le principe du maximum, $\dfrac{f(z)}{z}$ est constante, égale à λ complexe de module 1. □

Remarque. — Dans les hypothèses du Lemme de Schwarz, on a $|f'(0)| \leq 1$; en effet $|f'(0)| = \lim\limits_{z \to 0} \left|\dfrac{f(z)}{z}\right| \leq 1$, d'après 1).

4. Développement en série de Laurent

4.1. Série de Laurent dans une couronne

4.1.1. Soient $f_1(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière convergente dans $B(0, \varrho_1)$, $0<\varrho_1\leqslant$ $\leqslant +\infty$

$g(\zeta)=\sum_{n>0} b_n \zeta^n$ une série convergente dans $B(0, \varrho_2^{-1})$, $0\leqslant\varrho_2<+\infty$.

Alors, pour $\{z\in \mathbf{C}\ ;\ |z^{-1}|<\varrho_2^{-1}\}$, on a : $g\left(\dfrac{1}{z}\right)=\sum_{n>0} b_n z^{-n}$; autrement dit la série $f_2(z)=\sum_{n<0} a_n z^n$ avec $a_n=b_{-n}$ est convergente pour $|z|>\varrho_2$, normalement convergente pour $|z|\geqslant r$ avec $r>\varrho_2$; la fonction $z\mapsto\dfrac{1}{z}$ étant holomorphe pour $|z|>\varrho_2$, la fonction $f_2(z)$ est holomorphe pour $|z|>\varrho_2$.

Supposons désormais $0\leqslant\varrho_2<\varrho_1\leqslant+\infty$, alors la fonction $f(z)=f_2(z)+f_1(z)$, somme de deux fonctions holomorphes, est holomorphe dans la *couronne* $C(\varrho_1, \varrho_2)=$ $=\{z\in \mathbf{C}\ ;\ \varrho_2<|z|<\varrho_1\}$, en outre

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n\ ; \tag{4.1}$$

la série du second membre de (4.1) est appelée une *série de Laurent* dans $C(\varrho_1, \varrho_2)$, sa convergence est normale dans $\bar{C}(r_1, r_2)$ avec $\varrho_2<r_2\leqslant r_1<\varrho_1$.

Une fonction $f(z)$ définie dans une couronne $C(\varrho_1, \varrho_2)$ est dite *développable en série de Laurent* dans $C(\varrho_1, \varrho_2)$ s'il existe une série de Laurent convergente dans $C(\varrho_1, \varrho_2)$ dont la somme est $f(z)$ pour tout $z\in C(\varrho_1, \varrho_2)$; la convergence est normale dans $\bar{C}(r_1, r_2)$ comme ci-dessus.

4.1.2. Unicité du développement

Soit $z=re^{i\theta}$, $r\in]\varrho_1, \varrho_2[$, on a : $f(re^{i\theta})=\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n r^n e^{in\theta}$. Considérons

$$e^{-ip\theta} f(re^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n r^n e^{i(n-p)\theta}\ ;\quad p\in\mathbf{Z}. \tag{4.2}$$

La série du second membre de (4.2) converge normalement sur $[0, 2\pi]$ pour r fixé ; on peut donc l'intégrer terme à terme :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ip\theta} f(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_n r^n e^{i(n-p)\theta}\,\mathrm{d}\theta = a_p r^p\ ; \tag{4.3}$$

les coefficients du développement de Laurent sont déterminés par f.

4.2. Développement de Laurent d'une fonction holomorphe dans une couronne

4.2.1.* Théorème. — *Toute fonction $f(z)$ holomorphe dans une couronne $C(\varrho_1, \varrho_2)$ est développable en série de Laurent dans cette couronne.

DÉMONSTRATION. — On va construire une série de Laurent dans $C(\varrho_1, \varrho_2)$ qui converge vers f normalement dans $\bar{C}(r_1, r_2)$ pour $\varrho_2 < r_2 < r_1 < \varrho_1$. Soient r_1', r_2' ; $\varrho_2 < r_2' < r_2 < r_1 < r_1' < \varrho_1$ et $\gamma_1 = bB(0, r_1')$; $\gamma_2 = bB(0, r_2')$; alors $\gamma_1 - \gamma_2 = bC(r_1', r_2')$. D'après la formule intégrale de Cauchy appliquée à f pour $z \in \bar{C}(r_1, r_2)$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t.$$

Calculons : (a) la première intégrale : $|t| = r_1'$; $|z| \leqslant r_1 < r_1'$; $\dfrac{1}{t-z} = t^{-1}(1 - zt^{-1})^{-1} = \sum_{n \geq 0} z^n t^{-n-1}$; cette série converge normalement pour $t \in \operatorname{spt} \gamma_1$, donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t = \sum_{n \geq 0} a_n z^n,$$

avec $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{t^{n+1}}\,\mathrm{d}t$, $n \in \mathbf{N}$; la série converge normalement dans $\bar{B}(0, r_1)$; d'ailleurs $a_n = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{r_1'^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(r_1' e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$.

(b) la seconde intégrale : $|t| = r_2'$; $r_2' < r_2 \leqslant |z|$, $\dfrac{1}{t-z} = -z^{-1}(1 - tz^{-1})^{-1} = -\sum_{p>0} t^{p-1} z^{-p}$ converge normalement pour $t \in \operatorname{spt} \gamma_2$; alors $-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{f(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t = \sum_{n<0} a_n z^n$ avec $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{f(t)}{t^{n+1}}\,\mathrm{d}t$; $n < 0$; la série converge normalement dans $\complement B(0, r_2)$. Donc

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n ; \tag{4.4}$$

la série du second membre converge normalement sur $\bar{C}(r_1, r_2)$. D'après l'unicité du développement en série de Laurent dans $C(\varrho_1, \varrho_2)$, les a_n ne dépendent pas de r_1, r_2 ; f est développable en série de Laurent dans $C(\varrho_1, \varrho_2)$. □

4.2.2.* Théorème. — *Pour toute $f \in \mathcal{O}(C(\varrho_1, \varrho_2))$, il existe $f_1 \in \mathcal{O}(B(0, \varrho_1))$ et $f_2 \in \mathcal{O}(\complement\bar{B}(0, \varrho_2))$ telles que $f = f_1 + f_2$ dans $C(\varrho_1, \varrho_2)$. Cette décomposition est unique si on ajoute la condition $f_2(z) \to 0$ quand $|z| \to \infty$.

DÉMONSTRATION. — Le développement de f en série de Laurent $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n$ fournit les deux fonctions $f_1 = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $f_2 = \sum_{n<0} a_n z^n$, $f_2(z)$ tendant vers 0 avec $\dfrac{1}{z}$. Reste à montrer l'unicité de la décomposition compte tenu de la dernière condition ; si (f_1', f_2') est un autre couple alors $f_1 - f_1' = f_2' - f_2$ dans $C(\varrho_1, \varrho_2)$; il existe une fonction holomorphe g dans $\mathbf{C}$ telle que $g|B(0, \varrho_1) = f_1 - f_1'$ et $g|\complement\bar{B}(0, \varrho_2) = f_2' - f_2$ et $g(z) \to 0$ avec $\dfrac{1}{z}$; d'après le théorème de Liouville, $g = 0$. □

4.3. Inégalités de Cauchy ; points singuliers isolés

4.3.1. Soit f une fonction holomorphe dans la couronne $C(\varrho_1, \varrho_2)$; elle est égale à son développement de Laurent $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$; pour $r\in]\varrho_2, \varrho_1[$, on a établi la formule

$$a_n = \frac{1}{r^n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta. \tag{4.3}$$

Soit $M(r) = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |f(re^{i\theta})|$; alors

$$|a_n| \leqq r^{-n} M(r)\,;\quad n\in\mathbf{Z}. \tag{4.4}$$

Les inégalités (4.4) généralisent (2.4) et sont appelées aussi *inégalités de Cauchy.*

4.3.2. On appelle $C(\varrho, 0) = B(0, \varrho)\setminus\{0\}$ le *disque épointé de rayon* ϱ et on le notera $B^*(0, \varrho)$. Si $f\in\mathcal{O}(B^*(0, \varrho))$ et s'il existe $g\in\mathcal{O}(B(0, \varrho))$ telle que $g|B^*(0, \varrho) = f$, on dira que g est un *prolongement* ou, de façon équivalente, une *extension* de f à $B(0, \varrho)$.

4.3.3. Théorème de prolongement de Riemann. — Dans la notation ci-dessus, pour $f\in\mathcal{O}(B^*(0, \varrho))$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *f se prolonge en une fonction holomorphe sur $B(0, \varrho)$;*

(ii) *f est bornée au voisinage de 0.*

DÉMONSTRATION. — (i)⇒(ii) : évident ;

(ii)⇒(i) : il existe $M > 0$ et $r_0 > 0$ tels que, pour $0 < r < r_0$, $M(r) < M$; alors $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$ désignant le développement de Laurent dans $B^*(0, \varrho)$, les inégalités (4.4) sont valides ; pour $n < 0$, r^{-n} tend vers 0 avec r, donc $a_n = 0$: le développement de Laurent de f est un développement de Taylor dont la somme est holomorphe dans $B(0, \varrho)$ et prolonge f. □

Dans les hypothèses de 4.3.3, on dit que 0 est une *singularité apparente* de f.

4.3.4. Fonctions méromorphes dans un ouvert de C

Soient Δ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $u, v\in\mathcal{O}(\Delta)$; les zéros de v constituent un ensemble discret $Z(v)$ de Δ ; $z\mapsto u(z)v^{-1}(z)$ est holomorphe sur $\Delta\setminus Z(v)$. Soit $z_0\in Z(v)$, alors : $u = (z-z_0)^m u_1(z)$; $v = (z-z_0)^n v_1(z)$, $m\geqslant 0$, $n > 0$, u_1, v_1 holomorphes au voisinage de z_0, $u_1(z_0)\neq 0$, $v_1(z_0)\neq 0$, donc $u(z)v^{-1}(z) = (z-z_0)^{m-n} u_1(z)\cdot v_1^{-1}(z)$; si $m\geqslant n$, uv^{-1} a une extension holomorphe au voisinage de z_0 ; si $m < n$, $u(z)\cdot v^{-1}(z) = (z-z_0)^{m-n} h_1(z)$ où h_1 est holomorphe au voisinage de z_0 et $h_1(z_0)\neq 0$. Le point z_0 est appelé un *pôle* de $u\cdot v^{-1}$ et quand $z\to z_0$, $|u(z)\cdot v^{-1}(z)|\to +\infty$. $\mathcal{O}(\Delta)$ est un anneau d'intégrité (2.2.3) ; l'ensemble des $u\cdot v^{-1}$ est le corps des fractions $\mathscr{F}(\Delta)$ de $\mathcal{O}(\Delta)$.

On appelle *fonction méromorphe* sur un ouvert D de $\mathbf{C}$, toute fonction holomorphe f sur un ouvert D' de D tel que $D\setminus D'$ soit discret et possédant la propriété suivante : tout point $z_0\in D$ a un voisinage ouvert connexe Δ_{z_0} dans D tel que $f|\Delta_{z_0}\in\mathscr{F}(\Delta_{z_0})$.

L'ensemble des fonctions méromorphes sur un ouvert *connexe* D constitue un corps $\mathcal{M}(D)$ et une $\mathbf{C}$-algèbre.

4.3.5. Soit $f\in\mathcal{O}(B^*(0,\varrho))$, si f n'a pas d'extension holomorphe à $B(0,\varrho)$, on dit que 0 est un *point singulier isolé* de f ; d'après 4.3.3, cette condition équivaut à la suivante : le développement de Laurent de f dans $B^*(0,\varrho)$ a des termes non nuls d'indices <0. Deux cas sont possibles :

1) il existe un nombre fini de $a_p\neq 0$ avec $p<0$, alors, il existe n tel que : $f(z)=$ $=g(z)\cdot z^{-n}$, où g est holomorphe, $g(0)\neq 0$; donc *f est méromorphe dans* $B(0,\varrho)$ de pôle 0 ; l'entier n est appelé la *multiplicité* du pôle 0 de f ;

2) il existe une infinité d'entiers $p<0$ tels que $a_p\neq 0$; on dit que 0 est un *point singulier essentiel isolé de f.*

Etant donnée une fonction holomorphe sur $B^*(z_0,\varrho)=\{z\in\mathbf{C}\ ;\ |z-z_0|<\varrho,\ z\neq z_0\}$, le changement de coordonnée $z\mapsto z-z_0$ ramène au cas ci-dessus où $z_0=0$.

4.3.6. **Théorème. —** ***Si 0 est un point singulier essentiel isolé de*** $f\in\mathcal{O}(B^*(0,\varrho))$, ***alors pour tout*** $\varepsilon>0$, $\mathrm{Im}_\varepsilon f=f(B^*(0,\varepsilon))$ ***est dense dans*** $\mathbf{C}$.

DÉMONSTRATION. — Supposons que $\mathrm{Im}_\varepsilon f$ ne soit pas dense dans $\mathbf{C}$, alors il existe un point $b\in\mathbf{C}$ et un disque ouvert $B(b,r)$ disjoint de $\mathrm{Im}_\varepsilon f$, donc, pour $z\in B^*(0,\varepsilon)$, $|f(z)-b|\geqslant r$; la fonction $g(z)=(f(z)-b)^{-1}$ est holomorphe et bornée dans $B^*(0,\varepsilon)$; d'après 4.3.3 elle admet un prolongement holomorphe $\tilde{g}$ à $B(0,\varepsilon)$; alors $\tilde{g}(z)^{-1}$ est méromorphe dans $B(0,\varepsilon)$, $f(z)=b+\tilde{g}(z)^{-1}$ est méromorphe sur $B(0,\varepsilon)$ et 0 est un pôle de f, ce qui contredit l'hypothèse. □

4.4. Compléments sur les surfaces de Riemann

Il s'agit de compléter le n° 6 du chapitre 1.

4.4.1. Applications holomorphes

Une *application* $f: X\to Y$ de surfaces de Riemann est dite *holomorphe* si elle est continue et si elle possède la propriété suivante : pour tout couple (h,U), (k,V) de cartes holomorphes de X et Y respectivement tel que $f(U)\subset V$,

$$k\circ(f|U)\circ h^{-1}:\ h(U)\to k(V)$$

est une fonction holomorphe de l'ouvert $h(U)$ de $\mathbf{C}$ à valeurs dans l'ouvert $k(V)$ de $\mathbf{C}$. En particulier, si $Y=(\mathbf{C},\mathrm{id}_{\mathbf{C}})$, f est dite une fonction holomorphe sur X. Soit z la coordonnée dans $h(U)\subset\mathbf{C}$, pour tout $x\in U$, soit $z(x)=z(h(x))$ la valeur de la coordonnée z en $h(x)$; z est une fonction holomorphe sur U dite *fonction coordonnée locale (holomorphe)* ; on désignera souvent la carte h par z. On note $\mathcal{O}(W)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur l'ouvert W de X. On définit, de même, l'anneau des fonctions méromorphes $\mathcal{M}(W)$ sur W ; si W est connexe, $\mathcal{M}(W)$ est un corps.

D'après la définition, si f est une fonction holomorphe sur l'ouvert de carte U, sur lequel z est une coordonnée, alors $F = f \circ h^{-1}$ est une fonction holomorphe de z sur $h(U)$; on la confondra avec f et on posera $f(z) = F(z)$; cette convention suppose la fonction coordonnée z choisie. De même, la surface de Riemann X étant munie d'une structure de variété différentielle sous-jacente, on définit les fonctions différentiables et les formes différentielles sur l'ouvert de carte U muni de la coordonnée holomorphe $z = x + iy$; (x, y) étant des fonctions coordonnées réelles. Dans ces coordonnées les fonctions et les formes différentielles de degré 1 ou 2 ont la même expression que dans un ouvert de $\mathbf{C}$ et s'écrivent à l'aide de x, y, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}\bar{z}$.

4.4.2. Changement de carte

Soient h et h' deux cartes holomorphes, de coordonnée z, z' resp., de la surface de Riemann X, de même domaine U, alors $\varphi = h' \circ h^{-1} : h(U) \to h'(U)$ est une application holomorphe et $z' = \varphi(z)$; en tout point z de $h(U)$, $\varphi'(z) \neq 0$. Si ω est une 1-forme différentielle sur U, d'expression $\omega = a(z')\,\mathrm{d}z' + b(z')\,\mathrm{d}\bar{z}'$ dans la coordonnée z', elle s'écrit $\omega = a(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z)\,\mathrm{d}z + b(\varphi(z)) \cdot \overline{\varphi'(z)}\,\mathrm{d}\bar{z}$ dans la coordonnée z.

Soit $\omega = a(z)\,\mathrm{d}z + b(z)\,\mathrm{d}\bar{z}$ une 1-forme différentielle sur l'ouvert U de X, pour la coordonnée z. Si $b = 0$ et $a \in \mathcal{O}(U)$, ω est dite une 1-forme *holomorphe* ; si $a \in \mathcal{M}(U)$, ω est dite une 1-forme *méromorphe* ; on considère également des formes différentielles de degré 1, sur un ouvert de carte U, holomorphes dans $U \setminus S$ où S est un ensemble discret et telles que les points de S soient des points singuliers isolés de a dont un au moins est essentiel. Les notions de 1-forme différentielle holomorphe, méromorphe, holomorphe sauf en des points singuliers essentiels isolés sont invariantes par changement de cartes ; elles ont donc un sens sur une surface de Riemann.

4.4.3. Exemples de fonctions mé

Toute fonction rationnelle $f = \dfrac{P}{Q}$, où P, Q sont des polynômes en z dans $\mathbf{C}$, est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$; elle s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, le point à l'infini est un pôle si $\mathrm{dg}\,P > \mathrm{dg}\,Q$, un zéro si $\mathrm{dg}\,P < \mathrm{dg}\,Q$.

Toute fonction f méromorphe sur un ouvert connexe D de $\mathbf{C}$ définit une application holomorphe de D dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$: soit P l'ensemble discret des pôles de f, alors $f|D \setminus P : D \setminus P \to \mathbf{C}$ est holomorphe ; $f : D \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est continue. Soient (V, k) une carte de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ contenant ∞, U un ouvert de $\mathbf{C}$ tel que $f(U) \subset V$; alors $k \circ f : U \to k(V)$ est une fonction holomorphe sur $U \setminus (P \cap U)$ bornée au voisinage de chaque point de $P \cap U$; d'après le théorème de prolongement de Riemann, elle a une extension holomorphe à U, donc $f : D \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est une application holomorphe.

Si $f : D \to \mathbf{P}^1$ est une application holomorphe et si D est connexe, alors : ou bien f est l'application constante $f_\infty : D \to \infty$; ou bien $f^{-1}(\infty)$ est discret et f est une fonction méromorphe sur D. En prenant une carte (k, V) de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et un ouvert connexe U de $\mathbf{C}$ comme ci-dessus, si $f^{-1}(\infty)$ un a point d'accumulation situé dans U, alors $f-f_\infty$ est holomorphe sur U et ses zéros ne sont pas isolés, donc $f-f_\infty|U=0$.

5. Résidus ; théorème des résidus

5.1. Résidu en un point

5.1.1.* Lemme. — *Soient $f \in \mathcal{O}\big(C(\varrho_1, \varrho_2)\big)$ et γ un 1-cycle de $C(\varrho_1, \varrho_2)$. Soit $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$ le développement de f en série de Laurent dans $C(\varrho_1, \varrho_2)$, alors

$$(5.1) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \operatorname{Ind}(\gamma, 0)\, a_{-1}.$$

Démonstration. — Pour $z \in C(\varrho_1, \varrho_2)$, on a : $f(z)=a_{-1}z^{-1}+g(z)$; avec $g(z)= = \sum_{n\neq -1} a_n z^n$; $G(z)=\sum_{n\neq -1} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$ est une série de Laurent dans $C(\varrho_1, \varrho_2)$ et $\mathrm{d}G(z)=g(z)\,\mathrm{d}z$.

Si γ est un arc fermé, différentiable par morceaux, d'origine et d'extrémité a, $\gamma : J=[0, n] \to C(\varrho_1, \varrho_2)$ est une application continue C^1 sur chaque intervalle $[p, p+1]$, $p=0, \ldots, n-1$.

Alors $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z=\int_J g\big(\gamma(t)\big)\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t=\int_J \mathrm{d}G\big(\gamma(t)\big)=G(a)-G(a)=0$. Donc

$$(5.1)' \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\, a_{-1}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \operatorname{Ind}(\gamma, 0)\, a_{-1}.$$

Si γ est un 1-cycle quelconque, c'est une combinaison linéaire finie, à coefficients dans $\mathbf{Z}$, d'arcs fermés ; (5.1) se déduit de (5.1)′ par linéarité. □

5.1.2. Soient z la coordonnée dans $\mathbf{C}$, $z_0 \in \mathbf{C}$ et $f \in \mathcal{O}\big(B^*(z_0, \varrho)\big)$; on désignera par $a_{-1}(f)$ le coefficient d'indice -1 du développement de Laurent de f en $z-z_0$. Pour r, $0<r<\varrho$ et $\gamma=bB(z_0, r)$, on a :

$$(5.2) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = a_{-1}(f).$$

Soit V un voisinage ouvert de ζ_0 dans $\mathbf{C}$ muni de la coordonnée ζ et φ une application *biholomorphe* (i.e. bijective holomorphe ainsi que son inverse) de V sur un voisinage ouvert U de $z_0=\varphi(\zeta_0)$ dans $\mathbf{C}$ muni de la coordonnée z ; pour $r<\varrho$ assez petit $\overline{B(z_0, r)} \subset U$.

$$(5.3) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi^{-1}\circ\gamma} f\big(\varphi(\zeta)\big)\,\varphi'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

Soit

$$\psi = \varphi^{-1}\ ; \quad \text{alors} \quad \psi\circ\gamma : [0, 2\pi] \to V$$
$$\theta \mapsto \psi(z_0+re^{i\theta})$$

$$\psi(z_0+re^{i\theta}) = \psi(z_0)+\psi'(z_0)re^{i\theta}+\mathrm{o}(r), \quad \text{développement limité en} \quad z-z_0 = re^{i\theta}.$$
$$= \zeta_0+\varphi'^{-1}(z_0)re^{i\theta}+\mathrm{o}(r),$$

$\mathrm{o}(r)$ est une fonction de r et θ telle que $\dfrac{\mathrm{o}(r)}{r}$ tende vers 0 avec r ; $\delta=\varphi^{-1}\circ\gamma$ est donc un cycle obtenu par petite déformation du cercle $\psi'(z_0)re^{i\theta}$ quand r est assez petit, alors $\mathrm{Ind}(\delta, \zeta_0)=1$. (5.3) et (5.1) entraînent

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = a_{-1}((f\circ\varphi)\cdot\varphi'). \tag{5.4}$$

5.1.3. Le coefficient a_{-1} qui intervient dans la formule (5.2) est le coefficient d'indice -1 du développement de Laurent du coefficient f de la 1-forme différentielle $\omega=f(z)\,\mathrm{d}z$ quelle que soit la fonction coordonnée z. On l'appelle le *résidu de la 1-forme différentielle ω en z_0* et on le note $\mathrm{Res}_{z_0}\,\omega$; on rappelle que ω est une forme holomorphe dans le complémentaire de z_0 dans un voisinage de z_0, le point z_0 étant un point singulier de ω éventuellement essentiel.

D'autre part, la fonction φ de 5.1.2 peut être considérée comme définissant le changement de carte $z\to\zeta$; la notion de résidu a donc un sens pour une forme différentielle sur une surface de Riemann.

5.1.4. Application : Résidu au point à l'infini de la sphère de Riemann

Soit $\omega=f(z)\,\mathrm{d}z$ une forme différentielle définie dans le complémentaire, dans $\mathbf{C}$, d'un disque $\bar{B}(0, R)$; le développement de Laurent de $f(z)$ dans $\mathbf{C}\setminus\bar{B}(0, R)$ est, dans la notation de 5.1.1,

$$f(z) = a_{-1}z^{-1}+g(z).$$

Soit $\zeta=z^{-1}$ dans $\mathbf{C}^*$; ζ est une coordonnée locale de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ au voisinage du point à l'infini, $\zeta=0$; le résidu de ω en $\zeta=0$ est

$$a_{-1}(f(\zeta^{-1})).((\zeta^{-1})') = -a_{-1}.$$

Remarque. — $a_{-1}\left(f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)\right)=a_1$ est différent du résidu de ω en $\zeta=0$. Cependant, *lorsqu'une coordonnée z est fixée, on appelle aussi $a_{-1}(f(z))$ le résidu de la fonction f en z_0*, dans les notations de 5.1.3.

5.2. Théorème des résidus

5.2.1. Les notions d'arcs, de 1-chaînes différentiables, de 1-cycles se généralisent d'un ouvert de $\mathbf{C}$ à une surface de Riemann ; il en est de même de la notion de compact à bord, de celle de 2-chaîne différentiable, de l'intégration d'une forme différentielle sur une chaîne différentiable et de la formule de Stokes.

5.2.2. **Théorème. —** ***Soient D un ouvert de la sphère de Riemann $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, S un ensemble discret de points de D, ω une 1-forme différentielle holomorphe sur $(D\setminus S)$, A un compact à bord de D, de bord γ tel que $\operatorname{spt}\gamma\cap S=\emptyset$. Alors l'ensemble $A\cap S$ est un nombre fini de points z_k, $k=1, \ldots, n$, et***

$$\int_\gamma \omega = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k} \omega.$$

DÉMONSTRATION. — $A\cap S$ est compact et discret donc fini.

1) $\infty\notin A$, alors A est un compact de $\mathbf{C}$ de coordonnée z ; chaque z_k est centre d'un disque ouvert B_k tel que $\bar{B}_k\subset\mathring{A}$ et que $\bar{B}_k\cap\bar{B}_l=\emptyset$ pour $k\neq l$; soit $\gamma_k=bB_k$; $A'=A\setminus\bigcup_k B_k$ est un compact à bord de $\mathbf{C}$, de bord $bA'=\gamma-\sum_k \gamma_k$. D'après la conséquence (ch. 1, 3.3.2) du théorème de Cauchy et 5.1.1, on a :

$$\int_{bA'} \omega = 0, \quad \text{i.e.} \quad \int_\gamma \omega = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \omega = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k} \omega.$$

2) $\infty\in A$; ∞ est l'origine de $\mathbf{C}$ muni de la coordonnée $\zeta(=z^{-1}$ en dehors de ∞ et 0). Soit $B(\infty, r)=\{\zeta\in\mathbf{C} \ ; \ |\zeta|<r\}$. On choisit r pour que $\bar{B}(\infty, r)\cap\operatorname{spt}\gamma=\emptyset$ et $\bar{B}(\infty, r)\cap(S\setminus\{\infty\})=\emptyset$. Soient $A'=A\setminus B(\infty, r)$ et $\gamma_\infty=bB(\infty, r)$, $A'\subset\mathbf{C}$ (de coordonnée z) et $bA'=bA-bB(\infty, r)$; $\int_{bA'}\omega=\int_\gamma\omega-\int_{\gamma_\infty}\omega$; d'autre part, d'après 1) $\frac{1}{2\pi i}\int_{bA'}\omega=\sum_{z\in S\setminus\{\infty\}}\operatorname{Res}_z\omega$, donc $\int_\gamma\omega=\sum_{z\in S\setminus\{\infty\}}\operatorname{Res}_z\omega+\operatorname{Res}_\infty\omega$. □

5.2.3. **Théorème. —** ***Soient D un ouvert de la sphère de Riemann $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, S un ensemble discret de points de D, ω une 1-forme différentielle holomorphe sur $(D\setminus S)$, Γ une 2-chaîne différentiable à support compact dans D de représentant $\sum_{j\in J} n_j(Z_j, F_j)$, où F_j est un difféomorphisme local d'un voisinage de Z_j (dans $\mathbf{R}^2$) dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, de bord le 1-cycle γ tel que $\operatorname{spt}\gamma\cap S=\emptyset$. Alors, l'ensemble $\operatorname{spt}\Gamma\cap S$ est un nombre fini de points z_k, $k=1, \ldots, n$ et***

$$\int_\gamma \omega = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Ind}(\gamma, z_k) \operatorname{Res}_{z_k} \omega.$$

DÉMONSTRATION. — La démonstration s'obtient immédiatement à partir de celles de 5.2.2 et de ch. 1, 5.1. □

5.2.4. Théorème de la somme des résidus

Dans les hypothèses de 5.2.2, si $A = D = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, on a : $\gamma = 0$, le nombre de points singuliers z_k est fini, d'où :

Théorème. — ***Si*** ω ***est une 1-forme différentielle holomorphe sur*** $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ ***sauf en des points isolés*** z_k, $k = 1, \ldots, n$, ***on a :*** $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{Res}_{z_k}\, \omega = \mathbf{0}$. □

5.2.5. **Remarques.** — Le théorème des résidus est valide sur toute surface de Riemann. Le théorème de la somme des résidus est valide sur toute surface de Riemann compacte.

5.3. Calcul pratique des résidus

Soient z_0 un point de $\mathbf{C}$, U un voisinage ouvert de z_0, f une fonction holomorphe dans $U \setminus z_0$.

5.3.1. Cas d'un pôle simple

Si f une fonction méromorphe ayant z_0 pour pôle simple, alors $f(z) = (z - z_0)^{-1} g(z)$ où g est holomorphe au voisinage de z_0 et $g(z_0) \neq 0$; le développement de Taylor de g au voisinage de z_0 est $g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ avec $a_0 = g(z_0)$; alors

$$\mathrm{Res}_{z_0} f\,\mathrm{d}z = g(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

D'après 4.3.4, toute fonction méromorphe f, au voisinage de z_0, s'écrit $f(z) = \dfrac{u(z)}{v(z)}$; si f a un pôle simple en z_0, on peut choisir u et v tels que $u(z_0) \neq 0$, $v(z_0) = 0$, z_0 étant un zéro simple de v ; alors par développement de Taylor $v(z) = (z - z_0) v'(z_0) + {} + o(z - z_0)$; d'après le premier alinéa, $\mathrm{Res}_{z_0} f\,\mathrm{d}z = \dfrac{u(z_0)}{v'(z_0)}$.

5.3.2. Cas d'un pôle multiple

Si f est méromorphe ayant z_0 pour pôle de multiplicité k, alors $f(z) = (z - z_0)^{-k} g(z)$ où g est holomorphe au voisinage de z_0 et $g(z_0) \neq 0$; alors par développement de Taylor de g en z_0, on a : $\mathrm{Res}_{z_0} f\,\mathrm{d}z = \dfrac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(z_0)$.

5.3.3. Exemple de résidu en un point essentiel isolé

Pour

$$f(z) = e^{1/z} = 1+\frac{1}{z}+\ldots+\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}+\ldots, \quad \mathrm{Res}_0 f\,\mathrm{d}z = 1.$$

5.4. Différentielle logarithmique

Soit f une fonction méromorphe au voisinage d'un point z_0. Alors il existe une fonction holomorphe g au voisinage de z_0 telle que $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$ avec $g(z_0)\neq 0$ et $m\in\mathbf{Z}$.

Si $m\neq 0$, la fonction $\log f(z)$ n'est pas définie au voisinage de z_0, cependant sa différentielle $\frac{\mathrm{d}f}{f}(z)=m\frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}+\frac{\mathrm{d}g}{g}(z)$ l'est ; $\frac{\mathrm{d}g}{g}$ est 1-forme holomorphe au voisinage de z_0 et z_0 est un pôle simple du premier terme du second membre avec résidu m, multiplicité du zéro z_0 si $m>0$, opposé de la multiplicité du pôle si $m<0$.

6. Applications : zéros et pôles d'une fonction méromorphe ; calculs d'intégrales par la méthode des résidus

6.1. Théorème. — ***Soient D un ouvert de $\mathbf{C}$, f une fonction méromorphe non constante sur D, A un compact à bord contenu dans D ; $\gamma=bA$. Si f n'a pas de pôle sur $\operatorname{spt}\gamma$ et n'y prend pas la valeur a, alors $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,\mathrm{d}z=n_Z(f-a)-n_P(f)$ où $n_Z(f-a)$ est la somme des multiplicités des zéros de $(f-a)$ dans A et $n_P(f)$ la somme des multiplicités des pôles de f dans A.***

DÉMONSTRATION. — $g(z)=\frac{f'(z)}{f(z)-a}$ est la dérivée logarithmique de $f(z)-a$; les zéros et les pôles de $f(z)-a$ sont les pôles de $g(z)$; d'après le théorème des résidus $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{z\in A}\mathrm{Res}_z\, g$; d'après 5.4, le 2ᵉ membre est $n_Z(f-a)-n_P(f)$. □

6.2. Théorème. — ***Soit z_0 un zéro d'ordre k de la fonction $f(z)-a$ dans laquelle f est une fonction holomorphe non constante au voisinage de z_0. Pour tout voisinage V assez petit de z_0 et pour tout b assez voisin de a, l'équation $f(z)=b$ possède exactement k solutions dans V.***

DÉMONSTRATION. — Soit $\bar{B}(z_0,r)$ un disque fermé centré en z_0, de rayon assez petit pour que z_0 soit l'unique solution de $f(z)=a$ contenue dans $\bar{B}$; soit $\gamma=bB(z_0,r)$. Supposons r assez petit pour que $f'(z)$ ne s'annule pas dans $B^*(z_0,r)$ et $b\in\mathbf{C}$, $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)\,\mathrm{d}z}{f(z)-b}=\frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-b}=\mathrm{Ind}\,(f\circ\gamma,b)$; pour b assez voisin de

a, $\operatorname{Ind}(f\circ\gamma, b) = \operatorname{Ind}(f\circ\gamma, a) = k$, d'après ch. 1, 4.2 et 6.1. Comme f' n'a pas de zéro dans $B^*(z_0, r)$, toutes les racines de $f(z)-b$ sont simples, donc au nombre de k. $\square$

***6.2.1.* Remarque.** — 6.2 est un théorème très élémentaire de continuité des racines d'une équation à premier membre une fonction holomorphe quand cette fonction dépend de paramètres ; ici seul varie le terme constant du développement en série en $z-z_0$.

6.3. Théorème de Rouché. — ***Soient D un ouvert de* C, $f, g \in \mathcal{O}(D)$, $\gamma = bA$ *où A est un compact à bord contenu dans D. Alors si* $|f(z)| > |g(z)|$ *sur* spt γ, *le nombre de zéros de* $f+g$ *dans A est égal au nombre de zéros de f dans A.***

6.3.1. On notera par le même symbole un arc fermé et la fonction qui le définit. Soient γ_1, γ_2 deux arcs (différentiables par morceaux) fermés : $J \to \mathbf{C}$, dont les supports ne contiennent pas 0 ; J est l'intervalle $[0, n]$ de $\mathbf{R}$ et, sur $[k, k+1]$ $k=0, \ldots, n-1$, γ_1 et γ_2 sont C^1. On considère l'arc différentiable fermé

$$\begin{aligned} \gamma_1\gamma_2 : J &\to \mathbf{C}. \\ t &\mapsto \gamma_1(t)\gamma_2(t) \end{aligned}$$

6.3.2.* Lemme.** — ***Dans les notations ci-dessus, on a :

$$\mathbf{Ind}\,(\gamma_1\gamma_2, 0) = \mathbf{Ind}\,(\gamma_1, 0) + \mathbf{Ind}\,(\gamma_2, 0).$$

DÉMONSTRATION DU LEMME. —

$$2\pi i \operatorname{Ind}(\gamma_1\gamma_2, 0) = \int_{\gamma_1\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^n \frac{(\gamma_1\gamma_2)'}{\gamma_1\gamma_2}\,\mathrm{d}t = \int_0^n \frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\gamma_1} + \int_0^n \frac{\mathrm{d}\gamma_2}{\gamma_2} =$$

$$= \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i(\operatorname{Ind}(\gamma_1, 0) + \operatorname{Ind}(\gamma_2, 0)). \quad \square$$

6.3.3. DÉMONSTRATION DE 6.3. — D'après 6.1 et 6.3.2,

$$2\pi i n_Z(f) = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{f\circ\gamma} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \operatorname{Ind}(f\circ\gamma, 0)$$

$$2\pi i n_Z(f+g) = \operatorname{Ind}((f+g)\circ\gamma, 0) = \operatorname{Ind}\left(f\circ\gamma\left(1+\frac{g\circ\gamma}{f\circ\gamma}\right), 0\right) =$$

$$= \operatorname{Ind}(f\circ\gamma, 0) + \operatorname{Ind}\left(1+\frac{g\circ\gamma}{f\circ\gamma}, 0\right),$$

Mais $\left|\dfrac{g\circ\gamma}{f\circ\gamma}\right| < 1$, donc 0 est dans la composante connexe infinie de $\mathbf{C}\setminus\operatorname{spt}\left(1+\dfrac{g\circ f}{f\circ\gamma}\right)$ et $\operatorname{Ind}\left(1+\dfrac{g\circ\gamma}{f\circ\gamma}, 0\right) = 0$. $\square$

6.4. Calcul d'intégrales par la méthode des résidus

6.4.0. Il s'agit de calculer une intégrale définie d'une fonction f de variable réelle, sans expliciter de primitive, en procédant comme suit : l'intervalle d'intégration détermine un arc différentiable γ dans $\mathbf{C}$; la fonction f est définie sur $\operatorname{spt}\gamma$. On fait alors les hypothèses suivantes :

1) f a une extension F à un ouvert U de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ contenant $\operatorname{spt}\gamma$ qui est une fonction holomorphe sur $U \setminus S$ où S est un ensemble fini de U disjoint de $\operatorname{spt}\gamma$;

2) il existe un arc différentiable par morceaux γ' tel que $\operatorname{spt}\gamma' \subset U$; $\operatorname{spt}\gamma' \cap S = \emptyset$ et que $\gamma+\gamma'$ soit le bord d'un compact à bord Γ contenu dans U ;

3) on sait évaluer l'intégrale de $F\,\mathrm{d}z$ sur γ' ; alors (5.2.2),

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma'} F\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{s\in S\cap\Gamma} \operatorname{Res}_s F\,\mathrm{d}z.$$

Le calcul des intégrales fait intervenir des passages à la limite sur des paramètres dont dépendent γ, γ' et Γ ; en outre il faut déterminer $S\cap\Gamma$ et, pour achever le calcul de l'intégrale, il faut calculer les résidus de F aux points de S. Certains cas où $S\cap\operatorname{spt}\gamma\neq\emptyset$ sont aussi accessibles. Il n'y a pas de théorie générale mais un certain nombre de cas classiques que nous allons décrire.

On pose $z=x+iy\in\mathbf{C}$; $x, y\in\mathbf{R}$.

6.4.1. Intégrales de fractions rationnelles de fonctions trigonométriques

Soit $R=\dfrac{P}{Q}\in\mathbf{C}(\xi,\eta)$ où $P, Q\in\mathbf{C}[\xi,\eta]$, telle que Q ne s'annule en aucun point du cercle unité $\{(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^2 ; \xi^2+\eta^2=1\}$. On considère l'intégrale

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $t\in\mathbf{R}$, soit $e^{it}=z$; alors $i\,\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$; $\sin t=\dfrac{1}{2\pi i}(z-z^{-1})$; $\cos t=\dfrac{1}{2}(z+z^{-1})$.
On pose $F(z)=-\mathrm{i}R\left(\dfrac{1}{2i}(z-z^{-1}), \dfrac{1}{2}(z+z^{-1})\right)\dfrac{1}{z}$; $F(z)$ est une fraction rationnelle en z ; $\omega=F(z)\,\mathrm{d}z$; $z\in\mathbf{C}$; $\gamma=bB(0,1)$ dans $\mathbf{C}$; soit S l'ensemble des pôles de F. Alors

$$I = \int_\gamma \omega = 2\pi i \sum_{s\in S\cap B(0,1)} \operatorname{Res}_s \omega.$$

6.4.2. Intégrales de fractions rationnelles d'une variable réelle

Dans les notations de 6.4.0, soit $U=\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$; on suppose S disjoint de l'axe réel et $\lim\limits_{|x|\to+\infty} xf(x)=0$; alors f est intégrable sur $\mathbf{R}$ et

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r,r'\to+\infty} \int_{-r'}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple : $R=\frac{P}{Q}\in\mathbf{C}(\xi)$; $P, Q\in\mathbf{C}[\xi]$ et $\deg Q\geqslant\deg P+2$.

Pour $r\in\mathbf{R}_+^*$, soit

$$\Gamma_r=\{z\in\mathbf{C}\ ;\ \mathscr{I}\mathrm{m}\, z\geqslant 0;\ |z|\leqslant r\}.$$

Lemme A. — ***Soient*** $\theta_1, \theta_2\in\mathbf{R}$ ***tels que*** $0\leqslant\theta_1<\theta_2\leqslant 2\pi$, $r_0\in\mathbf{R}_+^*$; $z=re^{i\theta}$; $\sigma(\theta_1, \theta_2)=\{re^{i\theta}, \theta\in[\theta_1, \theta_2]\ ;\ r\geqslant r_0\}$; ***V un voisinage ouvert de*** $\sigma(\theta_1, \theta_2)$ ***dans*** $\mathbf{C}$; $F\in\mathcal{O}(V\setminus S)$, ***S fini, telle que***

$$\lim_{|z|\to+\infty} zF(z)=0. \tag{6.1}$$

Soit $\delta_r : [\theta_1, \theta_2]\to\mathbf{C}$ $(\theta\mapsto z=re^{i\theta})$, ***alors***

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\delta_r} F(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

DÉMONSTRATION. — Pour $r\geqslant r_0$, soit $M(r)=\sup_{\substack{z\in\sigma(\theta_1,\theta_2)\\ |z|=r}}|F(z)|$, alors $\left|\int_{\delta_r}F(z)\,\mathrm{d}z\right|=\left|\int_{\theta_1}^{\theta_2}F(re^{i\theta})e^{i\theta}r\,\mathrm{d}\theta\right|\leqslant M(r)r(\theta_2-\theta_1)$ qui tend vers 0 quand $r\to+\infty$ d'après (6.1). □

Lemme A′. — ***Soient*** $\tau(\theta_1, \theta_2)=\{re^{i\theta}, \theta\in[\theta_1, \theta_2]\ ;\ 0<r\leqslant r_0\}$; ***V un voisinage de*** $\tau(\theta_1, \theta_2)$ ***dans*** $\mathbf{C}$; $F\in\mathcal{O}(V\setminus S)$ ***telle que***

$$\lim_{|z|\to 0} zF(z)=0, \tag{6.1$'$}$$

alors

$$\lim_{r\to 0}\int_{\delta_r}F(z)\,\mathrm{d}z=0.\quad\square$$

Dans les hypothèses du début de 6.4.2, pour $\theta_1=0$, $\theta_2=\pi$, on a :

$$\int_{b\Gamma_r}F(z)\,\mathrm{d}z=\int_{-r}^{+r}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\delta_r}F(z)\,\mathrm{d}z.$$

Quand $r\to+\infty$, $\int_{\delta_r}F(z)\,\mathrm{d}z\to 0$ d'après le lemme A et $\int_{-r}^{+r}f(x)\,\mathrm{d}x$ tend vers I parce que f est intégrable sur $\mathbf{R}$, donc

$$I=2\pi i\sum_{s\in S\cap\Gamma_\infty}\mathrm{Res}_s F\,\mathrm{d}z.$$

6.4.3. Intégrales de fonctions ayant e^{ix} en facteur

Proposition. — ***Soient f une fonction de la variable réelle x admettant une extension holomorphe F, à*** $U\setminus S$ ***où U est un voisinage ouvert de*** $H=\{z\in\mathbf{C}\ ;\ \mathscr{I}\mathrm{m}\, z\geqslant 0\}$ ***dans C et S un ensemble fini de U disjoint de l'axe réel, alors si***

$$\lim_{\substack{z\in H\\ |z|\to+\infty}}F(z)=0, \tag{6.2}$$

on a

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r}f(x)e^{ix}\,\mathrm{d}x=2\pi i\sum_{s\in S\cap H}\mathrm{Res}_s F(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z. \tag{6.3}$$

Lemme B. — ***Soient V un voisinage ouvert de $\sigma(\theta_1, \theta_2)$ dans $\mathbf{C}$, pour $0 \leqslant \theta_1 < < \theta_2 \leqslant \pi$ et pour $\operatorname{spt} \delta_r \cap S = \emptyset$, $J(r) = \int_{\delta_r} F(z) e^{iz}\, dz$; si $\lim_{\substack{z \in \sigma(\theta_1, \theta_2) \\ |z| \to +\infty}} F(z) = 0$, alors $\lim_{r \to +\infty} \int_{\delta_r} F(z) e^{iz}\, dz = 0$.***

DÉMONSTRATION. — Soit

$$M(r) = \sup_{z \in \operatorname{spt} \delta_r} |F(z)|,$$

alors

$$|J(r)| \leqslant M(r) \left| \int_{\delta_r} e^{ir(\cos\theta + i \sin)\theta} r e^{i\theta}\, d\theta \right| \leqslant M(r) \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-r \sin\theta} r\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant M(r) \int_0^{\pi} e^{-r \sin\theta} r\, d\theta = 2M(r) \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin\theta} r\, d\theta \text{ car } \sin\theta \geqslant 0.$$

Mais, pour $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi} \leqslant \dfrac{\sin\theta}{\theta} \leqslant 1$; $-\sin\theta \leqslant -\dfrac{2\theta}{\pi}$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-r \sin\theta} r\, d\theta \leqslant \int_0^{\pi/2} e^{-(2r/\pi)\theta} r\, d\theta \leqslant \left[-\frac{\pi}{2} e^{-2r\theta/\pi}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Quand $r \to +\infty$, $M(r) \to 0$, donc $J(r) \to 0$. □

DÉMONSTRATION. DE LA PROPOSITION. — $b\Gamma_r = [-r, +r] + \delta(r)$, le lemme B et le théorème des résidus entraînent la conclusion. □

6.4.3'. **Corollaire.** — ***Dans les hypothèses de la Proposition* 6.4.3 *et si $f(x) e^{ix}$ es intégrable sur* $\mathbf{R}$, *on a :***

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum_{s \in S \cap H} \operatorname{Res}_s F(z) e^{iz}\, dz. \quad \square$$

6.4.4. Voici un cas où $S \cap \operatorname{spt} \gamma \neq \emptyset$.

Lemme C. — ***Soient U un voisinage ouvert de $H = \{z \in \mathbf{C} \ ; \ \mathscr{I}m\, z \geqslant 0\}$ dans $\mathbf{C}$, F une fonction holomorphe sur $U \setminus S$ où S est un ensemble fini de U tel que $S \cap \{z \in \mathbf{C} \ ; \ \mathscr{I}m\, z = 0\} = \{0\}$, 0 étant un pôle simple de F ; $\gamma_\varepsilon : [0, \pi] \to H$ avec $\varepsilon > 0$ et $\gamma_\varepsilon(\theta) = \varepsilon e^{i\theta}$, alors***

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} F(z)\, dz = \pi i \operatorname{Res}_0 F\, dz.$$

DÉMONSTRATION. — Au voisinage de 0, on a $F(z) = \dfrac{a}{z} + h(z)$ où $a \in \mathbf{C}$ et où h est holomorphe au voisinage de 0, alors $\int_{\gamma_\varepsilon} F(z)\, dz = a \int_0^{\pi} i\, d\theta + \int_{\gamma_\varepsilon} h(z)\, dz$; h étant continue en 0, quand $\varepsilon \to 0$, son intégrale sur γ_ε tend vers 0 ; en outre $a = \operatorname{Res}_0 F\, dz$. □

EXEMPLE. — $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}\, dx$ a un sens ; on a :

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx \right];$$

compte tenu des lemmes B et C et du théorème des résidus,

$$I = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}.$$

***6.4.5.* Remarque.** — Les résultats de 6.4.3 à 6.4.4 se généralisent au cas où le facteur e^{ix} est remplacé par e^{-ixy}, $y \in \mathbf{R}$ et lorsque $f(x)e^{-ixy}$ est intégrable en x sur $\mathbf{R}$; ils donnent des moyens de calcul de la transformée de Fourier $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,\mathrm{d}x$ de f.

6.4.6. Intégrales de fonctions ayant en facteur $x^{-\alpha}$ *;* $\alpha \in]0, 1[$

Soit $R(z) \in \mathbf{C}(z)$ sans pôle sur $y=0$; $x \geqslant 0$ avec $R(x) \to 0$ quand $x \to \infty$; alors $x^{-\alpha}R(x)$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$; il s'agit de calculer $I = \int_0^{+\infty} x^{-\alpha}R(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour toute détermination $l(z)$ de $\log z$, on a la détermination $e^{-\alpha l(z)}$ de $z^{-\alpha}$. Soit $V = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$, on a les déterminations principales $\operatorname{Arg} z$ et $\operatorname{Log} z = \log|z| + {}$ $+ \operatorname{Arg} z$ (ch. 1, 1.5 et 1.6). Sur V, on a également la détermination continue $\operatorname{Log} z + 2i\pi$.

Notons qu'une détermination continue de $\log z$ sur un ouvert simplement connexe (ch. 1, 5.4) de $\mathbf{C}^*$ est déterminée par sa valeur en un point. Soit $a \in V$, $\mathscr{I}\mathrm{m}\, a > 0$; considérons la détermination continue $l_1(z)$ de $\log z$ sur $V_1 = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+$ telle que $l_1(a) = \operatorname{Log} a$; on a $l_1(\bar{a}) = \log|a| + i(2\pi - \operatorname{Arg} a)$.

Soit $l_2(z)$ la détermination continue de $\log z$ sur V telle que $l_2(\bar{a}) = l_1(\bar{a})$; alors pour $x \in \mathbf{R}_+$, on a : $l_2(x) = \log x + 2i\pi$.

Considérons les ouverts simplement connexes de $\mathbf{C}^*$

$$W_1 = \left\{ z \in \mathbf{C} \; ; \; -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ z \in \mathbf{C} \; ; \; -\frac{5\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Soit $\lambda_1(z)$ la détermination continue de $\log z$ sur W_1 qui coïncide avec $\operatorname{Log} z$ pour $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \pi$ et avec $l_1(z)$ pour $0 < \arg z < \frac{5\pi}{4}$. De même soit $\lambda_2(z)$ la détermination continue de $\log z$ sur W_2 qui coïncide avec $l_1(z)$ pour $\frac{3\pi}{4} < \arg z < 2\pi$ et avec l_2 pour $-\pi < \arg z < \frac{\pi}{4}$.

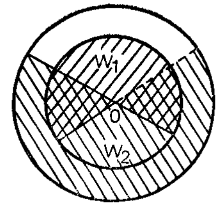
Alors, l'axe réel privé de l'origine est contenu dans $W_1 \cap W_2$. Considérons les arcs

$$\gamma_\varepsilon : [0, 2\pi] \ni \theta \mapsto z = \varepsilon e^{i\theta}$$

$$\delta_r : [0, 2\pi] \ni \theta \mapsto z = re^{i\theta}$$

$$J'_{\varepsilon r} : [-\varepsilon, -r] \ni t \mapsto z = t$$

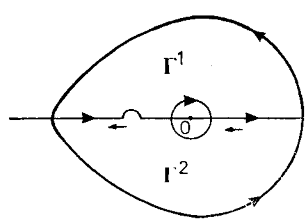
$$J_{\varepsilon r} : [\varepsilon, r] \ni t \mapsto z = t.$$



L'ensemble Z des pôles de $R(z)$ est fini, on choisit r tel que $\operatorname{spt}\delta_r \cap Z = \emptyset$ et on modifie $J'_{\varepsilon r}$ légèrement en $J''_{\varepsilon r}$ de façon que $\operatorname{spt} J''_{\varepsilon r} \subset W_1 \cap W_2$ et $\operatorname{spt} J''_{\varepsilon r} \cap Z = \emptyset$. Soient $f_j(z) = e^{-\alpha\lambda_j(z)} R(z)$;

$$\left| \begin{array}{l} \gamma_\varepsilon^1 = \gamma_\varepsilon | [0, \pi] \,;\ \gamma_\varepsilon^2 = \gamma_\varepsilon | [\pi, 2\pi] \\ \delta_r^1 = \delta_r | [0, \pi] \,;\ \delta_r^2 = \delta_r | [\pi, 2\pi] \end{array} \right| \begin{array}{l} \gamma^1 = -\gamma_\varepsilon^1 + J_{\varepsilon r} + \delta_r^1 - J''_{\varepsilon r} \\ \gamma^2 = -\gamma_\varepsilon^2 + J''_{\varepsilon r} + \delta_r^2 - J_{\varepsilon r}. \end{array}$$

Soit Γ^j le compact à bord de $\mathbf{C}^*$ de bord γ^j $(j = 1, 2)$. f_1 et f_2 coïncident sur $\operatorname{spt} J''_{\varepsilon r}$; pour $z = x > 0, f_2(x) = e^{-2i\pi\alpha} f_1(x)$.



D'après le théorème des résidus appliqués aux fonctions f_1 et f_2 respectivement, on a :

$$\int_{\gamma^j} f_j \, dz = 2\pi i \sum_{s \in \Gamma^j \cap Z} \operatorname{Res} f_j \,;$$

les résidus de $z^{-\alpha} R(z)$ dépendent de la détermination continue choisie de $z^{-\alpha}$. $\int_{\delta_r} f_j dz \to 0$ quand $r \to +\infty$. $\int_{\gamma_\varepsilon j} f_j dz \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, d'où, quand r et $\varepsilon^{-1} \to +\infty$,

$$\int_{\gamma^1} f_1 \, dz + \int_{\gamma^2} f_2 \, dz \to (1 - e^{-2i\pi\alpha}) I = 2\pi i \sum_{s \in Z} \operatorname{Res}_s z^{-\alpha} R(z).$$

6.4.7. *Intégrales de fonctions ayant* $\log x$ *en facteur*

Soit $R(z) \in \mathbf{C}(z)$ sans pôle sur $y = 0$; $x \geqslant 0$ telle que $\lim_{x \to +\infty} x R(x) = 0$, alors $R(x) \log x$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$; il s'agit de calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} R(x) \log x \, dx$.

On utilise le même cycle d'intégration qu'en 6.4.6 et on intègre la fonction $R(z)(\log z)^2$; on obtient, pour r et $\varepsilon^{-1} \to +\infty$,

$$\int_0^{+\infty} R(x) (\log x)^2 \, dx - \int_0^{+\infty} R(x) (\log x + 2\pi i)^2 \, dx \,;$$

d'où

$$-2 \int_0^{+\infty} R(x) \log x \, dx - 2\pi i \int_0^{+\infty} R(x) \, dx = \sum_{s \in Z} \operatorname{Res}_s [R(z)(\log z)^2]. \tag{6.4}$$

Si l'on sait calculer $J = \int_0^{+\infty} R(x) \, dx$ (cf. 6.4.2), la formule (6.4) fournit I ; en outre si $R(x)$ est à valeurs réelles il en est de même de I et de J et (6.4) donne I et J par séparation des parties réelle et imaginaire du second membre.

3 ESPACE DES FONCTIONS HOLOMORPHES SUR UN OUVERT DE C, TRANSFORMATIONS CONFORMES

Soit D un ouvert de $\mathbf{C}$; on munit l'espace $\mathscr{C}(D)$ des fonctions continues sur D de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (ou topologie de la convergence compacte) et l'espace $\mathcal{O}(D)$ des fonctions holomorphes, de la topologie induite. A l'aide de la formule de Cauchy non homogène sur D, pour tout compact K de D, on majore le module de la dérivée j-ième d'une fonction $u \in \mathcal{O}(D)$ sur K, par le produit, par une constante universelle c_j, de la norme L^1 de u sur un compact à bord contenant K dans son intérieur. Il en résulte : (1) toute suite de $\mathcal{O}(D)$ convergente dans $\mathscr{C}(D)$ converge dans $\mathcal{O}(D)$; (2) toute suite de $\mathcal{O}(D)$ uniformément bornée sur tout compact possède une sous-suite convergente dans $\mathcal{O}(D)$. (1) entraîne que $\mathcal{O}(D)$ est un espace de Fréchet et (2) que toute partie bornée fermée de $\mathcal{O}(D)$ est compacte. (1) permet l'étude des séries de fonctions méromorphes et des produits infinis de fonctions holomorphes avec des exemples classiques dont la fonction Γ et les théorèmes de Mittag—Leffler et de Weierstrass dans $\mathbf{C}$ qui seront généralisés au chapitre 4. On étudie ensuite, localement, les applications holomorphes, d'où : toute application holomorphe non constante sur un ouvert connexe est ouverte ; toute application holomorphe au voisinage d'un point régulier est une transformation conforme, i.e. conserve les angles. Enfin, le théorème de représentation conforme le plus simple est établi : tout ouvert simplement connexe de $\mathbf{C}$, distinct de $\mathbf{C}$, est isomorphe au disque unité ; cela résulte de la conséquence de (2) ci-dessus et de l'étude exhaustive des automorphismes du disque unité.

1. Convergence d'une suite de fonctions holomorphes

1.1. Rappel

Soient D un ouvert de $\mathbf{C}$ et A un compact à bord de D de bord γ, alors, pour tout point $\zeta \in A \setminus \operatorname{spt} \gamma$ et pour toute fonction u C^1 dans un voisinage de A,

$$(1.1) \qquad u(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_\gamma \frac{u(z)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}z + \int_A \frac{(\partial u/\partial \bar{z})(z)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}\right]$$

c'est un cas particulier de la formule (5.1) du chapitre 1.

Pour toute fonction u continue dans un voisinage de A, on pose $\|u\|_A = \int_A |u|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; la fonction $u \mapsto \|u\|_A$ est une semi-norme sur l'espace vectoriel des fonctions continues au voisinage de A.

1.2. Théorème. — ***Soit D un ouvert de* C*, pour tout compact K de D, pour tout compact à bord A de D tel que* $K \subset \mathring{A}$*, il existe des constantes* c_j ($j \in$ N) *telles que, pour tout* $u \in \mathcal{O}(D)$*, on ait***

$$\sup_{\zeta \in K} |u^{(j)}(\zeta)| \leqslant c_j \|u\|_A$$

où* $u^{(j)}$ *est la j-ième* C*-dérivée de u.

DÉMONSTRATION. — Soit ψ une fonction C^∞ à support compact dans $\mathring{A}$ et égale à 1 sur un voisinage de K ; pour toute $u \in \mathcal{O}(D)$, ψu est C^∞ à support compact dans $\mathring{A}$; la formule (1.1) entraîne

$$\psi(\zeta) u(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_A \frac{u(z)(\partial\psi/\partial\bar{z})(z)}{z-\zeta} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}. \tag{1.2}$$

On a $\partial\psi/\partial\bar{z}=0$ au voisinage de K, donc il existe $\eta > 0$ tel que $(\partial\psi/\partial\bar{z})(z) \neq 0$ entraîne $|z-\zeta| > \eta$ pour $\zeta \in K$. Pour $\zeta \in K$, le premier membre de (1.2) est égal à $u(\zeta)$ et

$$\left| \int_A \frac{u(z)(\partial\psi/\partial\bar{z})(z)}{z-\zeta} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} \right| < \frac{1}{\eta} \sup_{\xi \in A} |\partial(\psi/\partial\bar{z})(\xi)| \int_A 2\,|u(z)|\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$|\partial\psi/\partial\bar{z}|$, continue et à support dans $\mathring{A}$, est majorée par une constante $a > 0$, d'où

$$\sup_{\xi \in K} |u(\zeta)| < c_0 \|u\|_A \quad \text{avec} \quad c_0 = \frac{1}{\pi} \eta^{-1} a.$$

$(\partial\psi/\partial\bar{z})(z)=0$ pour z dans un voisinage de K dans $\mathring{A}$, donc, pour tout $j \in$ N, pour tout $\zeta \in K$, la fonction $u(\partial\psi/\partial\bar{z})(z)(z-\zeta)^{-j-1}$ est continue et

$$u^{(j)}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} j! \int_A u(\partial\psi/\partial\bar{z})(z)(z-\zeta)^{-j-1} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} \;;$$

le raisonnement ci-dessus est valide pour tout $j \in$ N. □

1.3. Corollaire. — ***Soit* (u_n) *une suite de fonctions holomorphes sur D qui converge uniformément sur tout compact de D vers une fonction u. Alors u est holomorphe sur D ; de plus la suite* (u_n') *converge vers* u'*, uniformément sur tout compact de D.***

***1.3.1.* Lemme.** — ***Soit* (U_n) *une suite de fonctions différentiables sur un ouvert D de* $\mathbf{R}^2$*, à valeurs dans* C*, convergeant en tout point de D vers une fonction U ; alors, si la suite* (U_n') *converge uniformément sur tout compact vers une fonction V, la fonction U est différentiable et* $U' = V$.**

DÉMONSTRATION. — Soit $x \in D$, montrons que U est différentiable en x et que $U'(x) = V(x)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_1 tel que

$$\text{pour} \quad m \geqslant n_1, \quad |V(x) - U_m'(x)| \leqslant \varepsilon. \ (*) \tag{1.3}$$

(*) | | signifie : norme euclidienne dans **C** ou norme dans $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2 ; \mathbf{R}^2)$.

Il existe $r>0$ tel que $K=\bar{B}(x,r)\subset D$, alors pour tout $(m,n)\in\mathbf{N}^2$, pour tout $y\in K$

$$\left|U_n(y)-U_m(y)-\left(U_n(x)-U_m(x)\right)\right| \leqslant \|y-x\| \sup_{z\in K} |U_n'(z)-U_m'(z)|$$

d'après le théorème des accroissements finis.

Comme la suite (U_n') converge uniformément sur K, il existe n_2 tel que $n, m \geqslant n_2$ entraîne :

$$\sup_{z\in K} |U_m'(z)-U_n'(z)| \leqslant \varepsilon,$$

donc

$$\left|U(y)-U_m(y)-\left(U(x)-U_m(x)\right)\right| = \left|U(y)-U(x)-\left(U_m(y)-U_m(x)\right)\right| \leqslant \leqslant \varepsilon\|y-x\|. \tag{1.4}$$

Pour m fixé $\geqslant n_1, n_2$, par définition de $U_m'(x)$, il existe r tel que $\|y-x\|\leqslant r$ entraîne

$$|U_m(y)-U_m(x)-U_m'(x)(y-x)| \leqslant \varepsilon\|y-x\| \tag{1.5}$$

Alors

$$|U(y)-U(x)-V(x)(y-x)| \leqslant \left|U(y)-U(x)-\left(U_m(y)-U_m(x)\right)\right| +$$
$$+|U_m(y)-U_m(x)-U_m'(x)(y-x)|+\left|\left(U_m'(x)-V(x)\right)(y-x)\right| \leqslant 3\varepsilon\|y-x\|,$$

d'après (1.3), (1.4), (1.5).

Cela prouve l'existence de $U'(x)$ et $U'(x)=V(x)$, pour tout $x\in K$. □

Démonstration de 1.3. — Soit K un compact de D ; pour tout compact à bord A de D tel que $K\subset \mathring{A}$, $\|u-u_n\|_A\to 0$ quand $n\to\infty$, donc la suite $\|u_n\|_A$ est une suite de Cauchy, alors d'après 1.2, la suite $(\partial u_n/\partial z)$ est de Cauchy pour la norme $\sup_K |\ |$, i.e. elle converge vers une fonction v uniformément sur K, de plus $\partial u_n/\partial\bar{z}=0$ puisque u_n est holomorphe donc, pour $z=x+iy$, $(x,y)\in\mathbf{R}$ et $U_n(x,y)=u_n(x+iy)$, $\partial U_n/\partial x$ et $\partial U_n/\partial y$ convergent uniformément sur K. D'après 1.3.1, $\partial u/\partial z$ et $\partial u/\partial\bar{z}$ existent, $\partial u/\partial z=\lim_{n\to\infty}\partial u_n/\partial z$ et $\partial u/\partial\bar{z}=\lim_{n\to\infty}\partial u_n/\partial\bar{z}=0$, donc u est holomorphe et, d'après 1.3.1, u_n' converge vers u' uniformément sur K. □

1.4. Théorème. — *Soit D un ouvert connexe de C. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes, sans zéro dans D, qui converge uniformément, sur tout compact de D, vers la fonction holomorphe u, alors, ou bien $u=0$, ou bien u est sans zéro dans D.*

Démonstration. — Supposons $u\neq 0$ et soit z_0 un zéro de u ; D étant connexe, z_0 est isolé, de multiplicité $k>0$; si $B(z_0,r)\subset D$ est assez petit, $B^*(z_0,2r)$ ne contient pas de zéro de u et

$$k=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{u'(z)}{u(z)}\,\mathrm{d}z \quad \text{où} \quad \gamma=bB(z_0,r), \quad \text{d'après ch. 2, 6.1.}$$

D'après 1.3, l'intégrale ci-dessus est la limite des intégrales $\int_\gamma \frac{u_n'(z)}{u_n(z)}\mathrm{d}z$ quand $n\to\infty$, donc $k=0$, contradiction. □

1.5. Corollaire. — ***Soit D un ouvert de $\mathbf{C}$; soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes, injectives : $D\to\mathbf{C}$ qui converge uniformément sur tout compact de D, alors, ou bien la fonction limite u est constante, ou bien elle est injective.***

DÉMONSTRATION. — Soient $z_1, z_2\in D$, $z_1\neq z_2$, tels que $u(z_1)=u(z_2)=a$, u n'étant pas constante ; soient B_1, B_2 deux disques ouverts disjoints contenus dans D et centrés en z_1, z_2 respectivement. Alors $u(z)-a$ a pour zéro z_1 dans B_1 et z_2 dans B_2. D'après 1.4, pour n assez grand, u_n-a a un zéro dans B_1 et un zéro dans B_2, ce qui contredit l'hypothèse. □

1.6. Théorème. — ***Soit $f=\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ une série de fonctions holomorphes sur l'ouvert D de $\mathbf{C}$. Si f converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de D, alors f est holomorphe et $\sum v_n'$ converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact vers f'.***

DÉMONSTRATION. — (a) Soit $u_p(z)=\sum_{n=0}^{p} v_n(z)$, la conclusion pour la convergence uniforme résulte de 1.3 appliqué à la suite (u_p).

(b) Si $(u_p(z))$ converge normalement sur tout compact de D, d'après 1.2 et la démonstration de 1.3, la suite (u_p') converge normalement sur tout compact ; la convergence normale sur une partie impliquant la convergence uniforme sur la même partie, d'après (a), on a : $\sum_{n=0}^{\infty} v_n'=f'$. □

2. Suite exhaustive de compacts d'un ouvert D de $\mathbf{R}^2$, théorème de Stieljes—Vitali—Montel

2.1. Théorème. — ***Pour tout ouvert D de $\mathbf{R}^2$, il existe une suite croissante de compacts (K_n), (i.e. $K_n\subset K_{n+1}$), de D telle que tout compact K de D soit contenu dans l'un des K_n ; en outre $\bigcup_n K_n=D$.***

Une telle suite (K_n) est dite *exhaustive*.

DÉMONSTRATION. — Considérons les disques fermés contenus dans D dont les coordonnées du centre et le rayon sont rationnels ; ils forment un ensemble dénombrable que l'on range en une suite $(\overline{B}_n)_{n\in\mathbf{N}}$; pour tout n, $K_n=\bigcup_{i=0}^{n}\overline{B}_i$, réunion finie de compacts est compact et $K_n\subset K_{n+1}$.

Les intérieurs B_j des disques forment un recouvrement ouvert de D, donc tout compact K de D est contenu dans une réunion finie de B_j, donc dans un K_n.

Pour tout $z\in D$, $\{z\}$ est compact, donc il existe n tel que $z\in K_n$, d'où la dernière assertion. □

2.2. Théorème de Stieltjes—Vitali—Montel. — ***Si (u_n) est une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert D de $\mathbf{C}$ et si cette suite est uniformément bornée sur***

tout compact de D, alors il existe une sous-suite (u_{n_j}) convergeant uniformément sur tout compact de D vers une limite u qui est holomorphe dans D.

DÉMONSTRATION. — (a) Soit K un compact de D et soit A un compact à bord de D tel que $K \subset \mathring{A}$; (u_n) étant uniformément bornée sur le compact A, la suite $\|u_n\|_A$ est bornée ; d'après 1.2, la suite des dérivées premières (u_n') est uniformément bornée sur K ; il en résulte, d'après le théorème des accroissements finis, que la suite (u_n) est équicontinue sur K (i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout couple $(z, \zeta) \in K^2$ satisfaisant à $|z-\zeta| \leqslant \eta$, on ait $|u_n(z)-u_n(\zeta)| \leqslant \varepsilon$) ; de plus, pour tout $z \in K$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n(z)$ est dans un disque fermé de rayon fini, donc compact, alors d'après le théorème d'Ascoli, l'ensemble $\{u_n \ ; \ n \in \mathbf{N}\}$ est une partie relativement compacte de l'espace $C^0(K \ ; \ \mathbf{C})$ des fonctions continues sur K, à valeurs dans $\mathbf{C}$ muni de la norme de la convergence uniforme, donc il existe une sous-suite de (u_n) uniformément convergente sur K.

(b) Considérons une suite exhaustive de compacts (K_p) de D (2.1). Alors, pour $q \leqslant p$, toute sous-suite de (u_n) uniformément convergente dans K_p converge uniformément dans K_q.

Soit (u_{n_l}) une sous-suite uniformément convergente sur K_p, posons $v_l^p = u_{n_l}$; alors la suite (v_l^p) est uniformément bornée sur K_{p+1}, donc il existe une sous-suite $(v_{l_k}^p)$ qui converge uniformément sur K_{p+1} ; posons $v_k^{p+1} = v_{l_k}^p$; on définit ainsi, par récurrence sur p, une sous-suite (v_l^p) de (u_n) uniformément convergente sur K_p et telle que (v_k^{p+1}) soit une sous-suite de (v_l^p) ; la suite (w_p) avec $w_p = v_p^p$ est une sous-suite de (u_n) qui converge uniformément sur tout K_p $(p \in \mathbf{N})$, donc sur tout compact de D, d'après 2.1, vers une fonction u. L'hypothèse de 1.3 est satisfaite par (w_p) donc la limite u de la suite (w_p) est holomorphe sur D. □

3. Topologie de l'espace des fonctions continues sur un ouvert D de $\mathbf{C}$; espace des fonctions holomorphes sur D

3.1. L'ensemble $C(D) = C^0(D \ ; \ \mathbf{C})$ des fonctions continues sur D à valeurs dans $\mathbf{C}$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Pour tout compact K de D, l'application

$$C(D) \to \mathbf{R}_+$$
$$f \mapsto p_K(f) = \sup_{z \in K} |f(z)|$$

est une semi-norme, i.e.,

$$\text{pour} \quad f, g \in C(D), \quad p_K(f+g) \leqslant p_K(f) + p_K(g)$$
$$\text{pour} \quad \lambda \in \mathbf{C}, \quad f \in C(D), \quad p_K(\lambda f) = |\lambda| p_K(f)$$

mais $p_K(f) = 0$ entraîne seulement $f|K = 0$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, la semi-norme p_K définit la pseudo-boule fermée de $C(D)$, centrée en 0, de rayon ε

$$V(K, \varepsilon) = \{f \in C(D); \ p_K(f) \leqslant \varepsilon\}.$$

3.1.1.* Proposition. — *Le compact K étant fixé, la semi-norme p_K munit $\mathbf{C}(D)$ d'une topologie τ_K bien déterminée, invariante par translation, pour laquelle l'addition et la multiplication par les scalaires sont continues.

DÉMONSTRATION. — La semi-norme p_K définit l'écart

$$q_K : C(D)\times C(D) \to \mathbf{R}_+$$
$$(f, g) \mapsto p_K(f-g)$$

q_K possède les propriétés d'une distance, à cela près que $q_K(f, g)=0$ n'entraîne pas nécessairement $f=g$.

Pour tout $f\in \mathrm{C}(D)$, pour tout $\varepsilon>0$, soit $W_\varepsilon^f=\{g\in C(D) \; ; \; q_K(g,f)<\varepsilon\}$; l'ensemble $\{W_\varepsilon^f \; ; \; \varepsilon\in \mathbf{R}_+\}$ satisfait aux axiomes d'un système fondamental de voisinages de f dans une topologie bien déterminée de $\mathrm{C}(D)$. Pour toute $h\in \mathrm{C}(D)$, on a : $q_K(f+h, g+h)=q_K(f, g)$, donc, par la translation h, $W_\varepsilon^0=V(K, \varepsilon)$ est transformé en W_ε^h : la topologie ci-dessus est invariante par translation.

La continuité de l'addition et celle de l'homothétie se vérifient immédiatement. □

3.2. Proposition. — *K décrivant la famille des compacts de D et ε décrivant $\mathbf{R}_+^*$, $\mathbf{C}(D)$ est muni d'une topologie unique τ, invariante par translation, dans laquelle les parties $V(K, \varepsilon)$ constituent un système fondamental de voisinages de 0 et pour laquelle l'addition et l'homothétie sont continues.*

DÉMONSTRATION. — La topologie τ est la borne supérieure des topologies τ_K quand K décrit la famille des compacts de D ; alors un système fondamental de voisinages de 0 est formé des parties $\bigcap_{j\in J} V(K_j, \varepsilon_j)$, où $(K_j)_{j\in J}$ est n'importe quelle famille finie de compacts de D ; mais $V(K_1, \varepsilon_1)\cap V(K_2, \varepsilon_2)\supset V(K_1\cup K_2, \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$; les $V(K, \varepsilon)$, avec K compact et $\varepsilon\in \mathbf{R}_+^*$, constituent donc un système fondamental de voisinages de 0. □

3.3. Proposition. — *La topologie τ peut être définie par une distance invariante par translation.*

DÉMONSTRATION. — Soit (K_i) une suite exhaustive de compacts de D, on pose : $p_i=p_{K_i}$; pour toute $f\in \mathrm{C}(D)$,

$$\delta(f) = \sum_{i\geq 1} 2^{-i}\inf(1, p_i(f)); \; \left(\delta(f) \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1\right) ;$$

pour $f, g\in \mathrm{C}(D)$, $d(f, g)=\delta(f-g)$. On montre que d est une distance invariante par translation qui définit la topologie τ ; ce dernier point se vérifie ainsi :

1) tout $V(K, \varepsilon)$, avec $\varepsilon<1$, contient une boule (centrée en 0) pour d. Soit i tel que $K\subset K_i$, alors $d(f, 0)=\delta(f)\leq 2^{-i}\varepsilon$ entraîne : $p_i(f)\leq \varepsilon$, donc $B(0, 2^{-i}\varepsilon)\subset$ $\subset V(K_i, \varepsilon)\subset V(K, \varepsilon)$.

2) Toute boule $B(0, \varepsilon)$ pour d contient un $V(K, \varepsilon')$; soit i tel que $2^{-i}\leq 2^{-1}\varepsilon$, alors $f\in V(K_i, 2^{-1}\varepsilon)$ entraîne

$$\delta(f) \leq p_i(f)+2^{-i} < \frac{\varepsilon}{2}+2^{-i} \leq \varepsilon. \quad \square$$

3.4. Theorème. — ***L'espace $\mathrm{C}(D)$ muni de la topologie τ (dite topologie de la convergence compacte) est un espace vectoriel topologique*** **(E.V.T.)** ***localement convexe, métrisable et complet (*****i.e., par définition un** ***espace de Fréchet).***

DÉMONSTRATION. — E.V.T. signifie : espace vectoriel muni d'une topologie rendant les deux lois de compositions continues ; localement convexe signifie : l'origine, donc tout point, a un système fondamental de voisinages convexes : c'est le cas des $V(K, \varepsilon)$.

$\mathrm{C}(D)$ est métrisable : on vient (3.3) de construire une distance d sur $\mathrm{C}(D)$ compatible avec τ ;

$\mathrm{C}(D)$ est complet : il suffit de vérifier (puisque $\mathrm{C}(D)$ est métrisable) que la limite de toute de fonctions de $\mathrm{C}(D)$ qui converge uniformément sur tout compact est continue (i.e. continue en tout point de D), ce qui est immédiat. □

3.5. Théorème. — ***Le sous-espace $\mathcal{O}(D)$ de $\mathrm{C}(D)$,*** **i.e.** ***le sous-espace vectoriel muni de la topologie induite par τ, est fermé dans $\mathrm{C}(D)$, donc complet, et l'application***

$$\mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(D)$$

$$f \mapsto f'$$

est continue ; en particulier, $\mathcal{O}(D)$ est un Fréchet.

DÉMONSTRATION. — La conclusion résulte de 1.3. □

3.6. On suppose, dans la suite, $\mathcal{O}(D)$ muni de la topologie de la convergence compacte.

3.6.1. **Proposition.** — ***Si $A \subset \mathcal{O}(D)$ est compact, alors A est fermé borné.***

DÉMONSTRATION. — $\mathcal{O}(D)$ est séparé, car il est métrisable, donc A compact est fermé. Pour K compact de D, l'application $\varphi_K : \mathcal{O}(D) \to \mathbf{R}$ est continue. Donc,

$$f \mapsto \sup_{z \in K} |f(z)|$$

si A est un compact de $\mathcal{O}(D)$, $\varphi_K(A)$ est compact, donc borné, dans $\mathbf{R}$: alors les $f \in A$ sont uniformément bornés sur K, donc pour tout compact K de D, il existe ε_A tel que $A \subset V(K, \varepsilon_A)$, i.e. pour tout élément $V(K, \varepsilon)$ du système fondamental de voisinages de 0 considéré, il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $A \subset V(K. \lambda\varepsilon) = \lambda V(K, \varepsilon)$, ce qui signifie (par définition) que A est *borné* ; cela équivaut au fait que A est contenu dans une boule $B(0, r)$ pour la distance d sur $\mathcal{O}(D)$. □

3.6.2. **Théorème.** — ***Toute partie fermée bornée de $\mathcal{O}(D)$ est compacte.***

3.6.3. **Lemme.** — ***Si un espace métrique E possède la propriété suivante : toute suite (u_n) de E possède une sous-suite (u_{n_s}) qui converge, alors E est compact.***

[C'est un résultat élémentaire de topologie générale sur les espaces métriques.]

3.6.4. DÉMONSTRATION DE 3.6.2. — Soit A une partie fermée bornée de $\mathcal{O}(D)$; d'après la démonstration de 3.6.1, A borné signifie : pour tout compact K de D, les $f \in A$ sont uniformément bornées sur K.

Soit (u_n) une suite d'éléments de A ; elle est uniformément bornée sur tout compact de D, alors, d'après le théorème 2.2, il existe une sous-suite (u_{n_j}) convergeant uniformément, sur tout compact de D, vers une limite $u \in \mathcal{O}(D)$; A étant fermé, $u \in A$; d'après 3.6.3, A est compact. □

4. Séries et produits infinis dans un ouvert D de $\mathbf{C}$

4.1. Convergence d'une série de fonctions méromorphes

Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite fonctions méromorphes sur l'ouvert D de $\mathbf{C}$.

4.1.1. On dit que la série $\sum f_n$ *converge uniformément* (resp. *normalement*) sur une partie A de D s'il existe un sous-ensemble fini J de $\mathbf{N}$ tel que

1) pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus J$, f_n n'a pas de pôle dans A ;
2) $\sum\limits_{n \in \mathbf{N} \setminus J} f_n$ est uniformément (resp. normalement) convergente sur A. La convergence normale implique la convergence uniforme.

4.1.2. On considère désormais les séries de fonctions méromorphes *convergeant uniformément* (resp. *normalement*) *sur tout compact* $K \subset D$.

Pour tout ouvert $U \subset\subset D$, il existe $n_0 = n_0(U)$ tel que, pour $n > n_0$, f_n n'ait pas de pôle dans $\bar{U}$, donc soit holomorphe sur U, alors :

$$f = \sum_{n \leq n_0} f_n + \sum_{n > n_0} f_n \ ; \tag{4.0}$$

la somme finie de fonctions méromorphes $\sum\limits_{n \leq n_0} f_n$ est méromorphe et $\sum\limits_{n > n_0} f_n$ est uniformément (resp. normalement) convergente sur tout compact de U, donc est holomorphe sur U d'après 1.6.

Alors f est une fonction méromorphe sur U indépendante du choix de n_0.

4.1.3.* Théorème. —** ***Soit $\sum\limits_{n \in \mathbf{N}} f_n$ une série de fonctions méromorphes sur D ; si elle converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de D, sa somme f est méromorphe sur D.

La série $\sum\limits_{n \in \mathbf{N}} f'_n$ converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de D et sa somme est la fonction méromorphe f'.

DÉMONSTRATION. — D'après 4.1.2, f est méromorphe sur tout ouvert relativement compact de D, donc au voisinage de tout point de D, i.e. sur D.

Soit U un ouvert relativement compact de D ; soit $n_0 = n_0(U)$, alors dans l'expression (4.0) de f, la série $\sum\limits_{n > n_0} f_n$ est uniformément (resp. normalement) convergente sur tout compact de U ; d'après 1.6, il en est de même de $\sum\limits_{n > n_0} f'_n$, donc d'après la définition 4.1.1, de la série de fonctions méromorphes $\sum f'_n$. Tout compact de D étant contenu dans un ouvert $U \subset\subset D$, la convergence a lieu sur tout compact de D. □

***4.1.4.* Remarque.** — Ce qui précède du n^o 4.1 est valide pour la somme $\sum_{n\in\mathbf{Z}} f_n$ de deux séries de fonctions méromorphes $\sum_{n\in\mathbf{N}} g_n$, $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} h_n$ où $g_0=f_0$; $g_n=f_n$, $h_n=f_{-n}$ pour $n\in\mathbf{N}^*$, les séries $\sum g_n$ et $\sum h_n$ convergeant *normalement* sur tout compact de D.

4.2. EXEMPLE. — Série (4.1) $\sum_{n\in\mathbf{Z}} (z-n)^{-2}$.

***4.2.1.* Lemme. — *La série* (4.1) *converge normalement sur tout compact de* C.**

DÉMONSTRATION. — Soit $x=\mathcal{R}e\, z$, alors tout compact K est contenu dans une bande $\beta(x_0, x_1)$: $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ de $\mathbf{C}$; l'intervalle $[x_0, x_1]$ contient un nombre fini d'entiers ; soit $z\in\beta(x_0, x_1)$, pour $n<x_0$, $|(z-n)^{-2}|$ est majoré par $(x_0-n)^{-2}$; pour $n>x_1$, $|(z-n)^{-2}|$ est majoré par $(x_1-n)^{-2}$, donc la série (4.2) $\sum_{n\in\mathbf{Z}\setminus[x_0,x_1]} (z-n)^{-2}$ converge normalement dans $\beta(x_0, x_1)$; les termes de (4.1) omis dans (4.2) sont méromorphes, à pôles dans $\beta(x_0, x_1)$ et en nombre fini, donc (4.1) converge normalement dans $\beta(x_0, x_1)$ et a fortiori dans K. □

***4.2.2.* Propriétés de (4.1.) :**

(a) La somme $f(z)$ de (4.1) est *méromorphe dans* **C**, d'après 4.1.3, et admet la période 1 : $f(z+1)=f(z)$;

(b) Les *pôles* sont les *entiers rationnels,* sont *doubles* et de *résidu nul,* car au voisinage de $n\in\mathbf{Z}$, $f(z)$ est égale à $(z-n)^{-2}$ à l'addition près d'une fonction holomorphe.

(c) Soit $y=\mathcal{I}m\, z$, alors *quand* $y\to\infty$, $f(z)$ *tend vers* 0, *uniformément en* x.

A cause de la périodicité de f, il suffit de vérifier (c) dans une bande $\beta(x_0, x_1)$ de largeur supérieure à 1. Dans $\beta(x_0, x_1)$, la série (4.1) est normalement convergente ; quand $|y|\to\infty$, chaque terme $(z-n)^{-2}$ tend vers 0 uniformément en x, donc $f(z)$ tend vers 0 uniformément en x.

