Cours de réseau de Petri

Yann Morère

Avril 2002

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

Réseau de Petri

Carl Adam Petri est un mathématicien allemand qui a défini un outil mathématique très général permettant de décrire des relations existant entre des conditions et des évènements, de modéliser le comportement de systèmes dynamiques à évènements discrets.

- ▷ début des travaux 1960-1962 : ont donné lieu à de nombreuses recherches.
- ▷ 1972-1973, utilisation de cet outil pour la description d'automatismes logiques, ce qui a débouché sur le Grafcet. Cet outil permet l'analyse qualitative.

Il existe différents types de réseaux de Petri : temporisés, interprétés, stochastiques, colorés, continus et hybrides.

Grafcet

En 1975, le groupe *Systèmes logiques* de L'AFCET (Association française pour le cybernétique économique et technique) décide de créer une commision de normalisation de la représentation du cahier des charges d'un automatisme logique du fait de la complexité future de ces automatismes. L'outil de représentation retenu s'inspire des réseaux de Petri et propose une interprétation unique des entrées/sorties du système : il s'agit du **Grafcet**. Largement enseigné dans les filières techniques, il deviendra une norme internationale en 1987.

Chapitre 1

Réseaux de Petri

Ces réseaux présentent des caractéristiques intéressantes telles que la modélisation et la visualisation de comportements parallèles, de la synchronisation et partage de ressources. De plus leurs aspects théoriques ont été largement étudiés et les résultats théoriques les concernant sont très abondant. On notera par exemple les ouvrages collectifs suivants :

▷ G.W. BRAMS « RdP : théorie et pratique » Masson 83

▷ Proth et Xie « Gestion et conception des systèmes de production » Masson 95

C'est un outil de modélisation utilisé généralement en phase préliminaire de conception de système pour leur spécification fonctionnelle, modélisation et évaluation.

Les principaux utilisateurs de ces réseaux sont les informaticiens et les automaticiens. Cependant c'est un outil assez général pour modéliser des phénomènes très variés. Il permet notamment :

▷ la modélisation des systèmes informatiques,

▷ l'évaluation des performances des systèmes discrets, des interfaces homme-machine,

▷ la commande des ateliers de fabrication,

▷ la conception de systèmes temps réel

▷ la modélisation des protocoles de communication,

▷ la modélisation des chaines de production (de fabrication),

▷ ...

en fait, tout système dans lequel circule objets et information.

Les atouts des RdP :

▷ ils permettent de décrire de manière précise mais non formelle la structure d'un système,

▷ ils offrent un support graphique de conception,

▷ ils permettent de décrire un système étape par étape, en décomposant en éléments plus simples les éléments constitutifs initiaux du système,

▷ ils permettent de décrire à l'aide d'un même support de base, à la fois la structure et la dynamique d'un système,

▷ ils permettent de passer d'une description graphique d'un système à une description formelle permettant l'analyse mathématique du système (cohérence).

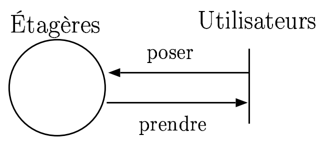
Chapitre 2

Introduction au RdP

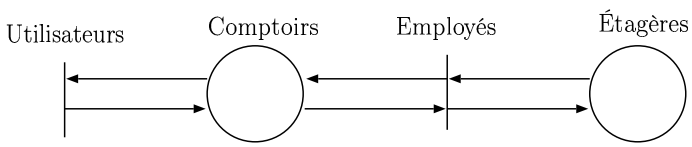
2.1 Principe de modélisation

Nous allons partir d'un exemple simple de système à modéliser : une bibliothèque.
Au niveau le plus haut on distingue :

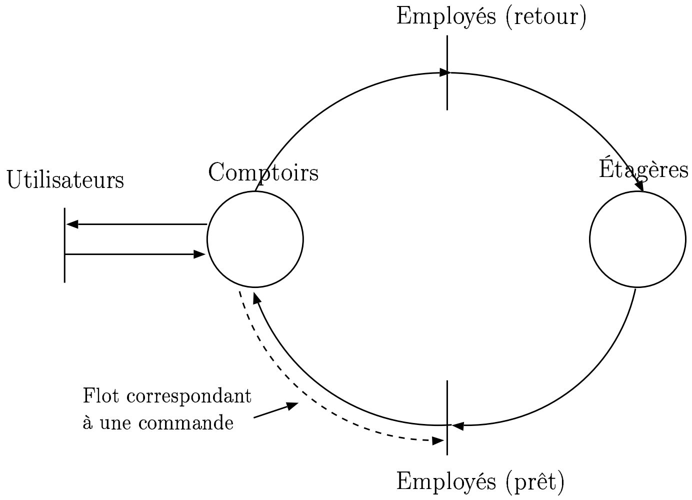
▷ les utilisateurs de la bibliothèque (composants actifs de la bibliothèque),
▷ les étagères de la bibliothèques (composants passifs).

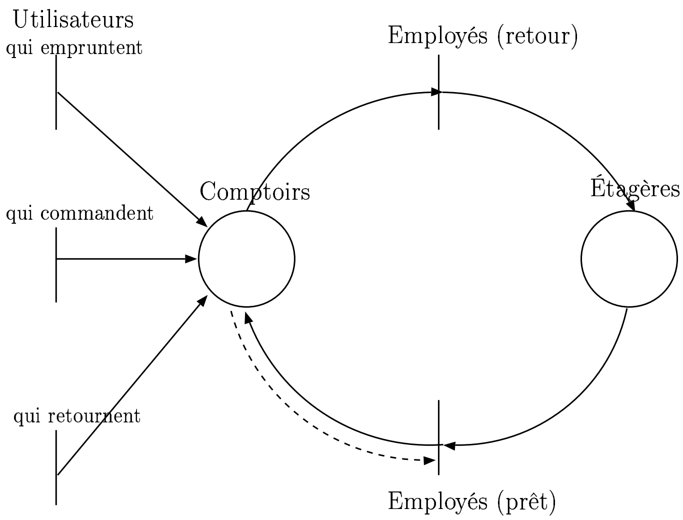


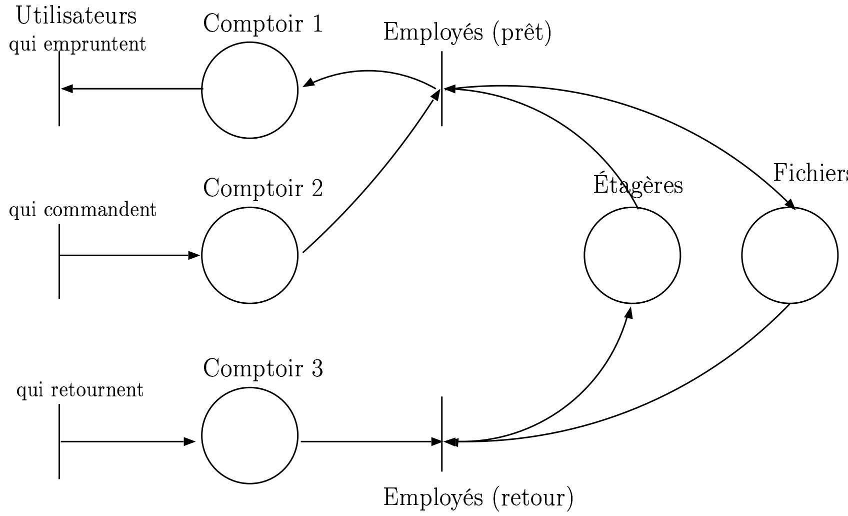
Sur ce schéma, on modélise un accès direct des utilisateurs aux livres.



Les flèches représentent les flot d'objets ou d'information entre les composants. Il est bien sur possible de compliquer les choses en intégrant davantage de données.







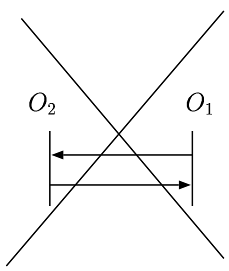
Principe 1 : Les composants actifs et passifs du système doivent être bien distingués, un composant passif peut contenir/stocker des objets ou de l'information. Un composant actif peut transporter des objets ou de l'information.

Principe 2 : Les arcs entre composants passifs et actifs ne doivent pas représenter une composante réelle du système mais une relation abstraite entre composants.

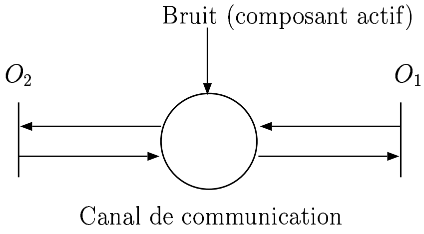
Principe 3 : Un arc ne doit jamais relier deux composants du même type.

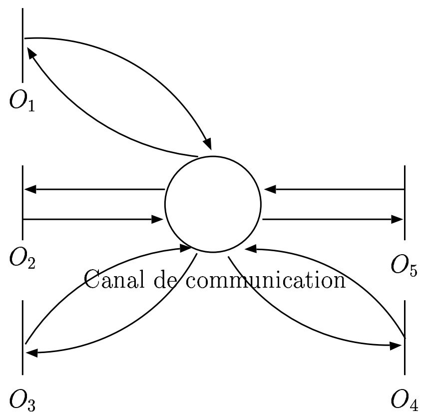
Si ces principes ne sont pas suivis, on aboutit à terme à des problèmes de modélisation.

Exemple : Système de communication reliant 2 systèmes informatiques O_1 et O_2.



Mauvaise Modélisation





Principe 4 : La même structure de réseaux représentant l'architecture du système modélisé devra pouvoir être modélisée pour décrire sa dynamique.

Comment ?

- ▷ On placera des marques représentant des objets ou de l'information dans les composants passifs,
- ▷ On décrira par des règles strictes comment les composants actifs peuvent faire transiter des objets de composants passifs en composants passsifs.

Principe 5 : On obtient une description plus détaillée d'un système

- ▷ soit en remplaçant un composant du système par un sous réseau,
- ▷ soit en ajoutant un nouveau composant au système.

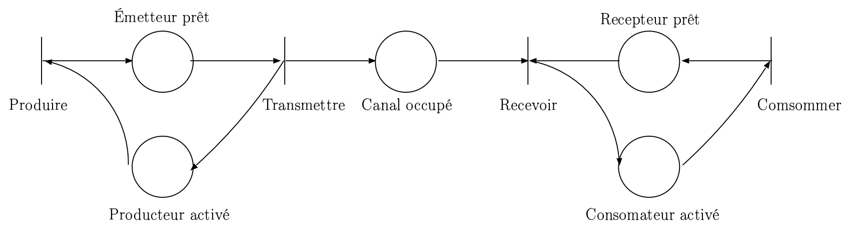
2.2 Réseaux de conditions et d'évènements

2.2.1 Un exemple

Considérons un système assez général de production/consommation. Dans ce système abstrait, on va considérer que des objets peuvent être :

1. produits,
2. transmis,
3. reçus,
4. consommés.

On distingueras 4 types d'évènements que l'on représentera par des barres.



De plus, on considérera que l'occurence de ces évènements est conditionnée ; on représentera des conditions à l'aide de cercles.

L'occurence des divers évènements est conditionnée par exemple par le fait :

▷ que le canal soit occupé ou non,

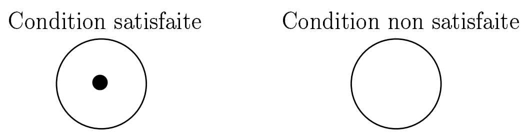
▷ qu'un émetteur soit prêt ou non.

Sur cet exemple on distinguera deux types de conditions, relativement à un évènement donné :

▷ certaines de ces conditions sont en aval de l'évènement considéré,
exemple : la condition « canal occupé » est une condition aval relativement à l'évènement « transmettre ».

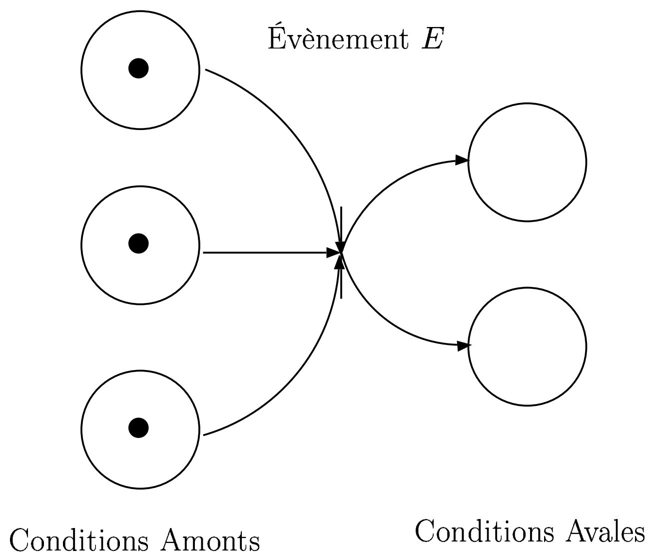
▷ certaines conditions sont en amont de l'évènement condidéré :
exemple : la condition « émetteur prêt » est en amont de l'évènement « transmettre ».

Dans ce cadre, une condition sera toujours satisfaite ou non satisfaite.



Un évènement peut se produire si et seulement si :

1. toutes ses conditions amonts sont satisfaites,
2. aucune de ses conditions avales n'est remplie.



On considérera qu'après l'occurence d'un évènement :

1. toutes ses conditions amonts ne sont plus satisfaites,

2. toutes ses conditions avales sont maintenant satisfaites.

Remarque 2.2.1. l'indéterministe de la dynamique du système représente, par exemple, lorsque seules les conditions « canal occupé » , « récepteur prêt », et « producteur activé » sont satisfaites, deux évènements peuvent se produire « recevoir » et « produire ».

