Chapitre 4

LES RESEAUX DE PETRI

Objectifs
Ce chapitre vous permettra de vous initier à un outil de modélisation très puissant et très répondu notamment dans le monde recherche et développement : RdP (Réseaux de Pétri). Cet outil permet essentiellement la modélisation des systèmes quelque soit leurs domaines d'application (Informatique, Télécommunication, Production, …).
Nous vous présenterons dans un premier temps quelques définitions et formalismes concernant cet outil. Ensuite nous discuterons de quelques propriétés très utiles dans l'analyse des RdP et des techniques de simplification permettant de les dégager facilement. Nous vous présenterons également quelques structures de base fréquemment utilisées notamment dans les systèmes de production.
A la fin de chapitre, vous serrez en mesure de modéliser le fonctionnement d'un système à l'aide d'un RdP et de déterminer ses propriétés !

I. Introduction :

1) Introduction

C'est en 1964 que Carl Adam Pétri définissait les réseaux qui portent depuis son nom. Vingt ans ont passé sans que cet outil de modélisation, réputé puissant dans tous les laboratoires de recherche, parvienne à pénétrer le monde industriel si ce n'est sous la forme voisine, mais conceptuellement différente, du GRAFCET. Cet insuccès est sans doute imputable, pour une part, à l'absence de norme et à une utilisation, dans les écoles d'ingénieurs et les universités, plus tournée vers la recherche que vers l'industrie. Mais la raison essentielle réside sans doute dans le fait que les concepteurs de systèmes automatisés n'exigeaient pas, jusqu'à une date récente, d'outils de modélisation aussi puissants que les réseaux de Pétri.

La complexité croissante de nos systèmes de production, notamment dans le domaine manufacturier, a provoqué un appel de la part des concepteurs et des utilisateurs de systèmes discontinus.

Le succès du GRAFCET est dû à ce besoin nouveau d'un outil capable d'exprimer les deux grandes caractéristiques des systèmes séquentiels : le parallélisme et la synchronisation.

On sait aujourd'hui cependant que la conception et l'exploitation des systèmes de production manufacturiers, pour ne prendre que cet exemple, requièrent des modèles plus riches en information et plus concis que le GRAFCET, aux fins d'analyse, de simulation et de commande. D'où l'intérêt que nous portons aujourd'hui à l'utilisation des RdP dans ce domaine d'application.

Le formalisme des réseaux de Pétri est un outil permettant l'étude de systèmes dynamiques et discrets. Il permet d'obtenir une représentation
mathématique modélisant le système.
L'analyse de cette représentation (du réseau de Pétri) peut révéler des caractéristiques importantes du système concernant sa structure et son comportement dynamique.

Les résultats d'une telle analyse sont utilisés pour évaluer le système et en permettre la modification et/ou l'amélioration le cas échéant.

Les Caractéristiques principales des RdP sont :

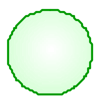
Distribution des états et des changements d 'états dans le réseau.
Dépendance et indépendance d 'ensembles d 'événements représentées explicitement (relations de causalité).
Représentation à différents niveaux d 'abstraction (i.e. détaillés comme abstraits).
Vérification des propriétés possibles car basées sur un formalisme mathématique rigoureux.
Modélisation simulable.
Représentation graphique.

2) Concepts de base :

Condition :
Une condition est un prédicat logique d'un état du système. Elle est soit vraie, soit fausse.

Evénement :
Les événements sont des actions se déroulant dans le système. Le déclenchement d'un événement dépend de l'état du système.
Un état du système peut être décrit comme un ensemble de conditions.

Déclenchement, pré-condition, post-condition:
Les condition nécessaires au déclenchement d' un événement sont les pré-conditions de l'événement.
Lorsqu'un événement se produit, certaines de ses pré-conditions peuvent cesser d'être vrais alors que d 'autres conditions, appelées post-conditions de l'événement deviennent vraies.
Modélisation d'un système événement - condition :

Condition: modélisée à l'aide d'une place. 

Evénement: modélisé à l'aide d'une transition 

Satisfaction d'une condition: modélisée à l'aide d'un jeton 

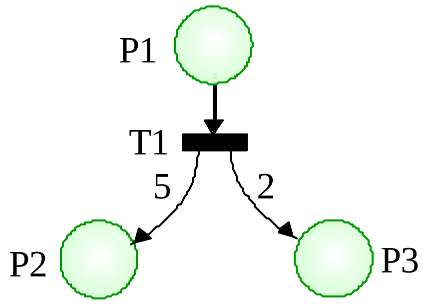
II. Définitions :

1) Définitions Informelles :

Un RdP est un graphe composé de 2 types de nœuds :
- Les places (Pi) qui permettent de décrire les états du système modélisé. L'ensemble de ces places est noté P={P1, P2, ...}.
- Les transitions (Ti) qui représentent les changements d'états. L'ensemble de ces transitions est noté T={T1, T2, ...}.

Les Places et transitions sont reliées par des arcs orientés. On dira qu’un RdP est un graphe biparti orienté.
A chaque arc, on attribut un poids (nombre entier). Par défaut ce nombre est égal à 1.

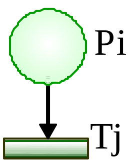
Exemple :



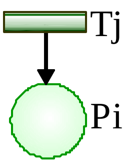
pour le RdP ci-dessus, le poids de l'arc reliant P1 à T1 est égal à 1, alors que celui reliant T1 à P2 est égal à 5.

Remarques :

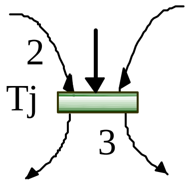
Lorsqu'une place Pi est reliée à une transition Tj par un arc : Pi? Tj, on parle de place en entrée de Tj (en amont).



Lorsqu'une transition Tj est reliée à une place Pi par un arc : Tj? Pi, on parle de place en sortie de tj (en aval).



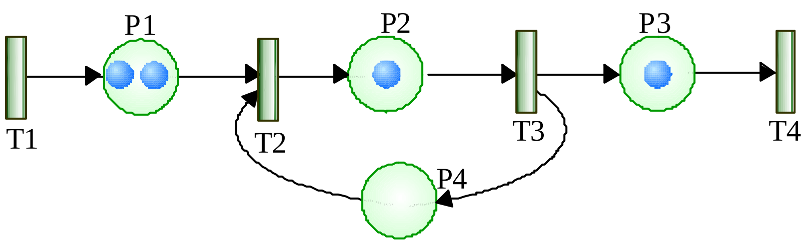
Une transition se compose d'un ou de plusieurs arcs amont ou arcs d'entrée et d'un ou plusieurs arcs aval ou arcs de sortie. Chacun de ces arcs a son propre poids !



2) Marquage :

Chaque place contient un nombre entier (positif ou nul) de marques ou jetons. Le nombre de marque contenu dans une place Pi sera noté soit M(Pi) soit mi.
Le marquage du réseau à l'instant i, Mi est défini par le vecteur de ces marquages mi c-à-d Mi = (m1, m2, …,mn).
Le marquage dit initial décrit l'état initial du système modélisé (M0).

Exemple :



Ce RdP possède 4 places, 4 transitions et 8 arcs orientés. Soit donc :
P = {P1, P2, P3, P4} et T={T1, T2, T3, T4} ;
Le marquage initial est M0 = (2,1,1,0) ;
La place P1 est en amont (une entrée) de la transition T2 et elle est en aval (une sortie) de la transition T1 ;
T1 est une transition sans place d'entrée: transition source ;
T2 est une transition sans place de sortie: transition puit

Remarques :

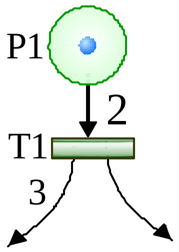
Le marquage à un instant donné définit l'état du RdP, ou plus précisément l'état du système décrit par le RdP. L'évolution de cet état correspond donc à l'évolution du marquage (par franchissement de transitions).
Par abus de langage, nous appellerons les RdP marqués : Rdp et les non marqués : RdP non marqués.
A tout marquage accessible à partir du marquage initial par franchissement d'une séquence de transitions correspond un état du système.

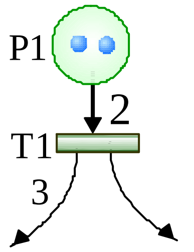
3) Franchissement d'une Transition :

Pour rendre compte de l'évolution du système modélisé, les réseaux de Pétri intègrent un formalisme permettant de passer d'un marquage à un autre : c'est le franchissement des transitions.

Le franchissement (ou le tir) d'une transition ne peut s'effectuer que si chacune des places en amont (en entrée) de cette transition contient suffisamment de jetons (>=au poids de l'arc correspondant). On dit alors que la transition est franchissable ou validée.