4.2.3.* Proposition. — *On a :

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} (z-n)^{-2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2.$$

Lemme. — $g(z)=\left(\dfrac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$ *possède les propriétés* (a), (b), (c) *ci-dessus.*

DÉMONSTRATION. — (a) g est méromorphe de période 1 : évident ;

(b) à cause de la périodicité, il suffit d'étudier le pôle $z=0$; $\left(\dfrac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 \sim \dfrac{1}{z^2}$ au voisinage de 0 ;

(c) $|\sin \pi z|^2=\sin^2 \pi x+\mathrm{sh}^2\, \pi y$. □

DÉMONSTRATION de 4.2.3. : Considérons $h=f-g$; h est une fonction entière ; h est bornée : il suffit de le vérifier dans une bande $\beta(x_0, x_1)$ de largeur 1 ; soit $y_0>0$; pour $|y|\leqslant y_0$, h continue sur un compact est bornée ; comme $h(z)$ tend vers 0 quand $|y|\to\infty$ uniformément en x, pour $|y|>y_0$, $|h(z)|$ est borné ; alors, d'après le théorème de Liouville (ch. 2, 2.4.2), h est constante. En outre, $h(z)$ tend vers 0 quand $|y|\to\infty$, donc $h=0$. □

***4.2.4.* Application**

$k(z)=\left(\dfrac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2-\dfrac{1}{z^2}=\sum\limits_{\substack{n\in \mathbf{Z}\\ n\neq 0}}(z-n)^{-2}$ est holomorphe au voisinage de 0 ; $k(0)=$ $=2\sum\limits_{n\in\mathbf{N}^*}n^{-2}$; d'autre part, au voisinage de 0, $\left(\dfrac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2-\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{\pi^2}{\pi^2z^2}\left(1+\dfrac{\pi^2z^2}{6}+\dots\right)^2-$ $-\dfrac{1}{z^2}\sim\dfrac{\pi^2}{3}$ quand $|z|$ est infiniment petit, donc $k(0)=\dfrac{\pi^2}{3}$; $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}^*}n^{-2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

4.3. Théorème de Mittag—Leffler dans C

4.3.1. Soit f une fonction méromorphe non nulle sur un ouvert connexe U de $\mathbf{C}$; les pôles de f étant isolés (ch. 2, 4.3.4), au voisinage de tout point $z_0\in U$, il existe un développement de Laurent de f

$$f(z)=\sum_{k=p}^{1}a_{-k}(z-z_0)^{-k}+g(z-z_0)$$

où g est une série entière convergente au voisinage de z_0, donc une fonction holomorphe.

$$P=\sum_{k=p}^{1}a_{-k}(z-z_0)^{-k} \tag{4.3}$$

est un polynôme en $(z-z_0)^{-1}$ sans terme constant qui est appelé la *partie principale de f en z_0* : tout polynôme (4.3) sera appelé une *partie principale de fonction méromorphe, de pôle z_0*.

4.3.2. Soit Z un *ensemble discret de points* de $\mathbf{C}$; la topologie de $\mathbf{C}$ étant à base dénombrable, l'ensemble Z est dénombrable ; on peut l'ordonner en une suite (z_n) telle que $(|z_n|)$ soit croissante ; en outre si Z est l'ensemble des pôles de $f\in\mathcal{M}(\mathbf{C})$, (z_n) n'a pas de valeur d'adhérence dans $\mathbf{C}$, car une telle valeur d'adhérence serait un pôle non isolé de f, donc, si Z est infini, $|z_n|\to\infty$ quand n tend vers l'infini.

4.3.3.* Théorème. — *Soient (z_n) une suite comme dans* 4.3.2 *et (P_n) une suite de parties principales de pôles z_n. Il existe une infinité de fonctions méromorphes sur* C, *ayant pour pôles les z_n et, pour tout n, la partie principale P_n.

DÉMONSTRATION. — Deux fonctions méromorphes satisfaisant à la conclusion diffèrent d'une fonction entière. Si $z_n\neq 0$, $h_n(z)=P_n((z-z_n)^{-1})$ est holomorphe dans $B(0,|z_n|)$ et somme d'une série entière uniformément convergente sur le disque $B\left(0,\dfrac{1}{2}|z_n|\right)$; il existe un polynôme $Q_n(z)$ obtenu à partir du développement de Taylor de h_n en 0 tel que $|h_n(z)-Q_n(z)|\leqslant 2^{-n}$ sur $B\left(0,\dfrac{1}{2}|z_n|\right)$. Si $z_0=0$, on prend $Q_0=0$.

Alors la série de fonctions méromorphes $\sum \left(P_n((z-z_n)^{-1})-Q_n(z)\right)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$; sa somme est une fonction méromorphe (4.1.3) satisfaisant à la conclusion. □

4.4. Produits infinis de fonctions holomorphes

4.4.1. Soient D un ouvert de $\mathbf{C}$, (f_n) une suite de fonctions continues sur D, A une partie de D. On dit que le produit infini $\prod_{n\in\mathbf{N}} f_n(z)$ *converge normalement sur A* si :

(i) $f_n(z)$ converge vers 1, uniformément sur A ; cela implique qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $|f_n-1|<1$ sur A ; alors $\operatorname{Log} f_n$ est défini sur A.

(ii) La série $\sum_{n\geq n_0} \operatorname{Log} f_n$ converge normalement sur A.

Soit $f_n=1+u_n$; (i) signifie : la suite (u_n) converge uniformément vers 0 sur A ; pour $n \gg 0$, $\operatorname{Log} f_n$ et u_n sont des infiniment petits équivalents ; donc (ii) équivaut à : $\sum u_n$ converge normalement sur A ; ce qui entraîne : la suite (u_n) converge vers 0, uniformément sur A. D'où :

4.4.2. **Proposition.** — ***(f_n) étant une suite de fonctions continues sur D, A une partie de D et $f_n=1+u_n$, alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes :***

(i) ***$\prod_{n\in\mathbf{N}} f_n$ converge normalement sur A ;***

(ii) ***la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$ converge normalement sur A.***

4.4.3. **Corollaire.** — ***Dans les hypothèses de*** **4.4.2** ***et sous la condition*** **(i)**, ***pour tout compact K de D, la suite $\left(\prod_{n\leq p} f_n\right)_{p\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout compact de D vers une fonction f continue sur D.***

Démonstration. — Pour tout ouvert U relativement compact, il existe un entier $n_0=n_0(U)$ tel que, pour $n>n_0$, $|f_n-1|<1$ sur $\bar{U}$; posons $g=\prod_{n\leq n_0} f_n$; $h_p=\prod_{n_0<n\leq p} f_n$

$$\prod_{n\leq p} f_n = g\cdot h_p \quad \text{et} \quad \operatorname{Log} h_p = \sum_{n_0<n\leq p} \operatorname{Log} f_n.$$

La série $\sum_{n_0<n} \operatorname{Log} f_n$ converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction l continue sur U, donc $\left(\prod_{n\leq p} f_n\right)_{p\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers $g\cdot\exp l$, continue sur U. □

4.4.4. **Théorème.** — ***Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes dans D telle que le produit infini $\prod_n f_n$ converge normalement sur tout compact de D, alors $f=\prod_n f_n$ est holomorphe dans D. En outre, $Z(f)=\bigcup_n Z(f_n)$ et si, pour $g\in\mathcal{O}(D)$, $m_z(g)$ désigne l'ordre de multiplicité du zéro z de g, on a : $m_z(f)=\sum_n m_z(f_n)$.***

Démonstration. — $\prod_{n\leq p} f_n$ est holomorphe pour tout $p\in\mathbf{N}$; d'après 4.4.3, f est limite uniforme de $\left(\prod_{n\leq p} f_n\right)_{p\in\mathbf{N}}$ sur tout compact, donc f est holomorphe (1.3).

Pour tout ouvert relativement compact U, l'ensemble de zéros $Z(f_n|U)$ est vide dès que $n \geqslant n_0(U)$, d'où la dernière assertion. □

***4.4.5.* Théorème. — *Dans les hypothèses de* 4.4.4, *la série de fonctions méromorphes* $\sum_{n\in\mathbf{N}} (f_n'/f_n)$ *converge normalement sur tout compact de D et sa somme est la dérivée logarithmique* f'/f.**

Démonstration. — Sur tout ouvert U relativement compact de D, dans les notations de la démonstration de 4.4.3, on a : $f = g \cdot \prod_{n>n_0} f_n$; $|f_n - 1| < 1$ sur $\overline{U}$ pour $n > n_0$. Alors $\dfrac{f'}{f} = \dfrac{g'}{g} + \sum_{n>n_0} (\operatorname{Log} f_n)'$; la série du second membre converge normalement sur tout compact de U vers $(\operatorname{Log} \prod_{n>n_0} f_n)'$, d'après 1.6. □

4.5. Exemple de produit infini : expression de $\pi^{-1} z^{-1} \sin \pi z$

***4.5.1.* Proposition. —**

$$\prod_{n\in\mathbf{N}^*} (1 - n^{-2}z^2) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}.$$

Démonstration. — Le produit infini (4.4) $f(z) = z \prod_{n\in\mathbf{N}^*} (1 - n^{-2}z^2)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbf{C}$ d'après 4.4.2 car il en est ainsi de la série $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} n^{-2}z^2$. Donc, d'après 4.4.4, $f(z)$ est holomorphe dans $\mathbf{C}$; ses zéros sont les entiers rationnels et sont simples.

D'après 4.4.5, la dérivée logarithmique de f est la série normalement convergente sur tout compact de $\mathbf{C}$:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = z^{-1} + \sum_{n\in\mathbf{N}^*} 2z(z^2 - n^2)^{-1}. \tag{4.5}$$

***4.5.2.* Lemme. — *La somme* $F(z)$ *de la série du second membre de* (4.5) *est* $\dfrac{\pi}{\operatorname{tg} \pi z}$.**

Démonstration. —

$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbf{Z}^*} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbf{Z}^*} \frac{z}{n(z-n)}.$$

La série $\sum_{n\in\mathbf{Z}^*} \dfrac{z}{n(z-n)}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbf{C}$; sa somme est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ d'après 4.1.3 ; il en est de même de $F(z)$. En outre

$$F'(z) = -z^{-2} - \sum_{n\in\mathbf{Z}^*} (z-n)^{-2} = -\left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 \tag{4.6}$$

d'après 4.2.3. Mais le dernier membre de (4.6) est $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{\pi}{\operatorname{tg} \pi z} \right)$, donc $F(z) - \dfrac{\pi}{\operatorname{tg} \pi z}$ étant une fonction impaire constante est nulle. □

***4.5.3.* Fin de la démonstration de 4.5.1.** D'après 4.5.2, on a :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z},$$

donc $f(z)=c \sin \pi z$ où $c \in \mathbf{C}$. Quand $z \to 0$, $\dfrac{f(z)}{z}$ tend vers 1, d'après (4.4) et $\dfrac{\sin \pi z}{z}$ tend vers π donc $c=\dfrac{1}{\pi}$, d'où $\dfrac{\sin \pi z}{z}=\dfrac{f(z)}{z}$. □

4.6. La fonction Γ

On va définir une fonction méromorphe $\Gamma(z)$ telle que, pour $n \in \mathbf{N}$, $\Gamma(n+1)=n!$.

4.6.1. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit

(4.7)
$$g_n(z) = z(1+z)(1+2^{-1}z)\dots(1+n^{-1}z)n^{-z}$$
$$= \frac{1}{n!} z(z+1)(z+2)\dots(z+n)n^{-z}.$$

Pour $n \geqslant 2$, on a :

$$f_n(z) = \frac{g_n(z)}{g_{n-1}(z)} = \left(1+\frac{z}{n}\right) n^{-z}(n-1)^z = \left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^z.$$

Pour $1 \leqslant r < n$ et $|z| \leqslant r$, $\operatorname{Log} f_n(z)$ a un sens et

$$\operatorname{Log} f_n(z) = \operatorname{Log}\left(1+\frac{z}{n}\right) + z \log\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

En utilisant le développement de Taylor de $\operatorname{Log}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)$, on obtient $|\operatorname{Log} f_n(z)| \leqslant 2\dfrac{r^2}{n^2}$. Donc la série $\sum\limits_{n>1} \operatorname{Log} f_n$ converge normalement sur tout compact de $B(0, r)$; alors le produit infini $g_1 \prod\limits_{n \geq 2} g_n g_{n-1}^{-1}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbf{C}$. Sa valeur est la fonction holomorphe g, limite uniforme sur tout compact des fonctions $g_n = g_1 f_2 \dots f_n$; g a pour zéros les éléments de $-\mathbf{N}$ à la multiplicité 1.

Pour

$$z \notin -\mathbf{N},\ g(z)\,g^{-1}(z+1) = \lim_{n \to \infty} g_n(z)\,g_n^{-1}(z+1) = \lim \frac{z}{z+1+n} \cdot \frac{n^{z+1}}{n^z}$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{nz}{z+1+n} = z.$$

Donc $g(z)g^{-1}(z+1)=z$ pour tout $z \in \mathbf{C}$; en outre $g(1)=\lim\limits_{n \to \infty} g_n(1)=1$.

4.6.2. La fonction méromorphe $\dfrac{1}{g(z)}$ est notée $\Gamma(z)$; elle admet pour seuls pôles les entiers $\leqslant 0$ à la multiplicité 1 et satisfait à :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{4.8}$$

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{4.9}$$

4.6.3. **Théorème (formules des compléments).** —

$$\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

DÉMONSTRATION. — D'après (4.7), seconde expression, on a :

$$g_n(1-z) = (1-z)(1-2^{-1}z)\dots(1-n^{-1}z)(n+1-z)n^{-1+z} \;;$$

en utilisant la première expression (4.7) pour $g_n(z)$, on obtient :

$$g_n(z)\cdot g_n(1-z) = n^{-1}z(n+1-z)\prod_{k=1}^{n}(1-k^{-2}z^2),$$

d'où :

$$g(z)\cdot g(1-z) = \lim_{n\to\infty} g_n(z)\cdot g_n(1-z) = z\cdot\prod_{k\in N^*}(1-k^{-2}z^2) = \frac{\sin \pi z}{\pi},$$

d'après 4.5.1. □

4.7. Théorème de Weierstrass dans C

4.7.1. Soit Z un ensemble discret de points de **C** ; comme dans 4.3.2, on l'ordonne en une suite (z_n) telle que $|z_n|$ soit croissante et que $|z_n|\to\infty$ quand $n\to\infty$.

4.7.2. **Théorème.** — ***Soit (z_n) une suite de points de C comme dans 4.7.1, alors il existe une infinité de fonctions entières dont les zéros sont les points z_n, la multiplicité du zéro z_n étant égale au nombre de fois qu'il figure dans la suite.***

DÉMONSTRATION. — Si f est une fonction cherchée, toute autre est égale à fh où h est une fonction entière sans zéro donc égale à e^g où g est entière. Si $z_0=0$ figure k fois dans la suite, il suffit de construire $z^{-k}f$ sans zéro à l'origine. On suppose donc désormais $z_0\neq 0$.

Pour $z\in B(0, |z_n|)$, $\operatorname{Log}(1-z_n^{-1}z)$ est holomorphe et son développement de Taylor $-\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}(z_n^{-1}z)^k$ converge uniformément sur $\bar{B}_n=\bar{B}(0, 2^{-1}|z_n|)$. Soit $P_n(z)=\sum_{k=1}^{k_n} k^{-1}(z_n^{-1}z)^k$ tel que $|\operatorname{Log}(1-z_n^{-1}z)+P_n(z)|<2^{-n}$ sur $\bar{B}_n$. Posons $a_n(z)=$ $=(1-z_n^{-1}z)\exp P_n(z)$. Pour tout compact K de **C**, il existe n_0 tel que, pour $n\geqslant n_0$, on ait $K\subset\bar{B}_n$, la série $\sum_{n\geqslant n_0} \operatorname{Log} a_n$ converge normalement sur K, donc aussi le produit infini $\prod_{n\in\mathbf{N}} a_n$. Alors (4.4.4), $f=\prod_{n\in\mathbf{N}} a_n$ est une fonction entière satisfaisant à la conclusion. □

5. Applications holomorphes, transformations conformes

5.1. Application holomorphe au voisinage d'un point régulier

5.1.1. Soit f une application différentiable d'un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{C}$. Soient z_0 un point de U et $\gamma_j : I \to \mathbf{C}, j=1, 2$, deux arcs différentiables d'origine z_0 ; $\delta_j = f \circ \gamma_j$ sont deux arcs différentiables d'origine $w_0 = f(z_0)$. On désigne par $\gamma_j'(0)$ la dérivée à droite de γ_j en 0 supposée non nulle pour $j=1,2$; $\gamma_1'(0) \in \mathbf{R}^2$. La dérivée $f'(z_0)$ appartient à $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2 ; \mathbf{C})$; $\delta_j'(0) = f'(z_0)\gamma_j'(0)$.

Identifions $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{C}$, alors $\gamma_j'(0) \in \mathbf{C}$ et $\operatorname{Arg} \dfrac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}$ $\left(\text{resp. } \operatorname{Arg} \dfrac{\delta_2'(0)}{\delta_1'(0)}\right)$ est l'angle orienté des demi-tangentes à $\operatorname{Im} \gamma_1$ et $\operatorname{Im} \gamma_2$ en z_0 (resp. à $\operatorname{Im} \delta_1$ et $\operatorname{Im} \delta_2$ en w_0).

5.1.2. Une application différentiable f d'un voisinage de z_0 dans $\mathbf{C}$ dans un voisinage de w_0 dans $\mathbf{C}$ telle que $w_0 = f(z_0)$ et, qui possède la propriété suivante : pour deux arcs différentiables d'origine z_0, γ_1 et γ_2 transformés par f en deux arcs δ_1, δ_2 d'origine w_0, (5.1) $\operatorname{Arg} \dfrac{\delta_2'(0)}{\delta_1'(0)} = \pm \operatorname{Arg} \dfrac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}$ est dite une *transformation conforme en* z_0, on dit encore que f *conserve les angles* en z_0. Si f est conforme en tout point d'un ouvert U de $\mathbf{C}$, on dit que f est *conforme* dans U.

On dira que la transformation conforme en z_0 est *directe* ou *indirecte* suivant que le signe dans (5.1) est $+$ ou $-$.

5.1.3. **Proposition. —** ***Toute fonction f holomorphe au voisinage de z_0 dans $\mathbf{C}$ telle que $f'(z_0) \neq 0$ est une transformation conforme directe en z_0.***

DÉMONSTRATION. — Dans les notations de 5.1.1, $f'(z_0) \in \mathscr{L}(\mathbf{C} ; \mathbf{C}) \approx \mathbf{C}$ et $\delta_j'(0) = f'(z_0)\gamma_j'(0) = c\gamma_j'(0)$ où $c = f'(z_0)$; alors $\dfrac{\delta_2'(0)}{\delta_1'(0)} = \dfrac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}$. □

5.1.4. **Proposition. —** ***Toute application $\mathbf{R}$-linéaire $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ qui conserve les angles au signe près est ou bien (5.2) $Z \mapsto cZ$***

ou bien (5.3) $Z \mapsto c\bar{Z}$ avec $c \in \mathbf{C}$.

DÉMONSTRATION. — T transforme 1 en $c = re^{i\omega}$; soit S l'application linéaire $z \mapsto r^{-1}e^{-i\omega}z$, alors $S \circ T$ conserve 1 ; elle conserve les angles en O, alors i est transformé en ia avec $a \in \mathbf{R}$ car l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ est conservé ou changé en son opposé. Le point $1+i$ est transformé en $(1+ia)$, $\operatorname{Arg}(1+ia) = \pm \operatorname{Arg}(1+i)$ donc $a = \pm 1$.

Si $a=1$, $S \circ T$ est l'identité, alors $T = S^{-1} : Z \mapsto cZ$;

Si $a=-1$ $S \circ T$ est : $Z \mapsto \bar{Z}$, i.e. : $ZT \mapsto c\bar{Z}$

5.1.5. **Proposition. —** ***Soient D un ouvert connexe de $\mathbf{C} \approx R^2$ et $f : D \to \mathbf{C}$ une application C^1 de Jacobien $J_f(z) \neq 0$ en tout point $z \in D$. Alors les deux conditions sont équivalentes :***

(i) ***f est conforme sur D ;***

(ii) ***f est holomorphe ou f est antiholomorphe sur D tout entier.***

DÉMONSTRATION. — $f=u+iv$ où u et v sont à valeurs réelles. D'après 5.1.4, on a l'une des deux possibilités

$$\text{(5.4)} \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy = c(dx+i\,dy)$$

$$\text{(5.5)} \qquad df = c(dx-i\,dy)$$

$c=\alpha+i\beta$; $\alpha, \beta\in \mathbf{R}$; alors (5.4) et (5.5) signifient respectivement

$$\text{(5.6)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha = \frac{\partial v}{\partial y} \,;\; \frac{\partial u}{\partial y} = -\beta = -\frac{\partial v}{\partial x} \,;$$

c'est la condition de Cauchy

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0 \quad \text{pour } f$$

$$\text{(5.7)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha = -\frac{\partial v}{\partial y} \,;\; \frac{\partial u}{\partial y} = \beta = \frac{\partial v}{\partial x} \,;$$

c'est la condition de Cauchy

$$\frac{\partial \bar f}{\partial \bar z} = 0 \quad \text{pour } \bar f.$$

Si (5.6) et (5.7) sont vérifiées simultanément, toutes les dérivées partielles premières de u et de v sont nulles simultanément, contrairement à l'hypothèse $J_f(z)\neq 0$ pour tout $z\in D$.

$\partial f/\partial \bar z$ et $\partial f/\partial z$ sont continues, donc s'annulent sur des fermés disjoints de D ; comme D est connexe, ou bien f est holomorphe sur D, ou bien f est antiholomorphe sur D. □

5.1.6.* Proposition. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe au voisinage de z_0 dans $\mathbf{C}$, telle que $f'(z_0)\neq 0$, alors, au voisinage de $w_0=f(z_0)$, il existe une application holomorphe $g(w)$ réciproque de f et $g'(w)=f'(z)^{-1}$.

DÉMONSTRATION. — Soit $w=u+iv$, u et v réels, $w_0=u_0+iv_0$; d'après le théorème d'inversion locale, il existe $G(u, v)$ C^1 au voisinage de (u_0, v_0) telle que $w=u+iv=f(G(u, v))$; f étant holomorphe, $\dfrac{\partial w}{\partial u}=\dfrac{\partial f}{\partial z}(G(u, v))\dfrac{\partial G}{\partial u}(u, v)$; $\dfrac{\partial w}{\partial v}=$ $=\dfrac{\partial f}{\partial z}(G(u, v))\dfrac{\partial G}{\partial v}(u, v)$; $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z)\neq 0$ au voisinage de z_0. Mais
$0=\dfrac{\partial w}{\partial \bar w}=f'(G(u,v))\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial u}+i\dfrac{\partial}{\partial v}\right)G(u, v)=0.$

Pour w assez voisin de w_0, $f'(G(u, v))\neq 0$, donc $\dfrac{\partial}{\partial \bar w}G(u, v)=0$ i.e. $G(u, v)=$ $=g(w)$ est holomorphe au voisinage de w_0. De plus $1=\dfrac{\partial w}{\partial w}=f'(z)g'(w)$, i.e. $g'(w)=$ $=f'(z)^{-1}$, pour $w=f(z)$. □

***5.1.7.* Définition.** — Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbf{C}$, tout point $z \in U$ tel que $f'(z) \neq 0$ est appelé *point régulier* de f ; en un tel point les Propositions 5.1.3 et 5.1.6 sont valides.

***5.1.8.* Remarque.** — *f est, localement, une application biholomorphe (ou isomorphisme analytique local).*

5.2. Application holomorphe $w=f(z)$ au voisinage d'un point z_0 tel que $f'(z_0)=0$.

5.2.1. Cas particulier

$f(z)=z^p$; $p \in \mathbf{N}, p \geqslant 2$, alors $f'(0)=0$. Soit $z=\varrho e^{i\theta}$, alors $w=\varrho^p e^{ip\theta}$; les angles ne sont pas conservés en 0, mais multipliés par p. L'application réciproque, dans un ouvert où elle est définie est $z=w^{1/p}=e^{1/p \log w}$ pour une détermination du logarithme. De façon précise, pour les déterminations principales de l'argument et du logarithme, on a :

$$-\pi < \operatorname{Arg} w < \pi$$

$$\operatorname{Log} w = \log |w| + i \operatorname{Arg} w.$$

Pour $w \in \Omega = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$, on obtient pour z, p fonctions distinctes

$$z = e^{1/p \operatorname{Log} w} \cdot e^{ik 2\pi/p} = e^{1/p \log |w|} \cdot e^{i[\operatorname{Arg} w + k 2\pi/p]} \; ; \; k = 0, 1, \ldots, p-1.$$

5.2.2. Cas général

Par changement d'origine, on se ramène au cas : $z_0=0$; $f(z_0)=f(0)=0$. A l'aide du développement de Taylor de f en 0, on obtient : $f=z^p c^p g(z)$ où g est holomorphe au voisinage de $z=0$; $g(0)=1$; $c \in \mathbf{C}^*$; $g(z)=1+g_1(z)$; $g_1(0)=0$. Alors, pour $|z|$ assez petit, $\operatorname{Log}(1+g_1(z))$ a un sens, donc aussi : $h(z)=ce^{1/p \operatorname{Log} g(z)}$; de sorte que $f=z^p h^p(z)=(zh)^p$. D'après 5.1.6, l'application holomorphe $z \mapsto \zeta = zh(z)$ est inversible au voisinage de $z=0$; c'est un changement de coordonnée holomorphe locale (ch. 2, 4.4.1) ; l'application réciproque de $\zeta \mapsto w$, pour $w \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$, est $\zeta = w^{1/p}$ avec les p déterminations

$$\zeta = e^{1/p \log |w|} \cdot e^{i[\operatorname{Arg} w + k 2\pi/p]} \; ; \; k = 0, 1, \ldots, p-1.$$

L'application réciproque de f est composée de $w \mapsto \zeta$ ci-dessus et de l'application $\zeta \mapsto z$ réciproque de l'isomorphisme local : $z \mapsto \zeta = zh(z)$.

5.3. Propriétés des applications holomorphes

5.3.1.* Théorème.** — ***Soit f une fonction holomorphe, non constante, dans un ouvert connexe D de $\mathbf{C}$. Alors $f(D)$ est un ouvert de $\mathbf{C}$.

DÉMONSTRATION. — Il suffit de montrer que l'image d'un ouvert de D assez petit est un ouvert de $\mathbf{C}$. Au voisinage de $z_0 \in D$ en lequel $f'(z_0) \neq 0$, f est un isomorphisme analytique local (5.1.8). Au voisinage de $z_0 \in D$ en lequel $f'(z_0)=0$, f est composé d'un isomorphisme local (changement de coordonnée) $z \mapsto \zeta$ et de l'application $\zeta \mapsto w = \zeta^p$, $p \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ (5.2), l'image du disque $|\zeta| < r$ pour r suffisamment petit est le disque $|w| < r^p$. □

5.3.2. **Corollaire.** — ***Soient D un ouvert connexe de* C *et* $f \in \mathcal{O}(D)$ *une application injective :* $D \to \mathbf{C}$, *alors f est un homéomorphisme :* $D \to f(D)$ *et* $f^{-1} \in \mathcal{O}(f(D))$.**

DÉMONSTRATION. — f est injective, continue et ouverte (d'après 5.3.1) ; pour tout ouvert U de D, $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ est un ouvert de $\mathbf{C}$ d'après 5.3.1, donc f^{-1} est continue et est un homéomorphisme. De plus, f étant injective, en tout point $z_0 \in D, f'(z_0) \neq 0$ à cause du résultat de 5.2, et $(f^{-1})'(f(z_0)) = f'(z_0)^{-1}$, (5.1.6), alors f^{-1} est holomorphe en $f(z_0)$, donc sur $f(D)$. □

5.3.3. D et D' étant deux ouverts de $\mathbf{C}$, un homéomorphisme $f : D \to D'$ holomorphe ainsi que son inverse est appelé un *isomorphisme*.

5.3.4. **Corollaire.** — ***Soient D un ouvert de* C *et* $f : D \to \mathbf{C}$ *une application holomorphe injective, alors f est un isomorphisme :* $D \to f(D)$.**

DÉMONSTRATION. — Appliquer 5.3.2 à chaque composante connexe de D. □

5.3.5. Les définitions et résultats précédents sont valides si f est définie sur un ouvert de la sphère (resp. d'une surface) de Riemann et a ses valeurs dans la sphère (resp. dans une surface) de Riemann.

6. Représentation conforme

6.1. Problème de la représentation conforme

6.1.1. Problème

Soient D et D' deux ouverts connexes de $\mathbf{P}^1$, existe-t-il un isomorphisme : $D \to D'$?

6.1.2. **Théorème.** — **C *et* $B(0, 1) = \{z \in \mathbf{C} \ ; \ |z| < 1\}$ *ne sont pas isomorphes mais sont homéomorphes.***

DÉMONSTRATION. — Supposons qu'il existe un isomorphisme $f : \mathbf{C} \to B(0, 1)$, alors f est une fonction entière bornée donc constante d'après le théorème de Liouville (ch. 2, 2.4.2), contradiction. □

6.1.3. Dans les notations de 6.1.1, soient f un isomorphisme donné de D dans D' et g un isomorphisme quelconque, alors $f^{-1} \circ g = S : D \to D$ est un isomorphisme de D sur lui-même, i.e. un *automorphisme*. Réciproquement, pour tout automorphisme $S : D \to D$, $g = f \circ S$ est un isomorphisme : $D \to D'$.

Les automorphismes de D forment un groupe $\Gamma(D)$ et pour tout $S\in\Gamma(D)$,

$$S \mapsto S' = f\circ S\circ f^{-1} : D' \to D'$$

est un automorphisme de D', d'où l'isomorphisme : $\underset{S\mapsto S'}{\Gamma(D)\to\Gamma(D')}$.

6.1.4. Le but du n° 6 est d'établir que tout ouvert *simplement connexe* (voir ch. 1, 5.4) distinct de $\mathbf{C}$ est isomorphe au disque unité $B=B(0, 1)$ (théorème 6.5.1). La démonstration utilisera plusieurs réductions des données et des automorphismes de B ; c'est pourquoi on va étudier, successivement, les automorphismes de $\mathbf{C}$, de $\mathbf{P}^1$ et de B.

6.2. Automorphismes de C

6.2.1. Tout automorphisme $f : \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ est une fonction entière, injective, non constante ; f se prolonge à $\mathbf{P}^1$ en une fonction ayant ∞ comme point singulier isolé ; soit $\zeta=z^{-1}$, $g(\zeta)=f(\zeta^{-1})$ admet 0 comme point singulier isolé.

Si $\zeta=0$ est un point singulier essentiel, l'image du disque $|\zeta|<1$ par g est dense dans $\mathbf{C}$ (ch. 2, 4.3.6), donc rencontre l'ouvert (5.3.1) image de $|z|<1$ par f ; cela contredit l'injectivité de f. Alors $\zeta=0$ est un pôle de g et f est un polynôme en z ; pour que f soit injective, à cause du théorème de d'Alembert, il faut et il suffit que le degré de f soit 1, i.e. $f=az+b$; $a, b\in\mathbf{C}$, $a\neq 0$, d'où

6.2.2. **Théorème.** — ***Le groupe des automorphismes de* C *est***

$$\Gamma(\mathbf{C}) = \{z \mapsto az+b\ ;\ a\neq 0\}. \quad \square$$

6.2.3. On dit qu'un groupe Γ d'automorphismes d'une surface de Riemann X est *transitif* si, pour tout couple $(z_1, z_2)\in X^2$, il existe $f\in\Gamma$ tel que $z_2=f(z_1)$.

On appelle *sous-groupe d'isotropie* d'un point $z_0\in X$, *dans* Γ, le sous-groupe de Γ qui conserve le point z_0, i.e. $\{f\in\Gamma\ ;\ f(z_0)=z_0\}$.

6.2.4. **Proposition.** — ***Le groupe $\Gamma(\mathbf{C})$ est transitif ; le sous-groupe d'isotropie de* 0 *est* $\{z\mapsto az\ ;\ a\neq 0\}$.** $\square$

6.3. Automorphismes de P¹

6.3.1. Une *application homographique* est définie par

$$z\mapsto w = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{6.1}$$

où $a, b, c, d\in\mathbf{C}$; si $c\neq 0$, elle est définie sur $\mathbf{C}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$; les coefficients sont définis au produit près par un élément de $\mathbf{C}^*$; elle s'étend en une application de $\mathbf{P}^1$ dans $\mathbf{P}^1$. Dans le cas où

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc \neq 0, \tag{6.2}$$

elle a pour inverse l'application $w \mapsto z = \dfrac{-dw+b}{cw-a}$ qui est de même nature, on l'appelle *transformation homographique* ou *homographie* et c'est un isomorphisme analytique : $\mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$. Les transformations homographiques constituent donc un groupe G d'automorphismes de $\mathbf{P}^1$ qui est transitif.

***6.3.2.* Théorème. — *Dans les notations de* 6.1.3 *et* 6.3.1, *on a :* $\Gamma(\mathbf{P}^1)=G$.**

6.3.3.* Lemme. — *Soient D un ouvert de* $\mathbf{P}^1$ *et G un sous-groupe de $\Gamma(D)$ possédant les propriétés suivantes :

(a) *G est transitif dans D ;*

(b) *il existe un point $z_0 \in D$ tel que le sous-groupe d'isotropie de z_0 dans $\Gamma(D)$ soit contenu dans G.*

Alors $G=\Gamma(D)$.

DÉMONSTRATION. Pour tout $S \in \Gamma(D)$, il existe $T \in G$ tel que $T(z_0)=S(z_0)$ puisque, d'après (a), G est transitif ; $T^{-1}\circ S(z_0)=z_0$, donc $T^{-1}\circ S \in G$ d'après (b), alors $T\circ(T^{-1}\circ S)\in G$, i.e. $S \in G$. □

6.3.4. DÉMONSTRATION DE 6.3.2. — Les transformations homographiques de $\mathbf{P}^1$ laissant fixe le point à l'infini sont caractérisées par $c=0$, $d\neq 0$; elles forment le sous-groupe de G des automorphismes de $\mathbf{C}$ (6.2.2), i.e. le sous-groupe d'isotropie de ∞ dans $\Gamma(\mathbf{P}^1)$; G étant transitif, d'après 6.3.3, $\Gamma(\mathbf{P}^1)=G$. □

6.4. Automorphismes du disque unité $B=B(0, 1)$

6.4.1. Homographies

Ce sont les applications satisfaisant à (6.1) et (6.2). Pour $c\neq 0$, on a : $w=ac^{-1}+$ $+(bc-ad)c^{-2}(z+dc^{-1})^{-1}$; l'homographie est alors composée des applications suivantes : $z'=z+dc^{-1}$ (translation) ; $z''=z'^{-1}$ (inversion-symétrie) ;

$$z''' = (bc-ad)c^{-2}z'' \tag{6.3}$$

(homothétie complexe de rapport $\neq 0$) ; $w=ac^{-1}+z'''$ (translation).

Pour $c=0$, c'est une homothétie suivie d'une translation.

Chacune de ces applications transforme l'ensemble des droites et des cercles de $\mathbf{C}$ en lui-même ; en particulier, il existe une homographie transformant $\mathscr{I}\mathrm{m}\, z=y=0$ en le cercle unité ; c'est un homéomorphisme de $\mathbf{P}^1$, donc elle transforme une composante connexe de $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ en une composante connexe de $\mathbf{C}\setminus \mathrm{spt}\, bB(0, 1)$. Considérons une homographie transformant $(\infty, 0, 1)$ en $(1, -1, -i)$; alors : $a=c=1$,

$b=-d$; $d=+i$.

(6.4) $$w=\frac{z-i}{z+i}$$

transforme le demi-plan $y>0$ en B.

6.4.2. *Automorphismes du demi-plan supérieur P* ($y>0$)

Considérons les homographies (6.1) à coefficients réels, telles que $|ad-bc|=1$: ce sont les homographies qui conservent l'axe réel. Pour qu'une telle homographie conserve P il faut et il suffit que $ad-bc=1$. Si $c\neq 0$ cela résulte de la décomposition de 6.4.1 et de (6.3) ; si $c=0$, $w=ad^{-1}z+bd^{-1}$, alors $ad=1$.

Ces homographies constituent un sous-groupe G de $\Gamma(P)$ tel que G soit transitif dans P ; nous allons montrer que le sous-groupe d'isotropie du point i dans $\Gamma(P)$ est contenu dans G ; cela résultera du lemme 6.4.4 et du fait que l'image de i par l'application (6.4) est le centre 0 du disque unité. Alors, du lemme 6.3.3, résultera :

6.4.3. Proposition. — ***Le groupe $\Gamma(P)$ des automorphismes de P est le groupe des homographies* (6.1) *à coefficients réels, telles que* $ad-bc=1$.** □

6.4.4. Lemme. — ***Le sous-groupe d'isotropie de* 0 *dans* $\Gamma(B)$ *est le groupe des rotations* $z\mapsto ze^{i\theta}$; $\theta\in\mathbf{R}$.**

DÉMONSTRATION. — Soit $z\mapsto f(z)$ un automorphisme de B laissant 0 fixe, alors, d'après le lemme de Schwarz (ch. 2, 3.5) appliqué à f et à f^{-1}, on a $|f(z)|=|z|$, puis $f(z)=e^{i\theta}z$ pour $\theta\in\mathbf{R}$ fixe. □

6.4.5. Théorème. — ***$\Gamma(B)$ est le groupe des homographies* $w=e^{i\theta}\dfrac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$; $\theta\in\mathbf{R}$; $|z_0|<1$.**

DÉMONSTRATION. — D'après 6.4.1, l'isomorphisme (6.4) applique P sur B ; l'isomorphisme réciproque est

(6.5) $$z=\frac{i(w+1)}{-w+1}.$$

Tout élément de $\Gamma(B)$ est composé des applications

$$z'=\frac{i(z+1)}{-z+1}\ ;\quad z''=\frac{az'+b}{cz'+d}\quad \text{avec}\quad a,b,c,d\in\mathbf{R}\quad\text{et}\quad ad-bc=1\ ;$$

$w=\dfrac{z''-i}{z''+i}$; c'est

$$w=e^{i\theta}\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}\quad\text{avec}\quad e^{i\theta}=\frac{c-b+(a+d)i}{-(c-b)+(a+d)i}$$

et

$$\theta \in \mathbf{R} \ ; \ z_0 = \frac{c+b+i(a-d)}{c-b+i(a+d)} \ ;$$

Alors $|z_0|^2 = \dfrac{(b+c)^2+(a+d)^2-4ad}{(b+c)^2+(a+d)^2-4bc}$; mais, d'après la condition $ad-bc=1$, on a : $-ad=-bc-1<-bc$, donc $|z_0|<1$.

6.5. Théorème de la représentation conforme pour un ouvert simplement connexe D de C

***6.5.1.* Théorème.** — ***Tout ouvert simplement connexe D de* C*, distinct de* C*, est isomorphe au disque* $B(0, 1)$.**

6.5.2.* Corollaire.** — ***Deux ouverts simplement connexes* D_1, D_2 *de* C*, distincts de* C*, sont isomorphes. □

6.5.3.* Corollaire.** — ***Deux ouverts simplement connexes* D_1, D_2 *de* C *sont homéomorphes.

Démonstration. — Chacun d'eux est égal à **C** ou isomorphe à $B(0, 1)$ (6.5.1), donc homéomorphe à **C** (6.1.2). □

Pour démontrer 6.5.1, on va effectuer des réductions préliminaires de la donnée.

***6.5.4.* Proposition.** — ***Pour tout ouvert simplement connexe D de* C*, distinct de* C*, il existe un ouvert* D_1 *relativement compact de* C *et un isomorphisme :* $D \to D_1$.**

Démonstration. — Soit $a \in \mathbf{C}$, $a \notin D$; D étant simplement connexe, il existe une détermination holomorphe g de $\log(z-a)$ sur D (ch. 1, 5.4.11) ; en outre, g est injective, en effet, pour $z_1, z_2 \in D$ tels que $g(z_1)=g(z_2)$, on a $\exp g(z_1)=\exp g(z_2)$, i.e. $z_1-a=z_2-a$.

Soit $z_0 \in D$, d'après 5.3.1, $g(D)$ contient un disque $B_r=B(g(z_0), r)$; alors le disque $B_r+2\pi i$ ne contient aucun point de $g(D)$ sinon il existerait z et $z' \in D$ tels que $g(z')=g(z)+2\pi i$, donc en prenant l'exponentielle des deux membres, $z-a= =z'-a$; c'est impossible puisque g est une détermination de $\log(z-a)$. Alors, pour tout $z \in D$, on a : $|g(z)-g(z_0)-2\pi i| \geqslant r > 0$; la fonction $h : z \mapsto \dfrac{1}{g(z)-g(z_0)-2\pi i}$ est holomorphe, injective et bornée sur D ; d'après le Corollaire 5.3.4, elle définit un isomorphisme $D \to D_1 = h(D)$ où D_1 est contenu dans $\overline{B(0, r^{-1})}$. □

6.5.5. Pour démontrer 6.5.1, on peut supposer D borné ; plus précisément, après homothétie et translation convenables, on suppose $z_0=0 \in D$ et $D \subset B = B(0, 1)$.

6.5.6.* Lemme.** — ***Soit $A=\{f \in \mathcal{O}(D) \ ; \ f$ ***injective*** $; \ f(0)=0 \ ; \ |f(z)|<1 \ ; \ z \in D\}$. ***Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :***

(i) $f \in A \ ; \ D'=f(D)=B=B(0, 1)$;

(ii) $f \in A \ ; \ |f'(0)|$ ***est maximum.***

DÉMONSTRATION. — (i)$\Rightarrow$(ii) : soient $f\in A$ sans plus et $D'=f(D)$; d'après le Corollaire 5.3.4, f est un isomorphisme : $D\to D'$. Soit g un isomorphisme : $D\to B$; $g(0)=0$; alors $f=h\circ g$ où $h : B\to D'$ est un isomorphisme tel que $h(0)=0$. On a : $|h'(0)|\leqslant 1$ d'après le lemme de Schwarz (ch. 2, 3.5), donc $|f'(0)|\leqslant|g'(0)|$.

(i) équivaut à : h est un automorphisme de B conservant 0, donc une rotation (6.4.4), d'où $|h'(0)|=1$ et $|f'(0)|=|g'(0)|$.

non (i)$\Rightarrow$non (ii) : soit $f\in A$, tel qu'il existe $a\in\mathbf{C}$, $|a|<1$, $a\notin f(D)$. $f(z)\in B$ entraîne $\dfrac{f(z)-a}{1-\bar{a}f(z)}\in B$ (6.4.5) ; $f(D)$ est simplement connexe, alors $F(z)=\operatorname{Log}\dfrac{f(z)-a}{1-\bar{a}f(z)}$ est définie, holomorphe et injective dans D et $\mathscr{R}e\, F(z)<0$.

Si $u, v\in\mathbf{C}$, $\mathscr{R}e\,(u)<0$, $\mathscr{R}e\,(v)<0$, on a : $\left|\dfrac{v-u}{v+\bar{u}}\right|<1$; cela résulte immédiatement de $|\mathscr{R}e\, v-\mathscr{R}e\, u|<|\mathscr{R}e\, v+\mathscr{R}e\, u|$.

Alors $g(z)=\dfrac{F(z)-F(0)}{F(z)+\overline{F(0)}}$ est holomorphe et injective dans D ; $g(0)=0$ et $|g(z)|<1$, donc $g\in A$. On vérifie immédiatement : $\left|\dfrac{g'(0)}{f'(0)}\right|=\dfrac{1-|a|^2}{2|a|\log\left|\dfrac{1}{a}\right|}>1$. □

6.5.7. DÉMONSTRATION DE 6.5.1. — On se place dans les hypothèses de 6.5.5. D'après 6.5.6, il suffit de prouver qu'il existe $f\in A$ telle que $\sup\limits_{g\in A}|g'(0)|$ soit atteinte par $|f'(0)|$. On suppose $\mathscr{O}(D)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et on considère la partie $\mathscr{B}=\{f\in A\ ;\ |f'(0)|\geqslant 1\}$ de $\mathscr{O}(D)$.

$\mathscr{B}\neq\emptyset$, car D étant contenu dans $B(0, 1)$, $\mathrm{id}_D\in\mathscr{B}$.

$\mathscr{B}$ est *bornée* dans $\mathscr{O}(D)$ car, pour tout $z\in D$, $|f(z)|<1$, donc, pour tout compact K de D, $|f(K)|<1$.

$\mathscr{B}$ est *fermée* dans $\mathscr{O}(D)$, en effet, soit $f\in\overline{\mathscr{B}}$, il existe une suite (f_n), $f_n\in\mathscr{B}$ telle que $f=\lim f_n$ (uniformément sur tout compact de D) ; alors $f(0)=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0)=0$.

$f'=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n'$ (uniformément sur tout compact) d'après 1.3, alors $|f'(0)|=$ $=\lim\limits_{n\to+\infty}|f_n'(0)|\geqslant 1$; en particulier f n'est pas constante dans D ; comme c'est la limite d'une suite de fonctions holomorphes injectives, elle est injective (1.5). Enfin, $|f_n(z)|<1$ sur D entraîne $|f(z)|\leqslant 1$ sur D ; mais il n'existe pas de point $z\in D$ tel que $|f(z)|=1$, en vertu du principe du maximum parce que f n'est pas constante, donc $f\in\mathscr{B}$. L'ensemble $\mathscr{B}$ étant borné fermé dans $\mathscr{O}(D)$ est compact d'après le théorème 3.6.2 ; en outre l'application $\underset{g\mapsto|g'(0)|}{\mathscr{B}\to\mathbf{R}}$ est continue, donc elle atteint sa borne supérieure sur $\mathscr{B}$. □

4 APPROXIMATION DES FONCTIONS HOLOMORPHES SUR UN COMPACT. CONSTRUCTION DE FONCTIONS MÉROMORPHES À SINGULARITÉS DONNÉES

Etant donnés un ouvert D de $\mathbf{C}$ et un compact K de D, le théorème de Runge donne des conditions équivalentes à la suivante : toute fonction holomorphe au voisinage de K peut être approchée uniformément sur K par des fonctions de $\mathcal{O}(D)$; l'une d'elles est : $D \setminus K$ n'a pas de composante connexe relativement compacte dans D. On en déduit, comme dans le cas du disque ouvert, la solution du problème du d" dans D. Il est alors aisé d'étendre, à D, les théorèmes de Mittag—Leffler et de Weierstrass.

1. Théorème de Runge

1.1. Introduction

Nous avons vu que toute fonction holomorphe dans un disque $B = B(0, \varrho)$ est développable en série convergente dans ce disque (ch. 2, 1) ; de plus, cette série converge normalement, donc uniformément, sur tout disque de rayon r strictement inférieur à ϱ, donc sur tout compact de B. Autrement dit, toute fonction holomorphe dans B est limite uniforme de polynômes sur tout compact de B. En particulier, toute fonction entière est limite uniforme de polynômes sur tout compact de $\mathbf{C}$.

Le théorème 1.2 donne des conditions équivalentes à la suivante : étant donné un ouvert D de $\mathbf{C}$ et un compact K de D, toute fonction holomorphe au voisinage de K (i.e. holomorphe sur un voisinage ouvert de K) est limite uniforme de fonctions holomorphes sur D. Dans le cas particulier ci-dessus, $K = \bar{B}(0, r)$, la fonction holomorphe à approcher est définie sur le voisinage B de K et $D = \mathbf{C}$; on vérifiera que les conditions du théorème sont trivialement satisfaites. Ce théorème d'approximation est du même type que le théorème de Weierstrass d'approximation des fonctions continues réelles sur un compact de $\mathbf{R}^n$ par des polynômes ; cependant, ici, les fonctions considérées sont toutes holomorphes et des conditions sur le compact apparaissent.

1.2. Théorème de Runge. — ***Soient D un ouvert de* C *et K un compact de D. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :***

(a) ***toute fonction holomorphe dans un voisinage de K peut être approchée, uniformément sur K, par des fonctions de $\mathcal{O}(D)$;***

(b) ***l'ouvert $D \setminus K$ n'a pas de composante connexe relativement compacte dans D ;***

(c) ***pour tout $z \in D \setminus K$, il existe $f \in \mathcal{O}(D)$ telle que $|f(z)| > \sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)|$.***

1.3. Corollaire. — ***Les trois conditions suivantes sont équivalentes :***

(a) ***toute fonction holomorphe dans un voisinage d'un compact K de* C *est limite uniforme de polynômes sur K ;***

(b) ***le complémentaire de K est connexe*** (ce qui équivaut à : ***chaque composante connexe de K est simplement connexe) ;***

(c) ***pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus K$, il existe un polynôme f tel que $|f(z)| > \sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)|$.***

DÉMONSTRATION. — D'après 1.1, toute fonction entière est limite uniforme de polynômes sur le compact K : alors (a) et (c) traduisent (a) et (c) du théorème 1.2, dans le cas $D = \mathbf{C}$.

(b) est le cas particulier de (b) de 1.2 dans lequel $D = \mathbf{C}$, alors $\mathbf{C} \setminus K$ est connexe et infini, i.e. toute composante connexe H de K est telle que tout arc continu fermé de H est homotope à un point, sans quoi $\mathbf{C} \setminus K$ aurait une composante connexe relativement compacte.

1.4. DÉMONSTRATION DE 1.2.

1.4.1. non (b)$\Rightarrow$non (c) : supposons que $D \setminus K$ ait une composante connexe B dont l'adhérence $\bar{B}$ dans D soit compacte. Alors la frontière Fr B de B est une partie de K et, d'après le principe du maximum (ch. 2, 3.2), on a : pour tout $f \in \mathcal{O}(D)$, $\sup_{z \in B} |f(z)| \leqslant \sup_{\xi \in \operatorname{Fr} B} |f(\xi)|$, donc

$$\forall f \in \mathcal{O}(D), \sup_{z \in \bar{B}} |f(z)| \leqslant \sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)|, \tag{1.1}$$

ce qui est la condition non (c).

1.4.2. non (b) et (a) sont contradictoires.

Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage de K et soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{O}(D)$ convergeant vers f uniformément sur K. Dans les notations de 1.4.1, (1.1) appliquée à $f_n - f_m$ montre que la suite $(f_n|\bar{B})$ est de Cauchy, dans $\bar{B}$, pour la norme de la convergence uniforme, donc a une limite continue F ; de plus $F = f$ sur $K \cap \bar{B}$, donc sur Fr B.

B est un ouvert de D, en effet, soit $z_0 \in B$, alors il existe un disque ouvert b de $\mathbf{C}$ centré en z_0, contenu dans D et ne rencontrant pas le fermé K ; or b est connexe et $B \cap b \neq \emptyset$. donc $B \cup b$ est connexe, mais B est une composante connexe de $D \setminus K$: c'est la composante connexe de z_0, d'où $b \subset B$; B est donc ouvert dans $\mathbf{C}$ et dans D.

(f_n) converge uniformément sur $\bar{B}$, donc sur tout compact de B, vers F, alors, d'après ch. 3, 1.3, F est holomorphe dans l'ouvert B. Soit $\zeta \in B$; prenons $f(z) = (z-\zeta)^{-1}$; on a $F(z) = f(z)$ sur Fr B, d'où $(z-\zeta)F(z) = 1$ sur Fr B, donc, d'après le principe du maximum appliqué à la fonction holomorphe $(z-\zeta)F(z) - 1$, on a : $(z-\zeta)F(z) = 1$ dans B ; alors F n'est pas holomorphe au point ζ de B : contradiction.

1.4.3. (b)⇒(a) : *préliminaire.* Une mesure μ dans le compact K est une forme **C**-linéaire continue sur l'espace $C_0(K\,;\,\mathbf{C})$ des fonctions continues sur K, à valeurs dans **C**, muni de la norme de la convergence uniforme. On pose :

$$E=\{f\in C_0(K\,;\,\mathbf{C})\,;\,\exists \text{ un voisinage } \omega \text{ de } K,\ \exists \underline{f}\in\mathcal{O}(\omega),\ \underline{f}|K=f\}$$
$$F=\{f\in C_0(K\,;\,\mathbf{C})\,;\,\exists h\in\mathcal{O}(D),\ h|K=f\}.$$

On a : $F\subset E\subset C_0(K\,;\,\mathbf{C})$ et (a) équivaut à : $(\bar{F})_E=E$.

1.4.4. **Lemme. — (a) *équivaut à***
(a′) *toute mesure dans K orthogonale à F est orthogonale à E.*

On rappelle que, si $A\subset C_0(K\,;\,\mathbf{C})$, la mesure μ est dite *orthogonale* à A si, pour tout $\varphi\in A$, on a $\mu(\varphi)=0$; on dit aussi que φ est orthogonale à μ.

Démonstration du lemme. — Non (a)⇒non (a′) : supposons $(\bar{F})_E\neq E$, soit $g\in(\bar{F})_E$, $g\notin E$; soit $\underline{\mu}$ la forme linéaire sur $G=(\bar{F})_E+\mathbf{C}g$ nulle sur $(\bar{F})_E$ et égale à 1 sur g. Cette forme est continue puisque $\operatorname{Ker}\underline{\mu}=(\bar{F})_E$ est fermé dans G ; d'après le théorème de Hahn—Banach, il existe un prolongement linéaire continu μ de $\underline{\mu}$ à $C_0(K\,;\,\mathbf{C})$, i.e. une mesure dans K orthogonale à F et non orthogonale à E.

(a)⇒(a′) : toute mesure μ dans K orthogonale à F est orthogonale à $(\bar{F})_{C_0(K;\,\mathbf{C})}$ (continuité de μ), donc à $(\bar{F})_E=E$. □

1.4.5. **Lemme. — *Soit μ une mesure dans* C, *à support dans K, alors la fonction***

$$\varphi(\zeta)=\int(z-\zeta)^{-1}\,\mathrm{d}\mu(z)=\mu\big((z-\zeta)^{-1}\big) \tag{1.2}$$

est holomorphe en dehors du support de μ et

$$\varphi^{(q)}(\zeta)=q!\int(z-\zeta)^{-q-1}\,\mathrm{d}\mu(z). \tag{1.3}$$

Démonstration. — Soit $h\in\mathbf{C}^*$ assez petit ; $h^{-1}\big[\mu((z-\zeta-h)^{-1})-\mu((z-\zeta)^{-1})\big]=$ $=\mu\big(1/(z-\zeta-h)(z-\zeta)\big)$ tend vers $\mu\big((z-\zeta)^{-2}\big)$ quand h tend vers 0 ; donc la **C**-dérivée de $\varphi(\zeta)$ existe. On vérifie (1.3) par récurrence sur $q\in\mathbf{N}$. □

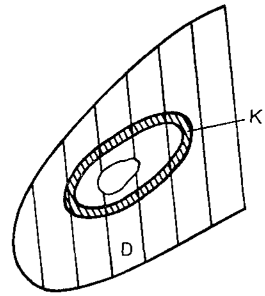
1.4.6. Démonstration de (b)⇒(a′), donc, d'après 1.4.4, de (b)⇒(a).

Soit μ une mesure dans **C**, à support dans K, orthogonale à F.

(i) Pour tout $n\in\mathbf{N}$, $z^n\in F$, donc $\int z^n\,\mathrm{d}\mu(z)=0$; mais, pour $\zeta\in\mathbf{C}$, $|\zeta|>\sup_{z\in K}|z|$, on a : $(z-\zeta)^{-1}=-\zeta^{-1}(1-z\zeta^{-1})^{-1}=-\zeta^{-1}(1+\ldots+z^n\zeta^{-n}+\ldots)$, la série du dernier membre convergeant normalement. Alors, pour $|\zeta_0|\gg 0$, donc pour ζ_0 dans la composante connexe non bornée de $\mathbf{C}\setminus K$, on a : $\varphi^{(q)}(\zeta_0)=0$, pour tout $q\in\mathbf{N}$, donc $\varphi=0$ sur la composante connexe non bornée de $\mathbf{C}\setminus K$, d'après le théorème 2.1.1 du chapitre 2.

(ii) Si $D\neq\mathbf{C}$, soit $\zeta\in\mathbf{C}\setminus D$, alors la fonction $z\mapsto(z-\zeta)^{-q-1}$ est holomorphe dans D, elle appartient à F, donc, pour tout $q\in\mathbf{N}$, $\varphi^{(q)}(\zeta)=0$; en outre, φ est holomorphe sur $\mathbf{C}\setminus K$ (1.4.5), donc d'après ch. 2, 2.1.1 (théorème d'identité), φ est nulle sur toute composante connexe de $\mathbf{C}\setminus K$ qui rencontre $\mathbf{C}\setminus D$.

(iii) D'après (b), $D\setminus K$ n'a pas de composante connexe relativement compacte dans D, donc, pour toute composante connexe H de $\mathbf{C}\setminus K$, ou bien $H\cap(\mathbf{C}\setminus D)\neq\emptyset$, ou bien H est non bornée, c'est le cas, en particulier, si $D=\mathbf{C}$.



Si $D=\mathbf{C}$, on a $\varphi=0$ sur $\mathbf{C}\setminus K$ d'après (i).

Si $D\neq\mathbf{C}$, $\varphi=0$ sur chaque composante connexe H de $\mathbf{C}\setminus K$ d'après (i) et (ii).

Soient ω un voisinage de K dans D, $f\in\mathcal{O}(\omega)$ et $\psi\in\mathcal{D}(\omega)$ telle que $\psi=1$ dans un voisinage de K, alors, d'après (ch. 1, 5.1.1), pour $z\in K$, on a :

$$f(z)=\psi(z)f(z)=(2\pi i)^{-1}\int f(\zeta)\,(\partial\psi/\partial\bar\zeta)\cdot(\zeta-z)^{-1}\,\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar\zeta\,;$$

mais $\partial\psi/\partial\bar z=0$ dans un voisinage de K, donc, dans l'intégrale, on a $|\zeta-z|>0$, alors, d'après le théorème de Fubini,

$$\int f(z)\,\mathrm{d}\mu(z)=(2\pi i)^{-1}\int f(\zeta)(\partial\psi/\partial\bar\zeta)\,\mu((\zeta-z)^{-1})\,\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar\zeta=$$
$$=-(2\pi i)^{-1}\int f(\zeta)(\partial\psi/\partial\bar\zeta)\,\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar\zeta=0$$

puisque $\varphi(\zeta)=0$ pour $\zeta\in\mathbf{C}\setminus K$; alors f est orthogonale à μ, donc μ est orthogonale à E, i.e. la condition (a′) est satisfaite.

1.4.7. (b)⇒(c) : Soient $z\in D\setminus K$ et b un disque fermé centré en z et contenu dans $D\setminus K$. Alors les composantes connexes de $D\setminus(K\cup b)$ sont les mêmes que celles de $D\setminus K$, à cela près que b a été oté de la composante connexe du point z, donc $K\cup b$ satisfait à (b).

Mais (b)⇒(a), donc la fonction égale à 0 dans un voisinage de K et à 1 dans un voisinage de b peut-être approchée uniformément par des fonctions de $\mathcal{O}(D)$, alors il existe $f\in\mathcal{O}(D)$ telle que $|f|<\frac{1}{2}$ dans K et $|f-1|<\frac{1}{2}$ dans b, i.e. $|f|>\frac{1}{2}$ dans b, d'où (c). □

1.5. Enveloppe holomorphiquement convexe d'un compact

1.5.1. Soit K un *compact* de D ; on appelle *$\mathcal{O}(D)$-enveloppe* de K la partie suivante de D :

$$\hat K=\hat K_D=\{z\in D\ ;\ |f(z)|\leqq\sup_K|f|\ ;\ f\in\mathcal{O}(D)\}.$$

On dit aussi que $\hat K$ est l'*enveloppe holomorphiquement convexe de K.*

On pose $\complement D=\mathbf{C}\setminus D$; pour $\zeta\in\complement D$, en prenant $f(z)=(z-\zeta)^{-1}$, on vérifie

$$d(K,\complement D)=d(\hat K,\complement D).\tag{1.4}$$

En prenant $f(z)=e^{az}$ pour tout $a\in\mathbf{C}$, on vérifie que $\hat{K}$ est contenu dans l'enveloppe convexe de K dans $\mathbf{C}$; comme cette dernière est compacte et, d'après (1.4), $\hat{K}$ est *compacte* ; en outre $\hat{\hat{K}}=\hat{K}$.

1.5.2. **Proposition.** — ***Pour tout compact K de D, $\hat{K}$ est la réunion de K et des composantes connexes de $D\setminus K$ relativement compactes dans D.***

Démonstration. — Soit B une composante connexe de $D\setminus K$ relativement compacte dans D, alors

$$\forall f\in\mathcal{O}(D), \sup_B |f| \leqq \sup_K |f|$$

car $\operatorname{Fr} B\subset K$ et à cause du principe du maximum, donc $B\subset\hat{K}$. Alors la réunion K_1 de K et des composantes connexes de $D\setminus K$ relativement compactes dans D, est contenue dans $\hat{K}$. Toute composante connexe de $D\setminus K$ est ouverte (1.4.2), donc $D\setminus K_1$, réunion de composantes connexes de $D\setminus K$ est ouvert, alors K_1, fermé contenu dans le compact $\hat{K}$, est compact ; en outre, aucune composante connexe de $D\setminus K_1$ n'est relativement compacte dans D, donc K_1 satisfait à la conditions (b) du théorème 1.2, d'après (c) de 1.2, on a : $K_1=\hat{K}_1\supset\hat{K}$, d'où $K_1=\hat{K}$. □

1.6. Paires de Runge

1.6.1. **Théorème.** — ***Soient D_1, D_2 deux ouverts emboîtés de $\mathbf{C}$, $D_1\subset D_2$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :***

(i) ***toute fonction de $\mathcal{O}(D_1)$ peut être approchée, uniformément sur tout compact de D_1, par les fonctions de $\mathcal{O}(D_2)$;***

(ii) ***$D_2\setminus D_1$ n'a pas de composante connexe compacte ;***

(iii) ***pour tout compact $K\subset D_1$, on a $\hat{K}_{D_2}=\hat{K}_{D_1}$;***

(iv) ***pour tout compact $K\subset D_1$, on a $\hat{K}_{D_2}\cap D_1=\hat{K}_{D_1}$;***

(v) ***pour tout compact $K\subset D_1$, $\hat{K}_{D_2}\cap D_1$ est compact.***

Démonstration. — (i)⇒(iv), (iv)⇒(v) et (iii)⇒(iv) sont évidents.

(v)⇒(i) : $K'=\hat{K}_{D_2}\cap D_1$ est compact d'après (v) ; $K''=\hat{K}_{D_2}\cap(D_2\setminus D_1)$, fermé d'un compact est compact ; K' et K'' sont disjoints, donc, dans D_2, il existe un voisinage ouvert de K' contenu dans D_1 et un voisinage ouvert de K'' qui sont disjoints. Soit $f\in\mathcal{O}(D_1)$; la fonction égale à f sur le voisinage considéré de K'et égale à 1 sur le voisinage considéré de K'' peut être approchée uniformément sur $K'\cup K''=\hat{K}_{D_2}$ par des fonctions de $\mathcal{O}(D_2)$ d'après 1.2 ; mais $K\subset K'$, donc (i) est vérifié ; en outre d'après le début de la démonstration (i) équivaut à (v).

(i)⇒(iii) : soit $0=f\in\mathcal{O}(D_1)$; dans les notations ci-dessus, d'après (v), il existe une fonction $g\in\mathcal{O}(D_2)$ aussi voisine qu'on veut de 0 sur K' et de 1 sur K'' ; on a $K'\neq\emptyset$ puisque K est contenu dans $\hat{K}_{D_2}$ et dans D_1 ; si $K''\neq\emptyset$, d'après 1.5.2 appliquée à D_2, il existe $z\in K''\cap\operatorname{Fr} D_1$; alors $g(z)=1$ puisque $z\in K''$ et $g(z)=0$ puisque $z\in\hat{K}_{D_2}\cap\operatorname{Fr} D_1$: contradiction. Donc $K''=\emptyset$, i.e. $\hat{K}_{D_2}=\hat{K}_{D_2}\cap D_1=\hat{K}_{D_1}$ d'après (iv) entraîné par (i).

(iii)⇒(ii) : soit L une composante connexe compact de $D_2 \setminus D_1$; alors $F=(D_2 \setminus D_1) \setminus L$ est un fermé ; soit ω un voisinage ouvert de L, relativement compact dans D_2 tel que $\bar{\omega} \cap F = \emptyset$; on a $\mathrm{Fr}\,\omega \cap (D_2 \setminus D_1) = \emptyset$ et $\mathrm{Fr}\,\omega \subset D_2$, donc $\mathrm{Fr}\,\omega \subset D_1$; d'après le principe du maximum, la $\mathcal{O}(D_2)$-enveloppe de $\mathrm{Fr}\,\omega$ contient ω, donc aussi L ; d'après (iii) $L \subset D_1$, donc $L=\emptyset$.

(ii)⇒(iii) : soit A une composante connexe de $D_2 \setminus K$ relativement compacte dans D_2. On a $\mathrm{Fr}\,A \subset K \subset D_1$, donc $L=\bar{A} \cap (D_2 \setminus D_1) = A \cap (D_2 \setminus D_1)$ est un compact de A ; en outre $F=(D_2 \setminus A) \cap (D_2 \setminus D_1)$ est fermé dans D_2, disjoint de L et $D_2 \setminus D_1 = F \cup L$; L est réunion de composantes connexes compactes de $D_2 \setminus D_1$; d'après (ii), $L=\emptyset$, donc $A \subset D_1$. D'après 1.5.2, $\hat{K}_{D_2}$ est la réunion de K et des composantes connexes de $D_2 \setminus K$ relativement compactes dans D_2 ; celles-ci sont contenues dans D_1 d'après ce qui précède, donc d'après 1.5.2, $\hat{K}_{D_2} \subset \hat{K}_{D_1}$; l'inclusion inverse résulte de $D_1 \subset D_2$, d'où (iii). □

1.6.2. Tout couple d'ouverts emboîtés (D_1, D_2) satisfaisant aux conditions équivalentes de 1.6.1 est appelé une *paire de Runge.*

2. Problème du d″ dans un ouvert D de $\mathbf{C}$

2.1. Exhaustion de D

2.1.1.* Proposition. —** ***Il existe une suite strictement croissante de compacts $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de D telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ et que $\bigcup_n K_n = D$.

Une telle suite est appelée une *exhaustion* de D.

La démonstration de cette proposition est un raffinement facile du théorème moins précis 2.1 du chapitre 3. K_n étant construit, on considère un recouvrement ouvert fini de K_n par des disques ouverts B_j ; $j \in J \subset \mathbf{N}$. On pose $K_{n+1} = \bigcup_{j \in J} \bar{B}_j$; c'est une réunion finie de compacts, donc un compact, en outre $K_{n+1} = \bigcup_{j \in J} B_j \supset K_n$. □

2.1.2. Soit (K_j) une exhaustion de D ; alors $K_j \subset \hat{K}_j$ et, d'après 1.5.2, $(\hat{K}_j)$ est une exhaustion de D.

2.2. Théorème. — ***Soient D un ouvert de $\mathbf{C}$, $\omega = f\,\mathrm{d}\bar{z}$ une forme différentielle C^1 donnée dans D, alors il existe une fonction g, de classe C^1 dans D, telle que $\mathrm{d}''g = \omega$; g est déterminée à l'addition près d'une fonction holomorphe dans D.***

Démonstration. — Soit (K_j) une exhaustion de D par des compacts tels que $K_j = \hat{K}_j$. Soit (ψ_n) une suite de fonctions C^∞ dans D telle que $\mathrm{spt}\,\psi_n \subset K_{n+1}$, $\psi_n | K_n = 1$, $n \geqq 1$; $\psi_n f$ est C^1 dans D, à support compact contenu dans K_{n+1}. Alors la démonstration du théorème 2.5 du chapitre 2(*) s'adapte ici en remplaçant le disque B_n par

(*) Les notations de 2.5 du chapitre 2 sont différentes : les symboles f et g sont échangés.

$\mathring{K}_n$, le théorème 5.3.2 par 5.3.3 du chapitre 1 et l'approximation sur $\bar{B}_{n-1}$ de la fonction holomorphe $g_{n+1}-\tilde{g}_n$ sur B_n à l'aide d'une fonction P_n holomorphe sur B_{n+1} par l'utilisation du théorème de Runge pour le compact K_{n-1} de $\mathring{K}_{n+1}$. □

3. Théorème de Mittag—Leffler dans un ouvert de C

3.1. Problèmes

3.1.1. Soient D un ouvert de $\mathbf{C}$ et $S=\{z_j\in D\ ;\ j\in\mathbf{N}\}$ un ensemble discret de points distincts de D ; pour tout $j\in\mathbf{N}$, soit f_j une fonction méromorphe définie sur un voisinage V_j de z_j ne contenant pas de point de S différent de z_j, ayant z_j pour seul pôle, alors il existe $n_j\in\mathbf{N}^*$ tel que $f_j=\sum_{k=1}^{n_j} A_{jk}(z-z_j)^{-k}+h_j$ où $A_{jk}\in\mathbf{C}$ et h_j est une fonction holomorphe dans V_j.

3.1.2. Problème I

Trouver une fonction méromorphe f dans D, holomorphe dans $D\setminus S$, telle que, pour tout $j\in\mathbf{N}$, $f-f_j$ soit holomorphe sur V_j.

Ce problème équivaut au suivant : soit $(U_j)_{j\in I}$ un recouvrement ouvert de D, pour tout $j\in I$, on donne $f_j\in\mathscr{M}(U_j)$ et on suppose que, pour tout $(j,k)\in I^2$ tel que $U_j\cap U_k\neq\emptyset$, on ait $f_j-f_k\in\mathscr{O}(U_j\cap U_k)$. Trouver $f\in\mathscr{M}(D)$ telle que $f|U_j-f_j\in\mathscr{O}(U_j)$.

Remarquons que, si f existe et si $g_j=-f|U_j+f_j$, alors $f_j-f_k=g_{jk}=g_j-g_k\in\mathscr{O}(U_j\cap U_k)$. Réciproquement, s'il existe une famille $(g_j)_{j\in I}$, $g_j\in\mathscr{O}(U_j)$ telle que : $g_j-g_k=g_{jk}$ sur $U_j\cap U_k$, la fonction f_j-g_j est la restriction à U_j d'une fonction méromorphe f sur D. De sorte que notre problème est un cas particulier du suivant :

3.1.3. Problème II

Etant donné un recouvrement ouvert $(U_j)_{j\in I}$ de D et une famille de fonctions $(g_{jk})_{(j,k)\in I^2}$ satisfaisant à la condition suivante :

pour tout couple $(j,k)\in I^2$ tel que $U_j\cap U_k\neq\emptyset$, on a $g_{jk}\in\mathscr{O}(U_j\cap U_k)$;

$$g_{jk}=-g_{kj}; \tag{3.1}$$

pour tout triple $(j,k,l)\in I^3$ tel que $U_j\cap U_k\cap U_l\neq\emptyset$, on a

$$g_{jk}+g_{kl}+g_{lj}=0 \quad \textit{sur} \quad U_j\cap U_k\cap U_l, \tag{3.2}$$

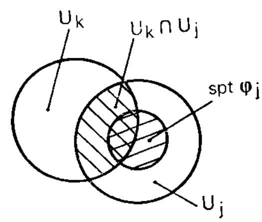
trouver une famille $(g_j)_{j\in I}$ telle que $g_j\in\mathscr{O}(U_j)$ et $g_j-g_k=g_{jk}$ sur $U_j\cap U_k\neq\emptyset$.

3.2. Théorème. — ***Pour tout ouvert D de C, le problème II a une solution.***

Démonstration. — Soit (φ_j) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_j). Choisissons un ouvert U_k du recouvrement et soit j tel que $U_k \cap U_j \neq \emptyset$ alors g_{kj} est holomorphe sur $U_k \cap U_j$; la fonction $\varphi_j g_{kj}$ est définie et C^∞ sur $U_k \cap U_j$, son support ne rencontre pas $U_k \setminus U_k \cap U_j$ qui est fermé dans U_k, la fonction $\varphi_j g_{kj}$ se prolonge donc par 0 à U_k tout entier en une fonction C^∞ que l'on note encore $\varphi_j g_{kj}$ soit $J = \{j \; ; \; U_j \cap U_k \neq \emptyset\}$, alors $h_k = \sum_{j \in J} \varphi_j g_{kj} = \sum_{j \in I} \varphi_j g_{kj}$ est une somme finie puisque la famille $(\operatorname{spt} \varphi_j)_{j \in I}$ est localement finie, donc h_k est C^∞ sur U_k. De plus, pour tout $l \in J$, sur $U_k \cap U_l$, on a :

$$h_k - h_l = \sum_{j \in I} \varphi_j g_{kj} - \sum_{j \in I} \varphi_j g_{lj} = \left(\sum_{j \in I} \varphi_j\right)(g_{kj} + g_{jl}) = g_{kj} + g_{jl} = g_{kl}$$

d'après (3.1), (3.2) et le fait que $(\varphi_j)_{j \in I}$ est une partition de l'unité.



g_{kl} étant holomorphe, on a $\partial h_k / \partial \bar{z} = \partial h_l / \partial \bar{z}$, donc il existe une fonction ψ C^∞ sur D telle que, pour tout $k \in I$, on ait $\partial h_k / \partial \bar{z} = \psi | U_k$. D'après le théorème 2.2, il existe une fonction v C^1 sur D telle que $\partial v / \partial \bar{z} = \psi$; en fait, comme on le voit en reprenant la démonstration de 2.2, ψ étant C^∞, il en est de même de v. Pour tout $k \in I$, on a $\partial h_k / \partial \bar{z} - \partial v / \partial \bar{z} = 0$ sur U_k, donc $g_k = h_k - v$ est holomorphe sur U_k et, sur $U_k \cap U_l \neq \emptyset$, on a $g_k - g_l = h_k - h_l = g_{kl}$. □

3.3. Corollaire (théorème de Mittag—Leffler). — ***Sur tout ouvert D de C, le problème I a une solution.*** □

3.4. Remarque. — L'outil essentiel de la démonstration du théorème 3.2 est le théorème d'approximation de Runge qui intervient par l'intermédiaire du théorème 2.2 ; on peut démontrer 3.3 sans utiliser 2.2 comme on l'a fait dans le cas particulier $D = \mathbf{C}$ (ch. 3, 4.3).

4. Théorème de Weierstrass dans un ouvert D de $\mathbf{C}$

4.1. Diviseur

On appelle *diviseur (entier)* de D toute 0-chaîne localement finie à coefficients entiers ; un diviseur Δ a pour expression

(4.1) $$\Delta = \sum_{j \in J} n_j z_j, \quad \text{où} \quad z_j \in D,$$

l'ensemble $|\Delta| = (z_j)_{j \in I}$, *support* du diviseur est discret et $n_j \in \mathbf{Z}$.

On désigne par $\mathscr{M}^*(D)$ le groupe multiplicatif des fonctions méromorphes sur D, différentes de 0 sur toute composante connexe de D ; soit $f\in\mathscr{M}^*(D)$ et soient $Z=(z_j)_{j\in J}$; $P=(z'_k)_{k\in K}$ l'ensemble des zéros et des pôles de f, n_j la multiplicité du zéro z_j, n'_k la multiplicité du pôle z'_k ; les ensembles Z et P sont discrets, alors $(f)=\sum_{j\in J} n_j z_j-\sum_{k\in K} n'_k z'_k$ est un diviseur appelé le *diviseur de f*. Etant donné un diviseur Δ de D, on dit que $f\in\mathscr{M}^*(D)$ est *solution de Δ* si $(f)=\Delta$. Dans les notations de la formule (4.1) on pose $D_\Delta=\{z\in D\ ;\ z\neq z_j,\ j\in I \text{ et } n_j<0\}$; on appelle *solution faible de Δ* une fonction g, C^∞ sur D_Δ, et telle que, pour tout $j\in I$, il existe un disque U centré en z_j, contenu dans D, disjoint de $|\Delta|\setminus\{z_j\}$ et une fonction ψ, C^∞ sur U, $\psi(z_j)\neq 0$ telle que

$$g(z)=\psi(z)(z-z_j)^{n_j} \tag{4.2}$$

sur $U\cap D_\Delta$. Soit $\mathscr{D}(D)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans D.

4.2. Lemme. — ***Soient z_1, z_2 deux points distincts de D et f une solution faible de $\Delta=z_2-z_1$, alors, pour toute $\varphi\in\mathscr{D}(D)$, on a :***

$$(1/2\pi i)\int_D \frac{df}{f}\wedge\varphi=\varphi(z_2)-\varphi(z_1).$$

DÉMONSTRATION. — $\dfrac{df}{f}\wedge d\varphi$ est localement intégrable d'après 5.4. du chapitre 2. Soit U_j un disque contenu dans D centré en z_j $(j=1,2)$ avec $U_1\cap U_2=\emptyset$ et tel que (4.2) soit valide sur U_j. Soient $\varphi_j\in\mathscr{D}(U_j)$ $(j=1,2)$ égale à 1 au voisinage de z_j, $D'=D\setminus\{z_1\}\cup\{z_2\}$ et $\varphi_0=\varphi-\varphi_1\varphi-\varphi_2\varphi$; alors $\varphi_0\in\mathscr{D}(D')$ et $\int_D\dfrac{df}{f}\wedge d\varphi_0=$ $=-\int_{D'} d\left(\dfrac{df}{f}\wedge\varphi_0\right)=0$, d'après la formule de Stokes. De plus

$$\begin{aligned}\int_D\frac{df}{f}\wedge d(\varphi_j\varphi)&=\int_{U_j}\frac{df}{f}\wedge d(\varphi_j\varphi)=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|z-z_j|\geq\varepsilon} d\left(\varphi_j\varphi\frac{df}{f}\right)=\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|z-z_j|=\varepsilon}\varphi_j\varphi\frac{df}{f}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|z-z_j|=\varepsilon}(-1)^j\varphi_j\varphi\frac{d(z-z_j)}{z-z_j}=\\&=2\pi i\,(-1)^j\varphi_j\varphi(z_j)=2\pi i(-1)^j\varphi(z_j),\quad j=1,2.\quad\square\end{aligned}$$

4.3. Lemme. — ***Soient c un arc différentiable à support compact dans D et U un disque ouvert borné de D contenant* spt *c. Alors il existe une solution faible f du diviseur $bc=b-a$ telle que***

(i) $f|D\setminus U=1$;

(ii) ***pour tout*** $\omega\in\mathscr{E}^1(D)$, $d\omega=0$, ***on ait*** $\int_c\omega=(1/2\pi i)\int_D\dfrac{df}{f}\wedge\omega.$

DÉMONSTRATION. — Soient U' un disque ouvert relativement compact dans U et contenant spt c, $\psi\in\mathscr{D}(U)$ égale à 1 sur U',

$$f_0=\begin{cases}\exp\psi\log[(z-b)(z-a)^{-1}] & \text{pour } z\in U\setminus U'\\ (z-b)(z-a)^{-1} & \text{pour } z\in U'.\end{cases} \tag{4.3}$$

Le support de ψ étant un compact de U, la fonction f_0 s'étend en une fonction f, C^∞ sur $D\setminus\{a\}$, égale à 1 sur $D\setminus U$; d'après (4.3), f est une solution faible du diviseur bc.

Soit $\omega\in\mathscr{E}^1(D)$; $d\omega=0$; U étant un disque relativement compact de D, d'après le lemme de Poincaré (ch. 1, 2.8.4), il existe $\varphi\in\mathscr{D}(D)$ telle que $\omega=d\varphi$ sur U, alors

$$(1/2\pi i)\int_D \frac{df}{f}\wedge\omega = (1/2\pi i)\int_U \frac{df}{f}\wedge\omega = (1/2\pi i)\int_D \frac{df}{f}\wedge d\varphi = \varphi(b)-\varphi(a)$$

d'après 4.2,

$$= \int_c \omega \quad \text{d'après la formule de Stokes.} \quad \square$$

4.4. Lemme. — *Tout diviseur Δ de D a une solution faible.*

DÉMONSTRATION. — Soit $(K_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ une exhaustion de D telle que $K_j=\hat{K}_j$.

Pour $a_0\in D\setminus K_j$, montrons qu'il existe une solution faible de $\Delta=a_0$ telle que $\varphi|K_j=1$. K_j étant holomorphiquement convexe, d'après 1.5.2, a_0 appartient à une composante connexe U non relativement compacte de $D\setminus K_j$, alors il existe $a_1\in U\setminus K_{j+1}$ et un arc différentiable c_0 joignant a_1 à a_0 (ch. 1, 2.8). D'après le lemme 4.3, il existe une solution faible f_0 de diviseur bc_0 avec $f_0|K_j=1$. De la même façon, on établit, par récurrence, l'existence de points $a_\nu\in D-K_{j+\nu}$, $\nu\in\mathbf{N}$, d'arcs c_ν dans $D\setminus K_{j+\nu}$ joignant $a_{\nu+1}$ à a_ν et de solutions faibles f_ν de diviseurs $bc_\nu=a_\nu-a_{\nu+1}$, telles que $f_\nu|K_{j+\nu}=1$, alors le produit $f_0\cdot f_1\ldots f_n$ est une solution faible du diviseur a_0-a_{n+1}. Le produit infini $f=\prod_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ converge puisque, sur tout compact de D, il existe seulement un nombre fini de facteurs différents de la constante 1, donc f est une solution faible du diviseur a_0, égale à 1 sur K_ν. En faisant un produit de telles fonctions ou de leurs inverses, en nombre fini, on obtient une solution faible de tout diviseur Δ de D tel que $|\Delta|$ soit fini et que $|\Delta|\cap K_j=\emptyset$.

Soit Δ un diviseur quelconque de D, alors $\Delta=\sum_{n\in\mathbf{N}}\Delta_\nu$ avec $K_0=\emptyset$, $|\Delta_\nu|\subset K_{\nu+1}\setminus K_\nu$; $|\Delta|$ étant localement fini, $|\Delta_\nu|$ est fini, donc il existe une solution faible g_ν de Δ_ν avec $g_\nu|K_\nu=1$; le produit infini $g=\prod_{\nu=0}^{\infty} g_\nu$ est une solution faible de Δ. $\square$

4.5. Théorème (Weierstrass). — *Soit $\Delta=\sum_{\nu\in\mathbf{N}} n_\nu z_\nu$ un diviseur de D, alors il existe une fonction méromorphe $f\in\mathscr{M}^*(D)$ solution de Δ.*

DÉMONSTRATION. — Pour tout ouvert U de D, on désigne par $\mathcal{O}^*(U)$ le groupe multiplicatif des fonctions holomorphes sans zéro sur U. Soit U_ν un disque ouvert contenu dans D, centré en $z_\nu\in|\Delta|$ et disjoint de $|\Delta|\setminus\{z_\nu\}$, alors la fonction méromorphe $f_\nu=(z-z_\nu)^{n_\nu}$ est solution de la restriction de Δ à U_ν. Réciproquement, la donnée des f_ν permet de reconstituer le diviseur Δ. La donnée de Δ est donc équivalente à la suivante : soit $(U_j)_{j\in I}$ un recouvrement de D par des disques ouverts ; pour tout $j\in I$, on donne $f_j\in\mathscr{M}^*(U_j)$ telle que, sur $U_j\cap U_k\neq\emptyset$, $\dfrac{f_j}{f_k}=f_{jk}\in\mathcal{O}^*(U_j\cap U_k)$.
Il s'agit de trouver une fonction méromorphe $f\in\mathscr{M}^*(D)$ telle que, sur tout U_j,

$\dfrac{f_j}{f}=h_j\in\mathcal{O}^*(U_j)$; il suffit, pour cela, de trouver $h_j\in\mathcal{O}^*(U_j)$ telle que

$$\frac{h_j}{h_k}=f_{jk} \quad \text{sur} \quad U_j\cap U_k\neq\emptyset. \tag{4.4}$$

D'après le lemme 4.4, Δ a une solution faible g, i.e., sur $U_j\cap U_k\neq\emptyset$, on a : $f_{jk}=$ $=\dfrac{g_j}{g_k}$ avec $g_j=\dfrac{f_j}{g}$; $g_j\in\mathscr{E}(U_j)$ et est sans zéro ; comme U_j et $U_j\cap U_k\neq\emptyset$ sont simplement connexes, pour une détermination du logarithme, soit $\varphi_j=\log g_j$; $\varphi_j-\varphi_k=\varphi_{jk}$ avec $e^{\varphi_{jk}}=f_{jk}$; donc $\varphi_{jk}=\log f_{jk}$, pour une détermination du logarithme, est holomorphe sur $U_j\cap U_k$; $\mathrm{d}''\varphi_j-\mathrm{d}''\varphi_k=\mathrm{d}''\varphi_{jk}=0$ sur $U_j\cap U_k$, alors il existe une 1-forme $\xi=\beta\,\mathrm{d}\bar{z}$, C^∞ sur D, telle que $\mathrm{d}''\varphi_j=\xi|U_j$ pour $j\in I$; d'après le théorème 2.2, il existe une fonction α, C^∞ sur D, telle que $\xi=\mathrm{d}''\alpha$. Soit $\psi_j=\varphi_j-\alpha$, on a $\mathrm{d}''\psi_j=0$ et $\psi_j-\psi_k=\varphi_{jk}$; $h_j=\exp\psi_j$ est holomorphe et satisfait à (4.4). □

5 SURFACES DE RIEMANN ÉTALÉES

Etant donné un germe φ de fonction holomorphe en un point d'une surface de Riemann X, on cherche à prolonger φ en une fonction holomorphe sur une surface de Riemann Y aussi grande que possible. Pour résoudre ce problème dit de prolongement analytique, on a besoin des notions topologiques d'homotopie, de revêtement et de faisceau ; on a aussi besoin d'approfondir les propriétés d'applications holomorphes de surfaces de Riemann (n° 2). Ce programme est traité en alternant les notions et propriétés topologiques (paragraphes impairs) et les propriétés des applications holomorphes. Le prolongement analytique, en général, est défini et étudié au n° 4 ; Y est appelée la surface de Riemann du germe φ, elle est dite étalée au-dessus de X. Le cas d'une fonction algébrique sur X, c'est-à-dire d'une solution d'une équation algébrique à coefficients méromorphes dans X, est traité au n° 6 ; en particulier on montre que la surface de Riemann d'une fonction algébrique sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est compacte et on compare la relation géométrique entre X et Y à la relation algébrique des corps de fonctions méromorphes sur X et sur Y.