2.2.2 Définitions

Un RdP de conditions et d'évènements est constitués :

- ▷ de conditions représentées par des cercles, .
- ▷ d'évènements, représentés par des barres, .
- ▷ d'arcs reliant des conditions à des évènements, .
- ▷ d'arcs reliant des évènements à des conditions, .
- ▷ de marques •, indiquant si une condition est remplie , ou non

Dans ce cadre

- ▷ une condition C est toujours une condition amont (avale) à l'évènement E si on a un arc reliant C (E) à E (C), $_C$ $_E$, ($_E$ $_C$).
- ▷ une condition est toujours satisfaite ou non. Un réseau est marqué si et seulement si les conditions satisfaites sont représentées comme suit ; le marquage initial d'un RdP est consitué de l'ensemble de ses conditions et des marques qu'elles peuvent contenir.

2.2.3 Règles d'activation

- ▷ Un évènement est réalisable si et seulement si toutes ses conditions amonts sont remplies et aucune de ses conditions avales.
- ▷ Après occurence d'un évènement, toutes ses conditions avales et amonts sont respectivement remplies et non remplies.

2.2.4 Conflit d'occurence d'évènements

Une des caractéristiques importante des réseaux de conditions et d'évènements réside dans leur caractère non déterministe en cas de situation de conflit.

Exemple 2.2.1. Soit une système composé de deux processus P_1 et P_2 en compétition pour accéder à une unité de stockage.

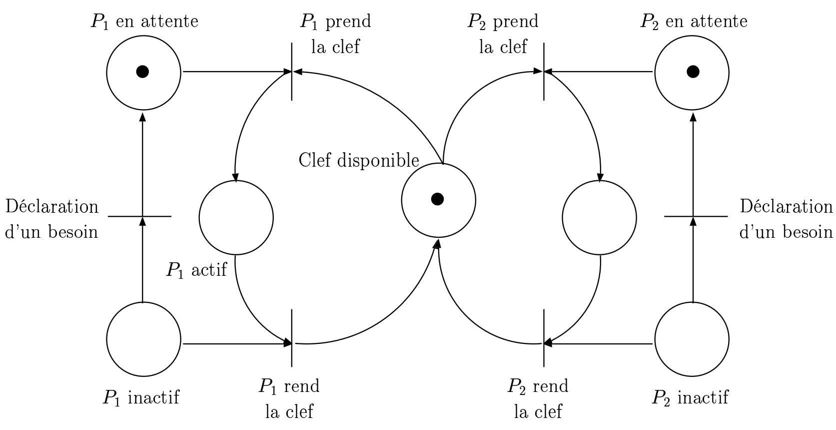
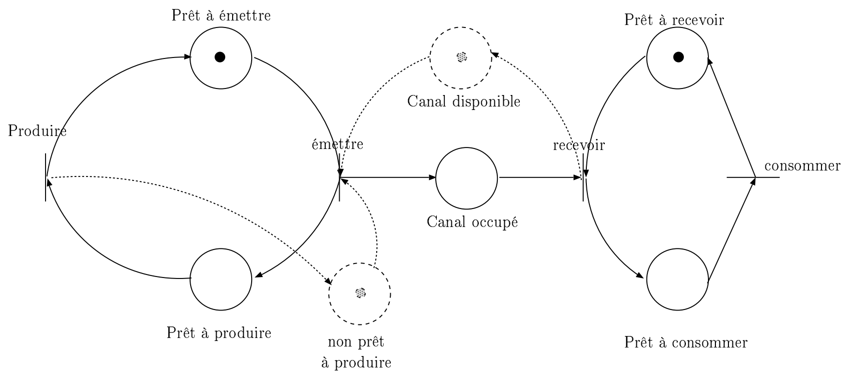


Fig. 2.1 – Situation de conflit

Lorsque les conditions « P_1 en attente » et « P_2 en attente » et « clef disponible » sont remplies, à la fois les évènements « P_1 prend la clef » et « P_2 prend la clef » sont réalisables. Par contre, si l'un des évènements est réalisé, l'autre devient non réalisable. On dit de ces évènements qu'il sont en situation de conflit.

Une condition nécessaire à l'existence d'une situation de conflit entre deux évènements est qu'il possèdent au moins une condition avale en commun. Mais ce n'est pas suffisant.

2.2.5 Conditions complémentaires



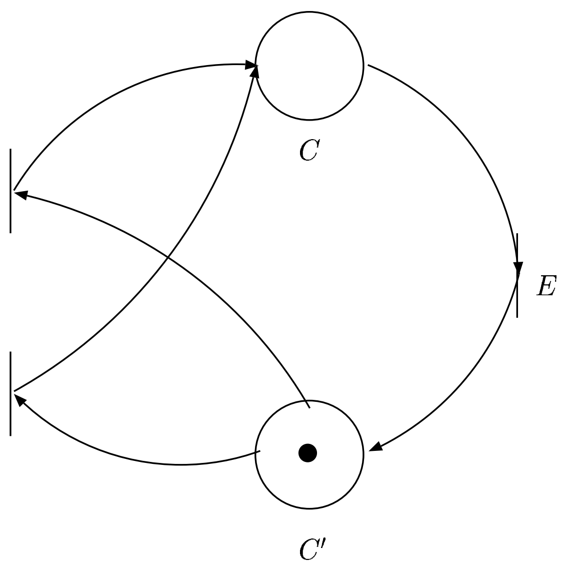
Sur cet exemple la réalisation de l'évènement « émettre » est conditionnée par la condition « prêt à émettre » et en aval par les conditions « canal occupé » et prêt à produire.

Les conditions « canal occupé » ou « canal disponible » sont dites complémentaires, de même que les conditions « prêt à produire » et « non prêt à produire ». Après ajout de ces conditions, il devient inutile de vérifier si les conditions avales de l'évènement « émettre » sont remplis ou non pour savoir s'il est réalisable.

Définition 2.2.1. Soit une condition (C) d'un RdP donné. (C') est une condition complémentaire de C si et seulement si :

▷ si E est un évènement en aval de C (respectivement en amont de C), alors E est un évènement en amont de C' (respectivement en aval),

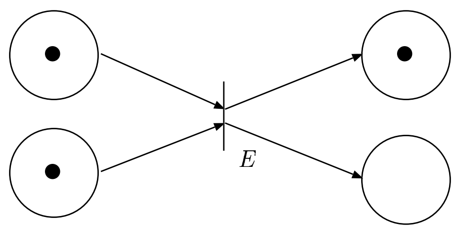
▷ C' est initialement remplie si et seulement si C ne l'est pas.



Si C et C' sont deux conditions complémentaires elles ne seront jamais remplies simultanément.

L'ajout de conditions complémentaires à une RdP ne modifie pas son comportement.

Définition 2.2.2. On dira qu'il y a point de tengance au niveau d'un évènement E d'un RdP si et seulement si :
- ▷ toutes les conditions amonts de E sont remplies,
- ▷ il existe au moins une condition avale de E qui soit remplie.

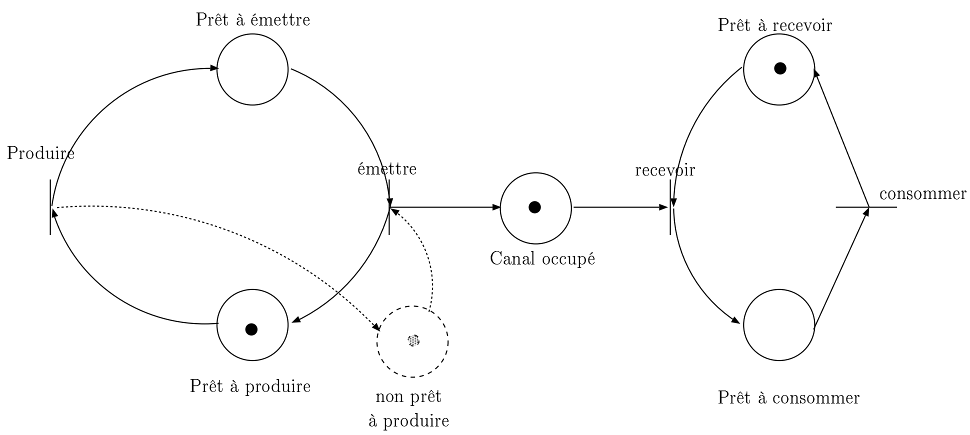


Point de tangence

Si un Rdp est initialement sans point de tengance et qu'il lui est ajouté toutes les conditions complémentaires possibles, alors l'occurence du point de tengance devient impossible.

Règle : Si toutes les conditions amonts sont remplies **et** aucune condition avale n'est remplie **alors** l'évènement est réalisable.
$\Rightarrow$ toutes les conditions amonts remplies ($\Rightarrow$ aucune condition avale remplie) s'il n'y a pas de point de tengance possible.

2.2.6 Représentation de la dynamique d'un RdP

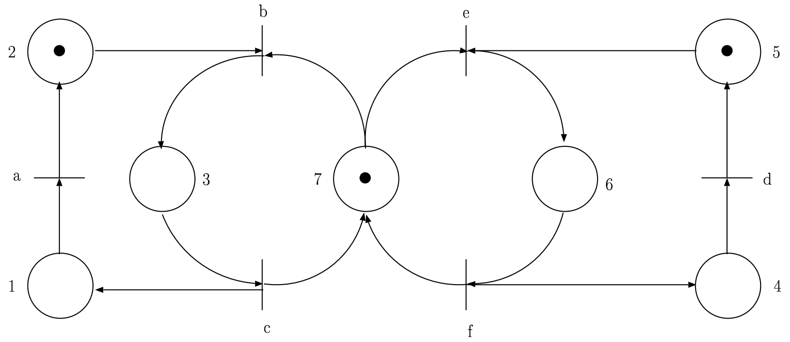


Deux évènement sont réalisables « produire » et « recevoir », ils ne sont pas en situation de conflit et peuvent se réaliser indépendemment l'un de l'autre.

Il est même *a priori* possible que les deux évènement se réalisent simultanément (ce n'est pas mesurable expérimentalement).

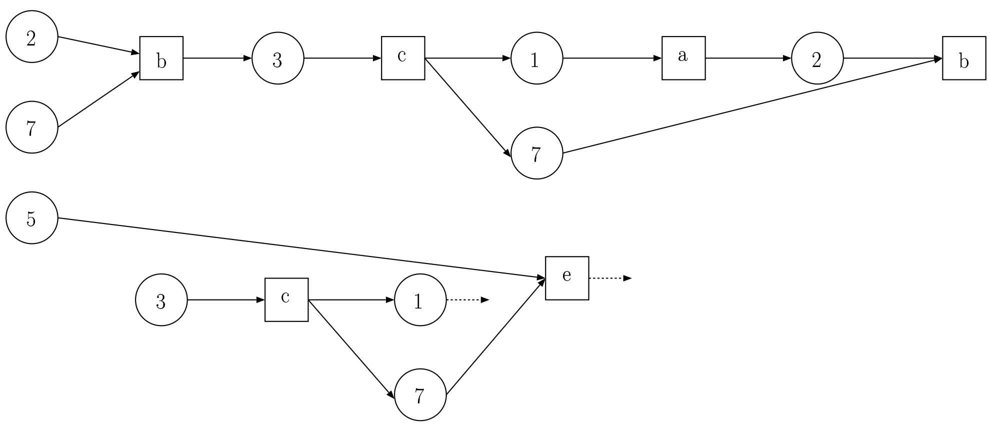
Si on le voulait on pourrait d'ailleurs modifier le RdP pour préciser que les deux évènements en question doivent se réaliser l'un après l'autre.

Après modification du réseau, les évènement « produire » et « recevoir » ne peuvent plus se réaliser en même temps. L'évènement E doit nécessairement être réalisé entre les deux.



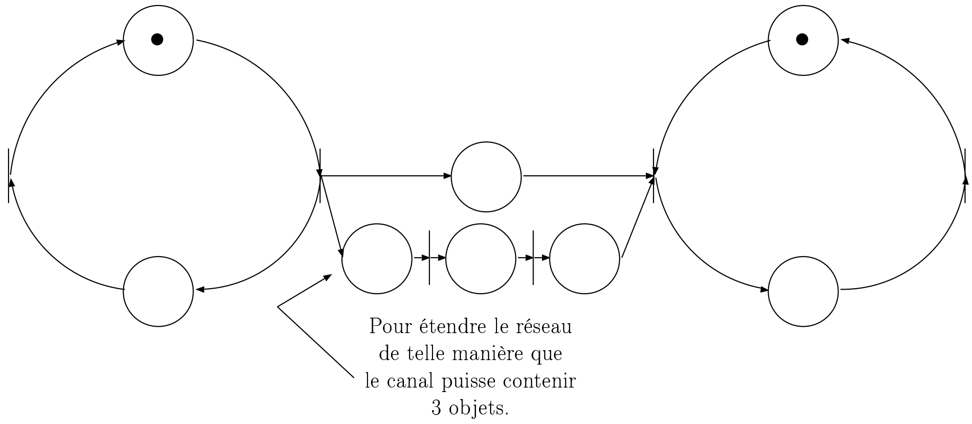
Soit un RdP sans possibilités d'occurence de points de tengance ; il est possible de représenter sa dynamique par des graphes acycliques définits comme suit :

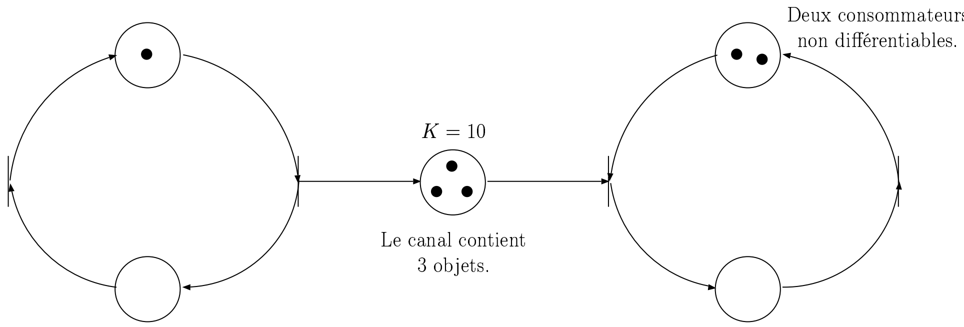
1. pour chaque condition C initialement remplie, on dessine un cercle étiqueté par C,
2. tant qu'un évènement E est réalisable :
   (a) choisir un évènement E et le réaliser,
   (b) dessiner une boîte étiquetée par E,
   (c) si C est une condition amont de E, relier tout cercle étiqueté par C et d'ou ne part aucune flèche à la nouvelle boîte étiquetée par E,
   (d) si C est en avale de E, dessiner un nouveau cercle étiqueté par C, et on relie la nouvelle boîte E à ce nouveau cercle.