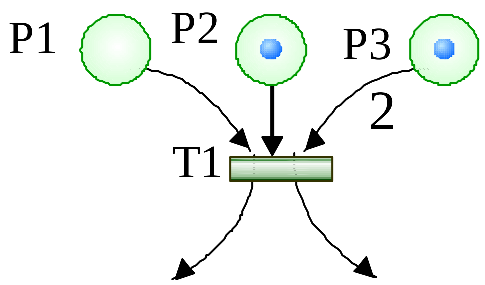
Exemples :



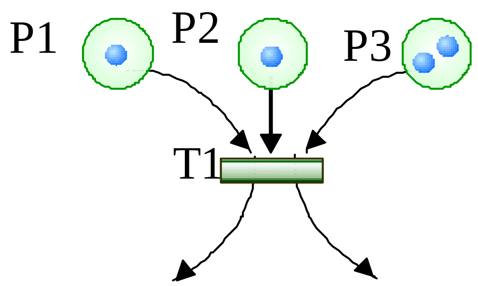


T1 est validée

Pour le premier marquage, T1 n'est pas validée car le nombre de jetons dans P1 (1) est inférieur au poids de l'arc reliant P1 à T1 (2) !



T1 n'est pas validée car P1 et P3 ne contiennent pas suffisament de jetons !

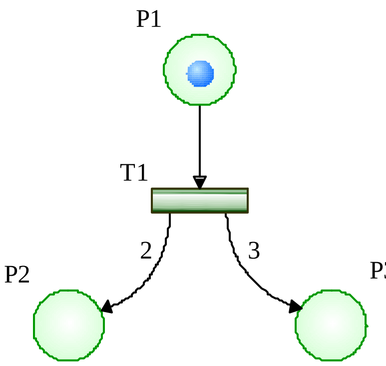


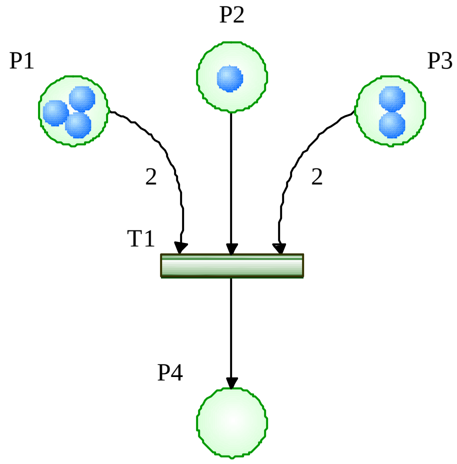
T1 est validée

Remarques : Une transition source est donc toujours validée.

Le franchissement est une opération indivisible (atomique) qui consiste à retirer des jetons des places en amont (en entrée) et à ajouter des jetons dans les places en aval (en sortie) de la transmission franchie.
Le nombre de jetons retirés ou ajoutés est égal au poids de l'arc reliant la transition à la place en question.

Exemples :
Déterminer les nouveaux marquages obtenus dans les exemples suivant en franchissant les transitions validées.





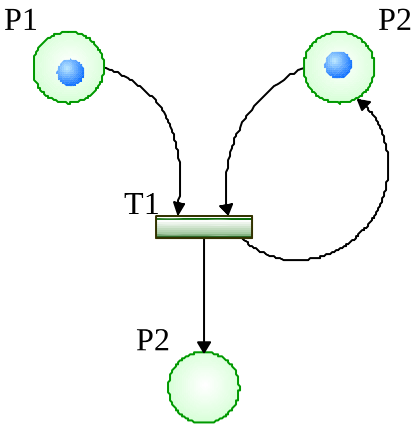
Remarques :

i- Lorsqu'une place Pi est à la fois étape d'entrée et de sortie d'une transition Tj, alors lors de franchissement de Tj il y aura à la fois :

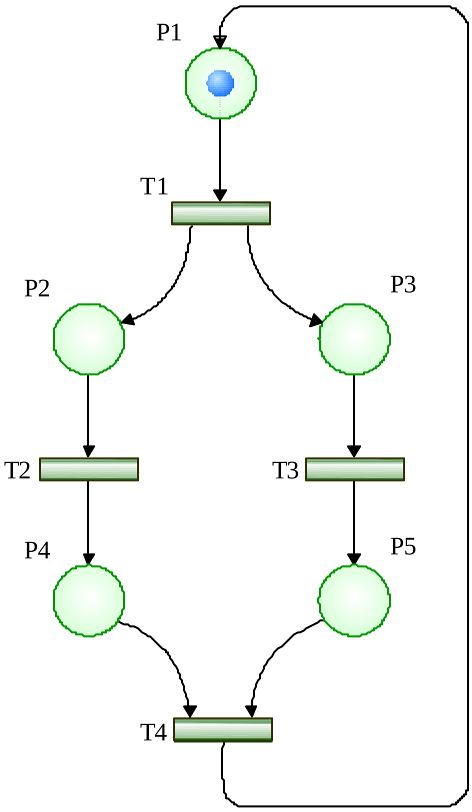
enlèvement d'un nombre de jetons de Pi égale au poids de l'arc reliant Pi à Tj ;
ajout d'un nombre de jetons dans Pi égale au poids de l'arc reliant Tj à Pi;

Les poids des arcs reliant Pi à Tj et Tj à Pi ne sont pas forcement égaux.

Exemple :
Donner le marquage du RdP suivant après le franchissement de T1.



ii- Lorsqu'une transition Tj est validée, cela n'implique pas qu'elle sera immédiatement franchie. Ce n'est qu'une possibilité.
Sur la figure suivante T2 et T3 sont validées après le franchissement de T1. Cependant on ne sait pas quand ces transitions seront franchies, mais on sait que la prochaine évolution du marquage correspondra soit au franchissement de T2 soit à celui de T3.



Formalisme :

Notations :

Ensemble de marquage accessibles :

On considère le RdP précédent. Le marquage initial est M0=(1,0,0,0,0). Pour ce marquage M0, seule la transition T1 est validée et son franchissement conduit au marquage M1=(0,1,1,0,0). On notera ceci :

$M0 \xrightarrow{T1} M1$

Pour M1, il y a deux transitions validées T2 et T3. On aura donc :

$M1 \xrightarrow{T2} M2=(0,0,1,1,0)$

$M1 \xrightarrow{T3} M3=(0,1,0,0,1)$

Pour M2, seule la transition T3 est validée, son franchissement conduit à M4 :

$M2 \xrightarrow{T3} M4=(0,0,0,1,1)$

Pour M3, seule la transition T2 est validée, son franchissement conduit également à M4 :

$M3 \xrightarrow{T2} M4=(0,0,0,1,1)$

Pour M4, seule la transition T4 est validée et on a :

$M4 \xrightarrow{T4} M0=(1,0,0,0,0)$

On notera *M0 l'ensemble des marquages accessibles à partir du marquage initia M0. Pour notre exemple:
*M0={M0, M1, M2, M3, M4}

b- Séquence de franchissement :
Le franchissement, à partir de M0, de T1 puis T2 conduit au marquage M2. On appellera T1T2 séquence de franchissement et on notera :

$M0 \xrightarrow{T1T2} M2$ ou encore $M0 \xrightarrow{S} M2$ Avec S=T1T2

Une séquence de franchissement à partir d'un marquage M1 est représentée par la suite des transitions Ti, Tj, ... telles que le franchissement de chacune d'elles conduit à un marquage qui sensibilise la suivante :

$S : M1 \xrightarrow{Ti} M2 \xrightarrow{Tj} .... \xrightarrow{Tr} Mq$

On dira que la séquence S=Ti,Tj, ...,Tr est applicable à partir de M1, on écrira:

$M1 \xrightarrow{S} Mq$

Pour l'exemple précédent, la séquence S=T1,T2,T3 est applicable à partir de M0 et conduit au marquage M4.

$M0=(1,0,0,0,0) \xrightarrow{S=T1,T2,T3} M4=(0,0,0,1,1)$

c- Marquage :
Pour un RdP et à partir d'un marquage initial M0, un marquage Mq est dit accessible si et seulement si :

Il existe S / : $M0 \xrightarrow{S} Mq$

On dit qu'un marquage M1 couvre M2 (on note : M1 ? M2) si et seulement si :
M1(Pi) ? M2(Pi) pour toute place Pi.

On dit qu'un marquage M1 couvre strictement M2 (M1>M2) si et seulement si :
M1 ? M2 et il ya au moins une place Pi telle que M1(Pi) > M2(Pi).

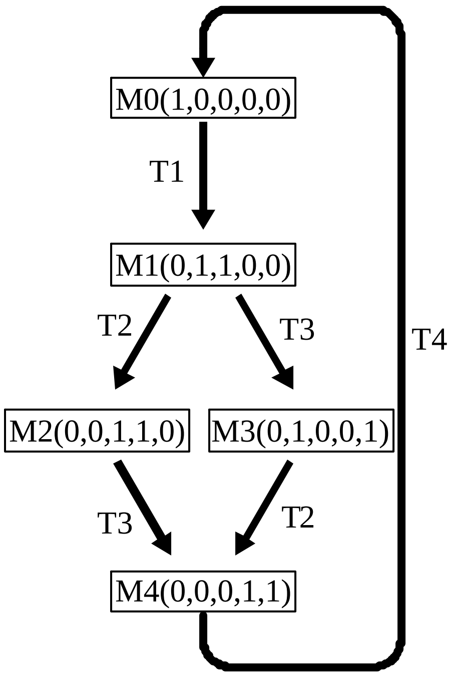
Soit donc si et seulement si :
M1 couvre M2 et M1 différent de M2

2- Graphe de transitions (ou encore Graphe d'états):

C'est une représentation graphique des possibilités d'évolution du RdP. Elle est obtenue en partant du marquage initial et en étudiant à chaque marquage obtenu Mi après le franchissement d’une transition Tj les différentes possibilités d’évolution du RdP. Ceci correspond aux différentes transitions validées par le marquage Mi.