1. Homéomorphismes locaux ; revêtements topologiques

1.1. Homéomorphismes locaux ; relèvement d'arcs

1.1.1. Soit $p : Y \to X$ une application continue d'espaces topologiques. Pour tout $x \in X$, $p^{-1}(x)$ est appelé *la fibre de p en x*.

$p : Y \to X$ et $q : Z \to X$ étant deux applications continues, toute application continue $f : Y \to Z$ telle que $q \circ f = p$ est dite application continue de Y dans Z *au-dessus de X*, ou *application fibrée* : elle applique la fibre de p en x dans la fibre de q en x.

Une application continue $p : Y \to X$ est dite *discrète* si, pour tout $x \in X$, la fibre $p^{-1}(x)$ est discrète.

1.1.2. Soient $p : Y \to X$ et $f : Z \to X$ deux applications continues. On appelle *relèvement de f à Y (par rapport à p)* toute application continue $g : Z \to Y$ telle que $f = p \circ g$; on dit encore que g est une *factorisation de f par p* ; en outre, g est une application fibrée.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

1.1.3. Une application $p : Y \to X$ d'espaces topologiques est appelée un *homéomorphisme local* si, pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert V_y de y dans Y tel que $p|V_y$ soit un homéomorphisme de V_y sur l'ouvert $p(V_y)$. Alors p est une application ouverte, i.e. l'image d'un ouvert de Y par p est un ouvert de X.

1.1.4. **Théorème (unicité du relèvement).** — ***Soient X et Y deux espaces topologiques séparés, $p : Y \to X$ un homéomorphisme local, Z un espace topologique connexe et $f : Z \to X$ une application continue. Si $g_1, g_2 : Z \to Y$ sont deux relèvements de f tels que, pour un point $z_0 \in Z$, $g_1(z_0) = g_2(z_0)$, alors $g_1 = g_2$.***

DÉMONSTRATION. — Soit $T = \{z \in Z ; g_1(z) = g_2(z)\}$. Z étant connexe, il suffit de montrer que T est non vide, ouvert et fermé.

$T \neq \emptyset$ car $z_0 \in T$. Soit Δ la diagonale de $Y \times Y$; Y étant séparé, Δ est fermé et (g_1, g_2) étant continue, $T = (g_1, g_2)^{-1}(\Delta)$ est fermé.

Soit $z \in T$, on pose $y = g_1(z) = g_2(z)$. Comme p est un homéomorphisme local, il existe un voisinage V de y tel que $p|V : V \to U = p(V)$ soit un homéomorphisme sur un voisinage de $p(y) = f(z)$; g_1 et g_2 étant continues, il existe un voisinage W de z tel que $g_j(W) \subset V$; $j = 1, 2$, $\varphi = (p|V)^{-1}$ est un homéomorphisme $U \to V$; $p \circ g_j = f$ entraîne $g_j|W = \varphi \circ (f|W)$; $j = 1, 2$, alors $g_1|W = g_2|W$, i.e. $W \subset T$, donc T est ouvert. □

1.1.5. **Théorème (relèvement d'arcs).** — ***Soit $p : Y \to X$ un homéomorphisme local d'espaces topologiques séparés. Soient $a, b \in X$; $\hat{a} \in p^{-1}(a)$; $\Gamma : I \times I \to X$ une application continue telle que $\Gamma(0, s) = a$; $\Gamma(1, s) = b$; $s \in I$; on pose $\gamma_s(t) = \Gamma(t, s)$.***

Si tout arc γ_s peut être relevé en un arc $\hat{\gamma}_s$ d'origine $\hat{a}$, alors $\hat{\gamma}_0$ et $\hat{\gamma}_1$ ont même extrémité et sont homotopes.

DÉMONSTRATION. — On pose $\hat{\Gamma} : I \times I \to Y$ telle que $\hat{\Gamma}(t, s) = \hat{\gamma}_s(t)$.

1.1.6. **Lemme.** — ***$\hat{\Gamma}$ est continue sur $I \times I$.***

$\Gamma = p \circ \hat{\Gamma}$; $\Gamma(\{1\} \times I) = \{b\}$, donc $\hat{\Gamma}(\{1\} \times I) \subset p^{-1}(b)$; $\{1\} \times I$ étant connexe et $\hat{\Gamma}$ continue, $\hat{\Gamma}(\{1\} \times I)$ est connexe ; $p^{-1}(b)$ est discret, donc $\hat{\Gamma}(\{1\} \times I)$ est un seul point $\hat{b} \in p^{-1}(b)$: les arcs $\hat{\gamma}_s$ ont même extrémité $\hat{b}$ et $\hat{\gamma}_0$ et $\hat{\gamma}_1$ sont homotopes. □

1.1.7. DÉMONSTRATION DU LEMME. —

(i) Soit V un voisinage de $\hat{a}$ tel que $p|V : V \to U = p(V)$ soit un homéomorphisme d'inverse $\varphi : U \to V$.

Puisque $\Gamma(\{0\} \times I) = \{a\}$ et que Γ est continue, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\Gamma([0, \varepsilon_0[\times I) \subset U$. Par le théorème d'unicité du relèvement (1.1.4), pour tout $s \in I$: on a :

$$\hat{\gamma}_s|[0, \varepsilon_0[= \varphi \circ (\gamma_s|[0, \varepsilon_0[).$$

Donc $\hat{\Gamma} = \varphi \circ \Gamma$ sur $[0, \varepsilon_0[\times I$ ce qui implique la continuité de $\hat{\Gamma}$ sur l'ouvert $[0, \varepsilon_0[\times I$ de $I \times I$.

(ii) Montrons que $\hat{\Gamma}$ est continue sur $I \times I$. Soit $(t_0, \sigma) \in I \times I$ un point en lequel $\hat{\Gamma}$ n'est pas continue et soit $\tau = \inf_{t \in I} [\hat{\Gamma}$ non continue en $(t, \sigma)]$, on a : $\tau \geqslant \varepsilon_0$.

Posons $x=\Gamma(\tau,\sigma)$; $\hat{x}=\hat{\Gamma}(\tau,\sigma)=\hat{\gamma}_\sigma(\tau)$. Il existe un voisinage V de $\hat{x}$ tel que $p|V : V\to U=p(V)$ soit un homéomorphisme ; U est un voisinage de x ; soit $\varphi : U\to V$ l'homéomorphisme inverse de $p|V$. L'application Γ étant continue, il existe des intervalles $I_\varepsilon(\tau)$ et $I_\varepsilon(\sigma)$ centrés en τ et en σ respectivement, de longueur 2ε, tels que $\Gamma\big(I_\varepsilon(\tau)\times I_\varepsilon(\sigma)\big)\subset U$; en particulier, on a $\gamma_\sigma\big(I_\varepsilon(\tau)\big)\subset U$ et, par unicité du relèvement des arcs

$$\hat{\gamma}_\sigma|I_\varepsilon(\tau) = \varphi\circ\big(\gamma_\sigma|I_\varepsilon(\tau)\big). \tag{1.1}$$

Soit $\tau_1\in I_\varepsilon(\tau)$; $\tau_1<\tau$; alors, par définition de $\hat{\Gamma}$, on a : $\hat{\Gamma}(\tau_1,\sigma)=\hat{\gamma}_\sigma(\tau_1)\in V$, d'après (1.1).

Puisque $\hat{\Gamma}$ est continue en (τ_1,σ), il existe $0<\delta\leqslant\varepsilon$ tel que, pour $s\in I_\delta(\sigma)$, on ait $\hat{\Gamma}(\tau_1,s)=\hat{\gamma}_s(\tau_1)\in V$.

Par l'unicité du relèvement, pour $s\in I_\delta(\sigma)$, on a : $\hat{\gamma}_s|I_\varepsilon(\tau)=\varphi\circ\gamma_s|I_\varepsilon(\tau)$, donc $\hat{\Gamma}=\varphi\circ\Gamma$ sur $I_\varepsilon(\tau)\times I_\delta(\sigma)$, alors $\hat{\Gamma}$ est continu au point (τ,σ) ce qui contredit la définition de τ, donc l'existence de t_0, i.e. $\hat{\Gamma}$ est continue sur $I\times I$. □

1.2. Revêtements topologiques

1.2.1. Une application continue $p : Y\to X$ d'espaces topologiques est appelée un *revêtement* si la condition suivante est réalisée : pour tout $x\in X$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $p^{-1}(U)=\bigcup_{j\in J} V_j$ où les V_j sont des ouverts disjoints de Y tels que, pour tout $j\in J$, $p|V_j\to U$ soit un homéomorphisme.

En particulier, p est un homéomorphisme local. On désigne parfois le revêtement p par le triplet (Y,p,X).

1.2.2. Exemples de revêtements topologiques

(a) Soient

$$k\in\mathbf{N}^* \quad \text{et} \quad p : \mathbf{C}^*\to\mathbf{C}^*$$
$$z\mapsto z^k$$

p est un homéomorphisme local : pour $b\in\mathbf{C}^*$ et $a=p(b)$, il existe des voisinages ouverts V_0 de b et U de a tels que $p|V_0 : V_0\to U$ soit un homéomorphisme. Soit ω une racine k-ième primitive de l'unité, alors

$$p^{-1}(U)=\bigcup_{j=0}^{k-1} V_j \quad \text{avec} \quad V_j=\omega^j V_0.$$

Si $z\in V_{j_1}\cap V_{j_2}$, on a $\omega^{j_1-j_2}=1$, ce qui implique $j_1=j_2$, donc les V_j $(j=0,\dots,p-1)$ sont disjoints ; ils sont homéomorphes à U par p.

(b) Considérons l'application exponentielle $\exp : \mathbf{C}\to\mathbf{C}^*$; soit $a=\exp b$; exp est un homéomorphisme local, donc il existe un voisinage ouvert V_0 de b et un voisinage ouvert U de a tels que $\exp|V_0 : V_0 \to U$ soit un homéomorphisme. Alors

$$\exp^{-1}(U) = \bigcup_{n\in\mathbf{Z}} V_n \quad \text{avec} \quad V_n = 2\pi i n + V_0$$

et on vérifie, comme en (a), que les V_n sont disjoints deux à deux.

(c) Soient $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$ deux éléments **R**-linéairement indépendants, alors $\Gamma = \omega_1\mathbf{Z} + \omega_2\mathbf{Z}$ est un sous-groupe discret, fermé du groupe topologique additif **C**. On considère le groupe topologique quotient $\mathbf{T} = \mathbf{C}/\Gamma$ et la projection (continue) $\Pi : \mathbf{C} \to \mathbf{T}$. Γ étant fermé, $\mathbf{C}/\Gamma$ est séparé, en outre c'est l'image, par l'application Π du compact $\{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 \ ; \ \lambda, \mu \in [0, 1]\}$ de **C**, donc **T** est *compact*. Soit $a \in \mathbf{T}$ et $b \in \Pi^{-1}(a)$, considérons l'ouvert V de **C** égal à

$$\left\{b + \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \ ; \ -\frac{1}{2} < \lambda_j < \frac{1}{2} \ ; \ j = 1, 2\right\} ;$$

$\Pi|V$ est un homéomorphisme de V sur le voisinage ouvert $U = \Pi(V)$ de a dans **T** ; de plus $z - b = (\Pi|V)^{-1} : U \to V$ est une carte holomorphe de **T** centrée en a : **T** *est une surface de Riemann.*

Soient $S^1 = \{z \in \mathbf{C} \ ; \ |z| = 1\}$ le cercle unité, Π' l'application

$$\mathbf{C} \to S^1 \times S^1$$
$$\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \mapsto (e^{2\Pi i\lambda_1}, e^{2\Pi i\lambda_2}),$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$. Alors les applications Π et Π' définissent l'homéomorphisme

$$\psi : \mathbf{T} \to S^1 \times S^1$$

par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[d, "\Pi"'] \arrow[dr, "\Pi'"] & \\ \mathbf{T} \arrow[r, dotted, "\psi"] & S^1 \times S^1 \end{tikzcd}$$

d'où le nom de *tore complexe* donné à **T**.

1.2.3. Contre-exemples

(a) Soit $j : Y \to X$ l'injection canonique d'un ouvert Y d'un espace topologique X, différent de X ; alors j est un homéomorphisme local bijectif de Y sur son image, c'est id_Y, mais, pour tout $x \in \overline{Y} \setminus Y$ et tout voisinage ouvert U de x dans X, $j^{-1}(U) \cap Y$ est un ouvert de Y qui n'est pas homéomorphe à U par j ; donc j n'est pas un revêtement.

(b) Soit $f : Y \to X$ un homéomorphisme local surjectif et soit $(y_j)_{j\in J}$ la fibre de $x \in X$; tout point y_j a un voisinage ouvert V_j' tel que $f|V_j'$ soit un homéomorphisme : $V_j' \to f(V_j') = U_j$. Si J est fini, alors $\bigcap_{j\in J} U_j$ est un ouvert U et les $V_j = V_j' \cap f^{-1}(U)$ sont les ouverts tels que $f^{-1}(U) = \bigcup_{j\in J} V_j$; si pour tout x les ouverts V_j sont disjoints, f est un revêtement. Mais si J est infini, pour qu'il en soit ainsi, il faut que $\bigcap_{j\in J} U_j$ soit un ouvert ce qui n'est pas toujours réalisé.

1.2.4. On dit qu'une application continue $p : Y \to X$ a la propriété de *relever les arcs* si, pour tout arc $\gamma : [0, 1] \to X$, pour tout $y_0 \in Y$ tel que $p(y_0) = \gamma(0)$, il existe un relèvement $\hat{\gamma} : [0, 1] \to Y$ de γ tel que $\hat{\gamma}(0) = y_0$; $\hat{\gamma}$ est un arc de Y.

1.2.5. **Théorème. — *Tout revêtement $p : Y \to X$ relève les arcs.***

DÉMONSTRATION. — Soient $\gamma : [0, 1] \to X$ un arc, $y_0 \in Y$ tel que $p(y_0) = \gamma(0)$; $[0, 1] = I$ étant compact, il existe une suite finie de réels $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ de I et des ouverts $U_k \subset X$, $k = 1, \ldots, n$ tels que

(i) $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$

(ii) $p^{-1}(U_k) = \bigcup_{j \in J_k} V_{kj}$, où V_{kj} est un ouvert de Y tel que $p|V_{kj} : V_{kj} \to U_k$ soit un homéomorphisme.

Supposons qu'il existe un relèvement $\hat{\gamma}|[0, t_{k-1}]$ de $\gamma|[0, t_{k-1}]$ avec $\hat{\gamma}(0) = y_0$. Alors il existe $j \in J_k$ tel que $\hat{\gamma}(t_{k-1}) \in V_{kj}$; soit φ l'homéomorphisme inverse de $p|V_{kj} : V_{kj} \to U_k$; alors $\hat{\gamma}|[t_{k-1}, t_k] = \varphi \circ (\gamma|[t_{k-1}, t_k])$ relève $\gamma|[t_{k-1}, t_k]$ donc $\hat{\gamma}|[0, t_k]$ relève $\gamma|[0, t_k]$. L'hypothèse de récurrence est satisfaite pour $k = 1$, d'où la conclusion. □

1.2.6. **Théorème. — *Soient X, Y deux espaces topologiques séparés, X étant connexe par arcs et $p : Y \to X$ un revêtement. Alors le cardinal $\sharp p^{-1}(x)$ est indépendant de $x \in X$; en particulier, si $Y \neq \emptyset$, p est surjectif.* $\sharp p^{-1}(x)$ est appelé *le nombre de feuillets de p.***

DÉMONSTRATION. — Soient $x_0, x_1 \in X$, $x_0 \neq x_1$ et $\gamma : [0, 1] \to X$ un arc joignant x_0 à x_1. Soit $y \in p^{-1}(x_0)$, alors il existe un relèvement $\hat{\gamma} : [0, 1] \to Y$ tel que $\hat{\gamma}(0) = y$ d'après 1.2.5, unique d'après 1.1.4. Soit $\psi(y) = \hat{\gamma}(1) \in p^{-1}(x_1)$; en échangeant x_0 et x_1 et compte tenu de l'unicité du relèvement (1.1.4), on voit que ψ est bijectif. □

1.2.7. Complément sur les arcs continus

(a) Soient X un espace topologique, $a, b, c \in X$; $\gamma : I \to X$ un arc joignant a à b, $\delta : I \to X$ un arc joignant b à c dans X. L'*arc produit* $\gamma . \delta : I \to X$ est défini par :

$$(\gamma \cdot \delta)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) \ ; \ t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ \delta(2t-1) \ ; \ t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases} ; \quad \text{il joint } a \text{ à } c.$$

(b) *L'arc inverse* $\gamma^- : I \to X$ est défini par

$$\gamma^-(t) = \gamma(1-t) : t \in [0, 1].$$

(c) On vérifie immédiatement que, si $\gamma_1, \gamma_2 : I \to X$ sont des arcs homotopes joignant a à b, $\delta_1, \delta_2 : I \to X$ des arcs homotopes joignant b à c, alors $\gamma_1 . \delta_1$ et $\gamma_2 . \delta_2$ sont homotopes, γ_1^- et γ_2^- sont homotopes.

1.2.8. On dit qu'un espace topologique X est *localement connexe par arcs* si tout point de X a un système fondamental de voisinages connexes par arcs.

1.2.9. **Théorème (existence d'un relèvement).** — ***Soient $p : Y \to X$ un revêtement d'espaces séparés, Z un espace topologique localement connexe par arcs, connexe par arcs et simplement connexe et $f : Z \to X$ une application continue. Alors pour tout $z_0 \in Z$, pour tout $y_0 \in p^{-1}(f(z_0)) \subset Y$, il existe un relèvement unique $\hat{f} : Z \to Y$ de f à Y tel que $\hat{f}(z_0) = y_0$.***

Remarque. — Le théorème est valide — et sera démontré — en remplaçant l'hypothèse « p est un revêtement » par la suivante qui en est une conséquence d'après 1.2.1 et 1.2.5, « p est un homéomorphisme local et p a la propriété de relever les arcs ».

DÉMONSTRATION.

Définition de $\hat{f}$: Soit $z \in Z$ et $\gamma : I \to Z$ un arc joignant z_0 à z dans Z. Alors $\delta = f \circ \gamma$ est un arc de X joignant $f(z_0)$ à $f(z)$; soit $\hat{\delta} : I \to Y$ l'unique relèvement de δ d'origine y_0, on pose $\hat{f}(z) = \hat{\delta}(1)$. Soit γ_1 un arc de mêmes propriétés que γ, alors γ_1 et γ sont homotopes puisque Z est simplement connexe ; on montre immédiatement que δ et $\delta_1 = f \circ \gamma_1$ sont homotopes. Alors d'après le théorème de relèvement des arcs homotopes (1.1.5) $\hat{\delta}$ et $\hat{\delta}_1$ de même origine, ont même extrémité $\hat{\delta}(1)$; donc $\hat{f}(z)$ est indépendant de l'arc δ et définit une application $\hat{f} : Z \to Y$ telle que $f = p \circ \hat{f}$.

Continuité de $\hat{f}$: Soient $z \in Z$, $y = \hat{f}(z)$, V un voisinage de y dans Y, on va montrer qu'il existe un voisinage W de z dans Z tel que $\hat{f}(W) \subset V$. La projection p étant un homéomorphisme local, pour V assez petit, $p|V : V \to p(V) = U$ est un homéomorphisme d'inverse $\varphi : U \to V$; f étant continue, il existe un voisinage connexe par arcs, W de z dans Z tel que $f(W) \subset U$. Soient $z' \in W$ et γ' un arc de W joignant z à z', alors $\delta' = f \circ \gamma'$ a son image dans U, $\hat{\delta}' = \varphi \circ \delta'$ est un relèvement de δ' d'origine y, donc $\hat{\delta}.\hat{\delta}'$ est un relèvement de $\delta.\delta' = f \circ (\gamma.\gamma')$ d'origine y_0 et $\hat{f}(z') = (\hat{\delta}.\hat{\delta}')(1) = \hat{\delta}'(1) \in V$. □

1.2.10. Une application continue $q : Y \to X$ d'espaces localement compacts est dite *propre* si l'image réciproque par q d'un compact de X est un compact de Y.

1.2.11. **Théorème.** — ***Soit $p : Y \to X$ un homéomorphisme local propre d'espaces localement compacts. Alors p est un revêtement.***

1.2.12. **Lemme.** — ***Soit $p : Y \to X$ une application continue, discrète, propre d'espaces localement compacts. Alors***

(i) ***pour tout $x \in X$, $p^{-1}(x)$ est fini,***

(ii) ***pour tout $x \in X$, pour tout voisinage V de $p^{-1}(x)$, il existe un voisinage U de x tel que $p^{-1}(U) \subset V$.***

DÉMONSTRATION. —(i) p est propre et discrète et $\{x\}$ compact, donc $p^{-1}(x)$ est compact et discret.

(ii) V contient un ouvert contenant $p^{-1}(x)$, il suffit de supposer V ouvert ; $Y \setminus V$ est fermé ; p étant propre, $F = p(Y \setminus V)$ est fermé et ne contient pas x, donc $U = X \setminus F$

est un ouvert contenant x ; en outre $p^{-1}(U) \cap p^{-1}(F) = \emptyset$ et $p^{-1}(F) \supset Y \setminus V$ donc $p^{-1}(U) \subset V$. □

1.2.13. Démonstration de 1.2.11. — p étant un homéomorphisme local est discret ; d'après 1.2.12. (i) $p^{-1}(x) = \{y_1, \ldots, y_n\}$; $y_j \in Y$ $(j = 1, \ldots, n)$; de plus, il existe un voisinage ouvert W_j de y_j tel que $p|W_j : W_j \to U_j = p(W_j)$ soit un homéomorphisme ; Y étant séparé, on peut supposer les W_j disjoints. Alors $\bigcup_{j=1}^{n} W_j$ est un voisinage ouvert de $p^{-1}(x)$, donc (1.2.12. (ii)), il existe un voisinage ouvert U de x tel que $p^{-1}(U) \subset \bigcup_{j=1}^{n} W_j$; soit $V_j = W_j \cap p^{-1}(U)$, les V_j sont des ouverts disjoints et $p|V_j : V_j \to U$ est un homéomorphisme, pour $j = 1, \ldots, n$. □

2. Morphismes de surfaces de Riemann

2.1. Morphismes

2.1.1. Les applications holomorphes $f : X \to Y$ de surfaces de Riemann ont été définies en 4.4.1 du chapitre 2 ; on les appellera aussi *morphismes* (de surfaces de Riemann) ; une application biholomorphe est aussi appelée un isomorphisme (ch. 3, 5.3.3). A partir de propriétés des fonctions holomorphes dans un ouvert U de $\mathbf{C}$ qui sont invariantes par applications biholomorphes de la source et du but, donc par changement de cartes, on va établir des propriétés des morphismes de surfaces de Riemann.

2.1.2.* Théorème d'identité.** — ***Soient X une surface de Riemann connexe et $f_1, f_2 : X \to Y$ deux morphismes qui coïncident au voisinage d'un point x_0 de X, alors f_1 et f_2 coïncident sur X.

Démonstration. — Soit G l'ensemble des $x \in X$ ayant un voisinage ouvert W_x tel que $f_1|W_x = f_2|W_x$. D'après sa définition G est un ouvert et contient x_0. Soit $b \in \overline{G} \setminus G$; montrons que $b \in G$: soit (U, h) une carte de X telle que $b \in U$ connexe et telle qu'il existe une carte (V, k) de Y avec $f_j(U) \subset V$ $(j = 1, 2)$; alors les deux fonctions $f_j' = k \circ f_j \circ h^{-1} : h(U) \to k(V)$ coïncident sur l'ouvert non vide $h(U \cap G)$, donc sur l'ouvert connexe $h(U)$ de $\mathbf{C}$ d'après (ch. 2, 2.1.2), d'où $f_1|U = f_2|U$ et $b \in G$. L'ensemble G non vide, ouvert et fermé de X connexe, est égal à X. □

2.1.3.* Corollaire.** — ***Soient X une surface de Riemann connexe et $f_1, f_2 : X \to Y$ deux morphismes qui coïncident sur une partie A de X ayant un point limite x_0, alors f_1 et f_2 coïncident sur X.

Démonstration. — Il suffit de montrer que f_1 et f_2 coïncident sur un voisinage assez petit U de x_0 dans X, donc, en prenant des cartes, pour U ouvert connexe de $\mathbf{C}$, f_1 et f_2 fonctions holomorphes sur U ; f_1 et f_2 étant continues, on a $f_1(x_0) =$

$=f_2(x_0)$, alors $(A\cup\{x_0\})\cap U$ est non discret et contenu dans l'ensemble des zéros de f_1-f_2 sur U, d'où : $f_1-f_2=0$ sur U, d'après (ch. 2, 2.2.2). □

2.1.4. Théorème de prolongement. — ***Soient U un ouvert d'une surface de Riemann, $a\in U$ et $f\in\mathcal{O}(U\setminus\{a\})$ une fonction bornée au voisinage de a. Alors f a une extension unique holomorphe sur U.***

DÉMONSTRATION. — Il suffit d'établir le théorème dans le cas où U est le domaine d'une carte h ; le théorème est connu pour l'ouvert $h(U)$ de $\mathbf{C}$ et la fonction $f\circ h^{-1}$ holomorphe sur $h(U)\setminus h(a)$ (ch. 2, 4.3.3). □

2.1.5. Théorème. — ***Soit $f: X\to Y$ un morphisme non constant de surfaces de Riemann. Pour tout $a\in X$, il existe une carte (h, U) de X centrée en a, une carte (k, V) de Y centrée en $b=f(a)$, avec $f(U)\subset V$ et un entier $n\geqslant 1$ tel que l'application $F=k\circ f\circ h^{-1} : h(U)\to k(V)$ soit $z\mapsto F(z)=z^n$.***

DÉMONSTRATION. — Soient (h', U'), (k, V) deux cartes centrées en a et b resp. telles que $f(U')\subset V$ et soit ζ la coordonnée dans la carte h'. Alors

$$G = k\circ f\circ h'^{-1} : h'(U') \to k(V)$$

est telle que $G(0)=0$. D'après 5.2 du chapitre 3, il existe $n\in\mathbf{N}^*$ et une fonction λ holomorphe, sans zéro, sur un voisinage ouvert W' de 0 dans $h'(U')$ tels que : $G(\zeta)=\zeta^n\lambda^n(\zeta)$; l'application

$\alpha : W'\to W=\alpha(W')$

$\zeta\mapsto z=\zeta\lambda(\zeta)$ est un isomorphisme. Posons $U=h'^{-1}(W')$

et $h=\alpha\circ h'$; alors $F=k\circ f\circ h^{-1}=k\circ f\circ h'^{-1}\circ\alpha^{-1} : h(U)\to k(V)$

$z\mapsto z^n$ est la fonction cherchée. □

2.1.6. Corollaire. — ***Soient X une surface de Riemann connexe et $f : X\to Y$ un morphisme non constant. Alors f est une application ouverte.*** □

2.1.7. Corollaire. — ***Soit $f: X\to Y$ un morphisme injectif. Alors f est un isomorphisme de X sur $f(X)$.***

DÉMONSTRATION. — f injectif entraîne, par 2.1.5, que $n=1$ en tout point de X. Alors f est biholomorphe de X sur $f(X)$. □

2.1.8. Corollaire (principe du maximum). — ***Soient X une surface de Riemann connexe et $f: X\to\mathbf{C}$ une fonction holomorphe non constante. Alors $|f|$ n'atteint pas son maximum.***

DÉMONSTRATION. — Soit $a\in X$ en lequel $|f(x)|$ atteint son maximum M. Alors $f(X)\subset K=\{z\in\mathbf{C} ; |z|\leqslant M\}$; $f(X)$ étant ouvert (2.1.6), $f(X)\subset\mathring{K}$; d'après le choix de K, $f(a)\in K\setminus\mathring{K}$, contradiction. □

2.1.9. Théorème. — ***Soit $f : X\to Y$ un morphisme non constant de surfaces de Riemann connexes. Alors, si X est compacte, Y est aussi compacte et f est surjectif.***

DÉMONSTRATION. — $f(X)$ est ouvert (2.1.6), fermé car $f(X)$ est compact non vide ; Y étant connexe, $f(X)=Y$ compact. □

2.1.10. **Corollaire.** — ***Toute fonction holomorphe sur une surface de Riemann compacte connexe est constante.***

DÉMONSTRATION. — **C** n'étant pas compact, f est constante d'après 2.1.9. □

2.1.11. **Corollaire.** — ***Toute fonction méromorphe f différente de ∞ sur $\mathbf{P}^1=\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est rationnelle.***

DÉMONSTRATION. — f a un nombre fini de pôles, sinon $\mathbf{P}^1$ étant compact, l'ensemble des pôles aurait un point d'accumulation a ; a serait un pôle non isolé, donc $f\equiv\infty$ au voisinage de a ; $\mathbf{P}^1$ étant connexe, d'après 2.1.3, $f=\infty$ sur $\mathbf{P}^1$. On suppose que ∞ n'est pas un pôle de f, sinon on considère $1/f$. Soient $p_1, \ldots, p_n$ les pôles de f, $p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{C}$. Soit $h_\nu = \sum_{j=-k_\nu}^{-1} C_{\nu j}(z-p_\nu)^j$ la partie principale de f en p_ν ; d'après 4.4.3 du chapitre 2, h_ν s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbf{P}^1$; alors $f-\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu$ est holomorphe sur $\mathbf{P}^1$, donc constante d'après 2.1.10. □

2.2. Morphismes non ramifiés

Dans la suite, les surfaces de Riemann considérées sont supposées *connexes*.

2.2.1. **Théorème.** — ***Soit $p : Y \to X$ un morphisme non constant de surfaces de Riemann. Alors p est ouvert et discret.***

DÉMONSTRATION. — p est ouvert (2.1.6). Si pour $a \in X$, $p^{-1}(a)$ n'est pas discret, alors $p^{-1}(a)$ a un point d'accumulation, d'après le théorème d'identité (2.1.3), p est l'application constante : $Y \to \{a\}$. □

2.2.2. Si $p : Y \to X$ est un morphisme non constant, Y est appelée un *domaine (étalé) au-dessus de X.*

2.2.3. Soit $p : Y \to X$ un morphisme non constant de surfaces de Riemann, un point $y \in Y$ est dit *point de ramification de p* s'il n'existe pas de voisinage V de y tel que $p|V$ soit injectif ; p est alors dit *ramifié.*

Un morphisme sans point de ramification est dit *non ramifié.*

2.2.4. **Théorème.** — ***Soit $p : Y \to X$ un morphisme non constant de surfaces de Riemann ; alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :***

(a) ***p est non ramifié ;***

(b) ***p est un homéomorphisme local.***

DÉMONSTRATION. — (a)⇒(b) : soit $y \in Y$, alors il existe un voisinage V de y tel que $p|V$ soit injectif ; puisque p est continu et ouvert, $p|V$ est un homéomorphisme de V sur l'ouvert $p(V)$.

(b)$\Rightarrow$(a) : pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert V de y tel que $p|V$ soit un homéomorphisme : $V \to p(V)$, ouvert de X ; en particulier, $p|V$ est injectif donc y n'est pas un point de ramification. □

2.2.5. EXEMPLES.

(1) Domaine Y au dessus de X :

(a) Soit $Y = \mathbf{C}$; $X = \mathbf{C}^*$; $p = \exp$: $\underset{z \mapsto e^z}{\mathbf{C} \to \mathbf{C}^*}$; pour tout $u_0 \in \mathbf{C}^*$, dans tout disque B de $\mathbf{C}$ centré en u_0 et contenu dans $\mathbf{C}^*$, considérons une détermination de $\log u$, on a pour $u = e^z$, $\log u = z$. Alors l'identité $Y \to \mathbf{C}$ composée avec l'inverse locale log de p est une fonction $X \to \mathbf{C}$ à plusieurs déterminations.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[d, "\exp"'] & = & Y \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "p"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}^* & = & X \arrow[ur, "\log"'] &
\end{tikzcd}$$

(b) Plus généralement, pour tout domaine étalé $Y \xrightarrow{p} X$, toute fonction holomorphe ou méromorphe f sur Y définit, par composition avec l'inverse locale de p, une fonction holomorphe ou méromorphe sur X à plusieurs déterminations.

(2) Considérons un morphisme $f : X \to Y$ et le nombre n du théorème 2.1.5, pour un point $a \in X$. Pour tout voisinage U_0 de a, il existe un voisinage ouvert U de a contenu dans U_0 et un voisinage ouvert $W = f(U)$ de $b = f(a)$ tel que, pour tout $x \in W \setminus \{a\}$, la partie $f^{-1}(x)$ ait exactement n points : on dit que f a la *multiplicité n en a.* D'après cette définition, pour toute application holomorphe non constante $p : Y \to X$, $y \in Y$ est un point de ramification de p, si et seulement si p a la multiplicité au moins égale à 2 en y. D'après le théorème 2.1.5, le comportement local de p est le même que celui de l'application :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &\to \mathbf{C}. \\ z &\mapsto z^n \end{aligned}$$

(3) L'application exp de (1) est un morphisme non ramifié car elle est injective sur tout ouvert V de $\mathbf{C}$ qui ne contient pas deux nombres complexes congrus modulo $2\pi i$.

(4) La projection $\Pi : \mathbf{C} \to \mathbf{T}$ (1.2.2. (c)) est non ramifiée.

2.2.6. Théorème. — ***Soient X une surface de Riemann, Y un espace topologique séparé et $p : Y \to X$ un homéomorphisme local. Alors Y porte une structure complexe unique telle que p soit holomorphe.***

DÉMONSTRATION. — Pour tout $y \in Y$, soient $x = p(y)$, (h_1, U_1) une carte holomorphe de X en x ; il existe un voisinage ouvert V_1 de y tel que $p|V_1 : V_1 \to p(V_1)$ soit un homéomorphisme. Soient $U = p(V_1) \cap U_1 \subset U_1$ et $h = h_1|U$; alors (h, U) est une carte de X et si $V = V_1 \cap p^{-1}(U)$, $(V, h \circ p)$ est une carte holomorphe de Y. Les cartes holomorphes (V, k) avec $k = h \circ p$ sont compatibles et constituent un atlas analytique complexe $\mathfrak{A}$ de Y tel que p soit une application holomorphe : $Y \to X$.

Soit $\mathfrak{A}'$ un autre atlas analytique complexe de Y tel que p soit holomorphe, alors $p : (Y, \mathfrak{A}') \to X$ est un isomorphisme local, de sorte que l'identité $(Y, \mathfrak{A}) \to (Y, \mathfrak{A}')$ est un isomorphisme local, donc un isomorphisme : les atlas $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ sont équivalents. □

2.2.7. **Théorème.** — ***Soient X, Y, Z des surfaces de Riemann, $p : Y \to X$ un morphisme non ramifié et $f : Z \to X$ un morphisme. Alors tout relèvement $g : Z \to Y$ est un morphisme.***

DÉMONSTRATION. — Soient $c \in Z$, $b = g(c)$, $a = f(c)$; on a $p(b) = a$. Alors il existe des voisinages ouverts V de b et U de a tels que $p|V : V \to U$ soit biholomorphe (2.1.7), de morphisme inverse φ ; g étant continu, il existe un voisinage ouvert W de c tel que $g(W) \subset V$; alors $g|W = (\varphi | f(W)) \circ (f|W)$ est holomorphe, donc g est un morphisme. □

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

2.2.8. EXEMPLE. *Logarithme d'une fonction.*

Soit X une surface de Riemann simplement connexe et $f : X \to \mathbf{C}^*$. On cherche une fonction holomorphe $F : X \to \mathbf{C}$ telle que $\exp F = f$, i.e. telle que F soit un relèvement de f à $\mathbf{C}$, par rapport à exp. Soit $x_0 \in X$ et $c \in \mathbf{C}$ tel que $e^c = f(x_0)$, alors (1.2.9) il existe un relèvement $F : X \to \mathbf{C}$ tel que $F(x_0) = c$. D'après 2.2.7, F est holomorphe. Toute autre solution diffère de F par l'addition de $2\pi i n$, $n \in \mathbf{Z}$. Par définition $F = \log f$. Si f est l'injection canonique, $\log f$ est une détermination continue de la fonction log sur X.

2.3. Revêtements holomorphes ramifiés

2.3.1. Soit $f : X \to Y$ un morphisme non constant, *propre*, de surfaces de Riemann. f étant propre $f(X)$ est fermé, $f(X)$ est ouvert (2.1.6), non vide, Y est connexe, donc f est *surjectif.* D'après le comportement local d'un morphisme (2.1.5), l'ensemble A des points de ramification de f possède les propriétés suivantes : tout point a de A possède un voisinage ouvert U_a tel que $U_a \cap A = \{a\}$. Alors A est discret, fermé. L'ensemble $B = f(A) \subset Y$ est appelé *l'ensemble des valeurs critiques* de f.

Soient $Y' = Y \setminus B$; $X' = X \setminus f^{-1}(B) \subset X \setminus A$, alors $f|X' : X' \to Y'$ est un *morphisme* non ramifié ; d'après 2.2.4, c'est un homéomorphisme local ; comme $f|X'$ est propre, d'après 1.2.11, c'est un revêtement, à nombre fini de feuillets (1.2.6) d'après 1.2.12 (i). Y' est connexe par arcs ; d'après 1.2.6, le nombre de feuillets du revêtement $f|X'$ est déterminé, soit n, i.e. pour tout $c \in Y'$, f prend la valeur c exactement n fois.

Pour tout $x \in X$, soit $\mu(f, x)$ la multiplicité de f en x au sens de 2.2.5 (2). On dira que *f prend m fois la valeur $c \in Y$*, compte tenu des multiplicités si

$$m = \sum_{x \in p^{-1}(c)} \mu(f, x).$$

2.3.2. **Théorème.** — ***Soit $f : X \to Y$ un morphisme non constant, propre de surfaces de Riemann. Alors, il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que f prend toute valeur $c \in Y$ n fois.***

DÉMONSTRATION. — Dans les notations de 2.3.1, il suffit de vérifier que, pour toute valeur critique c_0, $m = n$. Soient $p^{-1}(c_0) = (x_1, \ldots, x_r)$; $k_j = \mu(f, x_j)$; d'après 2.1.5 et 2.2.5 (2), il existe des voisinages disjoints U_j de x_j $(j = 1, \ldots, r)$ et des voisinages V_j de c_0 tels que, pour $c \in V_j \setminus \{c_0\}$, $\sharp(p^{-1}(c) \cap U_j) = k_j, j = 1, \ldots, r$. D'après le lemme 1.2.12 (ii), il existe un voisinage $V \subset V_1 \cap \ldots \cap V_r$ de c_0 tel que $p^{-1}(V) \subset U_1 \cup \ldots \cup U_r$. Mais, pour tout $c \in V \cap Y'$, on a :

$$\sharp p^{-1}(c) = k_1 + \ldots + k_r = n, \quad \text{d'où} \quad m = n. \quad \square$$

2.3.3. Tout *morphisme f* de surfaces de Riemann, *non constant, propre* sera appelé un *revêtement holomorphe à n feuillets* où n est défini en 2.3.2. Si f n'est pas *ramifié,* c'est un revêtement topologique, on l'appelle un *revêtement (holomorphe) non ramifié* ; sinon, on dit que c'est un *revêtement (holomorphe) ramifié.*

2.3.4. **Remarque.** — ***Sur toute surface de Riemann compacte X, pour toute fonction méromorphe f, le nombre de pôles est égal au nombre de zéros (comptés avec leurs multiplicités) ;*** en effet, ce nombre est égal au nombre de feuillets du revêtement, en général ramifié, $f : X \to \mathbf{P}^1$.

3. Faisceaux

3.1. Préfaisceaux

3.1.1. **Définition; exemples.** — Soit $\mathscr{E}$ la catégorie des ensembles ; les *objets* de $\mathscr{E}$ sont les ensembles ; les *morphismes* de $\mathscr{E}$ sont les applications. On considérera des sous-catégories dont les objets ont des structures algébriques et dont les morphismes sont compatibles avec ces structures.

EXEMPLE : catégorie des groupes (abéliens) avec les morphismes de groupes.

Soient X un *espace topologique,* $\mathscr{C}$ une catégorie d'ensembles, un *préfaisceau A sur X, à valeurs dans $\mathscr{C}$,* est une fonction définie sur l'ensemble des ouverts de X, à valeur dans $\mathscr{C}$, $U \to A(U)$, où U est un ouvert de X, $A(U) \in \mathscr{C}$, possédant les propriétés suivantes : si V est un ouvert de X, tel que $U \subset V$, il existe un morphisme $\varrho_U^V : A(V) \to A(U)$ tel que

(i) pour tout ouvert U de X, ϱ_U^U est l'identité : $A(U) \to A(U)$;

(ii) si U, V, W sont des ouverts de X tels que $U \subset V \subset W$, alors

$$\varrho_U^W = \varrho_U^V \circ \varrho_V^W.$$

On note souvent un préfaisceau A par $(A(U), \varrho_U^V)$ où U, V désignent des ouverts tels que $U \subset V$.
Ex. : Soit $C(U)$ l'anneau des fonctions continues sur l'ouvert U, alors

$$\varrho_U^V : C(V) \to C(U)$$

est l'homomorphisme d'anneaux défini par restriction à U des fonctions continues sur V ; C est un préfaisceau d'anneaux.
Ex. : Préfaisceau d'anneaux des fonctions C^∞ sur une *variété différentielle* C^∞ (voir Appendice).

A chaque fois que $A(U)$ est un ensemble de fonctions, on a un préfaisceau dans lequel les morphismes ϱ_U^V sont définis par restriction des fonctions sur V à U ; à cause de cela, on appelle souvent ϱ_U^V un *morphisme de restriction* et, pour $s \in A(V)$, on pose $\varrho_U^V(s) = s|U$.

3.1.2. Préfaisceau constant

Soit G un groupe (un anneau, ...) et supposons que, pour tout ouvert U de X, $A(U) = G$ et, pour tout ouvert V contenant U, $\varrho_U^V = \mathrm{id}_G$. Le préfaisceau ainsi défini est dit *constant* et noté G.

3.1.3. Morphismes de préfaisceaux

Soient A et B deux préfaisceaux sur X ; la donnée pour tout ouvert U de X d'un morphisme $h_U : A(U) \to B(U)$ tel que, pour $U \subset V$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} A(V) \arrow[r, "\varrho_U^V"] \arrow[d, "h_V"'] & A(U) \arrow[d, "h_U"] \\ B(V) \arrow[r, "\varrho_U'^V"] & B(U) \end{tikzcd}$$

soit commutatif est un morphisme de préfaisceaux $h : A \to B$; on a noté $\varrho_U'^V$ les morphismes relatifs au préfaisceau B.

Les préfaisceaux sur X et leurs morphismes constituent une catégorie **PF**.

3.2. Faisceaux ; espaces étalés

3.2.1. On remarque que les exemples de préfaisceaux de 3.1.1 possèdent les propriétés suivantes : pour toute famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de X, soit $U = \bigcup_{i \in I} U_i$,

(F1) si $s', s'' \in A(U)$ sont tels que $s'|U_i = s''|U_i$, alors $s' = s''$;

(F2) pour tout $i \in I$, soit $s_i \in A(U_i)$ tel que, pour tout $(i, j) \in I \times I$, $s_i|U_i \cap U_j = s_j|U_i \cap U_j$, alors il existe $s \in A(U)$ tel que, pour tout $i \in I$, $s|U_i = s_i$.

(F1) affirme l'unicité d'un élément de $A(U)$ donné localement ; (F2) l'existence d'un tel élément.

Un préfaisceau A possédant les propriétés (F1) et (F2) est appelé un *faisceau.* Les morphismes de faisceaux sont les morphismes de préfaisceaux, de sorte que les faisceaux forment une sous-catégorie pleine $\mathbf{F}$ de la catégorie des préfaisceaux.

3.2.2. **Remarque.** — Si $U=\emptyset$, on a $U=\bigcup_{i\in\emptyset} U_i$, les conditions (F1) et (F2) impliquent que $A(\emptyset)$ a exactement un élément.

3.2.3. EXEMPLE. — *Le faisceau G.* Le préfaisceau constant G, où G est un groupe abélien ayant au moins deux éléments, n'est pas un faisceau, à cause de la remarque 3.2.2, car l'axiome (F2) n'est pas satisfait. On va modifier $A(U)$: on pose $A(U)=$ $=\{g : U\to G$, application localement constante$\}$; en particulier, si U est connexe, alors $A(U)=G$. Soit ϱ_U^V la restriction des applications. Alors A est un faisceau appelé faisceau des fonctions localement constantes à valeurs dans G ; on le notera encore G.

3.2.4. Espaces étalés au-dessus de X

Soit X un espace topologique, un *espace étalé au-dessus* de X est un couple (E, p) d'un espace topologique E et d'une application $p : E\to X$ qui est un homéomorphisme local. Alors p est une application ouverte (1.1.3).

Soit $M\subset X$, une application continue $s : M\to E$ telle que $p\circ s=\mathrm{id}_M$ est appelée une *section de E* au-dessus de M.

3.2.5. **Proposition.** — ***L'image d'un ouvert par une section est un ouvert.***

Cela résulte immédiatement du fait que p est un homéomorphisme local. □

3.2.6. **Corollaire.** — ***Soient s et t deux sections au-dessus d'un ouvert U de X, alors elles sont égales sur un ouvert de U (donc de X).***

En effet, toute section est, localement, un homéomorphisme inverse de p. □

3.2.7. Morphismes d'espaces étalés

Soient (E, p), (E', p') deux espaces étalés, un *morphisme* $f : (E, p)\to(E', p')$ est une application continue $f : E\to E'$ telle que $p=p'\circ f$. Les morphismes d'espaces étalés constituent une catégorie $\mathbf{E}$ dont les objets sont les espaces étalés.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

3.3. Equivalence des catégories F et E

On considère un espace topologique X.

3.3.1. Soit (E, p) un espace étalé au-dessus de X, pour tout ouvert U de X, soit $\Gamma(U, E)$ l'ensemble des sections de E au-dessus de U ; pour tout couple d'ouverts U, V de X, $U \subset V$, soit $\varrho_U^V : \Gamma(V, E) \to \Gamma(U, E)$ la restriction, alors $(\Gamma(U, E), \varrho_U^V)$ est un préfaisceau et, les ϱ_U^V étant définis par des restrictions de fonctions, c'est un faisceau ΓE.

Un morphisme $f : E \to E'$ d'espaces étalés définit un morphisme

$$\Gamma f : \Gamma E \to \Gamma E'$$

de faisceaux. On vérifie (transitivité) que Γ est un *foncteur* $\mathbf{E} \to \mathbf{F}$.

3.3.2. Soit $G = (G(U), \varrho_U^V)$ un préfaisceau sur X à valeurs dans une catégorie d'ensembles. Soient $f \in G(U)$: $g \in G(V)$ avec $x \in U \cap V$; s'il existe $W \subset U \cap V$, $x \in W$ tel que $\varrho_W^U f = \varrho_W^V g$, on pose $f \underset{x}{\sim} g$; $\underset{x}{\sim}$ est une relation d'équivalence. Soit $F_x = \bigcup_{U \ni x} G(U)/\underset{x}{\sim}$, F_x a même structure algébrique que $G(U)$; en outre l'application $\varrho_x^U : G(U) \to F_x$ est un homomorphisme ; F_x est appelé la *limite inductive* des $G(U)$
$f \mapsto$ classe de f modulo $\underset{x}{\sim}$
quand U décrit l'ensemble des ouverts de X contenant x et on écrit $F_x = \varinjlim_{x \in U} G(U)$.
Ex. : Si X est une variété différentielle (voir Appendice) et G le préfaisceau des fonctions C^∞ sur X, alors F_x est l'ensemble (ici l'anneau) des *germes* de fonctions indéfiniment différentiables en x.

On va mettre une topologie sur la réunion disjointe F des F_x $(x \in X)$ telle que $p : F \to X$ définie par $p|F_x : F_x \to \{x\}$ soit un homéomorphisme local. Pour tout ouvert U de X, pour tout $\xi \in G(U)$, soit

$$\begin{aligned} s_\xi : U &\to F \\ x &\to \varrho_x^U(\xi). \end{aligned}$$

On met, sur F, la topologie la plus fine telle que les s_ξ soient continus, i.e. la topologie engendrée par les $s_\xi(U)$ pour U ouvert de X et $\xi \in G(U)$, autrement dit, les ouverts de F sont les réunions d'intersections finies des $s_\xi(U)$. Alors, on vérifie que p est continue et est un homéomorphisme local, donc (F, p) est un espace étalé au-dessus de X, qu'on notera LG. On vérifie que tout morphisme $h : G \to G'$ de préfaisceaux définit un morphisme $Lh : LG \to LG'$ d'espaces étalés et que L est un foncteur $\mathbf{PF} \to \mathbf{E}$.

3.3.3. **Remarque.** — Si G est un préfaisceau et $(E, p) = LG$, alors il existe un morphisme $h : G \to \Gamma(E)$.

Si G satisfait à (F1), alors h est injectif ; si G satisfait à (F1) et (F2) h est surjectif.

3.3.4. Soit G un préfaisceau, on appelle ΓLG le *faisceau engendré par* G et on vérifie

(a) *si G est un faisceau, alors ΓLG est isomorphe à G,*
(b) *si F est un espace étalé, alors $L\Gamma F$ est égal à F.*

Cela établit l'équivalence des catégories **F** et **E**, en outre on vérifie que les *foncteurs* Γ et L sont *adjoints*, i.e. qu'il existe une bijection : $\mathrm{Mor}_{\mathbf{F}}(G, \Gamma F) \to \mathrm{Mor}_{\mathbf{E}}(LG, F)$.

3.3.5. **Remarques.** — 1. Un faisceau A est complètement déterminé quand les $A(U)$ sont donnés sur les ouverts U d'une base de la topologie de X ; en particulier, les U peuvent être supposés connexes.

2. Dans la pratique et suivant les questions traitées, on considérera un faisceau selon la définition 3.2.1 ou comme un espace étalé (3.2.4).

3.4. Faisceaux de groupes, d'anneaux

Nous allons traduire, en termes d'espaces étalés, la notion de faisceau à valeurs dans une sous-catégorie de la catégorie des ensembles dont les objets et les morphismes ont une structure algébrique. Pour fixer les idées, on considérera surtout la catégorie des anneaux.

Soient (F, p), (F', p') deux espaces étalés au-dessus de X, on considère le sous-espace de $F \times F'$ suivant, appelé le produit fibré de F et F' au-dessus de X :

$$F \times_X F' = \{(x, x') \in F \times F' \; ; \; px = p'x'\}.$$

Des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un espace étalé soit défini par un faisceau d'anneaux sont les suivantes :

1) pour tout $x \in X$, la fibre F_x est un anneau,

2) les applications $F \times_X F \to F$ définies par les lois de composition sur chaque fibre sont continues.

3) La section 0 et, si les anneaux F_x sont unitaires, la section 1, sont continues. F est alors dit *espace étalé en anneaux.*

Alors les foncteurs L et Γ sont des isomorphismes fonctoriels entre la sous-catégorie des faisceaux d'anneaux et celle des espaces étalés en anneaux.

3.5. Faisceaux satisfaisant au théorème d'identité

3.5.1. On dit qu'un préfaisceau F sur un espace topologique X *satisfait au théorème d'identité* si, pour tout ouvert *connexe* $Y \subset X$ et tout couple f, g d'éléments de $F(Y)$ tels que $\varrho_x^Y f = \varrho_x^Y g$ en un point $x \in Y$, on a $f = g$.

3.5.2. Exemple. — Soient X une surface de Riemann et, pour tout ouvert U de X, $\mathcal{O}(U)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur U, alors si pour tout couple U, V d'ouverts de X, avec $U \subset V$, ϱ_U^V désigne l'homomorphisme restriction : $\mathcal{O}(V) \to$ $\to \mathcal{O}(U)$, $(\mathcal{O}(U), \varrho_U^V)$ est un faisceau $\mathcal{O}$ dit *faisceau des fonctions holomorphes sur* X ; en outre pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_x$ est isomorphe à l'anneau des séries entières convergentes en une coordonnée locale holomorphe quelconque z centrée en x. Soient Y un ouvert connexe de X, $x \in Y, f, g \in \mathcal{O}(Y)$ tels que $\varrho_x^Y f = \varrho_x^Y g$; alors, par définition de $\mathcal{O}_x$, il existe un voisinage ouvert W de x tel que $f|W = g|W$ et, d'après le théorème d'identité (2.1.2) $f = g$ sur Y.

On définit de la même façon le faisceau $\mathscr{M}$ des fonctions méromorphes sur X (cf. ch. 2, 4.3.4 et 4.4.1).

3.5.3. **Théorème.** — ***Soient X un espace topologique séparé et F un préfaisceau sur X qui satisfait au théorème d'identité. Alors l'espace étalé LF est séparé.***

DÉMONSTRATION. — Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in LF$; $\varphi_1 \neq \varphi_2$; il s'agit d'exhiber deux voisinages disjoints de φ_1 et de φ_2 dans LF.

(a) Si $p(\varphi_1)=x\neq y=p(\varphi_2)$, puisque X est séparé, il existe deux voisinages U de x et V de y disjoints, alors $p^{-1}(U)$ et $p^{-1}(V)$ sont des voisinages disjoints de φ_1 et φ_2 respectivement.

(b) Si $p(\varphi_1)=p(\varphi_2)=x$; pour $j=1, 2$, soit $f_j \in F(U_j)$ un représentant de φ_j. Soient U un voisinage ouvert connexe de x tel que $U \subset U_1 \cap U_2$ et

$$s_{f_j} : U \to LF$$
$$z \mapsto f_{jz} = \varrho_z^{U_j} f_j \ ;$$

par définition de la topologie de LF, $s_{f_j}(U)$ est un voisinage ouvert de φ_j. Supposons qu'il existe $\psi \in s_{f_1}(U) \cap s_{f_2}(U)$ et soit $p(\psi)=\eta \in U$, alors $\psi_\eta = f_{1\eta} = f_{2\eta}$; F satisfaisant au théorème d'identité, on a : $f_1|U=f_2|U$, d'où $\varphi_1=\varphi_2$, contradiction. □

4. Prolongement analytique

4.1. Prolongement analytique le long d'un arc

4.1.1. Soient X une surface de Riemann, $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X, $\gamma : [0, 1] \to X$ un arc de X d'origine a, d'extrémité b ; $\varphi \in \mathcal{O}_a$ un germe de fonction holomorphe en a.

Si $\tau \in [0, 1]$ et $\varphi_\tau \in \mathcal{O}_{\gamma(\tau)}$, il existe un voisinage ouvert U_τ de $\gamma(\tau)$ dans X et une fonction holomorphe $f_\tau \in \mathcal{O}(U_\tau)$ telle $\varrho_{\gamma(\tau)}^{U_\tau} f = \varphi_\tau$; γ étant continu, il existe un voisinage ouvert W_τ de τ dans $[0, 1]$ tel que $\gamma(W_\tau) \subset U_\tau$.

Un germe $\psi \in \mathcal{O}_b$ est dit *prolongement analytique de* φ *le long de* γ si la condition suivante est réalisée : il existe une famille $(\varphi_t)_{t\in[0,1]}$ où $\varphi_t \in \mathcal{O}_{\gamma(t)}$ telle que :

1) $\varphi_0=\varphi$ et $\varphi_1=\psi$

2) pour tout $\tau \in [0, 1]$, pour tout $t \in W_\tau$, on a $\varrho_{\gamma(t)}^{U_\tau} f_\tau = \varphi_t$.

4.1.2. **Lemme.** — ***Soient X une surface de Riemann, γ un arc d'origine a, d'extrémité b et $\varphi \in \mathcal{O}_a$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :***

(i) ***$\psi \in \mathcal{O}_b$ est le prolongement analytique de $\varphi \in \mathcal{O}_a$ le long de γ ;***

(ii) ***il existe un relèvement $\hat{\gamma}$: [0, 1] $\to L\mathcal{O}$ de γ tel que $\hat{\gamma}(0)=\varphi$ et $\hat{\gamma}(1)=\psi$.***

DÉMONSTRATION. — (i)⇒(ii) : dans les notations de 4.1.1, $\begin{matrix}[0, 1] \to L\mathcal{O}, \\ t \mapsto \varphi_t\end{matrix}$ est une application continue, d'après la définition de la topologie de $L\mathcal{O}$: c'est un relèvement $\hat{\gamma}$ de γ satisfaisant à (ii).

(ii)⇒(i) : on pose $\varphi_t = \hat{\gamma}(t) \in \mathcal{O}_{\gamma(t)}$; alors $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \psi$; soient $\tau \in [0, 1]$ et $V = \{\varrho_x^U f \; ; \; x \in U\}$ un voisinage de φ_τ dans $L\mathcal{O}$, pour un voisinage ouvert U de $\gamma(\tau)$ dans X et une fonction $f \in \mathcal{O}(U)$. Alors il existe un voisinage W_τ de τ dans $[0, 1]$ tel que $\hat{\gamma}(W_\tau) \subset V$; cela entraîne $\gamma(W_\tau) \subset U$ et $\varphi_t = \varrho_{\gamma(t)}^U f$ pour tout $t \in W_\tau$. □

***4.1.3.* Proposition.** — *Si le prolongement analytique d'un germe de fonction holomorphe φ le long d'un arc γ existe, alors il est déterminé de façon unique.*

DÉMONSTRATION. — D'après 4.1.2, γ a un relèvement $\hat{\gamma}$ d'origine φ. D'après 3.5.3 $L\mathcal{O}$ est séparé, donc le relèvement $\hat{\gamma}$ est unique (1.1.4) et le prolongement analytique de φ est déterminé par $\hat{\gamma}$. □

4.1.4.* Théorème de monodromie.** — ***Soient X une surface de Riemann,

$$\gamma_0, \gamma_1 \; : \; [0, 1] \to X$$

deux arcs homotopes joignant a à b. Soient $(\gamma_s)_{s \in [0,1]}$ une déformation de γ_0 en γ_1 et $\varphi \in \mathcal{O}_a$ un germe ayant un prolongement analytique le long de tout arc γ_s. Alors les prolongements analytiques de φ le long de γ_0 et de γ_1 coïncident.

DÉMONSTRATION. — D'après 4.1.2, pour tout $s \in [0, 1]$, il existe un relèvement $\hat{\gamma}_s$ de γ_s tel que $\hat{\gamma}(0) = \varphi$. $L\mathcal{O}$ est séparé (3.5.3), la conclusion résulte du théorème de relèvement d'arcs homotopes (1.1.5) et de 4.1.2.

4.1.5.* Corollaire.** — ***Soient X une surface de Riemann simplement connexe, a un point de X, $\varphi \in \mathcal{O}_a$ un germe admettant un prolongement analytique le long de tout arc d'origine a. Alors il existe une fonction unique $f \in \mathcal{O}(X)$ telle que $\varrho_a^X f = \varphi$.

DÉMONSTRATION. — Tous les arcs joignant a à $x \in X$ sont homotopes ; φ a le même prolongement analytique ψ_x le long de tous ces arcs (4.1.4). D'après 4.1.1, $f : X \to \mathbf{C}$ telle que $f(x) = \psi_x(x)$ est une fonction holomorphe sur X. Si $g \in \mathcal{O}(X)$ satisfait à $\varrho_a^X g = \varphi$, $g = f$ d'après le théorème d'identité (2.1.2). □

4.2. Prolongement analytique

4.2.1. Soient X une surface de Riemann, $a \in X$, $\varphi \in \mathcal{O}_a$, γ_0 et γ_1 deux arcs d'origine a et d'extrémité b ; deux prolongements analytiques de φ en b, le long de γ_0 et de γ_1, peuvent être différents.

Ex. : $a, b \in \mathbf{R}_+^* \subset \mathbf{C}^*$ avec $a < b$; soient $U = B\left(a, \dfrac{a}{2}\right)$, $z^{1/2}$ la détermination de la fonction racine carrée dans U qui prend des valeurs positives sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\varphi = \varphi_a^U z^{1/2}$; alors $\varphi(a) = a^{1/2}$. Soit ψ^0 (resp. ψ^1) le prolongement analytique de φ le long de l'arc γ_0 joignant a à b, porté par $\mathbf{R}_+^*$, resp. le long d'un arc γ_1 tournant une fois dans le sens direct autour de 0, alors $\psi^0(b) = b^{1/2}$, $\psi^1(b) = -b^{1/2}$.

Le prolongement analytique le long d'arcs issus de a peut donc être une fonction holomorphe sur X à plusieurs déterminations. Cette situation conduit à la notion suivante :

***4.2.2.* Notation et définitions**

Soit $p : Y \to X$ un morphisme non ramifié de surfaces de Riemann ; p est localement biholomorphe, donc induit, pour tout $y \in Y$, un isomorphisme $p_y^* : \mathcal{O}_{x, p(y)} \to \mathcal{O}_{Y, y}$; on pose $p_* = p_{*y} = (p_y^*)^{-1}$.

Soient X une surface de Riemann, $a \in X$, $\varphi \in \mathcal{O}_a$. Un quadruple (Y, p, f, b) est appelé un *prolongement analytique* de φ si :

(i) Y est une surface de Riemann, $p : Y \to X$ un morphisme non ramifié ;
(ii) f est une fonction holomorphe sur Y ;
(iii) $b \in p^{-1}(a) \subset Y$; $p_*(\varrho_b^Y f) = \varphi$.

Un prolongement analytique (Y, p, f, b) est dit *maximal* s'il est solution du problème d'application universelle suivant : pour tout prolongement analytique (Z, q, g, c) de φ il existe un morphisme au-dessus de X (un morphisme fibré) $F : Z \to Y$ tel que $F(c) = b$ et $F^*(f) = g$. Y est appelée la *surface de Riemann de* φ.

Un prolongement analytique maximal est unique à un isomorphisme près ; c'est une propriété valide pour toute solution d'un problème d'application universelle : si (Z, q, g, c) est un autre prolongement analytique maximal, il existe un morphisme fibré $G : Y \to Z$ convenable tel que $F \circ G = \mathrm{id}_Y$, $G \circ F = \mathrm{id}_Z$. □

4.2.3.* Lemme. — *Soient X une surface de Riemann, $a \in X$, $\varphi \in \mathcal{O}_a$ et (Y, p, f, b) un prolongement analytique de φ. Alors si $\delta : [0, 1] \to Y$ est un arc de Y tel que $\delta(0) = b$ et $\delta(1) = y$, le germe $\psi = p_*(\varrho_y^Y f) \in \mathcal{O}_{p(y)}$ est un prolongement analytique de φ le long de l'arc $\gamma = p \circ \delta$.

DÉMONSTRATION. — Pour $t \in [0, 1]$, soit $\varphi_t = p_*(\varrho_{\delta(t)}^Y f) \in \mathcal{O}_{p \circ \delta(t)} = \mathcal{O}_{\gamma(t)}$. Alors $\varphi_0 = \varphi$ et $\varphi_1 = p_*(f_y) = \psi$. Si $t_0 \in [0, 1]$, puisque $p : Y \to X$ est un morphisme non ramifié, il existe des voisinages ouverts V de $\delta(t_0)$ et U de $p \circ \delta(t_0)$ resp. tels que $p|V : V \to U$ soit biholomorphe ; soient $q : U \to V$ l'inverse de $p|V$ et $g = q^*(f|V) \in \mathcal{O}(U)$. Alors, pour tout $\eta \in V$, on a $p_*(\varrho_\eta^Y f) = \varrho_{p(\eta)}^U g$. Il existe un voisinage W_{t_0} de t_0 dans $[0, 1]$ tel que $\delta(W_{t_0}) \subset V$, donc $\gamma(W_{t_0}) \subset U$. Pour $t \in W_{t_0}$, on a $\varrho_{\gamma(t)}^U g = p_*(\varrho_{\delta(t)}^Y f) = \varphi_t$, i.e. ψ est un prolongement analytique de φ le long de γ. □

4.2.4.* Théorème. — *Soient X une surface de Riemann, $a \in X$, $\varphi \in \mathcal{O}_a$. Alors il existe un prolongement analytique maximal (Y, p, f, b) de φ.

DÉMONSTRATION. — (a) Soient Y la composante connexe de $L\mathcal{O}$ contenant φ ; p la restriction à Y de la projection $L\mathcal{O} \to X$, c'est un homéomorphisme local. Alors $L\mathcal{O}$ étant séparé (3.5.3), Y est munie d'une structure complexe telle que p soit holomorphe (2.2.6). On définit $f : Y \to \mathbf{C}$ comme suit : on sait que tout $\eta \in Y$ est un germe de fonction holomorphe en $p(\eta)$ et on pose $f(\eta) = \eta(p(\eta))$. Montrons que f est holomorphe sur Y ; tout $\eta_0 \in Y$ a un représentant $g \in \mathcal{O}(U)$ où U est un voisinage ouvert de $p(\eta_0)$; alors $V = \{\varrho_x^U(g) ; x \in U\}$ est un voisinage ouvert de η_0 dans Y tel que $\varrho_{p(\eta_0)}^U g = \eta_0$ et $f|V = g \circ (p|V)$ est holomorphe : f holomorphe au voisinage de tout point de Y est holomorphe sur Y. Soit $b = \varphi$ considéré comme point de Y, alors (Y, p, f, b) est un prolongement analytique de φ.

(b) (Y, p, f, b) ci-dessus est *maximal* : soit (Z, q, g, c) un autre prolongement analytique de φ. Définissons un morphisme fibré $F : Z \to Y$. Pour $\zeta \in Z$ soit $x = q(\zeta)$; d'après le Lemme 4.2.3, le germe $\eta = q_*(\varrho_\zeta^Z(g)) \in \mathcal{O}_x$ est le prolongement analytique de φ le long d'un arc γ de X joignant a à x. D'après le lemme 4.1.2, il existe un relèvement $\hat{\gamma}$ de γ dans $L\mathcal{O}$ tel que $\hat{\gamma}(0) = \varphi$ et $\hat{\gamma}(1) = \eta$; comme Y est connexe par arcs et contient φ, elle contient aussi η. Posons $F(\zeta) = \eta$; on a $p(\eta) = x$, donc F est une application fibrée ; localement c'est la composée des applications holomorphes $q : Z \to X$ et inverse locale de p, donc F est holomorphe, en outre $F(c) = b$, d'après la construction de F. □

4.2.5. Les résultats précédents de 4.2 sont valides quand on remplace les faisceaux $\mathcal{O}$ de fonctions holomorphes par les faisceaux $\mathcal{M}$ de fonctions méromorphes.

5. Groupe fondamental ; revêtement universel

5.1. Arcs homotopes

Désormais, deux arcs seront dits *homotopes* s'ils sont homotopes au sens de (ch. 1, 5) et s'ils ont même origine et même extrémité ; le produit de deux arcs et l'inverse d'un arc ont été définis en 1.2.7.

La relation : γ_0 et γ_1 sont homotopes est symétrique (changer s en $1-s$) et notée $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

5.1.1. **Lemme.** — ***Soient $\gamma : I \to X$ un arc d'un espace topologique X et $\varphi : I \to I$ une application continue telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$. Alors les arcs γ et $\gamma \circ \varphi$ sont homotopes.***

DÉMONSTRATION. — Soit $\Gamma = I \times I$

$$(s, t) \to \gamma((1-s)t + s\varphi(t)) \ ;$$

Γ est continue et

$$\Gamma(0, t) = \gamma(t) \ ; \quad \Gamma(1, t) = \gamma \circ \varphi(t)$$

$$\Gamma(s, 0) = \gamma(0) \ ; \quad \Gamma(s, 1) = \gamma(1). \quad \square$$

5.1.2. **Théorème.** — ***Soient X un espace topologique ; $a, b, c, d \in X$; $\gamma, \delta, \varepsilon : I \to X$ des arcs tels que : $\gamma(0) = a$; $\gamma(1) = b = \delta(0)$; $\delta(1) = c = \varepsilon(0)$; $\varepsilon(1) = d$; γ_0 l'arc constant a, δ_0 l'arc constant b. Alors, on a les homotopies***

(i) $\gamma_0 \cdot \gamma \sim \gamma \sim \gamma \cdot \delta_0$

(ii) $\gamma \cdot \gamma^- \sim \gamma_0$

(iii) $(\gamma \cdot \delta) \cdot \varepsilon \sim \gamma \cdot (\delta \cdot \varepsilon)$ ***(associativité du produit).***

DÉMONSTRATION. —

(i)
$$\gamma_0 \cdot \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t) = \gamma(0) \ ; & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma(2t-1) \ ; & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

alors $\gamma_0 \cdot \gamma = \gamma \circ \psi$ avec ψ :

$$\begin{aligned} \psi : I &\to I \\ t &\mapsto 0 \ ; \qquad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ t &\mapsto 2t-1 \ ; \ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{aligned}$$

D'après 5.1.1, $\gamma \sim \gamma \circ \psi$, i.e. $\gamma \sim \gamma_0 \cdot \gamma$.

(ii)
$$\gamma \cdot \gamma^-(t) = \begin{cases} \gamma(2t) \ ; & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma(2-2t) \ ; & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Soit Γ: $I \times I \to X$ avec

$$\Gamma(s, t) = \begin{cases} \gamma((1-s)2t) \ ; & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma((1-s)2(1-t)) \ ; & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} ; \ \Gamma(1, t) = \gamma(0) = a.$$

(iii) On a $(\gamma \cdot \delta) \cdot \varepsilon = (\gamma \cdot (\delta \cdot \varepsilon)) \circ \psi$

$$\psi(t) = \begin{cases} 2t \ ; & t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{1}{4} + t, & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{2} + \frac{t}{2} \ ; & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases} \quad \square$$

5.1.3. On rappelle qu'un arc $\gamma : I \to X$ est dit *fermé* si $\gamma(0) = \gamma(1)$; un arc γ d'origine et d'extrémité a est dit *homotopiquement nul* si $\gamma \sim \gamma_0$, arc constant a.

5.2. Théorème. — ***La relation $\gamma \sim \delta$ est une relation d'équivalence entre arcs d'origine a et d'extrémité b fixées.***

DÉMONSTRATION. — Il suffit de prouver l'associativité : soient γ, δ, ε trois arcs d'origine a et extrémité b tels que $\gamma \sim \delta$ et $\delta \sim \varepsilon$. Il existe deux applications continues

$\Gamma : I \times I \to X$; $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$

$\Delta : I \times I \to X$; $\Gamma(1, t) = \Delta(0, t) = \delta(t)$, $\Delta(1, t) = \varepsilon(t)$; $\Gamma(s, 0) = \Delta(s, 0) = a$,

$\Gamma(s, 1) = \Delta(s, 1) = b$. Alors l'application

$$E : I \times I \to X ; \ \begin{cases} \Gamma(2s, t) \ ; & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \Delta(2s-1, t) \ ; & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \text{ montre } \gamma \sim \varepsilon. \quad \square$$

5.3. Groupe fondamental

On appelle *classe d'homotopie* d'un arc γ, la classe d'équivalence de γ pour la relation $\sim$.

5.3.1.* Théorème. — *Soient X un espace topologique, $a \in X$; l'ensemble $\Pi_1(X, a)$ des classes d'homotopie des arcs fermés de X d'origine et d'extrémité a est un groupe pour la loi de composition notée . , induite par le produit des arcs.

DÉMONSTRATION. — Soit $\bar{\gamma}$ la classe d'homotopie de γ ; $\bar{\gamma} \cdot \bar{\delta} = \overline{\gamma \cdot \delta}$ est bien défini d'après 1.2.7 (c) ; 5.1.2 entraîne que le produit est associatif dans $\Pi_1(X, a)$, que $\bar{\gamma}_0$ (cf. 5.1.3) est élément neutre et que tout élément $\bar{\gamma}$ a un inverse $\bar{\gamma}^{-1} = (\overline{\gamma^-})$.

5.3.2. $\Pi_1(X, a)$ muni de la loi de groupe « $\cdot$ » est appelé le *groupe fondamental de X*, de *point base a*. Au lieu de groupe fondamental, on dit aussi *groupe de Poincaré* ou *premier groupe d'homotopie.*

5.3.3. Dépendance du point base

Théorème. — *Si les points a, b de l'espace topologique X sont joints par un arc, alors $\Pi_1(X, a)$ et $\Pi_1(X, b)$ sont isomorphes. Si $\Pi_1(X, a)$ est abélien l'isomorphisme est canonique.*

DÉMONSTRATION. — Soient δ un arc joignant a à b, $\bar{\delta}$ la classe d'homotopie de δ ; l'application

$$f : \Pi_1(X, a) \to \Pi_1(X, b) \quad \text{est un isomorphisme.}$$
$$\bar{\gamma} \mapsto \overline{\delta^- \cdot \gamma \cdot \delta}$$

Soient δ_1 un autre arc joignant a à b et

$$f_1 : \Pi_1(X, a) \to \Pi_1(X, b)$$
$$\bar{\gamma} \mapsto \overline{\delta_1^- \cdot \gamma \cdot \delta_1}$$
$$F = f_1^{-1} \circ f : \Pi_1(X, a) \to \Pi_1(X, a)$$
$$\bar{\gamma} \mapsto \overline{\delta_1 \cdot \delta^- \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \delta_1^-}.$$

Posons $\bar{\alpha} = \overline{\delta_1 \cdot \delta^-} \in \Pi_1(X, a)$, alors $F(\bar{\gamma}) = \overline{\alpha \cdot \gamma \cdot \alpha^-} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\gamma} \cdot \bar{\alpha}^{-1}$.

Si $\Pi_1(X, a)$ est abélien, on a $F(\bar{\gamma}) = \bar{\gamma}$ et l'isomorphisme f est canonique. □

5.3.4. La condition *X est simplement connexe équivaut à, pour tout* $a \in X$, $\Pi_1(X, a) = 0$; *si X est simplement connexe, deux arcs de même origine et de même extrémité sont homotopes.* □

5.3.5. Si X est un espace connexe par arcs, les groupes $\Pi_1(X, a)$, $a \in X$, sont isomorphes, on notera $\Pi_1(X)$ et on appelera *groupe fondamental de X,* un tel groupe défini à un isomorphisme près. On notera ε l'élément neutre de $\Pi_1(X)$.

5.4. Revêtement universel

On désignera par variété, une variété de classe C^0, de dimension 2 (ch. 1, 6.1) ou de dimension quelconque (voir Appendice).

5.4.1. Définition. — Un revêtement $p : Y \to X$ est dit *revêtement universel* de X s'il est solution du problème d'application universelle suivant : pour tout revêtement $q : Z \to X$ pour lequel Z est connexe, pour tout choix $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$ tel que $p(y_0) = q(z_0)$, il existe une application fibrée unique $f : Y \to Z$ telle que $f(y_0) = z_0$. Le revêtement universel, s'il existe, est donc unique à isomorphisme près, isomorphisme étant pris dans le sens homéomorphisme fibré.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "q"'] & & Y \arrow[ll, dashed, "f"'] \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

5.4.2. Théorème. — ***Soient X et Y deux variétés connexes, Y étant simplement connexe et $p : Y \to X$ un revêtement. Alors p est le revêtement universel de X.***

DÉMONSTRATION. — D'après le théorème d'existence d'un relèvement (1.2.9), pour tout revêtement $q : Z \to X$ il existe une application fibrée $f : Y \to Z$ satisfaisant aux conditions de 5.4.1. □

5.4.3. Théorème (existence du revêtement universel d'une variété). — ***Soit X une variété connexe, alors il existe une variété connexe, simplement connexe $\tilde{X}$ et un revêtement $p : \tilde{X} \to X$.***

p est le revêtement universel de X d'après 5.4.2.

DÉMONSTRATION. — (a) *Construction de $\tilde{X}$.* Soit $x_0 \in X$ et, pour tout $x \in X$, soit $\Pi(x_0, x)$ l'ensemble des classes d'homotopie des arcs joignant x_0 à x. On pose : $\tilde{X} = \{(x, \alpha) ; x \in X, \alpha \in \Pi(x_0, x)\}$; $p : \tilde{X} \to X$ telle que $p((x, \alpha)) = x$.

(b) *Topologie de $\tilde{X}$.* Soient $(x, \alpha) \in \tilde{X}$, U un voisinage ouvert connexe et simplement connexe de x dans X, on pose $[U, \alpha] = \{(y, \eta) \in \tilde{X} ; y \in U ; \eta = \alpha \cdot \bar{\delta}$, où δ est un arc de U joignant x à $y\}$; U étant simplement connexe, $\bar{\delta}$ est bien déterminé, donc aussi η. Soit $\mathscr{B}(x, \alpha)$ l'ensemble des parties $[U, \alpha]$ ci-dessus : pour toute $[U', \alpha] \in \mathscr{B}(x, \alpha)$, $x \in U \cap U'$ et il existe un voisinage ouvert connexe et simplement connexe W de x dans X contenu dans $U \cap U'$, d'où $[W, \alpha] \in \mathscr{B}(x, \alpha)$ et $[W, \alpha] \subset \subset (U, \alpha) \cap (U', \alpha)$. De plus pour tout $(y, \eta) \in [U, \alpha]$, on a $y \in U$ et $\eta = \alpha \cdot \bar{\delta}_0$ où δ_0 est un arc de U joignant x à y, alors $[U, \eta] = [U, \alpha]$. D'après ces propriétés, pour tout $(x, \alpha) \in \tilde{X}$, $\mathscr{B}(x, \alpha)$ est un système fondamental de voisinage de (x, α) dans $\tilde{X}$ muni d'une topologie bien déterminée ; enfin $[U, \alpha]$ étant un voisinage de chacun de ses points est un ouvert de $\tilde{X}$.

(c) $p : \tilde{X} \to X$ est un *homéomorphisme local,* en effet, pour tout $[U, \alpha]$, l'application $[U, \alpha] \to U$ est bijective et bicontinue, i.e. un homéomorphisme.
$(y, \eta) \mapsto y$

(d) $\tilde{X}$ est *séparé* : soient $(x, \alpha), (y, \beta) \in \tilde{X}$; si $x \neq y$, il existe deux voisinages ouverts disjoints de x et de y resp. car X est séparée, alors $[U, \alpha] \cap [V, \beta] \neq \emptyset$. Si

$x=y$, $\alpha\neq\beta$, soit U un voisinage ouvert connexe et simplement connexe de x, alors $[U,\alpha]\cap[U,\beta]=\emptyset$ sinon il existerait $(y,\gamma)\in[U,\alpha]\cap[U,\beta]$ avec $\alpha=\bar{\alpha}_0$, $\beta=\bar{\beta}_0$ où α_0, β_0 sont des arcs joignant x_0 à x ; soit δ_0 un arc de U joignant x à y, alors $\gamma=\bar{\alpha}_0\cdot\bar{\delta}=$ $=\bar{\beta}_0\cdot\bar{\delta}$ et $\gamma\cdot\bar{\delta}^-=\alpha=\beta$, contradiction.

(e) $p\ :\ \tilde{X}\to X$ *relève les arcs et* $\tilde{X}$ *est connexe par arcs* : soient $\gamma_0\ :\ I=[0,1]\to X$ un arc d'origine y_0 ; $(y_0,\beta)\in\tilde{X}$, alors $\beta\in\Pi(x_0,y_0)$; soit β_0 un représentant de β. Pour $s\in I$, soit $\gamma_{0s}\ :\ I\to X$, alors $\hat{\gamma}_0\ :\ I\to\tilde{X}$ est le relèvement γ_0, d'origine (y_0,β).

$$t\mapsto\gamma_0(st)\qquad\qquad s\mapsto(\gamma_0(s),\overline{\beta_0\cdot\gamma_{0s}})$$

Soit ε la classe d'homotopie de l'arc constant x_0. Pour tout point $(x_1,\alpha)\in\tilde{X}$, soit α_0 un représentant de $\alpha\in\Pi(x_0,x_1)$: alors le relèvement de $\varepsilon_0\cdot\alpha_0$ joint (x_0,ε) à (x_1,α) dans $\tilde{X}$.

(f) $p\ :\ \tilde{X}\to X$ *est un revêtement.* Cela résulte de

5.4.4.* Lemme. — *Soient X une variété, Y un espace topologique séparé, p : Y→X un homéomorphisme local ayant la propriété de relèvement des arcs, alors p est un revêtement.

DÉMONSTRATION. — Soient $x_0\in X$, $(y_l)_{l\in L}=p^{-1}(x_0)$, U un voisinage ouvert de x_0 dans X homéomorphe à une boule (donc connexe, localement connexe par arcs et simplement connexe). D'après le Théorème 1.2.9 et la remarque qui suit, $j\ :\ U\to X$ étant l'injection canonique, pour tout $l\in L$ il existe un relèvement $\hat{j}_l\ :\ U\to Y$ de j tel que $\hat{j}_l(x_0)=y_l$; soit $V_l=\hat{j}_l(U)$; alors d'après la démonstration de 1.2.9, $p^{-1}(U)=\bigcup_{l\in L}V_l$, les V_l sont disjoints deux à deux et $p|V_l\ :\ V_l\to U$ est un homéomorphisme. □

(g) $\tilde{X}$, localement homéomorphe à la variété X, *est une variété.*

(h) $\tilde{X}$ *est simplement connexe* ; en effet, soit $\delta\ :\ [0,1]\to\tilde{X}$ un arc fermé d'origine et d'extrémité (x_0,ε) (ε comme en (e)), alors $\gamma=p\circ\delta$ est un arc fermé de X d'origine x_0 ; le relèvement $\tilde{\gamma}$ de γ existe (e) ; à cause de l'unicité du relèvement, $\tilde{\gamma}=\delta$; de plus $\tilde{\gamma}(1)=(x_0,\bar{\gamma})=(x_0,\varepsilon)$ donc $\bar{\gamma}=\varepsilon$, i.e. γ est homotopiquement nul et par homotopie des relevés (1.1.5), δ est homotopiquement nul. □

5.5. Transformations de revêtement

5.5.1. $p\ :\ Y\to X$ étant un revêtement, on appelle *transformation de revêtement de* p tout homéomorphisme fibré $f\ :\ Y\to Y$. Muni de la loi de composition des applications, l'ensemble des transformations de revêtement de p est un groupe noté $\mathrm{Rev}_p\,(Y/X)$ ou simplement $\mathrm{Rev}\,(Y/X)$.

5.5.2. Si X et Y sont connexes et séparés, le revêtement p est dit de *Galois* (ou *normal* ou *régulier*) si, pour tout $(y_0,y_1)\in Y\times Y$ avec $p(y_0)=p(y_1)$, il existe une transformation de revêtement $f\ :\ Y\to Y$ telle que $f(y_0)=y_1$. D'après l'unicité du relèvement (1.1.4), f est unique.

Ex. : $\underset{z\mapsto z^k}{\mathbf{C}^*\to\mathbf{C}^*}$ $(k\in\mathbf{N}^*)$ est un revêtement de Galois car $p(z_1)=p(z_2)$ entraîne

$z_2=\omega z_1$ où ω est une racine k-ième de 1 et $z\mapsto\omega z$ est une transformation de revêtement.

5.5.3. Théorème. — ***Soient X une variété connexe, $p : \tilde{X}\to X$ son revêtement universel. Alors :* (a) *p est de Galois ;* (b) $\mathrm{Rev}(\tilde{X}/X)\approx\Pi_1(X)$.**

DÉMONSTRATION. — (a) Soient $y_0, y_1\in\tilde{X}$ appartenant à la même fibre de p, par définition de $\tilde{X}$, il existe une application fibrée $f : \tilde{X}\to\tilde{X}$ telle que $f(y_0)=y_1$; montrons que f est un homéomorphisme ; de même il existe une application fibrée $g : \tilde{X}\to\tilde{X}$ avec $g(y_1)=y_0$, alors $f\circ g$ et $g\circ f$ sont fibrées et fixent respectivement y_0 et y_1 ; d'après la définition de $\tilde{X}$, elles sont égales à l'identité de $\tilde{X}$: f est un homéomorphisme, donc une transformation de revêtement.

(b) Soient $x_0\in X$, $y_0\in\tilde{X}$ avec $p(y_0)=x_0$; $\Phi : \begin{array}{l}\mathrm{Rev}(\tilde{X}/X)\to\Pi_1(X, x_0)\\ \qquad\sigma\mapsto\overline{p\circ\gamma}\end{array}$ où γ est un arc de $\tilde{X}$ joignant y_0 à $\sigma(y_0)$; $\bar{\gamma}$ est unique car $\tilde{X}$ est simplement connexe ; $p\circ\gamma$ est un arc fermé de X d'origine x_0.