2.3 Réseaux de places et transistions

2.3.1 Un exemple





K : la condition pourra contenir au plus 10 objets.

Lors d'une occurence d'un évènement :

▷ on décrémente de 1 le nombre de marques dans chacune des conditions amonts,

▷ on incrémente de 1, le nombre de marques dans chacune des conditions avales.

Avec ce type d'extension, on ne parlera plus :

▷ de conditions, mais de **places**,

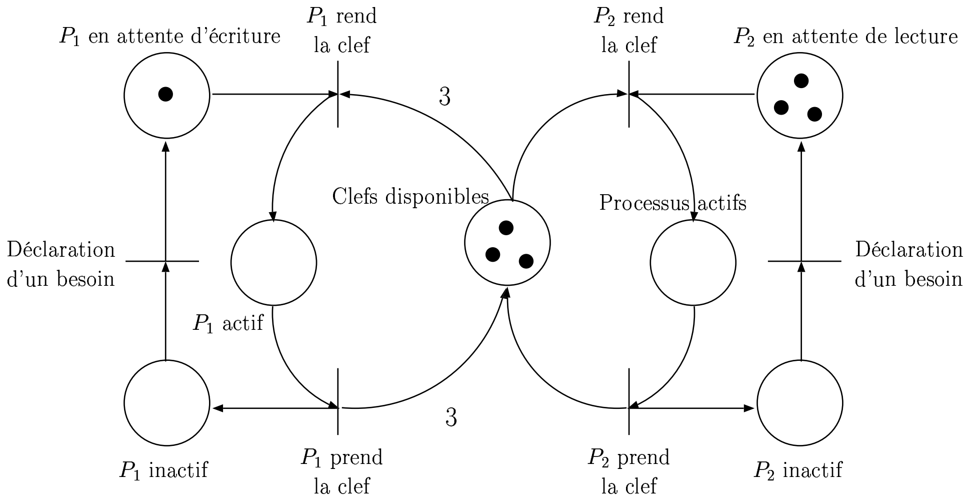
▷ d'évènements, mais de **transitions** et par conséquent on parlera de réseau de places et de transitions.

Résaux de de conditions et d'évènements ⇒ Réseaux de places et de transitions :

1. on peut placer plusieurs marques dans une même condition,
2. on va pouvoir quantifier le nombre d'objets produits, transportés lors de l'occurence d'évènement.

Soit un système informatique où 4 processus sont en compétition pour accéder à une même unité de stockage. Un des processus désire réaliser des accès en écriture, les 3 autres en lecture.

Une lecture et une écriture ne pourront avoir lieu simultanément, plusieurs lectures pourront par contre se produire simultanément.



2.3.2 Définition et règles d'activation

Un réseau de places et de transitions est composé :

- ▷ de places représentées par des cercles ( ),
- ▷ de transitions représentées par des barres ( ),
- ▷ d'arcs reliant des places à des transitions ( ),
- ▷ d'arcs reliant des transitions à des places ( ),
- ▷ d'étiquettes de la forme « $K = x$ » indiquant la capacité maximum d'une place de donnée. (si K nest pas défini, alors la capacité est supposée infinie),
- ▷ de poids (entiers naturels) valuant certains arcs (un arc non valué explicitement est implicitement valué par 1),
- ▷ de marques (•) situées à l'intérieur de certaines places.

L'ensemble des places d'un réseau et des marques qu'elles contiennent constitue ce que l'on appelle son **marquage**.

Attention : initialement, une place ne peut contenir plus de marques que sa capacité maximum.

Dans un tel réseau :

- ▷ P est une place d'entrée de la transition t si et seulement si $\exists$ une arc reliant P à t,
- ▷ P est une place de sortie de t si et seulement si $\exists$ un arc de t à P,
- ▷ une transition t est franchissable, activable ou tirable si et seulement si :
  - ▹ pour toute place d'entrée P de t, le nombre de marques dans P soit supérieur ou égal au poids W valuant l'arc de P à t,
  - ▹ pour toute place de sortie P de t, le nombre de marques dans P augmenté du poids de l'arc de t à P soit inférieur à la capacité maximum de P.

Si une transition t franchissable ou tirable est franchie ou tirée :

- ▷ le nombre de marques dans toute place d'entrée P de t est diminuée du poids valuant l'arc de P à t,
- ▷ le nombre de marques dans toute place P de sortie de t, est augmenté du poids valuant l'arc de t à P.

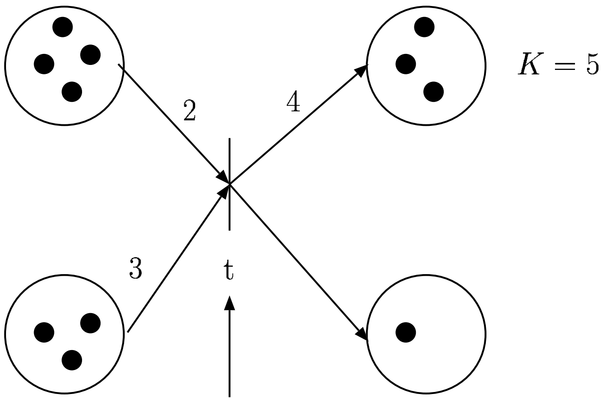
Remarque 2.3.1. un réseau de conditions et d'évènements est un réseau de places et transitions où tous les arcs sont valués par 1 et où toutes les places sont de capacités maximales égales à 1.

De même que pour des évènements, nous disons que deux transitions sont en situation de conflit si elles sont à un moment donné, toutes les deux franchissables, et qu'après le franchissement d'une des deux, l'autre n'est plus franchissable.

2.3.3 Places complémentaires

Pour un réseau de places et transitions, un point de tangence existe au niveau d'une transition t si et seulement si :

- ▷ pour toute place d'entrée P de t, le nombre de marque dans P est supérieur au poids de l'arc reliant P à t,
- ▷ $\exists$ une place de sortie P de t dont le nombre de marques augmentée du poids de l'arc reliant t à P, est supérieur à sa capacité.



Soit une place P d'un RdP donné, P' est une place complémentaire de P si et seulement si :

1. pour tout arc reliant une transition t à P est valuée par W, $\exists$ un arc de P' à t valué par W,
2. pour tout arc reliant P à une transition t et valuée par W, $\exists$ un arc de t à P' valué par W,
3. P et P' ont le même capacité $K(P) = K(P')$,
4. si $M(P)$ est le nombre de marques dans P, alors le nombre de marques $M(P')$ dans P' est tel que $M(P') = K(P') - M(P) = K(P) - M(P)$.

L'adjonction de places complémentaires ne modifie pas la dynamique du réseau.

Si un réseau est initialement sans point de tangence et que lui sont adjoints toutes les places complémentaires possibles, alors l'occurence de point de tangence devient impossible.

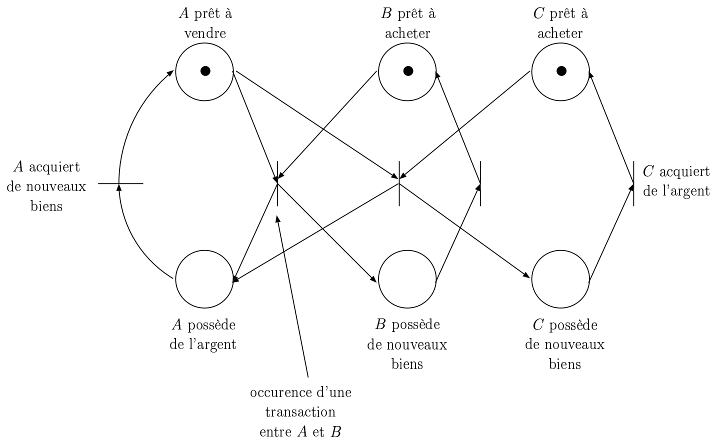
Quand on a ajouté à un réseau initialement sans point de tangence toutes les places complémentaires possibles, alors on peut utiliser la règle de franchissabilité suivante :

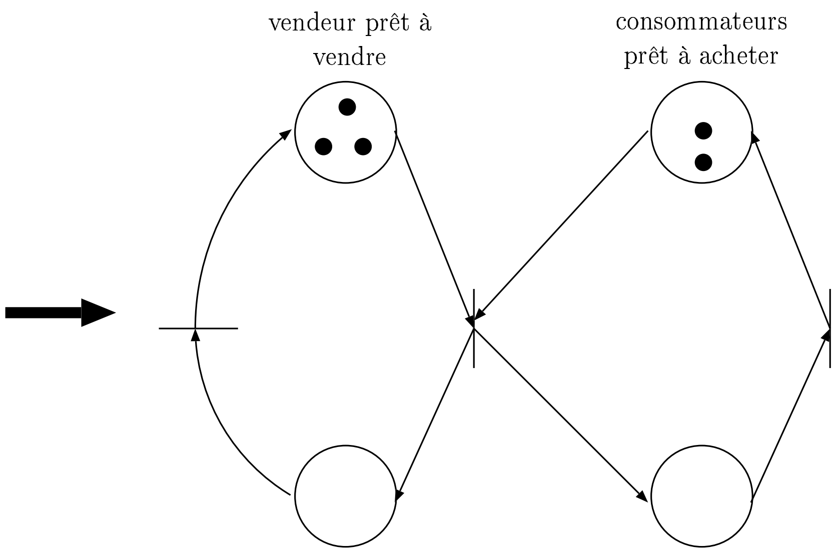
« Une transition t est franchissable si et seulement si, pour toute place d'entrée P de t, le nombre de marques qu'elle contient est supérieur ou égal au poids de l'arc reliant P à t »

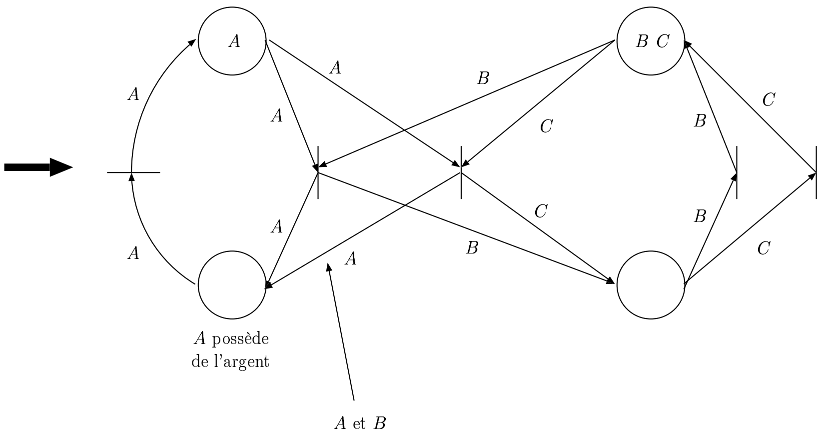
2.4 Réseaux colorés à prédicats

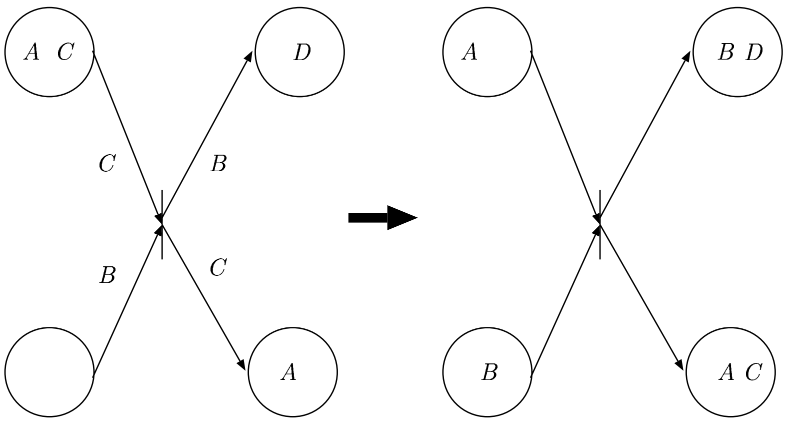
2.4.1 Un exemple de réseau coloré

Soit un marché de biens comprenant un vendeur A et deux acheteurs B et C.


A prêt à vendre
B prêt à acheter
C prêt à acheter
A acquiert de nouveaux biens
C acquiert de l'argent
A possède de l'argent
B possède de nouveaux biens
C possède de nouveaux biens
occurence d'une transaction entre A et B


vendeur prêt à vendre
consommateurs prêt à acheter


A
B C
A possède de l'argent
A et B



2.4.2 Définition et règles d'activation

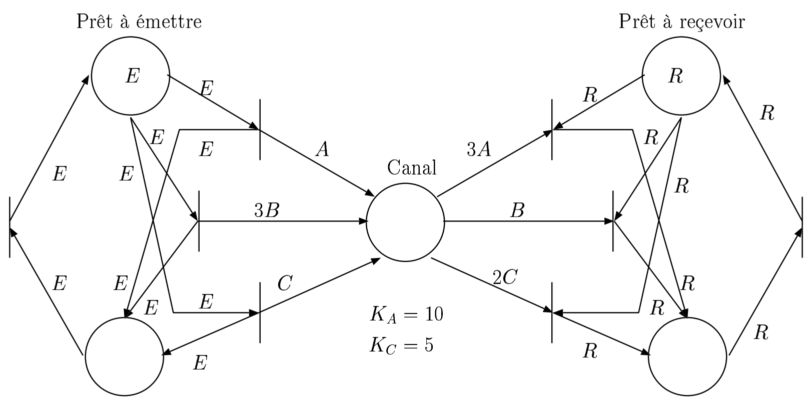
Un réseau coloré est constitué :
- ▷ de places, transitions et arcs, comme les réseaux de places et transitions,
- ▷ de marques individuelles differentiables les unes des autres, par leur couleur par exemple, d'ou le nom de réseau coloré,
- ▷ d'un marquage initial indiquant pour chaque place le type de marques qu'elle comporte,
- ▷ d'étiquette sur les arcs faisant référence à des types de marques données.