Exemple : Pour le RdP précédent, nous obtenons le graphe suivant :

Graphe d'etat



Remarque :
Le graphe peut être fini ou infini. Dans le cas ou il est fini, il sera complet lorsque toutes les possibilités sont représentées.

4) Matrice d'incidence :

a- Matrice Post-incidence :

C'est une matrice à n ligne et m colonnes avec n le nombre de places et m le nombre de transitions dans le RdP.

$$\text{Post} = \begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \\ . \\ . \\ . \\ Pn \end{array} \begin{array}{c} T1\ T2\text{------}Tm \\ \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] \end{array}$$

Chaque élément de cette matrice Post (Pi, Tj) correspond au nombre de jetons à rajouter dans Pi en franchissant Tj.

Exemple :
Pour le RdP précédant, la matrice Post-incidence est :

$$\begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b- Matrice Pré-incidence :

C'est une matrice à n ligne et m colonnes avec n le nombre de places et m le nombre de transitions dans le RdP.

$$\text{Pré} = \begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Pn \end{array} \begin{array}{c} T1\ T2\text{------}Tm \\ \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \end{array}$$

Chaque élément de cette matrice Post (Pi, Tj) correspond au nombre de jetons à enlever dans Pi en franchissant Tj.

Exemple :

Pour le RdP précédant, la matrice Pré-incidence est :

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} \\
\begin{array}{c} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

c- Matrice d'incidence :

C'est une matrice à n ligne et m colonnes avec n le nombre de places et m le nombre de transitions dans le RdP. Elle peut être calculée comme suit :

$$
C = Post - Pré = \begin{array}{c c}
 & T1\ T2\text{------}Tm \\
\begin{array}{c} P1 \\ P2 \\ . \\ . \\ . \\ Pn \end{array} & \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]
\end{array}
$$

Chaque élément de cette matrice C(Pi, Tj) correspond au nombre de jetons à rajouter moins celui à enlever dans Pi en franchissant Tj.

On déduit donc que :

$M1 \xrightarrow{Ti} M2$ Alors $M2 = M + C(: , Ti)$

III. Propriétés :

1) RdP Borné :

a- Place k bornée, non bornée :

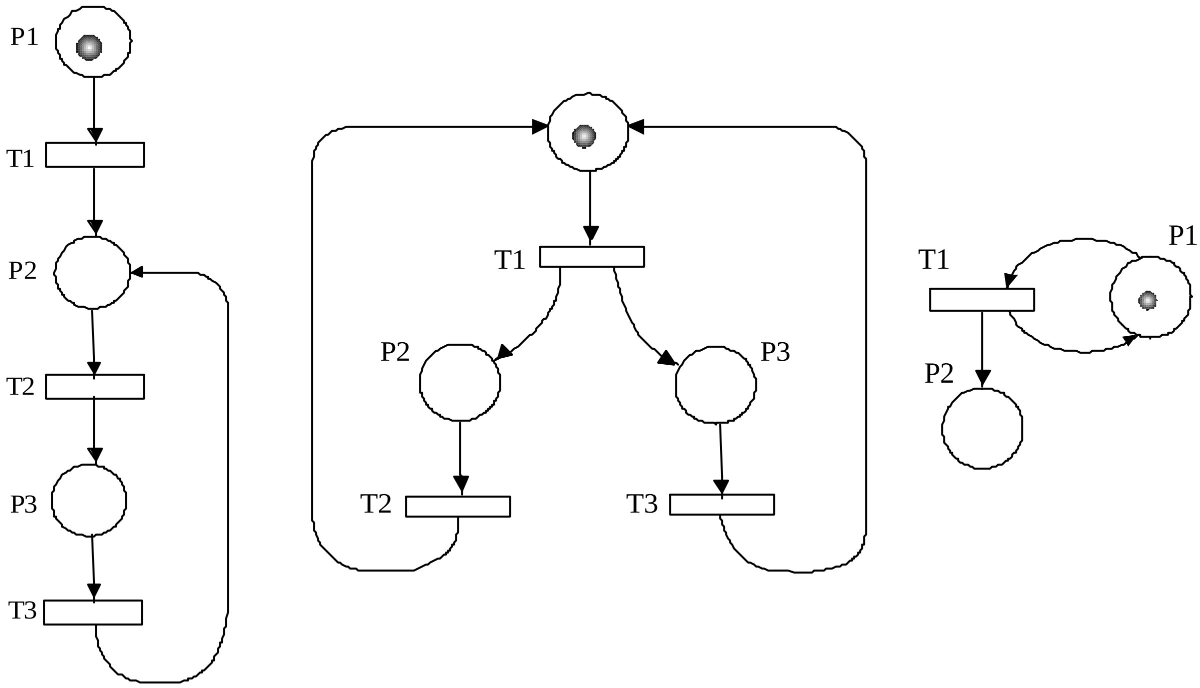
Soit un réseau R et un marquage M0. Une place Pi du réseau marqué (R, M0) est k bornée si pour tout marquage M accessible depuis M0 , M (Pi) <= k. Dans le cas contraire, la place p est dite non bornée. Autrement dit:
Pi est k bornée ? ?M ? *M0, M(Pi) = k

b- RdP k bornée, non bornée :

Un RdP est dit borné pour un marquage initial donné si quel que soit le marquage accessible atteint M et quelle que soit la place Pi considérée, le nombre de jetons contenus dans cette place est inférieur à une borne k :
RdP est k borné ? ?M ? *M0 et ?Pi ? P : M(Pi) = k

Exemples :

Trouver, parmi les RdP suivants, ceux qui sont bornés et ceux qui ne le sont pas.



d- Remarques :

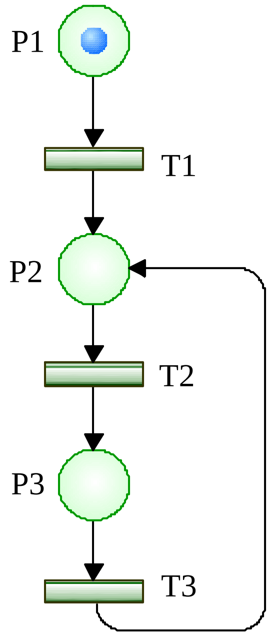
Borné: est une propriété dépendant du marquage initial.
Pour un RdP borné, on dira également que le nombre d'états accessibles à partir de l'état initial est fini, le graphe d'états équivalent peut donc être construit.
Lorsque la borne est égale à 1, le RdP est dit Sauf ou binaire
Si un RdP est non borné pour M0, il est non borné pour M 0 = M0.
RdP Structurellement borné : RdP borné pour tout marquage initial fini.

2) Vivacité et blocage :

a- Transition vivante :

Une transition Tj est vivante pour un marquage initial M0 si pour tout marquage accessible Mi (appartenant à *M0), il existe une séquence de franchissement S qui contient la transition Tj, à partir de Mi. Autrement dit quelque soit l'évolution, il subsistera toujours une possibilité de franchir Tj à nouveau.

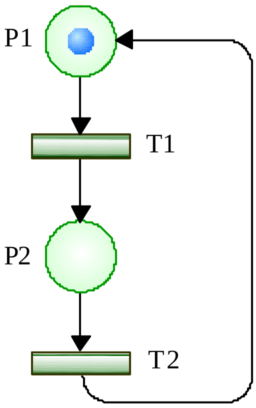
Exemple :
Sur l'exemple suivant les transitions T2 et T3 sont vivantes alors que T1 ne l'est pas ! En effet, elle est franchissable uniquement au démarrage.



b- RdP vivant :

Un RdP est vivant pour un marquage initial M0 si toutes ses transition sont vivantes pour M0. Un RdP sauf et vivant est dit Conforme.

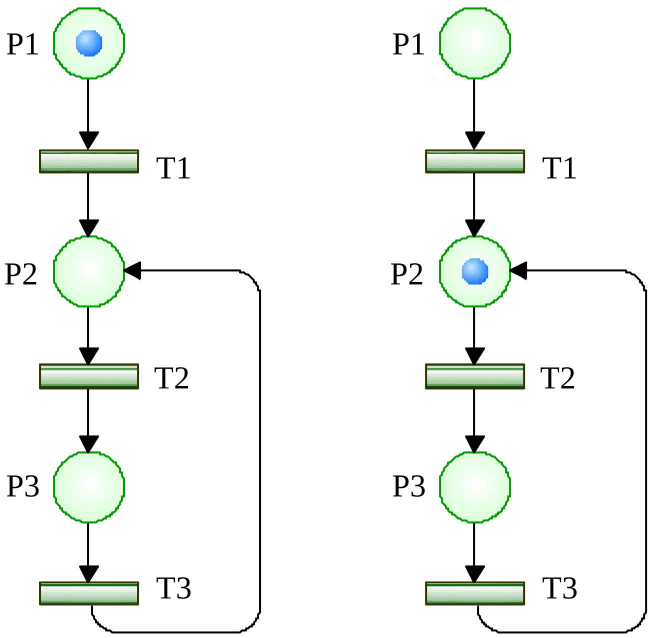
Exemple :
Le RdP ci-contre est vivant, en effet les transitions T1 et T2 sont toujours validées successivement.



c- Quasi-vivacité :

Une transition Tj est quasi vivante pour un marquage initial M0, s'il existe une séquence de franchissement qui contient Tj à partir de M0. Un RdP est quasi vivant si toutes ses transition sont quasi vivantes.