(i) Φ est un homomorphisme de groupe ;

(ii) Φ est injectif : soient $\sigma\in\mathrm{Rev}(\tilde{X}/X)$ tel que $\Phi(\sigma)=\varepsilon$; γ un arc de $\tilde{X}$ joignant y_0 à $\sigma(y_0)$, alors $p\circ\gamma$ est homotopiquement nul, donc $\sigma(y_0)=y_0$ et $\sigma=\mathrm{id}_{\tilde{X}}$;

(iii) Φ est surjectif : soient $\alpha\in\Pi_1(X, x_0)$, γ un arc représentant α et $\hat{\gamma}$ un relèvement de γ d'origine y_1. Alors p étant de Galois, il existe $\sigma\in\mathrm{Rev}(\tilde{X}/X)$ tel que $\sigma(y_0)=y_1$, donc $\Phi(\sigma)=\alpha$. □

5.5.4. EXEMPLES.

1. *Revêtements définis par* exp.

exp : $\mathbf{C}\to\mathbf{C}^*$ est le revêtement universel de $\mathbf{C}^*$ puisque $\mathbf{C}$ est simplement connexe (5.4.2) ; $\tau_n : \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ avec $\tau_n(z)=z+2i\pi n$ appartient à $\mathrm{Rev}(\mathbf{C}/\mathbf{C}^*)$; si $\sigma\in\mathrm{Rev}(\mathbf{C}/\mathbf{C}^*)$ comme $\exp(0)=1$, il existe $n\in\mathbf{Z}$ tel que $\sigma(0)=2\pi in=\tau_n(0)$, donc $\sigma=\tau$, d'où $\mathrm{Rev}(\mathbf{C}/\mathbf{C}^*)=\{\tau_n ; n\in\mathbf{Z}\}\approx\mathbf{Z}\approx\Pi_1(\mathbf{C}^*)$.

Soient $H=\{z\in\mathbf{C} ; \mathcal{R}e(z)<0\}$, $D^*=\{z\in\mathbf{C} ; 0<|z|<1\}$, H est simplement connexe,

$$\begin{array}{l}\exp : H\to D^*\\ \qquad z\mapsto\exp(\mathcal{R}e\, z)\, e^{i\mathcal{I}m\, z}\end{array}$$

est le revêtement universel de D^*.

2. Soient $\omega_1, \omega_2\in\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$-linéairement indépendants, $\Gamma=\mathbf{Z}\omega_1+\mathbf{Z}\omega_2$; $\mathbf{C}$ est le revêtement universel de $\Pi : \mathbf{C}\to\mathbf{C}/\Gamma=\mathbf{T}$ et τ_γ désignant la translation définie par $\gamma\in\Gamma$, $\mathrm{Rev}(\mathbf{C}/\mathbf{T})\approx\{\tau_\gamma ; \gamma\in\Gamma\}\approx\Gamma\approx\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\approx\Pi_1(\mathbf{T})$.

5.6. Description des revêtements

5.6.1. Soient $p : Y\to X$ un revêtement et G un sous-groupe de $\mathrm{Rev}(Y/X)$; deux points $y, y'\in Y$ sont dits *équivalents modulo G* $(y'\equiv y\ (\mathrm{mod}\, G))$ s'il existe $\sigma\in G$ tel que $\sigma(y)=y'$; l'équivalence $\mathrm{mod}\, G$ est une relation d'équivalence.

5.6.2. Théorème. — ***Soient $q : Y \to X$ un revêtement de variétés connexes, $p : \tilde{X} \to X$ le revêtement universel de X et $f : \tilde{X} \to Y$ une application fibrée. Alors f est un revêtement et il existe un sous-groupe distingué G de*** **Rev** $(\tilde{X}/X)$ ***tel que les deux conditions suivantes soient équivalentes :***

(i) ***deux points x, x' de $\tilde{X}$ ont même image par f ;***

(ii) ***$x \equiv x'$*** **(mod *G*).**

De plus $G = \Pi_1(Y)$ et $\tilde{X}$ est le revêtement universel de Y.

DÉMONSTRATION. — (a) *f est un homéomorphisme local.* q étant un revêtement de X, l'application continue fibrée f existe d'après la définition du revêtement universel p. Soient $x \in \tilde{X}$; $p(x) = \xi$; $f(x) = y$; p étant un homéomorphisme local, il existe des voisinages ouverts W_1 de x, U_1 de ξ tels que $p|W_1 : W_1 \to U_1$ soit un homéomorphisme ; q étant un revêtement, il existe un voisinage ouvert connexe U de ξ dans U_1 et des ouverts disjoints $(V_j)_{j \in J}$ de Y tels que $q^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$ et $q|V_j : V_j \to U$ soit un homéomorphisme. Soient $j_0 \in J$ tel que $y \in V_{j_0}$ et $W = p^{-1}(U) \cap W_1$; $p|W$ étant un homéomorphisme, W est connexe ; $f(W)$ étant connexe et contenant y, on a $f(W) = V_{j_0}$, donc $f|W = \varphi \circ p|W$, où φ est l'homéomorphisme inverse de $q|V$, donc $f|W$ est un homéomorphisme et f un homéomorphisme local.

(b) *f est un revêtement.* D'après le lemme 5.4.4, il suffit de montrer que f a la propriété de relever les arcs. Soit γ un arc de Y d'origine $y_0 = f(x_0)$ où $x_0 \in \tilde{X}$, montrons que γ a un relèvement sur $\tilde{X}$ d'origine x_0 ; $q \circ \gamma$ est un arc de X d'origine $q(y_0) = p(x_0)$ qui se relève en un arc $\tilde{\gamma}$ de $\tilde{X}$ d'origine x_0 (1.2.9) ; γ est un relèvement de $q \circ \gamma$, donc $\tilde{\gamma}$ relève γ car $f \circ \tilde{\gamma}$ et γ ont même projection par q, même origine et par l'unicité du relèvement (1.1.4), $f \circ \tilde{\gamma}$ et γ coïncident.

(c) $\tilde{X}$ est un relèvement simplement connexe de Y, donc c'est le revêtement universel de Y (5.4.2).

Soit $G = \operatorname{Rev}(\tilde{X}/Y)$; G est de Galois et isomorphe à $\Pi_1(Y)$ (5.5.3) ; c'est un sous-groupe de $\operatorname{Rev}(\tilde{X}/X)$ car toute transformation de revêtement de $\tilde{X}$ au-dessus de Y est une transformation de revêtement au-dessus de X ; G étant de Galois, (i) et (ii) sont équivalentes.

On vérifie que G est un sous-groupe distingué de $\operatorname{Rev}(\tilde{X}/X)$ à l'aide de la composition des transformations de revêtement.

5.6.3. EXERCICE. — Dans les notations de 5.6.2, on a :

$$\operatorname{Rev}(Y/X) \approx \operatorname{Rev}(\tilde{X}/X)/\operatorname{Rev}(\tilde{X}/Y).$$

5.6.4. Revêtements du disque épointé D^*

Théorème. — ***Soient X une surface de Riemann connexe et $f : X \to D^*$ un revêtement holomorphe non ramifié. Alors :***

(i) ***si le revêtement a une infinité de feuillets, il existe un isomorphisme analytique $\varphi : X \to H$*** **(voir 5.5.4)** ***tel que le diagramme***

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & H \arrow[dl, "\exp"] \\ & D^* & \end{tikzcd}$$

commute ;

(ii) ***si le revêtement a k feuillets ($k<\infty$), il existe un isomorphisme analytique $\varphi : X \to D^*$ tel que le diagramme***

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & D^* \arrow[dl, "p_k"] \\ & D^* & \end{tikzcd}$$

commute, avec $p_k(z)=z^k$.

DÉMONSTRATION. — $\exp : H \to D^*$ est le revêtement universel, donc il existe un morphisme $\psi : H \to X$ tel que $\exp = f \circ \psi$. Soit $G \subset \mathrm{Rev}\,(H/D^*) \approx \mathbf{Z}$ le sous-groupe défini par f (théorème 5.6.2).

Alors

(i) si $G=\{0\}$, ψ est biholomorphe et $\varphi=\psi^{-1}$,

(ii) si $G \neq \{0\}$, il est isomorphe à un sous-groupe propre non réduit à $\{0\}$ de $\mathbf{Z}$, donc de la forme $\mathbf{Z}k$ avec $k \in \mathbf{N}^*$; soit $g : H \to D^*$ l'application : $z \mapsto \exp\,(z/k)$; mais $z \equiv z' \pmod G$ signifie $z'-z=2\pi ink$; $n \in \mathbf{N}$, donc il existe une bijection $\varphi : X \to D^*$ telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & D^* \arrow[d, "g"] \\ D^* & H \arrow[l, "\exp"] \arrow[ul, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

ψ et g étant localement biholomorphes, φ est biholomorphe. g est localement inversible en $\zeta \mapsto \log \zeta^k$; par composition avec $\exp : H \to D^*$, on obtient $\underset{\zeta \mapsto \zeta^k}{D^* \to D^*}$, i.e. p_k. □

5.6.5. Théorème. — ***Soient X une surface de Riemann connexe, D le disque unité et $f : X \to D$ un morphisme propre non constant qui est non ramifié au-dessus de $D^* = D \setminus \{0\}$. Alors il existe un entier k et une application biholomorphe $\varphi : X \to D$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :***

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & D \arrow[dl, "p_k"] \\ & D & \end{tikzcd} \quad \textit{où} \quad p_k(z) = z^k.$$

DÉMONSTRATION. — (a) Soit $X^* = f^{-1}(D^*)$, alors $f|X^* : X^* \to D^*$ est un revêtement holomorphe non ramifié à un nombre fini k de feuillets puisque f est propre et D^* connexe, donc d'après 5.6.4, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[rr, "\varphi^*"] \arrow[dr, "f|X^*"'] & & D^* \arrow[dl, "p_k|D^*"] \\ & D^* & \end{tikzcd}$$

où φ^* est biholomorphe.

(b) $f^{-1}(0)$ est formé d'un seul point, sinon $f^{-1}(0)=\{b_1, \ldots, b_n\}$, $n\geqslant 2$ et il existe des voisinages $V_1, \ldots, V_n$ de $b_1, \ldots, b_n$ respectivement, disjoints, et $r>0$ tels que $D(r)=B(0, r)$ soit contenu dans D et

$$f^{-1}(D(r)) \subset V_1 \cup \ldots \cup V_n \tag{5.1}$$

$f^{-1}(D^*(r))$ est homéomorphe à $p_k^{-1}(D^*(r))=D^*(r^{1/k})$ qui est connexe. Mais b_j est un point d'accumulation de $f^{-1}(D^*(r))$, pour $j=1, \ldots, n$, i.e. tout voisinage V de b_j rencontre $f^{-1}(D^*(r))$, donc $f(V)$, voisinage ouvert de 0 car f est ouverte, rencontre $D^*(r)$, alors b_j appartient à l'adhérence de $f^{-1}(D^*(r))$ qui est connexe, pour $j=1, \ldots, n$, ce qui contredit (5.1) si $n\geqslant 2$, i.e. $f^{-1}(0)=b$ point unique de X ; φ^* a un prolongement continu φ tel que $\varphi(b)=0$; d'après 2.1.4, φ est holomorphe sur X. □

6. Surface de Riemann d'une fonction algébrique

6.1. Enoncé du théorème principal. Les surfaces de Riemann sont supposées connexes, sauf mention contraire. Le théorème principal du n° 6 est :

6.1.1.* Théorème. — *Soient X une surface de Riemann et $P(T)=T^n+c_1T^{n-1}+\ldots+c_n \in \mathcal{M}(X)[T]$ un polynôme irréductible de degré n. Alors il existe une surface de Riemann Y, un revêtement holomorphe ramifié à n feuillets $\Pi : Y \to X$ et une fonction méromorphe $F\in\mathcal{M}(Y)$ telle que $(\Pi^*P)(F)=0$. Le triple (Y, Π, F) est unique dans le sens suivant : si (Z, τ, G) a les mêmes propriétés, alors il existe une application holomorphe fibrée $\sigma : Z \to Y$ telle que $G=\sigma^*F$.

La démonstration, utilisant des résultats intermédiaires, sera donnée en 6.5.

6.1.2. En étendant, dans ce cas, la notion du prolongement analytique (4.2.2) pour Π ramifié, F est le *prolongement analytique maximal* de tout germe méromorphe φ de X tel que $P(\varphi)=0$; F est définie sur la surface de Riemann Y dite *surface de Riemann de la fonction F* ; en outre F est appelée la *fonction algébrique définie par le polynôme P* ; on désignera aussi cette fonction algébrique par (Y, Π, F) pour signifier que F est définie sur la surface de Riemann du revêtement Π.

***6.1.3.* Cas particulier**

$X=\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Alors on a vu (2.1.11) que les c_j sont des fonctions rationnelles d'une variable complexe. En outre, $\mathbf{P}^1$ est compact et $\Pi : Y\to\mathbf{P}^1$ propre, non constante, donc (démonstration de 2.1.9) surjective et Y *est* aussi *compacte.*

6.2. Fonctions symétriques élémentaires

6.2.1. Soient $\Pi : Y \to X$ un revêtement holomorphe non ramifié à n feuillets et f une fonction *méromorphe* sur Y. Tout point $x \in X$ a un voisinage ouvert U tel que $\Pi^{-1}(U) = \bigcup_{j=1}^{n} V_j$ où les V_j sont disjoints et $\Pi|V_j : V_j \to U$ est biholomorphe, $(j=1, \ldots, n)$; soit $\varphi_j : U \to V_j$ l'inverse de $\Pi|V_j$ et $f_j = \varphi_j^* f = f \circ \varphi_j$. Soit T une indéterminée, alors

$$\prod_{j=1}^{n} (T - f_j) = T^n + c_1 T^{n-1} + \ldots + c_n \; ;$$

$c_j = (-1)^j s_j(f_1, \ldots, f_n)$, où s_j est la j-ième fonction symétrique élémentaire à n variables. Les c_j sont méromorphes, sont définies localement, mais se recollent en des fonctions $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{M}(X)$ dites *fonctions symétriques élémentaires* de f par rapport à Π.

6.2.2. **Théorème. —** ***Soient $\Pi : Y \to X$ un revêtement holomorphe ramifié à n feuillets de surfaces de Riemann où Y n'est pas nécessairement connexe, $A \subset X$ un ensemble fermé discret de X qui contient toutes les valeurs critiques de Π et $B = \Pi^{-1}(A)$.***

Soient f une fonction holomorphe (resp. méromorphe) sur $Y \setminus B$ et

$$c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{O}(X \setminus A) \quad (\textit{resp. } \mathcal{M}(X \setminus A))$$

les fonctions symétriques élémentaires de f. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) ***f a une extension holomorphe (resp. méromorphe) à Y;***

(ii) ***pour tout $j = 1, \ldots, n$, c_j a une extension holomorphe (resp. méromorphe) à X.***

En particulier, les fonctions symétriques élémentaires d'une fonction méromorphe sur Y sont définies même quand le revêtement Π est ramifié.

Démonstration. — On notera une fonction et son extension par le même symbole. Soient $a \in A$, $\{b_1, \ldots, b_m\} = \Pi^{-1}(a)$; (z, U) une carte centrée en a avec $U \subset\subset X$ telle que $U \cap A = \{a\}$; $V = \Pi^{-1}(U) \subset\subset Y$ est un voisinage de chacun des b_k.

(a) $f \in \mathcal{O}(Y \setminus B)$.

(i)⇒(ii) : f ayant une extension holomorphe aux points b_l $(l=1, \ldots, m)$ est bornée sur $V \setminus \{b_1, \ldots, b_m\}$, donc c_j $(j=1, \ldots, n)$ est bornée sur $U \setminus \{a\}$; d'après le théorème de prolongement de Riemann (2.1.4), c_j a une extension holomorphe en a.

(ii)⇒(i) : c_j $(j=1, \ldots, n)$, ayant une extension holomorphe en a, est bornée sur $U \setminus \{a\}$; soit $y \in V \setminus \{b_1, \ldots, b_m\}$ et $x = \Pi(y)$, alors

$$f(y)^n + c_1(x) f(y)^{n-1} + \ldots + c_n(x) = 0;$$

$f(y)$ est racine d'un polynôme unitaire pour $x \in U \setminus \{a\}$, donc f, bornée sur $V \setminus \{b_1, \ldots, b_m\}$, a une extension holomorphe à V (2.1.4).

(b) $f \in \mathcal{M}(Y \setminus B)$. Soit z une coordonnée locale sur X centrée en a.

(i)⇒(ii) : $\eta=\Pi^* z\in\mathcal{O}(V)$ et s'annule aux points b_l, $l=1, ..., m$, donc il existe $k\in\mathbf{N}^*$ tel que $\eta^k f\in\mathcal{O}(V)$; les fonctions symétriques élémentaires de $\eta^k f$, soient $z^{kj}c_j$ sur $U\setminus\{a\}$ ont, d'après (a) une extension holomorphe à U, donc c_j $(j=1, ..., n)$ a une extension méromorphe à U.

(ii)⇒(i) : Il existe $k\in\mathbf{N}^*$ tel que, $z^{kj}c_j$ ait une extension holomorphe à U, donc $\eta^k f$ a une extention holomorphe à V, car

$$(\eta^k f(y))^n+z^k c_1(x)(\eta^k f(y))^{n-1}+\ldots+z^{kn}c_n(x)=0,$$

d'après (a), d'où f a une extension méromorphe à V. □

6.3. Extension d'un revêtement holomorphe non ramifié

6.3.1. **Théorème.** — ***Soient X une surface de Riemann, A un fermé discret de X et $X'=X\setminus A$. Soient Y' une autre surface de Riemann et $\Pi' : Y'\to X'$ un revêtement holomorphe non ramifié propre.***

Alors, Π' a une extension en un revêtement holomorphe ramifié de X, i.e. il existe une surface de Riemann Y, un morphisme holomorphe propre $\Pi : Y\to X$ et une application fibrée biholomorphe

$$\varphi : Y\setminus\Pi^{-1}(A)\to Y'.$$

DÉMONSTRATION. — On va construire un ensemble Y, réunion disjointe de Y' et d'un ensemble de points, une application $\Pi : Y\to X$, mettre sur Y une topologie telle que Π prolonge Π' et soit propre, finalement, mettre sur Y une structure de surface de Riemann pour que Π soit un morphisme holomorphe propre.

(a) Pour tout $a\in A$, soit (z_a, U_a) une carte de X, centrée en a, $U_a\subset\subset X$, telle que $z_a(U_a)$ soit le disque unité D de $\mathbf{C}$ et que $U_a\cap A=\{a\}$; soit $U_a^*=U_a\setminus\{a\}$; Π' étant propre $\Pi'(U_a^*)$ a un nombre fini, $n(a)$, de composantes connexes V_{al}^* ; $l=1, ..., n(a)$; V_{al}^* étant un ouvert de Y', $\Pi|V_{al}^* : V_{al}^*\to U_a^*$ est un revêtement non ramifié propre à k_{al} feuillets. D'après 5.6.4, il existe une application biholomorphe

$$(6.1)\qquad \begin{array}{ccccc} \zeta_{al} : V_{al}^* & \longrightarrow & D^* & & \zeta \\ {\scriptstyle \Pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{k_{al}}} & & \downarrow \\ U_a^* & \xrightarrow{z_a} & D^* & & \zeta^{k_{al}} \end{array}$$

telle que le diagramme (6.1) commute. On considère la réunion disjointe

$$Y=Y'\dot\cup\{q_{al}\ ;\ a\in A\ ;\ l=1, ..., n(a)\}$$

où les q_{al} sont des points.

(b) Il existe une topologie unique sur l'ensemble Y telle que, si $(W_i)_{i\in I}$ est un système fondamental de voisinages de a dans X,

$$\{q_{al}\}\cup\{\Pi'^{-1}(W_i)\cap V_{al}^*\}_{i\in I}$$

soit un système fondamental de voisinages de q_{al}, $a\in A$ et que, pour tout point $y'\in Y'$, un système fondamental de voisinages de y' dans Y soit un système fondamental de voisinages dans Y'.

(c) Alors

$$\begin{aligned} \Pi : Y &\to X \\ y &\mapsto \Pi'(y) \quad \text{si} \quad y \in Y', \\ q_{al} &\mapsto a \quad\quad \text{si} \quad q_{al} \in Y \setminus Y' \end{aligned}$$

est une application continue propre.

$\Pi|Y'$ est une application holomorphe, en effet : soient $V_{al} = V_{al}^* \cup \{q_a\}$ et ζ_{al} le prolongement $V_{al} \to D$ de $\zeta_{al} : V_{al}^* \to D^*$ avec $\zeta_{al}(q_{al}) = 0$; ζ_{al} est holomorphe et définit une carte de domaine V_{al} compatible avec les cartes holomorphes de Y', d'où une structure de surface de Riemann sur Y telle que Π soit holomorphe ; en prenant $\varphi = \mathrm{id}_{Y \setminus \Pi^{-1}(a)} : Y \setminus \Pi^{-1}(a) \to Y'$, on a la conclusion du théorème. □

6.3.2. Si $\Pi : Y \to X$ est un revêtement holomorphe, éventuellement ramifié, on appelle *transformation de revêtement* toute application biholomorphe fibrée $\sigma : Y \to Y$; l'ensemble de ces applications constitue un groupe qu'on note encore $\mathrm{Rev}(Y/X)$; cela généralise 5.5.1.

6.3.3. **Corollaire de 6.3.1.** — ***Toute transformation de revêtement*** $\sigma' \in \mathrm{Rev}(Y'/X')$ ***s'étend en un élément*** σ ***de*** $\mathrm{Rev}(Y/X)$. □

6.3.4. **Théorème (unicité de l'extension).** — ***Soient*** $\Pi : Y \to X$; $\tau : Z \to X$ ***des revêtements holomorphes propres,*** $A \subset X$ ***un fermé discret,*** $X' = X \setminus A$; $Y' = \Pi^{-1}(X')$; $Z' = \tau^{-1}(X')$ ***tels que*** $\Pi|Y'$ ***et*** $\tau|Z'$ ***soient non ramifiés ; alors toute application biholomorphe fibrée*** $\sigma' : Y' \to Z'$ ***s'étend en une application biholomorphe fibrée*** $\sigma : Y \to Z$.

DÉMONSTRATION. — Soit (z, U) une carte de X centrée en $a \in A$ telle que $z(U)$ soit le disque unité et $U \cap A = \{a\}$. On pose $U^* = U \setminus \{a\}$, alors $\Pi|\Pi^{-1}(U^*)$ et $\tau|\tau^{-1}(U^*)$ sont non ramifiés. Soient $V_1, \ldots, V_n$; $W_1, \ldots, W_m$ les composantes connexes de $\Pi^{-1}(U^*)$ et de $\tau^{-1}(U^*)$ respectivement ; $\sigma'|\Pi^{-1}(U^*) : \Pi^{-1}(U^*) \to \tau^{-1}(U^*)$ étant biholomorphe, on a $m = n$ et, après un éventuel changement de numérotage, $\sigma'(V_k^*) = W_k^*$; $\Pi|V_k^*$ et $\tau|W_k^*$ sont des revêtements finis non ramifiés de U^*, alors $V_k \cap \Pi^{-1}(a)$ et $W_k \cap \tau^{-1}(a)$ sont des points b_k et c_k resp. (théorème 5.6.5). Alors $\sigma'|\Pi^{-1}(U^*)$ est prolongé à $\Pi^{-1}(U)$ par $b_k \mapsto c_k$; $\Pi|V_k$ et $\tau|W_k$ étant propres, l'extension de $\sigma'|\Pi^{-1}(U^*)$ à $\Pi^{-1}(U)$ est un homéomorphisme et, par le théorème de prolongement de Riemann (2.1.4) un biholomorphisme (5.6.5), d'où l'extension globale $\sigma : Y \to Z$ de σ'. □

6.4. Fonctions algébriques locales

6.4.1. **Lemme.** — ***Soient*** $c_1, \ldots, c_n$ ***des fonctions holomorphes sur le disque*** $D(R) = \{z \in \mathbf{C} ; |z| < R\}$; $w_0 \in \mathbf{C}$ ***un zéro simple du polynôme***

$$T^n + c_1(0)T^{n-1} + \ldots + c_n(0) \in \mathbf{C}[T].$$

Alors il existe $r \in]0, R]$ ***et une fonction*** φ ***holomorphe sur*** $D(r)$ ***telle que*** $\varphi(0) = w_0$ ***et*** $\varphi^n + c_1\varphi^{n-1} + \ldots + c_n = 0$ ***sur*** $D(r)$.

DÉMONSTRATION. — (a) On pose $F(z, w)=w^n+c_1(z)w^{n-1}+\ldots+c_1(z)$ pour $z\in D(R)$; $w\in \mathbf{C}$; w_0 étant un zéro simple et $F(0, w)$ n'ayant que des zéros isolés, la fonction $w\mapsto F(0, w)$ a le seul zéro w_0 dans le disque $\{w\in \mathbf{C} ; |w-w_0|\leqslant\varepsilon\}$ pour $\varepsilon>0$ assez petit. F étant continue, il existe $r\in]0, R]$ tel que, dans $\{(z, w)\in \mathbf{C}^2, |z|<r ; |w-w_0|=\varepsilon\}$, la fonction F n'ait pas de zéro.

Pour $z\in D(r)$, d'après (ch. 2, 6.1), le nombre de zéros de $w\mapsto F(z, w)$ dans le disque $|w-w_0|\leqslant\varepsilon$, est $n(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|w-w_0|=\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial w}(z, w)\cdot F^{-1}(z, w)\,\mathrm{d}w$; mais $n(z)$ est une fonction continue de z, $D(r)$ est connexe et $n(0)=1$, donc $n(z)=1$ pour tout $z\in D(r)$.

(b) Soit $f(w)$ une fonction holomorphe ayant un seul zéro simple w_1 dans le disque $|w-w_0|\leqslant\varepsilon$, alors $f(w)=(w-w_1)g(w)$ avec $g(w)$ holomorphe sans zéro sur $|w-w_0|\leqslant\varepsilon$. Considérons la 1-forme

$$\eta = w\,\mathrm{d}\log f(w) = w\frac{\mathrm{d}f(w)}{f(w)} = w\frac{\mathrm{d}w}{w-w_1}+w\frac{\mathrm{d}g(w)}{g(w)} =$$

$$=\left[\frac{w-w_0}{(w-w_0)-(w_1-w_0)}+\frac{w_0}{(w-w_0)-(w_1-w_0)}\right]\mathrm{d}w+\psi(w)$$

où $\psi(w)$ est une 1-forme différentielle holomorphe.

Posons $\zeta=w-w_0$; $\zeta_1=w_1-w_0$, alors $\eta=\left[\dfrac{\zeta}{\zeta-\zeta_1}+w_0\dfrac{1}{\zeta-\zeta_1}\right]\mathrm{d}\zeta+\psi$; on a $|\zeta_1|<\varepsilon$ et sur $|\zeta|=\varepsilon$, $\dfrac{\zeta}{\zeta-\zeta_1}=\dfrac{1}{1-\dfrac{\zeta_1}{\zeta}}=1+\dfrac{\zeta_1}{\zeta}+\ldots$, $\dfrac{w_0}{\zeta-\zeta_1}=w_0\dfrac{1}{\zeta}\dfrac{1}{1-\dfrac{\zeta_1}{\zeta}}=$ $=w_0\dfrac{1}{\zeta}\left(1+\dfrac{\zeta_1}{\zeta}+\ldots\right)$. Alors, d'après le théorème des résidus (ch. 2, 5.2.2)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-w_1|=\varepsilon} w\,\mathrm{dlog}\, f(w) = \mathrm{res}_{\zeta=0}\big(w\,\mathrm{dlog}\, f(w)\big) = \zeta_1+w_0 = w_1.$$

Alors $\varphi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|w-w_0|=\varepsilon} w\frac{\partial F}{\partial w}(z, w)\cdot F(z, w)^{-1}\,\mathrm{d}w$ est le zéro de $F(z, w)$ dans $|w-w_0|<\varepsilon$.

La fonction sous le signe $\int$ ci-dessus est holomorphe en z, donc φ est holomorphe sur $D(r)$ et telle que $F(z, \varphi(z))=0$ sur $D(r)$. □

6.4.2. Corollaire. — ***Soit X une surface de Riemann ; pour tout $x\in X$, soit***

$$P(T) = T^n+c_1T^{n-1}+\ldots+c_n\in \mathcal{O}_x[T].$$

Si le polynôme $T^n+c_1(x)T^{n-1}+\ldots+c_n(x)\in \mathbf{C}[T]$ a n zéros distincts $w_1, \ldots, w_n$, alors il existe $\varphi_1, \ldots, \varphi_n\in \mathcal{O}_x$ tels que $\varphi_j(x)=w_j$ et

$$P(T) = \prod_{j=1}^{n}(T-\varphi_j). \quad \square$$

6.5. Démonstration du théorème principal 6.1.1

***6.5.1.* Remarque.** — La dernière assertion de 6.1.1 équivaut à l'unicité de (Y, Π, F) à isomorphisme près.

***6.5.2.* Existence de Y**

Soit $\Delta \in \mathcal{M}(X)$ le discriminant de $P(T)$; $P(T)$ étant irréductible, $\Delta \neq 0$; alors il existe un fermé discret $A \subset X$ tel que, pour tout $x \in X' = X \setminus A$, $\Delta(x) \neq 0$ et les fonctions $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ sont holomorphes.

Soient $Y' = \{\varphi \in \mathcal{O}_x,\ x \in X'\ ;\ P(\varphi) = 0\} \subset L\mathcal{O}$ et $\Pi' : \begin{array}{c} Y'_x \to X \\ \varphi \mapsto x \end{array}$ où $Y'_x = Y' \cap \mathcal{O}_x$.

D'après 6.4.2, pour tout $x \in X'$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X' et des fonctions $f_j \in \mathcal{O}(U)$, $j = 1, \ldots, n$ telles que $P(T)|U = \prod_{j=1}^{n} (T - f_j)$, alors $\Pi'^{-1}(U) = \bigcup_{j=1}^{n} [U, f_j]$ où $[U, f_j] = \{f_{jy},\ y \in U\}$ est un ouvert de $L\mathcal{O}$ et $\Pi'|[U, f_j] : [U, f_j] \to U$ est un homéomorphisme, d'après 3.3.2 et la notation de la démonstration de 3.5.3 ; Y' est une surface de Riemann non nécessairement connexe, et c'est un revêtement holomorphe non ramifié de X'.

Soit $f : Y' \to \mathbf{C}$ défini par $f(\varphi) = \varphi(\Pi'(\varphi))$; c'est une fonction holomorphe sur Y' satisfaisant, pour tout $y \in Y'$, à

$$f(y)^n + c_1(\Pi'(y)) f(y)^{n-1} + \ldots + c_n(\Pi'(y)) = 0.$$

D'après 6.3.1, le revêtement Π' peut être étendu en un revêtement holomorphe ramifié $\Pi : Y \to X$ de X pour lequel $Y' = \Pi^{-1}(X')$.

Les c_j sont définies sur X tout entier ; d'après 6.2.2, f a une extension $F \in \mathcal{M}(X)$ telle que

$$\Pi^* P(F) = F^n + (\Pi^* c_1) F^{n-1} + \ldots + \Pi^* c_n = 0.$$

6.5.3. *Y est connexe.* Y a un nombre fini de composantes connexes Y_l, $l = 1, \ldots, k$ pour lesquelles $\Pi|Y_l : Y_l \to X$ est un revêtement à n_l feuillets avec $\sum n_l = n$.

En utilisant les fonctions symétriques élémentaires de $F|Y_l$, on obtient des polynômes $P_l(T) \in \mathcal{M}(X)\ [T]$ de degré n_l tels que :

$$P(T) = \prod_{l=1}^{k} P_l(T),$$

mais $P(T)$ étant irréductible, on a $k = 1$.

6.5.4. L'unicité résulte de 6.3.4. □

6.6. Exemple

Soit $f(z) = (z - a_1) \ldots (z - a_n)$ un polynôme à zéros distincts $a_j \in \mathbf{C}$; f est une fonction méromorphe sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dont le seul pôle est ∞. Le polynôme $P(T) = T^2 - f$ est irréductible sur $\mathcal{M}(\mathbf{P}^1)$ et définit la fonction algébrique notée $\sqrt{f(z)}$ dont la surface de Riemann Y est définie dans le théorème 6.1.1 avec le revêtement ramifié $\Pi : Y \to \mathbf{P}^1$. Soient $A=\{a_1, ..., a_n\} \cup \{\infty\}$; $X'=\mathbf{P}^1 \setminus A$; $Y'=\Pi^{-1}(X')$; $\Pi'= =\Pi|Y' : Y' \to X'$ est un revêtement holomorphe non ramifié à 2 feuillets.

(a) Pour $j \in [1, ..., n]$, soit $U_j=\{z \in \mathbf{C} ; |z-a_j|<r\}$ tel que $U_j \cap A=\{a_j\}$; sur U_j, on a $f=(z-a_j)h^2(z)$ où $h(z)$ est holomorphe sans zéro. Posons $\zeta=a_j+\varrho e^{i\theta}$, $\varrho \in]0, r[$, alors, d'après le Lemme 6.4.1, pour tout $\zeta \in U_j$, il existe un germe $\varphi_\zeta \in \mathcal{O}_\zeta$ tel que $\varphi_\zeta^2=f$, donc (6.2) $\varphi_\zeta(\zeta)=\varrho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} h(\zeta)$; soient $U_j^*=U_j \setminus \{a_j\}$ et $V_j^*= =\Pi^{-1}(U_j^*)$, $\Pi|V_j^* : V_j^* \to U_j^*$ est un revêtement connexe à 2 feuillets, sinon V_j^* se décompose en deux composantes connexes isomorphes à U_j^* et $\varphi_\zeta(a_j+\varrho e^{i(\theta+2\pi)})= =\varphi_\zeta(a_j+\varrho e^{i\theta})$, ce qui contredit (6.2).

(b) Etude au voisinage de ∞. Posons $\zeta=z^{-1}$ et $U^*=\{z \in \mathbf{C} ; |z|>r\}= =\{0 \neq \zeta \in \mathbf{C}, |\zeta|<r^{-1}\}$; on a $f(z)=f(\zeta^{-1})=\zeta^{-n}(1-\zeta a_1)...(1-\zeta a_n)=\zeta^{-n}g^2(\zeta)$ où g est une fonction holomorphe sans zéro sur $U=\{\zeta \in \mathbf{C} ; |\zeta|<r^{-1}\}$. Alors, on a les deux cas suivants :

(i) $n=2p+1$ avec $p \in \mathbf{N}$, $f(\zeta)=\zeta^{-1}(\zeta^{-p}g(\zeta))^2$: P définit un revêtement ramifié au-dessus de U ayant un seul point au-dessus de $\zeta=0$;

(ii) $n=2p$; avec $p \in \mathbf{N}^*$, $f(\zeta)=(\zeta^{-p}g(\zeta))^2$: P définit un revêtement non ramifié au-dessus de U ayant deux points au-dessus de $\zeta=0$.

6.7. Extensions de corps de fonctions méromorphes

6.7.1. Soit $\pi : Y \to X$ un morphisme non constant de surfaces de Riemann. Alors

$$\pi^* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y)$$
$$\varphi \mapsto \varphi \circ \pi$$

est un monomorphisme de corps.

6.7.2. **Théorème.** — ***Soit $\pi : Y \to X$ un revêtement holomorphe non ramifié à n feuillets. Alors le monomorphisme $\pi^* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y)$ est une extension algébrique de corps de degré $\leqslant n$. De plus, s'il existe $h \in \mathcal{M}(Y)$ et $x \in X$ tels que, pour $y_j \in \pi^{-1}(x)$, les valeurs $h(y_j)$, $j=1, ..., n$ soient toutes distinctes, l'extension π^* est de degré n.***

DÉMONSTRATION. — Soient $f \in \mathcal{M}(Y)$ et $c_1, ..., c_n \in \mathcal{M}(X)$ les fonctions symétriques élémentaires de f, on a :

$$f^n+(\pi^* c_1)f^{n-1}+...+\pi^* c_n = 0. \tag{6.3}$$

Posons $L=\mathcal{M}(Y)$; $K=\mathcal{M}(X)$. Toute $f \in L$ est algébrique d'après (6.3) et le degré du polynôme minimal de f sur K est $\leqslant n$. Soit $f_0 \in L$ dont le degré n_0 du polynôme minimal est maximal.

On a $L=K(f_0)$, en effet, soit $f \in L$, considérons le corps $K(f_0, f)$. D'après le théorème de l'élément primitif, il existe $g \in L$ tel que

$$K(f_0, f) = K(g), \tag{6.4}$$

d'après le choix de n_0, on a :

$$\dim_K K(g) \leqslant n_0;$$
$$\dim_K (f_0, f) \geqslant \dim_K K(f_0) = n_0,$$

donc, d'après (6.4), on a $K(f_0)=K(f_0, f)$, i.e. $f \in K(f_0)$.

Si m est le degré du polynôme minimal de h, la fonction h prend au plus m valeurs distinctes en tout point de X, donc $n \leqslant m \leqslant n_0 \leqslant n$. □

6.7.3. Soient $\pi : Y \to X$ un revêtement holomorphe ramifié de surfaces de Riemann, A l'ensemble des valeurs critiques de π ; $X' = X \setminus A$, $Y' = Y \setminus \pi^{-1}(A)$. Alors le revêtement π est dit *de Galois* si $\pi' = \pi | Y'$ est de Galois (5.5.2).

6.7.4.* Lemme. — *Dans les hypothèses de* 6.7.3, *il existe un homomorphisme de groupes

$$\mathbf{Rev}\,(Y/X) \to \mathbf{Aut}\,(\mathcal{M}(Y))$$
$$\sigma \mapsto (f \mapsto \sigma f = f \circ \sigma^{-1}).$$

***En outre* $f \mapsto \sigma f$ *laisse invariant le sous-corps* $\pi^* \mathcal{M}(X)$ *de* $\mathcal{M}(Y)$ *donc est un élément du groupe de Galois* Aut $(\mathcal{M}(Y)/\pi^* \mathcal{M}(X))$.**

DÉMONSTRATION. — Soient $\sigma, \tau \in \mathrm{Rev}\,(Y/X)$, alors, pour tout $f \in \mathcal{M}(Y)$, $(\sigma\tau)f = = f \circ (\sigma\tau)^{-1} = f \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1} = \sigma(f \circ \tau^{-1}) = \sigma(\tau f)$. □

6.7.5.* Théorème. — *Soient X une surface de Riemann,* $K = \mathcal{M}(X)$ *;* $P(T) \in K[T]$ *un polynôme unitaire irréductible de degré n ;* (Y, π, F) *la fonction algébrique définie par* $P(T)$ *;* $L = \mathcal{M}(Y)$*. Le monomorphisme* $\pi^* : K \to L$ *identifie K à un sous-corps de L. Alors :

(i) *L : K est une extension de corps de degré n et* $L \approx K[T]/(P(T))$,

(ii) *toute* $\sigma \in \mathrm{Rev}\,(Y/X)$ *induit un automorphisme* $(f \mapsto \sigma f = f \circ \sigma^{-1})$ *de L laissant K fixe et* λ *:*

$$\lambda : \mathbf{Rev}\,(Y/X) \to \mathbf{Aut}\,(L/K)$$
$$\sigma \mapsto (f \mapsto \sigma f)$$

est un isomorphisme de groupe ;

(iii) *les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $\pi : Y \to X$ *est de Galois ;*

(b) *l'extension L : K est de Galois.*

DÉMONSTRATION. —

(i) résulte de 6.1.1, de 6.7.2 et du fait que les deux corps L et $K[T]/(P(T))$ ont même degré n sur K ;

(ii) λ est injectif car si $\sigma \neq \mathrm{id}$, on a $\sigma F \neq F$.

λ est surjectif : soit $\alpha \in \mathrm{Aut}\,(L/K)$, alors $(Y, \pi, \alpha F)$ est une fonction algébrique définie par le polynôme $P(T)$. D'après l'unicité dans le théorème 6.1.1, il existe $\tau \in \mathrm{Rev}\,(Y/X)$ telle que $\alpha F = \tau^* F$, soit $\sigma = \tau^{-1}$ alors

$$\sigma F = F \circ \sigma^{-1} = F \circ \tau = \tau^* F = \alpha F.$$

Puisque L est engendré par F sur K, $f \mapsto \sigma f$ coïncide avec α.

(iii) π de Galois équivaut à : Rev (Y/X) a n élements,

L/K de Galois équivaut à Aut (L/K) a n éléments. □

6 SURFACES DE RIEMANN COMPACTES

L'outil topologique utilisé ici est la cohomologie à valeur dans un faisceau qui est, successivement, celui des fonctions ou des formes C^∞, holomorphes ou méromorphes. Le lemme de Poincaré pour d et pour d″ permet d'établir des théorèmes de de Rham (n° 1). Une notion d'analyse utilisée également est celle de fonction harmonique, d'abord dans un ouvert de **C** (n° 4), puis sur une surface de Riemann munie d'une métrique hermitienne sur laquelle on définit aussi les formes différentielles harmoniques (n° 5). Les résultats suivants sont valides sur une surface de Riemann compacte X.

(1) Le premier groupe de cohomologie de X à valeurs dans le faisceau $\mathcal{O}$ des fonctions holomorphes est de dimension finie (théorème de finitude) ; cette dimension est appelée le genre de X (n° 2).

(2) Le théorème de Hodge décrit la cohomologie de X à coefficients complexes à l'aide des formes harmoniques (n° 5).

(3) Etant donné un diviseur D de X, le théorème de Riemann—Roch permet d'évaluer la dimension de l'espace vectoriel des fonctions méromorphes multiples de $-D$, en fonction du genre de X, du degré et de l'indice de spécialité de D (nn° 3 et 8.6.3), il en résulte immédiatement que toute surface de Riemann compacte est la surface de Riemann d'une fonction algébrique sur la sphère de Riemann $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, donc est étalée sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

(4) Soient f_t une fonction méromorphe sur X dépendant rationnellement de $t \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$; c_t une 1-chaîne différentielle joignant un point fixé aux zéros de f_t, ω étant une 1-forme méromorphe sur X, le théorème d'Abel affirme que $u(t) = \int_{c_t} \omega$ est la somme d'une fonction rationnelle et du logarithme d'une fonction rationnelle de t, à l'addition près des périodes de ω. Si ω est holomorphe sur X, u est constante et, dans ce cas, une réciproque est établie (n° 6).

(5) Le théorème de dualité de Serre établit un isomorphisme entre l'espace des formes méromorphes multiples de $-D$ et le dual de l'espace de cohomologie de dimension 1, à valeur dans le faisceau des 1-formes méromorphes multiples de D (n° 8). Ce théorème a de nombreuses applications, en particulier un théorème d'annulation de groupes de cohomologie d'où résultent les propriétés de l'indice de spécialité d'un diviseur et l'existence d'un plongement de toute surface de Riemann compacte dans un espace projectif complexe.

Le théorème de finitude entraîne que les fibrés holomorphes en droites sont définis par les diviseurs, alors le théorème de Riemann—Roch et le théorème de dualité de Serre se traduisent en énoncés sur les fibrés (nn° 7 et 8).

1. Cohomologie à valeur dans un faisceau

1.1. Nerf d'un recouvrement ouvert ; chaînes

Soit $\mathscr{U}=(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert d'un espace topologique X. On appelle *nerf* $\mathscr{N}$ de $\mathscr{U}$ le *complexe simplicial* dont les *simplexes* de *dimension* q sont les $(q+1)$-uples $\sigma=(i_0, \ldots, i_q)$ tels que $U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_q}\neq\emptyset$, $(i_0, \ldots, i_q)\in I^{q+1}$. On appelle *support* de σ la partie $\operatorname{spt}\sigma=U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_q}$. Le groupe libre engendré par les simplexes de dimension q, i.e. le groupe des combinaisons linéaires formelles de simplexes à coefficients dans $\mathbf{Z}$ est appelé le groupe des q-chaînes (ou des chaînes de dimension q). σ étant un q-simplexe, pour $j=0, \ldots, q$, $\sigma_j=(i_0, \ldots, \hat{\imath}_j, \ldots, i_q)$ est un $(q-1)$-simplexe ; on appelle bord de σ la $(q-1)$-chaîne $\partial\sigma=\sum_{i=0}^{q}(-1)^q(i_0, \ldots, \hat{\imath}_j, \ldots, i_q)$. Le *bord* d'une chaîne est défini par linéarité.

1.2. Groupes des q-cochaînes

On appelle *q-cochaîne* (ou cochaîne de dimension q) de X, a valeur dans le faisceau F de groupes abéliens, toute application $c : (i_0, \ldots, i_q)\mapsto f_{i_0\ldots i_q}\in F(U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_q})$, i.e. un élément du groupe

$$C^q(\mathscr{U}, F) = \prod_{(i_0, \ldots, i_q)\in I^{q+1}} F(U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_q}).$$

On considérera habituellement le sous-groupe des *cochaînes alternées,* i.e. des fonctions alternées c des indices $i_0, \ldots, i_q$; une cochaîne alternée est nulle sur tout $(q+1)$-uple $(i_0, \ldots, i_q)$ qui n'est pas un simplexe ; on notera encore $C^q(\mathscr{U}, F)$ le groupe additif des q-cochaînes alternées. On posera $f_{i_0\ldots i_q}=c(\sigma)$ pour le simplexe $\sigma=(i_0, \ldots, i_q)$.

On appelera *cobord* δc de c la $(q+1)$-cochaîne (alternée)

$$\delta c : \tau \mapsto \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j(c(\tau_j)|\operatorname{spt}\tau).$$

On vérifie immédiatement : $\delta\circ\delta=0$

Ex : $q=0$ $c=(f_i)_{i\in I}$; $\delta(c)=(f_{jk})$ avec $f_{jk}=(f_j-f_k)|U_j\cap U_k\neq\emptyset$;

$q=1$ $c=(f_{ij})_{(i,j)\in I^2}$; $\delta(c)_{ijk}=(f_{jk}-f_{ik}+f_{ij})|U_i\cap U_j\cap U_k\neq\emptyset$.

1.3. Groupe de cohomologie de dimension q, $(q \geqslant 1)$

1.3.1. L'opérateur cobord δ définit les homomorphismes de groupes

$$\delta^q : C^q(\mathscr{U}, F) \to C^{q+1}(\mathscr{U}, F).$$

On pose : $Z^q(\mathscr{U}, F) = \operatorname{Ker} \delta^q$ et on appelle ses éléments les *cocycles* de dimension q ; $B^q(\mathscr{U}, F) = \operatorname{Im} \delta^{q-1}$ et on appelle ses éléments les *cobords* de dimension q.

Le groupe quotient $H^q(\mathscr{U}, F) = Z^q(\mathscr{U}, F)/B^q(\mathscr{U}, F)$ est appelé le *q-ième groupe de cohomologie* (ou groupe de cohomologie de dimension q) relatif au recouvrement $\mathscr{U}$ et au faisceau F.

1.3.2. Changement de recouvrement

Un recouvrement ouvert $\mathscr{V} = (V_k)_{k \in K}$ de X est dit *plus fin que* $\mathscr{U}$ si, pour tout $k \in K$, il existe $i \in I$ tel que $V_k \subset U_i$; on note $\mathscr{V} \prec \mathscr{U}$; alors il existe au moins une application (dite de raffinement) $\tau : K \to I$ telle que

$$\text{(1.1)} \qquad \text{pour tout} \quad k \in K, \quad V_k \subset U_{\tau k}$$

d'où une application

$$t_{\mathscr{V}}^{\mathscr{U}} : Z^1(\mathscr{U}, F) \to Z^1(\mathscr{V}, F)$$
$$(f_{ij}) \mapsto (g_{kl} = f_{\tau k, \tau l} | V_k \cap V_l)$$

compatible avec δ ; $t_{\mathscr{V}}^{\mathscr{U}}$ définit une application

$$t_{\mathscr{V}}^{\mathscr{U}} : H^1(\mathscr{U}, F) \to H^1(\mathscr{V}, F)$$

ayant les propriétés suivantes :

(a) *$t_{\mathscr{V}}^{\mathscr{U}}$ est indépendante de l'application τ choisie.*

Démonstration. — Si $\tau' : K \to I$ satisfait aussi à (1.1), posons $g'_{kl} = f_{\tau' k, \tau' l} | V_k \cap V_l$, alors

$$G_{kl} = g_{kl} - g'_{kl} = f_{\tau k, \tau l} - f_{\tau' k, \tau' l} = f_{\tau k, \tau l} + f_{\tau l \tau' k} - f_{\tau l \tau' k} - f_{\tau' k \tau' l} \quad \text{sur} \quad V_k \cap V_l$$

et $V_k \subset U_{\tau k} \cap U_{\tau' k}$, mais (f_{ij}) est un cocycle, donc $f_{\tau k, \tau l} + f_{\tau l, \tau' k} = f_{\tau_k, \tau'_k}$;

$$G_{kl} = f_{\tau k, \tau' k} - f_{\tau_l, \tau'_l} = h_k - h_l \quad \text{où} \quad h_k = f_{\tau k \tau' k} | V_k \in F(V_k),$$

donc le cocycle (G_{kl}) est un cobord. □

(b) *$t_{\mathscr{V}}^{\mathscr{U}} : H^1(\mathscr{U}, F) \to H^1(\mathscr{V}, F)$ est injective.*

Démonstration. — Soit $(f_{ij}) \in Z^1(\mathscr{U}, F)$ dont l'image par $t_{\mathscr{V}}^{\mathscr{U}}$ est un cobord, i.e.

$$f_{\tau k, \tau l} = g_k - g_l \quad \text{sur} \quad V_k \cap V_l \quad \text{avec} \quad g_k \in F(V_k).$$

Sur $U_i \cap V_k \cap V_l$, $g_k - g_l = f_{\tau k, \tau l} = f_{\tau k, i} + f_{i, \tau l} = f_{i, \tau l} - f_{i, \tau k}$, donc $f_{i, \tau l} + g_l = f_{i, \tau k} + g_k$; $(U_i \cap V_k)_{k \in K}$ est un recouvrement ouvert de U_i, d'après l'axiome (F2), il existe $h_i \in (U_i)$ tel que $h_i = f_{i, \tau k} + g_k$ sur $U_i \cap V_k$. Alors, sur $U_i \cap U_j \cap V_k$, on a $f_{ij} = f_{i, \tau k} + f_{\tau k, j} = f_{i, \tau k} + g_k - f_{j, \tau k} - g_k = h_i - h_j$. Cette identité est vraie pour tout $k \in K$, donc d'après l'axiome d'unicité (F1), on a l'égalité $f_{ij}=h_i-h_j$ sur $U_i\cap U_j$: (f_{ij}) est un cobord. □

1.3.3. Soient $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ trois recouvrements ouverts de X tels que $\mathcal{W}\prec\mathcal{V}\prec\mathcal{U}$, alors $t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}}=t^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}\circ t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}$. Le système $(H^1(\mathcal{U}, F), t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}})$ est un système inductif ; soit $H^1(X, F)$ la limite inductive $\varinjlim_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U}, F)$ munie canoniquement d'une structure de groupe additif et d'applications $t^{\mathcal{U}} : H^1(\mathcal{U}, F)\to H^1(X, F)$ telles que $t^{\mathcal{U}}=t^{\mathcal{V}}\circ t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}$.

En outre, si F est un faisceau d'espaces vectoriels sur **R** (ou **C**), $H^1(\mathcal{U}, F)$ et $H^1(X, F)$ sont des espaces vectoriels sur **R** (ou **C**), $t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}$ et $t^{\mathcal{U}}$ sont des applications **R**- (ou **C**-) linéaires.

1.3.4. **Théorème.** — ***Dans les notations ci-dessus, $t^{\mathcal{U}}$ est injectif ; en particulier si, pour tout $\mathcal{U}$, $H^1(\mathcal{U}, F)=0$, alors $H^1(X, F)=0$.***

DÉMONSTRATION. — Résulte immédiatement de 1.3.2 (b) et de la définition de $t^{\mathcal{U}}$. □

1.3.5. **Théorème de Leray (en dimension 1).** — ***Soient F un faisceau de groupes abéliens sur un espace topologique X et $\mathcal{U}=(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement 1-acyclique de X, i.e. tel que, pour tout $i\in I$, on ait $H^1(U_i, F)=0$. Alors $H^1(\mathcal{U}, F)\approx H^1(X, F)$.***

DÉMONSTRATION. — Il suffit de montrer que, pour tout $\mathcal{V}\prec\mathcal{U}$, $t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}$ est un isomorphisme. $t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}$ étant injectif (1.3.2 (b)), il suffit de montrer la surjectivité. Soient $\mathcal{V}=(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ et $\tau : A\to I$ une application de raffinement. Soit $(f_{\alpha\beta})\in Z^1(\mathcal{V}, F)$, il s'agit de trouver $F_{ij}\in Z^1(\mathcal{U}, F)$ tels que $(F_{\tau\alpha,\tau\beta})-(f_{\alpha\beta})$ soit un cobord relatif à $\mathcal{V}$.

$(U_i\cap V_\alpha)_{\alpha\in A}$ est un recouvrement ouvert de U_i noté $U_i\cap\mathcal{V}$. Par hypothèse et $t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}$ étant injectif, on a $H^1(U_i\cap\mathcal{V}, F)=0$, i.e. il existe $g_{i\alpha}\in F(U_i\cap V_\alpha)$ tel que

$$f_{\alpha\beta} = g_{i\alpha}-g_{i\beta} \quad \text{sur} \quad U_i\cap V_\alpha\cap V_\beta. \tag{1.2}$$

Sur $(U_i\cap U_j\cap V_\alpha)\cap V_\beta$, on a $g_{i\alpha}-g_{i\beta}=g_{j\alpha}-g_{j\beta}$. D'après (F2) il existe $F_{ij}\in F(U_i\cap U_j)$ tel que

$$F_{ij} = g_{j\alpha}-g_{i\alpha} \quad \text{sur} \quad U_i\cap U_j\cap V_\alpha. \tag{1.3}$$

On vérifie (en restriction à V_α) que $(F_{ij})\in Z^1(\mathcal{U}, F)$ et, sur $V_\alpha\cap V_\beta$, on a

$$H_{\alpha\beta} = F_{\tau\alpha,\tau\beta}-f_{\alpha\beta} = g_{\tau\beta,\alpha}-g_{\tau\alpha,\alpha}-(g_{\tau\beta,\alpha}-g_{\tau\beta,\beta}),$$

d'après (1.3) et (1.2) et parce que $V_\alpha\subset U_{\tau\alpha}$ et $V_\beta\subset U_{\tau\beta}$; d'où

$$H_{\alpha,\beta} = g_{\tau\beta,\beta}-g_{\tau\alpha,\alpha} = h_\beta-h_\alpha \quad \text{avec} \quad h_\alpha = g_{\tau\alpha,\alpha}|V_\alpha. \quad \square$$

1.4. Groupe de cohomologie de dimension 0

Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ d'un espace topologique X, pour tout faisceau F sur X, on a : $H^0(\mathcal{U}, F)=Z^0(\mathcal{U}, F)=F(X)$, par définition des 0-cocycles, donc $H^0(X, F)=F(X)$.

1.5. Compléments sur les faisceaux

Soit A un faisceau de groupes abéliens sur X ; tout ouvert B' de LA tel que, pour tout $x \in X$, B'_x soit un sous-groupe de LA_x, est un espace étalé en groupes abéliens ; $B = \Gamma B'$ est appelé un *sous-faisceau* de A et tout sous-faisceau de A est défini de cette façon. En particulier, si 0_x est l'élément neutre de LA_x, la section $x \mapsto 0_x$ a pour image le sous-faisceau 0 de A. Un morphisme d'espace étalé, étant continu et ouvert, pour tout morphisme de faisceau $h : A \to A'$, $\operatorname{Ker} h = h^{-1}(0)$ et $\operatorname{Im} h$ sont des sous-faisceaux de A et de A' respectivement.

Une *suite* (de morphismes) de faisceaux

$$\ldots \to A \xrightarrow{h} A' \xrightarrow{h'} A'' \to \ldots$$

est dite *exacte* si $\operatorname{Im} h = \operatorname{Ker} h'$.

1.6. Suite exacte de cohomologie

1.6.1. Soit $\gamma : F \to F'$ un morphisme de faisceaux (de groupes abéliens) sur un espace topologique X. Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_j)_{j \in I}$ de X, γ induit un homomorphisme

$$\gamma' : C^q(\mathcal{U}, F) \to C^q(U, F')$$

qui envoie cocycle sur cocycle et cobord sur cobord, d'où un homomorphisme $\gamma_*^{\mathcal{U}}$ qui, par passage à la limite inductive sur $\mathcal{U}$, définit un homomorphisme γ_* selon le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^q(\mathcal{U}, F) & \xrightarrow{\gamma_*^{\mathcal{U}}} & H^q(\mathcal{U}, F') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(X, F) & \xrightarrow{\gamma_*} & H^q(X, F'). \end{array}$$

1.6.2. Soit (1.4) $0 \to F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F'' \to 0$ une (courte) suite exacte de faisceaux sur X. On en déduit la courte suite exacte

$$(1.5) \qquad 0 \to C^q(\mathcal{U}, F') \xrightarrow{\alpha'} C^q(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\varepsilon'} Q^q(\mathcal{U}) \to 0$$

où $Q^q(\mathcal{U})$ est défini comme quotient.

L'homomorphisme cobord δ définit un homomorphisme $Q^{q-1}(\mathcal{U}) \to Q^q(\mathcal{U})$ comme suit : pour tout $\zeta \in Q^{q-1}(\mathcal{U})$, il existe $\eta \in C^{q-1}(\mathcal{U}, F)$ tel que $\zeta = \varepsilon' \eta$; η est défini modulo $\alpha' \xi$ où $\xi \in C^{q-1}(\mathcal{U}, F')$; $\delta\eta$ modulo $\delta\xi$ est un élément de $Q^q(\mathcal{U})$ soit $\delta_Q \zeta$; δ_Q est un homomorphisme de carré nul ; $\operatorname{Ker} \delta_Q^q / \operatorname{Im} \delta_Q^{q-1}$ est le q-ième groupe de cohomologie $H^q(Q(\mathcal{U}))$; les $Q(\mathcal{U})$ constituent un système inductif et on pose $\varinjlim_{\mathcal{U}} H^q(Q(\mathcal{U})) = H^q(Q)$.

D'après 1.6.1, α définit un homomorphisme $\alpha_*^{\mathcal{U}} : H^q(\mathcal{U}, F') \to H^q(\mathcal{U}, F)$; de la même façon, ε' définit un homomorphisme $\varepsilon_*^{\mathcal{U}} : H^q(\mathcal{U}, F) \to H^q(Q(\mathcal{U}))$.

1.6.3. Homomorphisme de connexion

On va définir un homomorphisme, dit de *connexion,* $\delta_*^{\mathscr{U}} : H^q(Q(\mathscr{U})) \to H^{q+1}(\mathscr{U}, F')$ de la façon suivante : soit $\bar{\zeta} \in H^q(Q(\mathscr{U}))$ et ζ un de ses représentants, on a $\delta\zeta = 0$; il existe $\eta \in C^q(\mathscr{U}, F)$ tel que $\varepsilon'\eta = \zeta$, $\delta\eta \in \operatorname{Ker} \varepsilon'$, donc il existe $\xi \in C^{q+1}(\mathscr{U}, F')$ tel que $\delta\eta = \alpha'\xi$, on a $\alpha'\delta\xi = \delta\alpha'\xi = 0$; α' étant injectif, on a $\delta\xi = 0$, donc ξ est un cocycle ; on vérifie qu'il est défini à un cobord près. Soit $\bar{\xi}$ la classe de cohomologie de ξ, alors $\bar{\zeta} \mapsto \bar{\xi}$ est l'homomorphisme cherché ; par passage aux limites inductives sur le recouvrement $\mathscr{U}$, on obtient l'*homomorphisme de connexion*

$$\delta_* : H^q(Q) \to H^{q+1}(X, F').$$

1.6.4. La suite exacte de cohomologie

A partir de la courte suite exacte (1.5) on a obtenu la longue suite d'homomorphismes

$$\text{(1.6)} \quad \ldots \to H^q(\mathscr{U}, F') \xrightarrow{\alpha_*^{\mathscr{U}}} H^q(\mathscr{U}, F) \xrightarrow{\varepsilon_*^{\mathscr{U}}} H^q(Q(\mathscr{U})) \xrightarrow{\delta_*^{\mathscr{U}}} H^{q+1}(\mathscr{U}, F') \to \ldots.$$

On vérifie que (1.6) est une suite exacte ; il en est de même de la suite

$$\text{(1.7)} \quad \ldots \to H^q(X, F') \xrightarrow{\alpha_*} H^q(X, F) \xrightarrow{\varepsilon_*} H^q(Q) \xrightarrow{\delta_*} H^{q+1}(X, F') \to \ldots$$

obtenue, à partir de (1.6) par passage aux limites inductives sur $\mathscr{U}$.

D'autre part, l'homomorphisme $\beta' : C^q(\mathscr{U}, F) \to C^q(\mathscr{U}, F'')$ se factorise par ε' suivant le diagramme commutatif.

(1.8)
$$\begin{tikzcd} C^q(\mathscr{U}, F) \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[dr, "\beta'"'] & Q^q(\mathscr{U}) \arrow[d, "\tau'"] \\ & C^q(\mathscr{U}, F'') \end{tikzcd}$$

où l'homomorphisme τ' est injectif.

1.6.5. On dit qu'un espace topologique X est *paracompact* si, pour tout recouvrement ouvert de X, il existe un sous-recouvrement plus fin localement fini ; on vérifie, en particulier, que tout espace réunion dénombrable de compacts est paracompact.

On vérifie également que, si X est paracompact, l'homomorphisme

$$\tau_* : H^q(X, Q) \to H^q(X, F'')$$

déduit de l'homomorphisme τ' de (1.8) est un isomorphisme. D'où, à partir de (1.7),

1.6.6. **Proposition. —** ***Si X est un espace topologique paracompact, toute courte suite exacte de faisceaux sur X***

$$\textbf{(1.4)} \qquad \mathbf{0 \to F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F'' \to 0}$$

définit la longue suite exacte de cohomologie

$$(1.9)\qquad 0 \to H^0(X, F') \xrightarrow{\alpha_*} H^0(X, F) \to \dots$$

$$\dots \to H^q(X, F') \xrightarrow{\alpha_*} H^q(X, F) \xrightarrow{\beta_*} H^q(X, F'') \xrightarrow{\delta_*} H^{q+1}(X, F') \to \dots$$

en notant encore δ_* l'homomorphisme $\delta_* \circ \tau_*^{-1}$.

1.7. Support d'une cochaîne

Soit $\gamma \in C^q(\mathcal{U}, F)$, l'ensemble des points $x \in X$ ayant un voisinage ouvert dont l'intersection avec les supports des sections définissant γ est vide a un complémentaire, fermé, appelé le *support* de γ.

Dans le cas où X est localement compact, ce qui est le cas des variétés, on considère aussi les cochaînes à support compact qui définissent les groupes de cohomologie $H_c^q(X, F)$ à supports compacts.

1.8. Résolution d'un faisceau ; théorème de de Rham pour d et pour d″.

1.8.1. Soit F un faisceau de groupes abéliens ou de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels sur un espace topologique X, on appelle *résolution* de F une suite exacte de morphismes de faisceaux de groupes abéliens (ou de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels)

$$(\mathrm{L}^*)\qquad 0 \to F \to L^0 \xrightarrow{d^1} L^1 \to \dots \xrightarrow{d^{n-1}} L^n \to \dots.$$

1.8.2.* Théorème de de Rham abstrait. — *Soit (L^*) une résolution d'un faisceau F, alors il existe un homomorphisme canonique

$$(1.10)\qquad j : H^n(\Gamma(X, L^*)) \to H^n(X, F)$$

***où $\Gamma(X, L^*)$ est le complexe* (c'est-à-dire la suite d'homomorphismes induite par (L*), telle que le composé de deux homomorphismes successifs soit nul)**

$$0 \to \Gamma(X, L^0) \to \Gamma(X, L^1) \to \dots \to \Gamma(X, L^n) \to \dots$$

des sections de (L^*).

En outre, si, pour $n \geqslant 0$, $q \geqslant 1$, on a

$$(1.11)\qquad H^q(X, L^n) = 0,$$

alors* (1.10) *est un isomorphisme.

On a les même résultats si l'on considère les groupes de cohomologie à supports compacts.

DÉMONSTRATION. — De (L^*) résultent les courtes suites exactes

$$0 \to F \to L^0 \to Z^1 \to 0$$

$$\dots$$

$$0 \to Z^{p-1} \to L^{p-1} \to Z^p \to 0$$

$$\dots$$

où $Z^p = \operatorname{Ker} d^p$; elles définissent les suites exactes de cohomologie

$$\ldots \to H^q(X, L^{p-1}) \to H^q(X, Z^p) \xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(X, Z^{p-1}) \to H^{q+1}(X, L^{p-1}) \to \ldots$$

$$\ldots \to \Gamma(X, L^{n-1}) \to \Gamma(X, Z^n) \xrightarrow{\delta^0} H^1(X, Z^{n-1}) \to H^1(X, L^{n-1}) \to \ldots.$$

Le diagramme suivant dont toutes les suites sont exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & 0 & \\
 & Z^{n+1} \arrow[u] \arrow[dr] & \\
L^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[dr] & L^n \arrow[u] \arrow[r] & L^{n+1} \\
 & Z^n \arrow[u] & \\
 & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

définit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & \\
 & \Gamma(X, Z^{n+1}) \arrow[dr] & \\
\Gamma(X, L^{n-1}) \arrow[r, "D^{n-1}"] \arrow[dr, "g^0"] & \Gamma(X, L^n) \arrow[u] \arrow[r, "D^n"] & \Gamma(X, L^{n-1}) \\
 & \Gamma(X, Z^n) \arrow[u] & \\
 & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

où les suites, sauf la suite horizontale, sont exactes ; alors

$$H^n(\Gamma(X, L^*)) = \operatorname{Ker} D^n / \operatorname{Im} D^{n-1} \underset{\to}{\overset{i}{\approx}} \Gamma(X, Z^n)/\operatorname{Im} g^0 = \Gamma(X, Z^n)/\operatorname{Ker} \delta^0 \xrightarrow{\lambda} H^1(X, Z^{n-1});$$

l'homomorphisme canonique est

$$j = \delta^{n-1} \circ \ldots \circ \delta^1 \circ \lambda \circ i \colon H^n(\Gamma(X, L^*)) \to H^n(X, F).$$

Si (1.11) est satisfaite, alors δ^k $(k = 1, \ldots, n-1)$ et λ sont des isomorphismes ; il en est de même de j. □

1.8.3. Sur une surface de Riemann X, à tout ouvert U, on associe les **C**-espaces vectoriels $\mathscr{E}(U)$ des fonctions C^∞ sur U et $\mathscr{E}^r(U)$ des r-formes différentielles C^∞ sur U, $\mathscr{E}^{p,q}(U)$ le sous-espace de $\mathscr{E}^{p+q}(U)$ des formes de type (p, q) ; avec les homomorphismes de restriction, cela définit les faisceaux $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^r$, $\mathscr{E}^{p,q}$ respectivement.

1.8.4.* Lemme. — *Sur une surface de Riemann X, on a $H^1(X, \mathscr{E}) = 0$; même résultat en remplaçant $\mathscr{E}$ par $\mathscr{E}^1$, $\mathscr{E}^2$, $\mathscr{E}^{1,0}$, $\mathscr{E}^{0,1}$.

Démonstration. — Soient $\mathscr{U} = (U_j)_{j \in I}$ un recouvrement ouvert de X ; (ψ_j) une partition C^∞ de l'unité subordonnée à $\mathscr{U}$ et $(f_{ij}) \in Z^1(\mathscr{U}, \mathscr{E})$.

La fonction $\psi_j f_{ij}$ est définie sur $U_i \cap U_j$, on l'étend par 0 sur $U_i \setminus \operatorname{spt}(\psi_j f_{ij})$, alors $g_i = \sum_{j \in I} \psi_j f_{ij} \in \mathscr{E}(U_i)$. Sur $U_i \cap U_j$, on a : $g_i - g_j = \sum_k \psi_k f_{ik} - \sum_k \psi_k f_{jk} =$

$=\sum_k \psi_k(f_{ik}-f_{jk})=\sum_k \psi_k(f_{ik}+f_{kj})=\sum_k \psi_k f_{ij}=f_{ij}$; donc $(f_{ij})\in B^1(\mathscr{U}, \mathscr{E})$; alors d'après 1.3.4, on a $H^1(X, \mathscr{E})=0$. □

1.8.5. **Théorème de de Rham.** — ***Sur une surface de Riemann X, on a un isomorphisme canonique***

$$H^1(X, \mathbf{C}) \approx H^1(\Gamma(X, \mathscr{E}^*)) = \{\text{1-formes } C^\infty \text{ d-fermées}\}/\mathrm{d}\{\text{fonctions } C^\infty\}.$$

DÉMONSTRATION. — La suite de morphismes

$$(1.12) \qquad 0 \to \mathbf{C} \xrightarrow{i} \mathscr{E} \xrightarrow{d} \mathscr{E}^1 \xrightarrow{d} \mathscr{E}^2,$$

où i est l'inclusion, est exacte parce que les fonctions C^∞ d-fermées sont localement constantes et d'après le lemme de Poincaré (ch. 1, 2.8.4) : (1.12) est une résolution du faisceau **C**. D'après 1.8.4, l'homomorphisme j de (1.10), pour la résolution (1.12), est un isomorphisme. □

1.8.6. **Théorème de de Rham pour d″.** — ***Sur une surface de Riemann X, on a un isomorphisme canonique***

$$H^1(X, \mathscr{O}) \approx H^1(\Gamma(X, \mathscr{E}^{0,*})) =$$

$$= \{\text{1-formes } C^\infty \text{ de type } (0,1), \text{ d}''\text{-fermées}\}/\mathrm{d}''\{\text{fonctions } C^\infty\} = H^{0,1}(X, \mathbf{C}).$$

DÉMONSTRATION. — La suite de morphismes

$$(1.13) \qquad 0 \to \mathscr{O} \xrightarrow{i} \mathscr{E} \xrightarrow{d''} \mathscr{E}^{0,1} \xrightarrow{d''} \mathscr{E}^{0,2},$$

où i est l'inclusion, est exacte parce que les fonctions C^∞ d″-fermées sont holomorphes et à cause du Lemme du d″ (ch. 1, 5.3.2) : (1.13) est une résolution du faisceau $\mathscr{O}$. D'après 1.8.4, l'homomorphisme j de (1.10), pour la résolution (1.13), est un isomorphisme. □

2. Théorème de finitude

2.1. Théorème. — ***Soient X une surface de Riemann et $Y \subset\subset X$ un ouvert. Alors*** **dim** $H^1(Y, \mathscr{O}) < \infty$.

La démonstration sera donnée au n° 2.3.6.

2.2. Cas des surfaces de Riemann compactes

2.2.1. **Corollaire.** — ***Si X est une surface de Riemann compacte, alors*** **dim** $H^1(X, \mathscr{O}) < \infty$.

DÉMONSTRATION. — Résulte de 2.1 avec $Y=X$. □

2.2.2. Pour une surface de Riemann compacte X, $g=\dim H^1(X, \mathscr{O})$ est appelé le *genre* de X.

2.2.3. Théorème. — *Le genre de* $\mathbf{P}^1=\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ *est* 0.

DÉMONSTRATION. — Soient $U_1=\mathbf{P}^1\setminus\{\infty\}$; $U_2=\mathbf{P}^1\setminus\{0\}$, alors $\mathscr{U}=(U_1, U_2)$ est un recouvrement ouvert de $\mathbf{P}^1$ et $U_1=\mathbf{C}$, U_2 est isomorphe à $\mathbf{C}$.

On a $H^{0,1}(\mathbf{C}, \mathbf{C})=0$ d'après ch. 2, 2.5, donc, d'après 1.8.6, $H^1(\mathbf{C}, \mathcal{O})=0$ et $\mathscr{U}$ est un recouvrement 1-acyclique de $\mathbf{P}^1$; d'après le théorème de Leray (1.3.5), $H^1(\mathbf{P}^1, \mathcal{O})\approx$ $\approx H^1(\mathscr{U}, \mathcal{O})$. Soit $(f_{12})\in Z^1(\mathscr{U}, \mathcal{O})$; f_{12} est holomorphe sur $U_1\cap U_2=\mathbf{C}^*$, i.e admet un développement de Laurent $f_{12}(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$; alors $f_1(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ et $f_2(z)=-\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$ sont holomorphes sur U_1 et sur U_2 respectivement et $f_{12}=$ $=f_1-f_2$ sur $U_1\cap U_2$, donc $H^1(\mathscr{U}, \mathcal{O})=0$. □

2.3. Topologie des espaces de cochaînes

2.3.1. Soient (z, U') une carte de X et U un ouvert relativement compact dans U' ; l'espace $\mathbf{C}$-vectoriel $\Gamma(U, \mathcal{O})$ des fonctions holomorphes sur U est $\mathbf{C}$-isomorphe à l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur l'ouvert $z(U)$ de $\mathbf{C}$; ce dernier est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts qui en fait un espace de Fréchet (ch. 3, 3.5) ; alors la topologie de $\Gamma(U, \mathcal{O})$, transportée de celle de $\Gamma(z(U), \mathcal{O}_{z(U)})$, est de Fréchet, $\mathcal{O}_{z(U)}$ désignant le faisceau des fonctions holomorphes sur $z(U)$.

Soient $(z_i, U_i')_{i\in I}$, $I=[1, ..., n]$, une famille finie de cartes de X, $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts $U_i\subset\subset U_i'$ et $Y''=\bigcup_{i=1}^{n} U_i$; alors $\mathscr{U}=(U_i)$ est un recouvrement ouvert de Y''.

$C^0(\mathscr{U}, \mathcal{O})$ s'identifie à $\prod_{i\in I}\Gamma(U_i, \mathcal{O}|U_i)$ muni de la topologie produit (de Fréchet). L'espace vectoriel $C^1(\mathscr{U}, \mathcal{O})$ des 1-cochaînes alternées s'identifie à $\prod_{j<k}\Gamma(U_j\cap U_k, \mathcal{O}|U_j\cap U_k)$, $(j, k)\in I^2$, muni de la topologie produit (de Fréchet).

L'application cobord $\delta : C^0(\mathscr{U}, \mathcal{O}) \to C^1(\mathscr{U}, \mathcal{O})$

$$(\gamma_j)\mapsto(\gamma_j-\gamma_k|U_j\cap U_k)\ ;\quad j<k$$

est continue, d'après la définition des topologies de $C^0(\mathscr{U}, \mathcal{O})$ et de $C^1(\mathscr{U}, \mathcal{O})$; de même, $C^2(\mathscr{U}, \mathcal{O})$ est un Fréchet et l'opérateur cobord $\delta^1 : C^1(\mathscr{U}, \mathcal{O})\to C^2(\mathscr{U}, \mathcal{O})$ est continu, alors $\operatorname{Ker}\delta^1=Z^1(\mathscr{U}, \mathcal{O})$ est fermé, donc Fréchet.

2.3.2. Soient Y un ouvert d'un espace topologique X, F un faisceau de groupes abéliens sur X, $\mathscr{U}=(U_i)_{i\in I}$, resp. $\mathscr{U}'=(U_i')_{i\in I}$, un recouvrement ouvert de X, resp. de Y, avec $U_i'\subset U_i$; l'application restriction $\varrho_{U_i'}^{U_i} : F(U_i)\to F(U_i')$ définit une application restriction $C^1(\mathscr{U}, F)\to C^1(\mathscr{U}', F)$, d'où les *homomorphismes* de groupes abéliens $H^1(\mathscr{U}, F)\to H^1(\mathscr{U}', F)$ et $H^1(X, F)\to H^1(Y, F)$ dits *de restriction.*

Dans les hypothèses du théorème 2.1, Y étant relativement compact dans X, il existe une famille finie de cartes $(z_i, U_i')_{i\in I}$, $I=[1, ..., n]$ de X et des familles d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$, $(V_i)_{i\in I}$ telles que $V_i\subset\subset U_i\subset\subset U_i'$, $i\in I$ et satisfaisant à la condition

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} V_i \subset\subset Y'' = \bigcup_{i=1}^{n} U_i \; ; \; \mathscr{V} = (V_i)_{i \in I}$$

et $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$ sont des recouvrements ouverts de Y et Y'' respectivement.

Considérons l'application linéaire continue $\varrho : C^1(\mathscr{U}, \mathcal{O}) \to C^1(\mathscr{V}, \mathcal{O})$ définie par restriction ; on note aussi ϱ l'application induite sur $Z^1(\mathscr{U}, \mathcal{O})$; l'image de cette dernière est contenue dans $Z^1(\mathscr{V}, \mathcal{O})$.

2.3.3.* Lemme. — *Dans les notations ci-dessus, l'application linéaire continue

$$(\varrho, \delta) : Z^1(\mathscr{U}, \mathcal{O}) \oplus C^0(\mathscr{V}, \mathcal{O}) \to Z^1(\mathscr{V}, \mathcal{O})$$

est surjective.

DÉMONSTRATION. — (a) Posons $Y_0 = Y$; $Y_k = Y \cup (\bigcup_{i=1}^{k} U_i)$; on a $Y_n = Y''$.

Pour k fixé, posons

$$v_i = U_i \cap Y_{k-1} \; ; \quad i = 1, \ldots, n$$

$$v_i' = v_i \quad \text{pour} \quad i \neq k \quad \text{et} \quad v_k' = U_k.$$

Alors

$$v = (v_i)_{i \in I} \quad \text{est un recouvrement ouvert de } Y_{k-1}$$

et

$$v' = (v_i')_{i \in I} \quad \text{est un recouvrement ouvert de } Y_k.$$

v et v' sont des recouvrements 1-acycliques i.e. $H^1(v_i, \mathcal{O}) = 0$ et $H^1(v_i', \mathcal{O}) = 0$, car v_i et v_i' sont identifiables, par la carte z_i, à des ouverts de $\mathbf{C}$. Or, pour un ouvert W de $\mathbf{C}$, on a $H^1(W, \mathcal{O}) = H^{0,1}(W, \mathbf{C})$ (1.8.6) ; ce dernier espace est $\{0\}$ à cause de (ch. 4, 2.2), donc d'après le théorème de Leray (1.3.5), on a :

$$H^1(Y_{k-1}, \mathcal{O}) = H^1(v, \mathcal{O}) \; ; \quad H^1(Y_k, \mathcal{O}) = H^1(v', \mathcal{O}).$$

Mais, pour $i \neq j$, on a $v_i \cap v_j = v_i' \cap v_j'$, donc $Z^1(v, \mathcal{O}) = Z^1(v', \mathcal{O})$ et l'homomorphisme de restriction $H^1(v', \mathcal{O}) \to H^1(v, \mathcal{O})$ est surjectif, d'où, successivement, la surjectivité des homomorphismes de restriction

$$H^1(Y_k, \mathcal{O}) \to H^1(Y_{k-1}, \mathcal{O}) \; ; \quad k = 1, \ldots, n$$

et de

$$H^1(Y'', \mathcal{O}) \to H^1(Y, \mathcal{O}). \tag{2.1}$$

(b) D'après le théorème de Leray (1.3.5),

$$H^1(\mathscr{U}, \mathcal{O}) \xrightarrow{\approx} H^1(Y'', \mathcal{O})$$

$$H^1(\mathscr{V}, \mathcal{O}) \xrightarrow{\approx} H^1(Y, \mathcal{O}).$$

D'après (2.1), l'homomorphisme de la restriction

$$H^1(\mathscr{U}, \mathcal{O}) \to H^1(\mathscr{V}, \mathcal{O})$$

est un épimorphisme, d'où la surjectivité de (ϱ, δ). □

***2.3.4.* Lemme. — *L'application* $\varrho : Z^1(\mathscr{U}, \mathcal{O}) \to Z^1(\mathscr{V}, \mathcal{O})$ *est compacte* (i.e. l'image par ϱ de toute partie bornée est relativement compacte).**

Démonstration. — Il suffit de démontrer cette propriété pour

$$\varrho : C^1(\mathscr{U}, \mathcal{O}) \to C^1(\mathscr{V}, \mathcal{O}),$$

d'après (2.3.2) et, pour cela *il suffit de démontrer que, pour tout couple d'ouverts* $V \subset\subset U$ *de* $\mathbf{C}$, *l'application de restriction*

$$j : \Gamma(U, \mathcal{O}) \to \Gamma(V, \mathcal{O})$$

est compacte.

L'image de j est contenue dans l'espace des applications continues de $\overline{V}$ (compact) dans $\mathbf{C}$.

Soit B un borné de $\Gamma(U, \mathcal{O})$, alors $j(B)$ est une partie équicontinue de $\Gamma(V, \mathcal{O})$; de plus, pour tout $x \in \overline{V}$, $j(B)(x)$ est borné dans $\mathbf{C}$, donc relativement compact. Alors, le théorème d'Ascoli entraîne que $j(B)$ est relativement compacte dans $\Gamma(V, \mathcal{O})$. □

2.3.5. **Lemme (L. Schwartz).** — ***Soient E et F deux espaces de Fréchet,*** u_1 ***et*** u_2 ***deux applications linéaires continues :*** $E \to F$ ***telles que*** $u_1 + u_2$ ***soit surjective et*** u_1 ***compacte. Alors* Im** u_2 ***est fermée et de codimension finie.***

Schéma de la démonstration.

(a) Soit E un espace vectoriel muni d'une semi-norme p, alors $N_p(E) = \{x \in E \ ; \ p(x) = 0\}$ est un sous-groupe vectoriel de E et $E' = E/N_p(E)$ est muni de la norme induite par p.

(b) Il résulte facilement de la définition 3.4 du chapitre 3, qu'un espace de Fréchet F est un espace vectoriel muni d'une famille dénombrable de semi-normes $(p_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définissant une topologie séparée sur F pour laquelle F est complet. La famille $(q_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ avec $q_n = p_1 + \ldots + p_n$ définit la même topologie sur F. On considère l'espace vectoriel F muni de la semi-norme q_n et on désigne par F_n le complété de $F'_n = F/N_{q_n}(F)$; pour $k \in \mathbf{N}$, on a : $N_{q+k}(F) \subset N_q(F)$ et le diagramme commutatif où les suites obliques et la suite verticale sont exactes

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \\
 & F'_{n+k} \arrow[ur] \arrow[r, hook] \arrow[dd] & F_{n+k} \arrow[dd] \\
F \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & F'_n \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr] & F_n \\
 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

On posera $F = \varprojlim F_n$ où les F_n sont des espaces de Banach.

(c) On remarque que, si $m : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ est une application strictement croissante, on a :

$$F = \varprojlim F_{m(n)}.$$

Nous admettrons les propriétés suivantes :

(d) Toute application linéaire continue surjective $f : E \to F$ d'espaces de Fréchet est ouverte.

(e) Tout espace de Fréchet localement compact est de dimension finie.

(f) Soient $\varphi, \psi : E \to F$ deux applications linéaires continues d'espaces de Banach telles que φ soit surjective et ψ compacte, alors $\varphi+\psi$ a une image fermée.

(g) Soient $E=\varprojlim E_n$, $F=\varprojlim F_n$ deux espaces de Fréchet, $f : E \to F$ une application linéaire continue qui induit des applications linéaires continues $f_n : E_n \to F_n$ d'images fermées, alors l'image de f est fermée dans F.

Démontrons le Lemme : posons $\varphi=u_1+u_2$; $\psi=-u_1$, notons $\| \ \|_n$ la norme de E_n et celle de F_n.

Soit B une partie bornée de E ; compte tenu de (c), on peut supposer que B est contenu dans $\{x\in E \ ; \ p_1(x)<1\}$; $\psi(B)$ est relativement compact dans F.

φ étant continue et ouverte (d), avec un nouveau numérotage des E_n, et grâce à (c), on a : pour tout $n\in \mathbf{N}^*$, il existe une constante K_n telle que, pour $x\in E$,

(i) $\|\varphi(x)\|_n \leqslant K_n \|x\|_n$;

(ii) il existe $x'\in E$ tel que $\varphi(x')=\varphi(x)$ et $\|x'\|_n \leqslant K_n \|\varphi(x)\|_n$.

Donc φ induit une application linéaire surjective $\varphi_n : E_n \to F_n$.

De même, compte tenu de (c), on peut supposer que ψ induit une application linéaire continue compacte $\psi_n : E_n \to F_n$.