Dans un réseau de ce type, on dira qu'une transition t est franchissable ou tirable :

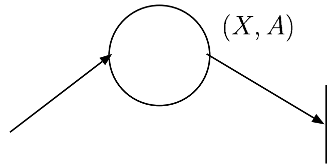
1. pour toute place d'entrée P de t, $\exists$ une marque de type indiqué sur l'arc reliant P à t (si places de sortie à capacité finie),
2. si une transistion t est tirable et tirée :
   (a) pour toute place d'entrée P de t on supprime dans P une marque de type indiqué sur l'arc reliant P à t.
   (b) pour toute place de sortie P de t, on ajoute dans P une marque de type indiqué sur l'arc reliant t à P.

2.4.3 Quelques extensions des réseaux colorés

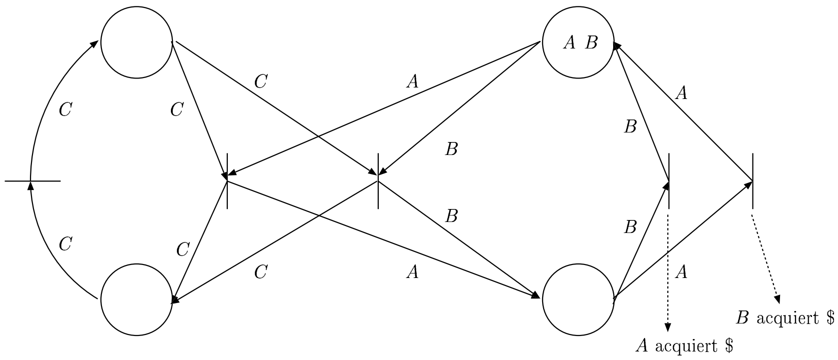
Reprenons notre système de producteur/consommateur, 3 types d'objets pouvant maintenant être produits.



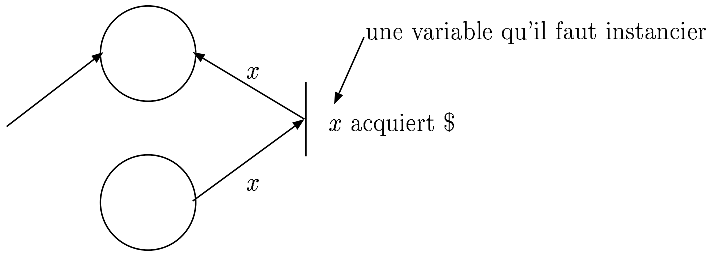
Des marques peuvent apparaître ou disparaître lors de certaines conditions (occurence).
Plusieurs objets peuvent transiter simultanément sur un arc.



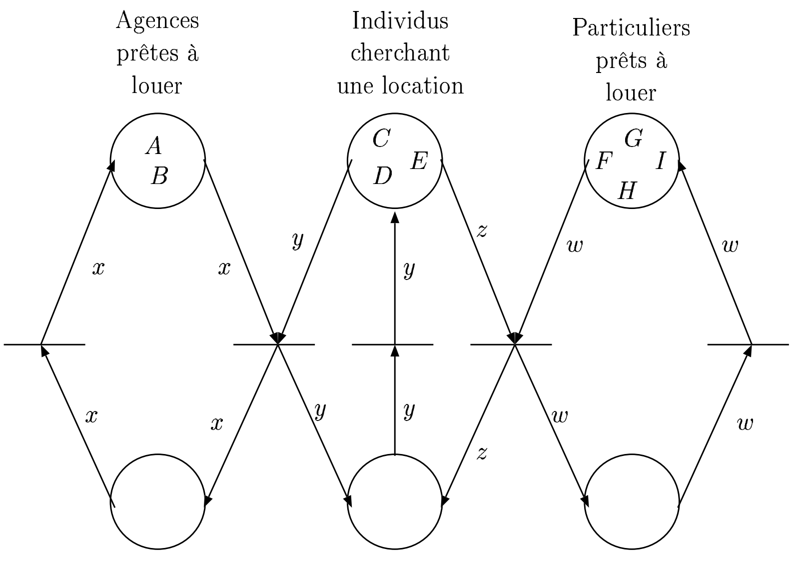
2.4.4 Un exemple de réseau à prédicats



Si le marché comprend NV vendeurs et NA acheteurs, ce mode de représentation nécessite $NV + NA + NA \times NV$ transitions $(4 + 5 + 4 \times 5 = 29)$.



Marché du logement où des individus peuvent louer des appartements à des agences ou à des particuliers.



2.4.5 Définitions et règles d'activation

Un réseau à prédicats est constitué :

▷ de places, de transitions, et arcs tout comme les réseaux colorés,

▷ de variables (notées le plus souvent par des lettres minuscules) étiquetant les arcs du réseau.

Dans un tel réseau, une opération de substitution est effectuée au niveau d'un transition t si et seulement si toutes les variables étiquetant les arcs en entrée et en sortie de t sont remplacées par des constantes.

2.4.6 les réseaux de Petri généralisés

Un réseau de Petri généralisé est un RdP dans lequel des poids (nombres entiers strictement positifs) sont associés aux arcs.

Tous les arcs dont le poids n'est pas explicitement spécifié, ont un poids de 1. Lorsqu'un arc reliant une place P à une transition t possède un poids p, cela signifie que la transition t ne sera validée que si la place P contient au moins p marques. Lors du franchissement de cette transition, p marques sont retirées de la place P.

Lorsqu'un arc reliant une transition t à une place P possède un poids p, cela signifie que lors du franchissement de t, p marques seront ajoutées à la place P.

Propriété 2.4.1. *Tout réseau de Petri généralisé peut être transformé en RdP ordinaire.*

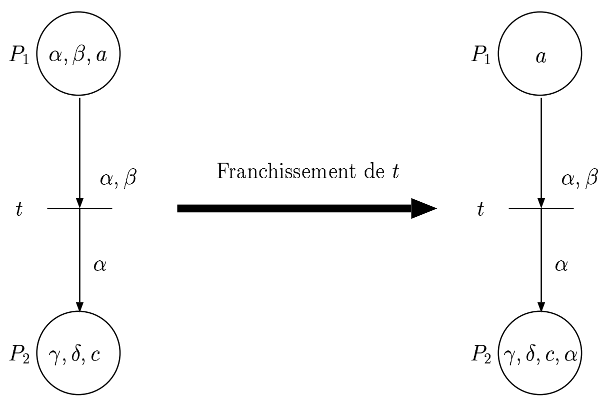
Malheureusement ce type de transformation bien que possible engendre souvent une grande complexité.

2.4.7 Réseau de Petri FIFO

Dans un réseau de Petri FIFO (First In, First Out, premier entré, premier sorti), les marques sont différenciées de telle manière que l'on puisse modéliser différents messages et les règles de franchissement sont modifiées pour modéliser le mécanisme FIFO.

Chaque place du réseau représente une file FIFO et le marquage de la place représente le contenu de cette file. Formellement ce marquage est une lettre faisant partie d'un alphabet choisi. Par exemple le marquage prendra ses valeurs dans $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

Exemple : soit le RdP FIFO suivant avant et après franchissement de t.

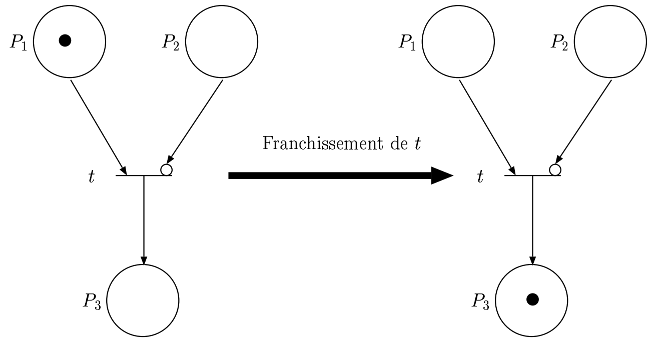


Ce type de modèle convient particulièrement à la modélisation et à l'analyse des processus séquentiels communiquant par des canaux FIFO.

Propriété 2.4.2. *Dans le cas général, un réseau FIFO ne peut pas être transformé en RdP ordinaire.*

2.4.8 Réseau de Petri à arcs inhibiteurs

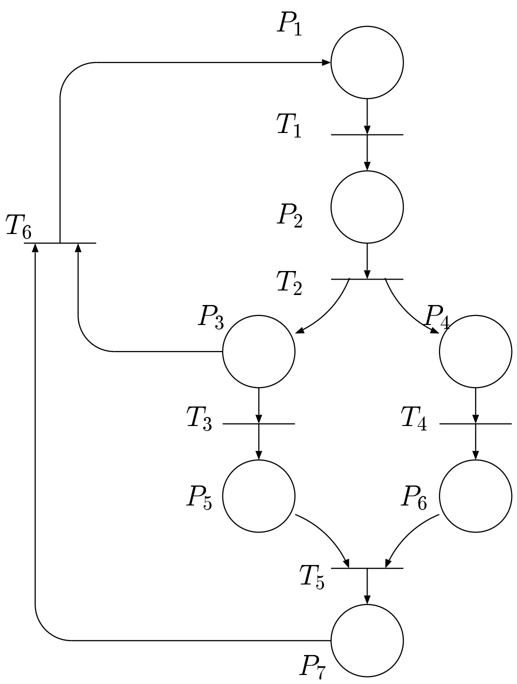
Un arc inhibiteur est un arc orienté qui par d'une place P pour aboutir à une transition t. Son extrémité est marquée par un petit cercle. L'arc inhibiteur entre la place P et la transition t signifie que la transition t n'est validée que si la place P ne contient aucune marque. Le franchissement consiste à retirer une marque dans chaque place d'entrée de t à l'exception de P, et à ajouter une marque dans chaque place de sortie de t. On utilise aussi les expressions « test à zéro » et « RdP étendus ».



Propriété 2.4.3. *Dans le cas général, un RdP à arc inhibiteurs ne peut pas être transformé en RdP ordinaire.*

2.4.9 Réseaux de Petri à priorités

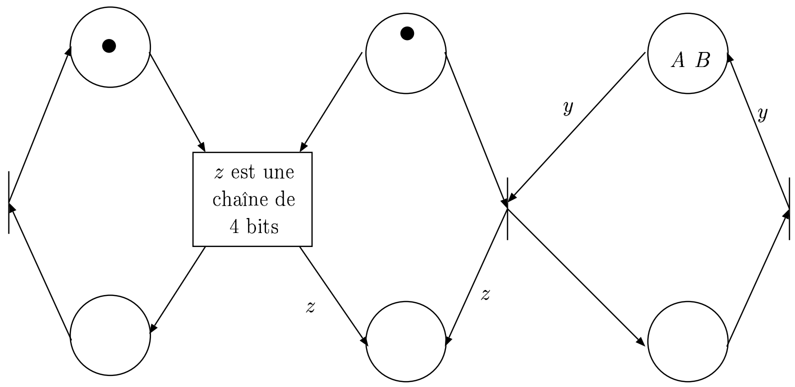
Un tel réseau est utilisé lorsqu'on veut imposer un choix entre plusieurs transitions validées. Il est composé d'un réseau de Petri et d'une relation d'ordre partiel sur les transistion du réseau. Par exemple on obtient un RdP à priorité si l'on considère dans le RdP suivant que la transition T_6 est prioritaire à la transition T_3. Ceci signifie que si l'on atteint un marquage tel que ces deux transitions soient validées, on doit d'abord franchir T_6.



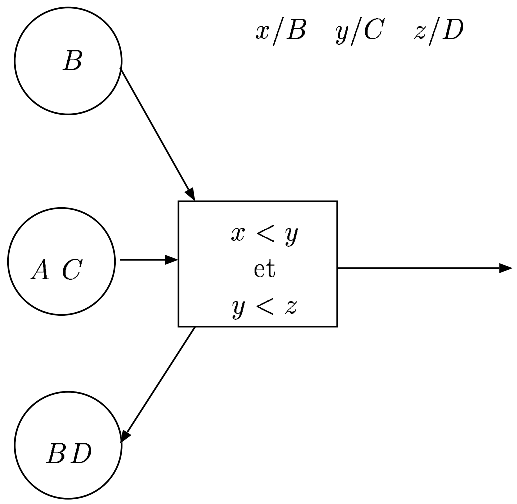
Propriété 2.4.4. *Un RdP à priorités ne peut pas être transformé en un RdP ordinaire.*

2.4.10 Conclusion

Un réseau de Petri généralisé utilisera conjointement les concepts introduits pour les réseaux de conditions et d'évènements, de places et transitions, colorés ou à prédicats : par exemple on pourra avoir des arcs étiquetés par des expressions de la formes $2A + x + f(y)$ ou $(f(y), w + a)$.



Pour les RdP généralisés on pourra placer des contraintes au niveau des transitions.



Chapitre 3

Analyse de Réseau de Petri

3.1 Définition de base

Dans cette partie, nous nous interresserons uniquement aux réseaux de places et transitions.

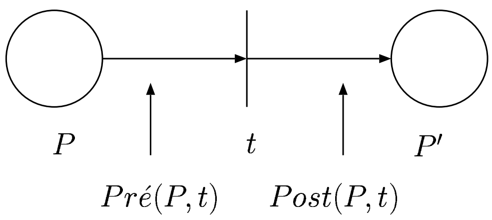
Définition 3.1.1. Un RdP est un quadruplet $\langle P, T, Pré, Post\rangle$ où :

▷ P est un ensemble fini de places ($m = |P|$; le cardinal de l'ensemble),

▷ T est un ensemble fini et disjoint de P, de transitions,

▷ *Pré* est une application de $P \times T$ dans $\mathbb{N}$ dite d'incidence avant,

▷ *Post* est une application de $P \times T$ dans $\mathbb{N}$ dite d'incidence arrière.