Exemples :
Pour chacun des marquages suivants, déterminer la vivacité de T1.

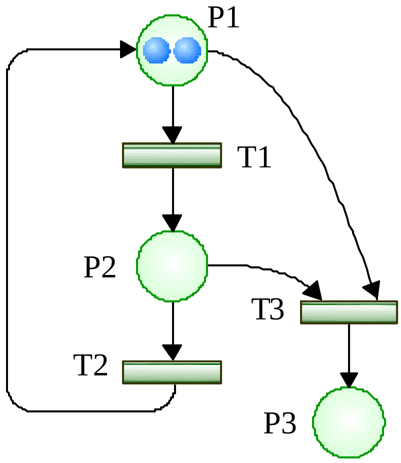


d- Blocage :

Un blocage est un marquage tel qu'aucune transition n'est validée. Un RdP est dit donc sans blocage (pseudo vivant) pour un marquage initial M0 si aucun marquage accessible Mi n'est un blocage.

Exemple:

Le franchissement de T1 suivi de celui de T3 conduit à une situation de blocage. Cet RdP est donc avec blocage.



Interprétation :
La vivacité indique que le système représenté est sans blocage, mais également qu'il n'existe pas de branche morte dans le modèle graphique donc pas de spécification incomplète.

3) RdP propre (Réinitialisable) :

a- RdP propre :

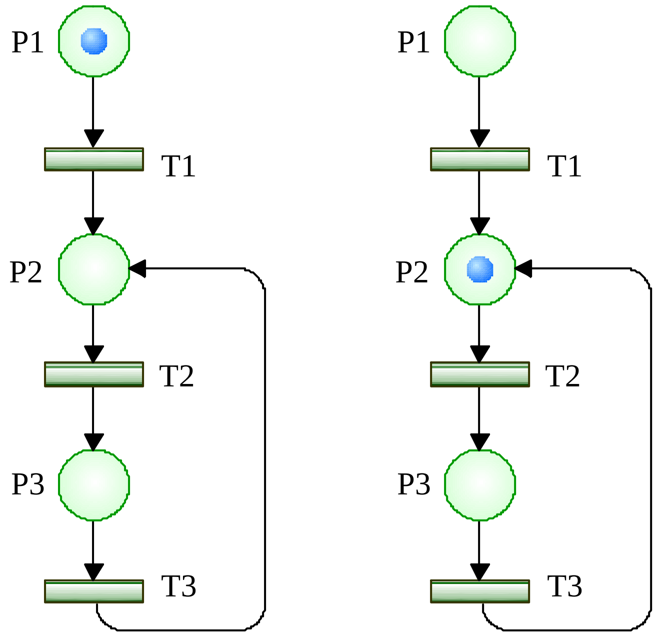
Un RdP est propre si pour tout marquage M accessible à partir du marquage initial, il existe une séquence S de franchissement qui ramène au marquage initial : Quel que soit le marquage M de *M0, il existe une séquence S qui ramène au marquage initial M0 :

$$M \xrightarrow{S} M0$$

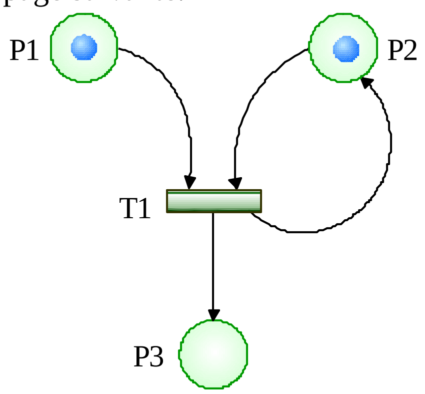
Interprétation : La plupart des processus industriels ont un fonctionnement répétitif. Il est donc très important de vérifier si les réseaux de Pétri qui les représentent sont propres.

b- Exemples :

Pour chacun des marquages suivants, déterminer si le RdP en question est propre ou non.



Exercice :
Déterminer les propriétés du RdP suivant. La solution est donnée avec le simulateur sur la page suivante.



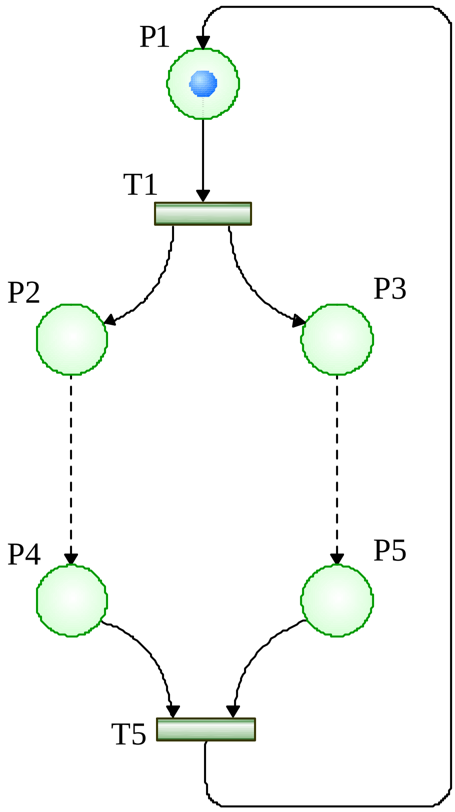
Solution :
Cet RdP est borné (Sauf), avec blocage, donc il est non vivant et non propre. Cependant il est quasi-vivant.

Structures élémentaires

Une des caractéristiques importantes des réseaux de Pétri est de pouvoir présenter graphiquement certaines relations et de visualiser certaines notions que nous allons discuter dans ce paragraphe.

4) Parallélisme :

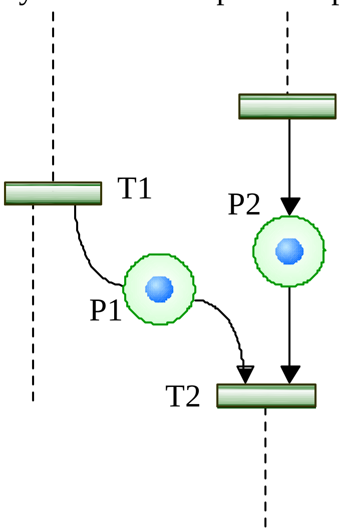
Sur le RdP suivant, nous remarquons qu'après le franchissement de T1 et jusqu'au franchissement de T5, nous avons des évolutions en parallèle, de la place P1 à la place P4 d'une part et de la place P2 à la place P5 d'autre part. Chacune de ces deux évolutions peut se faire à son rythme propre.



Interprétation :
Cette structure permet de représenter le fonctionnement des systèmes parallèles.

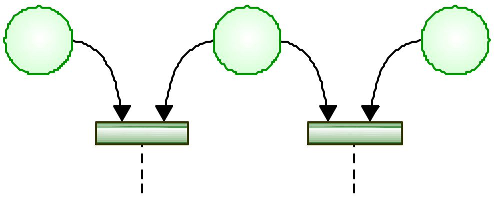
Synchronisation :
Nous reprenons le RdP précédant. Bien que les places P5 et P4 peuvent être marquées l'une avant l'autre, le franchissement de T5 ne peut s'effectuer que lorsque les deux places P4 et P5 sont marquées toutes les deux ce qui correspond au fait que la poursuite de l'évolution du RdP ne peut s'effectuer que lorsque les deux évolutions à savoir celle de P2 à P4 et celle de P3 à P5 sont terminées. Cette synchronisation correspond à une sorte de Rendez-vous.

Synchronisation par sémaphore :



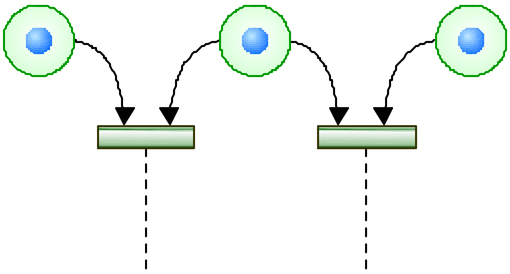
Dans ce cas, l'évolution de la partie gauche est indépendante de celle de la partie droite. En revanche, le franchissement de la transition T2 doit se faire après le franchissement de la transition T1. La place P1 mémorise l'autorisation de franchir T2.
Ainsi, si la place P2 est marquée avant la place P1, la transition T2 ne peut être aussi franchie qu'après le franchissement de la transition T1.

Conflits structurels et effectifs :
Deux transitions sont en conflit structurel lorsqu'elles possèdent une place d'entrée commune.