D'après (f), $(\varphi_n+\psi_n)(E)$ est fermé dans F_n et, d'après (g), $(\varphi+\psi)(E)$ est fermé dans F. Alors $F'=F/(\varphi+\psi)(E)$ est un espace de Fréchet. Montrons que F' est localement compact. Tout voisinage de 0 dans F' contient un voisinage $V=\{[y], \|y\|_r \leqslant \varepsilon\}$; compte tenu de (c), on peut prendre $r=1$. Soit $([y_n])$ une suite de V ; pour tout n, il existe $x_n\in E$ tel que $\varphi(x_n)=y_n$ et $\|x_n\|_1 \leqslant K_1 \|y_n\|_1$ donc (x_n) est bornée, alors $(\psi(-x_n))$ a une sous-suite convergente. Mais $[\varphi(x_n)]=[\psi(-x_n)]$, donc $([y_n])$ a une sous-suite convergente, i.e. V est compact. D'après (e), F' est de dimension finie. □

2.3.6. DÉMONSTRATION DE 2.1.

Considérons les deux applications linéaires continues $(\varrho, 0)$ et $(0, \delta)$

$$Z^1(\mathscr{U}, \mathscr{O})+C^0(\mathscr{V}, \mathscr{O}) \to Z^1(\mathscr{V}, \mathscr{O}).$$

D'après 2.3.3, (ϱ, δ) est surjective ; d'après 2.3.4 ϱ, donc $(\varrho, 0)$, est compacte alors, d'après 2.3.5, $H^1(\mathscr{V}, \mathscr{O})=Z^1(\mathscr{V}, \mathscr{O})/\delta C^0(\mathscr{V}, \mathscr{O}) \approx H^1(Y, \mathscr{O})$ est de dimension finie. □

2.4. Applications

2.4.1.* Théorème. — *Soit $Y \subset\subset X$ un ouvert d'une surface de Riemann X. Alors, pour tout $a\in Y$, il existe $f\in \mathscr{M}(Y)$ ayant un pôle en a et holomorphe sur $Y\setminus\{a\}$.

DÉMONSTRATION. — D'après 2.1, on a : (2.2) $k=\dim \operatorname{Im}\left(H^1(X, \mathscr{O}) \to H^1(Y, \mathscr{O})\right)<\infty$.

Soient (z, U_1) une carte centrée en a et $U_2=X\setminus\{a\}$; $\mathscr{U}=(U_1, U_2)$ est un recouvrement ouvert de X ; les fonctions z^{-j}, $j=1, \ldots, k+1$, sont holomorphes sur $U_1\cap U_2=U_1\setminus\{a\}$ et définissent des cocycles $\zeta_j\in Z^1(\mathscr{U}, \mathscr{O})$. D'après (2.2), les $(k+1)$ cocycles $\zeta_j|Y$ sont linéairement dépendants modulo les cobords de $\mathscr{U}\cap Y$, i.e. il existe des $c_j\in \mathbf{C}, j=1, \ldots, k+1$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^{k+1} c_j\zeta_j=\delta\eta$; $\eta\in C^0(\mathscr{U}\cap Y, \mathscr{O})$, donc $\sum_{j=1}^{k+1} c_j z^{-j} = f_2 - f_1$ sur $U_1 \cap U_2 \cap Y$ avec $(f_1, f_2) = \eta$. Sur $U_1 \cap U_2 \cap Y$, on a $f_2 = f_1 + \sum_{j=1}^{k+1} c_j z^{-j}$, alors il existe $f' \in \mathcal{O}(Y \setminus \{a\})$ telle que $f'|(U_1 \setminus \{a\}) \cap Y = f_1 + \sum_j c_j z^{-j}$ et $f'|U_2 \cap Y = f_2$; $f_1 + \sum_{j=1}^{k+1} c_j z^{-j}$ est méromorphe sur U_1, donc il existe $f \in \mathcal{M}(Y)$ telle que $f' = f|Y \setminus \{a\}$; c'est la fonction cherchée. □

2.4.2. Corollaire. — ***Sur toute surface de Riemann compacte X, il existe une fonction méromorphe non nulle.*** □

3. Théorème de Riemann—Roch

3.1. Diviseurs : rappels et compléments

3.1.1. Sur une surface de Riemann X, on appelle *diviseur* toute zéro-chaîne D entière, localement finie

(3.1) $$D = \sum_{j \in J} n_j a_j \quad \text{(voir ch. 4, 4.)}$$

On appellera n_j la *multiplicité* du point a_j dans D.

D définit aussi une application

$$\begin{aligned} D : X &\to \mathbf{Z} \\ a_j &\mapsto n_j \quad (j \in J) \\ X \setminus \bigcup_{j \in J} \{a_j\} &\mapsto 0. \end{aligned}$$

L'*addition* des diviseurs étant définie par l'addition des coefficients, l'ensemble des diviseurs est un *groupe* additif commutatif Div X qui est *ordonné* par la relation suivante : si $D, D' \in \operatorname{Div} X$, où D est défini par (3.1) et D' par $\sum_{j \in J} n'_j a_j$, $D \leqslant D'$ signifie, pour tout $j \in J$, $n_j \leqslant n'_j$.

3.1.2. On a défini le diviseur d'une fonction méromorphe sur un ouvert Y de X (ch. 4, 4) ; cela implique la notion suivante : soit $f \in \mathcal{M}(Y)$, pour tout $a \in Y$, on appelle ordre de f en a, $\operatorname{ord}_a(f)$ le nombre suivant : 0 si $f(a) \neq 0, \infty$; k si a est un zéro (d'ordre) de multiplicité k ; $-k$ si a est un pôle de multiplicité k de f ; ∞ si f_a est le germe nul. Alors, pour $f \in \mathcal{M}^*(X)$ (ch. 4, 4), le diviseur de f est $(f) = \sum_{x \in X} \operatorname{ord}_x(f) x$.

f est dit *multiple du diviseur* D si $(f) \geqslant D$.

Tout diviseur d'une fonction méromorphe est dit *diviseur principal.*

Deux diviseurs D et D' sont dits *linéairement équivalents* si $D - D'$ est principal.

3.1.3. Diviseur d'une 1-forme méromorphe

Les 1-formes différentielles méromorphes (ch. 2, 4.4.2) sur l'ouvert Y constituent un groupe et même un **C**-espace vectoriel $\mathscr{M}^1(Y)$; pour toute forme ω qui n'est identiquement nulle sur aucune composante connexe de Y, pour tout $a \in Y$, pour une carte (z, U) centrée en a, $\omega|U = f\,dz$ où $f \in \mathscr{M}^*(U)$; $\operatorname{ord}_a(f)$ est indépendant de la carte et, par définition, $\operatorname{ord}_a \omega = \operatorname{ord}_a(f)$, on appelle *diviseur* de ω, le diviseur

$$(\omega) = \sum_{x \in Y} (\operatorname{ord}_x \omega)x.$$

Les relations suivantes résultent immédiatement des définitions : sur une surface de Riemann connexe X, pour $f, g \in \mathscr{M}(X) \setminus \{0\}$ et $\omega \in \mathscr{M}^1(X) \setminus \{0\}$, on a :

$$(fg) = (f)+(g) \,; \quad (f^{-1}) = -(f), \quad (f\omega) = (f)+(\omega).$$

3.1.4. Degré d'un diviseur

Si X est *compacte*, alors, dans (3.1), $\# \bigcup_{j \in J} \{a_j\} < \infty$, on appelle *degré de D* l'entier $\deg D = \sum_{j \in J} n_j = \sum_{x \in X} D(x)$; en outre l'application

$$\begin{aligned} \deg : \operatorname{Div} X &\to \mathbf{Z} \\ D &\mapsto \deg D \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes.

Tout diviseur principal a le degré 0, d'après 2.3.4 du chapitre 5.

3.2. Le faisceau $\mathcal{O}_D$

3.2.1. Soient D un diviseur sur une surface de Riemann X. Pour tout ouvert U de X, soit $\mathcal{O}_D(U) = \{f \in \mathscr{M}(U) \,;\, (f) \geq -D|U\} = \{f \in \mathscr{M}(U) \,;\, \operatorname{ord}_x(f) \geq -D(x) \,;\, x \in U\}$. Alors $U \mapsto \mathcal{O}_D(U)$ est un faisceau de $\mathcal{O}$-modules sur X.

3.2.2. **Proposition. —** ***Si D et D' sont deux diviseurs linéairement équivalents, alors $\mathcal{O}_D$ et $\mathcal{O}_{D'}$ sont canoniquement isomorphes.***

DÉMONSTRATION. — Il existe $\psi \in \mathscr{M}(X)$ telle que $D - D' = (\psi)$,

$$\begin{aligned} \psi \times : \mathcal{O}_D &\to \mathcal{O}_{D'} \\ f &\mapsto \psi \times f \end{aligned}$$

est l'isomorphisme annoncé car, pour tout ouvert U de X,

$$\mathcal{O}_D(U) = \{f \in \mathscr{M}(U) : (f) \geq -D|U\} \,;$$

$$(\psi f) = (\psi)+(f) \geq -(-(\psi)+D) = -D'. \quad \square$$

3.2.3. **Théorème. —** ***Si D est un diviseur de degré*** <0 ***sur une surface de Riemann compacte X, alors*** $H^0(X, \mathcal{O}_D)=0$.

DÉMONSTRATION. — S'il existe $f\in H^0(X, \mathcal{O}_D)$, on a $\deg(f)\geqslant -\deg D>0$, ce qui contredit 3.1.4. □

3.3. Faisceaux à support ponctuel ; propriétés de $\mathcal{O}_D$

3.3.1. On appelle *support* d'un faisceau F de groupes abéliens sur un espace topologique X le complémentaire (fermé) du plus grand ouvert de X en tout point x duquel la fibre F_x est $\{0\}$.

3.3.2. Soit P un point d'une surface de Riemann X ; pour tout ouvert U de X, soit $\mathbf{C}_P(U)=\begin{cases}\mathbf{C} \text{ si } P\in U\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$; avec les homomorphismes restriction, cela constitue un faisceau $\mathbf{C}_P$ sur X, de support $\{P\}$.

3.3.3. **Proposition. —** ***On a*** **(i)** $H^0(X, \mathbf{C}_P)\approx\mathbf{C}$; **(ii)** $H^1(X, \mathbf{C}_P)=0$.

DÉMONSTRATION. — (i) $H^0(X, \mathbf{C}_P)\approx\Gamma(X, \mathbf{C}_P)=\mathbf{C}$;

(ii) $\xi\in H^1(X, \mathbf{C}_P)$ est représenté par un élément de $Z^1(\mathcal{U}, \mathbf{C}_P)$ pour un recouvrement $\mathcal{U}$ de X ; $\mathcal{U}$ a un raffinement $\mathcal{V}$ tel que P appartienne à un seul $V_\alpha\in\mathcal{V}$. Alors aucun $V_\alpha\cap V_\beta$, $\alpha\neq\beta$, ne contient P, donc $\mathbf{C}_P(V_\alpha\cap V_\beta)=0$, d'où $Z^1(\mathcal{V}, \mathbf{C}_P)=0$, donc $\xi=0$. □

3.3.4. Une courte suite exacte

Soient D un diviseur de X, P un point de X, on désigne par P le diviseur $1P$, alors $D<D+P$; si $f\in\mathcal{M}(X)$ est telle que $(f)\geqslant -D$, on a $(f)\geqslant-(D+P)$; cela définit l'inclusion $j : \mathcal{O}_D\to\mathcal{O}_{D+P}$.

Considérons l'homomorphisme de faisceaux

$$\beta : \mathcal{O}_{D+P}\to\mathbf{C}_P$$

défini comme suit. Soit U un ouvert de X, si $P\notin U$, on pose $\beta_U=0$; si $P\in U$ et $f\in\mathcal{O}_{D+P}(U)$, pour une carte z de X de centre P, $k=D(P)$, f a un pôle d'ordre au plus $(k+1)$ en P, i.e. a un développement de Laurent

$$f=\sum_{n=-k-1}^{\infty} c_n z^n ;$$

on pose $\beta_U(f)=c_{-k-1}\in\mathbf{C}=\mathbf{C}_P(U)$.

Alors β est un épimorphisme de faisceaux et la suite de morphismes

$$0\to\mathcal{O}_D\xrightarrow{j}\mathcal{O}_{D+P}\xrightarrow{\beta}\mathbf{C}_P\to 0 \tag{3.2}$$

est une courte suite exacte de faisceaux.

3.3.5. **Proposition.** — ***On a la suite exacte de cohomologie***

$$\mathbf{(3.3)}\quad 0 \to H^0(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{j_*} H^0(X, \mathcal{O}_{D+P}) \xrightarrow{\beta_*} \mathbf{C} \to H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D+P}) \to 0.$$

Démonstration. — La longue suite exacte de cohomologie définie par (3.2), compte tenu de $H^0(X, \mathbf{C}_P) = \mathbf{C}$ et de $H^1(X, \mathbf{C}_P) = 0$ d'après 3.3.3 entraîne la Proposition. □

3.3.6. **Corollaire.** — ***Si $D \leqslant D'$ sur une surface de Riemann X, l'inclusion $D \to D'$ induit un épimorphisme $j_* : H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D'})$.*** □

3.4. Théorème de Riemann—Roch. — ***Soit D un diviseur sur une surface de Riemann connexe, compacte X, de genre g. Alors $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ et $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ sont des espaces vectoriels de dimension finie et***

$$\mathbf{(3.4)}\qquad \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg D.$$

Démonstration. — On va démontrer le théorème par récurrence sur le nombre de points du support du diviseur, chaque point étant compté selon sa multiplicité.

(a) Si $D = 0$, on a $H^0(X, \mathcal{O}_D) = H^0(X, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(X) = \mathbf{C}$ car toute fonction holomorphe sur une surface de Riemann connexe compacte est constante (ch. 5, 2.1.10) donc $\dim H^0(X, \mathcal{O}) = 1$; $\dim H^1(X, \mathcal{O}) = g$ par définition, d'où (3.4).

(b) Soient D un diviseur, $P \in X$ et $D' = D + P$; on suppose le théorème démontré pour D *ou* pour D' et on va le démontrer pour D' *ou* pour D.

Considérons le diagramme commutatif suivant déduit de façon évidente de (3.3)

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[dr] & & & & \\
 & & & & & \mathbf{C}/\mathrm{Im}\,\beta_* \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[r] & H^0(X, \mathcal{O}_D) \arrow[r, "j_*"] & H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \arrow[rr, "\beta_*"] \arrow[dr] & & \mathbf{C} \arrow[rr] \arrow[ur] & & H^1(X, \mathcal{O}_D) \arrow[r] & H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \arrow[r] & 0 \\
 & & & \mathrm{Im}\,\beta_* \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

la suite horizontale et les suites obliques sont exactes ; il en résulte l'exactitude des deux suites

$$(3.5)\qquad 0 \to H^0(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{j_*} H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \to \mathrm{Im}\,\beta_* \to 0$$

$$(3.6)\qquad 0 \to \mathbf{C}/\mathrm{Im}\,\beta_* \to H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \to 0.$$

Supposons, par exemple, le théorème établi pour D, alors $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ et $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ sont de dimension finie ; $\dim \mathrm{Im}\,\beta_* \leqslant 1$; $\dim \mathbf{C}/\mathrm{Im}\,\beta_* \leqslant 1$, donc les dimensions de $H^0(X, \mathcal{O}_{D'})$ et de $H^1(X, \mathcal{O}_{D'})$ sont finies. Même raisonnement en échangeant les rôles de D et de D'. Alors l'exactitude des suites (3.5) et (3.6) pour des espaces vectoriels de dimension finie entraîne

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) + \dim \mathrm{Im}\,\beta_*$$

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) + \dim (\mathbf{C}/\mathrm{Im}\,\beta_*),$$

d'où, par addition membre à membre

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) + 1 \ ;$$

mais $\deg D' - \deg D = 1$, donc si (3.4) est vraie pour D *ou* D', elle est vraie pour l'autre.

(c) Tout diviseur $D = P_1 + \ldots + P_m - P_{m+1} - \ldots - P_n$, chaque point P_j étant écrit un nombre de fois égal à la valeur absolue de sa multiplicité. Alors le théorème se démontre pour D, par récurrence à partir de (b). □

3.5. Applications

3.5.1.* Théorème. — *Soit a un point d'une surface de Riemann compacte connexe X. Alors il existe une fonction méromorphe f non constante sur X ayant un pôle d'ordre $\leq g+1$ en a et holomorphe sur $X \setminus \{a\}$.

DÉMONSTRATION. — Soit D le diviseur

$$a \mapsto g+1$$
$$x \mapsto 0 \quad \text{pour} \quad x \in X \setminus \{a\}.$$

Alors, le théorème de Riemann—Roch implique : $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 1 - g + \deg D = 2$. □

3.5.2.* Corollaire. — *Soit X une surface de Riemann compacte connexe de genre g, alors il existe un revêtement holomorphe $f : X \to \mathbf{P}^1$ à $(g+1)$ feuillets au plus.

DÉMONSTRATION. — On considère la fonction f de 3.5.1 : $X \to \mathbf{P}^1$; f prend la valeur ∞ à la multiplicité $\leq g+1$, alors elle prend toute valeur le même nombre de fois (ch. 5, 2.3.2). □

3.5.3.* Corollaire. — *Soit X une surface de Riemann connexe. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *X est compacte ;*

(ii) *X est la surface de Riemann d'une fonction algébrique sur* $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

DÉMONSTRATION. — (ii)⇒(i) : c'est 6.1.3 du chapitre 5 ;

(i)⇒(ii) : d'après 3.5.2 il existe une fonction méromorphe f sur X et, d'après 6.1.1 du chapitre 5, X est la surface de Riemann de f ; en outre f est la fonction algébrique définie par un polynôme irréductible à coefficients rationnels sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ de degré inférieur ou égal à $g+1$. □

***3.5.4.* Corollaire. — *Toute surface de Riemann connexe X, de genre* 0, *est isomorphe à* $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.**

DÉMONSTRATION. — D'après 3.5.2, X est un revêtement de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ à un seul feuillet, alors le revêtement est un isomorphisme. □

4. Fonctions harmoniques dans un ouvert D de $\mathbf{C}$

4.1. Fonctions harmoniques

4.1.1. Soient x, y les coordonnées réelles dans $\mathbf{C}$ et $z=x+iy$ la coordonnée complexe. L'opérateur différentiel $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ est appelé le *laplacien.* Une fonction $u : D\to\mathbf{C}$ est dite *harmonique* si elle est C^2 et satisfait à

$$\Delta u = 0. \tag{4.1}$$

On a : $\Delta=\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)=4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar z}$, donc $\Delta=4\square$ avec $\square=\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar z}$.
La condition (4.1) est équivalente à

$$\square u = \frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}\,u = 0. \tag{4.2}$$

On désigne par $\mathscr{H}(D)$ l'ensemble des fonctions harmoniques dans D ; Δ étant $\mathbf{C}$-linéaire $\mathscr{H}(D)$ *est un* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel.*

4.1.2. **Proposition. —** ***Soit u une fonction C^2 à valeur complexe dans D. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :***

(i) ***u est harmonique ;***

(ii) ***$P=\mathscr{R}e\,u$ et $Q=\mathscr{I}m\,u$ sont harmoniques.***

DÉMONSTRATION. — Cela résulte du fait que la condition d'harmonicité (4.1) est réelle. □

4.2. Relations avec les fonctions holomorphes

4.2.1. **Proposition. —** ***Toute fonction holomorphe dans D est harmonique dans D.***

DÉMONSTRATION. — $f\in\mathcal{O}(D)$ est C^2 et $\partial f/\partial\bar z=0$, donc f satisfait à (4.2). □

4.2.2. **Corollaire. —** ***Les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe sont harmoniques.***

DÉMONSTRATION. — Résulte de 4.2.1 et de 4.1.2. □

4.2.3. **Proposition. —** ***Toute fonction $u : D\to\mathbf{R}$ harmonique est, au voisinage de chaque point de D, égale à la partie réelle d'une fonction holomorphe définie à une constante additive près.***

DÉMONSTRATION. — u est C^2 et satisfait à (4.2), d'après le théorème de Schwarz, $\frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$, i.e. $\partial u/\partial z\in\mathcal{O}(D)$; alors tout point $z_0\in D$ a un voisinage sur lequel $2\partial u/\partial z$ a une primitive holomorphe f (ch. 1, 3.3.1). Par passage à l'imaginaire conjugué, on a :

$$d\bar f = 2(\partial u/\partial\bar z)\,d\bar z,$$

donc $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(f+\bar{f})=\mathrm{d}u$, d'où : $u=\mathscr{R}\mathrm{e}\,f+$constante ; si f_1 est holomorphe au voisinage de z_0 et telle que $u=\mathscr{R}\mathrm{e}\,f_1+$constante, alors pour $h=f-f_1$, on a : $\mathscr{R}\mathrm{e}\,h$ est constante, i.e.

$$0=\mathrm{d}(h+\bar{h})=\frac{\partial h}{\partial z}\,\mathrm{d}z+\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z},$$

ce qui implique $\partial h/\partial z=0$, donc $f-f_1=h$ est constante au voisinage de z_0. □

4.2.4. **Corollaire.** — ***Si D est simplement connexe, f ci-dessus est holomorphe sur D.***

DÉMONSTRATION. — En effet, f est une primitive holomorphe globale (ch. 1, 5.4.10). □

4.2.5. **Proposition.** — ***Toute*** $u\in\mathscr{H}(D)$ ***possède la propriété de la moyenne.***

DÉMONSTRATION. — Il suffit de supposer u réelle ; u est la partie réelle d'une fonction holomorphe f au voisinage de tout disque fermé contenu dans D, d'après 4.2.4 ; f possédant la propriété de la moyenne (ch. 2, 3.1), il en est de même de u. □

4.2.6. **Corollaire.** — ***Les éléments de*** $\mathscr{H}(D)$ ***satisfont au principe du maximum.***

DÉMONSTRATION. — D'après 4.2.5, cela résulte de 3.2 du chapitre 2. □

4.2.7. **Proposition.** — ***Toute*** $u\in\mathscr{H}(D)$ ***est développable en série entière convergente en*** $(x-x_0)$, $(y-y_0)$ ***au voisinage de tout point*** $z_0=x_0+iy_0\in D$.

DÉMONSTRATION. — Compte tenu de 0 du chapitre 8, u étant la partie réelle d'une fonction holomorphe f au voisinage de z_0, la conclusion résulte du développement en série entière de f en $(z-z_0)$ au voisinage de z_0. □

4.3. Formule et noyau de Poisson

4.3.1. Soient $B(0, R)$ un disque ouvert de $\mathbf{C}$, z_0 un de ses points et u une fonction harmonique sur un voisinage ouvert de $\bar{B}(0, R)$. A partir de la propriété de la moyenne d'une fonction harmonique, on va établir une formule intégrale exprimant $u(z_0)$ à l'aide des valeurs de u sur spt $bB(0, R)$.

Considérons la composée S' des deux applications biholomorphes suivantes :

$$B(0, R)\to B(0, 1)\to B(0, 1)$$

$$z\mapsto\zeta=\frac{z}{R}\mapsto w=\frac{\zeta-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0\zeta}=\frac{R(z-z_0)}{R^2-\bar{z}_0 z}$$

dont la seconde est un automorphisme de $B(0, 1)$ transformant $\zeta_0=\frac{z_0}{R}$ en 0 ; z_0 étant fixé, ces applications se prolongent en des applications biholomorphes de voisinages ouverts des adhérences des disques. L'application réciproque de S' est

$$S : B(0, 1) \to B(0, R)$$

$$w \mapsto z = \frac{R(Rw+z_0)}{R+w\bar{z}_0}$$

et applique 0 sur z_0 ; en outre l'extension de S à $|w|=1$ applique ce cercle sur le cercle $|z|=R$.

La fonction $u \circ S$ est harmonique sur un voisinage de $\bar{B}(0, 1)$, donc elle satisfait à la propriété de la moyenne (4.2.5), en particulier

$$u(z_0) = u \circ S(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{bB(0,1)} u \circ S(w) \, \mathrm{d}\omega \tag{4.4}$$

où $\omega = \arg w$; sur le cercle $\operatorname{spt} bB(0, 1)$, on a $\mathrm{d}\omega = -i \dfrac{\mathrm{d}w}{w}$ car $w = e^{i\omega}$; de même si $\theta = \arg z$, sur $\{z \in \mathbf{C} \ ; \ |z| = R\}$, on a $\mathrm{d}\theta = -i \dfrac{\mathrm{d}z}{z}$.

Pour $|w|=1$, $\mathrm{d}\omega = -i\left[\dfrac{1}{z-z_0} + \dfrac{\bar{z}_0}{R^2 - \bar{z}_0 z}\right] \mathrm{d}z = \left(\dfrac{z}{z-z_0} + \dfrac{\bar{z}_0 z}{z\bar{z} - \bar{z}_0 z}\right) \mathrm{d}\theta$ car $|z| = R$, $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{z}{z-z_0} + \dfrac{\bar{z}_0}{\bar{z} - \bar{z}_0} = \dfrac{z\bar{z} - z_0\bar{z}_0}{|z-z_0|^2} = \dfrac{R^2 - |z_0|^2}{|z-z_0|^2}$, d'où, à partir de (4.4)

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{bB(0,R)} \frac{R^2 - |z_0|^2}{|z-z_0|^2} u(z) \, \mathrm{d}\theta. \tag{4.5}$$

4.3.2.* Théorème. — *Soit u une fonction harmonique dans $B(0, R)$ et continue sur $\bar{B}(0, R)$. Alors, pour tout $z_0 \in B(0, R)$, on a

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{bB(0,R)} \frac{R^2 - |z_0|^2}{|z-z_0|^2} u(z) \, \mathrm{d}\theta. \tag{4.6}$$

DÉMONSTRATION. — Si u est harmonique au voisinage de $\bar{B}(0, R)$, la formule (4.5) donne la conclusion. Sinon, soit $r \in]0, 1[$, alors $u(rz)$ est harmonique au voisinage de $\bar{B}(0, R)$; (4.5) entraîne

$$u(rz_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{bB(0,R)} \frac{R^2 - |z_0|^2}{|z-z_0|^2} u(rz) \, \mathrm{d}\theta. \tag{4.7}$$

Mais u, continue sur $\bar{B}(0, R)$ est uniformément continue, donc $u(rz)$ converge uniformément vers u sur $|z| = R$, quand r tend vers 1, d'où (4.6). □

4.3.3. (4.6) est appelée la *formule de Poisson* ; la fonction à valeurs réelles $\dfrac{R^2 - |z_0|^2}{|z-z_0|^2}$ dans le complémentaire de la diagonale de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ est appelée le *noyau de Poisson*.

4.3.4.* Corollaire. — *Pour toute fonction $u \in \mathscr{H}(B(0, R))$ à valeurs réelles, continue sur $\bar{B}(0, R)$, pour tout $z \in B(0, R)$, on a

$$u(z) = \mathscr{R}\mathrm{e}\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{bB(0,R)} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\zeta) \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}\right]. \tag{4.8}$$

DÉMONSTRATION. — Sur spt $bB(0, R)$, on a

$$\frac{R^2-|z_0|^2}{|z-z_0|^2}=\frac{z\bar{z}-z_0\bar{z}_0}{(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)}=\frac{1}{2}\left[\frac{z+z_0}{z-z_0}+\frac{\bar{z}+\bar{z}_0}{\bar{z}-\bar{z}_0}\right]=\mathcal{R}\mathrm{e}\,\frac{z+z_0}{z-z_0}.$$

En outre $\dfrac{1}{2\pi}u(z)\,\mathrm{d}\theta$ est réel et égal à $\dfrac{1}{2\pi i}u(z)\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$; en portant dans (4.6) et en remplaçant z par ζ et z_0 par z, on obtient (4.8). □

Posons $B=B(0, R)$.

Pour $|\zeta|=R$, la fonction [ ] de (4.8) est holomorphe en z, donc $u(z)$ est la partie réelle de la fonction $g\in\mathcal{O}(B(0, R))$, où $g(z)=Qu(z)$ avec

$$Qu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{bB(0,R)}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,u(\zeta)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}.$$

Soit maintenant f une fonction holomorphe dans B et continue sur $\bar{B}$; prenons pour u la partie réelle de f : $f=u+iv$, u et v réelles ; alors $f-g$ est holomorphe dans B, continue dans $\bar{B}$, donc $f-g=iK$ où K est une constante réelle. On a : $-if=$ $=v-iu$ et $v=\mathcal{R}\mathrm{e}\,Qv(z)$; soit $h=Qv(z)$, alors $\mathcal{R}\mathrm{e}\,h=v$; $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(-if-h)=0$ entraîne $-if-h=iH$ où H est une constante réelle, alors $2f(z)-g(z)-ih(z)=-H+iK$;

$$2f(z)=Qf(z)-H+iK;\quad \text{en outre, pour}\quad z=0,$$

$$2f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{bB}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta-H+iK=f(0)-H+iK,\quad \text{i.e.}\quad f(0)=-H+iK,$$

alors

$$2f(z)=Qf(z)+f(0),$$

d'où

4.3.5. Corollaire. — ***Si*** $f\in\mathcal{O}\,(B(0, R))\cap C^0\,(\bar{B}(0, R))$, ***alors, dans*** $B(0, R)$

$$f(z)=\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{4\pi i}\int_{bB(0,R)}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,f(\zeta)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}.\quad \square$$

4.4. Problème de Dirichlet pour le disque

4.4.1. Soient $\Gamma=\mathrm{spt}\,bB(0, R)$ et f une fonction continue sur Γ ; le *problème de Dirichlet* pour disque $\bar{B}(0, R)$ est la recherche d'une fonction F continue sur $\bar{B}(0, R)$, harmonique dans $B(0, R)$ telle que $F|\Gamma=f$. On convient de poser $f(\theta)=f(Re^{i\theta})$. On désignera par $P(\zeta, z)$ le noyau de Poisson $\dfrac{R^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}$.

4.4.2. Théorème. — ***Le problème de Dirichlet pour le disque a une solution unique.***

DÉMONSTRATION. — (a) unicité : soient F_1, F_2 deux solutions, alors $G=F_1-F_2$ est continue sur $\bar{B}(0, R)$, harmonique dans $B(0, R)$ donc satisfait au principe du maximum (4.2.6), i.e. $|G|$ a son maximum sur Γ (ch. 2, 3.3) et $G|\Gamma=0$, donc $G=0$.

(b) existence : pour $z \in B(0, R)$, on considère la fonction

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, P(Re^{i\theta}, z)\, d\theta \ ;$$

d'après 4.3.4, F est la partie réelle de G telle que $G(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}\, d\theta$; G est holomorphe dans $B(0, R)$, donc F est harmonique dans $B(0, R)$; reste à montrer :

4.4.3.* Lemme. — *Pour* $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, *on a

$$f(\theta_0) = \lim_{z \to Re^{i\theta_0}} F(z). \tag{4.9}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME. — (a) *Pour tout* $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, *pour tout* $0 < \eta < \pi$, *l'intégrale*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \theta_0| > \eta} P(Re^{i\theta}, z)\, d\theta \tag{4.10}$$

tend vers 0 *quand* $z \in B(0, r)$ *tend vers* $Re^{i\theta_0}$.

En effet, soit $z = \varrho e^{i\omega}$; quand z tend vers $Re^{i\theta_0}$, $\varrho \nearrow r$ et $\omega \to \theta_0$. Si $|\omega - \theta_0| \leqslant \frac{\eta}{2}$, on a $|\omega - \theta_0| \leqslant \frac{\eta}{2}$ quand $|\theta - \theta_0| > \eta$; $|Re^{i\theta} - z| = |Re^{i\theta} - \varrho e^{i\omega}| \geqslant R\,|e^{i\theta} - e^{i\omega}| \geqslant$ $\geqslant R\,|\sin(\theta - \omega)| > R \sin \frac{\eta}{2}$; l'intégrale (4.10) est majorée par $\dfrac{R^2 - \varrho^2}{R^2 \sin^2 \frac{\eta}{2}}$ qui tend vers 0 quand $\varrho \to R$.

(b) On a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(Re^{i\theta}, z)\, d\theta = 1, \tag{4.11}$$

d'après (4.6) appliqué à la fonction harmonique 1. La formule (4.11) entraîne

$$F(z) - f(\theta_0) = I_1 + I_2$$

avec

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \theta_0| \leq \eta} (f(\theta) - f(\theta_0))\, P(Re^{i\theta}, z)\, d\theta \ ;$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \theta_0| > \eta} (f(\theta) - f(\theta_0))\, P(Re^{i\theta}, z)\, d\theta.$$

Soit $\varepsilon > 0$, f étant continue, et d'après (4.11), il existe η tel que $|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$; soient M la borne supérieure de $|f(\theta)|$ et m la valeur de (4.10) ; d'après (a), pour z assez voisin de $Re^{i\theta_0}$, on a $2mM < \frac{\varepsilon}{2}$, donc $I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $|F(z) - f(\theta_0)| < \varepsilon$. □

4.4.4.* Théorème. — *Toute fonction f, continue et possédant la propriété de la moyenne dans un ouvert D de* C, *est harmonique dans D.

DÉMONSTRATION. — Soit z_0 un point de D, c'est le centre d'un disque fermé $\bar{B}(z_0, R)$ contenu dans D et soit $\Gamma = \operatorname{spt} bB(z_0, R)$. D'après 4.4.2, il existe une fonction F_{z_0} continue sur $\bar{B}(z_0, R)$, harmonique dans $B(z_0, R)$ telle que $F_{z_0}|\Gamma = f|\Gamma$. La fonction $F_{z_0} - f$ étant continue et possédant la propriété de la moyenne dans $\bar{B}(z_0, R)$ satisfait au principe du maximum (ch. 2, 3.2) ; elle est nulle sur Γ donc nulle sur $B(z_0, R)$; alors f, harmonique au voisinage de tout point z_0 de D, est harmonique dans D. □

5. Formes différentielles harmoniques sur une surface de Riemann

5.1. Métrique hermitienne

5.1.1. Sur une surface de Riemann X, en tout point $\zeta \in X$, on considère le **C**-espace vectoriel $T_\zeta^* \otimes_{\mathbf{C}} T_\zeta^*$ (voir Appendice) ; on vérifie immédiatement que $\overset{2}{\otimes} T^*(X) = \dot{\bigcup}_{\zeta \in X} T_\zeta^* \otimes T_\zeta^*$, où $\dot{\bigcup}$ désigne la réunion disjointe, comme $\Lambda^2 T^*(X)$, possède des sections C^∞. Considérons une telle section σ ayant les propriétés suivantes : tout point $\zeta_0 \in X$ possède un voisinage V_{ζ_0} muni d'une coordonnée z sur lequel $\sigma = g\, \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}\bar{z}$; pour tout $\zeta \in V_{\zeta_0}$, $g(\zeta) \in \mathbf{R}_+^*$, i.e., pour tout $\xi \in \mathbf{C}^*$, $g\xi\bar{\xi} > 0$. On note $\mathrm{d}s^2$ la section σ.

Remarquons que, par changement de coordonnée $z \mapsto z'$, si $\mathrm{d}s^2 = g'\, \mathrm{d}z' \otimes \mathrm{d}\bar{z}'$ dans la nouvelle coordonnée, l'invariance de $\mathrm{d}s^2$ entraîne $g\, \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}\bar{z} = g \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z'} \mathrm{d}z' \otimes \otimes \overline{\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z'}\right)} \mathrm{d}\bar{z}' = g'\, \mathrm{d}z' \otimes \mathrm{d}\bar{z}'$, i.e. $g' = g \left|\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z'}\right|^2$. La 2-forme différentielle $\omega = \dfrac{i}{2} g\, \mathrm{d}z \wedge \wedge \mathrm{d}\bar{z} = g\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, où $z = x + iy$; $x, y \in \mathbf{R}$, est réelle.

$\mathrm{d}s^2 = g\, \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}\bar{z}$ est appelée une *métrique hermitienne sur* X ; on a $\mathrm{d}s^2 = g(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\, \mathrm{d}y) \otimes (\mathrm{d}x - i\, \mathrm{d}y) = g(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y) + ig(\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}x - \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y)$; $\mathrm{d}\tau^2 = g(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y)$ est la métrique riemannienne associée à $\mathrm{d}s^2$. On notera désormais le produit tensoriel sans symbole $\otimes$ et on posera $\mathrm{d}x\, \mathrm{d}x = \mathrm{d}x^2$. De sorte que $\mathrm{d}s^2 = g\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\bar{z}$ et $\mathrm{d}\tau^2 = g(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$.

5.1.2. **Proposition.** — ***Sur toute surface de Riemann X, il existe une métrique hermitienne*** $\mathbf{d}s^2$.

DÉMONSTRATION. — Soit $\mathscr{U} = (U_j)_{j \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts de coordonnée, z_j étant une coordonnée sur U_j et soit $(\psi_j)_{j \in I}$ une partition de l'unité subordonnée à $\mathscr{U}$. Sur chaque U_j, on a la métrique hermitienne de $\mathrm{d}z_j\, \mathrm{d}\bar{z}_j\, \mathbf{C}$; posons $\mathrm{d}s^2 = \sum_{j \in I} \psi_j\, \mathrm{d}z_j\, \mathrm{d}\bar{z}_j$. Pour $l \in I$, soit L l'ensemble des $j \in I$ tels que $U_j \cap U_l \neq \emptyset$; alors, pour $j \in L$, sur $U_j \cap U_l$, on a :

$$\mathrm{d}z_j\, \mathrm{d}\bar{z}_j = \left|\frac{\mathrm{d}z_j}{\mathrm{d}z_l}\right|^2 \mathrm{d}z_l\, \mathrm{d}\bar{z}_l, \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}s^2|U_l = \sum_{j \in L} \psi_j\, \mathrm{d}z_j\, \mathrm{d}\bar{z}_j = \sum_{j \in L} \left(\psi_j \left|\frac{\mathrm{d}z_j}{\mathrm{d}z_l}\right|^2 |U_j\right) \mathrm{d}z_l\, \mathrm{d}\bar{z}_l$$

avec $\sum_{j \in L} \left(\psi_j \left|\dfrac{\mathrm{d}z_j}{\mathrm{d}z_l}\right|^2 |U_l\right) > 0$; $\mathrm{d}s^2$ est donc une métrique hermitienne sur X. □

5.2. L'opérateur *

5.2.1. La surface de Riemann X étant munie d'une métrique hermitienne ds^2, soient ψ_p, φ_p, $p=0, 1, 2$, des p-formes différentielles de degré p, sur X ; alors, pour toute carte (z, U), en restriction à U, on a : $\psi_0 = \Psi_0$; $\psi_1 = \Psi_1' \, dz + \Psi_1'' \, d\bar{z}$; $\psi_2 = \Psi_2 \, dz \wedge d\bar{z}$, où Ψ_p, $p=0, 1, 2$ est une fonction sur U ; soient $ds^2|U = g \, dz \, d\bar{z}$ et $\Psi_p^* = g^{-p} \Psi_p$, Ψ_1 désignant Ψ_1' ou Ψ_1'', on pose

$$\langle \varphi_p, \psi_p \rangle (z) = \Phi_p \cdot \bar{\Psi}_p^*(z). \tag{5.1}$$

5.2.2. **Proposition.** — ***$\langle \varphi_p, \psi_p \rangle$ possède les propriétés suivantes :***

(i) ***$\langle \varphi_p, \psi_p \rangle g \, dz \wedge d\bar{z}$ est invariant par changement de coordonnées ;***

(ii) ***$\langle \psi_p, \varphi_p \rangle = \overline{\langle \varphi_p, \psi_p \rangle}$;***

(iii) ***$\langle \, , \, \rangle$ est C-linéaire par rapport au premier facteur ;***

(iv) ***$\langle \varphi_p, \varphi_p \rangle \geqslant 0$;***

(v) ***$\langle \varphi_p, \varphi_p \rangle = 0$ entraîne $\varphi_p = 0$.***

DÉMONSTRATION. — (i) Dans un changement de coordonnées $z' \mapsto z$, $\Psi_p(z)$, $p = 0, 1, 2$, est transformée, respectivement, en $\Psi_0(z(z'))$, $\left(\Psi_1' \dfrac{dz}{dz'}, \Psi_1'' \dfrac{d\bar{z}}{d\bar{z}'}\right)$, $\Psi_2 \left| \dfrac{dz}{dz'} \right|^2$. Alors $\langle \varphi_p, \psi_p \rangle g \, dz \wedge d\bar{z}$ est invariant, (ii) à (v) résultent immédiatement de la définition, g étant réelle. □

5.2.3. A cause de 5.2.2, $\langle \varphi_p, \psi_p \rangle (z)$ est appelé *produit scalaire* (hermitien) *ponctuel* en z de φ_p et ψ_p.

5.2.4. Dans les notations de 5.2.1, on cherche un opérateur * dans l'espace des formes différentielles tel que

$$\langle \varphi_p, \psi_p \rangle (z) \, i g(z) \, dz \wedge d\bar{z} = \langle \varphi_p, \psi_p \rangle \omega = \varphi_p \wedge {}^*\psi_p. \tag{5.2}$$

On a, pour $p=0$, ${}^*\psi_0 = i g \, \bar{\psi}_0 \, dz \wedge d\bar{z}$

pour $p = 2$, ${}^*\psi_2 = i \dfrac{\bar{\Psi}_2}{g}$

pour $p = 1$, si ψ_1 est de type $(1,0)$, ${}^*\psi_1 = i\bar{\psi}_1$, de type $(0,1)$;

si ψ_1 est de type $(0,1)$, ${}^*\psi_1 = -i\bar{\psi}_1$, de type $(1,0)$

ces formes satisfont à la condition (5.2).

5.2.5. **Proposition.** — ***L'application * du C-espace vectoriel des formes différentielles C^∞, $\mathscr{E}^{\cdot}(X)$ dans lui-même possède les propriétés suivantes :***

(i) **** est une application R-linéaire : $\mathscr{E}^{r,s}(X) \to \mathscr{E}^{1-r,1-s}(X)$ pour $r, s = 0, 1$;***

(ii) **** est réel, i.e. transforme toute forme différentielle réelle en une forme réelle ;***

(iii) ***pour les formes différentielles de degré p, $^{**} = (-1)^p \, \mathrm{id}$.***

DÉMONSTRATION.

(i) évident ;

(ii) on a $i\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}=2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$; l'assertion est claire pour $p=0, 2$; pour $p=1$, si φ est réelle, on a : $\varphi=\alpha\,\mathrm{d}z+\bar{\alpha}\,\mathrm{d}\bar{z}$, alors ${}^*\varphi=i\bar{\alpha}\,\mathrm{d}\bar{z}-i\alpha\,\mathrm{d}z$ est réelle.

(iii) immédiat sur la définition. □

5.2.6. Produit scalaire

Soit $\mathscr{D}^\bullet(X)$ le **C**-espace vectoriel des formes différentielles C^∞ à support compact dans la surface de Riemann X, munie de la métrique hermitienne $\mathrm{d}s^2$. Pour tout couple $\varphi_p, \psi_p\in\mathscr{D}^p(X)$, $(\varphi_p|\psi_p)=\int_X \varphi_p\wedge{}^*\psi_p$ a un sens et, d'après 5.2.2, définit un produit scalaire hermitien faisant de $\mathscr{D}^p(X)$, et aussi de $\mathscr{D}^\bullet(X)$ un espace préhilbertien.

5.3. Opérateurs ∂'', ∂', ∂, laplacien

Une application **R** ou **C**-linéaire de $\mathscr{E}^\bullet(X)$ dans lui-même (appelée aussi opérateur) est dite de type (r', s') si elle transforme une forme différentielle de type (r, s) en un forme de type $(r+r', s+s')$.

5.3.1. Par définition $\partial=-{}^*\mathrm{d}^*$; $\partial'=-{}^*\mathrm{d}'^*$; $\partial''=-{}^*\mathrm{d}''^*$.

5.3.2. **Proposition. —** ***Les opérateurs ∂, ∂', ∂'' sont C-linéaires et possèdent les propriétés suivantes :***

(i) ***ils sont de carré nul ;***

(ii) ***∂' est de type $(-1, 0)$; ∂'' de type $(0, -1)$;***

(iii) ***dans $\mathscr{D}^\bullet(X)$ muni du produit scalaire $(\,|\,)$, ∂, ∂', ∂'' sont les adjoints de* d, d′, d″ *respectivement.***

DÉMONSTRATION. — La **C**-linéarité provient du fait que * fait intervenir le passage à l'imaginaire conjugué des coefficients et qu'il apparaît deux fois dans la définition des opérateurs considérés.

(i) $\partial^2=\partial\circ\partial={}^*\mathrm{d}^*{}^*\mathrm{d}^*=\pm{}^*\mathrm{dd}^*=0$.

(ii) si φ est de type (r, s), ${}^*\varphi$ est de type $(1-r, 1-s)$, $\mathrm{d}'{}^*\varphi$ est de type $(2-r, 1-s)$, ${}^*\mathrm{d}'{}^*\varphi$ de type $(-1+r, s)$.

(iii) $$(\mathrm{d}'\varphi, \psi)=\int_X \mathrm{d}'\varphi\wedge{}^*\psi=\int_X \mathrm{d}(\varphi\wedge{}^*\psi)+(-1)^{s+1}\int_X \varphi\wedge\mathrm{d}^*\psi=$$
$$=(-1)^{s+1}\int_X \varphi\wedge\mathrm{d}'^*\psi, \quad \text{avec} \quad \varphi=\varphi^{0,s},$$

$s=0, 1$, sinon tous les termes sont nuls ; en outre $\varphi\wedge{}^*\psi$ est à support compact et on a tenu compte du type, le dernier membre est égal à $-\int_X \varphi\wedge{}^{**}\mathrm{d}'{}^*\psi=\int_X \varphi\wedge{}^*\partial'\psi=$ $=(\varphi|\partial'\psi)$; raisonnement analogue pour ∂ et ∂''. □

5.3.3. Par définition, l'opérateur laplacien est $\Delta = \mathrm{d}\partial + \partial\mathrm{d}$. Soient $\square = \mathrm{d}''\partial'' + \partial''\,\mathrm{d}''$; $\square' = \mathrm{d}'\partial' + \partial'\,\mathrm{d}'$. On a : $\mathrm{d} = \mathrm{d}' + \mathrm{d}''$; $\partial = \partial' + \partial''$, d'où

$$\begin{aligned} \Delta &= (\mathrm{d}'+\mathrm{d}'')(\partial'+\partial'')+(\partial'+\partial'')(\mathrm{d}'+\mathrm{d}'') = \\ &= \square' + \square + \mathrm{d}''\partial' + \partial'\,\mathrm{d}'' + \mathrm{d}'\partial'' + \partial''\,\mathrm{d}'. \end{aligned}$$

Calcul de ∂' : si φ est de degré 0, $\partial'\varphi = 0$ car ∂' est de type $(-1, 0)$

si φ est de degré 1, on a : $\varphi = \alpha\,dz + \beta\,d\bar{z}$ et $\partial'\varphi = \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}}$

si $\varphi = \Phi\,dz \wedge d\bar{z}$, on a $\partial'\varphi = \dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\dfrac{\Phi}{g}\right) d\bar{z}$.

Alors pour φ de degré 0, on a $\mathrm{d}''\partial'\varphi = 0 = \partial'\,\mathrm{d}''\varphi$ à cause du type,

pour φ de degré 1, $\qquad \mathrm{d}''\partial'\varphi = \dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\dfrac{1}{g}\dfrac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}}\right) d\bar{z} = -\partial'\mathrm{d}''\varphi.$

Donc, dans tous les cas $(\mathrm{d}''\partial' + \partial'\,\mathrm{d}'')\varphi = 0$. Mais $\mathrm{d}'\partial'' + \partial''\,\mathrm{d}' = \overline{\mathrm{d}''\partial' + \partial'\,\mathrm{d}''}$ et $\square' = \bar{\square}$.

En outre, l'opérateur $\bar{\square}$ est réel, i.e. pour φ réelle, $\bar{\square}\varphi$ est réelle, en effet : si φ est une fonction réelle $\bar{\square}\varphi = \partial'\,\mathrm{d}'\varphi = \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial\bar{z}}$;

si φ est une 1-forme réelle, $\varphi = \alpha\,dz + \bar{\alpha}\,d\bar{z}$, on a $\bar{\square}\varphi = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{g}\dfrac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}}\right) dz + \overline{\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{g}\dfrac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}}\right)} d\bar{z}$ qui est réelle ;

si $\varphi = \Phi\,dz \wedge d\bar{z}$, $\bar{\square}\varphi = \mathrm{d}'\partial'\varphi = \dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}\left(\dfrac{\Phi}{g}\right) dz \wedge d\bar{z}$ est réelle si φ est réelle.

Alors $\bar{\square} = \square$ et $\Delta = 2\square$.

5.4. Formes harmoniques

Sur une surface de Riemann X, munie d'une métrique hermitienne ds^2, on appelle *forme harmonique* toute forme différentielle φ sur X satisfaisant à (5.3) $\square\varphi = 0$, ce qui équivaut à $\Delta\varphi = 0$.

Toute forme satisfaisant à

$$\mathrm{d}''\varphi = 0 \ ; \ \partial''\varphi = 0 \tag{5.4}$$

est harmonique.

5.5. Fonctions harmoniques

5.5.1. **Lemme.** — ***Si f est une fonction C^∞ sur X, alors***

(i) $*\mathrm{d}'f = i\mathrm{d}''\bar{f}$, $*\mathrm{d}''f = -i\mathrm{d}'\bar{f}$;

(ii) $\mathrm{d}*\mathrm{d}f = 2i\,\mathrm{d}'\,\mathrm{d}''\bar{f}$.

DÉMONSTRATION. — (i) $\mathrm{d}'f$ est une forme de type $(1,0)$, d'après 5.2.4, $*\mathrm{d}'f= =i\overline{\mathrm{d}'f}=i\mathrm{d}''\bar{f}$;

(ii) $\mathrm{d}*\mathrm{d}f = \mathrm{d}*(\mathrm{d}'f+\mathrm{d}''f) = \mathrm{d}(i\mathrm{d}''\bar{f}-i\mathrm{d}'\bar{f})$, d'après 5.2.4,

$= i\mathrm{d}'\,\mathrm{d}''\bar{f}-i\mathrm{d}''\,\mathrm{d}'\bar{f} = 2i\,\mathrm{d}'\,\mathrm{d}''\bar{f}$. □

5.5.2. **Lemme.** — ***Pour toute coordonnée holomorphe locale z de X, on a :***

$$\Delta f = \frac{2}{g}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} f.$$

DÉMONSTRATION. — $\Delta f=\partial\,\mathrm{d}f= -*\mathrm{d}*\mathrm{d}f= -2i*\mathrm{d}'\,\mathrm{d}''\bar{f}=(-2i)\dfrac{i}{g}\dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}f$, d'après 5.2 et la définition de $*$. □

5.5.3. **Proposition.** — ***Dans le cas où X est*** **C**, ***muni de la coordonnée z et de la métrique hermitienne*** $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z}$, ***toute fonction harmonique au sens de*** **5.4** ***est harmonique au sens de*** **4.1.1.**

DÉMONSTRATION. —

$$g = 1 \quad \text{et} \quad \Delta f = 2\,\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right). \quad \square$$

5.5.4. **Remarque.** — L'opérateur Δ de 5.3.3 est égal à la moitié du laplacien, noté aussi Δ, défini en 4.1. Dans la suite du n° 5, on notera Δ l'opérateur du n° 5.3.3 et on l'appellera *laplacien.*

5.6. Théorème. — ***Dans $\mathscr{D}^\cdot(X)$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :***

(i) ***φ est harmonique,***

(ii) $\mathrm{d}''\varphi=0=\partial''\varphi$.

DÉMONSTRATION. — (ii)⇒(i) d'après 5.4.

(i)⇒(ii) : pour toute $\varphi\in\mathscr{D}^\cdot(X)$, on a $((\mathrm{d}''\partial''+\partial''\,\mathrm{d}'')\varphi|\varphi)=(\partial''\varphi|\partial''\varphi)+(\mathrm{d}''\varphi|\mathrm{d}''\varphi)$, donc $\square\varphi=0$ implique $\partial''\varphi=0=\mathrm{d}''\varphi$, car $\mathscr{D}^\cdot(X)$ est préhilbertien pour $(\,|\,)$. □

5.6.1. **Corollaire.** — ***Si X est compacte, les formes harmoniques sont les formes φ satisfaisant à***

$$\mathrm{d}''\varphi = 0;\quad \partial''\varphi = 0 \tag{5.4}$$

ou, ce qui est équivalent, à

$$\mathrm{d}\varphi = 0;\quad \partial\varphi = 0 \quad ou \quad (5.6)\quad \mathrm{d}'\varphi = 0;\quad \partial'\varphi = 0. \quad \square \tag{5.5}$$

5.7. Cas des 1-formes différentielles

5.7.1. On note $\Omega^1(X)$ le **C**-espace vectoriel des 1-formes différentielles holomorphes et par $\bar{\Omega}^1(X)$ celui des 1-formes imaginaires conjuguées, dites antiholomorphes.

5.7.2. **Théorème.** — ***Soit*** $\varphi \in \mathscr{E}^1(X)$, ***alors les conditions suivantes sont équivalentes :***

(i) $d\varphi = 0 = \partial\varphi$;

(ii) $d'\varphi = 0 = d''\varphi$;

(iii) $\varphi = \psi_1 + \psi_2$ ***où*** $\psi_1 \in \Omega^1(X)$ ***et*** $\psi_2 \in \overline{\Omega^1(X)}$;

(iv) ***tout point*** $a \in X$ ***a un voisinage*** U ***dans*** X ***sur lequel il existe une fonction harmonique*** f ***telle que*** $\varphi = df$ ***dans*** U.

DÉMONSTRATION. — $\partial\varphi = 0$ équivaut à $d^*\varphi = 0$; $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ où φ_1 est de type (1, 0) et φ_2 de type (0, 1)

$$^*\varphi = i\bar{\varphi}_1 - i\bar{\varphi}_2 \ ; \ d^*\varphi = i\, d'\bar{\varphi}_1 - i\, d''\bar{\varphi}_2 = i\left(\overline{d''\varphi_1} - \overline{d'\varphi_2}\right)$$
$$d\varphi = d''\varphi_1 + d'\varphi_2$$

donc (i)$\Leftrightarrow$(ii).

Dans les notations ci-dessus $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

(ii) équivaut à $d''\varphi_1 = 0 = d'\varphi_2$, c'est-à-dire (iii).

(i)$\Rightarrow$(iv) : pour tout $a \in X$, d'après le lemme de Poincaré, $d\varphi = 0$ entraîne l'existence d'une fonction f sur un voisinage U de a telle que $df = \varphi$; $\partial\varphi = 0$ équivaut à $\partial\, df = 0$, i.e. f est harmonique.

(iv)$\Rightarrow$(i) $\varphi = df$ sur U, avec f harmonique entraîne $d\varphi = 0$ et $\partial\varphi = \partial\, df = 0$. □

5.7.3. **Théorème.** — ***Toute 1-forme différentielle réelle*** σ ***telle que*** $d''\sigma = 0 = \partial''\sigma$ ***est la partie réelle d'une 1-forme holomorphe bien déterminée.***

DÉMONSTRATION. — $\sigma = \psi_1 + \bar{\psi}_2$ où $\psi_1, \psi_2 \in \Omega^1(X)$ d'après 5.7.2 (iii) ; $\bar{\sigma} = \bar{\psi}_1 + \psi_2 = \sigma$, donc $\psi_2 = \psi_1$ et $\sigma = \psi_1 + \bar{\psi}_1 = 2\,\mathscr{R}e\,(\psi_1)$.

Unicité : Si $\psi \in \Omega^1(X)$ et $\mathscr{R}e\,(\psi) = 0$; localement, d'après le Lemme de Poincaré pour les 1-formes holomorphes (ch. 1, 3.3.1), il existe une fonction holomorphe f telle que $\psi = df$; $\mathscr{R}e\,(\psi) = \mathscr{R}e\, df = d\,\mathscr{R}e\, f = 0$, donc $\mathscr{R}e\, f$ est constante ; comme f est holomorphe, f est constante, d'où $\psi = 0$. □

5.8. Espace des formes harmoniques pour X compacte

5.8.1. Une fonction harmonique sur X satisfait au principe du maximum, donc elle est constante.

5.8.2. Soit φ une 2-forme harmonique sur X, alors il existe une fonction ψ sur X telle que $\varphi = {}^*\psi$; φ étant harmonique, alors $\partial''\varphi = 0$, i.e. $^*d''\psi = 0$; la fonction ψ est holomorphe, donc harmonique, i.e. constante. L'opérateur * est un isomorphisme ; donc l'espace des 2-formes harmoniques, si X *est connexe*, est isomorphe à $\mathbf{C}$.

5.8.3. Soit $\mathscr{H}^1(X)$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des 1-formes différentielles φ telles que $d''\varphi=0=\partial''\varphi$; puisque X est compacte, c'est l'espace des 1-formes harmoniques (5.4 et 5.5).

5.8.4. **Théorème.** — ***Si X est compacte, de genre g, alors*** **(5.8)** $\mathscr{H}^1(X)=\Omega^1(X)\oplus \oplus\bar{\Omega}^1(X)$ ***où la somme directe est orthogonale et*** $\dim\mathscr{H}^1(X)=2g$.

DÉMONSTRATION. — (5.8) résulte de 5.7.2 (iii) ; en outre $\overline{\Omega^1(X)}=H^0(X, \bar{\Omega}^1)\approx =H^{0,1}(X, \mathbf{C})\approx H^1(X, \mathcal{O})$ de dimension g d'après 1.8.6. □

5.9. Décomposition orthogonale ; théorème de Hodge

5.9.1. **Lemme.** — ***Si X est compacte,*** $\mathrm{d}\mathscr{E}(X)$ ***et*** $^*\mathrm{d}\mathscr{E}(X)$ ***sont orthogonaux dans*** $\mathscr{E}^1(X)$ ***et*** $\mathrm{d}\mathscr{E}(X)\oplus{}^*\mathrm{d}\mathscr{E}(X)=\mathrm{d}'\mathscr{E}(X)\oplus\mathrm{d}''\mathscr{E}(X)$.

DÉMONSTRATION. — Soient $f, g\in\mathscr{E}=\mathscr{E}(X)$,

$$(\mathrm{d}f\,|\,{}^*\mathrm{d}g)=\int_X \mathrm{d}f\wedge{}^{**}\mathrm{d}g=-\int_X \mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}g=-\int_X \mathrm{d}(f\,\mathrm{d}g)=0 \quad \text{(ch. 1, 2.5.4).}$$

Soit $\mathrm{d}f+{}^*\mathrm{d}g\in\mathrm{d}\mathscr{E}\oplus{}^*\mathrm{d}\mathscr{E}$, d'après 5.5.1 (i), $^*\mathrm{d}'g=i\mathrm{d}''\bar{g}$; $^*\mathrm{d}''g=-i\mathrm{d}'\bar{g}$, d'où $\mathrm{d}f+ +{}^*\mathrm{d}g=\mathrm{d}'(f-i\bar{g})+\mathrm{d}''(f+i\bar{g})$. □

5.9.2. **Lemme.** — ***Si X est compacte*** $\mathrm{d}''\mathscr{E}(X)$ ***et*** $\bar{\Omega}^1(X)$ ***sont orthogonaux et*** $\mathscr{E}^{0,1}(X)=\mathrm{d}''\mathscr{E}(X)\oplus\bar{\Omega}^1(X)$.

DÉMONSTRATION. — Soient $f\in\mathscr{E}(X)$ et $\psi\in\Omega^1$, alors $(\bar{\psi}|\mathrm{d}''f)=\int_X\bar{\psi}\wedge{}^*\mathrm{d}''f= =-i\int_X\bar{\psi}\wedge\mathrm{d}'\bar{f}=i\int_x \mathrm{d}(\bar{f}\bar{\psi})=0$; d'après 1.8.6,

$$H^1(X, \mathcal{O})\approx H^{0,1}(X, \mathbf{C})=\mathscr{E}^{0,1}(X)/\mathrm{d}''\mathscr{E}(X)\approx H^0(X, \bar{\Omega}^1),$$

sous-espace de $\mathscr{E}^{0,1}(X)$. Alors la suite exacte $0\to\mathrm{d}''\mathscr{E}(X)\to\mathscr{E}^{0,1}(X)\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\scriptstyle i}}H^0(X, \bar{\Omega}^1)\to 0$, où i est l'inclusion, est scindée ; donc $\mathscr{E}^{0,1}(X)\approx\mathrm{d}''\mathscr{E}(X)\oplus H^0(X, \bar{\Omega}^1)$. □

5.9.3. **Théorème.** — ***Si X est une surface de Riemann compacte, on a la somme directe orthogonale***

$$\mathscr{E}^1(X)=\mathscr{H}^1(X)\oplus\mathrm{d}\mathscr{E}(X)+\partial\mathscr{E}^2(X).$$

DÉMONSTRATION.

$$\mathscr{E}^1(X)=\mathscr{E}^{1,0}(X)\oplus\mathscr{E}^{0,1}(X)=\mathrm{d}'\mathscr{E}(X)\oplus\Omega^1(X)\oplus\mathrm{d}''\mathscr{E}(X)\oplus\bar{\Omega}^1(X), \text{ d'après 5.9.2}$$

et le passage à l'imaginaire conjugué

$$=\mathrm{d}\mathscr{E}(X)\oplus{}^*\mathrm{d}\mathscr{E}(X)\oplus\mathscr{H}^1(X), \text{ d'après 5.9.1 et 5.8.4.}$$

Mais

$$\mathscr{E}(X)={}^*\mathscr{E}^2(X) \quad\text{et}\quad {}^*\mathrm{d}\mathscr{E}(X)={}^*\mathrm{d}\,{}^*\mathscr{E}^2(X)=\partial\mathscr{E}^2(X). \; □$$

5.9.4. **Proposition.** — ***On a*** $Z^1(X)=\mathrm{Ker}\,\big(\mathscr{E}^1(X)\xrightarrow{\mathrm{d}}\mathscr{E}^2(X)\big)=\mathscr{H}^1(X)+\mathrm{d}\mathscr{E}(X)$.

DÉMONSTRATION. — $Z^1(X) \supset \mathscr{H}^1(X) + d\mathscr{E}(X)$; d'après 5.9.3, il suffit de montrer que $Z^1(X)$ est orthogonal à $\partial\mathscr{E}^2(X)$: soit $\varphi \in Z^1(X)$, $\psi \in \mathscr{E}^2(X)$, alors $(\varphi|\partial\psi) = (d\varphi|\psi) = 0$. □

5.9.5. Théorème (Hodge). — ***Sur une surface de Riemann compacte X, on a : $H^1(X, \mathbf{C}) \approx \mathscr{H}^1(X)$.***

DÉMONSTRATION. — D'après le théorème de de Rham (1.8.5) et 5.9.4, on a : $H^1(X, \mathbf{C}) \approx Z^1(X)/d\mathscr{E}(X) \approx \mathscr{H}^1(X)$. □

5.9.6. $b_1(X) = \dim H^1(X, \mathbf{C})$ est appelé *le premier nombre de Betti* de X ; il est conservé par homéomorphisme, i.e. c'est un invariant topologique. D'après 5.9.5, $b_1(X) = \dim \mathscr{H}^1(X) = 2g$, d'après 5.8.4. Donc *le genre d'une surface de Riemann compacte X est un invariant topologique ; en outre le premier nombre de Betti de X est pair.*

5.9.7. Théorème. — ***Sur une surface de Riemann compacte X, le théorème de décomposition en somme directe orthogonale et le théorème de Hodge sont valides en dimension 0 et 2 et s'énoncent ainsi :***

(i) $\mathscr{E}^0(X) = \mathscr{H}^0(X) \oplus \partial\mathscr{E}^1(X)$; $\mathscr{E}^2(X) = \mathscr{H}^2(X) \oplus d\,\mathscr{E}^1(X)$

(ii) $H^0(X, \mathbf{C}) \approx \mathscr{H}^0(X)$; $H^2(X, \mathbf{C}) \approx \mathscr{H}^2(X)$; ***si X est connexe, ces espaces sont isomorphes* à C.**

DÉMONSTRATION. — L'application linéaire $j : \begin{array}{l} \mathscr{E}^0(X) \to \partial\mathscr{E}^1(X) \\ u \mapsto \partial\, du = \Delta u \end{array}$ est surjective, en effet, si $v \in \mathscr{E}^1(X)$, on a : $v = h + dw + \partial s$ où h est harmonique, alors $\partial v = \partial\, dw$; donc on a la suite exacte scindée

$$0 \to \mathscr{H}^0(X) \to \mathscr{E}^0(X) \underset{i}{\overset{j}{\rightleftarrows}} \partial\mathscr{E}^1(X) \to 0,$$

où i désigne l'inclusion, d'où (i) et (ii) pour la dimension 0, compte tenu du fait que $Z^0(X)$ est orthogonal à $\partial\mathscr{E}^1(X)$.

On obtient les résultats en dimension 2 à l'aide de l'isomorphisme $*$.

La dernière assertion résulte de 5.8.1 et 5.8.2. □

6. Formes différentielles abéliennes ; théorème d'Abel

6.1. Formes abéliennes

Soit X une surface de Riemann compacte. Toute forme différentielle méromorphe de degré 1 sur X est appelée une *forme différentielle abélienne.*

6.1.1. Le faisceau $\mathrm{d}\mathscr{M}$

Tout élément μ_x de $\mathscr{M}_x$ a un représentant défini sur un voisinage ouvert connexe U de x de la forme $\frac{f}{g}$ où $f, g \in \mathcal{O}(U)$. Dans $U \setminus Z(g)$, $\frac{f}{g}$ est holomorphe et

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,\mathrm{d}f - f\,\mathrm{d}g}{g^2} \tag{6.1}$$

est holomorphe dans $U \setminus Z(g)$; d'autre part, le second membre de (6.1) est une 1-forme méromorphe définissant un élément de $\mathscr{M}^1_x$ indépendant du représentant $\frac{f}{g}$ de μ_x, qu'on notera $\mathrm{d}\mu_x$; il est clair que les germes de 1-formes méromorphes $\mathrm{d}\mu_x$; $\mu_x \in \mathscr{M}_x$; $x \in X$, constituent un sous-faisceau de $\mathscr{M}^1$ et que $\mathrm{d} : \mathscr{M} \to \mathrm{d}\mathscr{M}$ est un morphisme de faisceau.

En outre si $\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)$ ci-dessus est nul sur U, la fonction $\frac{f}{g}$ holomorphe dans $U \setminus Z(g)$ est constante et a un prolongement constant à U puisque $Z(g)$ est discret. Autrement dit, le faisceau constant $\mathbf{C}$ sur X est un sous-faisceau de $\mathscr{M}$ et, d'après le raisonnement ci-dessus, la suite de morphismes de faisceaux

$$0 \to \mathbf{C} \to \mathscr{M} \xrightarrow{d} \mathrm{d}\mathscr{M} \to 0, \tag{6.2}$$

où la seconde flèche désigne l'injection canonique, est exacte.

6.1.2. Toute forme $\omega \in \mathscr{M}^1(X)$ est d′-fermée, car elle est de type $(1, 0)$. En outre, en dehors de son ensemble polaire, elle est holomorphe, donc d-fermée.

Soient a un pôle de ω et (z, U) une coordonnée holomorphe locale centrée en a, alors on a vu (ch. 2, 5.1.1) que, pour U assez petit, $\omega | U = \mathrm{Res}_a\,\omega \frac{\mathrm{d}z}{z} + \mathrm{d}g$ où g est une fonction méromorphe sur U, dont le seul pôle est a.

Les formes abéliennes sont dites de *première espèce* si elles sont holomorphes ;
de *seconde espèce* si, localement, ce sont des différentielles de fonctions méromorphes ;
de *troisième espèce* dans les autres cas.

Les formes de première espèce sont les sections de Ω^1 ; celles de seconde espèce les sections de $\mathrm{d}\mathscr{M}$; les résidus en leurs pôles sont nuls, i.e. leurs pôles sont d'ordre deux au moins. D'après le lemme de Poincaré, on a l'inclusion canonique $\Omega^1 \to \mathrm{d}\mathscr{M}$.

6.1.3. **Théorème.** — ***Il existe un isomorphisme canonique :***

$$H^0(X, \mathrm{d}\mathscr{M})/\mathrm{d}H^0(X, \mathscr{M}) \xrightarrow{\simeq} H^1(X, \mathbf{C}),$$

autrement dit, l'espace vectoriel des formes abéliennes de seconde espèce, modulo les différentielles de fonctions méromorphes, est isomorphe à $H^1(X, \mathbf{C})$ ***; en particulier sa dimension est*** $2g$***, où*** g ***est le genre de*** X***.***

DÉMONSTRATION. — La suite exacte de cohomologie définie par (6.2) est

$$\ldots \to H^0(X, \mathscr{M}) \xrightarrow{d} H^0(X, \mathrm{d}\mathscr{M}) \to H^1(X, \mathbf{C}) \to H^1(X, \mathscr{M}) \to \ldots .$$

D'après le Corollaire 8.6.2 qui sera démontré indépendemment, on a $H^1(X, \mathscr{M})=0$; la dernière assertion résulte du théorème de Hodge (5.9.5) et de 5.8.4. □

6.1.4.* Corollaire. — *Sur* $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, *toute forme abélienne de seconde espèce est la différentielle d'une fonction méromorphe globale.

DÉMONSTRATION. — Le genre de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est 0 (2.2.3), donc, pour

$$X = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \quad H^0(X, \mathrm{d}\mathscr{M})/\mathrm{d}H^0(X, \mathscr{M}) = 0. \quad \square$$

6.1.5.* Proposition. — *Sur* $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, *toute forme abélienne de première espèce est nulle.

DÉMONSTRATION. — Pour $X=\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, d'après 8.5.1 ci-dessous, on a

$$H^0(X, \Omega^1) = \Omega^1(X) \approx H^1(X, \mathcal{O})$$

dont la dimension est le genre de X, qui est nul. □

6.2. Théorème d'Abel

6.2.1. Données

Soient X une surface de Riemann compacte, connexe, $T=\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, considéré comme espace du paramètre t, $f : X\times T\to\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ une application holomorphe au sens de 6.4.2 du chapitre 7 telle que, pour tout $t\in T$ fixé, $z\mapsto f_t(z)=f(z, t)$ soit une application holomorphe non constante ; d'après (ch. 2, 4.4), f_t est une fonction méromorphe non constante sur X.

Pour t fixé, $f_t : X\to\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est un revêtement ramifié à n_t feuillets pour un certain $n_t\in\mathbf{N}^*$ (ch. 5, 2.3.2).

Soient $\Delta_t\subset X$ l'ensemble (fini) des points de ramification de f_t et $Y_t=\mathbf{P}^1\setminus f_t(\Delta_t)$.

On considère une forme abélienne ω sur X et un point fixe $z_0\in X$. Soient $Z_t(f)=$ $=\zeta_t^1+\ldots+\zeta_t^{n_t}$ le diviseur des zéros de f_t, chaque zéro apparaissant un nombre de fois égal à sa multiplicité et c_t une 1-chaîne différentiable de X telle que $bc_t=Z_t(f)-$ $-n_tz_0$ et que (spt $c_t\setminus$spt bc_t) ne rencontre pas Δ_t, ni l'ensemble des pôles de ω. La fonction $u(t)=\int_{c_t}\omega$ est définie à l'addition près d'intégrales de ω sur des 1-cycles de X, appelées *périodes* de ω et qui sont indépendantes de t ; $u(t)$ est appelée une *somme abélienne,* relative à la forme ω.

6.2.2. Trace de ω

On construit la forme différentielle σ_t, appelée *trace* de ω sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ comme suit. Pour tout $y\in Y_t$, il existe un voisinage ouvert connexe V de y dans Y_t tel que

$$f_t^{-1}(V) = U_1\cup\ldots\cup U_{n_t} \subset X,$$

où les U_ν $(\nu=1, ..., n_t)$ sont des ouverts connexes, disjoints, de X et $f_t|U_\nu : U_\nu \to V$ est biholomorphe ; soit $\varphi_t^\nu=(f_t|U_\nu)^{-1} : V \to U_\nu$. Par définition, sur V,

$$\sigma_t = \varphi_t^{1*}\omega + \ldots + \varphi_t^{n_t *}\omega.$$

6.2.3. Propriétés

(1) La continuité de f en t entraîne que $\begin{array}{c}\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{N}^* \\ t \mapsto n_t\end{array}$ est localement constant ; $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ étant connexe il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que, pour tout t, $n_t = n$.

(2) Pour t fixé, les formes σ_t relatives à des ouverts V différents, d'après leur définition, se recollent en une 1-forme méromorphe globale sur Y_t notée aussi σ_t. En outre, en utilisant les fonctions symétriques élémentaires, par le raisonnement de (ch. 5, 6.2.2), on vérifie que σ_t a une extension méromorphe à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ notée encore σ_t.

(3) Considérons la fonction

$$\begin{aligned}\phi : X \times T \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) &\to \mathbf{C} \\ (z, t, w) &\mapsto f(z, t) - w\end{aligned}$$

à valeurs au voisinage de 0 ; il s'agit de trouver localement une fonction $z(w, t)$ telle que $\phi(z(w, t), t, w)=0$, i.e. $f(z(w, t), t)-w=0$.

Remarquons que (6.3) $\dfrac{\partial\phi}{\partial z}(z, t, w)=\dfrac{\partial f}{\partial z}(z, t)$ et que, pour t fixé, d'après 6.2.1, l'ensemble Δ_t des zéros de (6.3) est fini.

D'après le théorème des fonctions implicites appliqué à $\phi=0$, au voisinage de (z_0, t_0, w_0) tel que $f(z_0, t_0)=w_0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0, t_0)\neq 0$, il existe des voisinages ouverts connexes A, B, C de z_0, w_0, t_0 dans X, $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, T, respectivement et une fonction holomorphe $\varphi : B \times C \to A$ telle que $f(\varphi(w, t), t)=w$. De plus, compte tenu de 6.2.1 et de (1), pour B et C assez petits, il existe des ouverts A_ν connexes, disjoints, de X, tels que

$$f^{-1}(B \times C) = A_1 \cup \ldots \cup A_\nu$$

et que

$$f|A_\nu \times C : A_\nu \times C \to B$$

soit une application holomorphe et il existe des applications holomorphes

$$\varphi^\nu : B \times C \to A_\nu$$

satisfaisant à $f(\varphi^\nu(w, t), t)-w=0$ dans $B \times C$ et, pour tout $t \in C$ fixé, $\varphi^\nu(w, t)=\varphi_t^\nu$ définie en 6.2.2.

(4) La forme différentielle $\sigma=\sum\limits_{\nu=1}^{n}\varphi^{\nu *}\omega$ est une 1-forme méromorphe en w et t, au sens du Chapitre 7, au voisinage de (w_0, t_0).

Comme en (2) ci-dessus pour σ_t, les formes σ définies localement se recollent en une forme notée encore σ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times T \setminus \left\{(w, t) \; ; \; \exists z \in X \; ; f(z, t)=w \; ; \; \dfrac{\partial f}{\partial z}(z, t)=0\right\}$; de plus, de façon analogue à (2) ci-dessus, σ s'étend à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times T$ en une 1-forme différentielle méromorphe.

6.2.4.* Théorème d'Abel différentiel. — *Dans les notations de* 6.2.1, d*u est une* 1-*forme différentielle méromorphe sur T.

Démonstration. — Soit t_0 qu'on peut supposer être 0 dans un domaine de carte de T. Dans les notations de 6.2.3, on désigne par z^ν une coordonnée locale holomorphe sur X centrée en ζ_0^ν ; on a :

$$z^\nu = \varphi^\nu(w, t)\ ;\ \mathrm{d}z^\nu = \frac{\partial\varphi^\nu}{\partial w}(w, t)\,\mathrm{d}w + \frac{\partial\varphi^\nu}{\partial t}(w, t)\,\mathrm{d}t.$$

Au voisinage de ζ_0^ν, on a $\omega = g_\nu(z^\nu)\,\mathrm{d}z^\nu$, où g_ν est une fonction méromorphe ; alors

$$\sigma = \sum_\nu \varphi^{\nu *}\omega = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(\varphi^\nu(w, t))\left(\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial w}(w, t)\,\mathrm{d}w + \frac{\partial\varphi^\nu}{\partial t}(w, t)\,\mathrm{d}t\right)\ ;$$

$$\mathrm{d}u = \sigma(0, t) = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(\varphi^\nu(0, t))\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial t}(0, t)\,\mathrm{d}t,$$

qui est une 1-forme méromorphe en t. □

6.2.5. Discussion suivant l'espèce de ω

(i) ω de *première espèce* : alors σ est une 1-forme holomorphe et du est de première espèce sur T, donc nulle, d'après 6.1.5 : la somme abélienne $u(t)$ *est constante, aux périodes de* ω *près.*

(ii) ω de *seconde espèce* : alors, localement sur X, $\omega = \mathrm{d}h$ où h est une fonction méromorphe en z, t, définie localement sur $X \times T$; il en est de même de σ et de $\mathrm{d}u = \sigma(0, t)$; alors du est une forme abélienne de seconde espèce sur $T(=\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$; d'après (6.1.4), il existe $g \in \mathscr{M}(T)$ telle que $\mathrm{d}u = \mathrm{d}g$, où g est une fonction méromorphe, donc rationnelle sur T ; *u est une fonction rationnelle sur T, définie à l'addition près des périodes de* ω.

(iii) ω de *troisième espèce* ; alors la forme abélienne du peut être de troisième espèce sur T, i.e. avoir des pôles à résidus non nuls et $u(t)$ *est somme d'une fonction rationnelle et du logarithme* (à plusieurs déterminations) *d'une fonction rationnelle, à l'addition près des périodes de* ω.

Les conclusions (i), (ii), (iii) constituent la *forme intégrale du théorème d'Abel.*

6.3. Réciproque du théorème d'Abel pour les formes de 1^re^ espèce

***6.3.1.* Théorème (Abel). — *Si D est le diviseur d'une fonction méromorphe g sur une surface de Riemann compacte X, alors il existe une* 1-*chaîne différentiable c sur X telle que* $bc = D$ *et que, pour toute* $\omega \in \Omega^1(X)$, *on ait* $\int_c \omega = 0$.**

Démonstration. — Considérons la fonction $f(.,t) = (1-t)g + t\dfrac{1}{g}$; $t \in \mathbf{C}$; on a

$f(.,0)=g$; $f(.,1)=\dfrac{1}{g}$, $(g)=Z_0(f)-Z_1(f)$. D'après 6.2.5 (i), $\int_{c_0}\omega-\int_{c_1}\omega=$ $=\int_{c_0-c_1}\omega=0$; mais $b(c_0-c_1)=(g)=D$, ce qui établit 6.3.1. □

6.3.2. Voici une démonstration directe de 6.3.1, dont l'avantage est de ne pas utiliser le paramètre $t\in T$. Dans les notations de 6.2.1 et 6.2.2, pour la fonction $f=g$, indépendante de t, en désignant par φ^ν les inverses locales de f, $\sigma=\sum_{\nu=1}^{n}\varphi^{\nu *}\omega$ est une forme abélienne de première espèce de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, donc $\sigma=0$; soit γ un arc différentiable de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ joignant ∞ à 0 sans rencontrer l'ensemble des valeurs critiques $(f(\Delta))$ de f ; $f^{-1}(\gamma)$ est formé de n arcs différentiables c_j de X joignant les pôles de f aux zéros de f, soit $c=c_1+\ldots+c_n$, alors $bc=D$ et, pour toute $\omega\in\Omega^1(X)$, $\int_c\omega=$ $=\int_\gamma\sigma=0$. □

6.3.3. Dans le cas $X=\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, la réciproque du théorème 6.3.1 est immédiate : si D est un diviseur de degré 0, alors d'après le théorème de Riemann—Roch (3.4), $\dim H^0(X,\mathcal{O}_{-D})=1$, i.e. il existe une fonction méromorphe non nulle de diviseur D.

6.3.4. **Réciproque. — *Soit D un diviseur de degré* 0 *sur une surface de Riemann compacte X. S'il existe une* 1*-chaîne différentiable c de X de bord D telle que, pour toute* $\omega\in\Omega^1(X)$, *on ait* $\int_c\omega=0$, *alors il existe une fonction méromorphe sur X, de diviseur D.***

Démonstration au n° 6.5.

6.4. Définitions et notions préliminaires

6.4.1. Soit D un diviseur de X de degré 0 ; alors toute $f\in\mathcal{M}(X)$, de diviseur D est appelée une *solution* de D.

6.4.2. On appelle *fonction semi-méromorphe* sur X, une application $f: X\to\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ telle que pour tout point $a\in X$, il existe une carte holomorphe (z, U) de X centrée en a et $\alpha\in\mathcal{E}^*(U)$, i.e. de classe C^∞ et sans zéro dans U, telle que

$$f|U=\alpha z^k,\quad k\in\mathbf{Z}. \tag{6.4}$$

Remarquons que f est C^∞ sauf sur un ensemble discret de X.

6.4.3. Soit D un diviseur de X, dans les notations de (3.1.1), on dira que la fonction semi-méromorphe f sur X est une *solution faible* de D si, pour tout $a\in X$ et dans l'expression (6.4) de f au voisinage de a, on a : $k=D(a)$.

Remarquons que toute solution de D est une solution faible, holomorphe en dehors des points de D de multiplicité strictement négative.

6.4.4. Propriétés

(1) Soient f_1, f_2 deux solutions faibles de D, alors $f_1 = f_2\varphi$ où $\varphi \in \mathscr{E}^*(X)$.
(2) Soit f_j une solution faible de D_j $(j=1, 2)$, alors $f_1 f_2$ est une solution faible de $D_1 + D_2$ et $\dfrac{f_1}{f_2}$ est une solution faible de $D_1 - D_2$.

6.5. Démonstration de la Réciproque 6.3.4

6.5.1. **Lemme.** — ***Soient $a \in X$, $k \in \mathbf{Z}$, f une fonction semi-méromorphe, (U, z) une carte holomorphe de X centrée en a telle que $f|U = \alpha z^k$; $\alpha \in \mathscr{E}^*(U)$. Alors, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, spt $\varphi \subset U$, on a : $\dfrac{1}{2\pi i}\int_X \dfrac{df}{f} \wedge d\varphi = k\varphi(a)$.***

DÉMONSTRATION. —

$$\int_X \frac{df}{f} \wedge d\varphi = \int_U \frac{df}{f} \wedge d\varphi = \int_U \frac{d\alpha}{\alpha} \wedge d\varphi + k \int_U \frac{dz}{z} \wedge d\varphi.$$

La première intégrale du dernier membre, égale à $-\int d\left(\dfrac{d\alpha}{\alpha} \wedge \varphi\right)$, est nulle ; $\dfrac{1}{z}$ est localement intégrable, donc

$$\int_U \frac{dz}{z} \wedge d\varphi = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z| \geq \varepsilon} d\left(\frac{dz}{z} \wedge \varphi\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\substack{\curvearrowleft \\ |z|=\varepsilon}} \varphi \frac{dz}{z},$$

d'après la formule de Stokes, soit $2\pi i\varphi(a)$. □

6.5.2. **Corollaire.** — ***Soient $a_1, a_2 \in X$, f une solution faible du diviseur $a_2 - a_1$, alors, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, on a $\dfrac{1}{2\pi i}\int_X \dfrac{df}{f} \wedge d\varphi = \varphi(a_2) - \varphi(a_1)$.***

DÉMONSTRATION. — Soit (U_j, z^j) une carte holomorphe de X centrée en a_j $(j=1, 2)$ telle que $z^k \notin U^j$ pour $k=1, 2$; $k \neq j$; $(U_1, U_2, X \setminus (\{a_1\} \cup \{a_2\}))$ est un recouvrement ouvert de X ; soit (ξ_1, ξ_2, ξ_3) une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, alors spt $\xi_j \subset U_j$, $j=1, 2$. On a :

$$\int_X \frac{df}{f} \wedge d\varphi = \sum_{l=1}^{3} \int_X \frac{df}{f} \wedge d(\xi_l \varphi) = 2\pi i(\varphi(a_2) - \varphi(a_1)),$$

d'après 6.5.1. □

6.5.3. **Lemme.** — ***Soient X une surface de Riemann, c un arc différentiable par morceaux à support compact et $U \subset\subset X$ un voisinage ouvert de spt c. Alors il existe une solution faible f du diviseur bc telle que :***

(i) $f|X \setminus U = 1$

(ii) *pour toute $\psi \in \mathscr{E}^1(X)$, $d\psi = 0$, on ait $\int_c \psi = \dfrac{1}{2\pi i}\int_X \dfrac{df}{f} \wedge \psi$.*

DÉMONSTRATION. — (a) Supposons d'abord que l'ouvert U soit le domaine d'une carte holomorphe z, soit isomorphe à un disque de $\mathbf{C}$ et que $bc=b-a$.

Soit ϱ une fonction C^∞ à support compact dans U, égale à 1 sur un ouvert U' isomorphe à un disque de $\mathbf{C}$ contenu dans U et contenant $\operatorname{spt} c$.

On pose :

$$f_0 = \begin{cases} \exp\left[\varrho \log \dfrac{z-b}{z-a}\right] & \text{pour} \quad z \in U \setminus U' \\ \dfrac{z-b}{z-a} & \text{pour} \quad z \in U' \end{cases}$$

On a : $f_0 | U \setminus \operatorname{spt} \varrho = 1$, on étend f_0 en une fonction f égale à 1 sur $X \setminus U$, C^∞ sur $X \setminus \{a\}$; f est une solution faible du diviseur bc.