Définition 3.1.2. Un réseau marqué est un couple $\langle R; M\rangle$ où :

▷ R est un RdP,

▷ M est une application de P dans $\mathbb{N}$. Plus précisément $M(p)$ sera égale au nombre de marques dans une place $p \in P$,

Dans ce cadre M pourra être représenté par un vecteur de dimension $m = |P|$, *Pré* et *Post* par des matrices de $m = |P|$ lignes et $n = |T|$ colonnes.

$Pré(\bullet, t)$ et $Post(\bullet, t)$ représenteront les colonnes des matrices *Pré* et *Post* relatives à la transition t.

$Pré(p, \bullet)$ et $Post(p, \bullet)$ représenteront les lignes des matrices *Pré* et *Post* relatives à la transition $p \in P$.

On utilise également la notation :

$$C = Post - Pré$$

et C est en général appelée matrice d'incidence du réseau de Petri.

Exemple 3.1.1. $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{a, b, c, d, e\}$

$$Pr\acute{e} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \end{array} \text{ et } Post = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \end{array}$$

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \end{array}, \text{ et } M(4) = 0 \text{ marque dans la place 4.}$$

Ces matrices, ensembles et vecteurs définissent un RdP $R_1 = \langle P, T; Pr\acute{e}, Post\rangle$ et un RdP marqué $N_1 = \langle R_1; M\rangle$.

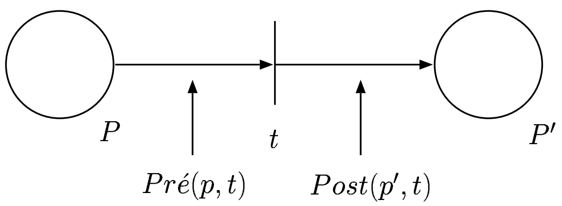
3.1.1 Graphe associé à un RdP

Un RdP peut se présenter par un graphe bipartie (c'est un graphe dont les sommets se répartissent en deux ensembles disjoints - ici P et T et où aucun arc ne relie deux sommets du même ensembles).

Définition 3.1.3. Le graphe $G = \langle P, T; T, V\rangle$ bipartie associé au RdP $R = \langle P, T; Pr\acute{e}, Post\rangle$ est défini comme suit :

- ▷ $(\forall p \in P)\left(\mathcal{T}(p) = \{t \in T \,/ Pr\acute{e}\,(p, T) > 0\}\right)$
- ▷ $(\forall t \in T)\left(\mathcal{T}(p) = \{p \in T \,/ Post\,(p, T) > 0\}\right)$
- ▷ $(\forall p, t \in P \times T)\left(V(p,t) = Pr\acute{e}\,(p,t) \text{ et } V(t,p) = Post\,(p,t)\right)$

où $\mathcal{T}$ permet d'obtenir les successeurs d'une place ou d'un transition, et V les poids des arcs entre les places et transitions.



$\mathcal{T}^{-1}(p) =$ ensemble des prdcesseurs de $p = \{t \in T \,/ Post\,(p,t) > 0\}$
$\mathcal{T}^{-1}(t) = \{p \in T \,/ Pr\acute{e}\,(p,t) > 0\}$

Définition 3.1.4. Les entrées d'un transition t sont les plasces de $\mathcal{T}^{-1}(t) = {}^{\circ}t$; les sorties d'une transition t sont les places $\mathcal{T} = t^{\circ}$.

Entrées d'une place $p \rightarrow \mathcal{T}^{-1}(p) = {}^{\circ}p$

Sorties d'une place de $p \rightarrow \mathcal{T}^{-1}(p) = p^{\circ}$

Exemple 3.1.2. $R_1 = \langle P, T; Pr\acute{e}, Post\rangle$

$G_1 = \langle P, \mathcal{T}; \mathcal{T}, V\rangle$

$\mathcal{T}(p) = \{t \in T / Pr\acute{e}(p,t) > 0\}$

$\mathcal{T}(1) = \{a\}$

$\mathcal{T}(2) = \{b\}$

$\mathcal{T}(3) = \{c\}$

$\mathcal{T}(4) = \{d\}$

$\mathcal{T}(5) = \{d, e\}$

$\mathcal{T}(t) = \{t \in T / Post(p,t) > 0\}$

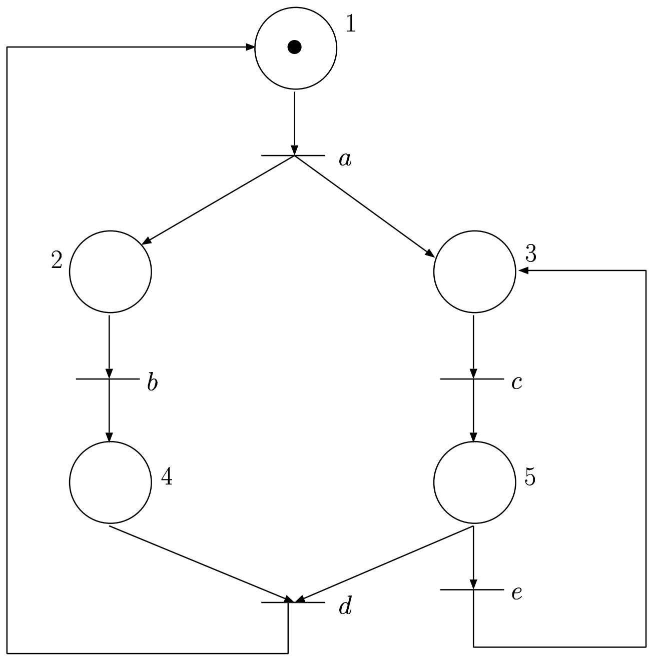
$\mathcal{T}(a) = \{2, 3\}$

$\mathcal{T}(b) = \{4\}$

$\mathcal{T}(c) = \{5\}$

$\mathcal{T}(d) = \{5\}$

$\mathcal{T}(e) = \{3\}$



$N_1 = \langle R_1; M\rangle$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Considérons le RdP suivant :

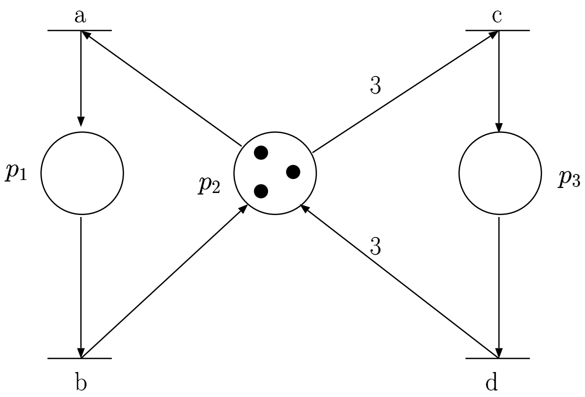


FIG. 3.1 – Exemple de réseau de Petri

Il est défini par les expressions matricielles suivantes :

- ▷ $P = \{p_1, p_2, p_3\}$,
- ▷ $T = \{a, b, c, d\}$,
- ▷ $Pré = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}$
- ▷ $Post = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}$

On a alors $C = Post - Pré = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}$ et le marquage initial $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}$

3.1.2 Dynamique d'un RdP

Pour rappel, si X et Y sont deux vecteurs à indices dans I et que $X(i)$ et $Y(i)$ désignent les valeurs des composantes d'indice $i \in I$.

$X \geq Y$ si et seulement si $(\exists i \in I)(X(i) \geq Y(i))$

Définition 3.1.5. Une transition t est franchissable (dans un réseau dont les places sont de capacités infinies) si et seulement si : $(\exists p \in P)(M(P) \geq Pré(p,t))$ avec $M(P)$ le nombre de places dans P et $Pré(p,t)$ le poids de l'arc reliant p à t.

Ou encore $M \geq Pré(\bullet, t)$.

Cette inégalité est appelée la précondition de franchissement de transition t.

Si t est franchissable à partir de M, on notera : $M(t\rangle$ ou encore $M \xrightarrow{t}$ (c'est une relation de $\mathbb{N}^m \times T$ avec m le nombre de places).

De plus, si t est franchissable pour M et est franchie, on obtient un nouveau marquage M' défini par :

$(\forall p \in P)(M'(p) = M(p) - Pré(p,t) + Post(p,t))$

ou

$M' = M - Pré(\bullet, p) + Post(\bullet, t)$

Si t est franchissable à partir de M ou pour M, et que son franchissement conduit au marquage M', on le notera : $M(t\rangle M'$ (c'est une relation de $\mathbb{N}^m \times T \times \mathbb{N}^m$).

Si t est franchissable, $M \geq Pré(\bullet, t)$, donc $M - Pré(\bullet, t)$ et $M' \geq Post(\bullet, t)$.

Post condition de franchissement, pour qu'un marquage M' puisse résulter du franchissement d'un transition t.

Attention : cette condition est nécessaire mais pas suffisante (elle n'implique pas que t soit franchissable).

Exemple 3.1.3. $M_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$M_0(a\rangle$? oui
$M_0(a\rangle M_1$? oui
$M_0(b\rangle$? non
$M_1(b\rangle M_2$? oui
$M_1(c\rangle M_3$? oui

Dans le cadre de l'exemple de la figure 3.1 et pour le marquage initial $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ les transistions a et c sont franchissables car :

$$Pr\acute{e}\,(\bullet, a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Pr\acute{e}\,(\bullet, c) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on a donc :

$$M > Pr\acute{e}\,(\bullet, a) \text{ et } M > Pr\acute{e}\,(\bullet, c)$$

Définition 3.1.6. Deux transitions t_1 et t_2 sont dites en conflit structurel si et seulement si elles ont au moins une place d'entrée en commun, c-à-d :

$$^\circ t_1 \cap {}^\circ t_2 \neq 0$$

si et seulement si $(\exists p \in P)\,(Pr\acute{e}\,(p, t_1) \times Pr\acute{e}\,(p, t_2) \neq 0)$

De plus si elles sont en conflit effectif, pour un marquage M si et seulement si : $M\,(t_1\rangle$ et $M\,(t_2\rangle$ et $(\exists p \in P)\,(M\,(P) < Pr\acute{e}\,(p, t_1) + Pr\acute{e}\,(p, t_2))$

3.1.3 Grammaire associée à un RdP

On va tout d'abord condidérer que P définit un vocabulaire ou alphabet (par exemple composé des symboles x et y). On va considérer l'application μ suivante :

$\mu : \mathbb{N}^m \to p^*$ avec $\mathbb{N}^m$ l'ensemble des marquages possibles du réseau de m places.

A tout marquage M, μ associe un mot $\mu\,(M)$ de P^* comportant autant de fois le symbole associé à une place $p \in P$ qu'il y a de marques dans $p \in P$.

$$M = \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \to \mu\,(M) = xxxxxy = x^5 y$$

Une transition t sera franchissable pour M si et seulement si le mot $\mu\,(M)$ contient le sous-mot $\mu\,(Pr\acute{e}\,(\bullet, t))$.

Si t est franchissable pour M, et que sont franchissement donne M, alors on passera du mot $\mu\,(M)$ au mot $\mu\,(M')$ en remplaçant le sous-mot $\mu\,(Pr\acute{e}\,(\bullet, t))$ par le sous-mot $\mu\,(Post\,(\bullet, t))$.

On va ainsi considérer pour toute transition t la règle de réécriture suivante :

$$t : \quad \mu\,(Pr\acute{e}\,(\bullet, t)) \to (Post\,(\bullet, t))\,.$$

Définition 3.1.7. La grammaire $\langle P, Q\rangle$ associée à un réseau $\langle P, T; Pr\acute{e}, Post\rangle$ est donc définie par :

- ▷ son vocabulaire P,
- ▷ l'ensemble Q des règles de réécriture :

$$t_i : \quad \mu\,(Pr\acute{e}\,(\bullet, t_i)) \to (Post\,(\bullet, t_i))$$

pour toute transition t_i.

3.1.4 Matrice d'incidence d'un RdP

Définition 3.1.8. La matrice d'incidence d'un RdP $R = \langle P, T; Pr\acute{e}, Post\rangle$ sera la matrice associée à l'application :

$$C : \quad P \times P \to \mathbb{Z}$$

avec $C\,(p, t) = Post\,(\beta, t) - Pr\acute{e}\,(p, t)$.

Exemple 3.1.4.

$$
Pr\acute{e} = \begin{array}{cc}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array}
\end{array}
, \quad Post = \begin{array}{cc}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array}
\end{array}
$$

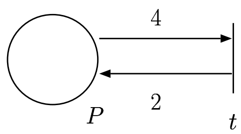
$$
C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

$M\,(t\rangle\,M' \Rightarrow (\forall p \in P)\,(M'\,(p) = M\,(p) + C\,(p,t))$.