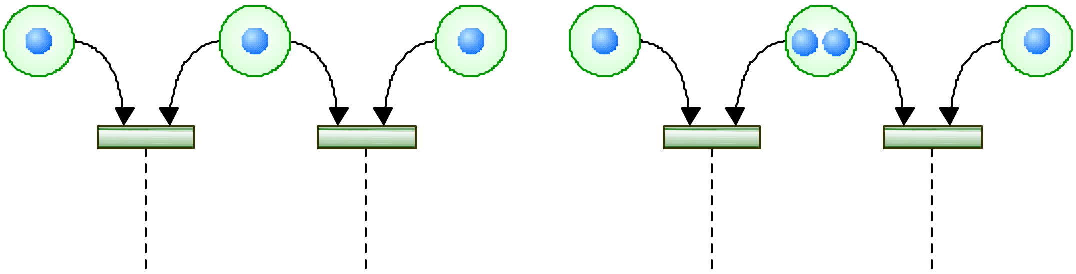
On parlera d'un conflit effectif entre deux transitions en conflit structurel s'il existe un marquage qui sensibilise les deux transitions et que le franchissement d'une transition empêche le franchissement de l'autre : une seule transition sera franchie, mais rien dans le réseau ne permet de prévoir laquelle.

Exemple :
Sur le RdP suivant, le franchissement d'une des 2 transitions empêche celui de l'autre.



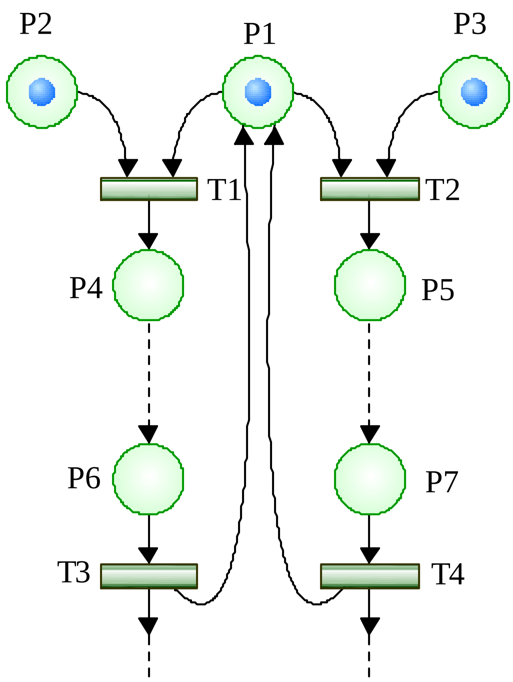
Interprétation :
Un conflit effectif signifie qu'il y a indéterminisme du réseau, donc que l'évolution du système décrit présente une partie aléatoire.

Exemple :
Le RdP A présente un conflit effectif alors que le RdP B présente seulement un conflit structurel puisque le franchissement d'une transition n'empêche celui de l'autre.



Mutuelle exclusion :

Deux places sont mutuellement exclusives si pour un marquage initial M0 donné, elles ne peuvent pas être simultanément marquées quelque soit le marquage M atteint à partir de M0. Sur l'exemple suivant les places P4 et P5 sont mutuellement exclusives.



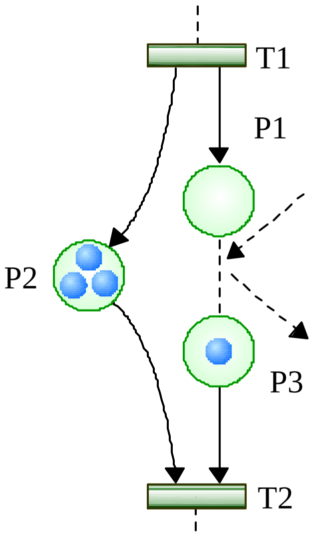
Interprétation :
On rencontre la mutuelle exclusion dans tout système comprenant un partage de ressources. Exemple, en informatique, plusieurs programmes qui utilisent une même ressource, comme une mémoire commune par exemple, peut se modéliser ainsi.

Sur l'exemple précédent, la place P1 modélise la disponibilité d'une ressource qui peut être utilisée par la partie gauche à partir du franchissement de T1 et jusqu'au franchissement de T2 ou par la partie droite dans des conditions similaires, mais pas par les deux simultanément.

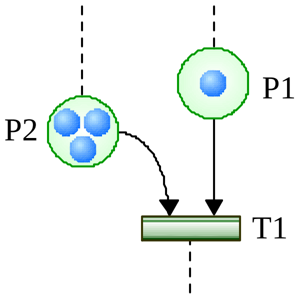
Remarque :
Dans un cas plus général, il peut y avoir plusieurs ressources identiques (plusieurs marques dans P1) et les différentes parties du RdP peuvent utiliser ces ressources simultanément.

Mémorisation :

La place P2 du RdP suivant mémorise le fait que la transition T1 a été franchie, ce qui autorise le franchissement ultérieur de T2, sous réserve que les autres conditions de validation soient remplies.



On peut également mémoriser un nombre (par exemple le nombre de pièces dans un stock) par la présence de plusieurs marques dans une place.



IV. Méthodes de réduction :

1) Introduction :

La construction du graphe des marquages est certes une méthode efficace pour trouver les propriétés d'un RdP de taille modeste, mais cela peut être très long et fastidieux pour un RdP qui a de nombreux marquages accessibles. Pour cela, nous proposons dans cette section d'utiliser quelques méthodes de réduction qui permettent d'obtenir à partir du RdP initial un autre RdP plus simple mais qui possède certaines propriétés identiques à celle du RdP initial.

Attention :
Le RdP obtenu après simplification n'est pas équivalent du point de vu fonctionnel au RdP initial, c-à-d qu'il ne représente plus le système modélisé au départ.
Les règles de simplification ne permettent pas de préserver toutes les propriétés, donc un soins particulier doit être accordé à l'application de ces réductions et à l'élaboration des propriétés.

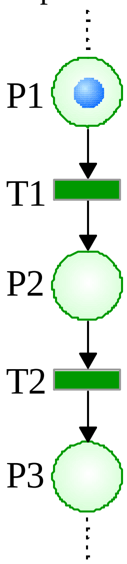
Dans ce paragraphe nous allons nous limiter à la présentation de quelques règles qui permettent essentiellement de préserver les propriétés de vivacité et de bornage !

2) Réduction R1 : Substitution d'une place :

a- Principe :

Une place Pi peut être substituée si elle remplit les 3 conditions suivantes :
les transitions de sortie de Pi n'ont pas d'autres places d'entrées que Pi ;
il n'existe pas de transition Tj qui soit à la fois transition d'entrée et de sortie de Pi ;
au moins une transition de sortie de Pi n'est pas une transition puit.

Exemple :
La place P2 du RdP ci-contre remplit ces conditions, donc elle peut être substituée.

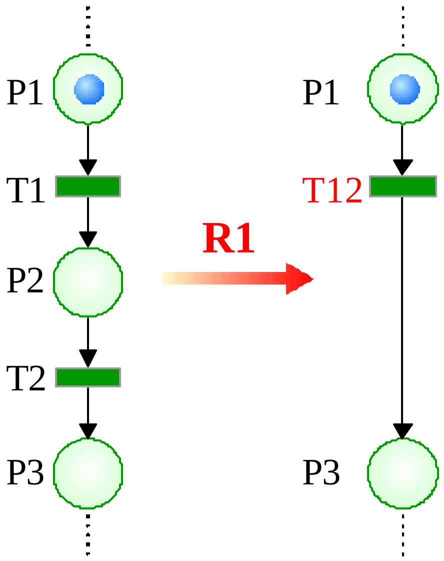


b- Propriétés conservées par la réduction :

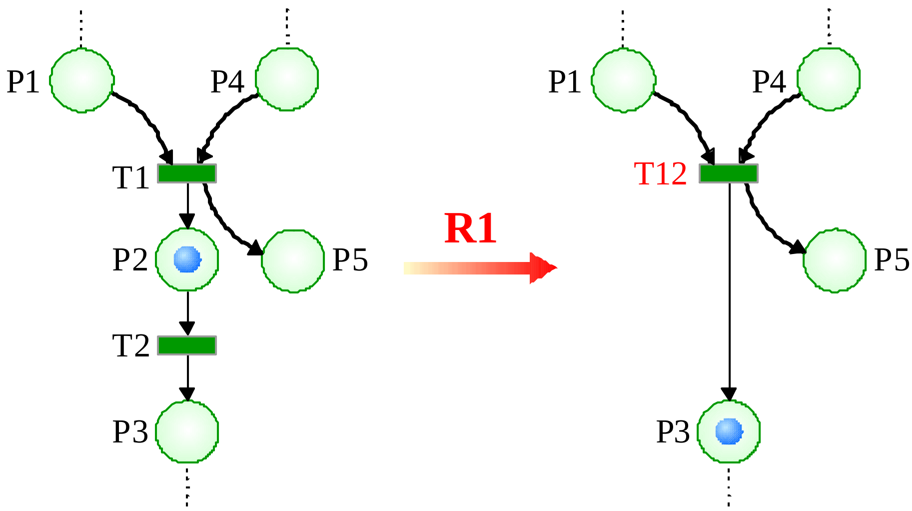
Elles sont : borné (mais pas la valeur de la borne), sauf, vivant, quasi-vivant, sans blocage, …

Exemples :