Soit $\psi \in \mathscr{E}^1(X)$, $d\psi = 0$, alors U étant isomorphe à un disque, il existe $g \in \mathscr{D}(X)$ telle que $\psi = dg$ sur U (ch. 1, 2.8.4).

$$\frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{df}{f}\wedge\psi = \frac{1}{2\pi i}\int_U \frac{df}{f}\wedge\psi = \frac{1}{2\pi i}\int_U \frac{df}{f}\wedge dg = g(b)-g(a),$$

d'après le Corollaire 6.5.2, soit $\int_c \psi$ d'après la formule de Stokes.

(b) c est une somme finie d'arcs différentiables c_j, chaque c_j vérifiant les hypothèses de (a) ; soit f_j la solution faible du diviseur bc_j, pour $\psi \in \mathscr{E}^1(X)$, on a :

$$\int_{c_j} \psi = \frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{df_j}{f_j}\wedge\psi \quad \text{et} \quad f = \prod_j f_j$$

est la solution faible cherchée. □

6.5.4. DÉMONSTRATION DE 6.3.4. — f étant la solution faible de D dans 6.5.3, pour toute $\omega \in \Omega^1(X)$, on a :

$$0 = \int_c \omega = \frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{df}{f}\wedge\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{d''f}{f}\wedge\omega, \tag{6.5}$$

à cause du type. Mais, localement, $\sigma = \dfrac{d''f}{f} = \dfrac{d''\alpha}{\alpha}$, donc $\sigma \in \mathscr{E}^{0,1}(X)$; d'après (6.5) σ est orthogonale à $\bar{\Omega}^1(X)$, donc (5.9.2), il existe $g \in \mathscr{E}(X)$ telle que $d''g = \sigma$, alors fe^{-g} est une fonction méromorphe sur X, de diviseur D. □

7. Fibrés holomorphes en droites

7.1. Fibrés en droites complexes

7.1.1. Les *(espaces) fibrés vectoriels* complexes sur une surface de Riemann X (ou plus généralement une variété différentielle) sont définis dans l'Appendice (2.3.4, voir aussi 2.3.2).

7.1.2. Soient $\Pi : E \to X$ un fibré C^∞ *en droites complexes* sur une surface de Riemann X et $\mathscr{U}=(U_j)_{j\in I}$ un recouvrement ouvert de X tel que :

(7.1) $\Theta_j : U_j\times\mathbf{C} \to \Pi^{-1}(U_j)$ soit un difféomorphisme C^∞ ;

$\Theta_j(y, \cdot) : \{y\}\times\mathbf{C} \to \Pi^{-1}(y)$ soit un isomorphisme du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$.

Alors

$$\Theta_k^{-1}\circ\Theta_j = (\mathrm{id}, f_{jk}) : (U_j\cap U_k)\times\mathbf{C} \to (U_j\cap U_k)\times\mathbf{C}$$
$$(y, t) \mapsto (y, f_{jk}(y)\cdot t)$$

où $f_{jk}(y) : \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ est une application $\mathbf{C}$-linéaire inversible i.e. la multiplication par une fonction C^∞ à valeurs complexes non nulles. Le fibré définit une cochaîne de $\mathscr{U}$:

$$f_{jk} : U_j\cap U_k \to \mathbf{C}^*$$

satisfaisant à : $f_{jk}=f_{kj}^{-1}$ et, sur $U_j\cap U_k\cap U_l\neq\emptyset$ à

(7.2) $$f_{jk}\cdot f_{kl}=f_{jl} \text{ ou } f_{jk}\cdot f_{kl}\cdot f_{lj}=1 ;$$

(f_{jk}) est un cocycle, élément de $Z^1(\mathscr{U}, \mathscr{E}^*)$ qui définit une classe de cohomologie de $H^1(\mathscr{U}, \mathscr{E}^*)$, donc de $H^1(X, \mathscr{E}^*)$. On désignera souvent un fibré en droites $\Pi : E\to X$ par son espace total E.

7.1.3. Les fonctions f_{jk} sont appelées *fonctions de transition* du fibré et l'ensemble $(\Theta_j)_{j\in I}$, une *trivialisation locale* du fibré.

7.1.4.* Réciproquement,** ***étant donné un recouvrement ouvert $\mathscr{U}=(U_j)_{j\in I}$ de la surface de Riemann X, et un* 1*-cocycle (f_{jk}) appartenant à $Z^1(\mathscr{U}, \mathscr{E}^*)$, il existe un fibré* $\mathbf{C}^\infty$ *en droites complexes $\Pi : E\to X$ sur X définissant ce cocycle.

I étant muni de la topologie discrète, considérons le sous-espace $E'=\bigcup_{j\in I} U_j\times\mathbf{C}\times\times\{j\}$ de l'espace topologique produit $X\times\mathbf{C}\times I$. Dans E' soit $\mathscr{R}$ la relation

$$(x, v, j)\,\mathscr{R}\,(x', v', k)$$

signifiant $x=x'$, $v=f_{jk}(x)v'$.

La relation de cofermeture (7.2) entraîne que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence compatible avec la première projection $pr_1 : X\times\mathbf{C}\times I\to X$; pr_1 induit alors l'application C^∞ Π

$$E' \xrightarrow{\varrho} E'/\mathscr{R} = E \xrightarrow{\Pi} X$$

$\varrho_j=\varrho|U_j\times\mathbf{C}\times\{j\}$ est un difféomorphisme $U_j\times\mathbf{C}\times\{j\}\to U_j\times\mathbf{C}\times\{j\}=\Pi^{-1}(U_j)$; $\Pi^{-1}(x)\approx\mathbf{C}$.

Alors $\Pi : E\to X$ est un fibré en droites complexes de trivialisations locales $\Theta_j=\varrho_j^{-1}$, dont les fonctions de transition sont les f_{jk} qui constituent le cocycle donné.

7.1.5. Deux fibrés C^∞ en droites complexes $\Pi : E\to X$ et $\Pi' : E'\to X$ sont dits *isomorphes* s'il existe une application fibrée h du premier sur le second qui est un difféomorphisme C^∞.

Dans les notations ci-dessus, les deux fibrés étant définis à l'aide du même recouvrement $\mathscr{U}$, h est défini par les applications C^∞, $h_j : U_j\to\mathbf{C}^*$ telles que, sur $U_j\cap U_k\neq\emptyset$, on ait le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U_j \times \mathbf{C} & \xrightarrow{(\mathrm{id}, h_j)} & U_j \times \mathbf{C} \\ {\scriptstyle \Theta_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Theta'_j} \\ \Pi^{-1}(U_j) & \xrightarrow{h} & \Pi'^{-1}(U_j). \end{array}$$

Alors sur $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, on a : $f_{jk} = h_k^{-1} f'_{jk} h_j$; $h_j \in C^0(\mathscr{U}, \mathscr{E}^*)$, d'où : *l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droites est en bijection avec* $H^1(X, \mathscr{E}^*)$.

7.1.6. Fibré trivial

Le fibré $E = X \times \mathbf{C} \xrightarrow{pr_1} X$ est dit *fibré trivial,* son espace total est le produit $X \times \mathbf{C}$; il est défini pour tout recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ de X par les fonctions de transition $f_{jk} = 1$. Tout fibré isomorphe au fibré trivial est donc défini par des fonctions de transition $f_{jk} = f_k^{-1} f_j$ où $(f_j) \in C^0(\mathscr{U}, \mathscr{E}^*)$; (f_{jk}) est un cobord.

7.2. Si la trivialisation locale d'un fibré en droites $\Pi : E \to X$ est formée de fonctions holomorphes, i.e. si ses fonctions de transition sont holomorphes, le fibré est dit *holomorphe en droites* ; l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés holomorphes en droites est en bijection avec $H^1(X, \mathcal{O}^*)$.

7.3. Fibré défini par un diviseur

7.3.1. Soit D un diviseur de la surface de Riemann X ; pour un recouvrement ouvert $\mathscr{U} = (U_j)$ assez fin de X, D est défini par la donnée de fonctions méromorphes $g_j \in \mathscr{M}(U_j)$ telles que $D|U_j = (g_j)$, $g_j g_k^{-1} = f_{jk}$ étant holomorphe sans zéro sur $U_j \cap \cap U_k \neq \emptyset$. En outre, g_j est défini au produit près par $f_j \in \Gamma(U_j, \mathcal{O}^*)$, de sorte que D définit une classe d'isomorphisme de fibrés holomorphes en droites sur X, donc un élément de $H^1(X, \mathcal{O}^*)$.

7.3.2. La multiplication des fonctions de transition de deux fibrés munit $Z^1(\mathscr{U}, \mathcal{O}^*)$ d'une structure de groupe commutatif qui s'étend à $H^1(X, \mathcal{O}^*)$, dont on note la loi de composition $\otimes$; restreinte aux diviseurs, elle définit l'*addition des diviseurs.*

7.4. Sections holomorphes

Soit $\Pi : E \to X$ un fibré C^∞ en droites noté aussi E.

7.4.1. On appelle *section s* de E au-dessus d'une partie A de X une application continue $f : A \to E$ telle que $(\Pi|A) \circ f = \mathrm{id}_A$.

Si E est un fibré holomorphe sur X, U un ouvert de X, une section $f : U \to E$ de E est dite *holomorphe* si, pour une trivialisation locale (Θ_j) de E relative au recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ de X.

$$\Theta_j^{-1}\circ f|\Pi^{-1}(U_j\cap U) : \Pi^{-1}(U_j\cap U) \to \mathbf{C}$$

est une fonction holomorphe ; cette définition ne dépend pas de la trivialisation locale ; pour tout ouvert U de X l'ensemble des sections holomorphes est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathcal{O}_E(U)$; l'ensemble des $\mathcal{O}_E(U)$ et des homomorphismes restriction définit le faisceau $\mathcal{O}_E$ des sections holomorphes de E. Si E est trivial, on a : $\mathcal{O}_E \approx \mathcal{O}$.

7.4.2. **Théorème de finitude.** — ***Soient E un fibré holomorphe en droites sur une surface de Riemann X et $Y \subset\subset X$ un ouvert, alors*** **$\dim H^1(Y, \mathcal{O}_E) < \infty$.**

DÉMONSTRATION. — C'est une généralisation facile de celle du théorème 2.1, donnée en 2.4. □

7.5. Sections méromorphes

7.5.1. Soient E un fibré holomorphe en droites sur X, U un ouvert de X au-dessus duquel E est trivial et $\Theta_U : \Pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{C}$ une trivialisation, a un point de U. Une section holomorphe f de E au-dessus de $U \setminus \{a\}$ a *un pôle d'ordre* (de multiplicité) *m en a* s'il en est ainsi de la fonction $\Theta_U^{-1}\circ f : U\setminus\{a\} \to \mathbf{C}$; cette notion est indépendante de la trivialisation.

7.5.2. Une *section méromorphe* de E au-dessus d'un ouvert Y de X est une section holomorphe f au-dessus de $Y\setminus S$, où S est un ensemble discret de points de Y qui sont des pôles de f.

7.5.3. **Proposition.** — ***Tout fibré holomorphe en droites sur une surface de Riemann compacte possède une section méromorphe non nulle.***

DÉMONSTRATION. — La proposition se déduit du théorème de finitude 7.4.2 comme 2.4.2 se déduit de 2.1. □

7.5.4. **Théorème.** — ***Sur une surface de Riemann compacte X, tout fibré holomorphe en droites E est défini par un diviseur D de X.***

DÉMONSTRATION. — Il existe une section ψ méromorphe non nulle de E d'après 7.5.3. Le diviseur D de ψ est bien défini sur X ; cela résulte de la définition des pôles (7.5.1) et des zéros de ψ (zéros de $\Theta_U^{-1}\circ\psi$ pour toute trivialisation de E au-dessus de l'ouvert U).

Pour tout ouvert U de X et $f\in\mathcal{M}(U)$ telle que $(f) \geqslant -D|U$, on a $f\psi\in\mathcal{O}_E(U)$, d'où l'homomorphisme $\mathcal{O}_D(U)\to\mathcal{O}_E(U)$ et le morphisme injectif de faisceaux j: $\mathcal{O}_D \xrightarrow{X\psi} \mathcal{O}_E$.

Pour toute $\varphi\in\mathcal{O}_E(U)$, $f=\varphi\psi^{-1}\in\mathcal{M}(U)$ et $(f)\geqslant -D|U$, donc j est surjectif. L'isomorphisme j exprime l'isomorphisme du fibré défini par D et de E. □

7.5.5. Fibrés duaux

Soit E un fibré holomorphe en droites sur une surface de Riemann X, de fonctions de transition (f_{jk}) pour un recouvrement ouvert convenable $\mathscr{U}=(U_j)_{j\in I}$ de X. Il est clair que l'ensemble des formes linéaires des fibres de E est un fibré vectoriel holomorphe dont les fonctions de transition sont (f_{jk}^{-1}) ; on le désigne par E^* et on l'appelle *(fibré) dual* de E.

Si X est compacte et si E est défini par le diviseur D de X, alors E^* est défini par $-D$.

***7.5.6.* Remarque.** — Si X est compacte, tout théorème sur les diviseurs de X se traduit, d'après 7.5.4, en un théorème sur les fibrés holomorphes en droites sur X et réciproquement. Il en est ainsi du théorème de Riemann—Roch (3.4).

8. Dualité de Serre et applications

Dans ce numéro on suppose que X est une surface de Riemann compacte.

8.1. La forme Res

Soit j l'isomorphisme canonique $H^1(X, \Omega^1)\to H^{1,1}(X, \mathbf{C})$ (1.8.6) ; par définition $H^{1,1}(X, \mathbf{C})=\mathscr{E}^{1,1}(X)/\mathrm{d}''\mathscr{E}^{1,0}(X)=\mathscr{E}^2(X)/\mathrm{d}\mathscr{E}^{1,0}(X)$. L'intégrale sur X d'un élément de $\mathrm{d}\mathscr{E}^{1,0}(X)$ est nulle (comme cela se déduit sans peine de 2.5.4 du chapitre 1), donc, pour tout $\xi\in H^{1,1}(X,\mathbf{C})$, l'intégrale sur X d'un représentant ω de ξ, ne dépend que de ξ, on le notera $\int_X \xi$; alors

$$\mathrm{Res} = \frac{1}{2\pi i}\int_X \circ j : H^1(X, \Omega^1) \to \mathbf{C}$$

est une forme $\mathbf{C}$-linéaire.

8.2. La forme res

8.2.1. Soit $\mu\in H^0(X, \mathscr{M}^1/\Omega^1)$: pour un recouvrement ouvert $\mathscr{U}=(U_j)_{j\in I}$ assez fin de X, μ provient d'une 0-cochaîne $(\omega_j)\in C^0(\mathscr{U}, \mathscr{M}^1)$ telle que, sur $U_j\cap U_k\neq\emptyset$, $\omega_j-\omega_k=\sigma_{jk}\in\Omega^1(U_j\cap U_k)$. Soit $a\in U_j$ un pôle de ω_j, de résidu $\mathrm{Res}_a(\omega_j)$; si $a\in U_j\cap U_k$, comme $\omega_j-\omega_k$ est holomorphe sur $U_j\cap U_k$, $\mathrm{Res}_a(\omega_k)=\mathrm{Res}_a(\omega_j)$; on pose $\mathrm{res}_a\,\mu=\mathrm{Res}_a(\omega_j)$ et

$$\mathrm{res}(\mu) = \sum_{a\in X}\mathrm{res}_a(\mu).$$

La définition de $\mathrm{res}(\mu)$ est indépendante de $\mathscr{U}$ et $\mathrm{res} : H^0(X, \mathscr{M}^1/\Omega^1)\to\mathbf{C}$ est une forme $\mathbf{C}$-linéaire.

8.2.2.* Théorème. — *Dans les notations ci-dessus, pour tout $\mu \in H^0(X, \mathcal{M}^1/\Omega^1)$, en désignant par $[\delta\mu]$ la classe de cohomologie de $\delta\mu$ dans $H^1(X, \Omega^1)$, on a :

$$\mathbf{res}(\mu) = \mathbf{Res}([\delta\mu]).$$

DÉMONSTRATION. — On a le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E}^{1,1}(X)/\mathrm{d}\mathcal{E}^{1,0}(X) \arrow[d, "\approx"'] \\ H^0(X, \mathcal{M}^1/\Omega^1) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & H^1(X, \Omega^1) \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \\ \mathbf{C} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbf{C}. \end{tikzcd}$$

Il s'agit de montrer que le carré est commutatif.

Dans les notations de 8.2.1, μ provient d'un 0-cocycle (ω_j) tel que, sur $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, $\omega_j - \omega_k = \sigma_{jk}$; $(\sigma_{jk}) \in Z^1(\mathcal{U}, \Omega^1) \hookrightarrow Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}^{1,0})$; mais $H^1(X, \mathcal{E}^{1,0}) = 0$, donc, pour $\mathcal{U}$ assez fin $\sigma_{jk} = \sigma_j - \sigma_k$, $(\sigma_j) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{E}^{1,0})$. Alors $\omega_j - \omega_k = \sigma_j - \sigma_k$ sur $U_j \cap U_k$, donc il existe $\sigma \in C^0(X \setminus P(\mu), \mathcal{E}^{1,0})$, où $P(\mu)$ est l'ensemble (fini) des pôles de μ, telle que $\sigma | U_j \setminus P(\mu) = \sigma_j - \omega_j$, en outre $\mathrm{d}\sigma | U_j \setminus P(\mu) = \mathrm{d}\sigma_j$, donc $\omega \in C^0(X, \mathcal{E}^{1,1})$ où ω est l'extension C^∞ à X de la forme $\mathrm{d}\sigma$ telle que $\omega | U_j = \mathrm{d}\sigma_j$; on a $\mathrm{d}\omega = 0$ et $2\pi i \operatorname{Res}([\delta\mu]) = \int_X \omega$.

Pour tout pôle a_l de μ soit (z_l, V_l) une carte holomorphe centrée en a_l et B_l^ε l'ouvert de X défini par $|z_l| < \varepsilon$, pour ε assez petit les B_l^ε sont disjoints et $\int_{X \setminus \Sigma B_l^\varepsilon} \mathrm{d}\sigma = -\sum_l \int_{bB_l^\varepsilon} \sigma$; quand $\varepsilon \to 0$, cette somme tend vers $2\pi i \operatorname{res}(\mu)$.

On a $\int_{X \setminus \Sigma B_l^\varepsilon} \omega = \int_{X \setminus \Sigma B_l^\varepsilon} \mathrm{d}\sigma$; ω étant C^∞, quand $\varepsilon \to 0$, la première intégrale tend vers $\int_X \omega = 2\pi i \operatorname{Res}([\delta\mu])$. □

8.3. Le faisceau Ω^1_{-D} et le dual de $H^1(X, \mathcal{O}_D)$

8.3.1. Soit D un diviseur sur une surface de Riemann X. Dans les notations de 3.1.1 et 3.1.2, on désigne par Ω^1_{-D} le faisceau de 1-formes méromorphes sur X défini comme suit : pour tout ouvert U de X, $\Omega^1_{-D}(U) = \{\omega \in \mathcal{M}^1(U) ; \operatorname{ord}_x(\omega) \geq D(x) ; x \in U\}$; pour V ouvert $\subset U$, le morphisme ϱ_U^V est défini par la restriction des formes de U à V. On dira que Ω^1_{-D} est le faisceau des 1-formes méromorphes *multiples* de D.

8.3.2. Considérons les faisceaux Ω^1_{-D} et $\mathcal{O}_D$, alors l'application

$$\Omega^1_{-D} \times \mathcal{O}_D \to \Omega^1$$
$$(\omega, f) \mapsto \omega f$$

induit un homomorphisme

$$h : H^0(X, \Omega^1_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \Omega^1)$$

comme suit : pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_j)_{j \in J}$ de X, soit $\omega \in \Gamma(X, \Omega^1_{-D})$ et (f_{jk}) un représentant de $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$; $(f_{jk}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D)$ est défini à un cobord près $(f_j - f_k)$, alors $\omega_{jk} = f_{jk}\omega$ satisfait à $\omega_{jk} + \omega_{kl} + \omega_{lj} = 0$ et est défini au cobord près $(f_j\omega - f_k\omega)$, donc définit un élément bien déterminé de $H^1(X, \Omega^1)$ qui est $h(\omega, \xi)$ par définition ; h est une application $\mathbf{C}$-bilinéaire. L'application $\mathrm{Res}\circ h$ notée $\langle\omega, \xi\rangle$.

$$H^0(X, \Omega^1_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \to \mathbf{C}$$

est une forme $\mathbf{C}$-bilinéaire. Alors, pour ω fixée, $u_\omega : \xi \mapsto \langle\omega, \xi\rangle$ est une forme $\mathbf{C}$-linéaire, d'où l'application $\mathbf{C}$-linéaire

$$\iota_D : H^0(X, \Omega^1_{-D}) \to H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$$
$$\omega \mapsto u_\omega .$$

8.3.3. Lemme. — ***ι_D est injective.***

DÉMONSTRATION. — Soit $0 \neq \omega \in H^0(X, \Omega^1_{-D})$, on va construire $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$ tel que $\langle\omega, \xi\rangle \neq 0$.

Soit $a \in X$ tel que $D(a)=0$ et (U_0, z) une carte centrée en a telle que $D|U_0=0$. Alors $\omega|U_0 = f\,\mathrm{d}z$ où $f \in \mathcal{O}(U_0)$. Pour U_0 assez petit, $f|U_0 \setminus \{a\}$ n'a pas de zéro. Posons $U_1 = X \setminus \{a\}$ et $\mathcal{U} = (U_0, U_1)$. On choisit $\eta = (f_0, f_1) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ tel que $f_0 = (zf)^{-1}$ et $f_1 = 0$; alors $\omega\eta = (z^{-1}\,\mathrm{d}z, 0) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^1)$ et $\mathrm{res}\,(\omega\eta)=1$; $\delta\eta \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D)$. Prenons $\xi = [\delta\eta] \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$. On a : $\omega\xi = \omega\cdot[\delta\eta] = [\delta(\omega\eta)]$ et $\langle\omega, \xi\rangle = \mathrm{Res}\,(\omega\xi) = \mathrm{Res}\,([\delta(\omega\eta)]) = \mathrm{res}\,(\omega\eta) = 1$. □

8.3.4. Le diviseur d'une 1-forme méromorphe $\omega \neq 0$ sur X a été défini en 3.1.3, on dit que c'est un *diviseur canonique*.

8.3.5. Proposition. — ***Deux diviseurs canoniques sont linéairement équivalents.***

DÉMONSTRATION. — Si $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}^1(X) \setminus \{0\}$, dans tout domaine, assez petit, U d'une carte z, on a $\omega_j = f_j\,\mathrm{d}z$ où $f_j \in \mathcal{M}^*(U)$, $j=1,2$; si (z', U') est une autre carte, $\omega_j|U' = f_j'\,\mathrm{d}z'$; alors sur $U \cap U' \neq \emptyset$, on a $f_j\,\mathrm{d}z = f_j'\,\mathrm{d}z'$, $j=1,2$, donc $f_1'\cdot f_1^{-1} = f_2'\cdot f_2^{-1}$, d'où $f_1'\cdot f_2'^{-1} = f_1\cdot f_2^{-1}$.

Il existe $f \in \mathcal{M}^*(X)$ telle que $f|U = f_1\cdot f_2^{-1}$, donc $(\omega_1)-(\omega_2) = (f)$. □

8.3.6. Corollaire. — ***Les diviseurs canoniques de X ont tous le même degré.*** □

8.3.7. Soient $\omega \in \mathcal{M}^1(X) \setminus \{0\}$, K le diviseur (canonique) de ω, alors

$$\mathcal{O}_{D+K} \to \Omega^1_D$$
$$f \mapsto f\omega$$

est un isomorphisme de faisceaux.

Dans la suite, on notera $\mathrm{dg}\,D$ le degré du diviseur D.

8.3.8. Lemme. — ***Il existe une constante $k_0 \in \mathbf{Z}$ telle que, pour tout diviseur D de X, on ait***

$$\dim H^0(X, \Omega^1_D) \geqslant \mathrm{dg}\, D + k_0 .$$

DÉMONSTRATION. — Soient g le genre de X et K un diviseur canonique ; d'après le théorème de Riemann—Roch (3.4) et 8.3.7, on a

$$\dim H^0(X, \Omega^1_D) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D+K}) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D+K}) + 1 - g + \mathrm{dg}(D+K)$$
$$\geqslant \mathrm{dg}\, D + k_0 ,$$

avec $k_0 = 1 - g + \mathrm{dg}\, K$. □

8.3.9. Soient D, D' deux diviseurs de X tels que $D' \leqslant D$; l'inclusion

$$0 \to \mathcal{O}_{D'} \to \mathcal{O}_D$$

induit la suite exacte $H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \to H^1(X, \mathcal{O}_D) \to 0$, d'après (3.3.6), d'où le monomorphisme $i_{D'}^D$ du diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccc}
0 \to & H^1(X, \mathcal{O}_D)^* & \xrightarrow{i_{D'}^D} & H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^* \\
& \Big\uparrow{\scriptstyle \iota_D} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \iota_{D'}} \\
0 \to & H^0(X, \Omega^1_{-D}) & \longrightarrow & H^0(X, \Omega^1_{-D'}).
\end{array}$$

8.3.10.* Lemme.** — ***Pour tout $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ ***et pour*** $\omega \in H^0(X, \Omega^1_{-D'})$ ***tels que*** $i_{D'}^D(\lambda) = \iota_{D'}(\omega)$, ***on a :*** $\omega \in H^0(X, \Omega^1_{-D})$ ***et*** $\lambda = \iota_D(\omega)$.

Démonstration. — Exercice. □

8.4. Théorème de dualité de Serre. — ***Sur toute surface de Riemann compacte*** X, ***pour tout diviseur*** D ***de*** X, ***l'application***

$$\iota_D : H^0(X, \Omega^1_{-D}) \to H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$$

est un isomorphisme de $\mathbf{C}$***-espaces vectoriels.***

8.4.1. Démonstration. — Compte tenu de 8.3.3, il suffit de montrer que tout $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ est dans l'image de ι_D.

Soit P un point de X ; pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $D_n = D - nP$. Pour tout $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$, le morphisme de faisceau

$$\mathcal{O}_{D_n} \xrightarrow{\psi\cdot} \mathcal{O}_D$$
$$f \mapsto \psi \cdot f$$

induit une application $\mathbf{C}$-linéaire notée aussi $\psi\cdot$

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D_n}) \xrightarrow{\psi\cdot} H^1(X, \mathcal{O}_D),$$

d'où, par transposition, une application $\mathbf{C}$-linéaire ${}^t\psi.$: $H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \to H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$; par définition de $\psi.$, pour tout $\xi \in H^1(X, D_n)$, on a ${}^t\psi.\lambda(\xi) = \lambda(\psi.\xi)$.

8.4.2.* Lemme.** — ${}^t\psi.$ ***est injective.

Démonstration du lemme. — (ψ) étant le diviseur de ψ, on a $(\psi) \geqslant -nP$; le morphisme de faisceau $\psi.$ se factorise en $\mathcal{O}_{D_n} \xrightarrow{k} \mathcal{O}_{D+(\psi)} \xrightarrow{j} \mathcal{O}_D$ où j est un isomorphisme et k, induit par $D - nP \leqslant D + (\psi)$ est injectif ; alors, d'après 3.3.6, $H^1(X, \mathcal{O}_{D_n}) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D+(\psi)})$ est surjectif ; il en est de même de $\psi.$ et ${}^t\psi.$ est injective. □

8.4.3. Suite de la démonstration de 8.4. — D'après 8.4.2,

$$\Lambda = \{{}^t\psi.\lambda \ ; \ \psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})\} \subset H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$$

est isomorphe à $H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$; d'après le théorème de Riemann—Roch (3.4), g étant le genre de X, on a :

$$\dim \Lambda = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{nP}) \geqslant 1 - g + n$$

$\imath_{D_n}$ étant injective (8.3.3), on a : $\dim \operatorname{Im}(\imath_{D_n}) = \dim H^0(X, \Omega^1_{-D_n}) \geqslant k_0 + n - \mathrm{dg}D$, d'après le lemme 8.3.8.

Pour $n > \mathrm{dg}D$, on a $\mathrm{dg}D_n < 0$, donc (3.2.3), $H^0(X, \mathcal{O}_{D_n}) = 0$; alors le théorème de Riemann—Roch entraîne

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^* = g - 1 - \mathrm{dg}D_n = n + (g - 1 - \mathrm{dg}D).$$

Pour n assez grand, on a

$$\dim \Lambda + \dim \operatorname{Im}(\imath_{D_n}) \geqslant 1 - g + k_0 + 2n - \mathrm{dg}D > g - 1 + n - \mathrm{dg}D = \dim H^1(X, \mathcal{O}_n)^*$$

i.e. les deux sous-espaces Λ et $\operatorname{Im}(\imath_{D_n})$ de $H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$ ont une intersection non nulle, donc il existe $0 \neq \psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$ et $\omega \in H^0(X, \Omega^1_{-D_n})$ tels que ${}^t\psi\lambda = \imath_{D_n}(\omega)$.

On a $\psi^{-1} \in H^0(X, \mathcal{O}_{(\psi)})$; posons $D' = D_n - (\psi)$, alors : $D_n \leqslant D' \leqslant D$.

On a $\psi^{-1} : H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})$;

$$i^D_{D'}(\lambda) = {}^t\psi^{-1} \cdot ({}^t\psi\lambda) = {}^t\psi^{-1}\, \imath_{D_n}(\omega) = \imath_{D'}\left(\frac{1}{\psi}\omega\right).$$

Le lemme 8.3.10 entraîne $\psi^{-1}\omega \in H^0(X, \Omega^1_{-D})$ et $\lambda = \imath_D(\psi^{-1}\omega)$. □

8.5. Conséquences immédiates de 8.4

***8.5.1.* Proposition. — *Le genre g de X est égal à* $\dim H^0(X, \Omega^1)$.**

DÉMONSTRATION. — D'après 8.4, pour $D = 0$, on a :

$$g = \dim H^1(X, \mathcal{O}) = \dim H^0(X, \Omega^1)^* = \dim H^0(X, \Omega^1). \quad \square$$

8.5.2.* Théorème. — *Soit D un diviseur d'une surface de Riemann compacte, alors il existe un isomorphisme

$$H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) \xrightarrow{\approx} H^1(X, \Omega^1_D)^*.$$

DÉMONSTRATION. — Soit K un diviseur canonique de X ; d'après 8.3.7, on a : $\mathcal{O}_{-D} \approx \Omega^1_{-D-K}$ et $\Omega^1_D \approx \mathcal{O}_{D+K}$, alors 8.5.2 résulte de 8.4 appliqué au diviseur $D + K$. □

8.5.3. Soit E un fibré holomorphe en droites sur X, d'après 7.5.4. E est défini par un diviseur D et $\mathcal{O}_D \xrightarrow{\approx} \mathcal{O}_E$. On définit, de façon évidente, le faisceau Ω^1_E des 1-formes différentielles holomorphes à valeurs dans E. Alors 8.4 et 8.5.2 entraînent le théorème suivant :

8.5.4.* Théorème de dualité de Serre pour les fibrés holomorphes en droites. — *Soit E un fibré holomorphe en droites sur une surface de Riemann compacte X, alors on a les isomorphismes suivants

$$H^0(X, \mathcal{O}_{E^*}) \xrightarrow{\approx} H^1(X, \Omega^1_E)^* ;$$

$$H^0(X, \Omega^1_{E^*}) \xrightarrow{\approx} H^1(X, \mathcal{O}_E)^*. \quad \square$$

***8.5.5.* Théorème. — *Sur une surface de Riemann compacte X, de genre g, le degré d'un diviseur canonique K est* $2g - 2$.**

DÉMONSTRATION. — D'après le théorème de Riemann—Roch

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_K) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_K) = 1 - g + \mathrm{dg} K.$$

Mais $\mathcal{O}_K \approx \Omega^1$ (8.3.7) et d'après 8.5.2, $\dim H^1(X, \Omega^1) = \dim H^0(X, \mathcal{O}) = 1$, donc, compte-tenu de 8.5.1,

$$g - 1 = 1 - g + \mathrm{dg} K. \quad \square$$

***8.5.6.* Corollaire. — *Le tore* $\mathbf{T} = \mathbf{C}/\Gamma$ (ch. 5, 1.2.2 (c)) *est de genre* 1.**

DÉMONSTRATION. — La 1-forme dz de $\mathbf{C}$, invariante par translation, induit une 1-forme holomorphe ω sur $\mathbf{T}$ sans zéro ni pôle, (ω) est un diviseur canonique nul, donc $\mathrm{dg}(\omega) = 2g - 2 = 0$. $\square$

8.6. Théorèmes d'annulation

***8.6.1.* Théorème. — *Si D est un diviseur d'une surface de Riemann compacte X de genre g, et si* $\mathrm{dg} D > 2g - 2$, *on a* $H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0$.**

DÉMONSTRATION. — Soit K un diviseur canonique, alors (8.3.7), $\Omega^1_{-D} \approx \mathcal{O}_{K-D}$ et $H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \approx H^0(X, \Omega^1_{-D}) \approx H^0(X, \mathcal{O}_{K-D})$ d'après 8.5.2. La condition $\mathrm{dg} D > 2g - 2$ entraîne $\mathrm{dg}(K - D) < 0$ d'après 8.5.5, donc $H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) = 0$ d'après 3.2.3. $\square$

***8.6.2.* Corollaire. — *Sur une surface de Riemann compacte X, on a* $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$.**

DÉMONSTRATION. — Pour tout $\xi \in H^1(X, \mathcal{M})$, il existe un recouvrement ouvert fini $\mathcal{U} = (U_j), j = (1, \ldots, n)$ de X tel que ξ provienne d'un élément $\xi' \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{M})$, ayant un représentant $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ tel que le nombre de pôles de l'ensemble des f_{ij} soit fini. Alors il existe un diviseur D de degré $> 2g - 2$ tel que $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D)$. D'après 8.6.1, (f_{ij}) est un cobord du recouvrement $\mathcal{U}$ relatif à $\mathcal{O}_D$, donc à $\mathcal{M}$. $\square$

8.6.3. Indice de spécialité

On appelle *indice de spécialité* du diviseur D le nombre $i(D) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_D)$; de sorte que le théorème de Riemann—Roch (3.4) s'écrit

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \mathrm{dg} D + i(D).$$

8.6.4.* Théorème. — *L'indice de spécialité a les propriétés suivantes :

(i) $i(D) \geqslant 0$;

(ii) si $\mathrm{dg}\, D < 0$, on a : $i(D) = g - 1 - \mathrm{dg}\, D$;

(iii) si $\mathrm{dg}\, D > 2g - 2$, on a $i(D) = 0$.

DÉMONSTRATION. — (ii) et (iii) résultent de 3.2.3 et de 8.6.1 respectivement. $\square$

8.6.5.* Théorème. — *Soit D un diviseur de degré* $\geqslant 2g$ *sur une surface de Rie-

mann compacte X, de genre g. Alors, pour tout $x \in X$, il existe $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$ tel que

$$\textbf{(8.1)} \qquad \mathcal{O}_{D,x} = \mathcal{O}_x f.$$

DÉMONSTRATION. — La condition (8.1) équivaut à

$$(8.2) \qquad \mathrm{ord}_x(f) = -D(x).$$

Pour tout $x \in X$, soit D' le diviseur défini par

$$D'(y) = \begin{cases} D(y) \,; & y \neq x \\ D(y) - 1 \,; & y = x. \end{cases}$$

D'après 8.6.4, $i(D) = i(D') = 0$; d'après le théorème de Riemann—Roch

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = \dim (X, \mathcal{O}_{D'}) + 1,$$

donc il existe $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D) \setminus H^0(X, \mathcal{O}_{D'})$; alors $\mathrm{ord}_x(f) = -D(x)$. □

8.7. Plongement projectif d'une surface de Riemann compacte

8.7.1. Espace projectif complexe

On désigne par $z_0, z_1, \ldots, z_N$ les coordonnées dans $\mathbf{C}^{N+1}$. Dans $\mathbf{C}^{N+1} \setminus \{0\}$ on considère la relation $\mathscr{R}$ suivante : $(z_0, \ldots, z_N) \mathscr{R} (z_0', \ldots, z_N')$ signifie : il existe $\lambda \in \mathbf{C}^*$ tel que $z_j' = \lambda z_j$, $j = 0, 1, \ldots, N$; $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence. On désigne par $\mathbf{P}^N = \mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ l'espace topologique quotient $\mathbf{C}^{N+1} \setminus \{0\} / \mathscr{R}$; on note $(z_0 : \ldots : z_N)$ la classe d'équivalence de $(z_0, \ldots, z_N)$; comme dans le cas $N = 1$, $\mathbf{P}^N$ est un espace séparé compact muni d'un atlas analytique qui en fait une variété analytique complexe de dimension N (voir ch. 7, 6.4). On pose $U_j = \{(z_0 : \ldots : z_N) \in \mathbf{P}^n \,;\, z_j \neq 0\}$.

Soit $\varphi_j : U_j \to \mathbf{C}^N$

$$(z_0 : \ldots : z_N) \mapsto (z_j^{-1} z_0, \ldots, \widehat{z_j^{-1} z_j}, \ldots z_j^{-1} z_N)$$

$(\varphi_j)_{j=0,\ldots,N}$ est un atlas analytique de $\mathbf{P}^N$.

8.7.2. Soit X une surface de Riemann compacte, une application continue $F : X \to \mathbf{P}^N$ est dite *analytique complexe* ou *morphisme* si pour tout $j \in [0, \ldots, N]$,

$$F_j = (F_{j1}, \ldots, F_{jN}) = \varphi_j \circ F : F^{-1}(U_j) \to \mathbf{C}^N$$

où F_{jk} est une fonction holomorphe définie sur l'ouvert $F^{-1}(U_j)$ de X à valeurs dans $\mathbf{C}$.

F est appelée une *immersion* si pour tout $x \in X$, et pour j tel que $x \in F^{-1}(U_j)$, il existe $k \in [1, \ldots, N]$ tel que $dF_{jk} \neq 0$; alors d'après le théorème des fonctions implicites $F(X)$ est, au voisinage de x, une sous-variété analytique complexe de dimension 1 de $\mathbf{P}^N$, c'est-à-dire l'ensemble des points annulant $N-1$ coordonnées locales holomorphes.

F est appelé un *plongement* si c'est une immersion injective.

8.7.3. La donnée de $(N+1)$ fonctions méromorphes $f_j \in \mathcal{M}(X), j=0, 1, \ldots, N$, définit un morphisme

$$F = (f_0 : f_1 : \ldots : f_N) : X \to \mathbf{P}^N$$

comme suit : pour tout point $x \in X$, soient (z, V) une carte holomorphe de X centrée en x et $k = \min_{j \in [0, \ldots, N]} \operatorname{ord}_x (f_j)$; alors $f_j = z^k g_j$ où g_j est holomorphe au voisinage de x et l'un des $g_j(x)$ est non nul. Par définition $F(x) = (g_0(x) : \ldots : g_N(x))$; $F(x)$ ne dépend pas du choix de la coordonnée locale. En outre si $g_j(x) \neq 0$, au voisinage de x, $F_j = \left(\frac{g_0}{g_j}, \ldots, \widehat{\frac{g_j}{g_j}}, \ldots, \frac{g_N}{g_j}\right)$.

8.7.4. **Théorème.** — ***Si D est un diviseur de degré $\geqslant 2g+1$ d'une surface de Riemann compacte X, de genre g et si $f_0, \ldots, f_N$ est une base de $H^0(X, \mathcal{O}_D)$, le morphisme***

$$F = (f_0 : \ldots : f_N) : X \to \mathbf{P}^N$$

est un plongement.

DÉMONSTRATION. — (a) *F est injectif* : Soient x_0, x_1 deux points distincts de X et D' le diviseur de X tel que :

$$D'(x) = \begin{cases} D(x), & x \neq x_0 \\ D(x) - 1 \,; & x = x_0 \end{cases}$$

$\operatorname{dg} D' \geqslant 2g$ entraîne (8.6.5) : il existe $f \in H^0(X, \mathcal{O}_{D'})$ tel que

$$\operatorname{ord}_{x_1}(f) = -D(x_1) \tag{8.2}$$

$$\operatorname{ord}_{x_0}(f) \geqslant -D(x_0) + 1 \tag{8.3}$$

f appartient aussi à $H^0(X, \mathcal{O}_D)$, i.e. $f = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j f_j$; $\lambda_j \in \mathbf{C}$.

Soient (z_l, V_l) $(l=0, 1)$ deux cartes locales centrées en x_0, x_1 resp. et $k_l = \inf_j \operatorname{ord}_{x_l}(f_j) = -D(x_l)$, $l=0, 1$; on a $f_j = z_l^{k_l} g_{lj}$ et $f = z_l^{k_l} g_l$ au voisinage de x_l ; g_{lj}, g_l étant holomorphes pour $l=0, 1$; $j=0, \ldots, N$. Alors (8.7.3)

$$F(x_l) = (g_{l0}(x_l) : \ldots : g_{lN}(x_l)) \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{N} \lambda_j g_{lj}(x_l) = g_l(x_l)$$

et d'après (8.2) et (8.3), $g_0(x_0) \neq 0$ et $g_1(x_1) = 0$, d'où $F(x_1) \neq F(x_0)$.

(b) *F est une immersion.* D'après 8.6.5, il existe $f' \in H^0(X, \mathcal{O}_{D'})$ tel que

$$\operatorname{ord}_{x_0}(f') = -D(x_0) + 1 ;$$

f' appartient aussi à $H^0(X, \mathcal{O}_D)$, donc $f' = \sum_{j=0}^{N} \lambda'_j f_j$; $\lambda'_j \in \mathbf{C}$.

Soit $k = \inf_j \operatorname{ord}_{x_0}(f_j) = -D(x_0)$

$$f_j = z_0^k g_j ; \quad f' = z_0^k g.$$

Soit j_0 tel que $g_{j0}(x_0) \neq 0$; après changement de numérotage, supposons $j_0 = 0$. Alors, au voisinage de x_0, $F_0 = \varphi_0 \circ F : F^{-1}(U_0) \to \mathbf{C}^N$ (notations de 8.7.2) est

$$F_0 = \left(\frac{g_1}{g_0}, \ldots, \frac{g_N}{g_0} \right)$$

et $\sum_{j=1}^{N} \lambda'_j F_{0j} = \sum_{j=1}^{N} \lambda'_j \frac{g_j}{g_0} = \frac{g}{g_0} - \lambda'_0$; en différentiant les deux membres, on a : $\sum_{j=1}^{N} \lambda'_j \, \mathrm{d}F_{0j}(x_0) = \mathrm{d}\left(\frac{g}{g_0} \right)(x_0) = g_0^{-1} \, \mathrm{d}g(x_0) \neq 0$, car $g_0(x_0) \neq 0$ et g a un zéro d'ordre 1 en x_0 ; alors l'un des $\mathrm{d}F_{0j}(x_0) \neq 0$, donc F est une immersion. □

7 FONCTIONS HOLOMORPHES DE PLUSIEURS VARIABLES

Une fonction holomorphe dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$ est définie comme une fonction continûment différentiable satisfaisant à la condition de Cauchy pour chaque variable. Une formule intégrale de Cauchy très particulière est alors établie à partir de la formule en une variable pour le bord d'un disque ; elle permet immédiatement de remplacer l'hypothèse C^1 par celle de continuité dans la définition d'une fonction holomorphe (n° 3). Comme dans le cas d'une variable, cette formule entraîne que toute fonction holomorphe est développable en série entière convergente de n variables complexes au voisinage de tout point de son domaine définition ; il en résulte les inégalités de Cauchy, le principe du prolongement analytique, le principe du module maximum, le lemme de Schwarz et un résultat sur la mesure de l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe, à l'aide de l'inégalité de Jensen (n° 5). Un lemme du d'' est établi pour les formes différentielles d''-fermées, par récurrence sur le nombre de variables ; il en résulte le théorème de de Rham pour d'' sur une variété analytique complexe (n° 6). Par la technique du chapitre 3, on établit que l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, est un espace de Fréchet et que, dans cet espace, toute partie bornée fermée est compacte (n° 7). Les propriétés précédentes ont la même formulation que dans le cas d'une variable ; il en est de même du théorème d'extension de Riemann (n° 8) ; mais, pour $n \geqslant 2$, il apparaît des phénomènes entièrement nouveaux : des théorèmes d'Hartogs établissent l'existence du prolongement de toute fonction holomorphe à certains ensembles d'intérieur non vide : il existe en outre des théorèmes d'extension à certains fermés sans que la fonction holomorphe donnée soit supposée localement bornée. Un exposé succinct sur les séries entières convergentes de plusieurs variables, contenant les préliminaires indispensables sur les familles sommables, précède l'utilisation des séries (n° 4).

1. Préliminaires

On munit $\mathbf{C}^n$ des coordonnées z_j, $j=1, \dots, n$; on pose $x_j = \operatorname{Re} z_j$; $y_j = \operatorname{Im} z_j$; alors $z_j = x_j + iy_j$, $(x_j, y_j) \in \mathbf{R}^2$. L'isomorphisme de $\mathbf{R}$-espace vectoriel

$$\imath : \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}^{2n}$$

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$$

permet d'identifier $\mathbf{C}^n$ à $\mathbf{R}^{2n}$. On suppose $\mathbf{R}$ muni de la topologie habituelle définie par la valeur absolue, $\mathbf{R}^{2n}$ muni de la topologie produit et $\mathbf{C}^n$ de la topologie transportée par ι^{-1}. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$ considéré aussi comme un ouvert de $\mathbf{R}^{2n}$, on étudiera des fonctions : $\Omega \to \mathbf{C}$.

Les fonctions coordonnées complexes z_j et leurs imaginaires conjugées $\bar{z}_j$ ont pour différentielles dans $\mathbf{R}^{2n}$, $\mathrm{d}z_j = \mathrm{d}x_j + i\,\mathrm{d}y_j$; $\mathrm{d}\bar{z}_j = \mathrm{d}x_j - i\,\mathrm{d}y_j$; alors

$$\mathrm{d}x_j = \frac{1}{2}(\mathrm{d}z_j + \mathrm{d}\bar{z}_j)\ ;\quad \mathrm{d}y_j = \frac{i}{2}(\mathrm{d}\bar{z}_j - \mathrm{d}z_j).$$

En tout point $z \in \mathbf{C}^n$, le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $T_z^*(\mathbf{C}^n)$ (voir Appendice) a pour base $(\mathrm{d}x_j, \mathrm{d}y_j)_{j=1,\dots,n}$, les différentielles $(\mathrm{d}z_j, \mathrm{d}\bar{z}_j)_{j=1,\dots,n}$ constituent aussi une base, car la matrice de passage a pour déterminant $(-2i)^n$. Toute forme différentielle sur Ω s'écrit donc, de façon unique, comme somme de formes différentielles $\omega = \sum a_{j_1\dots j_p k_1\dots k_q}\, \mathrm{d}z_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}z_{j_p} \wedge \mathrm{d}\bar{z}_{k_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\bar{z}_{k_q}$ homogènes par rapport aux $\mathrm{d}z_j$, $\mathrm{d}\bar{z}_k$ respectivement, de *type* (i.e. de bidegré par rapport aux $\mathrm{d}z_j$, $\mathrm{d}\bar{z}_k$) (p, q).

Soit $u \in C^1(\Omega)$ une fonction continûment différentiable dans Ω, on a :

$$\mathrm{d}u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_j}\mathrm{d}y_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_k}\mathrm{d}z_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_k}\mathrm{d}\bar{z}_k,$$

avec

$$(1.1)\qquad \frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right);\qquad (1.2)\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right).$$

Il faut noter que $\dfrac{\partial}{\partial z_k}$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$ signifient seulement les opérateurs différentiels définis en (1.1) et (1.2) ; ce ne sont pas, en général, des dérivations partielles par rapport aux variables z_k, $\bar{z}_k$. Alors $\mathrm{d}u = \mathrm{d}'u + \mathrm{d}''u$ avec $\mathrm{d}'u = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial u}{\partial z_k}\mathrm{d}z_k$; $\mathrm{d}''u = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}_k}\mathrm{d}\bar{z}_k$; les formes différentielles $\mathrm{d}'u$ et $\mathrm{d}''u$ sont respectivement de type $(1, 0)$ et $(0, 1)$. On dit que les opérateurs d' et d'' sont de type respectif $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

Si ω est une forme différentielle, de classe C^1, de type (p, q), alors $\mathrm{d}'\omega = \sum \mathrm{d}'a_{j_1\dots j_p k_1\dots k_q} \wedge \mathrm{d}z_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\bar{z}_{k_q}$ est de type $(p+1, q)$ et $\mathrm{d}''\omega = \sum \mathrm{d}''a_{j_1\dots j_p\, k_1\dots k_q} \wedge \wedge \mathrm{d}z_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\bar{z}_{k_q}$ est de type $(p, q+1)$.

Si ω est de classe C^2, alors l'identité $\mathrm{d}\mathrm{d}\omega = 0$ entraîne que les trois composantes de $\mathrm{d}\mathrm{d}\omega$, de types respectifs $(p+2, q)$, $(p, q+2)$, $(p+1, q+1)$ sont nulles, d'où par linéarité, les identités $\mathrm{d}'\mathrm{d}' = 0$; $\mathrm{d}''\mathrm{d}'' = 0$; $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' + \mathrm{d}''\mathrm{d}' = 0$.

2. Fonctions holomorphes sur Ω

2.1. Une fonction $u \in C^1(\Omega)$ est dite *holomorphe* dans Ω si $\mathrm{d}''u = 0$ dans Ω. La condition $\mathrm{d}''u = 0$ est dite *condition de Cauchy* (ou *Cauchy—Riemann*) ; elle équivaut à : $\mathrm{d}u = \mathrm{d}'u$.

L'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω sera désigné par $\mathcal{O}(\Omega)$.

2.2. Proposition. — ***L'ensemble $\mathcal{O}(\Omega)$ est une C-algèbre pour l'addition, la multiplication des fonctions et la multiplication par les constantes complexes. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et si, pour tout $z \in \Omega$, $f(z) \neq 0$, alors $1/f = f^{-1} \in \mathcal{O}(\Omega)$; si Ω est connexe et si f est à valeurs réelles ou si $|f|$ est constante, alors f est constante.***

Démonstration. — d'' est C-linéaire et est une dérivation, i.e. si $u, v \in C^1(\Omega)$, alors $d''(uv) = v\, d''u + u\, d''v$, d'où la structure de C-algèbre. Si, pour tout $z \in \Omega$, $f(z) \neq 0$, $1/f$ est continûment différentiable et $d''(1/f) = -f^{-2}\, d''f = 0$. Si f est réelle, pour tout $k = 1, \ldots, n$, $\partial f/\partial x_k$ et $\partial f/\partial y_k$ sont réels ; la condition de Cauchy entraîne : $\partial f/\partial x_k = -i(\partial f/\partial y_k)$, donc $\partial f/\partial x_k = 0 = \partial f/\partial y_k$, i.e. f est constante sur l'ouvert connexe Ω. Si $|f| = \varrho$ constante, on a : $f = \varrho e^{i\theta(z)}$ avec $d''f = \varrho e^{i\theta(z)} i\, d''\theta(z) = 0$, donc θ est holomorphe et réelle sur Ω, alors, d'après ce qui précède, θ est constante sur Ω. □

2.3. Applications holomorphes

Soient Ω, Ω' deux ouverts de $\mathbf{C}^n$ et $\mathbf{C}^m$ respectivement.

2.3.1. Une application $g : \Omega \to \Omega'$ est dite *holomorphe* s'il existe m fonctions holomorphes $g_1, \ldots, g_m$ sur Ω telles que :

$$z' = g(z) = (g_1(z), \ldots, g_m(z)) \in \Omega'.$$

2.3.2. **Proposition.** — ***Si f est une fonction holomorphe sur Ω' et si g est une application holomorphe : $\Omega \to \Omega'$, alors $f \circ g$ est une fonction holomorphe sur Ω.***

Démonstration. — On vérifie, à partir des définitions (1.1) et (1.2), que $\partial/\partial z_k$ et $\partial/\partial \bar{z}_k$ satisfont aux règles des dérivations partielles ; alors

$$(\partial/\partial \bar{z}_k)(f(g(z))) = \sum_{l=1}^{m} (\partial f/\partial z'_l)(\partial g_l/\partial \bar{z}_k) + \sum_{l=1}^{m} (\partial f/\partial \bar{z}'_l)(\partial \bar{g}_l/\partial \bar{z}_k) ; \quad k = 1, \ldots, n ;$$

mais $\partial g_l/\partial \bar{z}_k = 0$ et $\partial f/\partial \bar{z}'_l = 0$ pour $k = 1, \ldots, n$ et $l = 1, \ldots, m$, donc $d''(f \circ g) = 0$, i.e. $f \circ g$ est holomorphe sur Ω. □

2.3.3. **Corollaire.** — ***La composée de deux applications holomorphes est holomorphe.*** □

2.3.4. **Proposition.** — ***Soient $f_j : \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$, $j = 1, \ldots, m$ des fonctions holo-***
$(w, z) \mapsto f_j(w, z)$
morphes dans un voisinage d'un point (w^0, z^0) et telles que

$$f_j(w^0, z^0) = 0, \quad j = 1, \ldots, m \tag{2.1}$$

$$\text{dét}\left(\frac{\partial f_j}{\partial w_k}\right)_{j,k=1}^{m} (w^0, z^0) \neq 0. \tag{2.2}$$

Alors les équations $f_j(w, z) = 0$, $j = 1, \ldots, m$, ont une solution holomorphe unique $w(z)$, au voisinage de z_0 telle que $w(z^0) = w^0$.

DÉMONSTRATION. — (2.2) équivaut à :

$$0 \neq \left|\text{dét}\left(\frac{\partial f_j}{\partial w_k}\right)\right|^2 = \text{dét}\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial f_j}{\partial w_k}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial \bar{f}_j}{\partial \bar{w}_k}\right)\end{pmatrix} = \frac{D(f_1, \ldots, f_m, \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m)}{D(w_1, \ldots, w_m, \bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_m)}.$$

En posant $f_j = u_j + iv_j$ où u_j, v_j sont à valeurs réelles ; $j=1, \ldots, m$, on trouve

$$\left|\text{dét}\left(\frac{\partial f_j}{\partial w_k}\right)\right|^2 = \frac{D(u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m)}{D(x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m)} \neq 0.$$

Le théorème des fonctions implicites, en variables réelles, s'applique et on résoud en w, alors $w = w(z)$.

Les fonctions $w_k(z)$ sont holomorphes puisque $f_j(w, z) = 0$, $j=1, \ldots, m$, au voisinage de (w^0, z^0), entraîne $\mathrm{d}f_j = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial w_k} \mathrm{d}w_k + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial z_l} \mathrm{d}z_l = 0$; (2.2) entraîne que $\mathrm{d}w_k$ est une combinaison linéaire de $\mathrm{d}z_l$, $l=1, \ldots, n$, i.e. $\mathrm{d}w_k = \mathrm{d}' w_k$. □

2.3.5.* Corollaire. — *Une application holomorphe d'ouverts de $\mathbf{C}^n$ a une application réciproque holomorphe au voisinage de tout point où le jacobien de l'application ne s'annule pas. □

***2.3.6.* Remarque.** — 2.3.4 est le *théorème des fonctions implicites holomorphes*. 2.3.5 implique qu'une application holomorphe à jacobien non nul est localement biholomorphe.

3. Formule intégrale de Cauchy

3.1. On appelle *polydisque D* de $\mathbf{C}^n$ centré en 0 le produit de n disques D_j, $(j=1, \ldots, n)$, de $\mathbf{C}$ centrés en 0 :

$$D = \prod_{j=1}^{n} D_j = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n,\ z_j \in D_j,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Soit bD_j le bord de D_j, l'ensemble $b_0 D = \prod_{j=1}^{n} bD_j$ est appelé le *bord distingué* de D ou la *frontière de Šilov* de D ; les disques D_j peuvent être ouverts ou fermés.

Pour $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$, on pose $|z| = \max\{|z_k| \ ;\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$; $|\ |$ est une norme sur $\mathbf{C}^n$.

On dira que $r = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ est le *(poly-)rayon* du polydisque D si r_j est le rayon du disque D_j, $j=1, \ldots, n$.

On dira que D est ouvert si chacun des disques D_j est ouvert.

Le *polydisque ouvert* de rayon r, centré en $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$ est donc l'ouvert

$$D(z^0; r) = \{z \in \mathbf{C}^n;\ |z_j - z_j^0| < r_j,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Si $r_1=r_2=\ldots=r_n$, alors

$$D(z^0\,;\,r)=\{z\in\mathbf{C}^n\,;\,|z-z^0|<r_1\}.$$

3.2. Théorème. — ***Soient D un polydisque ouvert et u une fonction continue sur $\bar{D}$ qui, dans D, est holomorphe par rapport à chaque $z_j\in D_j$ quand $z_k\in\bar{D}_k$ est fixé, $k\neq j$, $k\in\{1,\ldots,n\}$. Alors, pour tout $z\in D$, on a***

$$u(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{b_0D}\frac{u(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)}{(\zeta_1-z_1)\ldots(\zeta_n-z_n)}\,\mathrm{d}\zeta_1\ldots\mathrm{d}\zeta_n. \tag{3.1}$$

En outre, $u\in C^\infty(D)$ et $u\in\mathcal{O}(D)$.

DÉMONSTRATION. — Fixons $z_k\in\bar{D}_k$, $k\neq j$; alors si $\{\zeta_1^p,\ldots,\widehat{\zeta_j^p},\ldots,\zeta_n^p\}_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite de points de $\prod_{k\neq j}D_k$ convergeant vers $(z_1,\ldots,\hat{z}_j,\ldots,z_n)$, à cause de la continuité de u dans $\bar{D}$, la suite de fonctions holomorphes en z_j,

$$\big(u(\zeta_1^p,\ldots,\zeta_{j-1}^p,z_j,\zeta_{j+1}^p,\ldots,\zeta_n^p)\big)_{p\in\mathbf{N}}$$

converge uniformément sur les compacts de D_j, donc d'après 1.3. du chapitre 3, $u(z_1,\ldots,z_j,\ldots,z_n)$ est holomorphe sur D_j.

Pour $n=1$, on a

$$u(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{bD_1}u(\zeta_1)(\zeta_1-z_1)^{-1}\,\mathrm{d}\zeta_1\,; \tag{3.2}$$

en effet, pour $p\in\mathbf{N}$, $p\geqslant p_0$ assez grand, z_1 appartient au disque ouvert $D_1^{(p)}$ de même centre que D_1 et de rayon $r_1-\dfrac{1}{p}$. D'après 5.1 du chapitre 1, on a : $u(z_1)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{bD_1^{(p)}}u(\zeta_1)(\zeta_1-z_1)^{-1}\,\mathrm{d}\zeta_1$; le second membre est donc indépendant de p pour $p\geqslant p_0$ et, la fonction $u(\zeta_1)(\zeta_1-z_1)^{-1}$ étant continue en ζ_1 sur $\bar{D}_1\diagdown D_1^{(p_0)}$, en faisant tendre p vers l'infini, on obtient (3.2).

Pour $n\in\mathbf{N}^*$ quelconque, $(z_1,\ldots,z_{n-1})\in\bar{D}_1\times\ldots\times\bar{D}_{n-1}$, la fonction de z_n, $u(z_1,\ldots,z_n)$ est holomorphe sur D_n et, d'après (3.2), on a :

$$u(z_1,\ldots,z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{bD_n}u(z_1,\ldots,z_{n-1},\zeta_n)(\zeta_n-z_n)^{-1}\,\mathrm{d}\zeta_n.$$

Alors $u(z_1,\ldots,z_{n-1},\zeta_n)$ est holomorphe en z_{n-1} sur D_{n-1} pour

$$(z_1,\ldots,z_{n-2},\zeta_n)\in\bar{D}_1\times\ldots\times\bar{D}_{n-2}\times\bar{D}_n\,;$$

d'après (3.2)

$$u(z_1,\ldots,z_{n-1},\zeta_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{bD_{n-1}}u(z_1,\ldots,z_{n-2},\zeta_{n-1},\zeta_n)(\zeta_{n-1}-z_{n-1})^{-1}\,\mathrm{d}\zeta_{n-1}\,;$$

par récurrence sur n, on obtient

$$u(z_1,\ldots,z_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{bD_n}\frac{\mathrm{d}\zeta_n}{\zeta_n-z_n}\cdots\int_{bD_1}\frac{u(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)}{\zeta_1-z_1}\,\mathrm{d}\zeta_1\,;$$

pour $z=(z_1,\ldots,z_n)\in D$, la fonction $(\zeta_1-z_1)^{-1}\ldots(\zeta_n-z_n)^{-1}u(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ est continue sur le compact d'intégration $b_0 D$, alors, d'après le théorème de Fubini, on a la relation (3.1).

Les dérivations partielles sous le signe somme dans (3.1) par rapport à $z_1, \ldots, z_n$ sont possibles indéfiniment, donc u est C^∞ sur D ; en particulier, $d''u$ a un sens et est nul puisque $(\zeta_1 - z_1)^{-1} \ldots (\zeta_n - z_n)^{-1}$ est holomorphe en $z = (z_1, \ldots, z_n)$. □

3.3. Corollaire. — ***Si Ω est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et $u \in \mathcal{O}(\Omega)$, alors u est C^∞ sur Ω et ses dérivées partielles sont holomorphes dans Ω.***

DÉMONSTRATION. — Tout point $z^0 \in \Omega$ est centre d'un polydisque ouvert D d'adhérence continue dans Ω, alors, d'après 3.2, u est C^∞ dans D, donc dans Ω. Les dérivées partielles par rapport à $z_1, \ldots, z_n$ s'obtiennent par dérivation sous le signe somme dans (3.1) et sont holomorphes dans D car, pour tout multi-indice $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbf{N}^n$, $(\zeta_1 - z_1)^{-\nu_1} \ldots (\zeta_n - z_n)^{-\nu_n}$ est holomorphe dans D. □

3.4. Lemme d'Osgood. — ***Si une fonction u, continue sur un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$, est holomorphe par rapport à chacune des variables $z_1, \ldots, z_n$, elle est holomorphe sur Ω.***

DÉMONSTRATION. — Tout point $z \in \Omega$ est centre d'un polydisque ouvert D, d'adhérence contenue dans Ω, donc $u \in \mathcal{O}(\Omega)$ d'après 3.2.

3.5. Plus généralement, l'hypothèse de continuité de 3.4 est inutile (théorème d'Hartogs) ; nous ne démontrerons pas ce résultat.

4. Séries entières convergentes

4.1. Séries formelles

Soient K un corps commutatif, $X = (X_1, \ldots, X_n)$ n indéterminées. On appelle *série formelle* en X, à coefficients dans K, toute expression

$$S(X) = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha X^\alpha$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ est un multi-indice, $a_\alpha \in K$, $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$; $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Soit $T(X) = \sum_{|\beta| \geq 0} b_\beta X^\beta$ une autre série formelle. Sur l'ensemble des séries formelles à n indéterminées, on définit les lois de composition suivantes :
addition :

$$S(X) + T(X) = \sum_{|\alpha| \geq 0} (a_\alpha + b_\alpha) X^\alpha ;$$

multiplication par un scalaire $\lambda \in K$:

$$\lambda S(X) = \sum_{|\alpha| \geq 0} (\lambda a_\alpha) X^\alpha ;$$

multiplication :

$$S(X) \cdot T(X) = \sum_{|\alpha + \beta| = p \in \mathbf{N}} a_\alpha b_\alpha X^{\alpha + \beta}.$$

Pour ces lois de composition, l'ensemble des séries formelles en X est une algèbre $K[[X]]=K[[X_1, ..., X_n]]$. On appelle *ordre* d'une série formelle, non nulle, le plus petit entier k tel que $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha X^\alpha \neq 0$. Si $S=0$, on pose $k=\infty$.

4.2. Familles sommables

Dans la suite du n° 4, K est **R** ou **C** et est fixé dans chaque définition et chaque énoncé. Soit E un espace normé sur K ; il est muni, par la norme, d'une topologie invariante par translation, entièrement définie par un système fondamental de voisinages de 0, par exemple la famille des boules ouvertes $B_n=B(0, 1/n)$, de centre 0, de rayon $1/n$; $n\in\mathbf{N}^*$.

4.2.1. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E ; désignons par $\mathscr{F}$ l'ensemble des parties finies de I ; pour toute $J\in\mathscr{F}$, on considère la somme $s_J=\sum_{i\in J} x_i$ et on dit que s_J est une *somme partielle finie* de la famille $(x_i)_{i\in I}$. On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est *sommable* et a pour *somme* s si, pour tout voisinage V de 0 dans E, il existe $J_0\in\mathscr{F}$ telle que, pour toute $J\in\mathscr{F}$, $J_0\subset J$, on ait $s_J\in s+V$. On posera $s=\sum_{i\in I} x_i$.

4.2.2.* Théorème.** — ***Soient $f: E\to E'$ une application linéaire continue d'espaces normés et $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable de somme s dans E. Alors la famille $(f(x_i))_{i\in I}$ est sommable dans E' et a pour somme $f(s)$.

DÉMONSTRATION. — Pour tout voisinage V' de 0 dans E', $V=f^{-1}(V')$ est un voisinage de 0 dans E ; dans les notations de 4.2.1, on a $s_J-s\in V$ pour $J\supset J_0$, donc

$$f(s_J)-f(s)\in V'. \quad \square$$

4.2.3.* Théorème.** — ***Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles sommables dans E, de sommes respectives s et t, alors

(i) ***la famille $(x_i+y_i)_{i\in I}$ est sommable, de somme $s+t$;***

(ii) ***pour tout $\lambda\in K$, la famille $(\lambda x_i)_{i\in I}$ est sommable de somme λs.***

DÉMONSTRATION. — L'application $\underset{x\mapsto\lambda x}{E\to E}$ est linéaire continue, alors (ii) résulte de 4.2.2. La famille $(x_i, y_i)_{i\in I}$ est sommable, de somme (s, t) dans $E\times E$, en effet, W étant un voisinage de $(0, 0)$ dans $E\times E$, il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $V\times V\subset W$; il existe donc deux parties finies J_0' et J_0'' de I telles que, pour les parties finies $J'\supset J_0'$ et $J''\supset J_0''$, on ait $s_{J'}-s\in V$ et $t_{J''}-t\in V$. Alors, pour toute partie finie J de I contenant $J_0'\cup J_0''$, on a : $(s_J, t_J)-(s, t)\in V\times V\subset W$. L'addition dans E étant continue, l'assertion (i) résulte de 4.2.2.

4.2.4.* Théorème.** — ***Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable, de somme s, dans un espace normé E. Alors

(C) ***pour tout voisinage V de 0 dans E, il existe une partie finie J_0 de I telle que, pour toute partie finie H de I, disjointe de J_0, on ait $s_H\in V$.***

DÉMONSTRATION. — Si A, B sont deux parties de E, on pose $A+B=\{x+y\ ;\ x\in A;$

$y\in B\}$; $-A=\{-x$; $x\in A\}$. Soit $\mathscr{V}$ l'ensemble des voisinages de 0 dans E ; $V\in\mathscr{V}$ étant donné, il existe $U\in\mathscr{V}$ tel que $U+U\subset V$ (continuité l'addition) ; en outre $-U\in\mathscr{V}$ (continuité de la multiplication par -1) et $W=U\cap(-U)\in\mathscr{V}$. On a $W=-W$. Dans les notations de 4.2.1, soit $J_0\in\mathscr{F}$ telle que, pour toute $J\in\mathscr{F}$ contenant J_0, on ait $s_J\in s+W$; alors, pour toute $H\in\mathscr{F}$ telle que $J_0\cap H=\emptyset$, on a $J=J_0\cup H\in\mathscr{F}$ et $J\supset J_0$, donc $s_H=s_J-s_{J_0}\in W+W\subset V$. □

4.2.5. On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ de E satisfait au *critère de Cauchy* si elle satisfait à la condition (C).

4.2.6. **Théorème. —** ***Toute famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un espace de Banach E satisfaisant au critère de Cauchy est sommable.***

Démonstration. — Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, il existe $J_n\in\mathscr{F}$ telle que, pour toute $H_n\in\mathscr{F}$ disjointe de J_n, on ait $s_{H_n}\in B_n$; posons $s_n=s_{J_n}$; alors, pour tout couple $(p, q)\in(\mathbf{N}^*)^2$ on a :

$$s_p-s_q = s_{J_p\setminus J_q}-s_{J_q\setminus J_p} ;$$

$J_p\setminus J_q$ est disjoint de J_q et $J_q\setminus J_p$ est disjoint de J_p, donc $s_p-s_q\in B_p+B_q\subset \subset B(0,(1/p)+(1/q))$; alors la suite (s_n) est de Cauchy dans E complet et a une limite s. En faisant tendre q vers l'infini, on trouve $s_p-s\in B_p+B_p=2B_p$, i.e. la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, de somme s.

4.2.7. **Théorème (commutativité). —** ***Soient $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable, de somme s, dans un espace normé E et ψ : $L\to I$ une bijection, alors la famille $(y_l)_{l\in L}$, où $y_l=x_{\psi(l)}$, est sommable de somme s.***

Démonstration. — Dans les notations de 4.2.1, $\mathscr{F}\ni J\supset J_0$ entraîne $\sum_{i\in J} x_i\in s+V$; alors, pour toute partie finie H de L telle que $H\supset\psi^{-1}(J_0)$, on a $\sum_{l\in H} y_l\in s+V$. □

4.2.8. **Théorème. —** ***Dans un espace de Banach, toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.***

Démonstration. — Cette sous-famille satisfait au critère de Cauchy. □

4.3. Familles sommables de nombres positifs

4.3.1. **Théorème. —** ***Les deux conditions suivantes sont équivalentes :***
 (i) ***la famille $(x_i)_{i\in I}$, $(x_i\in\mathbf{R}_+)$ est sommable ;***
 (ii) ***l'ensemble des sommes finies s_J est majoré.***

Démonstration. — (i)⇒(ii), évident ;
(ii)⇒(i) : l'ensemble des s_J $(J\in\mathscr{F})$ possède une borne supérieure s, somme de la famille. □

4.3.2. **Corollaire (principe de comparaison). —** ***Soient $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs telles que, pour tout $i\in I$, $x_i\leqslant y_i$. Alors, si la famille $(y_i)_{i\in I}$ est sommable, de somme t, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable de somme $s\leqslant t$.*** □

4.4. Familles absolument sommables

4.4.1. Dans un espace normé E, une famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite *absolument sommable* si la famille de nombres réels positifs $(\|x_i\|)_{i\in I}$ est sommable.

4.4.2.* Théorème. — *Dans un espace de Banach E, toute famille $(x_i)_{i\in I}$ absolument sommable est sommable.

DÉMONSTRATION. — E étant complet, d'après 4.2.6, il suffit de montrer que la famille satisfait au critère de Cauchy (C). La famille $(\|x_i\|)_{i\in I}$ étant sommable satisfait à (C), i.e. pour tout $\varepsilon>0$, il existe $J_0\in\mathscr{F}$ telle que, pour toute $H\in\mathscr{F}$ disjointe de J_0, $\sum_{i\in H}\|x_i\|<\varepsilon$, alors, d'après l'inégalité triangulaire, $\left\|\sum_{i\in H}x_i\right\|<\varepsilon$. □

4.4.3.* Proposition. — *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels, alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) ***$(x_i)_{i\in I}$ est absolument sommable ;***
(ii) ***$(x_i)_{i\in I}$ est sommable ;***
(iii) ***l'ensemble des valeurs absolues des sommes finies s_H est majoré.***

DÉMONSTRATION. — (i)⇒(ii) : d'après 4.4.2,

(ii)⇒(iii) : il existe $J_0\in\mathscr{F}$ telle que, pour toute $J\in\mathscr{F}$, $J_0\subset J$, on ait $|s-s_J|\leqslant 1$; pour toute $H\in\mathscr{F}$, on a $|s_{H\cup J_0}-s_H\leqslant\sum_{i\in J_0}|x_i|=b$;

$$|s_H|\leqq|s_H-s|+|s|\leqslant|s-s_{H\cup J_0}|+|s_{H\cup J_0}-s_H|+|s|\leqq 1+b+|s|.$$

(iii)⇒(i) : il existe $c\in\mathbf{R}$ tel que, pour toute $H\in\mathscr{F}$, on ait $s_H\in[-c,c]$; alors la somme des $x_i\geqslant 0$ pour $i\in H$ appartient à $[0,c]$ et la somme des $x_i\leqslant 0$, $i\in H$ appartient à $[-c,0]$, donc la somme des $|x_i|$, $i\in H$ appartient à $[0,2c]$; d'après 4.3.1, $(|x_i|)_{i\in I}$ est sommable. □

4.4.4.* Théorème. — *Dans tout espace normé E, de dimension finie, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) ***la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable ;***
(ii) ***la famille $(x_i)_{i\in I}$ est absolument sommable.***

DÉMONSTRATION. — E est un espace normé sur K, de dimension finie, donc est normé sur $\mathbf{R}$, de dimension finie.

(ii)⇒(i) D'après 4.4.2 car E est complet.

(i)⇒(ii) : E est de dimension finie n sur $\mathbf{R}$, donc c'est $\mathbf{R}^n$ muni d'une norme équivalente à $\|x\|=\sum_{p=1}^{n}|x^p|$ où $x=(x^1,\dots,x^n)\in\mathbf{R}^n$. D'après 4.4.3, à cause de (iii), l'absolue sommabilité d'une famille, pour une norme donnée, subsiste pour une norme équivalente ; alors il suffit d'établir l'assertion pour la norme ci-dessus.

La projection $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ définie par $x\mapsto x^p$ est linéaire continue ; d'après ***4.2.2.*** si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable ; la famille $(x_i^p)_{i\in I}$; $p\in[1,\dots,n]$, est sommable ; d'après 4.4.3, $(|x_i^p|)_{i\in I}$ est sommable, donc aussi $\left(\sum_{p=1}^{n}|x_i^p|\right)_{i\in I}=(\|x_i\|)_{i\in I}$, d'après 4.2.3. □

4.5. Séries entières convergentes

4.5.1. Pour $r=(r_1, \ldots, r_n)\in(\mathbf{R}_+)^n$, on associe, à chaque série formelle à n indéterminées $S(X)=\sum a_\alpha X^\alpha$, la famille de nombres positifs

$$(|a_\alpha| r^\alpha)_{\alpha\in\mathbf{N}^n}. \tag{4.1}$$

On désigne par Γ l'ensemble des points $r\in(\mathbf{R}_+)^n$ tels que (4.1) soit sommable Γ contient $\{0\}$. Pour tout $z=(z_1, \ldots, z_n)\in\mathbf{C}^n$ tel que $|z_j|\leqslant r_j$ et $r=(r_1, \ldots, r_n)\in\Gamma$, la famille $(a_\alpha z^\alpha)$ est absolument sommable d'après 4.3.2, donc sommable d'après 4.4.4.

On appelle *ensemble de convergence* de $S(X)$ l'ensemble Δ des points intérieurs à Γ dans $(\mathbf{R}_+)^n$. On dit que $S(X)$ est une *série entière convergente* si $\Delta\neq\emptyset$.

4.5.2. Les notions de séries de fonctions d'une variable complexe, de convergence simple, uniforme, normale (ch. 2, 0.1) s'étendent aux séries ci-dessus. Comme dans le cas $n=1$, on établit :

4.5.3.* Lemme d'Abel.** — ***S'il existe M tel que $|a_\alpha| r^\alpha\leqslant M$ et si $r'<r$, alors la série $S(z)=\sum a_\alpha z^\alpha$ converge normalement pour $|z|\leqslant r'$.

***4.5.4.* Corollaire.** — ***Si $r\in\Delta$, la série $S(z)$ converge normalement pour $|z|<r$; si $|z|\notin\bar{\Gamma}$, la série est divergente* (i.e. non convergente).**

4.6. Opérations sur les séries (entières) convergentes

4.6.1. Addition, multiplication

Soient S_1 et S_2 deux séries convergentes d'ensembles de convergence respectifs Δ_1 et Δ_2. Alors, les séries S_1+S_2 et $S_1\cdot S_2$ sont convergentes et leurs ensembles de convergence contiennent $\Delta_1\cap\Delta_2$. Le produit de S_1 par un élément de K est une série convergente d'ensemble de convergence Δ_1. Démonstration comme pour les séries convergentes à une variable. De sorte que *l'ensemble des séries convergente constitue une K-algèbre $K\{X\}$.*

4.6.2. Dérivations partielles

Soit $S=\sum a_\alpha X^\alpha$ une série formelle, par définition,

$$(\partial S/\partial X_j) = \sum \alpha_j a_\alpha X_1^{\alpha_1}\ldots X_j^{\alpha_j-1}\ldots X_n^{\alpha_n}$$

(série des dérivées).

Alors la série $(\partial S/\partial X_j)$ a même ensemble de convergence que la série S et, *si* $|z|$

appartient à l'ensemble de convergence de S, *on a* $(\partial S/\partial X_j)(z)=(\partial/\partial z_j)S(z)$. *En outre* $a_\alpha=(1/\alpha!)(\partial^\alpha S/\partial z^\alpha)(0)$ avec $\alpha!=\alpha_1!\ldots\alpha_n!$

Démonstration comme pour les séries convergentes à une variable.

4.6.3. Il résulte de 4.6.2 que *la somme d'une série convergente* $S(z)$ *est une fonction holomorphe* pour $|z|$ dans l'ensemble de convergence de S.

5. Applications de la formule de Cauchy

5.1. Développement d'une fonction holomorphe en série entière ; inégalités de Cauchy

5.1.1.* Proposition. — *Posons $\partial^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{\alpha_n}$. ***Soit*** Ω ***un ouvert de*** $\mathbf{C}^n$, ***pour toute*** $u\in\mathcal{O}(\Omega)$, ***pour tout*** $z\in\Omega$, ***on a :***

$$\partial^\alpha u(z)=\frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\int_{b_0D}\frac{u(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\,\mathrm{d}\zeta_1\ldots\mathrm{d}\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)^{\alpha_1+1}\ldots(\zeta_n-z_n)^{\alpha_n+1}} \tag{5.1}$$

où D ***est un polydisque ouvert contenant*** z ***et relativement compact dans*** Ω.

DÉMONSTRATION. Cela explicite la dérivation sur le signe somme décrite dans la démonstration de 3.3. □

5.1.2.* Théorème. — *Si u ***est holomorphe dans le polydisque ouvert*** $D(w\,;\,r)$ ***et continue sur*** $\overline{D(w\,;\,r)}$, $u(z)$ ***est développable en série entière convergente en*** $(z-w)$ ***dans*** $D(w\,;\,r)$ ***; plus précisément***

$$u(z)=\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n}\frac{\partial^\alpha u(w)}{\alpha!}(z-w)^\alpha \tag{5.2}$$

sur $D(w\,;\,r)$, ***la convergence étant normale sur tout*** $\overline{D(w\,;\,r')}$ ***avec*** $r'<r$. ***La formule* (5.2) *signifie que*** $u(z)$ ***est égale à son développement de Taylor.***

DÉMONSTRATION. — Par le changement de variable $z-w\mapsto z$, $U(z)$ étant la nouvelle expression de u, on est ramené à démontrer

$$U(z)=\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n}\frac{\partial^\alpha U(0)}{\alpha!}z^\alpha.$$

La série

$$\frac{1}{(\zeta_1-z_1)\ldots(\zeta_n-z_n)}=\frac{1}{\zeta_1\ldots\zeta_n}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z_1}{\zeta_1}\right)\ldots\left(1-\frac{z_n}{\zeta_n}\right)}=\frac{1}{\zeta_1\ldots\zeta_n}\sum\frac{z^\alpha}{\zeta^\alpha}$$

converge normalement pour $(\zeta,z)\in b_0D(0,r)\times\overline{D(0,r')}$. Alors, après multiplication par $U(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$, on peut intégrer terme à terme dans la formule intégrale de Cauchy.

D'autre part, d'après 5.1.1, on a

$$\partial^\alpha U(0) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{b_0 D} U(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \prod_{j=1}^{n} \zeta_j^{-\alpha_j - 1} \, d\zeta_1 \ldots d\zeta_n. \quad \square \tag{5.3}$$

5.1.3. Inégalités de Cauchy

Si u est holomorphe et $|u| \leqslant M$ dans le polydisque $D(0\ ;\ r)$, alors

$$|\partial^\alpha u(0)| \leqslant M\alpha!\, r^\alpha.$$

DÉMONSTRATION. — On considère (5.3) dans un polydisque $D' = D(0\ ;\ r')$ concentrique à D, relativement compact dans D ; alors u est continue sur $\bar{D}'$ et $|u| \leqslant M$ sur $\bar{D}'$. On a $r' < r$; soit $\zeta_k = r'_k e^{i\theta_k}$; $d\zeta_k = i r'_k e^{i\theta_k} \, d\theta_k$; $\dfrac{d\zeta_k}{\zeta_k^{\alpha_k+1}} = \dfrac{i}{r_k'^{\alpha_k}} e^{-i\alpha_k\theta_k} \, d\theta_k$; alors

$$|\partial^\alpha u(0)| = \frac{1}{(2\pi)^n} \alpha! \left| \int_{b_0 D'} u(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \prod_{j=1}^{n} \zeta_j^{-\alpha_k - 1} \, d\zeta_1 \ldots d\zeta_n \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} \alpha! \, M (2\pi)^n r_1'^{-\alpha_1} \ldots r_n'^{-\alpha_n}.$$

L'inégalité étant valable pour tout $r' < r$, on a :

$$|\partial^\alpha u(0)| \leqslant \alpha! M \cdot r^{-\alpha}. \quad \square$$

5.2. Théorème d'identité ; principe du module maximum

5.2.1.* Théorème d'identité. — *Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe Ω de $\mathbf{C}^n$; alors s'il existe un ouvert non vide U de Ω tel que $f|U = g|U$, on a $f = g$.

5.2.2. Conséquence

Soient U_1, U_2 deux ouverts de Ω tels que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$; $f_1 \in \mathcal{O}(U_1)$, $f_2 \in \mathcal{O}(U_2)$ égales sur $U_1 \cap U_2$, alors il existe une fonction unique $f \in \mathcal{O}(U_1 \cup U_2)$ telle que $f|U_1 = f_1$, $f|U_2 = f_2$. $\square$

Cette propriété est appelée *principe du prolongement analytique.*

5.2.3.* Lemme. — *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbf{C}^n$ et $u \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle qu'il existe $z_0 \in \Omega$ avec $\partial^\alpha u(z_0) = 0$, pour tout multi-indice α, alors $u = 0$ sur Ω.

DÉMONSTRATION. — $E = \{z \in \Omega\ ;\ \partial^\alpha u(z) = 0$, pour tout $\alpha\}$ est un fermé de Ω. Si $w \in E$, il existe un polydisque ouvert, centré en w, d'adhérence contenue dans Ω ; d'après 5.1.2, u est nulle sur ce polydisque, donc E est ouvert ; $z_0 \in E$, donc $E \neq \emptyset$; comme Ω est connexe, on a : $E = \Omega$. $\square$

5.2.4. DÉMONSTRATION DE 5.2.1. — Soit $z_0 \in U$; U étant ouvert, $u = f - g$ a toutes ses dérivées partielles (par rapport à x_k, y_k, $k = 1, \ldots, n$) nulles en z_0, donc, en particulier $\partial^\alpha u(z_0) = 0$ pour tout α ; d'après 4.2.3, on a $u = 0$ sur Ω. □

5.2.5. **Théorème du module maximum.** — ***Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbf{C}^n$, si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et s'il existe $w \in \Omega$ tel que $|f(z)| \leqslant |f(w)|$ pour tous les points z d'un voisinage ouvert de w, alors $f(z) = f(w)$ pour tout $z \in \Omega$.***

5.2.6. **Lemme.** — ***Pour tout polydisque $D = D(w\ ;\ r) \subset\subset \Omega$, on a : $V(D)|f(w)| \leqslant \int_D |f(\zeta)| \mathrm{d}V(\zeta)$, où $V(D)$ est le volume de D et $\mathrm{d}V$ l'élément de volume de $\mathbf{C}^n$.***

DÉMONSTRATION. — La formule de Cauchy entraîne

$$V(D) f(w) = \int_D f(\zeta)\, \mathrm{d}V(\zeta) \tag{5.4}$$

pour $n = 1$, (5.4) se déduit de la propriété de la moyenne pour $\varrho \in [0, r_1]$

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + \varrho_1 e^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta$$

$$\pi r_1^2 f(w) = 2\pi f(w) \int_0^{r_1} \varrho\, \mathrm{d}\varrho = \int_{D(w;\, r_1)} f(\zeta)\, \mathrm{d}V(\zeta).$$

La formule (5.4) pour n quelconque s'en déduit par récurrence sur n. Alors $V(D)|f(w)| = \left|\int_D f(\zeta)\, \mathrm{d}V(\zeta)\right| \leqslant \int_D |f(\zeta)|\, \mathrm{d}V(\zeta)$. □

5.2.7. DÉMONSTRATION DE 5.2.5. — Soit $D = D(w\ ;\ r)$ un polydisque ouvert tel que, pour tout $z \in D$, on ait $|f(w)| - |f(z)| \geqslant 0$. Alors

$$0 \leqslant \int_D (|f(w)| - |f(\zeta)|)\, \mathrm{d}V(\zeta) = V(D)\, |f(w)|$$
$$- \int_D |f(\zeta)|\, \mathrm{d}V(\zeta) \leqslant 0, \text{ d'après 5.2.6 ;}$$

il en résulte $|f(w)| - |f(z)| = 0$ pour tout $z \in D$; d'après 2.2, f est constante sur D, donc $f(z) = f(w)$ et, d'après le théorème d'identité (5.2.1), f est constante sur Ω. □

5.3. Lemme de Schwarz

5.3.1. D'après 5.1.2, toute fonction holomorphe dans un polydisque ouvert $D = D(w\ ;\ r)$ est égale à une série entière en $(z - w)$ normalement convergente sur tout compact de D. Inversement, toute série entière en $(z - w)$ dans D, absolument convergente sur $\bar{D}' = \bar{D}(w\ ;\ r')$, pour tout $r' < r$ est une fonction holomorphe dans D (4.6.3).