Définition 3.1.9. Un RdP est pur si et seulement si

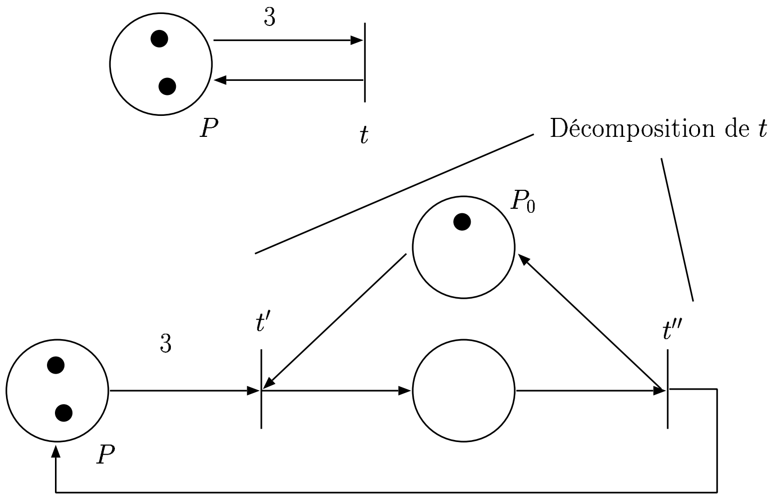
$$(\forall\,(p,t))\,(Pr\acute{e}\,(p,t) \times Post\,(p,t) = 0)$$

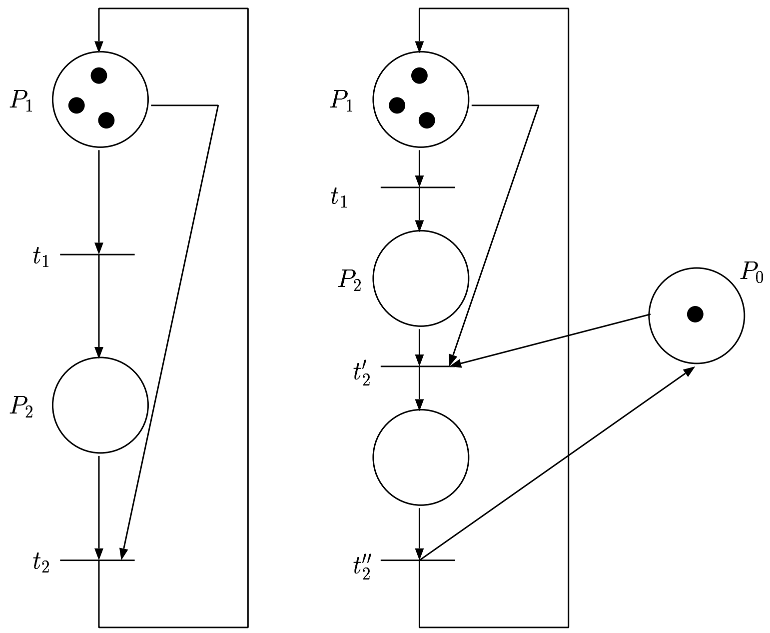
C'est un réseau pour lequel il n'y a pas de boucles élémentaires. Aucune transition n'ayant le même en entrée et en sortie.



Pour un réseau pur de matrice d'incidence C, $Pr\acute{e}\,(p,t) = \max\,(0, C\,(p,t))$.

De plus tout réseau peut être transformé en un réseau pur de dynamique équivalente.





Avec un tel schéma, le franchissement de t_1 pourrait s'intercaler entre ceux de t'_2 et t''_2, ce qui modifie la dynamique du réseau sous-jacent.

$\Rightarrow$ on redécompose t_1 en t'_1 et t''_1

$M\,(t\rangle$ si et seulement si $M \geq Pré\,(\bullet, t)$

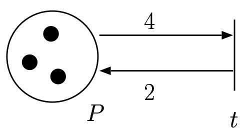
$M\,(t\rangle\,M' \Leftrightarrow M' = M + Post\,(\bullet, t) - Pré\,(\bullet, t) = M + C\,(\bullet, t)$

Réseau quelconque

Pour un réseau pur :

$M\,(t\rangle\,M'$ si et seulement si $M' = M + C\,(\bullet, t) \geq 0$

Exemple 3.1.5. montrons que ce n'est pas vrai dans le cas général.



Exemple 3.1.6. (1) = (3) − (2)
$M' \quad M \quad C(\bullet, t)$
≥ 0

3.1.5 Franchissement d'une transition

Si t est franchissable pour le marquage M, le franchissement (tir, *firing*) de t donne le nouveau marquage M' tel que :

$$\forall p \in P \; M'(p) = M(p) - Pr\acute{e}(p,t) + Post(p,t)$$

On utilise aussi les notations :

$$M' = M - Pr\acute{e}(\bullet,t) + Post(\bullet,t)$$

$$M\,(t\rangle\,M'$$

$$M \xrightarrow{t} M'$$

Par exemple avec l'exemple de la figure 3.1, après le franchissement de a à partir du marquage initial M, on obtient le marquage M' suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.1.6 Conflit et parallélisme

3.1.6.1 Conflit structurel

Deux transitions t_1 et t_2 sont en conflit structurel si et seulement si elles ont au moins une place d'entrée en commun :

$$\exists p \quad Pr\acute{e}(p,t_1) \cdot Pr\acute{e}(p,t_2) \neq 0$$

3.1.6.2 Conflit effectif

Deux transitions sont en conflit effectif pour un marquage M si et seulement si t_1 et t_2 sont en conflit structurel et que :

$$M \geq Pr\acute{e}(p,t_1)$$

$$M \geq Pr\acute{e}(p,t_2)$$

3.1.6.3 Parallélisme structurel

Deux transitions t_1 et t_2 sont parallèles strcturellement si :

$$(Pr\acute{e}(p,t_1))^T \times (Pr\acute{e}(p,t_2)) = 0$$

Elles n'ont donc aucune place d'entrée commune (le produit scalaire de leurs vecteurs *Pré* est nul).

3.1.6.4 Parallélisme effectif

Deux transitions t_1 et t_2 sont parallèles pour un marquage donné M si et seulement si elles sont parallèles structurellement et :

$$M \geq Pré\,(p, t_1)$$

$$M \geq Pré\,(p, t_2)$$

Ainsi dans le réseau de Petri de la figure 3.1, les transitions a et c sont en conflit structurel puisque

$$Pré\,(p_2, a) \cdot Pré\,(p_2, c) = 3$$

par contre, les transitions b et d sont structurellement parallèles. En effet :

$$Pré\,(\bullet, b) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } Pré\,(\bullet, d) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour le marquage M initial, les transitions a et c sont en conflit effectif.

Si maintenant on considère le marquage :

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors les transitions b et d sont effectivement parallèles (elles peuvent être franchies indépendamment l'une de l'autre).

3.1.7 Séquence de franchissement

Si $M\,(t_1\rangle\,M_1$ et que $M_1\,(t_2\rangle\,M_2$, alors $M\,(t_1 t_2\rangle\,M_2$ et on dira que $s = t_1 t_2$ est une séquence de franchissement pour M.

Définition 3.1.10. Une séquence de transition $s \in T^*$ est franchissable pour M et donne le marquage M° si et seulement si :
- ▷ $s = \lambda \Rightarrow M^\circ = M$ avec λ qui désigne la séquence vide (aucune transition),
- ▷ $s = s't$ avec $s' \in T^*$ et $t \in T$ et $(\exists M')\,(M\,(s'\rangle\,M')$ et $M'\,(t\rangle\,M^\circ$.

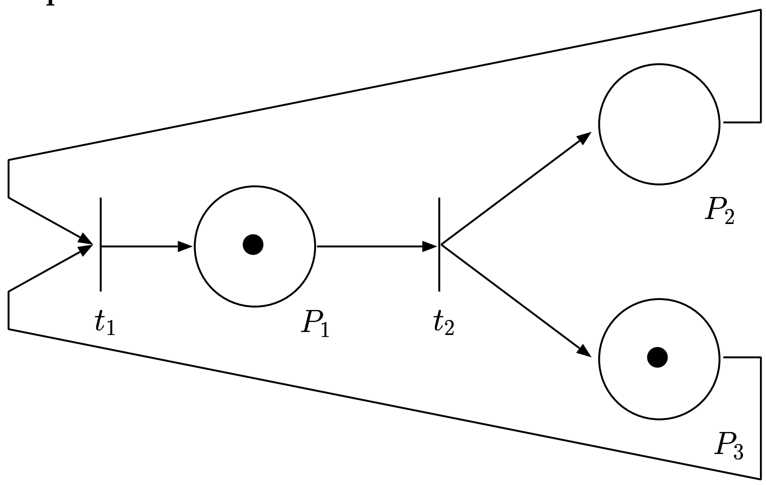
Dans ce cadre, nous utiliserons les notations suivantes :
- ▷ $M\,(s\rangle$ pour dire que s est une séquence de franchissement pour M,
- ▷ $M\,(s\rangle\,M^\circ$ pour dire que M° est le marquage résultant du franchissement de s.

Définition 3.1.11. Nous noterons $\overline{s}$ l'image commutative d'un séquence de transistions s. C'est le vecteur à incides dans T tel que $\overline{s}\,(t)$ est le nombre d'occurences de t dans s. $\overline{s}$ est appelée aussi vecteur caractéristique de s.

$T = \{t_1, t_2, t_3\}$
  $s = t_1 t_1 t_2 t_1 t_3 t_1 t_2 t_3 t_3 t_3 \in T^*$
  $\overline{s}^t = (4_{t_1}, 2_{t_2}, 4_{t_3})$
  Équation fondamentale des RdP.
  $M\,(s\rangle\, M'$ avec $s \in T^* \Rightarrow M' = M + C \cdot \overline{s}$ avec C matrice d'incidence.

Attention : $M' = M + C \cdot \overline{s}$ n'implique pas que s soit une séquence de franchissement pour M.

Exemple 3.1.7.



$$C = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cc} t_1 & t_2 \end{array} \end{array}$$

$s = t_1 t_2$
$\overline{s}^t = (1_{t_1}, 1_{t_2})$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq O$$

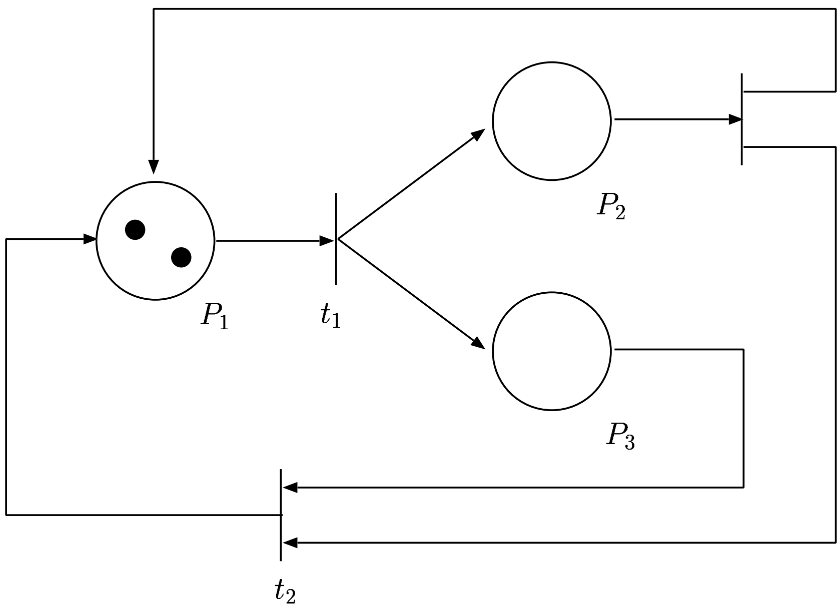
$M' = M + C\,(\bullet, t) \geq 0$ et le réseau est pur $\Rightarrow t$ est franchissable

Définition 3.1.12. L'ensemble des séquences de franchissement d'un réseau marqué $\langle R, M\rangle$ sera noté $L\,(R, M)$; il constitue un langage défini par : $L\,(R, M) = \{s \in T^* \,/ M\,(s\rangle\}$

Définition 3.1.13. L'ensemble des marquages atteignables d'un réseau marqué $\langle R, M\rangle$ sera noté $A\,(R, M) = \{M' \in \mathbb{N}^m \,/ (\exists s)_{T^*}\,(M\,(s\rangle\, M')\}$ où $m = |P|$.

3.2 Arbres et graphes de couverture

Nous allons chercher à représenter $A(R, M)$.

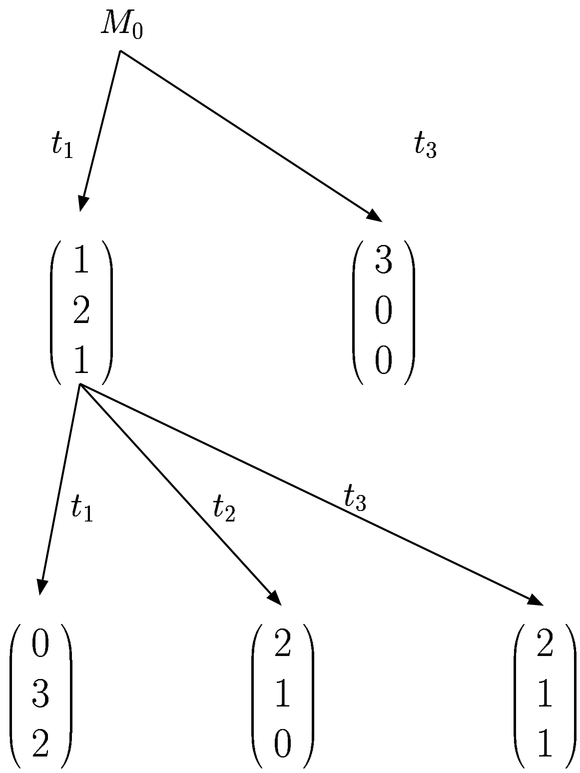


$$C = \begin{array}{cc} & p \\ & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}_t \end{array}, \ M_0^t = (2, 1, 0)$$

Arbre des marquages atteignables

sa racine est le marquage initial du réseau.