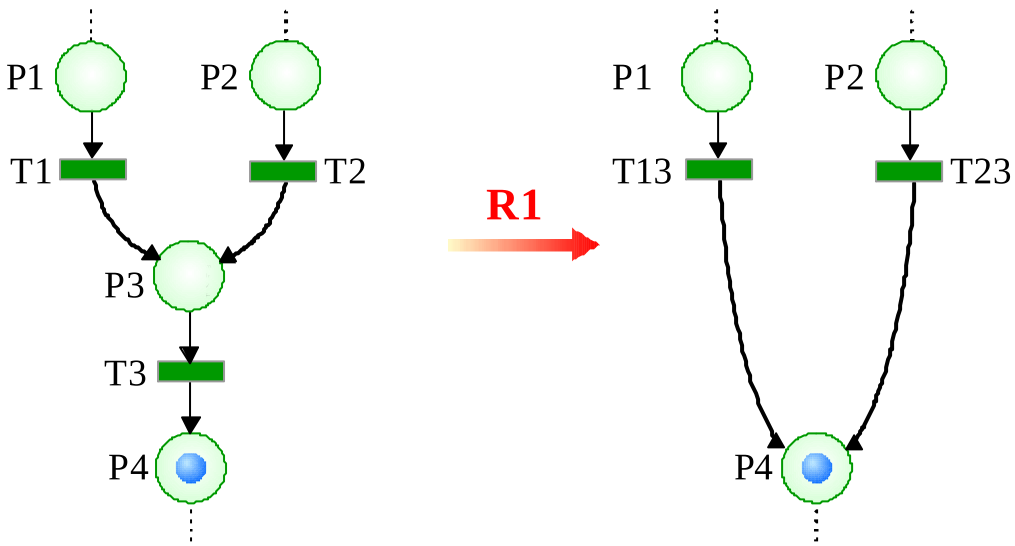
Exemple 1 :
Sur le RdP ci-contre (a), on voit que si la transition T1 est franchie, alors la transition T2 le sera tôt ou tard parce qu'il n'y a aucun autre arc arrivant sur T2 que celui qui vient de P2. On peut alors substituer à la place P2 et aux deux transitions (d'entrée et de sortie) une seule transition appelée T12 (b).



Exemple 2 :
Nous avons ici un cas similaire montrant qu'il n'y a pas de restriction sur la transition T1. En effet, les places d'entrée de T1 sont les places d'entrée de T12 et si T1 a d'autres places de sortie que P2, ce sont également des places de sortie de T12. On notera également que la place P2 est marquée. Comme cette marque doit nécessairement arriver dans P3, on la met dans cette place après la substitution.

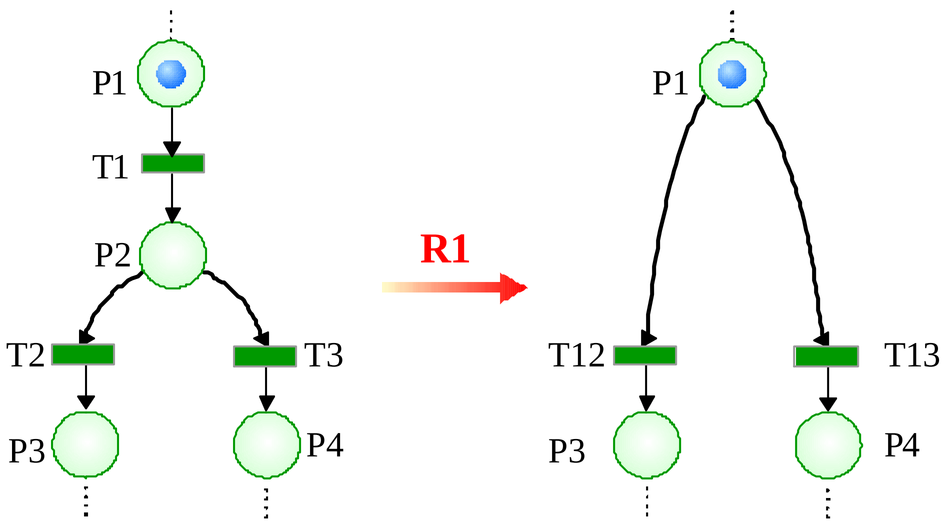


Exemple 3 :
Toute marque arrivant en P3 doit passer dans P4, qu'elle vienne de P1 ou de P2. La substitution consiste à mettre une transition T13 qui correspond à la séquence de franchissement T1T3 et la transition T23 qui correspond à la séquence de franchissement T2T3.



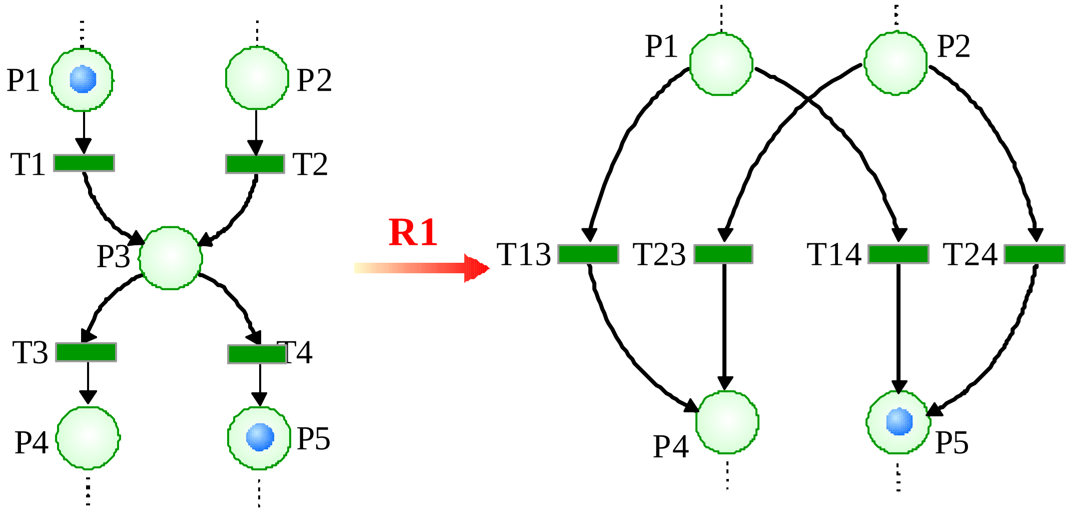
Exemple 4 :

Une marque arrivant dans P2 passera tôt ou tard soit dans P3, soit dans P4. l'application de la réduction conserve cette propriété, d'où la sub stitution par les deux transitions T12 et T13 qui correspondent respectivement aux séquences de franchissement T1T2 et T1T3.



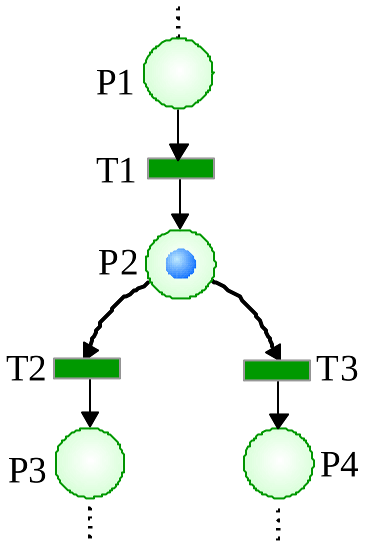
Exemple 5 :

Une marque dans P3 peut provenir soit de P1, soit de P2 et aboutir soit dans P4, soit dans P5. Tous ces cas de figures seront conservés après substitution en utilisant les transitions T13, T23, T14 et T24.

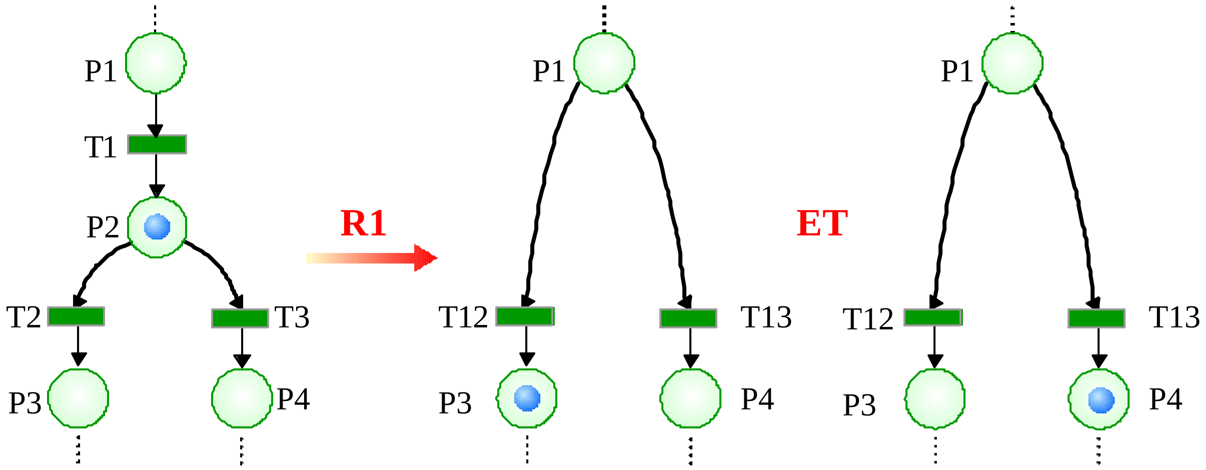


Remarque :
Dans le cas où la place à substituer est marquée, alors :
si elle a une seule transition de sortie alors le marquage passe à la place suivante ;
- si elle en a plusieurs, alors il faut considérer tous les cas de figures. Chaque cas est obtenu en passant le marquage à travers une de ces transitions de sortie.