5.3.2. **Lemme de Schwarz.** — ***Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\bar{D}(0\ ;\ r)$; $r = (r, \ldots, r)$, d'ordre k en 0 et telle que $|f(z)| \leqslant M$ sur $\bar{D}(0\ ;\ r)$. Alors, on a***

$$|f(z)| \leqslant M |z/r|^k \tag{5.5}$$

sur $\bar{D}(0\ ;\ r)$.

DÉMONSTRATION. — $f(z)=p_k(z)+\dots$; $p_k\neq 0$. Pour $z\neq 0$ fixé dans $\bar{D}(0\ ;\ r)$ et pour $t\in\mathbf{C}$, $|t|\leqslant r$, on pose $g(t)=t^{-k}f(tz/|z|)$; alors g a le développement de Taylor

$$g(t)=p_k(z/|z|)+p_{k+1}(z/|z|)t+\dots\ ;$$

par hypothèse, on a $f(tz/|z|)\leqslant M$, donc $|g(t)|\leqslant Mr^{-k}$ pour $|t|=r$; alors, d'après le théorème du module maximum dans $\mathbf{C}$ (ch. 2, 3.4), on a $|g(t)|\leqslant Mr^{-k}$ pour $|t|\leqslant r$; en particulier, pour $t=|z|$, on a : $|z|^{-k}|f(z)|=|g(z)|\leqslant Mr^{-k}$. □

5.3.3. **Remarque.** — Dans les hypothèses de 3.5 du chapitre 2, on retrouve bien le lemme de Schwarz à une variable.

5.4. Théorème de Jensen. — ***Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\bar{D}=\bar{D}(0\ ;\ r)$ dans $\mathbf{C}^n$. Alors, si $f(0)\neq 0$, $\log|f|$ est intégrable sur $\bar{D}$ et, dans les notations de* 5.2.6, *on a :***

$$\textbf{(5.6)}\qquad (1/V(D))\int_{\bar{D}}\log|f|\,dV\geqslant\log|f(0)|.$$

DÉMONSTRATION. — *Cas* $n=1$. $|f|=(f\bar{f})^{1/2}$; en dehors des zéros de f, on a $\log|f|=(1/2)(\log f+\log\bar{f})$ et $d'd''\log|f|=0$, donc $\log|f|$ est harmonique et possède la propriété de la moyenne (ch. 6, 4.5.2), alors, si f n'a pas de zéro dans $\bar{D}$ on a

$$(5.7)\qquad \log|f(0)|=(1/2\pi)\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta.$$

La relation (5.7) reste valide si f a des zéros sur $\{z\in\mathbf{C},\ |z|=r\}$, en effet, soit $re^{i\theta}$ un tel zéro supposé unique de multiplicité m, alors $f(z)(z-re^{i\theta_0})^{-m}$ est sans zéro sur $\bar{D}$; il suffit de montrer que $\log r=(1/2\pi)\int_0^{2\pi}\log|re^{i\theta}-re^{i\theta_0}|\,d\theta$, i.e.

$$\int_0^{2\pi}\log|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|\,d\theta=\int_0^{2\pi}\log|e^{i\theta}-1|\,d\theta=\int_0^{\pi}\log 2\sin x\,dx=0,$$

par application du théorème de Cauchy.

Les zéros de f dans $\bar{D}$ sont en nombre fini ; soient $a_1,\dots,a_p$ les zéros de f dans $D(0\ ;\ \varrho)$, $\varrho\leqslant r$, chacun étant répété un nombre de fois égal à sa multiplicité. Alors

$$F(z)=f(z)\prod_{j=1}^{p}\frac{\varrho^2-\bar{a}_j z}{\varrho(z-a_j)}$$

est sans zéro dans D et $|F(z)|=|f(z)|$ sur $|z|=\varrho$. D'après le début de la démonstration

$$\log|F(0)|=(1/2\pi)\int_0^{2\pi}\log|f(\varrho e^{i\theta})|\,d\theta$$

d'où

$$\log|f(0)|=-\sum_{j=1}^{p}\log\left(\frac{\varrho}{|a_j|}\right)+(1/2\pi)\int_0^{2\pi}\log|f(\varrho e^{i\theta})|\,d\theta,$$

en particulier, comme $|a_j|<r$, pour $j=1,\dots,p$, on a

$$(5.8)\qquad \log|f(0)|\leqslant(1/2\pi)\int_0^{2\pi}\log|f(\varrho e^{i\theta})|\,d\theta,$$

et

$$\pi r^2 \log |f(0)| = \log |f(0)| \int_0^r \varrho \, d\varrho \leq \int_{D(w;\, r)} \log |f(\zeta)| \, dV(\zeta) \, ;$$

c'est la formule (5.6) pour $n=1$.

Cas $n \geq 2$: pour $\varrho_1 < r_1$, on a, d'après (5.8),

$$\log |f(0)| \leq (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \log |f(\varrho_1 e^{i\theta_1}, 0, \ldots, 0)| \, d\theta_1 .$$

$\log f(\varrho_1 e^{i\theta_1}, 0, \ldots, 0)$ est fini pour presque tout θ_1 ; pour un tel θ_1, on a $\log |f(\varrho_1 e^{i\theta_1}, 0, \ldots, 0)| \leq (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \log |f(\varrho_1 e^{i\theta_1}, \varrho_2 e^{i\theta_2}, 0, \ldots, 0)| \, d\theta_2$ avec $\varrho_2 < r_2$, d'où, par récurrence sur n,

$$(5.9) \qquad (2\pi)^n \log |f(0)| \leq \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \log |f(\varrho_1 e^{i\theta_1}, \ldots, \varrho_n e^{i\theta_n})| \, d\theta_1 \ldots d\theta_n$$

pour $\varrho_j < r_j$, $j=1, \ldots, n$.

En intégrant ensuite par rapport à $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ les deux membres de (5.9) multipliés par $\prod_{j=1}^{n} \varrho_j$, on obtient

$$(5.10) \qquad V(D) \log |f(0)| \leq \int_0^{r_1} \cdots \int_0^{r_n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \log |f(\varrho_1 e^{i\theta_1}, \ldots, \varrho_n e^{i\theta_n})| \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{n} \varrho_j \, d\theta_1 \ldots d\theta_n \, d\varrho_1 \ldots d\varrho_n .$$

Reste à montrer que $\log |f|$ est intégrable par rapport à dV, alors (5.10) entraînera (5.6) par le théorème de Fubini.

Soit $L_m = \max(-m, \log |f|)$, pour $m \in \mathbf{N}$. Alors $-m \leq L_m$, la fonction L_m est mesurable et la fonction L_m est intégrable par rapport à dV ; d'après le théorème de Fubini, $\int L_m \, dV$ est l'intégrale itérée. D'autre part $\log |f| \leq L_m$; d'après (5.9), on a

$$(5.11) \quad V(D) \log |f(0)| \leq \int_0^{r_1} \cdots \int_0^{2\pi} L_m \prod_{j=1}^{n} \varrho_j \, d\theta_1 \ldots d\theta_n \, d\varrho_1 \ldots d\varrho_n = \int L_m \, dV.$$

La suite de fonctions L_m est décroissante, l'intégrale du second membre de (5.11) est bornée inférieurement, enfin $L_m(z) \searrow \log |f(z)|$, pour tout $z \in \bar{D}$, quand $m \to +\infty$. Alors, d'après le théorème de la convergence monotone $\log |f|$ est intégrable par rapport à dV et la formule (5.6) est établie. □

5.4.1.* Corollaire. — *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbf{C}^n$ et $0 \neq f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Alors $Z(f) = \{z \in \Omega \, ; f(z) = 0\}$ est de mesure de Lebesgue $2n$-dimensionnelle nulle.

Démonstration. — On a $\overset{\circ}{\widehat{Z(f)}} = \emptyset$, sinon f coïnciderait avec la fonction 0 sur un ouvert de Ω et, d'après le théorème d'identité (5.2.1), serait nulle sur Ω. Alors $\Omega \setminus V$ est dense dans Ω, donc il existe une suite (x_n) de points de Ω telle que $f(x_n) \neq 0$ et une suite (Δ_n) de polydisques, où Δ_n est centré en x_n, telle que $\bigcup_n \bar{\Delta}_n = \Omega$. D'après l'inégalité de Jensen, on a

$$\int_{\Delta_n} \log|f|\,dV \geqslant V(\Delta_n)\log|f(x_n)| > -\infty,$$

donc f ne s'annulle dans $\bar{\Delta}_n$ sur aucun ensemble de mesure $2n$-dimensionnelle strictement positive, i.e. $Z(f)\cap\bar{\Delta}_n$ est de mesure nulle, donc aussi $Z(f)= = \bigcup_{n=1}^{\infty}(Z(f)\cap\bar{\Delta}_n)$. □

6. Introduction au problème du d″

On utilise, dans ce numéro, les notions de variété différentielle, de forme différentielle et leurs propriétés définies et établies dans l'Appendice.

6.1. Formes différentielles sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$

6.1.1. Soient $(z_1, \ldots, z_n)$ les coordonnées complexes de $\mathbf{C}^n$. Alors toute forme différentielle sur un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$ peut être exprimée à l'aide des différentielles dz_j, $d\bar{z}_j$, compte tenu de $dz_j = dx_j + i\,dy_j$; $d\bar{z}_j = dx_j - i\,dy_j$; $x_j, y_j \in \mathbf{R}$ étant les parties réelle et imaginaire de z_j, $j=1, \ldots, n$.

Toute r-forme différentielle φ sur Ω s'écrit $\varphi = \sum_{p+q=r} \varphi^{p,q}$ où

$$\varphi^{p,q} = \sum_{j_1\ldots j_p l_1\ldots l_q} \varphi_{j_1\ldots j_p l_1\ldots l_q}\, dz_{j_1}\wedge\ldots\wedge dz_{j_p}\wedge d\bar{z}_{l_1}\wedge\ldots\wedge d\bar{z}_{l_q}\ ;$$

$\varphi^{p,q}$ est dite de *type* (p, q) ; on dit aussi que $\varphi^{p,q}$ est une (p, q)-forme. On désigne par $\mathscr{E}^r(\Omega)$, $\mathscr{E}^{p,q}(\Omega)$ les $\mathbf{C}$-espaces vectoriels et les $\mathcal{O}(\Omega)$-modules des formes différentielles de degré r, resp. de type (p, q), de classe C^∞.

Une p-forme différentielle sur Ω est dite *holomorphe* si elle est de type $(p, 0)$ et si ses coefficients sont holomorphes.

6.1.2. Comme sur une surface de Riemann (ch. 6, 1.8.3), sur Ω, à tout ouvert U, on associe les $\mathbf{C}$-espaces vectoriels $\mathscr{E}(U)$ des fonctions C^∞ sur U, $\mathscr{E}^r(U)$ et $\mathscr{E}^{(p,q)}(U)$ Avec les homomorphismes de restriction, cela définit les faisceaux $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^r$, $\mathscr{E}^{p,q}$ respectivement. On définit, de la même façon, le faisceau Ω^p des p-formes différentielles holomorphes et, pour $p=0$, le faisceau $\mathcal{O}$ des fonctions holomorphes.

***6.1.3. Les opérateurs* d′ *et* d″**

Soit $\psi = \sum_\alpha a_\alpha \, dx_\alpha = \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} a_\alpha \, dx_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\alpha_r}$ une r-forme différentielle de classe C^1 sur Ω, on rappelle que la différentielle extérieure $d\psi$ de ψ est la $(r+1)$-forme différentielle $d\psi = \sum_\alpha da_\alpha \wedge dx_\alpha$; comme en dimension $n=1$, on pose

$$\partial/\partial z_j = (1/2)(\partial/\partial x_j - i\partial/\partial y_j) \; ; \quad \partial/\partial \bar{z}_j = (1/2)(\partial/\partial x_j + i\partial/\partial y_j) \; ;$$

$$d' = \sum_{j=1}^{n} (\partial/\partial z_j) \, dz_j \; ; \quad d'' = \sum_{j=1}^{n} (\partial/\partial \bar{z}_j) \, d\bar{z}_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Pour toute forme différentielle ψ sur Ω, comme ci-dessus, on pose

$$d'\psi = \sum_\alpha d'a_\alpha \wedge dx_\alpha \; ; \quad d''\psi = \sum_\alpha d''a_\alpha \wedge dx_\alpha .$$

On vérifie immédiatement que les propriétés (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) du Chapitre 1 sont valides pour les opérateurs d, d′, d″.

Une forme différentielle ω telle que $d''\omega = 0$ est dite *d″-fermée*.

6.1.4.* Lemme. — *Soit D un ouvert de* C, *pour toute* 1*-forme différentielle* C^∞, *de type* (0, 1), $\omega = f \, d\bar{z}$, *à support compact dans D, il existe une fonction g,* C^∞ *dans D telle que* $d''g = \omega$ *; en outre, si f est* C^∞ *ou holomorphe par rapport à des paramètres en nombre fini, il en est de même de g.

DÉMONSTRATION. — La première assertion résulte de 5.3.3 du chapitre 1 ; la seconde de la dérivabilité de $g(z) = (2\pi i)^{-1} \int (\zeta - z)^{-1} f(\zeta) \, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$, sous le signe somme, par rapport aux paramètres dont dépend f. □

6.2. Théorème (lemme du d″). — *Soient* $D \subset\subset \mathbf{C}^n$ *un polydisque,* ω *une* (p, q)*-forme différentielle* C^∞ *dans un voisinage ouvert de* $\overline{D}$. *Alors, si* $q \geqslant 1$ *et si* $d''\omega = 0$, *il existe une* $(p, q-1)$*-forme différentielle* η, C^∞ *dans D, telle que* $\omega = d''\eta$ *dans D.*

DÉMONSTRATION. — Soit ν le plus petit entier tel que l'expression de ω fasse intervenir seulement les $d\bar{z}_j$ pour $j \leqslant \nu$.

Si $\nu = 0$, alors $\omega = 0$, car $q \geqslant 1$ et $\eta = 0$ est une solution.

Supposons le théorème établi pour $\nu - 1 \geqslant 0$ et prouvons-le pour ν. On a $\omega = d\bar{z}_\nu \wedge \wedge \alpha + \beta$ où α et β sont indépendantes de $d\bar{z}_\nu$; mais

$$d''\omega = d\bar{z}_\nu \wedge d''\alpha + d''\beta = 0. \tag{6.1}$$

Posons $d''_{z_\mu} = (\partial/\partial \bar{z}_\mu) \, d\bar{z}_\mu$; alors (6.1) entraîne $d''_{z_\mu}\alpha = d''_{z_\mu}\beta = 0$ pour $\mu \geqslant \nu + 1$, i.e. les coefficients de α et de β sont holomorphes en z_μ pour $\mu \geqslant \nu + 1$.

Tout coefficient f de α est C^∞ en z_ν dans un voisinage ouvert D'_ν de $\overline{D}_\nu$, est C^∞ en $z_1, \ldots, z_{\nu-1}$ et holomorphe en $z_{\nu+1}, \ldots, z_n$ dans un voisinage ouvert de $\overline{D}_1 \times \ldots \times \widehat{\overline{D}_\nu} \times \ldots \times \overline{D}_n$. Soit ψ_ν une fonction C^∞ à support compact dans D'_ν dont la restriction à un voisinage de $\overline{D}_\nu$ est égale à 1 ; alors, pour $z_1, \ldots, \hat{z}_\nu, \ldots, z_n$ fixés, $f\psi_\nu$ est C^∞ à support compact dans **C** et égale à f sur $\overline{D}_\nu$; d'après 6.1.4, il existe une fonction g sur D_ν telle que $d''_{z_\nu} g = f \, d\bar{z}_\nu$, g étant C^∞ en $z_1, \ldots, z_\nu$ et holomorphe en $z_{\nu+1}, \ldots, z_n$; en remplaçant chaque coefficient f de α par la fonction g correspondante, on obtient une forme différentielle γ telle que $d''\gamma = d\bar{z}_\nu \wedge \alpha + \delta$ où δ fait intervenir seulement $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_{\nu-1}$. Soit $\varphi = \omega - d''\gamma = \beta - \delta$; on a $d''\varphi = d''\omega - d''d''\gamma = 0$ et φ ne fait intervenir que $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_{\nu-1}$, donc, d'après l'hypothèse de récurrence sur ν, il existe ψ, C^∞ de type $(p, q-1)$ sur D, telle que $\varphi = d''\psi$ et $\omega = d''(\gamma + \psi)$.

Pour $\nu = n$, obtient le théorème. □

6.3. Lemme du d″ dans un polydisque ouvert. — ***Soient D un polydisque ouvert de $\mathbf{C}^n$ centré en 0 et ω une (p, q)-forme différentielle, $q \geq 1$, de classe C^1, d″-fermée dans D ; alors, il existe une $(p, q-1)$-forme différentielle, de classe C^1 sur D telle que $d''\eta = \omega$ dans D ; η est déterminée à l'addition près d'une forme d″-fermée.***

DÉMONSTRATION. — Soit $(D^s)_{s \in \mathbf{N}}$ une suite de polydisques tels que $D^s = D_1^s \times \ldots \times D_n^s$ où D_j^s est un disque de $\mathbf{C}$, que, pour tout $s \in \mathbf{N}$, $\bar{D}_j^s \subset D_j^{s+1}$; $j = 1, \ldots, n$ et que $\bigcup_s D^s = D$.

(a) $q = 1$: la démonstration de 2.5 du chapitre 2 se généralise immédiatement en utilisant le développement de Taylor en série de polynômes d'une fonction holomorphe dans D (5.1.2) et le théorème de convergence d'une suite de fonctions holomorphes qui sera établi au n° 7.

(b) $q \geq 2$. On considère deux autres suites de polydisques (U^s), (V^s) emboîtés centrés en 0 tels que $\bar{D}^s \subset U^s \subset \bar{U}^s \subset V^s \subset \bar{V}^s \subset D$.

D'après 6.2, pour tout s, il existe $\eta_s \in \Gamma(V^s, \mathscr{E}^{p,q-1})$ avec $\omega | V^s = d''\eta_s$;

$$\eta'_{s+1} \in \Gamma(V^{s+1}, \mathscr{E}^{p,q-1}) \quad \text{avec} \quad \omega | V^{s+1} = d''\eta'_{s+1}.$$

Alors $d''(\eta_s - \eta'_{s+1}) = 0$ sur V^s.

Pour $q \geq 2$, il existe $\gamma_s \in \Gamma(U^s, \mathscr{E}^{p,q-2})$ tel que $\eta_s - \eta'_{s+1} = d''\gamma_s$ sur U^s ; $\gamma_s | D^s$ se prolonge en une forme C^∞ sur V^{s+1} que l'on note encore γ_s. Alors $\eta_{s+1} = \eta'_{s+1} + d''\gamma_s \in \Gamma(V^{s+1}, \mathscr{E}^{p,q-1})$ et $\eta_{s+1} = \eta_s$ sur D^s ; de plus, sur D^{s+1}, $d''\eta_{s+1} = d''\eta'_{s+1} = \omega | D^{s+1}$.

Par récurrence sur $s \in \mathbf{N}$, on a établi l'existence d'une suite (η_s), $\eta_s \in \Gamma(D^s, \mathscr{E}^{p,q-1})$ telle que $\eta_{s+1} | D^s = \eta_s$ et que $d''\eta_s = \omega | D^s$, donc il existe $\eta \in \Gamma(D, \mathscr{E}^{p,q-1})$ telle que $\eta | D^s = \eta_s$ et $d''\eta = \omega$ sur D. □

6.4. Variétés analytiques complexes

6.4.1. On identifie $\mathbf{C}^n$ à $\mathbf{R}^{2n}$ par le $\mathbf{R}$-isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\imath : z_j = x_j + iy_j \mapsto (x_j, y_j); \quad j = 1, \ldots, n.$$

Soit X un espace topologique séparé, réunion dénombrable de compacts, muni d'un atlas $\mathfrak{A}$ dont les cartes (h, U) satisfont aux conditions suivantes :

1) $h(U)$ est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ identifié à $\mathbf{R}^{2n}$ par $\imath$;

2) si (h, U), $(h', U') \in \mathfrak{A}$ et si $U \cap U' \neq \emptyset$, l'homéomorphisme $h' \circ h^{-1}$ est une application biholomorphe (2.3) de l'ouvert $h(U \cap U')$ de $\mathbf{C}^n$ sur l'ouvert $h'(U \cap U')$ de $\mathbf{C}^n$.

$\mathfrak{A}$ est appelé un *atlas analytique complexe, h* une *carte holomorphe* ; deux tels atlas sont dits *équivalents* si leur réunion est un atlas analytique complexe. X muni d'une classe d'équivalence d'atlas analytiques complexes est appelé une *variété analytique complexe* de *dimension complexe n.*

Pour tout $q \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, X est aussi une variété différentielle de classe C^q lorsqu'on la munit de la classe d'équivalence d'atlas de classe C^q contenant $\mathfrak{A}$ (Appendice 1.4) ; cette variété est dite la structure différentielle sous-jacente à la structure analytique complexe de X.

6.4.2. On définit les applications holomorphes (ou applications analytiques ou morphismes) de variétés analytiques complexes comme les applications différentiables de variétés différentielles (Appendice 1.6), les cartes et les applications d'ouverts de $\mathbf{C}^n$ et de $\mathbf{C}^m$ étant holomorphes. On definit aussi la variété analytique complexe produit de deux variétés analytiques complexes à l'aide des produits d'une carte de l'une et d'une carte de l'autre.

Alors les formes différentielles de degré r, resp. de type (p, q), les opérateurs d, d′, d″ définis d'abord sur des ouverts de $\mathbf{C}^n$, sont définissables sur des ouverts de cartes et invariants par changement de cartes holomorphes, donc ont un sens sur une variété analytique complexe.

6.4.3. Sur une variété analytique complexe X on définit, de la même façon que sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$, les faisceaux $\mathcal{O}$, $\mathcal{E}$ des fonctions holomorphes, resp. C^∞ et les faisceaux $\mathcal{E}^r$, $\mathcal{E}^{p,q}$, Ω^p des formes différentielles C^∞ de degré r, resp. de type (p, q) resp. holomorphes de degré p.

6.5. Théorème de de Rham pour d″

6.5.1. Soit X une variété analytique complexe. On appelle groupe de d″-cohomologie de type (p, q) de X le $\mathbf{C}$-espace vectoriel quotient

$$H^{p,q}(X, \mathbf{C}) = Z^{p,q}(X, \mathbf{C})/B^{p,q}(X, \mathbf{C})$$

où
$$Z^{p,q}(X, \mathbf{C}) = \operatorname{Ker}\left(\mathcal{E}^{p,q}(X) \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{p,q+1}(X)\right)$$

$$B^{p,q}(X, \mathbf{C}) = \operatorname{Im}\left(\mathcal{E}^{p,q-1}(X) \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{p,q}(X)\right).$$

6.5.2. **Lemme. —** ***Sur une variété analytique complexe X, on a*** $H^r(X, \mathcal{E}^{p,s}) = 0$, ***pour*** $r \geqslant 1$.

DÉMONSTRATION. — Généralisation immédiate de la démonstration de 1.8.4 du chapitre 6. □

6.5.3. **Théorème. —** ***Dans les notations de* 6.4.3 *et de* 6.5.1, *sur une variété analytique complexe X, pour tout*** $(p, q) \in \mathbf{N}^2$, ***il existe un isomorphisme canonique***

$$H^{p,q}(X, \mathbf{C}) \xrightarrow{\approx} H^q(X, \Omega^p).$$

DÉMONSTRATION. — La suite de morphismes

$$(6.2)\qquad 0 \to \Omega^p \xrightarrow{i} \mathcal{E}^{p,0} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{p,1} \xrightarrow{d''} \dots \to \mathcal{E}^{p,q} \to \dots,$$

où i est l'inclusion, est exacte parce que les $(p, 0)$-formes d″-fermées sont les p-formes holomorphes et à cause du Lemme du d″ (6.2) ; c'est une résolution du faisceau Ω^p. Alors, le Lemme 6.5.2 entraîne que l'homomorphisme j (1.10) du théorème de de Rham abstrait (ch. 6, 1.8.2), pour la résolution (6.2), est un isomorphisme. □

7. Espace des fonctions holomorphes

Soient Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et V un ouvert relativement compact de Ω ; on désigne par $\|\ \|_{L^1(V)}$ la semi-norme $u \mapsto \int_V |u|\, d\sigma_n$ où $d\sigma_n$ est la mesure de Lebesgue de $\mathbf{C}^n$ et u une fonction $d\sigma_n$-intégrable.

7.1. Théorème. — ***Pour tout compact K de Ω, pour tout voisinage V de K, relativement compact dans Ω, pour tout multi-indice α, il existe une constante c_α telle que, pour tout $u \in \mathcal{O}(\Omega)$, on ait***

$$(7.1)\qquad \sup_{z\in K} |\partial^\alpha u(z)| \leqslant c_\alpha \|u\|_{L^1(V)}.$$

DÉMONSTRATION. — (a) Supposons que V est un polydisque, alors $V = A^{n-1} \times A_n$ où A^{n-1} est un polydisque de $\mathbf{C}^{n-1}$, avec les coordonnées $(z_1, \dots, z_{n-1})$ et A_n un disque de $\mathbf{C}$ avec la coordonnée z_n ; on pose $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$. Pour $n=1$, c'est un cas particulier du théorème 1.2 du chapitre 3. Supposons la démonstration faite pour $n-1$; posons $\alpha = (\beta, \alpha_n)$ où $\beta \in \mathbf{N}^{n-1}$ et $\alpha_n \in \mathbf{N}$. Soient A'^{n-1}, resp. A'_n un polydisque, resp. un disque, ouverts tels que $K \subset A'^{n-1} \times A'_n$; $\bar{A}'^{n-1} \subset A^{n-1}$; $\bar{A}'_n \subset A_n$.

On a

$$\sup_{z\in K} |\partial^\alpha u(z)| = \sup_{z\in K} |\partial^{\alpha_n}/\partial z_n^{\alpha_n} \partial^\beta u(z)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{z_n \in \bar{A}'_n}\ \sup_{z' \in \bar{A}'^{n-1}} |\partial^{\alpha_n}/\partial z_n^{\alpha_n} \partial^\beta u(z)| \leqslant c_{\alpha_n} \sup_{z' \in \bar{A}'^{n-1}} \|\partial^\beta u(z' ; z_n)\|_{L^1(A_n)},$$

d'après 1.2 du chapitre 3, mais

$$\sup_{z' \in \bar{A}'^{n-1}} \|\partial^\beta u(z' ; z_n)\|_{L^1(A_n)} = \sup_{z'} \int_{A_n} |\partial^\beta u(z' ; z_n)|\, d\sigma_1 \leqslant$$

$$\leqslant c_\beta \int_{A_n} \Big(\int_{A^{n-1}} |u(z' ; z_n)|\, d\sigma_{n-1} \Big)\, d\sigma_1,$$

d'après l'hypothèse de récurrence,

$$= c_\beta \|u(z' ; z_n)\|_{L^1(A^{n-1}\times A)}.$$

Donc $\sup_{z\in K} |\partial^\alpha u(z)| \leqslant c_{\alpha_n} c_\beta \|u(z' ; z_n)\|_{L^1(V)}$.

(b) Soit V un voisinage de K relativement compact dans Ω. Il existe un recouvrement ouvert fini $(V_j)_{j\in J}$ de K par des polydisques bornés contenus dans V et un recouvrement ouvert de K par des polydisques $(U_j)_{j\in J}$ tel que, pour tout $j\in J$, $\overline{U}_j\subset V_j$. Alors $\overline{U}_j\cap K$ est un compact de V_j ; d'après (a), le théorème est vérifié pour le compact $\overline{U}_j\cap K$ de V_j, donc, l'ensemble J étant fini, pour le voisinage $V'=\bigcup_{j\in J} V_j$ de K et aussi pour V qui contient V'. □

7.2. Convergence d'une suite de fonctions holomorphes

7.2.1. **Proposition.** — ***Tout ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$ possède une suite exhaustive de compacts.***

Démonstration. — Même démonstration que pour 2.1 du chapitre 3. □

7.2.2. **Théorème.** — ***Soit (u_p) une suite de fonctions holomorphes sur Ω qui converge uniformément sur tout compact de Ω, vers une fonction u, alors $u\in\mathcal{O}(\Omega)$.***

Démonstration. — Généralisation immédiate de la démonstration de 1.3 du chapitre 3, compte tenu de 7.1, de la définition 2.1 des fonctions holomorphes sur Ω et de 7.2.1. □

7.2.3. **Théorème.** — ***Soit (u_p) une suite de fonctions holomorphes sur Ω telle que la suite (u_p) soit uniformément bornée sur tout compact de Ω ; alors, il existe une sous-suite de (u_p) qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers une limite $u\in\mathcal{O}(\Omega)$.***

Démonstration. — Le théorème résulte de 7.1 et 7.2.1 suivant la démonstration de 2.2 du chapitre 3. □

7.3. Espace des fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$

Comme pour $n=1$, $\mathcal{O}(\Omega)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (ou topologie compacte), (ch. 3, 3.4).

7.2.2 entraîne : *$\mathcal{O}(\Omega)$ est un espace de Fréchet.*

7.2.3 entraîne : *dans $\mathcal{O}(\Omega)$, toute partie fermée bornée est compacte.*

7.4. Cas des variétés analytiques complexes

Le théorème 7.1 a un sens dans un ouvert de carte holomorphe d'une variété analytique complexe X.

X étant, par définition (6.4.1), réunion dénombrable de compacts, 7.2.1 est valide pour X. Alors les théorèmes des nn° 7.2 et 7.3 sont valides pour X au lieu de Ω.

8. Singularités apparentes

8.1. Théorème d'extension de Riemann

8.1.1. Dans la suite, on appellera *domaine* de $\mathbf{C}^n$ tout ouvert connexe de $\mathbf{C}^n$.

Soit Ω un domaine de $\mathbf{C}^n$; une partie X de Ω est dite *mince* si, pour tout $z \in \Omega$, il existe un polydisque $D(z\,;\,r) \subset \Omega$ et une fonction holomorphe h dans $D(z\,;r)$ non nulle telle que $X \cap D(z\,;\,r) \subset Z(h) = \{y \in D(z\,;\,r)\,;\,h(y)=0\}$; $Z(h)$ est fermé dans $D(z\,;\,r)$ et d'après 5.4.1, d'intérieur vide.

Y étant une partie de Ω, une fonction f définie sur $\Omega \setminus Y$ est dite *localement bornée* dans Ω si, pour tout $z \in \Omega$, il existe un polydisque $D(z\,;\,r) \subset \Omega$ tel que la fonction f soit bornée sur $D_Y = D(z\,;\,r) \cap (\Omega \setminus Y)$; cela signifie : il existe une constante $A > 0$ telle que $|f(y)| \leqslant A$ pour tout $y \in D_Y$.

8.1.2.* Théorème. — *Soient X un ensemble mince d'un domaine Ω de $\mathbf{C}^n$ et f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus X$, localement bornée dans Ω. Alors, il existe une fonction unique $\tilde{f}$ holomorphe sur Ω qui prolonge f.

Pour $n=1$, c'est 4.3.3 du chapitre 2. La démonstration utilise la notion et les lemmes suivants :

8.1.3. Une fonction holomorphe h sur un ouvert U de $\mathbf{C}^n$ est dite *régulière d'ordre k en z_n* au point $w=(w_1, \ldots, w_n)$ si la fonction de z_n, $h(w_1, \ldots, w_{n-1}, z_n)$, holomorphe en z_n, a un zéro d'ordre k au point $z_n = w_n$.

8.1.4.* Lemme. — *Si $h \in \mathcal{O}(U)$ et est d'ordre $k < \infty$ au point w* (4.1), *alors, après un changement linéaire convenable de coordonnées dans $\mathbf{C}^n$, la fonction h est régulière d'ordre k en z_n au point w.

DÉMONSTRATION. — Supposons $w=0$, ce qui est possible par changement d'origine dans $\mathbf{C}^n$. On a $h(z) = \sum_{j=k}^{\infty} h_j(z)$; $h_k \neq 0$, où h_j est un polynôme homogène de degré j en $(z_1, \ldots, z_n)$. Soit $a=(a_1, \ldots, a_n)$ tel que

$$h_k(a_1, \ldots, a_n) \neq 0. \tag{8.1}$$

Alors, il existe un changement linéaire de coordonnées

$$z_j = a_j \zeta_n + \sum_{l=1}^{n-1} b_{jl} \zeta_l\,; \quad j = 1, \ldots, n$$

dont le déterminant des coefficients est non nul. On a $l(\zeta) = h(z(\zeta)) = l_k(\zeta) + l_{k+1}(\zeta) + \ldots$ où l_s est un polynôme homogène en $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ de degré s. De plus

$$l_k(0, \ldots, 0, \zeta_n) = \zeta_n^k h_k(a_1, \ldots, a_n) + \zeta_n^{k+1}(\ldots)\,;$$

la condition (8.1) montre que $l(\zeta)$ est d'ordre k en ζ_n au point $w=0$. □

8.1.5.* Lemme. — *Si $h \in \mathcal{O}\,(D(w\,;\,r))$ est régulière d'ordre k en z_n au point w, alors il existe $D(w\,;\,\delta) \subset\subset D(w\,;\,r)$ tel que, pour tout $a' = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in D(w'\,;\,\delta_1, \ldots, \delta_{n-1})$

avec $w'=(w_1, \ldots, w_{n-1})$, ***la fonction de*** z_n, $l_{a'}(z_n)=h(a_1, \ldots, a_{n-1}, z_n)$ ***ait exactement k zéros, comptés avec leurs multiplicités, dans*** $D(w_n ; \delta_n)$.

DÉMONSTRATION. — Après changement d'origine, on peut supposer $w=0$. Puisque les zéros de la fonction holomorphe $l_0(z_n)$ sont isolés, il existe $0<\delta_n<r_n$ tel que $l_0(z_n)\neq 0$ pour $z_n \in \bar{D}(0, \delta_n)$; $z_n \neq 0$. On pose $\inf_{|z_n|=\delta_n} |l_0(z_n)|=\varepsilon>0$; $h(z)$ étant continue au voisinage du compact $\{0, \ldots, 0\}\times\{|z_n|=\delta\}$, de $\mathbf{C}^n$, il existe des constantes δ_j, $(0<\delta_j<r_j$; $j=1, \ldots, n-1)$, telles que $|h(z)-h(0, \ldots, 0, z_n)|<\varepsilon$, pour $|z_j|<\delta_j$, $j=1, \ldots, n-1$; $|z_n|=\delta_n$. D'après le théorème de Rouché (ch. 2, 6.3), pour $|a_j|<\delta_j$, $j=1, \ldots, n-1$, les fonctions $l_{a'}(z_n)$ et $l_0(z_n)$ ont le même nombre de zéros dans $|z_n|<\delta_n$, soit k. □

8.1.6. DÉMONSTRATION DE 8.1.2. — Il suffit de prouver 8.1.2 pour $\Omega=D(w ; r)$, $X=Z(g)$, avec $g\in\mathcal{O}(D(w ; r))$ non nulle. Soit $w\in X$; on choisit les coordonnées pour que g soit régulière, d'un certain ordre k en z_n au point w (lemme 8.1.4). D'après 8.1.5, il existe $D(w; \delta)\subset\subset D(w ; r)$ tel que, pour $(z_1, \ldots, z_{n-1})\in D(w' ; \delta')$, $g(z_1, \ldots, z_n)$ ait k zéros dans $|z_n-w_n|<\delta_n$ et ne s'annule pas sur $|z_n-w_n|=\delta_n$. On considère

$$\tilde{f}(z) = (1/2\pi i)\int_{|\zeta_n-w_n|=\delta_n} (\zeta_n-z_n)^{-1}f(z_1, \ldots, z_{n-1}, \zeta_n)\, d\zeta_n \tag{8.2}$$

dans $D(w' ; \delta')$; pour $\zeta_n\in bD(w_n ; \delta_n)$, $(\zeta_n-z_n)^{-1}f(z_1, \ldots, z_{n-1}, \zeta)$, donc aussi $\tilde{f}$, est holomorphe en $(z_1, \ldots, z_{n-1})$ dans $D(w' ; \delta')$, mais $\tilde{f}$ est holomorphe en z_n, car $d''_{z_n}f=0$; enfin $\tilde{f}$ est continue dans $D(w ; \delta)$; d'après le lemme d'Osgood (3.4), $\tilde{f}\in\mathcal{O}(D(w ; r))$.

Pour $z'=(z_1, \ldots, z_{n-1})$ fixé, f est holomorphe en z_n dans $|z_n-w_n|<\delta_n$, sauf en un nombre fini de points d'après les propriétés de g, mais f est localement bornée dans $|z_n-w_n|<\delta_n$, alors, d'après le théorème d'extension en une variable, (ch. 2, 4.3.3), $f(z' ; z_n)$ a une extension qui ne peut être que $\tilde{f}(z' ; z_n)$ d'après le théorème d'identité en z_n (ch. 2, 2.1.2) ; si $\tilde{f}_1$ était un autre prolongement de f, $\tilde{f}_1-\tilde{f}$ serait nulle sur l'ouvert non vide $D(w ; \delta)\setminus X$, donc nulle sur $D(w ; \delta)$ d'après le théorème d'identité (5.2.1). □

8.1.7. **Corollaire.** — ***Si X est une partie mince d'un domaine U de*** $\mathbf{C}^n$, ***alors*** $U\setminus X$ ***est connexe.***

DÉMONSTRATION. — Supposons $U\setminus X$ non connexe, alors $U\setminus\bar{X}$ est non connexe, donc $U\setminus\bar{X}=\Omega_1\cup\Omega_2$ où Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts non vides, disjoints, de U ; la fonction f sur $U\setminus\bar{X}$ définie par $f|\Omega_1=1$ et $f|\Omega_2=2$ est holomorphe ; mais $U=\overline{(U\setminus\bar{X})}=\bar{\Omega}_1\cup\bar{\Omega}_2$; U étant connexe, les fermés $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$ de U ont une intersection non vide qui rencontre X ; soit $x\in X\cap\bar{\Omega}_1\cap\bar{\Omega}_2$, la fonction f est localement bornée et n'est pas prolongeable en x, ce qui contredit 8.1.2. □

8.1.8. Soit B une partie d'un domaine Ω de $\mathbf{C}^n$ et $f\in\mathcal{O}(\Omega\setminus B)$, on dira que B est une *singularité* de f ; s'il existe une fonction $\tilde{f}\in\mathcal{O}(\Omega)$ telle que $\tilde{f}|\Omega\setminus B=f$, on dit que f est une *extension* de f à Ω et, si $\tilde{f}$ est unique, que B est une *singularité apparente* de f. Le théorème 8.1.2 affirme que $f\in\mathcal{O}(\Omega\setminus X)$ a une extension unique à Ω, i.e. que X est une singularité apparente de f.

8.2. Théorèmes d'extension pour $n \geqslant 2$

8.2.1. **Théorème. —** ***Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage connexe U du bord de $D(0\,;r)$ dans $\mathbf{C}^n$. Alors, pour $n \geqslant 2$, il existe une unique fonction holomorphe $\tilde{f}$ dans $D(0\,;r)$ qui prolonge f.***

C'est un cas particulier d'un théorème de Hartogs. Le domaine de définition U de f présente un trou ; le théorème signifie que le domaine de définition de f peut être étendu en bouchant ce trou.

DÉMONSTRATION. — On a $bD(0\,;\,r) \subset U$; pour $z \in D(0\,;\,r)$, soit

$$\tilde{f}(z) = (1/2\pi i)\int_{|w|=r_n} (w-z_n)^{-1} f(z_1, \ldots, z_{n-1}, w)\,\mathrm{d}w\,;$$

cette intégrale a un sens parce que $f(z_1, \ldots, z_{n-1}, w)$ est définie pour $|z_k|<r_k$; $k=1, \ldots, n-1$ et $|w|=r_n$, car $bD(0\,;\,r)=D(0\,;\,r') \times bD(0\,:\,r_n)+\ldots$, où $D(0\,;r')$ est le polydisque de centre 0 et de rayon $r'=(r_1, \ldots, r_{n-1})$; en outre, f est holomorphe en z_n pour $|z_n|$ voisin de r_n ; $\tilde{f}$ est holomorphe en $(z_1, \ldots, z_{n-1})$ pour z_n fixé et elle est holomorphe en z_n, dans $D(0\,;\,r_n)$ pour $z_1, \ldots, z_{n-1}$ fixés ; en outre, elle est continue dans $D(0\,;\,r)$, donc, d'après, 3.4, $\tilde{f}$ est holomorphe dans $D(0\,;\,r)$.

Si $(z_1, \ldots, z_{n-1})$ est fixé, de sorte que $|z_k|$ soit assez voisin de r_k, pour $k=1, \ldots, n-1$, le disque fermé $|z_n| \leqslant r_n$ est contenu dans U, alors, d'après la formule de Cauchy en z_n, f et $\tilde{f}$ coïncident pour $|z_n|<r_n-\varepsilon$ avec $\varepsilon>0$ assez petit, donc sur un ouvert de $U \cap D(0\,;\,r)$ qui est connexe ; d'après le théorème d'identité, $\tilde{f}$ est unique et prolonge f à $D(0\,;\,r)$. □

8.2.2. **Corollaire. —** ***Pour $n \geqslant 2$, toute singularité isolée d'une fonction holomorphe de n variables est apparente.*** □

8.2.3. **Théorème. —** ***On considère les deux ouverts de*** $\mathbf{C}^2$

(A_1) $|z_1| < r_1\,;\quad |z_2| < \varepsilon\,;\quad 0 < \varepsilon < r_1$

(A_2) $r_1 - \varepsilon < |z_1| < r_1\,;\quad |z_2| < r_2.$

Soit f une fonction continue dans $A = A_1 \cup A_2$, holomorphe en z_1, resp. z_2, dans A_1, resp. A_2. Alors, f se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{f}$ dans le polydisque $D(0\,;r)$, avec $z=(z_1, z_2)$; $r=(r_1, r_2)$.

On appelle parfois le domaine A de $\mathbf{C}^2$ une *marmite de Hartogs,* à cause de sa forme dans l'espace $\mathbf{R}^3$ des points $(z_1, |z_2|)$. Le théorème signifie que le domaine de définition de f peut être étendu à la marmite remplie.

DÉMONSTRATION. — Soient $\delta_1, \delta_2 \in \mathbf{R}$ tels que

$$r_1 - \varepsilon < \delta_1 < r_1$$
$$\varepsilon < \delta_2 < r_2.$$

Pour $|z_2|<\varepsilon$, la fonction $f(z_1, z_2)$ est holomorphe dans le disque $|z_1|<r_1$; d'après la formule de Cauchy en z_1,

$$(8.3)\qquad f(z_1, z_2) = (1/2\pi i)\int_{|\zeta_1|=\delta_1} (\zeta_1 - z_1)^{-1} f(\zeta_1, z_2)\,\mathrm{d}\zeta_1 \quad \text{pour} \quad |z_1| < \delta_1.$$

Pour $r_1-\varepsilon<|\zeta_1|<r_1$, la fonction $f(\zeta_1, z_2)$ est holomorphe en z_2 dans le disque $|z_2|<r_2$; d'après la formule de Cauchy en z_2,

$$f(\zeta_1, z_2) = (1/2\pi i)\int_{|\zeta_2|=\delta_2} (\zeta_2-z_2)^{-1} f(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_2 \quad \text{pour} \quad |z_2| < \delta_2. \tag{8.4}$$

D'autre part,

$$\tilde{f}(z_1, z_2) = \left(1/(2\pi i)^2\right)\int_{|\zeta_1|=\delta_1}\int_{|\zeta_2|=\delta_2} (\zeta_1-z_1)^{-1}(\zeta_2-z_2)^{-1} f(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1\, d\zeta_2$$

est une fonction holomorphe dans $D(0\,;\,\delta)$ qui, d'après (8.3) et (8.4) est égale à f dans l'ouvert $|z_1|<\delta_1$; $|z_2|<\varepsilon$, donc, d'après le théorème d'identité, sur A. □

8.2.4. Théorème. — ***Soient g_1, g_2 deux fonctions holomorphes dans le polydisque $D(w\,;\,r)$ telles que g_1 soit régulière en z_n et g_2 régulière en z_{n-1} au point w ; $V=\{z\in D(w\,;\,r)\,;\,g_1(z)=g_2(z)=0\}$. Si f est holomorphe dans $D(w\,;\,r)\setminus V$, alors il existe une unique fonction $\tilde{f}$ holomorphe au voisinage de w et telle que $f(z)=\tilde{f}(z)$ sur l'ouvert où elles sont toutes deux définies.***

DÉMONSTRATION. — Du lemme 8.1.5 résulte : il existe un polydisque ouvert $D(w\,;\,\delta)\subset\subset D(w\,;\,r)$ tel que $g_1(z)\neq 0$ pour $z\in D(w_1\,;\,\delta_1)\times\ldots\times D(w_{n-1}\,;\,\delta_{n-1})\times \times bD(w_n\,;\,\delta_n)$ et que $g_2(z)\neq 0$ pour $z\in D(w_1\,;\,\delta_1)\times\ldots\times D(w_{n-2}\,;\,\delta_{n-2})\times \times bD(w_{n-1}\,;\,\delta_{n-1})\times D(w_n\,;\,\delta_n)$. D'où

$$V\cap\{z\in D(w\,;\,\delta)\,;\,|z_n-w_n| = \delta_n \text{ ou } |z_{n-1}-w_{n-1}| = \delta_{n-1}\} = \emptyset\,;$$

alors la fonction $f(z_1, \ldots, z_{n-2}, \zeta_{n-1}, \zeta_n)$ est définie pour $(z_1, \ldots, z_{n-2})\in D_{n-2}(w\,;\,\delta)= =D(w_1\,;\,\delta_1)\times\ldots\times D(w_{n-2}\,;\,\delta_{n-2})$; $|\zeta_{n-1}-w_{n-1}|=\delta_{n-1}$; $|\zeta_n-w_n|=\delta_n$. La fonction $\tilde{f}(z_1, \ldots, z_n)=$

$$\left(1/(2\pi i)^2\right)\int_{|\zeta_{n-1}-w_{n-1}|=\delta_{n-1}}\int_{|\zeta_n-w_n|=\delta_n} (z_{n-1}-\zeta_{n-1})^{-1}(z_n-\zeta_n)^{-1}\times$$
$$\times f(z_1, \ldots, z_{n-2}, \zeta_{n-1}, \zeta_n)\, d\zeta_{n-1}\, d\zeta_n$$

est holomorphe sur $D(w\,;\,\delta)$.

Si $(z_1, \ldots, z_{n-2}, \zeta_{n-1})\in D_{n-2}(w\,;\,\delta)\times bD(w_{n-1}\,;\,\delta_{n-1})$, la fonction de z_n, $f(z_1, \ldots, z_{n-2}, \zeta_{n-1}, z_n)$ est holomorphe dans $D(w_n\,;\,\delta_n)$, continue jusqu'au bord et satisfait à

(8.5)
$$f(z_1, \ldots, z_{n-2}, \zeta_{n-1}, z_n) = (1/2\pi i)\int_{|\zeta_n-w_n|=\delta_n} (z_n-\zeta_n)^{-1} f(z_1, \ldots, z_{n-2}, \zeta_{n-1}, \zeta_n)\, d\zeta_n.$$

Si $(z_1, \ldots, z_{n-2}, z_n)$ sont fixés avec $|z_n-w_n|$ assez voisin de δ_n, la fonction $f(z_1, \ldots, z_{n-2}, \zeta_{n-1}, z_n)$ est holomorphe en ζ_{n-1} dans $D(w_{n-1}\,;\,\delta_{n-1})$ et continue jusqu'au bord, alors

$$f(z) = (1/2\pi i)\int_{|\zeta_{n-1}-w_{n-1}|=\delta_{n-1}} (\zeta_{n-1}-z_{n-1})^{-1} f(z_1, \ldots, z_{n-2}, \zeta_{n-1}, z_n)\, d\zeta_{n-1} \tag{8.6}$$

pour $|z-w_n|$ assez voisin de δ_n.

A l'aide de (8.5) et (8.6), on trouve $f(z)=\tilde{f}(z)$ dans $D(w\,;\,\delta)$ pour $|z_n-w_n|$ assez voisin de δ_n. Par le théorème d'identité, on a $f(z)=\tilde{f}(z)$ sur le domaine commun de définition. □

8 ETUDE LOCALE DES FONCTIONS ET DES ENSEMBLES ANALYTIQUES

Une grande partie des résultats exposés est valide pour les fonctions analytiques réelles ou complexes, c'est-à-dire pour les fonctions développables en série entière convergente au voisinage de tout point d'un ouvert de K^n (avec $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). L'étude étant locale, c'est, en fait, celle de l'anneau $\mathcal{O}_a$ des séries entières convergentes au voisinage d'un point a de K^n. Il y a une analogie profonde avec l'étude de l'anneau des polynômes, l'outil technique étant le théorème de préparation de Weierstrass qui, pour des coordonnées convenables, permet d'écrire un élément de $\mathcal{O}_a$, au produit près par un élément de $\mathcal{O}_a$ sans zéro, comme un polynôme en l'une des variables, à coefficients analytiques en les $(n-1)$ autres variables. Ainsi $\mathcal{O}_a$ est noethérien, factoriel et, pour $K = \mathbf{C}$, on a un théorème des zéros de Hilbert. L'étude locale des ensembles analytiques (définis localement comme ensembles des zéros communs à un nombre fini de fonctions analytiques) est intimement liée à celle des idéaux de $\mathcal{O}_a$: cela permet, d'une part, la définition de la dimension p d'un ensemble analytique, d'autre part, celle de ses points singuliers, en dehors desquels, l'ensemble est localement isomorphe à un ouvert de K^p. Dans le cas complexe, un ensemble analytique de dimension p apparaît alors, localement, comme un revêtement ramifié d'un ouvert de $\mathbf{C}^p$. Des résultats élémentaires d'algèbre commutative sont rappelés, sans démonstration, au moment de leur utilisation.

0. Introduction : fonctions analytiques

On a vu (ch. 7, 5.1.2) que toute fonction holomorphe dans un ouvert U de $\mathbf{C}^n$ est, au voisinage de chaque point z_0 de U, développable en série entière convergente en $(z-z_0)$ (et réciproquement (ch. 7, 4.6.3)) ; on dit qu'une fonction : $U \to \mathbf{C}$ possédant cette dernière propriété est *analytique complexe* ; les fonctions holomorphes coïncident donc avec les fonctions analytiques complexes. On appelle *fonction analytique réelle* sur un ouvert V de $\mathbf{R}^n$ toute fonction développable en série entière convergente en $(x-x_0)$ au voisinage de tout point $x_0 \in V$. Dans les deux cas, au voisinage de tout point de leur ouvert de définition, les fonctions analytiques coïncident donc avec les éléments de $K\{X\}$, $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Autrement dit, l'étude locale des fonctions analytiques est celle des séries convergentes.

1. Théorème de division ; théorème de préparation de Weierstrass

1.1. Théorème de division

1.1.1. K désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$; en fait, l'énoncé et la démonstration sont valides pour un corps valué complet non discret. On désigne par $\omega(h)$ l'*ordre* (ch. 7, 4.1) d'une série entière h à une variable et par $K\{X\}$ l'algèbre des séries entières convergentes en l'indéterminée $X=(X_1, \ldots, X_n)$, à coefficients dans K (ch. 7, 4.6.1). On appelle *unité* de $K\{X\}$ tout élément inversible.

1.1.2. **Théorème.** — ***Soient $g\in K\{X\}$ telle que $g(0,\ldots,0,X_n)\neq 0$ et $p=\omega(g(0,\ldots,0,X_n))$. Alors, pour toute $f\in K\{X\}$, il existe $q, r\in K\{X\}$ déterminés de façon unique, r étant un polynôme en X_n de $K\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}[X_n]$, de degré strictement inférieur à p, tels que $f=gq+r$.***

Démonstration. — La démonstration qui suit est due à H. Grauert et R. Remmert (1966).

$g=\sum_0^\infty g_\nu(X_1, \ldots, X_{n-1})X_n^\nu$ avec $g_\nu(0)=0$ pour $\nu<p$, $g_p(0)\neq 0$. On divise g par une unité de $K\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$, ce qui ne change pas l'énoncé, de manière à avoir $g_p(X_1, \ldots, X_{n-1})=1$. D'autre part $g=\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n} a_\alpha X^\alpha$; g étant convergente, il existe $\varrho>0$ tel que $\sum |a_\alpha|\varrho^{|\alpha|}<\infty$.

Soit $\mathscr{B}=\mathscr{B}_{\tau_1,\ldots,\tau_n}=\{\varphi\in K\{X\}$; $\varphi=\sum c_\alpha X^\alpha$; $\sum|c_\alpha|\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_n^{\alpha_n}<\infty\}$; $\varphi\mapsto\|\varphi\|=$ $=\sum|c_\alpha|\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_n^{\alpha_n}$ est une norme sur le K-espace vectoriel $\mathscr{B}$ qui, muni de cette norme, est une K-algèbre de Banach, car $\|\varphi\psi\|\leqslant\|\varphi\|\,\|\psi\|$.

Soient $\tau_1=\ldots=\tau_{n-1}=\delta<\varrho$ et $\tau_n=\tau<\varrho$, alors $\|g_\nu\|\leqslant M_1\delta$ pour $\nu<p$ où M_1 est une constante indépendante de δ et de τ ; $\|\sum_{\nu>p} g_\nu(X_1, \ldots, X_{n-1})X_n^\nu\|\leqslant M_2\tau^{p+1}$ où M_2 est une constante indépendante de δ et de τ. On a

$$\|g-X_n^p\| = \|g-g_p(X_1, \ldots, X_{n-1})X_n^p\| \leqslant pM_1\delta+M_2\tau^{p+1}$$

et, pour tout $\varepsilon\in]0, 1[$, on peut choisir $\tau<\varrho$, $\delta=\delta(\tau)<\varrho$ tels que

$$pM_1\delta+M_2\tau^{p+1}\leqslant\varepsilon\tau^p,$$

d'où $\|g-X_n^p\|\leqslant\varepsilon\tau^p$.

Si $\varphi\in\mathscr{B}=\mathscr{B}_{\delta,\ldots,\delta,\tau}$, on écrit $\varphi=a(\varphi)X_n^p+b(\varphi)$ où $a(\varphi), b(\varphi)\in\mathscr{B}$, $b(\varphi)$ étant un polynôme en X_n de degré $<p$; $a(\varphi)$ et $b(\varphi)$ sont bien déterminés. Alors

$$\|\varphi\| = \|a(\varphi)\|\,\tau^p+\|b(\varphi)\|.$$

On considère l'endomorphisme (ou application K-linéaire)

$$A:\mathscr{B}\to\mathscr{B}$$
$$\varphi\mapsto a(\varphi)g+b(\varphi).$$

On a $\|A\varphi-\varphi\|=\|a(\varphi)(g-X_n^p)\|\leqslant\varepsilon\|a(\varphi)\|\tau^p\leqslant\varepsilon\|\varphi\|$. Donc, I étant l'identité de $\mathscr{B}$, l'endomorphisme $B=A-I$ est continu et $\|B\|\leqslant\varepsilon<1$; il en résulte que $A=I+B$, obtenu en perturbant I par l'addition de B, est inversible, i.e. il existe $\psi \in \mathscr{B}$ bien déterminé tel que (1.1) $\varphi = A\psi = a(\psi)g + b(\psi)$.

Soit $f \in K\{X\}$, choisissons δ et τ tels que $f \in \mathscr{B}$, alors il existe $h \in \mathscr{B}$ tel que $f = Ah = a(h)g + b(h) = gq + r$ avec $q = a(h)$ et $r = b(h)$, polynôme de degré $<p$ en X_n ; q et r sont déterminés de façon unique. □

1.2. Théorème de préparation de Weierstrass

1.2.1. Deux éléments de $K\{X\}$ sont dits *(multiplicativement) équivalents* si l'un est le produit de l'autre par une unité. Posons $X' = (X_1, \ldots, X_{n-1})$.

Soit ϱ l'homomorphisme de K-algèbre :

$$K\{X\} \to K\{X\}$$
$$u(X_1, \ldots, X_n) \mapsto u(0, \ldots, 0, X_n).$$

Tout polynôme $h \in K\{X'\}[X_n]$ unitaire, de degré p en X_n, tel que $\varrho(h) = X_n^p$ est appelé un *polynôme distingué de degré p.*

1.2.2. **Théorème. —** ***Soit $g \in K\{X\}$ tel que $p = \omega(g(0, \ldots, 0, X_n))$, alors il existe un polynôme distingué de degré p équivalent à g.***

DÉMONSTRATION. — Appliquons 1.1.2 à $f = X_n^p$, on a $X_n^p = gq + r$, i.e. $gq = X_n^p - r$; reste à montrer que q est inversible et que $\varrho(r) = 0$. On a $\varrho(gq) = \varrho(g) \cdot \varrho(q) = X_n^p - \varrho(r)$; comme le degré de r en X_n est strictement inférieur à p, on a : $X_n^p - \varrho(r) \neq 0$, donc $\varrho(g) \neq 0$; mais $\omega(\varrho(g)) = p$ par hypothèse ; d'après une propriété évidente de l'ordre d'une série entière, on a :

$$\omega(\varrho(g) \cdot \varrho(q)) = \omega(\varrho(g)) + \omega(\varrho(q)) \geqslant p ;$$

d'autre part,

$$\omega(\varrho(g) \cdot \varrho(q)) = \omega(X_n^p - \varrho(r)) \begin{cases} = p & \text{si} \quad \varrho(r) = 0 ; \\ < p & \text{si} \quad \varrho(r) \neq 0, \end{cases}$$

donc $\varrho(r) = 0$ et $\omega(\varrho(q)) = 0$, i.e. q est inversible. □

2. Algèbres analytiques ; noethérianité

2.1. Une *algèbre analytique sur* K est une K-algèbre A isomorphe à $K\{X\}/\mathfrak{A}$ où $\mathfrak{A}$ est un idéal de type fini de $K\{X\}$ (i.e. à nombre fini de générateurs).

$K\{X\}$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathscr{I}(X_1, \ldots, X_n)$ engendré par $X_1, \ldots, X_n$; A est donc aussi un anneau local d'idéal maximal $\mathscr{M} = \mathscr{I}(X_1, \ldots, X_n)/\mathfrak{A}$ et K est le corps résiduel de $K\{X\}$ et de A.

2.2. Rappels d'algèbre

2.2.1. Soit R un anneau commutatif, on dit qu'un *R-module M est noethérien* s'il satisfait à l'une des conditions équivalentes suivantes, dans lesquelles $\sum$ désigne l'ensemble des R-sous-modules de M :

(a) toute suite croissante de $\sum$ (ordonné par l'inclusion) est stationnaire ;
(b) toute partie non vide de $\sum$ a un élément maximal ;
(c) tout élément de $\sum$ est *de type fini* (i.e. est engendré par un nombre fini d'éléments de M).

Un *anneau R* est dit *noethérien* si c'est un R-module noethérien ; (ses sous-modules sont ses idéaux).

2.2.2. On utilise les propriétés suivantes des modules et des anneaux noethériens :

(a) tout sous-module et tout module quotient d'un module noethérien est noethérien ;
(b) tout module de type fini sur un anneau noethérien est noethérien.

2.3. Théorème. — ***Les algèbres analytiques sur K sont des anneaux noethériens.***

2.3.1. **Lemme.** — ***Soient $g \in K\{X\}$ tel que $g(0, \ldots, 0, X_n) \neq 0$ et $X' = (X_1, \ldots, X_{n-1})$, alors $B = K\{X\}/(g)$ est un $K\{X'\}$-module de type fini.***

Démonstration. — Soit $\omega(g(0, \ldots, 0, X_n)) = p$; d'après le théorème de division 1.1, B est un $K\{X'\}$-module de type fini ayant pour base $(1, \dot{X}_n, \ldots, \dot{X}_n^{p-1})$ où $\dot{X}_n$ désigne la classe de X_n modulo (g). □

2.3.2. Démonstration de 2.3. Soit A une algèbre analytique, alors, dans les notations de 2.1, $A = K\{X\}/\mathfrak{A}$; d'après 2.2.2 (a), pour établir que A est noethérien, il suffit de prouver que $K\{X\} = K\{X_1, \ldots, X_n\}$ est noethérien, ce que l'on va faire par récurrence sur n.

Pour $n=0$, $K\{\emptyset\} = K$ est noethérien.

Soit $n \geqslant 1$ et supposons que $K\{X'\}$ soit noethérien. Soient $\delta \neq (0)$ un idéal de $K\{X\}$ et $0 \neq g \in \delta$. D'après 8.1.4 du chapitre 7, après un K-automorphisme éventuel de $K\{X\}$, on peut supposer $g(0, \ldots, 0, X_n) \neq 0$. D'après 2.3.1, le $K\{X'\}$-module B est noethérien, donc l'idéal $\delta' = \delta/(g)$ de B est le $K\{X'\}$-sous-module engendré par un nombre fini de générateurs $\dot{u}_1, \ldots, \dot{u}_q$ où $\dot{u}_l$ $(l=1, \ldots, q)$ est la classe modulo (g) d'un élément u_l de δ ; alors $u_1, \ldots, u_q$, g engendrent l'idéal δ, donc δ est de type fini et $K\{X\}$ est noethérien. □

2.3.3. **Remarque.** — Compte-tenu de 2.3, la condition d'être de type fini imposée à l'idéal $\mathfrak{A}$ de $K\{X\}$ dans la définition d'une algèbre analytique (2.1) est satisfaite par tout idéal de $K\{X\}$.

3. Factorialité de $K\{X\}$

3.1. Anneau factoriel

3.1.1. Un anneau *intègre* (ou d'intégrité) est un anneau commutatif unitaire sans diviseurs de zéros.

3.1.2. Un anneau A est dit *factoriel* s'il est intègre et si tout élément de A est égal à un produit de facteurs irréductibles, la factorisation étant unique à l'ordre près et au produit près par une *unité,* i.e. un élément inversible de A.

3.2. Théorème. — ***L'anneau $K\{X\}$ est factoriel.***

La démonstration repose sur les trois lemmes suivants dans lesquels on pose : $R=K\{X'\}$ et $A=K\{X\}=R\{X_n\}$.

3.2.1 **Lemme.** — ***Si g est un polynôme distingué de $R[X_n]$, si $f\in R[X_n]$ est unitaire et si f divise g, alors f est distingué.***

DÉMONSTRATION. — Si g est un polynôme de degré p, on note : $\mathrm{dg}\, g=p$. Soit $g=fh$; si $\mathrm{dg}\, g=p$, $\mathrm{dg} f=q$, ϱ étant l'homomorphisme de 1.2.1, on a $\varrho(g)=$ $=\varrho(f)\cdot\varrho(h)=X_n^p$, d'où $\varrho(f)=X_n^q$, donc f est distingué. □

3.2.2. **Lemme.** — ***Si g est un polynôme distingué de $R[X_n]$ et si $f\in R[X_n]$, alors l'identité du théorème* 1.1.2 *est l'identité de division euclidienne dans $R[X_n]$.***

DÉMONSTRATION. — L'identité de division euclidienne existe dans $R[X_n]$ puisque g est unitaire, alors elle est réalisée dans A où elle coïncide avec celle de 1.1.2 à cause de l'unicité. □

3.2.3. **Lemme.** — ***Si deux polynômes distingués f et g de $R[X_n]$ sont équivalents dans A, ils sont égaux.***

DÉMONSTRATION. — $f=gq$ où q est une unité de A, mais, d'après 3.2.2, $q\in R[X_n]$ et $q^{-1}\in R[X_n]$; comme f et g sont unitaires, on a : $q=1$. □

3.2.4. DÉMONSTRATION DE 3.2. Par récurrence sur n ; le théorème est vérifié pour $n=0$. On suppose le théorème établi pour $n-1$, i.e. que R est factoriel. Soit $f\in A$; après un éventuel K-automorphisme de A (ch. 7, 8.1.4), f est équivalent à un polynôme distingué f^* appartenant à $R[X_n]$ (1.2.2), i.e. $f=uf^*$ où u est une unité de A. D'après un résultat dans les anneaux de polynômes on sait que, R étant factoriel, $R[X_n]$ est factoriel. Soit $f_1^*\ldots f_r^*$ la factorisation (unique) de f^* en facteurs irréductibles et unitaires dans $R[X_n]$, alors $u\ f_1^*\ldots f_r^*$ est une factorisation de f dans A et, d'après 3.2.1, les polynômes f_l^* $(l=1,\ldots,r)$ sont distingués. Chaque f_l^* $(l=1,\ldots,r)$ est irréductible dans A, sinon $f_l^*=g_1g_2$ où $g_1,g_2\in A$ et ne sont pas des unités, mais g_j $(j=1,2)$ est équivalent à un polynôme distingué g_j^* $(j=1,2)$, donc $f_l^*=g_1^*g_2^*$ dans $R[X_n]$, d'après 3.2.3, ce qui contredit l'irréductibilité de f_l^* dans $R[X_n]$.

Soit $h_1 \ldots h_s$ une décomposition de f en facteurs irréductibles dans A et soit h_l^* ($l=1, \ldots, s$) un polynôme distingué de $R[X_n]$ équivalent à h_l dans A, alors h_l^* est irréductible dans $R[X_n]$ sans quoi h_l ne serait pas irréductible dans A et $f^*=h_1^* \ldots h_s^*$, d'après 3.2.3, donc $s=r$ et il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, r\}$ telle que $h_l^*= =f_{\sigma(l)}^*$.

Finalement, tout $f \in A$ a une factorisation unique dans A, à l'ordre près et aux facteurs unité près. □

4. Germes de fonctions et d'ensembles analytiques en un point

4.1. Germes de fonctions analytiques

Soit D un ouvert de K^n ; pour tout ouvert U de D, on désigne par $\mathcal{O}(U)$ la K-algèbre des fonctions analytiques sur U. Soient a un point de D, U_1, U_2 deux ouverts de D contenant a, on dit que deux fonctions analytiques $f_j \in \mathcal{O}(U_j)$, $j=1, 2$, sont liées par la relation $\mathcal{R}$, s'il existe un voisinage ouvert W de a dans D, contenu dans $U_1 \cap U_2$ tel que $f_1|W=f_2|W$; $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans la K-algèbre des fonctions analytiques au voisinage de a dans D, compatible avec les lois de composition ; l'algèbre quotient par $\mathcal{R}$ est appelée l'algèbre des *germes de fonctions analytiques en a*, est notée $\mathcal{O}_a$ et, d'après 0, est isomorphe à $K\{X\}=K\{X_1, \ldots, X_n\}$; on notera également ${}_n\mathcal{O}$ cette dernière algèbre.

4.2. Ensembles analytiques ; germes d'ensembles analytiques

4.2.1. Un *ensemble analytique* A d'un ouvert D de K^n est une partie A de D telle que, pour tout point $a \in D$, il existe un voisinage ouvert U de a dans D et des fonctions analytiques dans U, en nombre fini $f_1, \ldots, f_p$ telles que $A \cap U=\{x \in U \ ; f_1(x)=0; \ldots; f_p(x)=0\}$. On voit que A est fermé dans D.

4.2.2. Soit $a \in D$; considérons les ensembles analytiques définis au voisinage de a et contenant a : deux tels ensembles analytiques sont dits liés par la relation $\mathcal{R}'$ s'ils coïncident sur un voisinage ouvert de a dans D ; $\mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence ; toute classe pour $\mathcal{R}'$ est appelée un *germe* (d'ensemble) *analytique* en a. Tout ensemble analytique S d'un voisinage U de a et contenant a définit un germe d'ensemble analytique $\underline{S}_a$ en a.

4.2.3. Soit $\underline{S}_a$ un germe analytique en a ; tout représentant S de $\underline{S}_a$ est défini sur un voisinage ouvert U de a dans D. L'ensemble des fonctions analytiques sur U qui s'annulent sur S est un idéal $I(U)$ de $\mathcal{O}(U)$ qui définit un idéal I_U de $\mathcal{O}_a$ par passage aux germes (4.1) ; la réunion des I_U quand S varie dans $\underline{S}_a$ est un idéal $I=I(\underline{S}_a)$, ses éléments sont appelés les germes de fonctions analytiques qui s'annulent sur $\underline{S}_a$.

Si $\underline{S}_a$ et $\underline{S}'_a$ sont deux germes analytiques en a, alors les conditions

$$\underline{S}_a \subset \underline{S}'_a \quad \text{et} \quad I(\underline{S}_a) \supset I(\underline{S}'_a)$$

sont équivalentes.

On dit que $\underline{S}_a$ est *irréductible* s'il n'est pas réunion de deux germes distincts de $\underline{S}_a$.

4.2.4.* Proposition. — *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\underline{S}_a$ *est irréductible ;*

(ii) $I = I(\underline{S}_a)$ *est premier.*

DÉMONSTRATION. — non (i)⇒non (ii) : $\underline{S}_a$ réductible signifie : $\underline{S}_a = \underline{S}_a^1 \cup \underline{S}_a^2$ où $\underline{S}_a^1$ et $\underline{S}_a^2$ sont distincts de $\underline{S}_a$; il existe f_i nul sur $\underline{S}_a^i$ et non nul sur $\underline{S}_a^j$ avec $(i, j) = (1, 2)$, $i \neq j$; alors $f_1 \cdot f_2$ s'annule sur $\underline{S}_a$ et ni f_1, ni f_2 ne s'annulent sur $\underline{S}_a$, donc I n'est pas premier.

non (ii)⇒non (i) : il existe $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_a$ tels que $f_1 \cdot f_2 \in I$, $f_1 \notin I$ et $f_2 \notin I$. Soit V un voisinage ouvert de a sur lequel $\underline{S}_a$, f_1, f_2 ont des représentants S, $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$. Soient $S^1 = S \cap \{x \in V, \tilde{f}_1(x) = 0\}$ et $S^2 = S \cap \{x \in V, \tilde{f}_2(x) = 0\}$. Alors $\underline{S}_a = \underline{S}_a^1 \cup \underline{S}_a^2$; $\underline{S}_a^1$ et $\underline{S}_a^2$ sont distincts de $\underline{S}_a$. □

4.2.5.* Proposition. — *Tout germe analytique $\underline{S}_a$ en $a \in D$ est réunion de germes analytiques irréductibles $\underline{S}_{\nu a}$ ($\nu = 1, \ldots, k$) dont aucun n'est contenu dans la réunion des autres. Cette décomposition est unique à l'ordre près.

DÉMONSTRATION. — $\mathcal{O}_a$ étant noethérien, toute suite strictement croissante d'idéaux de $\mathcal{O}_a$ est finie (2.2.1 (a)) ; alors toute suite strictement décroissante de germes analytiques est finie ; comme toute composante irréductible d'un germe analytique réductible est strictement contenue dedans, le nombre de composantes irréductibles de $\underline{S}_a$ est fini ; on vérifie l'unicité immédiatement. □

4.2.6. Les germes $\underline{S}_{\nu a}$ de 4.2.5 sont appelés les *composantes irréductibles* de $\underline{S}_a$.

5. Propriétés des algèbres analytiques

5.1. Soit I un idéal de ${}_n\mathcal{O}$ tel que $\{0\} \neq I \neq {}_n\mathcal{O}$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées de K^n et ${}_p\mathcal{O}$ le sous-anneau de ${}_n\mathcal{O}$ formé des germes indépendants de $x_{p+1}, \ldots, x_n$.

L'anneau ${}_n\mathcal{O}$ étant noethérien, I a un nombre fini de générateurs $f_1, \ldots, f_q$ dont des représentants $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_q$ sont des fonctions analytiques définies sur un ouvert U de K^n contenant 0 ; ces fonctions définissent un ensemble analytique $S = \{x \in U \ ; \tilde{f}_1(x) = 0; \ldots; \tilde{f}_q(x) = 0\}$ de U, le germe $\underline{S}_0$ étant bien déterminé ; on posera $\underline{S}_0 = \underline{S}(I)$; alors $I \subset I(\underline{S}_0)$. On considère l'algèbre analytique $A = {}_n\mathcal{O}/I$ et l'homomorphisme η : ${}_p\mathcal{O} \to {}_n\mathcal{O} \to A$. Soient $h_1, \ldots, h_s \in {}_n\mathcal{O}$, on désignera par $(h_1, \ldots, h_s)$ l'idéal de ${}_n\mathcal{O}$ engendré par $h_1, \ldots, h_s$.

5.1.1.* Proposition. — *Après un changement de coordonnées linéaire convenable dans K^n, il existe un entier $p \in [0, \ldots, n-1]$ tel que l'homomorphisme η : ${}_p\mathcal{O} \to A$ ci-dessus soit injectif et munisse A d'une structure de ${}_p\mathcal{O}$-module de type fini.

On verra (7) que l'entier p est déterminé par I quand I est premier.

DÉMONSTRATION. — Soit $f \in I, f \neq 0$; alors, après une éventuelle transformation linéaire de coordonnées dans K^n, on obtient $f(0; x_n) \not\equiv 0$ (ch. 7, 8.1.4). Cette dernière condition est inchangée par transformation linéaire dans K^{n-1} (coordonnées $x_1, \ldots, x_{n-1}$). D'après le théorème de préparation de Weierstrass (1.2.2), il existe une unité u de ${}_n\mathcal{O}$ et un polynôme P_n distingué en x_n tels que $f = uP_n$; alors $P_n \in I$.

Si $I_{n-1} = I \cap {}_{n-1}\mathcal{O} = \{0\}$, on prend $p = n-1$; sinon, soit $0 \neq f_{n-1} \in I_{n-1}$; on opère alors sur f_{n-1} comme ci-dessus sur f, i.e. $f_{n-1} = u_1 \cdot P_{n-1}$ où u_1 est une unité de ${}_{n-1}\mathcal{O}$ et P_{n-1} un polynôme distingué en x_{n-1}.

Après un nombre fini de pas, on arrive à un entier p tel que $I_p = I \cap {}_p\mathcal{O} = \{0\}$ et tel que, pour $r > p$, il existe un polynôme $P_r \in {}_{r-1}\mathcal{O}[x_r]$ avec $P_r \in I_r = I \cap {}_r\mathcal{O}$; p est l'entier cherché ; en effet $I_p = \{0\}$ entraîne que $\eta : {}_p\mathcal{O} \to A$ est injectif car on a le diagramme commutatif suivant où toutes les suites sont exactes :

$$\begin{array}{ccc}
 & 0 & 0 \\
 & \downarrow & \downarrow \\
\{0\} = & {}_p\mathcal{O} \cap I & \to I \\
 & \downarrow & \downarrow \\
0 \to & {}_p\mathcal{O} & \to {}_n\mathcal{O} \\
 & & \downarrow \\
 & & {}_n\mathcal{O}/I \\
 & & \downarrow \\
 & & 0.
\end{array}$$

Si q_r est le degré du polynôme P_r, on a :

$$P_r = x_r^{q_r} + \sum_0^{q_r - 1} a_\nu^r(x_1, \ldots, x_{r-1}) x_r^\nu \quad \text{avec} \quad a_\nu^r(0) = 0$$

et, d'après le théorème de division par P_r, on a successivement, pour tout $g \in {}_n\mathcal{O}$,

$$g \equiv \sum_{\nu=0}^{q_n - 1} f_\nu(x_1, \ldots, x_{n-1}) x_n^\nu \pmod{P_n} ;$$

$$f_\nu \equiv \sum_{\mu=0}^{q_{n-1}-1} f_{\mu\nu}(x_1, \ldots, x_{n-2}) x_{n-1}^\mu \pmod{P_{n-1}} ;$$

$$\ldots$$

de sorte que

$$g \equiv \sum_{\alpha_j < q_j} f_\alpha(x_1, \ldots, x_p) x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} \ldots x_n^{\alpha_n} \pmod{(P_{p+1}, \ldots, P_n)}$$

avec

$$\alpha = (\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n) \quad \text{et} \quad j = p+1, \ldots, n.$$

Donc les images de $x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} \ldots x_n^{\alpha_n}$ ($\alpha_j < q_j$, $j = p+1, \ldots, n$) par la projection ${}_n\mathcal{O} \to A$ engendrent A comme ${}_p\mathcal{O}$-module. □

5.1.2. Corollaire. — ***Si I est un idéal premier de ${}_n\mathcal{O}$; M le corps des fractions de ${}_p\mathcal{O}$ L celui de $A = {}_n\mathcal{O}/I$; alors, pour un choix comme ci-dessus des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, on a $L = M(\bar{x}_{p+1}, \ldots, \bar{x}_n)$ où $\bar{x}_r$ désigne la classe de x_r modulo I.***

En effet $A = {}_n\mathcal{O}/I = {}_p\mathcal{O}[\bar{x}_{p+1}, \ldots, \bar{x}_n]$. □

5.2. Rappels d'algèbre

5.2.1. **Théorème de l'élément primitif.** — ***Soit M un corps de caractéristique* 0 *et $L=M(u_1, \ldots, u_p)$ une extension algébrique finie de M, alors, pour tout ensemble infini $S\subset M$, il existe des éléments $c_1, \ldots, c_r \in S$ tels que $L=M(\zeta)$ avec $\zeta=\sum_{i=1}^{r} c_i u_i$.*** □

5.2.2. **Théorème.** — ***Supposons M et L comme dans* 5.2.1 *; en outre supposons que M est le corps des fractions d'un anneau factoriel R et, A étant la clôture intégrale de R dans L, qu'il existe $\zeta\in A$ tel que $L=M(\zeta)$.***

Soit P le polynôme minimal de ζ sur M, **(alors $P\in R[X]$ parce que R est factoriel)** ***et soit P' le polynôme dérivé de P, alors, pour tout $\alpha\in A$, il existe $Q\in R[X]$ de degré $<\operatorname{dg} P$*** **tel que $\alpha P'(\zeta)=Q(\zeta)$.** □

5.3. Cas où l'idéal I est premier

Si $f\in {}_n\mathcal{O}$, on désigne par $\bar f$ la classe de f modulo I.

5.3.1. **Proposition.** — ***Dans les notations de* 5.1.1, *si M est le corps des fractions de ${}_p\mathcal{O}$ et L celui de A, pour un choix convenable des coordonnées dans K^n, on a : $L=M(\bar x_{p+1})$ et, pour tout $r>p$, le polynôme minimal P_r de $\bar x_r$ sur M est dans ${}_p\mathcal{O}[X]$, est distingué et $P_r(x_r)\in I$.***

D'après 5.1.2, on a $L=M(\bar x_{p+1}, \ldots, \bar x_n)$, pour un choix convenable de coordonnées ; L est une extension finie de M, i.e. est un espace vectoriel sur M de dimension finie d'après 5.1.1, donc L est une extension algébrique finie de M ; d'après le théorème de l'élément primitif (5.2.1), il existe $\lambda_j\in K$ tel que $y_{p+1}=\sum_{j=p+1}^{n} \lambda_j x_j$ soit linéairement indépendant de $x_1, \ldots, x_p$ et que $L=M(\bar y_{p+1})$. On fait un changement linéaire de coordonnées pour prendre y_{p+1} comme nouvel x_{p+1}. De plus $A={}_n\mathcal{O}/I$ est un ${}_p\mathcal{O}$-module de type fini (5.1.1) donc, pour tout $f\in{}_n\mathcal{O}$, ${}_p\mathcal{O}[\bar f]$ est de type fini, alors il existe un polynôme $Q_f(X)=X^m+\sum_{0}^{m-1} b_\nu(x_1, \ldots, x_p)X^\nu\in{}_p\mathcal{O}[X]$ tel que $Q_f(\bar f)=0$; choisissons Q_f de degré minimum ; *alors la condition* $f(0)=0$ *entraîne que Q_f est distingué*, en effet s'il existe μ tel que $b_\mu(0)\neq 0$, alors $X^m+\sum_{0}^{m-1} b_\nu(0)X^\nu$ possède en X_0, un zéro d'ordre $l<m$ et, d'après le théorème de préparation (1.2.2), on a $Q_f(X)=uQ(X)$ où u est une unité et Q un polynôme distingué de degré l, alors $Q(\bar f)=0$ et Q_f n'est pas de degré minimum, contradiction. Appliquons ce résultat aux fonctions coordonnées $x_{p+1}, \ldots, x_n$ qui s'annulent en 0 et désignons par P_r le polynôme Q_{x_r} ; par construction $P_r(\bar x_r)=0$ donc $P_r(x_r)\in I$. □

6. Structure locale d'un ensemble analytique

6.1. *Dans tout le § 6, I est un idéal premier de ${}_n\mathcal{O}$ et les coordonnées sont choisies pour que 5.3.1 s'applique.* Soient q le degré P_{p+1} et δ le *discriminant* du polynôme P_{p+1} (i.e. δ est le résultant des polynômes, en x_{p+1}, P_{p+1} et $\partial P_{p+1}\ \partial x_{p+1}$). *Alors* pour $q \geqslant 2$, $\delta \neq 0$ dans ${}_p\mathcal{O}$ puisque P_{p+1} est le polynôme minimal de $\bar{x}_{p+1}$ sur ${}_p\mathcal{O}$;
$\delta \notin I$ puisque $I_p = I \cap {}_p\mathcal{O} = \{0\}$, d'après le choix de p.

6.2. Lemme. — *Pour tout $f \in {}_n\mathcal{O}$, il existe un polynôme $R_f \in {}_p\mathcal{O}[X]$ tel que $\delta f - R_f(x_{p+1}) \in I$, en particulier, il existe des polynômes $Q_r \in {}_p\mathcal{O}[X]$ tels que, pour $r \geqslant p+1$, on ait*

$$\delta x_r - Q_r(x_{p+1}) \in I.$$

DÉMONSTRATION. — Pour $r=p+1$, prendre $Q_{p+1} = \delta x_{p+1}$.

Dans la suite de la démonstration on suppose $r \geqslant p+1$.

A est la clôture intégrale de ${}_p\mathcal{O}$ dans L d'après 5.3.1 ; d'après 5.2.2 appliqué à la situation de 5.3.1, il existe $Q \in {}_p\mathcal{O}[X]$

$$\bar{f} P'_{p+1}(\bar{x}_{p+1}) = Q(\bar{x}_{p+1}) \tag{6.1}$$

où $P'_{p+1} = \partial P_{p+1} / \partial x_{p+1}$ et $\mathrm{dg}\, Q < q$.

Le discriminant δ appartient à l'idéal engendré par P_{p+1} et P'_{p+1}, donc il existe $u, v \in {}_p\mathcal{O}[X]$ de degré minimal tels que $\delta = uP_{p+1} + vP'_{p+1}$; mais $P_{p+1} \in I$, donc $\delta = vP'_{p+1}(\bar{x}_{p+1})$; alors, en multipliant les deux membres de (6.1) par v, on obtient :

$$\delta \bar{f} - vQ(\bar{x}_{p+1}) = 0 \tag{6.2}$$

en posant $vQ = R_f$, (6.2) entraîne

$$\delta \bar{f} - R_f(x_{p+1}) \in I ;$$

en outre $\mathrm{dg}\, R_f \leqslant q - 1 + \mathrm{dg}\, v$. □

6.3. Théorème de structure

6.3.1. **Théorème. — *Soit I un idéal premier de ${}_n\mathcal{O}$, $\underline{S}_0 = \underline{S}_0(I)$ le germe en 0 qu'il définit. Soient P_r, $r > p$ et $\delta x_r - Q_r(x_{p+1})$ comme dans 5.3 et 6.2. Alors, il existe un système fondamental de voisinages $U = U' \times U''$ de 0, où U' et U'' sont des ouverts de K^p et de K^{n-p} respectivement, tel que :***
les fonctions P_r et $\delta x_r - Q_r(x_{p+1})$ soient analytiques sur U ;
$\underline{S}_0$ soit induit par un ensemble analytique S dans U satisfaisant aux conditions suivantes, dans lesquelles $x' = (x_1, \ldots, x_p)$:

(a) $S \cap U \cap \{x \in U ;\ \delta(x') \neq 0\} = \{x \in U ;\ \delta(x') \neq 0 ;\ P_{p+1}(x' ; x_{p+1}) = 0 ;\ \delta x_r - Q_r(x_{p+1}) = 0 ;\ r \geqslant p+2\}$;

(b) ***Si*** $x \in U' \times K^{n-p}$ ***et si*** $P_{p+1}(x' ; x_{p+1}) = 0 ;\ \delta x_r - Q_r(x_{p+1}) = 0 ;\ \delta(x') \neq 0$, ***alors*** $x \in U$.