$M_0 = (2, 1, 0)$, $M_0 + C(\bullet, t) \geq 0$



Pour éviter que l'arbre puisse se developper indéfiniement, on procède comme suit (proposé par Karp en 1989) :

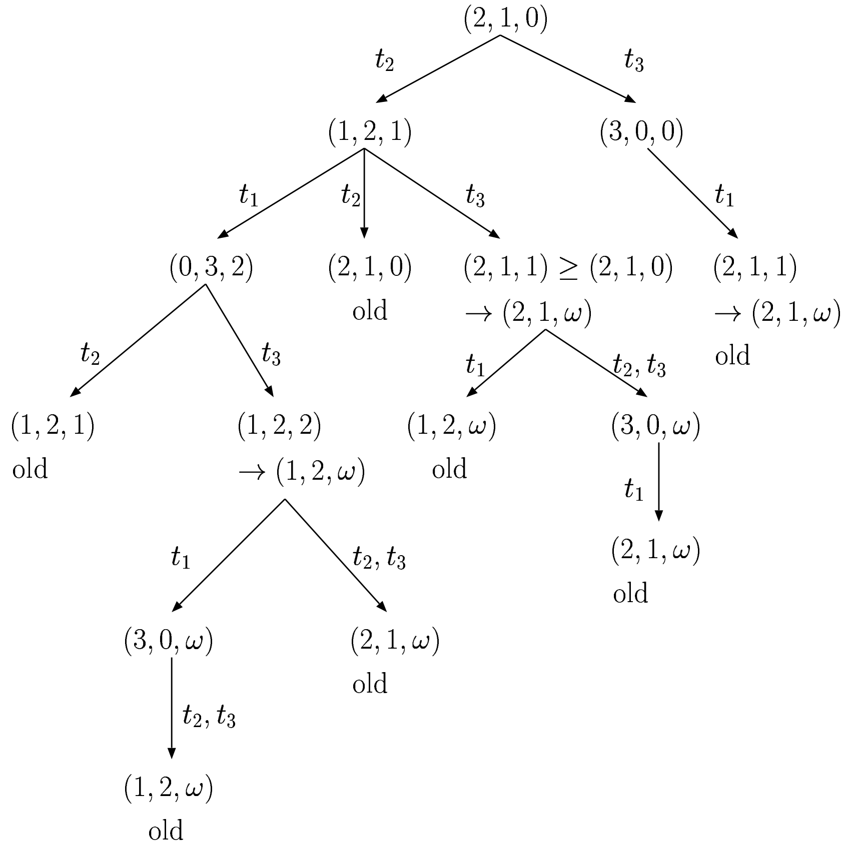
1. qu'un marquage M^* déjà rencontré soit marqué par « `old` » ; un tel marquage sera une feuille de l'arbre de couverture,

2. que si un nouveau marquage $M \leq M^*$ sur le chemin menant de la racine de l'arbre à M^*, alors que toutes les places p de M^* telles que $M^*(p) > M(p)$ soient marqués par un symbole ω, signifiant l'infini. Ce symbole restera inchangé dans tous les developpement ultérieurs de l'arbre ; de plus la règle précédente restera valide pour des marquages contenant ω symbole,

3. que si aucune condition n'est tirable à partir d'un marquage M^*, que ce marquage soit étiqueté par « `dead-end` » (cul de sac = voie sans issue),

4. que tous les marquages M^* non étiquetés par « `old` » et possédant au moins un descendant soient marqués par « `new` »

Exemple 3.2.1.



Définition 3.2.1. Soit $\omega \notin N$ et $N\omega = N \cup \{\omega\}$, les opérations $+$, $-$, et les relations $<$ et $\leq$ peuvent être étendues à $N\omega$ comme suit :

- ▷ $(\forall n \in \mathbb{N})\,(n < \omega \wedge n \leq \omega \wedge n \neq \omega)$
- ▷ $(\forall n \in \mathbb{N})\,(n + \omega = \omega + n = \omega,\ \omega - n = \omega)$

$n - \omega$ n'est pas défini.

Définition 3.2.2. Soit un réseau de Petri marqué $N = \langle R; M_0\rangle$ avec $R = \langle P, T; Pré, Post\rangle$. Son arborescence de couverture $AC\,(N)$ est un couple $\langle S, X\rangle$ où :

1. S est l'ensemble de ses sommets, ils sont étiquetés par des éléments de $\mathbb{N}_\omega^m$ si $|P| = m$,
2. X est l'ensemble de ses arcs ; ils sont étiquetés par des transistions $E \in T$.

$AC\,(N)$ se construit selon le procédé suivant :

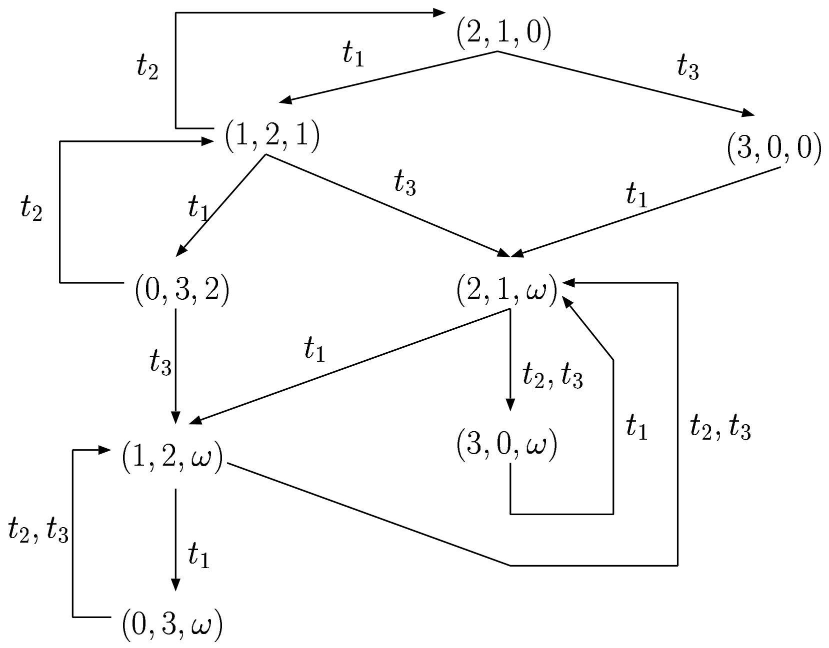
1. sa racine r est marquée par M_0,
2. un sommet s étiqueté par $Q \in \mathbb{N}_\omega^m$ n'a pas de successeurs s_i :
   - ▷ soit il n'existe pas de transitions franchissables à partir de Q.
   - ▷ soit il existe un sommet déjà étiqueté par Q sur le chemin allant de r à s.
3. si s ne vérifie aucune des deux conclusions exprimées en 2, alors pour toute transisiton t franchissable à partir de Q
   - ▷ un nouveau sommet s' est construit est c'est un fils de s.
   - ▷ l'arc (s, s') est étiqueté par t.
   - ▷ s' sera étiqueté par Q' défini comme suit :
     - ▷ s'il existe sur le chemin menant de r à s' un sommet s'' marqué par Q'' et tel que $Q'' \leq Q + C\,(\bullet, t)$, alors pour toute place p de P si $Q''\,(p) \leq Q\,(p) + C\,(p, t)$ alors $Q'\,(p) = \omega$ sinon $Q'\,(p) = Q\,(p) + C\,(p, t)$ sinon pour toute place p de P $Q'\,(p) = Q\,(p) + C\,(p, t)$.

Théorème 3.2.1. *(Karp) Toute arborescence de couverture est finie.*

Définition 3.2.3. Soit un arborescence de couverture $A \subset (N)$ et % une relation telle que $(\forall (s, s'))\,(s\%s'$ si et seulement si $Q = Q')$.

Nous noterons $|s|$ la classe d'équivalence d'un sommet s , c'est à dire l'ensemble des sommets s' tels que $s\%s'$. Le graphe de couverture $G \subset |N|$ du réseau marqué $N = \langle R, M_0\rangle$ est le couple $\langle S^*, X^*\rangle$

- ▷ S^*, l'ensemble de ses sommets, est l'ensemble quotient $S/\%$; tout sommet de S^* sera étiqueté par Q si les sommets de la classe d'équivalence à laquelle il est associé sont étiquetés par Q.
- ▷ X^* est un ensemble d'arcs défini comme suit :
  il existe un arc étiqueté par t entre les sommets de S^* associés aux classes d'équivalences $|s|$ et $|s'|$ si et seulement si il existait un arc étiqueté par t entre s et s' de S.



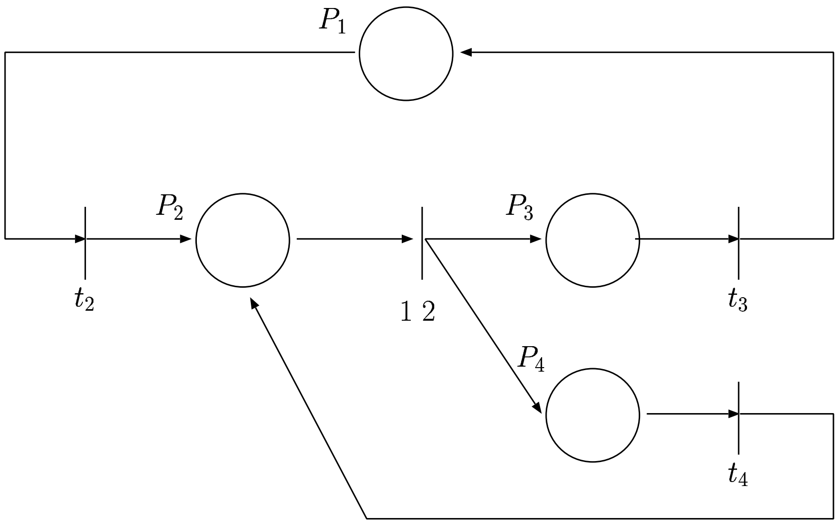
3.3 Invariants

ou semi-flots ou encore semi-rythmes

3.3.1 p-invariants

Définition 3.3.1. Soit un réseau de Petri $R = \langle R, T; Pr\acute{e}, Post\rangle$ avec $|P| = m$ et $X \in \mathbb{N}^m$, X est un p-invariant si et seulement si :

$$X^t \cdot C = 0 \text{ et } X \neq 0$$

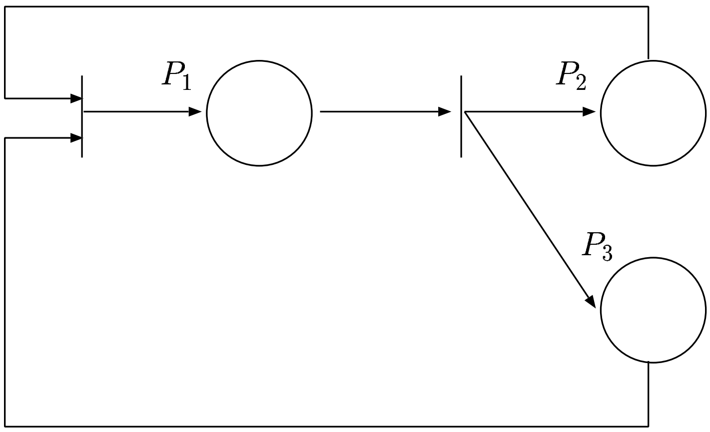


Réseau R_2

$$C = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \end{array}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, X^t \cdot C = 0$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ pas de p-invariant pour le réseau R_2.



Réseau R_3

$$C = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cc} t_1 & t_2 \end{array} \end{array}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, X^t \cdot C = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 = x_2 + x_3$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un p-invariant (il y en a une infinité !).

Théorème 3.3.1. *Si X est un p-invariant d'un réseau R et $N = \langle R; M_0 \rangle$ un réseau marqué, alors $X^t \cdot M = X^t \cdot M_0$ pour tout $M \in A(R, M_0)$.*

Démonstration. $M = M_0 + C \cdot \overline{s}$

$X^t \cdot M = X^t \cdot M_0 + \underbrace{X^t \cdot C \cdot \overline{s}}_{=0}$ □

Propriété 3.3.1.

1. *Si un RdP possède un p-invariant alors une combinaison linéaire des nombres de marques dans ses places est constante.*
2. *Si un RdP possède un p-invariant dont toutes les composantes sont strictement positives alors il est borné.*
3. *Si un RdP possède un p-invariant dont toutes les composantes sont égales à 1, alors le nombre de marques dans ce réseau est constant.*

Remarque 3.3.1. $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un de ces p-invariants. Soit le réseau marqué $N_3 = \langle R_3; M_0 \rangle$

avec $M_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} M(p_1) \\ M(p_2) \\ M(p_3) \end{pmatrix}$, $2M(p_1) + M(p_2) + M(p_3) = 2 \times 2 + 3 + 1 = 8$

Définition 3.3.2. Le support d'un p-invariant X, noté $\|X\|$, est l'ensemble des places du réseau correspondant aux composants différents de 0 de X.

On parle également de composante conservative, c'est un sous ensemble $I \subseteq P$, tel qu'il existe un p-invariant X du réseau considéré avec $\|X\| = I$. Il est à noter que deux p-invariants peuvent être associés à la même composante conservative.

Exemple 3.3.1. Soit le réseau R_3

- ▷ le support du p-invariant $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $\{p_1, p_2, p_3\} = P$,
- ▷ le support du p-invariant $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $\{p_1, p_2\} = P$,
- ▷ le support du p-invariant $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est également $\{p_1, p_2\} = P$

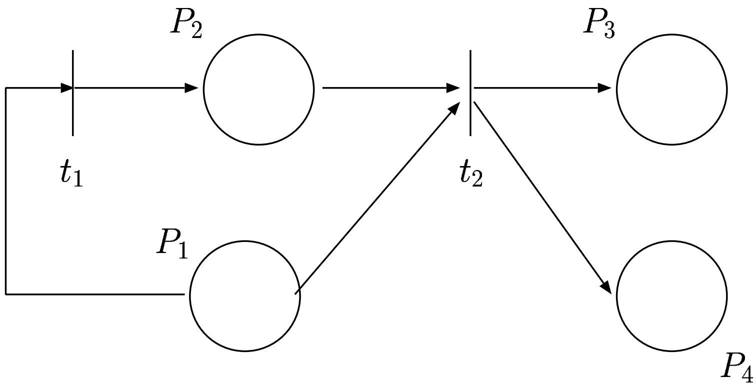
$\{p_1, p_2, p_3\}$ et $\{p_1, p_2\}$ sont des exemples de composantes conservatives.

Définition 3.3.3. Le support d'un p-invariant X est minimal si et seulement si il n'existe pas de p-invariant X' tel que $\|X'\| \subseteq \|X\|$ (et $\|X'\| \neq \|X\|$).

Une composante conservative est minimale si elle ne contient aucune composante conservative.

Exemple 3.3.2. Pour le réseau R_3, on a $x_1 = x_2 + x_3$. $\{p_1, p_2\}$ est une composante conservative minimale. Ce n'est pas le cas de $\{p_1, p_2, p_3\}$.

Définition 3.3.4. Un p-invariant X est minimal si et seulement si il n'existe pas de p-invariant X' tel que $X' \leq X$ et $X' \neq X$.



$$C = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ t_1 \quad t_2 \end{array}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$X^t \cdot C = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 + x_4 = 2x_1 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont des p-invariants minimaux de supports minimaux $(\{p_1, p_2, p_3\}, \{p_1, p_2, p_4\})$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est également minimal, mais de support non minimal $(\{p_1, p_2, p_3, p_4\})$.