Ceci est le cas de la place P2 du RdP ci-contre.



Exemple 6 :
Dans l'exemple suivant, la marque qui est dans P2 avant la substitution pourrait aboutir soit dans P3, soit dans P4. Il faut donc considérer les 2 cas, c-à-d qu'il faut étudier les 2 réseaux ainsi obtenus. Les propriétés qui se conservent par la réduction R1 ne seront vraies pour le réseau initial que si elles sont vraies pour les 2 réseaux obtenus après substitution.



3) Réduction R2 : Place implicite :

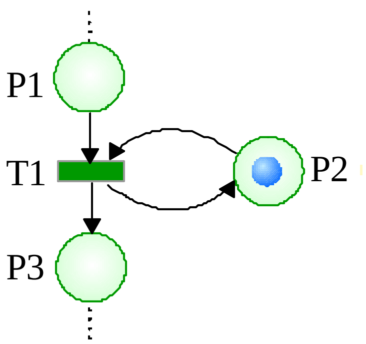
a- Principe :

Une place Pi est implicite si elle remplit les conditions suivantes :
le marquage de cette place n'est jamais un obstacle au franchissement de ses transitions de sortie. C-à-d, si Tj est une transition de sortie de Pi, alors : quand M(Pk) = Pré(Pk, Tj) pour toutes les places d'entrée de Tj autres que Pi, alors M(Pi) = Pré(Pi, Tj) aussi ;
son marquage peut se déduire du marquage des autres places, par la relation suivante :

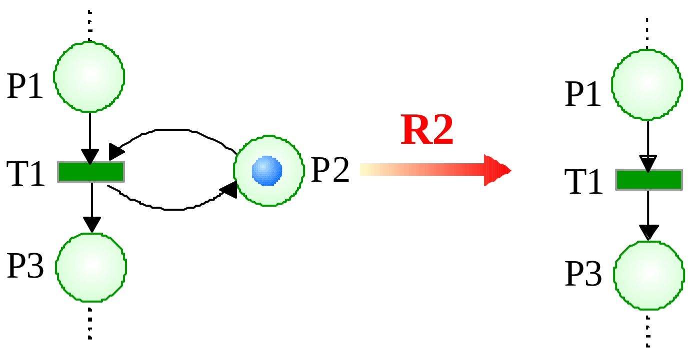
M(Pi)=? $_{k?\ i}$ (? k . M(Pk)) + ?

avec ? k est un nombre rationnel positif ou nul et ? un nombre rationnel.

Dans l'exemple ci-contre, la place P2 est implicite !

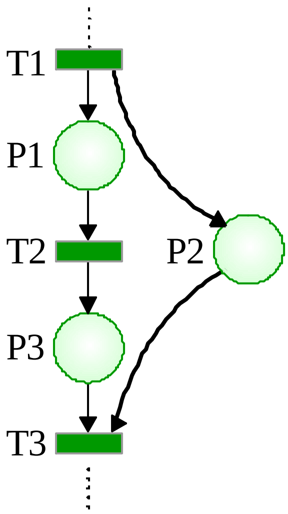


La réduction R2 consiste à supprimer une place implicite et les arcs correspondants.

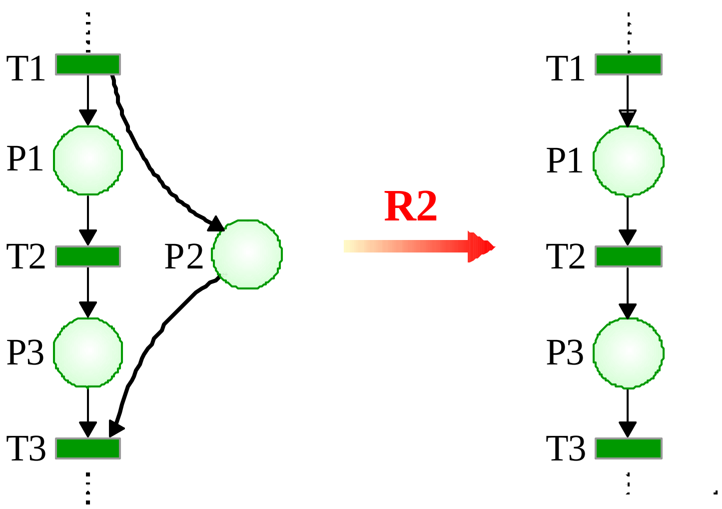


Les propriétés conservées par la réduction sont : borné (mais pas la valeur de la borne), vivant, quasi-vivant, sans blocage. Cependant, si le RdP est sauf après réduction, le RdP initial peut ne pas l'être.

b- Exemple :

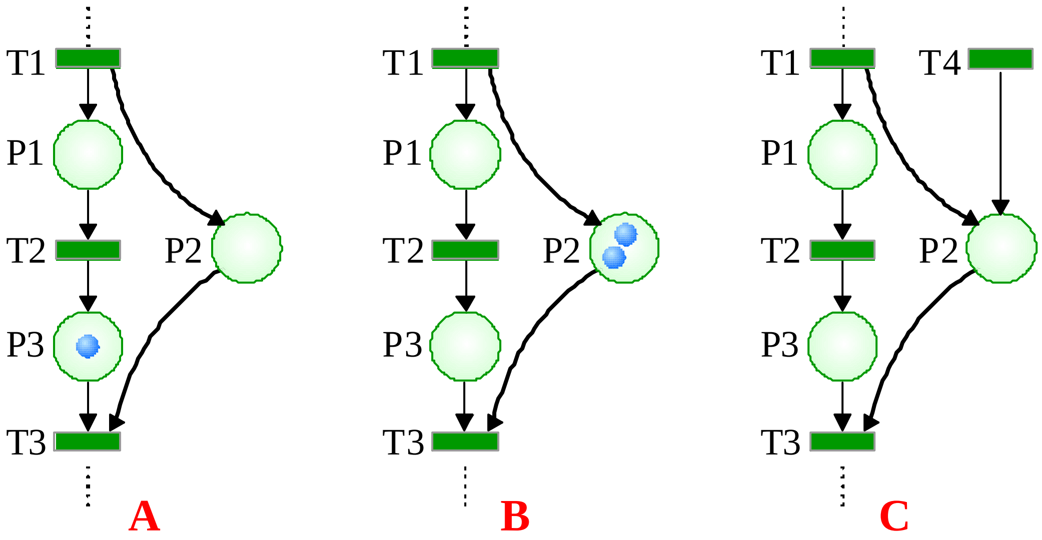


La place P2 est une place implicite. En effet :
Condition 1 : cette place n'est place d'entrée que de T3. Pour franchir T3, il faut une marque dans P3, donc il a fallu franchir T2 avant de pouvoir franchir T3. Pour franchir T2, il fallait une marque dans P1 et cette marque ne pouvait provenir que du franchissement de T1. Or, le franchissement de T1 met une marque dans P2 et il n'y a aucune autre sortie de P2 que la transition T3. Donc, s'il y a une marque dans P3, il y en a aussi dans P2.
Condition 2 : le raisonnement précédent conduit à Mj(P2)=Mj(P1)+Mj(P3) pour tout marquage Mj. L'application de la réduction R2 à ce réseau conduit au RdP de la figure (b).



Exercice :

Pour chacun des RdP suivants, déterminer si P2 satisfait les conditions d'une place implicite et éventuellement donner le RdP obtenu après la réduction R2.



Réponse :
La place P2 du RdP A satisfait la condition 2 mais pas la condition 1 parce qu'il n'y a pas de marque dans P2 alors que P3 contient une marque. La place P2 ne peut pas être supprimée, sous peine de ne pas conserver certaines propriétés du réseau initial.

La place P2 du RdP B est une place implicite. En effet, le raisonnement donné dans l'exemple précédent permet de montrer que lorsqu'il y a une marque dans P3, il y'en a 3 dans P2, donc la condition 1 est satisfaite. La condition 2 l'est aussi car Mj(P2)=Mj(P1)+Mj(P3)+2 et ceci pour tout marquage Mj.

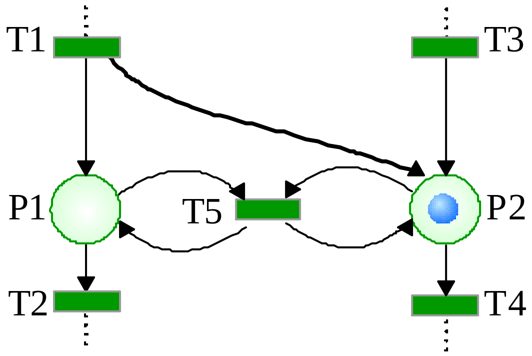
La place P2 du RdP C n'est pas une place implicite. En effet, bien que la condition 1 soit satisfaite, la condition 2 ne l'est pas puisque la transition T4 est une transition source.