6.3.2. **Remarque.** — Si $K=\mathbf{C}$ et si I est un idéal premier de ${}_n\mathcal{O}$, $I(\underline{S}_0)=I$, d'après le théorème des zéros de Hilbert (ci-dessous, 9) ; alors I premier équivaut à $\underline{S}_0$ irréductible (4.2.4). Le théorème 6.3.1 décrit donc tout germe analytique irréductible en 0 de $\mathbf{C}^n$.

6.3.3. Démonstration de 6.3.1. — Soit $V=V'\times V''$ un voisinage de 0 dans $K^p\times K^{n-p}$ dans lequel les fonctions, en nombre fini, qui figurent dans l'énoncé sont analytiques. Soient $f_1, \ldots, f_m$ des fonctions analytiques sur V supposé assez petit, telles que $S\cap V=\{x\in V\ ;\ f_i(x)=0,\ i=1, \ldots, m\}$, les germes définis par les f_i en 0 étant un système de générateurs de I.

Comme dans la démonstration de 5.1.1, on trouve des $f_{i,\alpha}\in{}_p\mathcal{O}$; $\alpha=(\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n)$; $\alpha_j<q_j$ tels que

$$f_i \equiv \sum_{\alpha_j<q_j} f_{i,\alpha}(x')x_{p+1}^{\alpha_{p+1}}\ldots x_n^{\alpha_n} \pmod{(P_{p+1}, \ldots, P_n)}.$$

Soit $N=q_{p+2}\ldots q_n$; dans $\delta^N f_i$, substituons Q_r à δx_r pour $r\geqslant p+2$, alors

$$\delta^N f_i \equiv R_i'(x_{p+1}) \pmod{(P_{p+1}, \ldots, P_n, \delta x_{p+2}-Q_{p+2}, \ldots, \delta x_n-Q_n)}$$

où $R_i'\in{}_p\mathcal{O}[X]$.

On va systématiquement utiliser la division par le polynôme unitaire $P_{p+1}\in{}_p\mathcal{O}[X]$.

(α) Par division de R_i' par P_{p+1}, on obtient

$$\delta^N f_i \equiv R_i(x_{p+1}) \pmod{(P_{p+1}, \ldots, P_n\ ;\ \delta x_{p+2}-Q_{p+2}, \ldots, \delta x_n-Q_n)}$$

où $$\mathrm{dg}\, R_i \leqslant q-1.$$

Mais $f_i\in I$ et, d'après 5.3.1, $P_r\in I$ pour $r=p+1, \ldots, n$; d'après 6.2, $\delta x_r-Q_r\in I$ pour $r=p+2, \ldots, n$, alors $R_i(x_{p+1})\in I$. Or P_{p+1} est le polynôme minimal de $\bar{x}_{p+1}$ sur ${}_p\mathcal{O}$ et $\mathrm{dg}\, R_i<\mathrm{dg}\, P_{p+1}$, donc $R_i=0$, alors

$$\delta^N f_i \equiv 0 \pmod{(P_{p+1}, \ldots, P_n, \delta x_{p+2}-Q_{p+2}, \ldots, \delta x_n-Q_n)}. \tag{6.3}$$

(β) Pour tout $r\geqslant p+2$, on a $P_r\in{}_p\mathcal{O}[x_r]$; P_r est défini dans $V'\times K^{n-p}$. Dans $\delta^{q_r}P_r$, on remplace δx_r par $Q_r \pmod{(\delta x_r-Q_r)}$; alors

$$\delta^{q_r} P_r \equiv A_r'(x_{p+1}) \pmod{(\delta x_r-Q_r)} \quad \text{où} \quad A_r'\in{}_p\mathcal{O}[X].$$

Par division de A_r' par P_{p+1}, on a :

$$\delta^{q_r} P_r \equiv A_r(x_{p+1}) \pmod{(P_{p+1}, \delta x_r-Q_r)} \quad \text{sur} \quad V'\times K^{n-p} \quad \text{avec} \quad \mathrm{dg}\, A_r < \mathrm{dg}\, P_{p+1};$$

mais $A_r(x_{p+1})\in I$ et, comme dans (α), à cause du degré en x_{p+1}, on a $A_r(\bar{x}_{p+1})=0$ au voisinage de 0, donc dans $V'\times K^{n-p}$, d'où

$$\delta^{q_r} P_r \equiv 0 \pmod{(P_{p+1}, \delta x_r-Q_r)} \quad \text{sur} \quad V'\times K^{n-p}. \tag{6.4}$$

Cela entraîne la propriété suivante : si $\delta(x')\neq 0$, la condition $P_{p+1}(x'\ ;x_{p+1})= =\delta x_r-Q_r=0$ implique $P_r(x'\ ;x_r)=0$; puisque P_r est distingué, toutes ses racines en x_r, pour $x'=0$, sont nulles ; alors, d'après le théorème de continuité des racines, cela entraîne que, quel que soit le voisinage V'' de 0 dans K^{n-p}, dès que V' est assez petit, toute solution de $P_{p+1}(x'\ ;x_{p+1})=0=\delta x_r-Q_r$, pour $r\geqslant p+2$ se trouve dans $V'\times V''$, ce qui prouve l'assertion (b) du théorème.

(γ) Les relations (6.3) et (6.4) entraînent qu'il existe un entier M tel que

$$(6.5) \qquad \delta^M f_i \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\,(P_{p+1}, \delta x_{p+2}-Q_{p+2}, \ldots, \delta x_n - Q_n)).$$

Choisissons $U \subset V$, $U = U' \times U''$ tel que (b) du théorème soit valide et que toutes les congruences ci-dessus (qui sont en nombre fini) soient représentées par des relations linéaires à coefficients analytiques dans U, ce qui est possible pour U assez petit, alors, par définition de S, on a :

$$S \cap U \cap \{x \in U \ ; \ \delta(x') \neq 0\} = \{x \in U \ ; \ \delta(x') \neq 0 \ ; f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0\}.$$

D'après (6.5), cet ensemble est

$$\{x \in U \ ; \ \delta(x') \neq 0 \ ; \ P_{p+1}(x' \ ; x_{p+1}) = 0 \ ; \ \delta x_r - Q_r(x_{p+1}) = 0, \ r \geqslant p+2\},$$

ce qui prouve (a) du théorème. □

7. Points singuliers et dimension d'un ensemble analytique

7.1. Soit S un ensemble analytique d'un ouvert Ω de K^n. Un point $a \in S$ est dit *point régulier* de S, de *dimension p*, s'il existe un voisinage U de a dans Ω tel que $S \cap U$ soit une *sous-variété analytique* de dimension p de U, c'est-à-dire l'ensemble des zéros communs à $(n-p)$ fonctions coordonnées d'un système de coordonnées analytiques convenables sur U supposé assez petit. Un point $a \in S$ est dit *singulier* s'il n'est pas régulier.

La définition donnée ci-dessus d'une sous-variété W au voisinage de a dans K^n et passant par a est équivalente à la suivante : il existe $(n-p)$ germes $f_{p+1}, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_a$ tels que, dans un voisinage U de a, on ait $W = \{x \in U \ ; f_i(x) = 0 \ ; \ i = p+1, \ldots, n\}$ et $(\mathrm{d}f_{p+1})_a, \ldots, (\mathrm{d}f_n)_a$ linéairement indépendants ; on a confondu, ici, les germes f_i en a et des représentants de ces germes dans U supposé assez petit.

7.2. Proposition. — ***Soit S un ensemble analytique dans un ouvert Ω de K^n, avec $0 \in S$. On suppose $\underline{S}_0$ irréductible (i.e. $I = I(\underline{S}_0)$ est un idéal premier dans ${}_n\mathcal{O} = \mathcal{O}_0$). On choisit les coordonnées dans K^n pour que la Proposition 5.3.1 soit valide. Alors, il existe un système fondamental de voisinages $U = U' \times U''$; $U' \subset K^p$; $U'' \subset K^{n-p}$, de 0 tel que, si $\Pi : S \cap U \to U'$ désigne la restriction, à $S \cap U$, de la première projection, l'application Π soit propre et toute fibre $\Pi^{-1}(x')$; $x' \in U'$, soit un ensemble fini de points.***

Démonstration. — On choisit un voisinage $V = \{x \in K^n \ ; \ |x| < \varrho\}$ de 0 tel que les polynômes $P_r(x' \ ; x_r)$ de la proposition 5.3.1 aient leurs coefficients analytiques dans V et s'annulent sur $S \cap V$. Puisque les P_r sont distingués (cf. (β)) de la démonstration de 6.3.1, il existe $\sigma > 0$ tel que $|x'| \leqslant \sigma$ et $P_r(x' \ ; x_r) = 0$ entraînent $|x_r| \leqslant \dfrac{\varrho}{2}$, d'après le théorème de continuité des racines d'un polynôme. Alors si $U' = \{x' \in K^p \ ; \ |x'| < \sigma\}$; $U'' = \{x'' \in K^{n-p} \ ; \ |x''| < \varrho\}$, on a $\Pi^{-1}(U') \subset U' \times$

$\times\left\{x''\in K^{n-p}\ ;\ |x''|<\frac{\varrho}{2}\right\}$, donc Π est *propre*. De plus si $x\in\Pi^{-1}(x')$, alors $P_r(x'\ ;x_r)=0$, donc x_r prend seulement un nombre fini de valeurs pour $r=p+1, \ldots, n$, d'où la seconde assertion. □

7.3. Proposition. — ***Soient $\underline{S}_0$ un germe analytique irréductible, l'idéal premier $I=I(\underline{S}_0)$, U un voisinage de 0 appartenant au système fondamental de voisinages décrit dans 6.3.1 et S un ensemble analytique de U induisant $\underline{S}_0$. Alors, tout point $x\in S\cap U$ tel que $\delta(x')\neq 0$ est un point régulier de S, de dimension p et le jacobien de la projection Π a le rang p en x.***

DÉMONSTRATION. — Puisque $\delta(x')\neq 0$ et $P_{p+1}(x)=0$ au point x, on a

$$(\partial P_{p+1}/\partial x_{p+1})(x)\neq 0.$$

Alors, d'après 6.3.1, S est défini, au voisinage de x, par le système d'équations

$$P_{p+1}(x'\ ;\ x_{p+1})=0\ ;\ x_r=\delta^{-1}(x')Q_r(x'\ ;\ x_{p+1})\ ;\ r\geqslant p+2,$$

qui possède la propriété que $\mathrm{d}P_{p+1}$ et $\mathrm{d}(x_r-\delta^{-1}(x')Q_r)$ soient K-linéairement indépendants au point x ; d'après 7.1, x est un point régulier de dimension p de S. De plus $\Pi : (x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)\mapsto(x_1, \ldots, x_p)$ satisfait à la dernière assertion. □

7.4. Proposition. — ***L'entier p de 5.3.1 relatif à l'idéal $I=I(\underline{S}_a)$ où $\underline{S}_a$ est irréductible est le plus grand entier m tel que $\underline{S}_a$ étant induit par un ensemble analytique S, tout voisinage de a contienne des points réguliers de dimension m de S.***

Cela caractérise p et montre qu'il est indépendant du procédé de calcul.

DÉMONSTRATION. — Si $f : X\to Y$ est une application analytique réelle de variétés analytiques réelles telle que, pour tout $y\in f(x)$, la fibre $f^{-1}(y)$ soit discrète, alors on a $\dim X\leqslant\dim Y$; pour le vérifier, appliquer le théorème du rang, corollaire du théorème des fonctions implicites, en un point où f est de rang maximum. Alors 7.3 entraîne la conclusion. □

7.5. Définitions. — La *dimension d'un germe analytique* irréductible $\underline{S}_a$ en $a\in K^n$ est l'entier p de la Proposition 5.1.1. La *dimension* d'un germe analytique arbitraire $\underline{S}_a$ est le maximum des dimensions des composantes irréductibles $\underline{S}_{\nu,a}$ de $\underline{S}_a$.

La *dimension d'un ensemble analytique* S d'un ouvert Ω de K^n est $\max\limits_{a\in S}\dim\underline{S}_a$ où $\underline{S}_a$ est le germe défini par S en a.

Dans le cas des points réguliers, cette définition coïncide avec celle qui est donnée en 7.1.

7.6. Exercice

Soit S un ensemble analytique d'un ouvert Ω de K^n. Soit $a\in S$ et $\dim\underline{S}_a=p$. Alors tout voisinage de a contient des points réguliers de S, de dimension p. En particulier, l'ensemble des points réguliers de S est dense dans S.

7.7. Proposition. — ***L'ensemble des points singuliers d'un ensemble analytique S, de dimension p dans un ouvert Ω de K^n, est contenu dans un ensemble analytique de dimension $p-1$.***

DÉMONSTRATION. — Cela résulte des définitions et de 7.3. □

8. Cas des ensembles analytiques complexes ($K=\mathbf{C}$)

8.1. Soit I un idéal premier de ${}_n\mathcal{O}$; on choisit les coordonnées pour que 5.3.1, 7.2 et 6.3.1 soient valides. Soient $U=U'\times U''$; $\Pi : S\cap U\to U'$, comme dans 7.2. et $\underline{S}_0(I)$ le germe d'ensemble analytique défini par I en 0.

***8.2.* Proposition. —** ***Dans les hypothèses de* 8.1, *on a* : $\Pi(S\cap U)=U'$.**

DÉMONSTRATION. — Π étant propre, Im Π est fermée dans U' ; il suffit de prouver que $\Pi(S\cap U)$ est dense dans U'. Pour $x'\in U'$ tel que $\delta(x')\neq 0$, le polynôme $P_{p+1}(x' ; x_{p+1})$ a un zéro complexe x_{p+1}. Soit

$$x=\big(x' ; x_{p+1}, \delta(x')^{-1}Q_{p+2}(x_{p+1}), \dots, \delta(x')^{-1}Q_n(x_{p+1})\big) ;$$

6.1.3 entraîne $x\in S\cap U$ et $\Pi(x)=x'$. Donc $\Pi(S\cap U)$ contient l'ensemble $\{x'\in U' ; \delta(x')\neq 0\}$; il suffit de montrer que ce dernier ensemble est dense. Cela résulte de

8.2.1.* Lemme. —** ***Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbf{C}^n$ et A une partie fermée de Ω qui est localement contenue dans un ensemble analytique propre* (i.e. différent d'un ouvert de Ω), *alors $\Omega\setminus A$ est dense dans Ω.

DÉMONSTRATION. — Il suffit de prouver le résultat localement, et de supposer que A est un ensemble analytique de Ω, distinct de Ω ; alors il existe $f\in\mathcal{O}(\Omega)$ telle que $A\subset Z(f)$ ensemble des zéros de f ; $Z(f)$ est d'intérieur vide d'après le principe du prolongement analytique. □

8.3. Proposition. — ***Dans les notations ci-dessus, $\Pi|S\cap\{x\in U ; \delta(x')\neq 0\}$ est un revêtement.***

DÉMONSTRATION. — Pour des coordonnées choisies comme ci-dessus, il existe un système fondamental de voisinages $\{U_\nu\}$ de 0 tel que $\Pi(S\cap U_\nu)$ soit un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^p$, d'après 8.2 ; pour x' tel que $\delta(x')\neq 0$, $P_{p+1}(x', x_{p+1})$ possède q racines distinctes situées dans U''_ν. □

8.4. On dit que $\Pi|S\cap U$ est un *revêtement ramifié* de U'.

9. Théorème des zéros de Hilbert, ($K=\mathbf{C}$)

Il s'agit de la généralisation à ${}_n\mathcal{O}$ du théorème des zéros de Hilbert pour les polynômes.

9.1. Lemme. — ***Dans les notations du*** **n° 5,** ***pour tout $f \in {}_n\mathcal{O}$, il existe $g \in {}_n\mathcal{O} \setminus I$ et $h \in {}_p\mathcal{O}$ tels que $gf - h \in I$ quand I est premier.***

DÉMONSTRATION. — C'est trivial si $f \in I$.

Si $f \notin I$, $A = {}_n\mathcal{O}/I$ étant un ${}_p\mathcal{O}$-module de type fini, il existe un polynôme unitaire, à coefficients dans ${}_p\mathcal{O}$ qui est annulé par $\bar{f}$

$$\bar{f}^m + \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu(x')\bar{f}^\nu = 0. \tag{9.1}$$

Comme I est premier et $f \notin I$, on peut supposer, dans (9.1), que $\bar{f}$ n'est pas en facteur au premier membre, alors $a_0(x') \neq 0$ et

$$f\Big[f^{m-1} + \sum_{\nu=1}^{m-1} a_\nu(x') f^{\nu-1}\Big] + a_0(x') \in I. \quad \square$$

9.2. Lemme. — ***Soient $f \in {}_n\mathcal{O}$, I un idéal premier de ${}_n\mathcal{O}$; si $U = U' \times U''$ comme en*** **6.3** ***et assez petit et si, pour tout $x' \in U'$ tel que $\delta(x') \neq 0$, il existe $x \in S \cap U$ avec $\Pi(x) = x'$*** **et** ***$f(x) = 0$, alors $f \in I$.***

DÉMONSTRATION. — Supposons $f \notin I$, d'après 9.1, il existe $g \notin I$ tel que $gf \equiv h \pmod{I}$ avec $h \in {}_p\mathcal{O}$. Alors $h \neq 0$ car I est premier, donc $h \notin I$ car ${}_p\mathcal{O} \cap I = \{0\}$ et, pour tout x assez voisin de 0, appartenant à S et tel que $\delta(x') \neq 0$, et que $f(x) = 0$, on a $h(x') = f(x) \cdot g(x) = 0$, alors x' décrit un ouvert de $\mathbf{C}^p$, donc $h = 0$ (comme l'élément de ${}_p\mathcal{O}$), en particulier $h \in I$, contradiction. $\square$

9.3. Soit $\mathfrak{A}$ un idéal de ${}_n\mathcal{O}$, par définition, *le radical* de $\mathfrak{A}$ est

$$\operatorname{rad} \mathfrak{A} = \{f \in {}_n\mathcal{O} \,;\, \exists m \in \mathbf{N}^* ; f^m \in \mathfrak{A}\}.$$

9.4. Théorème des zéros. — ***Soient $\mathfrak{A}$ un idéal de ${}_n\mathcal{O}$ et $\underline{S}_0 = \underline{S}(\mathfrak{A})$; alors $I(\underline{S}_0) = \operatorname{rad} \mathfrak{A}$.***

DÉMONSTRATION. — (a) Si $\mathfrak{A}$ est premier, alors tout représentant de $f \in I(\underline{S}_0)$ s'annule sur $S \cap U \cap \{x' \in U' \,;\, \delta(x') \neq 0\}$ pour $U = U' \times U''$ voisinage ouvert assez petit de 0 et S, ensemble analytique de U induisant $\underline{S}_0$ en 0. D'après 9.2, on a $f \in \mathfrak{A}$, donc $I(\underline{S}_0) = \mathfrak{A} = \operatorname{rad} \mathfrak{A}$, car $\mathfrak{A}$ est premier.

(b) Si $\mathfrak{A}$ est *primaire* (i.e. rad $\mathfrak{A}$ est premier) ; alors $\underline{S}(\mathfrak{A}) = \underline{S}(\operatorname{rad} \mathfrak{A})$ entraîne $I(\underline{S}_0) = \operatorname{rad} \mathfrak{A}$ d'après (a).

(c) Si $\mathfrak{A}$ est arbitraire $\neq \{0\}$, puisque ${}_n\mathcal{O}$ est noethérien, d'après le théorème de décomposition de Noether, on a : $\mathfrak{A} = \bigcap_{\nu=1}^{k} \mathfrak{q}_\nu$, $\mathfrak{q}_\nu$ primaire ; alors $\underline{S}(\mathfrak{A}) = \bigcup_{\nu=1}^{k} \underline{S}(\mathfrak{q}_\nu)$ et, d'après (b),

$$I(\underline{S}(\mathfrak{A})) = \bigcap_{\nu=1}^{k} I(\underline{S}(\mathfrak{q}_\nu)) = \bigcap_{\nu=1}^{k} \operatorname{rad} \mathfrak{q}_\nu = \operatorname{rad} \mathfrak{A}. \quad \square$$

Appendice
VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES
FORMES DIFFÉRENTIELLES
CHAÎNES DIFFÉRENTIABLES

1. Variétés différentielles

1.1. Cartes

Sur un espace topologique X, une *carte* h de X est un homéomorphisme d'un ouvert U de X sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ pour un certain entier naturel n. L'ouvert U est *le domaine de la carte* h ; on dit que c'est un *ouvert* de carte. On désigne parfois la carte h par le couple (h, U).

Si V est un ouvert de X contenu dans U, alors $h|V$ est une carte de domaine V.

1.2. Cartes compatibles

On dit qu'une application f analytique réelle d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans un ouvert de $\mathbf{R}^m$ est de classe C^ω ; f est alors de classe C^∞.

a) Deux cartes h et h' de X, de *même domaine* U sont dites *compatibles* si les deux homéomorphismes réciproques : $h' \circ h^{-1}$: $h(U) \to h'(U)$
$h \circ h'^{-1}$: $h'(U) \to h(U)$ sont de classe C^q pour $q \in \mathbf{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$, au sens des applications d'un ouvert d'un espace numérique dans un autre.

b) Si $q \geqslant 1$ et si n et n' sont des entiers associés aux cartes h et h', comme la dérivée $D(h' \circ h^{-1})(x)$ pour $x \in h(U)$ est une bijection linéaire : $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n'}$, on a : $n = n'$.

Si $q = 0$, on a aussi $n = n'$ d'après le théorème de Brouwer.

c) *Deux cartes* (h, U) et (h', U') sont dites *compatibles* si
ou bien $U \cap U' = \emptyset$;
ou bien si $h|U \cap U'$ et $h'|U \cap U'$ sont compatibles au sens de a).

1.3. Atlas

Un *atlas de X*, de classe C^q, est un ensemble de cartes deux à deux compatibles, dont les domaines constituent un recouvrement ouvert de X.

Deux *atlas* de classe C^q sont dits *compatibles* si leur réunion est un atlas de classe C^q ; on vérifie que la compatibilité est une relation d'équivalence dans l'ensemble des atlas de classe C^q de X.

1.4. Variété différentielle

On appelle *variété différentielle de classe* C^q un espace topologique séparé, réunion dénombrable de compacts, muni d'une classe d'équivalence d'atlas de classe C^q.

1.5. Pour tout $x \in X$, il existe une carte (h, U) de X avec $x \in U$; $h : U \to \mathbf{R}^n$; d'après 1.2b, l'entier n ne dépend que de x, c'est la *dimension de X en x* ; il est clair que n est fixe sur chacune des composantes connexes de X ; n est appelé la dimension de la composante connexe. Une variété différentielle, dont toutes les composantes connexes sont de dimension n, sera dite de *dimension n.*

Une variété différentielle de classe C^ω est dite *analytique réelle.*

1.6. Applications différentiables

Soient X et Y deux variétés différentielles de classe C^q. Une *application* $f : X \to Y$ est dite *p-fois continûment différentiable* ou (de classe) C^p $(p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$; $p \leqslant q)$ si elle est continue et vérifie la condition suivante : pour tout couple de cartes (h, U), (k, V) de X et de Y respectivement tel que $f(U) \subset V$, l'application $k \circ (f|U) \circ h^{-1} : h(U) \to k(V)$ est de classe C^p en tant qu'application d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

En particulier $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$) muni de sa structure $\mathbf{R}$-vectorielle est une variété différentielle de toute classe et toute application $C^p : X \to \mathbf{R}$ (resp. $X \to \mathbf{C}$) est appelée une *fonction* (de classe) C^p sur $\mathbf{X}$.

1.7. Partition C^p de l'unité sur une variété différentielle

La définition et le théorème d'existence sont les mêmes que sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

1.8. Coordonnées locales

Soit (h, U) une carte d'une variété différentielle X de classe C^q, alors h est une application C^q :

$$\begin{aligned} U &\to h(U) \subset \mathbf{R}^n \\ x &\mapsto h(x) = \big(x_1(x), \ldots, x_n(x)\big) \end{aligned}$$

où $x_j : \begin{array}{l} U \to \mathbf{R} \\ x \mapsto x_j(x) \end{array}$ $(j=1, \ldots, n)$ est une fonction C^q sur U ; les fonctions $x_1, \ldots, x_n$ *sont appelées les coordonnées de X sur U définies par la carte* (h, U).

2. Différentielle en un point

2.1. Une carte (h, U) de X telle que $x \in U$ est dite une *carte de X en x.*

En un point x d'une variété X de classe C^q $(q \geqslant 1)$, on considère l'ensemble $\mathscr{F}_x$ des fonctions C^1 définies au voisinage de x dans X, i.e. pour toute $f \in \mathscr{F}_x$, il existe un voisinage V de x dans X tel que f soit C^1 sur V à valeurs dans $\mathbf{C}$.

Soient $f, g \in \mathscr{F}_x$, alors il existe un voisinage ouvert V de x contenu dans U sur lequel f et g sont C^1. On considère la relation $\mathscr{R}$ sur $\mathscr{F}_x$ définie comme suit : $f \mathscr{R} g$ signifie :

$$D(f \circ h^{-1}) = D(g \circ h^{-1}) \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n ; \mathbf{C}) \approx \mathbf{C}^n \tag{1}$$

où $D(f \circ h^{-1})$ désigne la dérivée de la fonction $f \circ h^{-1} : h^{-1}(V) \to \mathbf{C}$ au point $h(x)$; (h, U) étant choisie, il est clair que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence. $\mathscr{R}$ ne dépend pas de la carte (h, U), en effet (h', U') étant une autre carte de X en x, quitte à retrécir U et U', on peut supposer $U' = U$. Alors $D(f \circ h'^{-1}) = D((f \circ h^{-1}) \circ (h \circ h'^{-1})) = D(f \circ h^{-1}) \circ D(h \circ h'^{-1})$; $h \circ h'^{-1}$ étant un difféomorphisme $h'(U) \to h(U)$, la relation (1) est équivalente à

$$D(f \circ h'^{-1}) = D(g \circ h'^{-1}). \tag{2}$$

2.2. Espace cotangent en un point

$\mathscr{F}_x$ est un espace $\mathbf{C}$-*vectoriel,* en effet si $f, g \in \mathscr{F}_x$, il existe un voisinage V de x sur lequel f et g sont C^1 ; il en est de même de $f+g$ et, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, de λf. La relation $\mathscr{R}$ est compatible avec la structure vectorielle de $\mathscr{F}_x$, alors $\mathscr{F}_x/\mathscr{R}$ est un espace $\mathbf{C}$-vectoriel.

Considérons l'application

$$\theta^*_{hx} : \mathscr{F}_x/\mathscr{R} \to \mathscr{L}(\mathbf{R}^n ; \mathbf{C}) \approx \mathbf{C} \otimes \mathbf{R}^n \approx \mathbf{C}^n \tag{3}$$
$$\text{classe de } f \mapsto D(f \circ h^{-1}).$$

θ^*_{hx} est une application $\mathbf{C}$-linéaire injective ; $(x_1, \ldots, x_n)$ désignant les coordonnées locales en x définies par la carte h, $(D(x_j \circ h^{-1}))$ est une base de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n ; \mathbf{C})$, donc l'application (3) est surjective : c'est un isomorphisme. On désigne l'espace vectoriel $\mathscr{F}_x/\mathscr{R}$ par $T^*_x(X)$ et on l'appelle *l'espace cotangent complexe à X en x.* Dans la carte h, on désigne par $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ les éléments de $T^*_x(X)$ de représentants $x_1, \ldots, x_n$; ils constituent une base de $T^*_x(X)$; les éléments de $T^*_x(X)$ sont appelés les *différentielles en x.* On convient de noter f la fonction $f \circ h^{-1}$ définie sur $h(U) \subset \mathbf{R}^n$; alors f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ et d'après l'expression de $D(f \circ h^{-1})$, la différentielle $\mathrm{d}_x f$ de f en x est $\mathrm{d}_x f = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, \mathrm{d}x_j$; les $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ sont des nombres ; les éléments de $T^*_x(X)$ s'écrivent donc, dans le système de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ sous la forme $\omega = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, \mathrm{d}x_j$, avec $\lambda_j \in \mathbf{C}$.

2.3. Effet d'un changement de carte

Considérons deux cartes $(h, U), (k, U)$ en x. Toute $f \in \mathscr{F}_x$ définit une forme **C**-linéaire sur $\mathbf{R}^n$ d'après 2.2. Réciproquement, soit $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n ; \mathbf{C})$; en désignant encore par u la restriction de u à $h(U)$; $u \circ h$ est une fonction C^q sur U, donc appartient à $\mathscr{F}_x$ et on a $\theta_{hx}^*(\mathrm{d}(u \circ h)) = D(u \circ h \circ h^{-1}) = Du = u$, car u étant linéaire est égale à sa dérivée. De même

$$\theta_{kx}^*(\mathrm{d}(u \circ h)) = D(u \circ h \circ k^{-1}) = u \circ D(h \circ k^{-1}) ;$$

mais $\theta_{hx}^{*-1} u = \mathrm{d}(u \circ h)$; alors $\theta_{kx}^* \circ \theta_{hx}^{*-1}(u) = \theta_{kx}^*(\mathrm{d}(u \circ h)) = u \circ D(h \circ k^{-1}) = {}^tD(h \circ k^{-1})u$; $h \circ k^{-1}$ étant un difféomorphisme : $k(U) \to h(U)$, ${}^tD(h \circ k^{-1})$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n ; \mathbf{C})$ sur lui-même.

3. Fibré cotangent ; formes différentielles de degré 1

3.1. On pose $T^*(X) = \bigcup_{x \in X} T_x^*(X)$ (réunion disjointe) et on note $\pi_X^* : T^*(X) \to X$ la surjection qui envoie $d_x f \in T_x^*(X)$ sur $x \in X$.

3.2. Théorème. — ***X étant une variété de classe C^q $(q \geq 1)$ il existe sur $T^*(X)$, une structure de variété différentielle de classe C^{q-1} telle que π_X^* soit C^{q-1} et que, pour toute carte (h, U) de X, l'application***

$$\Theta_h : U \times (\mathbf{C}^n)' \to \pi_X^{*-1}(U) \quad \textit{avec} \quad (\mathbf{C}^n)' = \mathscr{L}(\mathbf{R}^n ; \mathbf{C})$$

$$(x, u) \mapsto \mathrm{d}_x(u \circ h)$$

soit un difféomorphisme C^{q-1}.

Démonstration. — On considère un recouvrement (U_α) de X par des ouverts de cartes, h_α étant une carte de domaine U_α. On désigne encore par h_α la restriction $h_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta$, alors $f_{\alpha\beta} = h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$ est un difféomorphisme $C^q : h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ appelé *difféomorphisme de transition de X*.

Il est clair que, réciproquement, la donnée d'un recouvrement d'un espace topologique séparé X par des domaines U_α de cartes h_α et d'une famille $(f_{\alpha\beta})$ de difféomorphismes C^q telle que

$$f_{\alpha\beta} : h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

avec $f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma} = f_{\alpha\gamma}$ définit un atlas $C^q(h_\alpha, U_\alpha)_\alpha$ sur X. On va appliquer cette remarque à la construction de $T^*(X)$. Considérons

$$\Theta_{h_\alpha} : U_\alpha \times (\mathbf{C}^n)' \to \pi_X^{*-1}(U_\alpha)$$

$$(x, u) \mapsto \mathrm{d}_x(u \circ h_\alpha).$$

Les Θ_{h_α} définissent, par transport de topologie de $U_\alpha \times (\mathbf{C}^n)'$, une topologie sur $T^*(X)$

$$(h_\alpha, \mathrm{id}_{(\mathbf{C}^n)'}) \circ \Theta_{h_\alpha}^{-1} : \pi_x^{*-1}(U_\alpha) \to h_\alpha(U_\alpha) \times (\mathbf{C}^n)'$$

définit une carte de $T^*(X)$.

D'après 2.3, l'application

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha\beta}^* : h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times (\mathbf{C}^n)' &\to h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times (\mathbf{C}^n)' \\ (y, u) &\mapsto \big(f_{\alpha\beta}\, y, u \circ D(h_\alpha \circ h_\beta^{-1})^{-1}\big) \\ &= \big(f_{\alpha\beta}\, y, {}^tD(f_{\beta\alpha})^{-1} u\big)\end{aligned}$$

est un difféomorphisme C^q. Les $\psi_{\beta\alpha}^*$ définissent les difféomorphismes de transition d'une structure de variété différentielle sur $T^*(X)$ qui vérifie les conditions du théorème. $\square$

3.3. Fibré cotangent

1) D'après la démonstration de 3.2, il existe un voisinage ouvert U de x dans X (qui est ici le domaine d'une carte h) et un difféomorphisme Θ_h tel que $\pi_X(\Theta_h(y, u)) = y$ pour tout $y \in U$ et tout $u \in (\mathbf{C}^n)'$. Alors le triple (E, X, π_X^*), avec $E = T^*(X)$, est appelé une fibration localement triviale de *base* X, de *fibre type* $(\mathbf{C}^n)'$ ($\approx \mathbf{C}^n$), *d'espace total* E ; pour tout $x \in E$, $E_x = \pi_X^{-1}(x)$ est appelé *la fibre de* E *en* x.

Une *section* s de (E, X, π_X^*) est une application continue : $X \to E$ telle que $\pi_X \circ s = \mathrm{id}_X$, autrement dit, l'image de x par s appartient à la fibre E_x de E en x.

Pour tout $u \in (\mathbf{C}^n)'$, $x \mapsto \mathrm{d}_x(u \circ h)$ est une *section* C^{q-1} *de* E *au-dessus de* U.

2) $(e_j)_{j=1,\dots,x}$ étant la base canonique de $\mathbf{C}^n$ et (e_i') la base duale, on a : $\mathrm{d}x_i = \mathrm{d}_x(e_i' \circ h)$. Alors l'application $\Theta_h : (x, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \mathrm{d}x_i$ est un difféomorphisme.

Il en résulte : pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x dans X (ici le domaine de la carte h), un espace vectoriel (ici $(\mathbf{C}^n)'$) et un difféomorphisme Θ_h satisfaisant à 1) ci-dessus et tel que, pour tout $y \in U$, $\Theta_h(y, .) : (\mathbf{C}^n)' \to \pi_X^{*-1}(y) = E_y$ (ici $T_y^*(X)$) est un isomorphisme de $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

Alors (E, T, π_X^*) qu'on désigne aussi par E est un *(espace) fibré vectoriel complexe*. On dit que $T^*(X)$ est *le fibré cotangent complexe à la variété différentielle* X.

3.4. Remarque. — 1) et 2) permettent, sans difficulté supplémentaire, de définir un *fibré vectoriel complexe* de fibre de dimension m sur X et les sections de ce fibré. L'entier m est appelé *le rang du fibré.*

3.5. Une section ω de $T^*(X)$ au-dessus d'une partie A de X (en général A sera un ouvert de X) est appelée une *forme différentielle de degré* 1, (ou une 1-*forme différentielle*) *sur* A.

U étant un ouvert de carte de X sur lequel $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées locales, $x \mapsto \mathrm{d}x_j(x)$ (3.3) est une 1-forme différentielle sur U notée $\mathrm{d}x_j$; pour tout point $x \in U$, $(\mathrm{d}x_j)(x)$; $j = 1, \dots, n$, est une base de $T_x^*(X)$; on dit que $\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_n$ forment un *repère de* $T^*(X)$ *au-dessus de* U et qu'elles sont *associées à la carte* h ; toute

1-forme différentielle ω sur U s'écrit d'une seule façon

$$x \mapsto \omega(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\,\mathrm{d}x_j$$

où les a_j sont des fonctions scalaires à valeurs complexes sur U.

Si la section ω est une application différentiable de classe C^r $(r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\})$, on dit que la 1-forme différentielle ω est (de classe) C^r.

4. Formes différentielles sur X

4.1. Produit tensoriel de deux K-espaces vectoriels ($K=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$)

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $Z(E, F)$ le $\mathbf{Z}$-module libre engendré par l'ensemble des éléments (x, y) de $E \times F$; c'est l'ensemble des combinaisons linéaires formelles (finies) à coefficients entiers rationnels des éléments de $E \times F$ muni de l'addition et de la multiplication par les entiers. On désigne par $Y(E, F)$ le sous-module de $Z(E, F)$ engendré par les éléments

$$\begin{cases}(x_1+x_2, y)-(x_1, y)-(x_2, y)\\(x, y_1+y_2)-(x, y_1)-(x, y_2)\\(\lambda x, y)-(x, \lambda y)\end{cases} \tag{4}$$

où $x, x_1, x_2 \in E$; $y, y_1, y_2 \in F$; $\lambda \in K$.

Le $\mathbf{Z}$-module quotient $Z(E, F)/Y(E, F)$ est appelé le *produit tensoriel de E et de F sur K* et est noté $E \otimes_K F$; la projection canonique $Z(E, F) \to E \otimes_K F$ envoie (x, y) sur $x \otimes y$ (par définition de cette dernière notation).

Pour tout $k \in K$, on considère l'homomorphisme de $\mathbf{Z}$-module

$$Z(E, F) \to E \otimes_K F$$

qui applique tout élément (x, y) de $Z(E, F)$ $(x \in E, y \in F)$ sur $(kx) \otimes y$. Cet homomorphisme est nul sur $Y(E, F)$, car il s'annule sur les éléments de la forme (4), donc il définit un $\mathbf{Z}$-homomorphisme de $E \otimes_K F$ dans lui-même, i.e. une loi de composition

$$K \times (E \otimes_K F) \to E \otimes_K F$$

qui, avec l'addition, munit $E \otimes_K F$ d'une structure de K-espace vectoriel que l'on utilisera désormais.

4.2. Algèbre tensorielle ; algèbre extérieure

E étant un espace vectoriel sur K, par récurrence sur le nombre de facteurs, on définit le produit tensoriel de m exemplaires de E, qu'on note $\otimes^m E$, par $\otimes^m E = E \otimes_K \otimes^{m-1} E$; on pose $\otimes^0 E = K$; on a : $\otimes^1 E = E$ et on pose : $\otimes E = \bigoplus\limits_{p \geqq 0} \otimes^p E$.

On définit, sur $\otimes E$, une multiplication distributive par rapport à l'addition, notée $\otimes$, par :

$$(x_1\otimes\ldots\otimes x_p)\otimes(x_{p+1}\otimes\ldots\otimes x_{p+q}) = x_1\otimes\ldots\otimes x_{p+q} \quad \text{pour} \quad x_i\in E \quad (i = 1, \ldots, p+q).$$

La multiplication $\otimes$ est appelée le *produit tensoriel dans E.*

L'addition, la multiplication par des éléments de K et le produit tensoriel $\otimes$ définissent, sur $\otimes E$, une structure de K-algèbre ; $\otimes E$ muni de cette structure d'algèbre est appelée *l'algèbre tensorielle de E.*

On appelle *algèbre extérieure* du K-espace vectoriel E et on note $\Lambda^\bullet E$ la K-algèbre quotient de $\otimes E$ par l'idéal bilatère I engendré par les éléments $x\otimes x$ $(x\in E)$. La multiplication déduite de $\otimes$ par passage au quotient est notée $\wedge$ et est appelée la *multiplication extérieure.* Si $x, y\in E$, on a : $x\wedge y = -y\wedge x$; on dit que la multiplication $\wedge$ est *anticommutative.*

On pose $I_p = \otimes^p E\cap I$; $\Lambda^p E = \otimes^p E/I_p$; alors, on a : $\Lambda^\bullet E = \bigoplus_{p\geqq 0} \Lambda^p E.$

On dit que les éléments de $\Lambda^p E$ sont de degré p ; $\Lambda^\bullet E$ est une *K-algèbre graduée* ; en particulier, la multiplication extérieure envoie $\Lambda^p E\times\Lambda^q E$ dans $\Lambda^{p+q}E.$

4.3. Soit $\Lambda^\bullet T^*(X)$ le fibré vectoriel sur X construit à partir de l'algèbre extérieure $\Lambda^\bullet T_x^*(X)$ $(x\in X)$ par le procédé utilisé pour construire $T^*(X)$ à partir de $T_x^*(X)$.

Par définition, les *formes différentielles sur un ouvert U* de X sont les sections, au-dessus de U, du fibré $\Lambda^\bullet T^*(X)$.

Une *p-forme différentielle,* ou *forme différentielle de degré p* est une section du fibré $\Lambda^p T^*(X)$. Au-dessus de l'ouvert U d'une carte sur lequel les fonctions coordonnées sont $x_1, \ldots, x_n$, une telle p-forme ω s'écrit, compte tenu de l'anticommutativité de $\wedge$

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} a_{i_1\ldots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_p} \tag{5}$$

où les $a_{i_1\ldots i_p}$ sont des fonctions sur U ; ω est dite C^r si c'est une section C^r de $\Lambda^p T^*(X)$; alors les fonctions $a_{i_1\ldots i_p}$ sont C^r sur U.

4.4. Remarques. — a) La construction ci-dessus de l'algèbre extérieure $\Lambda^\bullet E$ d'un K-espace vectoriel E est valide quel que soit le corps commutatif K ; plus généralement, A étant un anneau commutatif unitaire, la construction de l'algèbre extérieure s'étend, sans changement, au cas où E est un A-module. En particulier, les formes différentielles C^r sur un ouvert U de X constituent une algèbre extérieure sur l'anneau $C^r(U)$ des fonctions C^r sur U.

b) Si α et β sont des formes différentielles de degrés p, q respectivement, sur l'ouvert U de X, on a :

$$\alpha\wedge\beta = (-1)^{pq}\beta\wedge\alpha.$$

c) Supposons que U soit un ouvert de carte et soient $(x_1, \ldots, x_n)$, $(x_1', \ldots, x_n')$ deux systèmes de coordonnées sur U. Soit ω la forme différentielle, sur U, d'expression

(5) dans le système de coordonnées (x_i) ; alors $\mathrm{d}x_i = \sum_{j=1}^{n} (\partial x_i/\partial x'_j)\,\mathrm{d}x'_j$;

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} a_{i_1\ldots i_p}\Big(\sum_{j=1}^{n} (\partial x_{i_1}/\partial x'_j)\,\mathrm{d}x'_j\Big)\wedge\ldots\wedge\Big(\sum_{j=1}^{n} (\partial x_{i_p}/\partial x'_j)\,\mathrm{d}x'_j\Big) =$$

$$= \sum_{j_1<\ldots<j_p}\ \sum_{i_1<\ldots<i_p} a_{i_1\ldots i_p}\frac{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})}{D(x'_{j_1}, \ldots, x'_{j_p})}\,\mathrm{d}x'_{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x'_{j_p}.$$

5. Variétés orientables ; variétés orientées ; intégrale d'une forme différentielle de degré maximum

5.1. Théorème. — ***Sur une variété différentielle X, de classe C^1, de dimension n, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :***

(a) ***il existe, sur X, une n-forme différentielle continue v, à coefficients réels, telle que, pour tout $x\in X$, on ait $v(x)\neq 0$;***

(b) ***il existe un atlas $\mathfrak{A}$, dont les ouverts de cartes sont connexes, tel que, pour deux cartes h, $h'\in\mathfrak{A}$, restreintes au même ouvert U de X, on ait : $J(h'\circ h^{-1})(y)>0$, pour tout $x\in U$, $y=h(x)$; $J(h'\circ h^{-1})$ désignant le jacobien de l'application $h'\circ h^{-1} : h(U)\to h'(U)$.***

DÉMONSTRATION. — (a)$\Rightarrow$(b) : $(x_j)_{j=1,\ldots,n}$ et $(x'_j)_{j=1,\ldots,n}$ désignant les fonctions coordonnées de deux cartes h et h' de même domaine connexe U, on a : $v(x)=$ $=W(x)\,\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_n=W'(x)\,\mathrm{d}x'_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x'_n$ où W, W' sont des fonctions $U\to\mathbf{R}$ sans zéro. On a : $\mathrm{d}x'_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x'_n=J(h'\circ h^{-1})(y)\,\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_n$, où $y=h(x)$. Considérons un atlas $\mathfrak{A}'$ de X à ouverts de cartes connexes, alors si $h, h'\in\mathfrak{A}'$, les fonctions W et W' ont un signe constant sur le domaine de h et de h' respectivement ; donc il existe un atlas $\mathfrak{A}$ sur X pour lequel, dans les notations ci-dessus, si $h, h'\in\mathfrak{A}$, les fonctions W et W' ont le même signe ; (on passe d'une carte de $\mathfrak{A}'$ à une carte de $\mathfrak{A}$ en échangeant, éventuellement, deux coordonnées). Alors, comme $W'(x)J(h'\circ h^{-1})(y)=$ $=W(x)$, pour $x\in U\cap U'$, où U et U' sont les domaines connexes des cartes h, h', on a : $J(h'\circ h^{-1})(y)>0$.

(b)$\Rightarrow$(a) se démontre en utilisant une partition C^1 de l'unité subordonnée à un recouvrement par des ouverts de cartes de $\mathfrak{A}$.

5.2. Si l'une des conditions (a), (b) de 5.1 est satisfaite, on dit que la variété différentielle X est *orientable*.

Sur une variété orientable connexe, on choisit une forme différentielle v de degré maximum satisfaisant à (a) ; les atlas satisfaisant à la condition (b) se divisent en deux classes pour chacune desquelles le coefficient de v, dans une carte, a un signe déterminé. Le choix d'une des deux classes d'atlas est une *orientation de la variété.*

EXEMPLE. — Sur $\mathbf{R}^n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, une orientation est définie par $\mathrm{d}\xi_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\xi_n$ dont le coefficient dans la carte identité est $+1$; l'autre orientation est définie par $-\mathrm{d}\xi_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\xi_n$.

5.3. Intégrale d'une forme différentielle de degré maximum sur une variété orientée

On va considérer des formes différentielles à coefficients localement intégrables, dites formes L^1_{loc} ; cela généralise la définition de n° 4.3.

Soit α une n-forme différentielle L^1_{loc} sur la variété orientée X et soit $\mathfrak{A}$ un atlas de l'orientation.

On appelle *support* d'une forme différentielle ω le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel ω est nulle ; c'est un fermé noté $\operatorname{spt}\omega$.

On suppose $\operatorname{spt}\alpha$ *compact*. Dans le cas où $\operatorname{spt}\alpha$ est contenu dans le domaine U d'une carte h de $\mathfrak{A}$, de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$, on a : $\alpha = a\, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$. Par définition, l'intégrale de α sur X est

$$(6)\quad \int_X \alpha = \int_U \alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} a(h^{-1}(y))\, dx_1 \ldots dx_n \quad \text{où} \quad x \in U \quad \text{et} \quad y = h(x);$$

le dernier membre est une intégrale multiple sur $\mathbf{R}^n$ orienté par $\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$. Vérifions que (6) *est indépendante de la carte.*

Pour une autre carte $h' \in \mathfrak{A}$, de même domaine U, on a, avec $y' = h'(x)$:

$$(7)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} a'(h'^{-1}(y'))\, \mathrm{d}x'_1 \ldots \mathrm{d}x'_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} a'(h'^{-1} \circ h' \circ h^{-1}(y)) J(h' \circ h^{-1})(y)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \,;$$

car $J(h' \circ h^{-1})(y) > 0$; mais

$$a'(x)\, \mathrm{d}x'_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x'_n = a(x)\, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n = a'(x) J(h' \circ h^{-1})(y)\, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Le dernier membre de (7) est égal au dernier membre de (6).

Pour une forme α à support compact quelconque sur X, on considère une partition C^∞ de l'unité $(\varphi_i)_{i \in I}$ subordonnée à un recouvrement ouvert (U_i) par des ouverts de cartes de $\mathfrak{A}$ et on pose

$$(8)\qquad \int_X \alpha = \sum_{i \in I} \int_X \varphi_i \alpha.$$

La somme du second membre est finie puisque $\operatorname{spt}\alpha$ est compact ; elle est indépendante de la partition de l'unité choisie : on le vérifie en considérant une autre partition $(\psi_j)_{j \in J}$ subordonnée à un recouvrement (V_j) par des ouverts de cartes de $\mathfrak{A}$; alors les deux expressions (8) associées sont égales à $\sum_{(i,j) \in I \times J} \int \varphi_i \psi_j \alpha$.

L'expression $\int_X \alpha$ définie ci-dessus est, par définition, *l'intégrale de la n-forme différentielle α sur la variété orientée X.* On remarque que, *si l'on change l'orientation de X, l'intégrale est multipliée par* -1.

6. Image réciproque par une application différentiable ; différentielle extérieure ; chaînes différentiables

6.1. Soit $\mu : X \to Y$ une application C^1 de variétés différentielles. Soient (h, U), (k, V) deux cartes de X et de Y respectivement, de coordonnées respectives $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_m)$ telles que $\mu(U) \subset V$. Alors, pour toute forme différentielle ψ sur un ouvert W de Y dont la restriction à $V \cap W$ s'écrit $\sum b_{j_1 \ldots j_p}(y)\, dy_{j_1} \wedge \ldots \wedge dy_{j_p}$, on pose

$$\mu^* \psi = b_{j_1 \ldots j_p} \circ \mu(x)\, d(y_{j_1} \circ \mu)(x) \wedge \ldots \wedge d(y_{j_p} \circ \mu)(x).$$

$\mu^* \psi$ est appelée l'image réciproque de ψ par μ.

On vérifie que cette expression est indépendante des cartes choisies et permet de définir $\mu^* \psi$ sur l'ouvert $\mu^{-1}(V \cap W)$ de X. En utilisant des cartes de Y dont les domaines constituent un recouvrement de W, on définit également $\mu^* \psi$ sur $\mu^{-1}(W)$. Dans le cas particulier où μ est *propre* (i.e. telle que l'image réciproque, par μ, de tout compact de Y est un compact de X), pour toute ψ à support compact, $\mu^* \psi$ est à support compact.

6.2. Différentielle extérieure

a) Soit φ une p-forme différentielle C^1 définie sur un ouvert W d'une variété différentielle X. Sur un ouvert de carte U, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ sur lequel φ est définie, on a :

$$\varphi = \sum a_{i_1 \ldots i_p}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

On pose:

$$d\varphi = \sum_{i_1 \ldots i_p} da_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} =$$

$$= \sum_{i_1 \ldots i_p} \sum_{j} \frac{\partial a_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

et on vérifie que cette expression est *indépendante de la carte choisie* ; c'est une $(p+1)$-forme différentielle dite *différentielle extérieure de φ sur U.* La définition de $d\varphi$ s'étend à W. On vérifie immédiatement les propriétés suivantes : α et β étant deux formes différentielles sur un ouvert W :

$$d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta;$$

si α est de degré p,

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta;$$

si α est C^2

$$d^2 \alpha = dd\alpha = 0;$$

spt $d\varphi \subset$ spt φ ; d est un endomorphisme **C**-linéaire de l'espace vectoriel des formes différentielles C^∞ ;

$$\text{pour toute application } C^1 \quad \mu : X \to Y, \quad \mu^* d = d\mu^*.$$

On dit qu'une forme différentielle C^1 ω est d-*fermée* (ou simplement *fermée*) si $d\omega=0$; en particulier, si α est C^2 et si $\omega=d\alpha$, alors $d\omega=0$.

b) **Lemme. —** ***Soient X une variété différentielle orientée, de dimension n et φ une $(n-1)$-forme différentielle C^1 sur X, à support compact, alors $\int_X d\varphi=0$.***

DÉMONSTRATION. — Soit (ψ_j) une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement (U_j) de X par des ouverts de cartes (h_j, U_j) d'un atlas de l'orientation. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées locales de la carte h_j ; on a $\operatorname{spt}\psi_j\varphi\subset U_j$. Alors, par définition,

$$\int_X d(\psi_j\varphi) = \int_{h_j(U_j)} d(\psi_j\varphi)(h_j(x)),$$

posons

$$\psi_j\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i\, dx_1\wedge\dots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\dots\wedge dx_n\ ;$$

$$\int_X d(\psi_j\varphi) = \sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{i-1}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\,dx_1\dots dx_n\ ;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\,dx_1\dots dx_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\,dx_i\right]dx_1\dots\widehat{dx_i}\dots dx_n,$$

mais $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\,dx_i=[a_i]_{-\infty}^{+\infty}=0$ car a_i est à support compact ; donc $\int_X d(\psi_j\varphi)=$ $=0$; $\int_X d\varphi=\int_X d(\sum_j\psi_j\varphi)=\sum_j\int_X d(\psi_j\varphi)$ car φ étant à support compact, la somme est finie, alors $\int_X d\varphi=0$. □

6.3. Chaînes différentiables

a) *Variétés à bord.*

Un *demi-espace fermé* de $\mathbf{R}^n$ est, pour un choix convenable des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbf{R}^n$, l'ensemble $\{(x_1, \dots, x_n)\in\mathbf{R}^n\ ;\ x_1\leqslant 0\}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{R}^n$.

Soit Z un espace topologique séparé, on appelle *carte* h de Z un homéomorphisme d'un ouvert U de Z sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ ou sur un ouvert d'un demi-espace fermé de $\mathbf{R}^n$. On a une notion de cartes compatibles comme au n° 1.2, les cartes du premier type se comportant comme celles du n° 1.2, celles du deuxième type sont telles que $h'\circ h^{-1}$ soit un difféomorphisme C^k d'ouverts de demi-espaces fermés ; par définition, les fonctions C^k aux points du bord d'un demi-espace fermé ont des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k en $x_2, \dots, x_n$ et des demi-dérivées continues jusqu'à l'ordre k en x_1 ; on montre que cette condition est équivalente à l'existence d'un prolongement C^k sur un voisinage de $x_1=0$ dans $\mathbf{R}^n$.

On a, de même, les notions d'atlas compatibles.

L'espace topologique Z, supposé réunion dénombrable de compacts, muni d'une classe d'équivalence d'atlas est appelé une *variété différentielle à bord* ; l'entier n ci-dessus est appelé la *dimension* de Z.

Exemple. Une boule fermée de $\mathbf{R}^n$, munie de la topologie et de la structure différentielle induites par celles de $\mathbf{R}^n$ est une variété à bord.

b) *Variétés à coins.* Plus généralement, on a la notion de *variétés à coins Z* définies à l'aide de cartes compatibles et qui sont des homéomorphismes d'ouverts de Z sur des ouverts de $\mathbf{R}^n$ ou sur des ouverts de sous-espaces fermés de $\mathbf{R}^n$ définis comme suit :

$$\{x=(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbf{R}^n \; ; \; x_{j_1}\leqslant 0 \; ; \; \ldots x_{j_p}\leqslant 0 \; ; \; \{j_1, \ldots, j_p\}\subset\{1, \ldots, n\}\}.$$

Exemple. — Un cube fermé de $\mathbf{R}^3$, plus généralement, un pavé fermé de $\mathbf{R}^n$ sont des variétés à coins.

c) *Chaînes différentiables.* Soit Y une variété différentielle orientée de dimension p, on dira qu'une partie connexe Z, d'intérieur non vide, de Y est une *sous-variété à coins* de Y si la structure induite sur Z par celle de Y est celle d'une variété à coins. L'intérieur $\mathring{Z}$ de Z dans Y est une sous-variété ouverte de Y orientée par l'orientation de Y ; $\mathring{Z}$ est de dimension p. L'ensemble des points de la frontière bZ de Z au voisinage desquels Z est une variété à bord est une sous-variété fermée b^0Z d'un ouvert de Y. Soit $y\in b^0Z$, alors il existe un voisinage U de y dans Y et un système de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ tel que $Z\cap U=\{x\in U \; ; \; x_1(x)\leqslant 0\}$. Si $v(x)\,\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_p$ définit l'orientation de Y sur U, elle définit aussi l'orientation sur $\mathring{Z}\cap U$ et $v(x)\,\mathrm{d}x_2\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_p|b^0Z\cap U$ définit une *orientation* sur $b^0Z\cap U$ dite associée à l'orientation de $\mathring{Z}$; il est clair qu'on définit ainsi une orientation sur b^0Z tout entière.

X étant une variété différentielle orientée, soient V un voisinage ouvert de Z dans Y et F une application différentiable *propre* de V dans X. Le couple (Z, F) sera appelé une *chaîne différentiable élémentaire de X de dimension p, ou une p-chaîne élémentaire de X.*

On dira que deux chaînes élémentaires (Z, F), (Z', F') sont équivalentes s'il existe un difféomorphisme G, à Jacobien strictement positif, d'un voisinage de Z dans un voisinage de Z' sur lesquels F, F' sont respectivement définis et tel que $F=F'\circ G$. Dans la suite, *on identifiera deux chaînes équivalentes.*

On appellera *p-chaîne différentiable* entière (resp. réelle, complexe), toute combinaison linéaire à coefficients entiers (resp. réels, complexes) de p-chaînes élémentaires : leur ensemble constitue un $\mathbf{Z}$-(resp. $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$)-module.

6.4. Bord d'une p-chaîne différentiable

Soit $\gamma=(Z, F)$ une p-chaîne élémentaire d'une variété différentielle X, on appelle *bord* de γ, le couple $b\gamma=(bZ, F)$; la structure différentielle de Y induit sur bZ une structure de variété à coins : on montre sans difficulté que *$b\gamma$ est une $(p-1)$-chaîne différentiable entière,* déterminée par la p-chaîne élémentaire γ.

Le bord d'une p-chaîne différentiable est défini par linéarité.

6.5. Intégration d'une p-forme différentielle

Soient ω une p-forme différentielle L^1_{loc} *à support compact* dans X et $\gamma=(Z, F)$ une p-chaîne différentiable élémentaire, on appelle *intégrale sur γ de la forme ω* l'expression $\int_{\overset{\circ}{Z}} F^*\omega$ qu'on note $\int_\gamma \omega$. *L'intégrale de ω sur une p-chaîne* quelconque est définie par linéarité.

On appelle *support* d'une chaîne différentiable $\sum_{i\in I} n_i\gamma_i$ où $\gamma_i=(Z_i, F_i)$ est une chaine élémentaire, et I un ensemble fini, la réunion $\bigcup_{i\in I} F_i(Z_i)$, c'est un ensemble fermé ; on le note $\operatorname{spt}\gamma$.

On étend la définition des chaînes aux combinaisons linéaires $\sum_{i\in I} n_i\gamma_i$ où I est un ensemble d'indices quelconque, dans le cas où la famille $(\gamma_i)_{i\in I}$ est localement finie, c'est-à-dire si pour tout $x\in X$ il existe un voisinage V_x de x tel que $V_x\cap\operatorname{spt}\gamma_i=\emptyset$ sauf pour un nombre fini d'indices i, la chaîne est dite alors *localement finie* et l'intégrale d'une p-forme différentielle ω à support compact sur une telle chaîne est définie et notée $\int_\gamma \omega$.

Enfin si γ est une *p-chaîne à support compact,* pour toute p-forme ω L^1_{loc}, sans condition de support, l'intégrale $\int_\gamma \omega$ est aussi définie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ahlfors, L. V. — *Complex Analysis,* second edition, McGraw-Hill, 1966.
[2] Burckel, R. B. — *An Introduction to Classical Complex Analysis,* vol. 1, Birkhäuser, 1979.
[3] Cartan, H. — *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes,* Hermann, Paris, 1961.
[4] Forster, O. — *Lectures on Riemann Surfaces, Graduate Texts in Mathematics,* Springer-Verlag, 1981.
[5] Grauert, H. et Remmert, R. — *Analytische Stellenalgebren, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften,* Bd *176,* Springer-Verlag, 1971.
[6] Gunning, R. C. and Rossi, H. — *Analytic functions of several complex variables,* Prentice Hall, 1965.
[7] Hervé, M. — *Les fonctions analytiques,* Presses Universitaires de France, 1982.
[8] Hörmander, L. — *An Introduction to Complex Analysis in several variables,* second edition, North-Holland, 1973.
[9] Narasimhan, R. — Introduction to the Theory of Analytic spaces, *Lecture Notes in Mathematics, 25,* Springer-Verlag, 1966.
[10] Narasimhan, R. — *Complex Analysis in one variable,* Birkhäuser, 1985.

Les ouvrages cités ont été utilisés comme suit :

[8], chapitre 1 pour une partie du plan et certaines démonstrations des chapitres 1 à 4.
[3] dans les chapitres 1 à 3.
[4] pour le chapitre 5 et la plus grande partie du chapitre 6.
[1] et [3] pour VI.4.
[6] pour le chapitre 7 et 2.3.5 du chapitre 6, et [3] pour 8 du chapitre 7.
[9] pour le chapitre 8 et [5] pour 1 du chapitre 8.

Ces ouvrages contiennent beaucoup de résultats non repris dans notre rédaction. Il en est de même de [2], [7], [10] qui, en outre, utilisent un point de vue différent du nôtre.

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

A
ABEL (lemme d') 40, 193
ABEL (théorème d') différentiel 168
Abélienne (forme) 164, 165
Acyclique 137
Addition (des diviseurs) 173
Adjoint (foncteur) 114
Algèbre analytique 211
— extérieure 14, 229
— tensorielle 229
Analytique complexe (fonction) 43, 209
— réelle — 209
Annulation (théorème d') 180
Anticommutative 230
Antiholomorphe 9
Application différentiable 31, 225
— fibrée 99
— holomorphe 52, 186
— homographique 83
Arc constant 30
— continu 30
— différentiable par morceaux 18
— élémentaire différentiable 17
— fermé 119
— inverse 103
— produit 103
Arcs homotopes 33, 118
Argument 10
Atlas 34, 224
Automorphisme 82

B
Base (point) 120
BETTI (premier nombre de) 164
Biholomorphe 54
Bord distingué 187
Bord (d'une chaîne) 19, 135, 235
Localement borné 205

C
C-différentiable 6
Carte 74, 224
— holomorphe 35
Cartes compatibles 34, 224, 110
CAUCHY (condition de) 6, 185
— (critère de) 191
— (formule intégrale de) 29, 188
— (formule non homogène de) 29
— (inégalités de) 45, 51, 195
— (noyau de) 29
— (théorème de) 23
CAUCHY—RIEMANN (condition de) 6, 185
Chaîne 135
— différentiable 17, 19, 235
— élémentaire 17, 19, 235
Classe C^p 13
Cobord 135
Cochaîne 135
— alternée 135
Cohomologie 136
Compact à bord 18
Compacte (application) 144
Comparaison (principe de) 191
Composante irréductible 215
Complexe 140
— simplicial 135
Connexe par arcs continus 30
— — — différentiables par morceaux 21
— par arcs (localement) 104
Connexion (homomorphisme de) 139
Conserve les angles 79
Convergence normale 40, 72, 75
— simple 39
— uniforme 40
— — sur tout compact 66
— (ensemble de) 193
Coordonnée (fonction) 37, 225
— locale 37
— — holomorphe (fonction) 52
Cotangent complexe (espace) 13, 38, 226
Couronne 49
Critique (valeur) 109
Cycle (1-) 19
Cycles homologues 28

D
d'' (lemme du) 200, 201
d'' (problème du) 29, 93, 199
D'ALEMBERT (théorème de) 95
Déformation 33
Degré d'un diviseur 148
Degré d'une forme différentielle 13, 14

Demi-plan supérieur 85
Dérivée au sens complexe 6
— logarithmique 58, 76
Détermination continue 10, 12
— principale de l'argument 10
— principale de la fonction logarithme 11
Développable en série entière 41
Développement de LAURENT 50
— — TAYLOR 42, 194
Difféomorphisme 28
différentielle 13, 226
— extérieure 15, 233
— logarithmique 58
Dimension d'une chaîne 135
— d'une cochaîne 135
— d'une ensemble analytique 220, 221
— d'un groupe de cohomologie 136
— d'une variété 35, 225
DIRICHLET (problème de) 155
Discret (ensemble) 74
Discrète (application) 99
Disque de convergence 40
— épointé 51
Diviseur 95
— canonique 177
— principal 147
Division (théorème de) 210
Domaine 35, 250
Droite projective 31

E

$\mathscr{E}^p$, $\mathscr{E}^\cdot$ 14
Ensemble analytique 214
Enveloppe holomorphiquement convexe 91
Équivalents (multiplicativement) 211
Espace projectif complexe 181
Étalé (domaine) 107
— (espace) 112
— en anneaux (espace) 114
Exhaustion 93
Exponentielle complexe 8
Extension 51, 206
— de corps 132
Extérieure (multiplication) 230

F

Factoriel 213
Factorisation 99
Faisceau 112
— des fonctions méromorphes 115
— engendré 113
Famille absolument sommable 192
— sommable 190
Feuillets (nombre de) 103
Fibre 99
Fibré cotangent 228
— dual 175
— holomorphe en droites 173
— trivial 173
Fibrés isomorphes 172
— vectoriels (espaces) 171, 228
— en droites complexes (espace) 171
Fin 136
Finitude (théorème de) 171, 228
Foncteurs Γ, L 113
Fonction algébrique 126
Fonction Γ 77
— symétriques élémentaires 127
— entière 45
Fonctions implicites holomorphes (théorème des) 187
Forme différentielle de degré 1 13, 228
— — de degré 2 14
— — — — p 230
(ou p-forme différentielle)
Forme différentielle holomorphe 13, 199
Forme differentielle (d-) fermée 15, 23, 234
Forme différentielle d''- fermée 200
Formes différentielles intégrables 16
Formule des compléments 78
FRÉCHET (espace de) 71

G

Genre 142
Germe 113
Germe analytique 214
Groupe d'homotopie (premier) 120
Groupe de POINCARÉ 120
— fondamental 120

H

Harmonique (fonction) 142, 161
— (forme différentielle) 160
HARTOGS (marmite de) 207
HILBERT (théorème des zéros de) 223
HODGE (théorème de) 164
Holomorphe (fonction) 8, 185
— (1-forme) 53
Homéomorphisme local 100
Homographie 84
Homotopie 31, 118
Homotopie (classe d') 120
Homotopique (formule de CAUCHY) 34
Homotopiquement nul 119

I

Identité (théorème d') 43, 105, 114, 195
Image réciproque 15, 233
Immersion 181
Indice 27, 33
— de spécialité 180
Inductive (limite) 113
Intégrale d'une forme différentielle 16, 19, 232, 236
intègre 213
Irréductible 215
Isomorphisme 82
— analytique local 81
Isotropie (sous-groupe d') 83

J

JENSEN (théorème de) 197

L

LAPLACIEN 152, 161
LAURENT (développable en série de) 49
— (développement de) 50
— (série de) 49
LERAY (théorème de) 137
linéairement équivalents 147
LIOUVILLE (théorème de) 45
logarithme (fonction) 10

M

Maximum (principe du) 47, 106, 153
— (théorème du module) 196
Méromorphe (fonction) 51
— (1-forme) 53
Métrique hermitienne 157
Mince 205
MITTAG—LEFFLER (théorème de) 74, 94
MORERA (théorème de) 26
Morphisme 110, 181
— d'espaces étalés 112
— de préfaisceaux 111
— de restriction 111
— de surfaces de RIEMANN 105
Moyenne (propriété de la) 47, 153
Multiple d'un diviseur 147, 176
— (zéro) 44
Multiplicativement équivalents 211
Multiplicité 44, 147
— d'un morphisme 108

N

Nerf 135
Noethérien (anneau-module) 212

O

$\mathcal{O}$ 114
$\mathcal{O}(D)$ 8
$\mathcal{O}(D)$-enveloppe 91
Objet 110
Opérateurs ∂'', ∂', ∂ 159
Opérateur* 158
ordre de multiplicité 44
— — formelle 190
Orientable (variété) 231
Orientée (variété) 231
OSGOOD (lemme d') 189
Orthogonale (décomposition) 163
Orthogonale à (mesure) 90

P

Paracompact 139
Partition différentiable de l'unité 20, 37, 225
Période 166
Plongement 181
POINCARÉ (lemme de) 21
Point singulier isolé 52
— — essentiel isolé 52
POISSON (formule de) 154
— (noyau de) 154
Pôle 51
— d'une section 174
— multiple 57
— simple 57
Polydisque 187
Polyrayon 187
Polynôme distingué 211
Préfaisceau 110
— constant 111
Primaire 223
Primitif (théorème de l'élément) 217
Primitive d'une fonction holomorphe 8
— d'une 1-forme différentielle 21, 30, 31
Principale (partie) 74
Produit extérieur 14
— infini 75
— scalaire 158
Prolongement 51
Prolongement analytique 115, 117
— — (principe du) 44, 195
Propre (application) 15, 104
Puissance extérieure 14

R

Radical 223
Ramification (point de) 107
Rang d'un fibré 228
Rayon de convergence 40
Régulier (point) 220
Régulière d'ordre k (fonction holomorphe) 205
Relèvement 99
Repère 228
Représentation conforme res 175
Res 175
Résidu 55
Résidus (théorème des) 56
— (— de la somme des) 57
revêtement de GALOIS 122
— holomorphe 110
— normal 122
— ramifié 107, 222
— régulier 112
— topologique 101
— universel 121
RIEMANN (sphère de) 36
— (surface de) 35, 52
— (théorème de prolongement de) 51, 106, 205
RIEMANN—ROCH (théorème de) 150
DE RHAM abstrait (théorème de) 140
— (théorème de) 142
— pour d'' (théorème de) 142, 202
ROUCHÉ (théorème de) 59
RUNGE (théorème de) 88
— (paire de) 93

S

SCHWARZ (lemme de) 48, 196
Section d'un espace étalé 112
— d'un fibré 173
— holomorphe 173
— méromorphe 174
Semi-méromorphe (fonction) 169
Série de fonctions 39
— — méromorphes 72
— entière convergente 41, 193
— formelle 189
SERRE (théorème de dualité de) 178, 179
ŠILOV (frontière de) 189
Simple (zéro) 44
Simplement connexe 31
Simplexe 135
Singularité 206
— apparente 51, 206
Singulier (point) 220
Solution d'un diviseur 96, 169
— faible d'un diviseur 96, 169
Somme 190
— abélienne 166
— partielle finie 190
STIELJES—VITALI—MONTEL (théorème de) 68
STOKES (formule de) 21
Structure différentielle sous-jacente 35
Suite exacte 138
— exhaustive de compacts 68
Support 14, 232
— d'une 1-chaîne différentiable 17
— — 2-chaîne — 19
— — cochaîne 140
— d'un diviseur 95
— d'un faisceau 149
— — simplexe 135

T

TAYLOR (série de) 43
Tensoriel (produit) 229
topologie de la convergence compacte 71
— invariante par translation 70
Tore complexe 102
Trace 166
Transformation conforme 79
— — directe 79
— — indirecte 79
— homographique 84
— de revêtement 122, 129
Transitif 83
Transition (fonctions de) 172
— (difféomorphisme de) 227
Trivialisation locale 172
Type fini (de) 212
Type (p, q) (de) 29, 185

U

Unité 210

V

Valeur moyenne 47
Variété analytique complexe 35, 201
— à bord 234
— à coins 235
— différentielle 35, 225

W

WEIERSTRASS (théorème de) 78, 97
— (— préparation de) 211

Z

Zéro d'une fonction holomorphe 44

Analyse complexe

(texte numérisé avec corrections)

Je remercie Lars Hörmander, Robert Cauty et Jean-Pierre Vigué pour leurs critiques.

Je salue la mémoire de Paul Malliavin qui m'avait commandé ce livre.

Dans la formule LMD actuelle des études supérieures de mathématiques, ce texte propose des enseignements de L_3 et de M. Il peut servir de référence pour l'introduction à l'étude des surfaces de Riemann et des premiers éléments de l'analyse complexe de plusieurs variables.

Paris, février 2011,
Pierre Dolbeault

ERRATUM
ANALYSE COMPLEXE
P. Dolbeault

Page 14	ligne 18 ↑	; $\Lambda^{\cdot} E$ au lieu de ; $\Lambda^2 E$
Page 14	ligne 6 ↑	(ou C^∞ ... au lieu de (où C^∞ ...
Page 23	ligne 2 ↑	qu'on au lieu de qu'un
Page 31	ligne 16 ↓	$\Sigma\,[f(t_{j+1}) - f(t_j)]$ au lieu de $\Sigma\,[F_j(t_{j+1}) - F_j(t_j)]$
Page 59	ligne 2 ↑	$\left(1 + \dfrac{g \circ \gamma}{f \circ \gamma}\right)$ au lieu de $\left(1 + \dfrac{g \circ f}{f \circ \gamma}\right)$
Page 60	ligne 9 ↑	$\mathrm{sint} = \dfrac{1}{2i}(z - z^{-1})$ au lieu de $\mathrm{sint} = \dfrac{1}{2\pi i}(z - z^{-1})$
Page 63	ligne 12 ↓	$+ \, i \operatorname{Arg} z$ au lieu de $+ \operatorname{Arg} z$
Page 64	ligne 8 ↓	appliqué au lieu de appliqués
Page 77	ligne 4 ↓	d'où $\dfrac{\sin \pi z}{\pi z} = \dfrac{f(z)}{z}$ au lieu de $\dfrac{\sin \pi z}{z}$
Page 77	ligne 9 ↑	$\sum_{n>r} \log f_n$ au lieu de $\sum_{n>1} \log f_n$
Page 79	ligne 6 ↑	, i.e. $T : Z \mapsto$ au lieu de i.e. : $ZT \mapsto$
Page 116	ligne 16 ↓	$\hat{\gamma}_s(0)$ au lieu de $\hat{\gamma}(0)$
Page 125	ligne 14 ↑	$\begin{array}{l} D^* \\ \uparrow g \\ H \end{array}$ au lieu de $\begin{array}{l} D^* \\ \downarrow g \\ H \end{array}$
Page 157	ligne 5 ↑	hermitienne $dz_j \, d\bar{z}_j$ de $\mathbb{C}$ au lieu de hermitienne de $dz_j \, d\bar{z}_j$ $\mathbb{C}$
Page 163	ligne 14 ↑	$= i \displaystyle\int_X d\,(\overline{f\psi})$ au lieu de $i \displaystyle\int_x$
Page 170	ligne 11 ↓	$- \displaystyle\int_U d \ldots$ au lieu de $- \displaystyle\int d \ldots$
Page 174	ligne 3 ↑	$\mathcal{O}_D \xrightarrow{\times\Psi}$ au lieu de $\mathcal{O}_D \xrightarrow{X\Psi}$
Page 193	ligne 7 ↑	convergentes au lieu de convergente
Page 216	ligne 3 ↑	${}_p$O,L au lieu de ${}_p$OL
Page 217	ligne 5 ↑	0 au lieu de X_0
Page 218	ligne 4 ↓	$\partial P_{p+1} / \partial x_{p+1}$ au lieu de $\partial P_{p+1} \, \partial x_{p+1}$

INDEX

Page 239 Bord (d'une chaîne) Ajouter : 17

Page 239 Cartes compatibles Supprimer 110

Page 239 ajouter : Catégorie 110

Page 240 Domaine... 205 au lieu de 250

Page 241 Noethérien (anneau, module) au lieu de anneau-module

Page 241 Ordre...
ajouter ... d'une série formelle, 190

Page 241 Représentation conforme 82 au lieu de 175 et supprimer res

Page 241 Res,res 175

Page 242 Šilov (frontière de) 187, au lieu de 189

ERRATA II
ANALYSE COMPLEXE
P. Dolbeault

Page 17	ligne 6 $\downarrow$	supprimer "discret"
Page 23	ligne 2 $\uparrow$	"qu'on note" au lieu de "qu'un note"
Page 30	ligne 9 $\downarrow$	ajouter ",$\bar{\Delta} \subset D$," après " en z_0"
Page 46	ligne 9 $\downarrow$	(ch.1,5.3.3) au lieu de (ch.1,5.3.2)
Page 48	ligne 1 $\downarrow$	supprimer M'
Page 58	ligne 14 $\uparrow$	"**n'y**" au lieu de "**n y**"
Page 62	ligne 7 $\downarrow$	$^{+i\sin\theta)}$ au lieu de $^{+i\sin)\theta}$
Page 62	ligne 12 $\downarrow$	δ_r au lieu de $\delta(r)$
Page 62	ligne 14 $\downarrow$	**est** au lieu de **es**
Page 71	ligne 11 $\downarrow$	"toute suite de" au lieu de "toute de"
Page 79	ligne 6 $\downarrow$	γ'_j au lieu de γ'_1
Page 96	ligne 15 $\downarrow$	$\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{f}} \wedge d\varphi$ au lieu de $\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{f}} \wedge \varphi$
Page 134	ligne 8 $\uparrow$	"fonctions méromorphes" au lieu de "1-formes méromorphes"
Page 135	ligne 13 $\downarrow$	à au lieu de a
Page 138	ligne 16 $\downarrow$	$\mathcal{U}$ au lieu de U
Page 184	ligne 10 $\uparrow$	"vide ;" au lieu de "vide :"
Page 186	ligne 1 $\uparrow$	$\mathbf{z}^0$ au lieu de $\mathbf{z}_0$
Page 191	ligne 2 $\downarrow$	"continuité de l'addition" au lieu de "continuité l'addition"
Page 192	ligne 17 $\downarrow$	$-s_H \mid\leq$ au lieu $-s_H \leq$
Page 193	ligne 5 $\downarrow$	"sommable;" au lieu de "sommable"
Page 193	ligne 7 $\downarrow$	supprimer "d'après 4.3.2"
Page 193	ligne 7 $\uparrow$	"*convergentes*" au lieu de "*convergente*"
Page 195	ligne 5 $\downarrow$	$r^{-\alpha}$ au lieu de r^{α}
Page 196	ligne 3 $\downarrow$	"d'après 5.2.3" au lieu de "d'après 4.2.3"
Page 197	ligne 16 $\downarrow$	4.2.5 au lieu de 4.5.2
Page 197	ligne 2 $\uparrow$	$\mid a_j \mid < \rho$ au lieu de $\mid a_j \mid < r$
Page 203	ligne 4 $\uparrow$	$_{\times A_n})$ au lieu de $_{\times A})$
Page 206	ligne 19 $\downarrow$	$d"_{z_n}\tilde{f}$ au lieu de $d"_{z_n}f$
Page 208	ligne 18 $\downarrow$	$\bar{D}$ au lieu de D
Page 213	ligne 6 $\downarrow$	"un produit fini de" au lieu de "un produit de"
Page 215	ligne 16 $\downarrow$	"**réunion finie de**" au lieu de "**réunion de**"
Page 215	ligne 20 $\uparrow$	"noethérien" au lieu de "noéthérien"
Page 225	ligne 16 $\downarrow$	"dans un ouvert de $\mathbf{R}^m$" au lieu de "dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$"

ERRATA III

Chapitre 4: **1.3. Corollaire.** Dans **(b)**: supprimer: *(ce qui équivaut à: chaque composante connexe de K est simplement connexe).* Dans la DÉMONSTRATION, supprimer: ", i.e. toute composante connexe ... relativement compacte"

Chapitre 4: **1.6.1. Théorème.** Remplacer *(ii)* par:

(ii) $D_2 \setminus D_1 = F \cup L$ où F est fermé dans D_2, L compact et $F \cap L = \emptyset$ entraîne $L = \emptyset$.

Dans la démonstration, définir L comme "un compact de $D_2 \setminus D_1$" et F comme "un fermé de D_2 tel que $D_2 \setminus D_1 = F \cup L$

Chapitre 7: Remplacer **8.2.4. Théorème** et DÉMONSTRATION par:

8.2.4. Théorème.- *Dans un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$, dans un système de coordonnées convenable, soit $V = \{z_n - w_n = z_{n-1} - w_{n-1} = 0\}$, ou plus généralement un ensemble analytique complexe, irréductible de dimension $n-2$* (voir ch. 8), *et pour un polydisque fermé $D(w;\delta)$ de Ω, si f est une fonction holomorphe dans $D(w;r) \setminus V$, il existe une unique fonction $\tilde{f}$ holomorphe au voisinage de w telle que $f(z) = \tilde{f}(z)$ sur l'ouvert où elles sont toutes deux définies.*

DÉMONSTRATION.-

(*a*) *Cas particulier*:

$\{z_n - w_n \neq 0\}$ pour $z \in D(w_1;\delta_1) \times \ldots D(w_{n-1};\delta_{n-1}) \times bD(w_n;\delta_n)$,

$\{z_{n-1} - w_{n-1} \neq 0\}$ pour $z \in D(w_1;\delta_1) \times \ldots D(w_{n-2};\delta_{n-2}) \times bD(w_{n-1};\delta_{n-1}) \times D(w_n;\delta_n)$;

alors la fonction $f(z_1, \ldots, z_{n-2}, \zeta_{n-1}, \zeta_n)$ est définie sur

$$D(w_1;\delta_1) \times \ldots D(w_{n-2};\delta_{n-2}) \times bD(w_{n-1};\delta_{n-1}) \times bD(w_n;\delta_n);$$

La fonction

$$\tilde{f}(z_1, \ldots, z_n) = (1/(2\pi i)^2) \int_{|\zeta_{n-1}-w_{n-1}|=\delta_{n-1}} \int_{|\zeta_n - w_n|=\delta_n} (z_{n-1} - \zeta_{n-1})^{-1}(z_n - \zeta_n)^{-1} f(z_1, \ldots, z_{n-2}, \zeta_{n-1}, \zeta_n) d\zeta_{n-1} d\zeta_n$$

est holomorphe sur $D(w;\delta)$.

Si $(z_1, \ldots, z_{n-2}, \zeta_{n-1}) \in D_{n-2}(w;\delta) \times bD(w_{n-1};\delta_{n-1})$, la fonction de z_n, $f(z_1, \ldots, z_{n-2}, \zeta_{n-1}, z_n)$ est holomorphe dans $D(w_n;\delta_n)$, continue jusqu'au bord et satisfait à

$$(8.5) \qquad f(z_1, \ldots, z_{n-2}, \zeta_{n-1}, z_n) = (1/2\pi i) \int_{|\zeta_n - w_n|=\delta_n} (\zeta_n - z_n)^{-1} f(z_1, \ldots, z_{n-2}, \zeta_{n-1}, \zeta_n) d\zeta_n$$

Si $(z_1, \ldots, z_{n-2}, z_n)$ sont fixés avec $|z_n - w_n|$ assez voisin de δ_n, la fonction $f(z_1, \ldots, z_{n-2}, \zeta_{n-1}, z_n)$ est holomorphe en ζ_{n-1} dans $D(w_{n-1};\delta_{n-1})$ et continue jusqu'au bord, alors

$$(8.6) \qquad f(z) = (1/2\pi i) \int_{|\zeta_{n-1}-w_{n-1}|=\delta_{n-1}} (\zeta_{n-1} - z_{n-1})^{-1} f(z_1, \ldots, z_{n-2}, \zeta_{n-1}, z_n) d\zeta_{n-1}$$

pour $|z_n - w_n|$ assez voisin de δ_n.

A l'aide de 8.5) et (8.6), on trouve $f(z) = \tilde{f}(z)$ dans $D(w;\delta)$ pour $|z_n - w_n|$ assez voisin de δ_n. Par le théorème d'identité, on a $f(z) = \tilde{f}(z)$ sur le domaine commun de définition.

(*b*) *Cas général*:

Dans des coordonnées convenables (z', z_{n-1}, z_n), avec $z' = (z_1, \ldots, z_{n-2})$ et $w = 0$, un germe d'ensemble analytique complexe V_0, irréductible, de dimension $n-2$, à l'origine 0 de $\mathbb{C}^n$, est défini par:

$(*) \quad P(z'; z_{n-1}) = 0$

$(**) \quad dis(z') z_n - Q(z'; z_{n-1}) = 0$

où $dis(z') \in_{n-2} \mathcal{O}$ est le discriminant du polynôme distingué P, et où $P, Q \in_{n-2} \mathcal{O}[X]$.

Il existe un voisinage ouvert U de 0 tel que l'ensemble analytique V de U défini par les équations ci-dessus induise V_0 en 0. Considérons le polydisque fermé $D = D(0, \delta)$ contenu dans U. les solutions $z_{n-1}(z')$, $z_n(z')$ de (*) et (**) respectivement, pour $\delta \neq 0$ convenable, satisfont à:

$\{z_n(z')\}, \{z_{n-1}(z')\} \in D(w_1;\delta_1) \times \ldots D^0(w_{n-1};\delta_{n-1}) \times D^0(w_n;\delta_n)$, où D^0 désigne l'intérieur du disque D,

$\{z_n(z')\} \notin D(w_1;\delta_1) \times \ldots D(w_{n-1};\delta_{n-1}) \times bD(w_n;\delta_n)$,

$\{z_{n-1}(z')\} \notin D(w_1;\delta_1) \times \ldots D(w_{n-2};\delta_{n-2}) \times bD(w_{n-1};\delta_{n-1}) \times D(w_n;\delta)$.

La suite de la démonstration du cas particulier est valide dans le cas général. □

Imprimé en Hongrie

MASSON, Éditeur
120, boulevard Saint-Germain
75280 Paris Cedex 06
Dépôt légal: mars 1990