3.4 Propriétés qualitatives des RdP

Deux types de propriétés sont généralement distinguées :

1. les propriétés comportementales portent sur les RdP marqués initialement.
2. les propriétés structurelles portent sur un RdP indépendamment de tout marquage initial.

3.4.1 Les propriétés comportementales

3.4.1.1 Problèmes d'atteignabilités

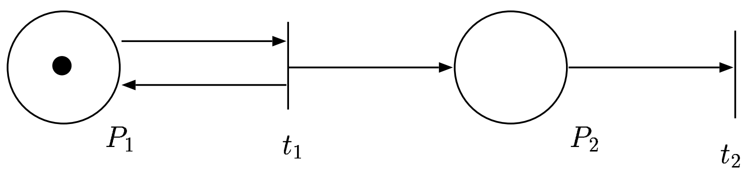
On a défini l'ensemble $A(R; M_0)$ des marquages atteignables d'un RdP par :

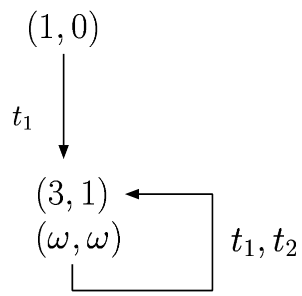
$$A(R; M_0) = \{M \in \mathbb{N}^m / (\exists s \in T^*)(M_0 \langle s \rangle M)\}$$

Dans ce cadre un problème d'atteignabilité consiste soit à se demander si un marquage particulier fait partie de $A(R; M_0)$ (c'est à dire s'il est atteignable), soit à se demander si un marquage ne risque pas d'être atteint.

Définition 3.4.1. Soit un RdP, $R = \langle P, T; Pré, Post \rangle$ et un marquage initial M_0. Le problème d'atteignabilité pour le marquage M consiste à se demander si $(\exists s \in T^*)(M_0 \langle s \rangle M)$.

Théorème 3.4.1. *Soit un RdP marqué*
- ▷ *si ce réseau est borné, alors M est atteignable si et seulement si le graphe de couverture de $\langle R; M_0 \rangle$ comporte un nœud étiqueté par M.*
- ▷ *si ce réseau n'est pas borné, alors son graphe de couverture permet uniquement de vérifier s'il est possible d'atteindre un marquage $M' \geq M$, M étant le marquage dont on cherche à déterminer l'atteignabilité.*





Ce graphe de recouvrement ne permet pas de savoir si le marquage $(8, 0)$ est atteignable ou pas, du fait que le réseau est non borné.

Il n'existe pas de condition nécessaire et suffisante (CNS) donnant une réponse générale au problème de l'atteignabilité ; il existe par contre une condition nécessaire générale.

Théorème 3.4.2. *Si M est un marquage atteignable pour le réseau marqué $\langle R; M_0 \rangle$ de matrice d'incidence C, alors $M = O_0 + C \cdot Y$ de variable Y admet une solution dans $\mathbb{N}^m$ (m étant le nombre de transition du réseau).*

(Si Y existe, c'est l'image commutative d'une séquence de franchissement permettant de passer de M_0 à M).

Attention : cette condition n'est que nécessaire.

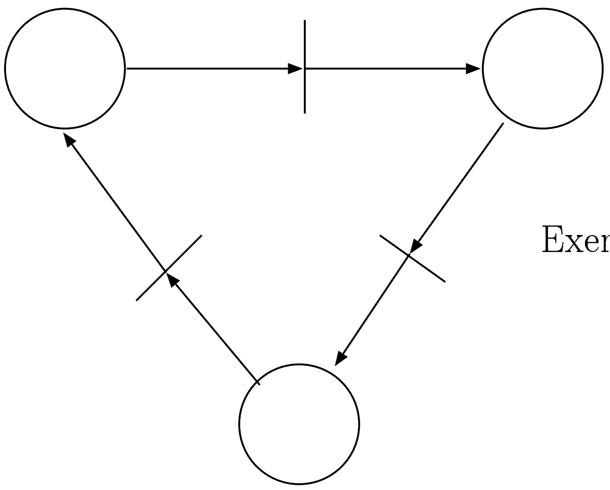
Exemple 3.4.1. le marquage $M = (8,0)^t$ est il atteignable ?

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 8 = 2y_1 + 1 \\ 0 = y_1 - y_2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = 3,5$$

Le système considéré n'admet pas de solution entière, on peut en conclure que $M = (8,0)^t$ n'est pas atteignable.

Théorème 3.4.3. *La condition exprimée au théorème précédent est nécessaire et suffisante pour une classe particulière de RdP, les réseaux cycliques.*



Sous certaines conditions, les p-invariants d'un RdP donné permettent de conclure à la non-atteignabilité d'un marquage donné.

Théorème 3.4.4. *Soit $\langle R; M_0 \rangle$ un réseau marqué et X un p-invariant de R. M est un marquage non atteignable si $X^t M \neq X^t M_0$.*

Notez que les problèmes d'atteignabilité sont monotones ; Cf. le théorème suivant.

Théorème 3.4.5. *Si M est atteignable pour $\langle R; M_0 \rangle$, alors il est atteignable pour $\langle R; M_1 \rangle$ avec $M_1 \geq M_0$.*

3.4.1.2 Dormitude

Définition 3.4.2. une place p d'un RdP marqué $\langle R; M_0 \rangle$ est k-bornée avec $k \geq 1$ si et seulement si :

$$(\forall M \in A(R; M_0))\,(M(P) \leq k)$$

- ▷ une place p est bornée si elle est k-bornée avec $k \geq 1$.
- ▷ Un RdP marqué est borné si toutes ses places sont bornées.

Théorème 3.4.6. *Un RdP marqué est borné si et seulement si son graphe de recouvrement ne comporte aucune occurence de symbole ω.*

Plus précisement, une place p est bornée si et seulement si aucun des marquages du graphe de recouvrement du réseau marqué ne comporte le symbole ω au niveau de l'indice correspondant à la place p.

Théorème 3.4.7. *un RdP marqué est borné si :*

$$(\forall Y \in \mathbb{N}^m)\,(M_0 + C \cdot Y \leq k \cdot I)$$

avec m le nombre de transition et où $k > 0$ et I est le vecteur identité de composantes toutes égales à 1.

Attention : si cette condition est suffisante, elle n'est pas nécessaire.

Il existe encore un autre moyen qui permet de démontrer que des places d'un RdP marqué sont bornées, il fait intervenir les p-invariants du réseau considéré.

3.4.1.3 Vivacité et blocage

Définition 3.4.3. Une transition t d'un RdP marqué $\langle R; M_0\rangle$ est vivante si elle peut toujours être franchie à partir d'un marquage atteignable quelconque

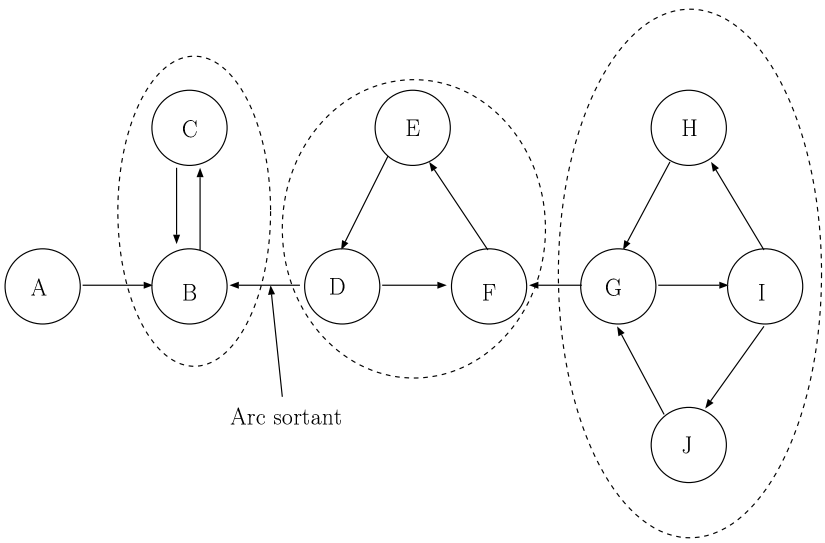
$$(\forall M \in A\,(R; M_0))\,(\exists M' \in A\,(R, M))\,(M'\,(t\rangle)$$

Plus généralement, on dira qu'un RdP est vivant si toutes ses transitions sont vivantes.

Définition 3.4.4. Un marquage atteignable M d'un RdP marqué $\langle R; M_0\rangle$ est une situation de blocage si pour toute transition $t \in T$, t n'est pas franchissable pour M.

Un RdP est sans blocage si aucun de ses marquages atteignables n'est une situation de blocage.

Rappel : Un sous-graphe SG d'un graphe orienté G est une composante fortement connexe de G si et seulement si pour toutes paires de sommets (A, B) de SG, il existe à la fois un chemin orienté menant de A à B et un chemin orienté menant de B vers A et SG est minimal.



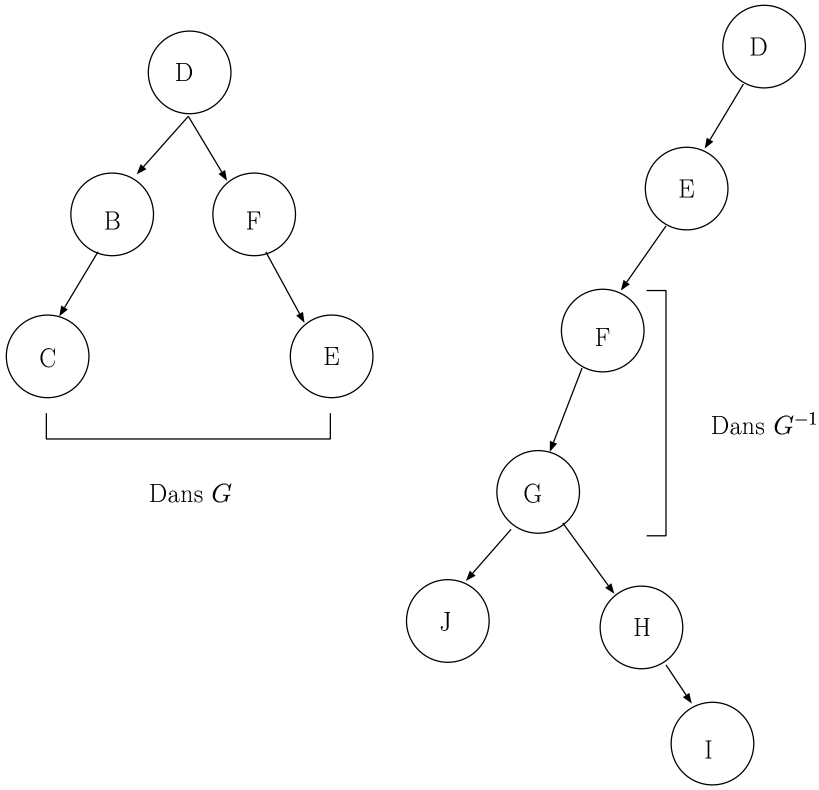
Algorithme de détermination de la composante fortement connexe (c.f.c.) d'un nœud donné N

1. on fait un parcours en profondeur dans le graphe depuis N dans G,

(a) on fait un parcours en profondeur depuis N dans G^{-1},

(b) les nœuds de G appartenant à c.f.c de N sont les nœuds marqués les 2 fois.

Exemple 3.4.2. c.f.c.du nœd D




```
pfd(Nœud N)
{marquer (N)
pour tout les successeurs N' de N
si N' n'est pas marqué pfd(N')
}
```

Théorème 3.4.8. *Une transition t d'un réseau marqué borné est vivante si et seulement si :*

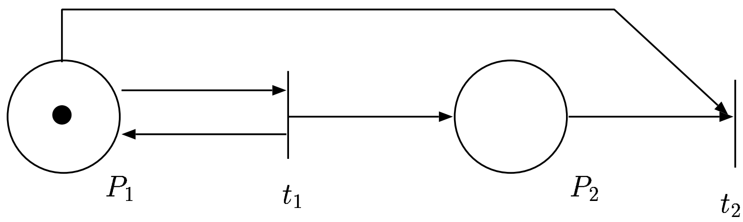
1. *depuis chaque nœud du graphe de recouvrement du réseau marqué, il existe un chemin orienté contenant un arc étiqueté par t.*
2. *chaque composante fortement connexe (c.f.c.) du graphe de recouvrement sans arc sortant contient au moins un arc étiqueté par t.*

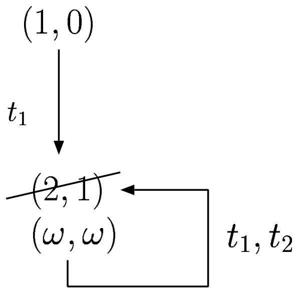
Plus généralement un RdP marqué borné est vivant si et seulement si chaque c.f.c. sans arc sortant contient au moins un arc étiqueté par toute transition $t \in T$.

Un RdP marqué borné est en situation de blocage si et seulement si chaque nœud de son graphe de recouvrement est origine d'au moins un arc.

Théorème 3.4.9. *Les conditions énoncées au théorème précédent sont seulement nécessaires pour les réseaux non bornés.*

Une transition t d'un RdP marqué non borné n'est pas vivante si le graphe de recouvrement du réseau considéré possède une composante fortement connexe (c.f.c.) sans arc sortant et sans arc étiqueté par t.





$$(1,0) \xrightarrow{t_1} (2,1) \xrightarrow{t_2} (0,0)$$

Notez que le graphe de recouvrement possède une seule c.f.c. sans arc sortant comprenant des arcs étiquetés par t_1 et t_2 ; si on oubliait le caractère non borné du RdP, on pourrait conclure que t_1 et t_2 sont vivantes mais ce n'est pas suffisant car le RdP est non borné.

D'ailleurs t_1 et t_2 sont non bornés puisque le réseau est avec blocage.