4) Réduction R3 : Transition neutre :

a- Principe :

Une transition Tj est neutre si et seulement si l'ensemble de ses places d'entrée est identique à l'ensemble de ses places de sorties. Nous pouvons supprimer une transition neutre Tj et ses arcs entrants et sortants, si et seulement s'il existe une transition Tk? Tj, telle que Post(Pi, Tk) = Pré(Pi, Tj) pour toute place Pi d'entrée de Tj.

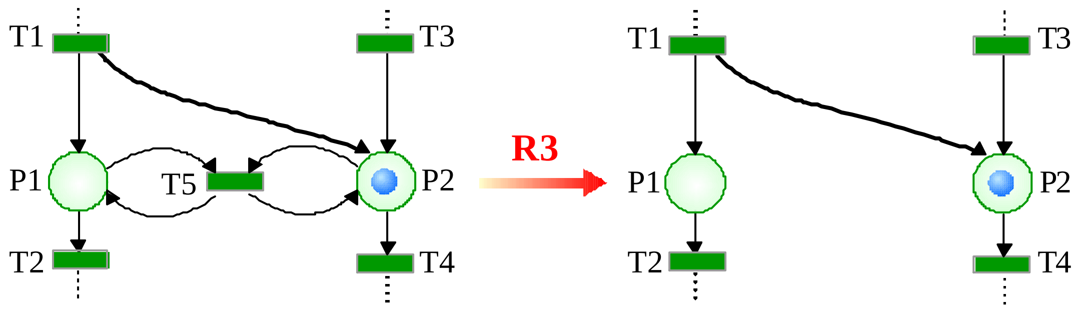
Exemple :



La transition T5 est neutre !

Les propriétés conservées par la réduction sont : borné (mais pas la valeur de la borne), sauf, vivant, quasi-vivant, sans blocage, …

b- Exemple :

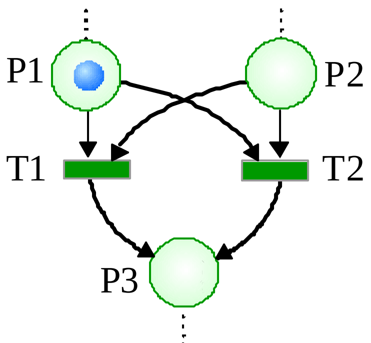


5) Réduction R4 : Transitions identiques :

a- Principe:

Deux transitions Tj et Tk sont identiques si elles ont le même ensemble de places d'entrées et le même ensemble de places de sorties. Dans ce cas, nous pouvons supprimer l'une d'entre elles et les arcs correspondants.

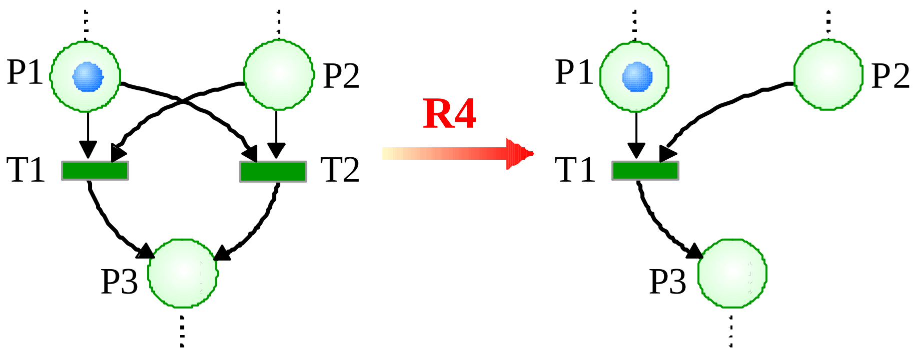
Exemple :



Les transitions T1 et T2 sont identiques !

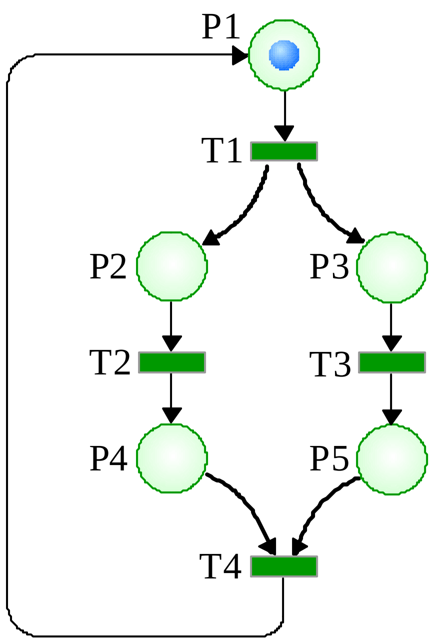
Les propriétés conservées par la réduction sont : borné (mais pas la valeur de la borne), sauf, vivant, quasi-vivant, sans blocage, …

b- Exemple :



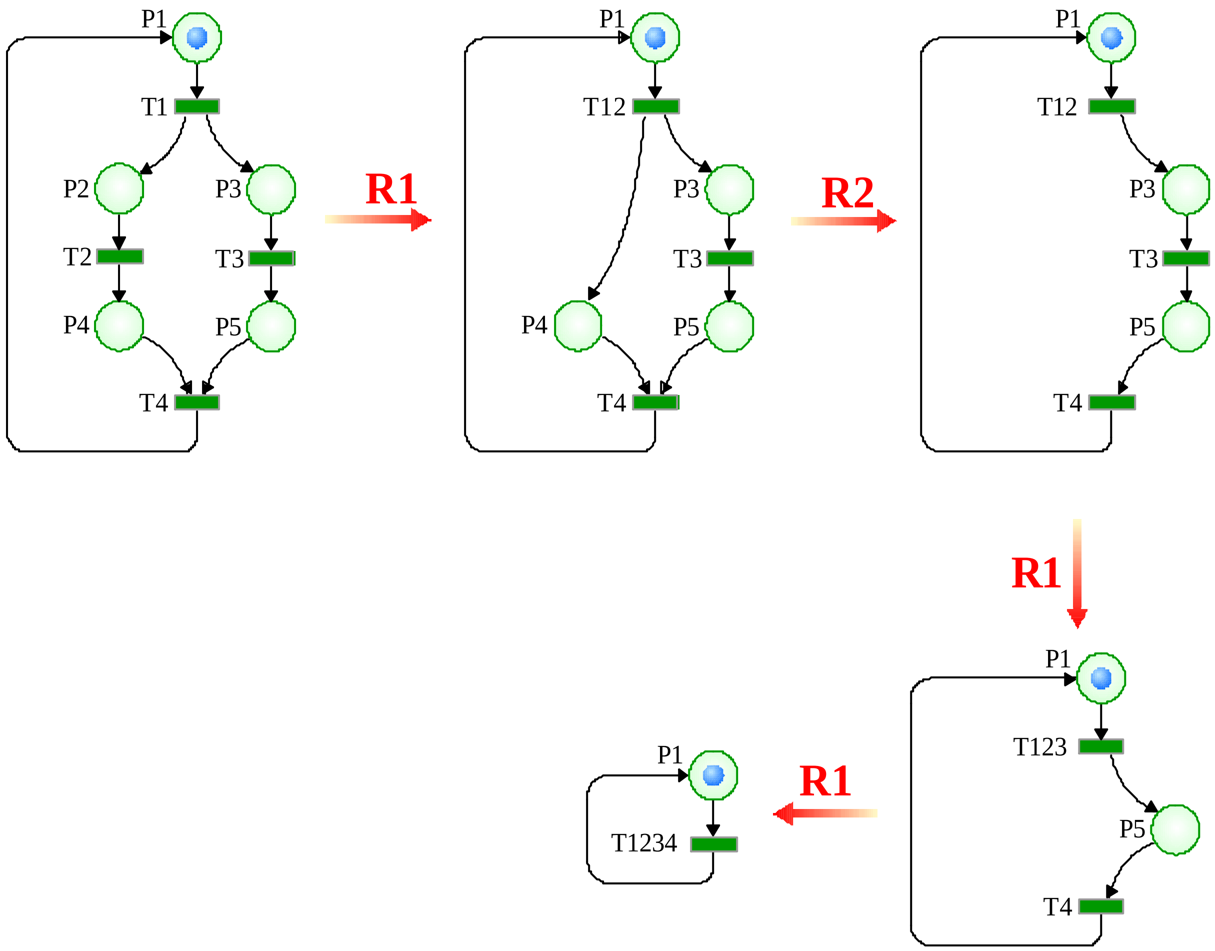
6) Exemple :

On considère le RdP suivant.



Etudier les possibilités de réduction applicables successivement à cet RdP. En déduire du RdP final certaines propriétés du RdP initial.

Réponse :



Remarques :

Certaines configurations telles que présence d'une transition neutre ou des transitions identiques, voire de place implicites, sont rarement rencontrées dans un RdP initial bien conçu. Néanmoins, on peut les rencontrer après que le processus de réduction ait commencé.
Il existe d'autres règles de réduction données par divers auteurs. Elles sont généralement plus compliquées et celles qui nous avons présentées ici suffisent souvent.